Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

SOBRE EL PROGRAMA DE HILBERT Y LA NOCION DE FORMALISMO RECURSIVO

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Francisco Tomás Pons

México, D. F. 1989

I N D I C E

1. INTRODUCCION

El programa de Hilbert propone presentar las matemáticas mediante formalismos cuya consistencia pueda ser demostrada finitariamente [Hi].

No parece que Hilbert tuviera en mente otros formalismos que los sistemas formales basados en el cálculo de predicados de primer orden o de orden superior.

En cuanto a la noción de "finitariedad", que no es originalmente una noción rigurosa, podemos recordar, para empezar, que las matemáticas finitarias no toleran el uso irrestricto del principio del tercero excluído. Así, por ejemplo, si definimos

$$\underline{a}=\begin{cases} 0, & \text{si existe un entero par mayor que 2 que no sea suma} \\ & \text{de dos primos} \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

estaremos dando una definición que no es finitaria, porque no sabemos decidir, en el estado actual de las matemáticas, si $\underline{a}=0$ o $\underline{a}=1$. En cambio, se admite como matemática finitaria la definición

$$f(\underline{n})=\begin{cases} 0, & \text{si } \underline{n} \text{ es primo} \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

puesto que para cada entero $\underline{n}$ sabemos cómo decidir si $f(\underline{n})$ es cero o uno.

Esta limitación finitaria de la aceptabilidad del principio del tercero excluído nos lleva también a una limitación en la aceptabilidad de las demostraciones por casos, o indirectas o por reducción al absurdo.

Así, desde el punto de vista finitario, no podemos tomar como cierta la afirmación "o bien todos los elementos de X tienen la propiedad P, o bien existe algún $x \in X$ que no tiene esa propiedad", a menos que podamos decidir cual de las dos opciones es la que se da. Esto muestra muy bien un primer aspecto de las matemáticas finitarias: que son constructivas. Demostrar que una cosa existe implica exhibirla.

Otra manera de ilustrar cuáles son las matemáticas finitarias consiste en recordar cómo se manipula un sistema formal, en el que tanto la parte matemática como la parte lógica están perfectamente formalizadas. Escribir la demostración de un teorema en un tal sistema consiste, en última instancia, en dar una lista de fórmulas, la última de las cuales es el teorema que se está demostrando, en la que cada miembro es un axioma lógico o específico del sistema o es una consecuencia de miembros anteriores de la lista según las reglas de inferencia del sistema; y la comprobación de que se cumplen esas condiciones no puede ser hecha de otro modo que por inspección directa, viendo si cierta parte de una expresión de la lista es la misma que cierta otra expresión de la misma lista, o si cierta expresión de la lista está en la lista de axiomas, etc. Este es el tipo de matemáticas que con mayor énfasis se califican de finitarias.

Es un hecho, sin embargo, que en los sistemas formales basados en el cálculo de predicados las fórmulas

$$(\forall \underline{x})\underline{A}(\underline{x}) \vee (\exists \underline{x})\neg \underline{A}(\underline{x})$$

son teoremas; y esas fórmulas son casos del principio del tercero excluído en su forma irrestricta. Alrededor de este punto se puede esquematizar una discusión del programa de Hilbert, como sigue:

Los constructivistas, o, con igual insistencia, Brouwer y los intuicionistas, dicen que, por lo tanto, el cálculo de predicados es inadmisible como instrumento de fundamentación o formalización. Pero Hilbert, acaudillando a los formalistas, dice que el admitir esa fórmula como postulado o teorema no tiene mayor inconveniente que admitir el imaginario i, o que admitir los números ideales en la teoría de números algebraicos, puesto que la manipulación de todos esos objetos es, en todos los casos, estrictamente finitaria. Lo único que hay que vigilar, dice Hilbert, es que en el sistema formal que se maneje no aparezcan contradicciones, esto es, que sea consistente. Y, agrega Hilbert, la demostración de la consistencia, que se hace desde fuera del sistema, debe ser, esa sí, estrictamente finitaria. Esta es, en síntesis, la parte del programa de Hilbert que interesa destacar ahora. Puede consultarse, además de [Hi], la exposición [We].

Es bien sabido que Hilbert y sus seguidores encontraron grandes dificultades en sus intentos de llevar a cabo el programa, aún en su etapa inicial, la de la aritmética de Peano de primer orden, o aritmética clásica (A.C.). Y es bien sabido, también que los trabajos de Gödel [Gö] demostraron, hasta cierto punto o en un cierto sentido, lo inútil de tales intentos. La historia está contenida implícitamente en la recopilación [He] . En ese proceso histórico se llegó a un consenso bastante amplio en el sentido de que la aritmética finitaria coincide, intuitivamente, con la aritmética recursiva primitiva (ver [Ta] , citado en [Sim]).

La enseñanza que cosechamos de esa historia es que si un sistema formal basado en el cálculo de predicados formaliza al menos la aritmética recursiva primitiva, entonces su consistencia no puede ser demostrada finitariamente (ya que Gödel mostró que esa consistencia no puede demostrarse dentro del sistema). Al respecto puede con sultarse también [Tor] .

Ahora bien, esa enseñanza, puede ser recibida con dos actitudes diferentes, al menos, podríamos decir que al gusto del consumidor.

Primera actitud. Podemos pensar, en primer lugar, que el cálculo de predicados no es un instrumento adecuado para la formalización de las matemáticas.

Segunda actitud. Podemos pensar que el cálculo de predicados es la "verdadera" lógica y es, por lo tanto, inamovible, pero que el programa finitario de Hilbert contiene una exigencia desmesurada que no se puede cumplir en toda su extensión.

La evolución que esta segunda actitud ha imprimido al programa de Hilbert se reporta en el tríptico [Si], [Sim], [Fe]. En esta exposición no nos ocuparemos de ella.

Aquí nos ocuparemos de la primera actitud. Con relación a ella no es irrelevante lo que recordaremos enseguida, que tiene que ver con el intuicionismo. En vista al programa de Hilbert, la posición intuicionista fue que la formalización de la aritmética basada en el cálculo de predicados clásicos era inaceptable, independientemente de si era consistente o no, ya que el principio del tercero excluido que aparece en él es inaceptable (ver [Br]). La filosofía intuicionista no pedía que las matemáticas fueran formalizadas. Sin embargo, surgió una lógica intuicionista, no como intento de salvar el programa de Hilbert, sino de corregir el mal uso del principio del tercero excluido. En [Gö 1] se encuentra una crítica a esa lógica, donde se muestra que, en el fondo, contiene el mismo poder deductivo para la aritmética que la lógica clásica. Esto tiene como consecuencia que el programa de Hilbert fracasa para la aritmética intuicionista formalizada en la misma medida que para la aritmética clásica. Pero lo que aquí nos interesa hacer notar es lo siguiente:

En el cálculo de predicados intuicionista, en el intento (fallido) de coartar todo mal uso del principio del tercero excluido se modifica o limita -de primera intención, al menos- la lógica proposicional misma, de manera que hay un cálculo proposicional intuicionista según el cual, por ejemplo, $\neg\neg \underline{A}$ no es equivalente a $\underline{A}$.

A esta observación se le puede añadir la siguiente: en las llamadas lógicas alternativas (las que no son el cálculo de predicados o la lógica clásica de los libros de texto) se tiende a modificar, no solamente la parte relativa a los cuantificadores, sino la misma lógica proposicional, la que sólo se refiere a los conectivos $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$; ver [Ga-Gu]. En particular, por ejemplo, en [Me-Ur] se usa la lógica relevante con la intención de cumplir con el programa de Hilbert.

Así, pues, recapitulando, la primera actitud posible frente al fracaso inicial del programa finitario de Hilbert es la de considerar que el cálculo de predicados no es el instrumento adecuado para formalizar la aritmética. Pero, en el intento de modificar ese instrumento lógico, lo más frecuente es que se afecte, no sólo lo relativo a la cuantificación, sino la lógica proposicional misma. Ver, sin embargo, [Be].

Ahora bien, en la presente exposición, dentro de esa primera actitud, pero a diferencia de lo que sucede más frecuentemente, se respeta absolutamente la lógica proposicional clásica. De modo que la hipótesis de trabajo es que la lógica proposicional es intocable pero que, en cambio, la teoría de la cuantificación al modo del cálculo de predicados debe ser desechada.

Con ese punto de vista, la exposición presente está dedicada a exponer la noción de "formalismo abierto o recursivo" como alternativa al cálculo de predicados en la fundamentación de la aritmética y el análisis, noción por medio de la cual se pueden presentar la aritmética y un análisis matemático poderoso, aunque incipiente, como un formalismo cuya consistencia puede ser demostrada finitariamente. Con esto se contribuye al programa de Hilbert entendido en un sentido amplio. En particular se presenta cierta restricción de ese formalismo, por medio de la cual podemos hacer un análisis de la A.C. desde el punto de vista de la consistencia. Es esto último lo que constituye la parte central de la exposición.

La exposición está basada en trabajos del expositor, ya sea solo o en colaboración. Está distribuida como sigue. En la sección 2 se describe la noción de <u>formalismo recursivo</u>, siguiendo [To], y se hace una pequeña incursión en el formalismo recursivo $\overline{AFR}$ (aritmética formalmente recursiva) y en el análisis matemático que permite desarrollar, mostrando como queda enunciado el teorema de Bolzano-Weierstrass. En la sección 3 se describe la $\overline{AFRR}$ (aritmética formalmente recursiva restringida) y se compara con la A.C. por medio de la introducción de ciertas "°-nociones", obteniendo así el análisis ya mencionado de la A.C. con respecto a la consistencia. Ese análisis está basado en [Ar-To], trabajo hecho en colaboración con Gustavo Arenas, y en [To], aunque el formalismo que se considera en [Ar-To] no es el mismo que se considera aquí. Es la primera vez que este análisis se expone en la presente forma con todo detalle. En la sección 4 se describe el formalismo $\overline{AFR}$ y su uso para formalizar el análisis, pero de manera muy somera. La exposición completamente detallada se encuentra en [To].

2. LA NOCION DE FORMALISMO RECURSIVO

Un formalismo recursivo $\mathcal{F}$ consta de lo siguiente:

1) un lenguaje proposicional, esto es, sin cuantificadores;

2) una colección de sistemas formales, llamados segmentos de $\mathcal{F}$, que están basados en la lógica proposicional, que tienen ese lenguaje como lenguaje común, que difieren unos de otros únicamente en sus postulados y cuya consistencia (la de cada uno de los segmentos) se demuestra finitariamente;

3) la metateoría o manipulación finitaria de la colección de segmentos de $\mathcal{F}$.

Así, pues, los símbolos, términos y fórmulas son los mismos para todos los segmentos de $\mathcal{F}$. Las fórmulas se construyen a partir de las fórmulas atómicas usando solamente $\vee$, $\wedge$, $\neg$ y $\Rightarrow$. Las variables tendrán sólo un papel secundario o auxiliar: todos los postulados de cada segmento serán fórmulas constantes, así que esos postulados deberán ser dados como esquemas; y los teoremas de cada segmento de $\mathcal{F}$ serán las fórmulas tantológicas constantes, los postulados específicos del segmento y todo lo que sea deducible de ellos por modus ponens. Eso significa que para demostrar finitariamente la consistencia de un segmento $\bar{V}$ de $\mathcal{F}$ es necesario y suficiente describir la manera de construir, para cada colección finita B de postulados de $\bar{V}$, una valuación compatible con las tablas de verdad de $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ que tenga el valor, ver (verdad) en todos los miembros de B. Esto se debe a que $\underset{\sim}{A}$ es deducible de $B (B \vdash \underset{\sim}{A})$ si y sólo si toda valuación compatible con B es compatible con $\underset{\sim}{A}$ (cosa que se demuestra finitariamente y fácilmente) y a que ninguna valuación es compatible con $\underline{A}$ y con $\neg \underline{A}$.

La exigencia, hecha en 2), de finitariedad en la demostración de la consistencia de los segmentos se respeta en 3) al permitir únicamente manipulaciones o razonamientos finitarios en la colección de dichos segmentos. Por ejemplo, no admitiremos, en general, una demostración por casos en la que se diga "primer caso": si la fórmula $\underline{A}$ no es teorema de ningún segmento de $\mathcal{F}$; segundo caso: si $\underline{A}$ es teorema de algún segmento". Una tal demostración es finitariamente admisible solamente si es posible decidir qué caso se cumple para $\underline{A}$.

El calificativo "recursivo" en el tipo de formalismos con los que trataremos se debe a que los segmentos de un tal $\mathcal{F}$ se definen recurriendo a otros segmentos, de acuerdo con los "principios" de $\mathcal{F}$. Ese calificativo no debe tomarse de ningún modo como una sugerencia de que las "funciones" que puedan aparecer en $\mathcal{F}$ deban ser recursivas, ni que se esté pensando en alguna reducción de $\mathcal{F}$ a la aritmética recursiva.

Puede suceder, y sucederá, en nuestros ejemplos, que los postulados de un segmento de $\mathcal{F}$ sean contradictorios con los de otro (aunque cada segmento debe ser finitariamente consistente). Esto no es mas que la contrapartida formal de lo que sucede en la matemática cotidiana cuando $\underline{a}$ designa algo en un cierto contexto y designa otra cosa en otro contexto.

A continuación se introducen algunas definiciones y nociones indispensables para lo que sigue. Al mismo tiempo se verá qué clase de manipulaciones finitarias de la coleccion de segmentos de un formalismo recursivo se usarán. Esto es, se verá qué aspecto puede tener la metateoría finitaria de la que se habla en 3).

Decimos que un segmento $\bar{V}$ de $\mathcal{F}$ es posterior a un segmento $\bar{U}$ del mismo, y escribimos $\bar{U} < \bar{V}$, si todo postulado de $\bar{U}$ es postulado de $\bar{V}$.

Si $\mathcal{A}$ es una afirmación interpretable en cualquier segmento de $\mathcal{F}$, o susceptible de ser verdadera o falsa en cada uno de esos segmentos, entonces escribimos

$$\bar{V}: \mathcal{A}$$

para indicar que $\mathcal{A}$ es verdadera en $\bar{V}$, o que la interpretación de $\mathcal{A}$ en $\bar{V}$ es verdadera.

Por ejemplo, $\mathcal{A}$ puede ser la afirmación "$\underline{A}$ es un teorema", simbolizada $\vdash \underline{A}$, para alguna fórmula $\underline{A}$ del lenguaje común de todos los segmentos de $\mathcal{F}$. Entonces convenimos en que la interpretación de $\vdash \underline{A}$ en $\bar{V}$ es "$\underline{A}$ es un teorema de $\bar{V}$", simbolizada $\bar{V} \vdash \underline{A}$; y entonces la expresión

$$\bar{V}: \vdash \underline{A}$$

significa exactamente" (es verdad que) $\bar{V} \vdash \underline{A}$".

Sin hacer ninguna prohibición, cabe señalar que estamos interesados en afirmaciones $\mathcal{A}$ que, como en el caso anterior, tienen la propiedad de que si $\bar{V}: \mathcal{A}$ entonces $\bar{W}: \mathcal{A}$ siempre que $\bar{V} < \bar{W}$.

Es claro que el lenguaje y la lógica de (los segmentos de) $\mathcal{F}$ no contienen los cuantificadores del cálculo de predicados. Pero nada nos priva, en la metateoría finitaria, del uso de cuantificadores en su sentido intuitivo finitario efectivo. Representaremos esos cuantificadores por $\exists^*$ y $\forall^*$.

Así, la expresión

$$\bar{V}: (\exists^* t)\, \mathcal{A}$$

significa "podemos exhibir un término, representado por $\underline{t}$, para el cual podemos demostrar finitariamente que $\bar{V}: \mathcal{A}$". Por ejemplo, $\mathcal{A}$ pue de ser la expresión $\vdash \underline{A}[\underline{t}/\underline{x}]$, y entonces escribimos

$$\bar{V}:(\exists^{*}\underline{t})[\vdash \underline{A}[\underline{t}/\underline{x}]]$$

para afirmar que podemos exhibir un término $\underline{t}$ para el cual podemos demostrar que $\bar{V} \vdash \underline{A}[\underline{t}/\underline{x}]$. Nótese que estamos prefiriendola presente notación a la notación $(\exists^{*}\underline{x})[\vdash \underline{A}]$. Esto se debe a razones estilísticas, para recalcar que $\exists^{*}$ no es el cuantificador existencial del cálculo de predicados.

Del mismo modo, $\bar{V}:(\forall^{*}\underline{t})\mathcal{A}$ significa que para cada $\underline{t}$ del dominio de $\forall^{*}$ sabemos cómo demostrar finitariamente que $\bar{V}:\mathcal{A}$.

Introducimos ahora un nuevo símbolo,

$$\mapsto$$

que usamos como sigue. La expresión

$$\bar{V}:\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$$

significa "si $\bar{V}:\mathcal{A}$, entonces $\bar{W}:\mathcal{B}$ para algún $\bar{W}$ posterior a $\bar{V}$". Esto es, para demostrar $\bar{V}:\mathcal{A}\mapsto\mathcal{B}$ necesitamos, suponiendo conocida una demostración finitaria de $\bar{V}:\mathcal{A}$, exhibir un cierto $\bar{W}$ tal que $\bar{V}<\bar{W}$ y demostrar finitariamente que $\bar{W}:\mathcal{B}$.

Un caso particular es

$$\bar{V}: \mapsto \mathcal{C}$$

que significa que podemos demostrar finitariamente que $\bar{W}:\mathcal{C}$ para algún $\bar{W}$ posterior a $\bar{V}$.

Otro caso particular es cuando $\bar{W}$ es $\bar{V}$. No parece tener ninguna utilidad distinguir este caso particular con alguna notación especial.

Finalmente, convenimos en que la expresión

$$\mathcal{F}:\mathcal{A}$$

significa que $\bar{V}:\mathcal{A}$ para cada segmento $\bar{V}$ de $\mathcal{F}$. En particular, $\mathcal{A}$ puede ser de la forma $\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}$.

Los resultados interesantes de $\mathcal{F}$ son (al menos en nuestros ejemplos) afirmaciones de la forma $\mathcal{F}:\mathcal{A}$.

En cuanto a notación, convenimos en que

$$\overline{V}:\mathcal{A}\,\&\,\mathcal{B}$$

significa $\overline{V}:\mathcal{A}$ y $\overline{V}:\mathcal{B}$. Usamos el signo

$$\equiv$$

entre dos expresiones para indicar que una representa a la otra, o que ambas representan lo mismo. Se usará para símbolos, términos, fórmulas, afirmaciones cualesquiera, colecciones, etc.

Para ilustrar el alcance de la noción de formalismo recursivo y el funcionamiento del tipo de metateoría que se acaba de describir daremos, adelantándonos, un ejemplo relativo al formalismo $\overline{\mathrm{AFR}}$ que se describe en la sección 4. Consideremos la siguiente forma del teorema de Bolzano-Weierstrass:

Para cualquier $\varphi(\underline{x})$,

$$\overline{\mathrm{AFR}}:(\varphi(\underline{x}) \in Q'(\underline{x}) \;\&\; (\forall^{*}\underline{n})\,[\vdash \alpha \leq \varphi(n) \leq \beta\,]$$

$$\Rightarrow\; (\exists^{*}\overline{q}(\underline{x}))\,[(\forall^{*}\underline{n})[\overline{q}(n) \in N \;\&\; \vdash \overline{q}(S(\underline{n})) > \overline{q}(n)]$$

$$\&\; \varphi(\overline{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x})]$$

Esta es una afirmación que se puede demostrar en $\overline{\mathrm{AFR}}$. Para saber el significado preciso de $\varphi(\underline{x}) \in Q'(\underline{x})$, $\overline{q}(\underline{n}) \in N$ y $\varphi(\overline{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x})$ debemos esperar hasta la sección 4. Pero es adivinable y verosímil, y es cierto, que la afirmación puede expresarse en palabras como:

"Para cualquier segmento $\overline{V}$ de $\overline{\mathrm{AFR}}$ (y cualquier $\varphi(\underline{x})$), si es cierto en $\overline{V}$ que $\varphi(\underline{x})$ es una sucesión de racionales en $[\alpha, \beta]$, entonces para un cierto $\overline{W} > \overline{V}$, podemos exhibir cierto término $\overline{q}(\underline{x})$ que es una sucesión estrictamente creciente de $\overline{W}$-números y para la cual podemos demostrar, en $\overline{W}$, que $\varphi(\overline{q}(\underline{x}))$ es una sucesión fundamental".

En otras palabras, quizá seremos incapaces de demostrar que $\overline{V}: \varphi(\overline{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x})$ para alguna sucesión creciente de índices $\overline{q}(\underline{x})$ en el mismo segmento $\overline{V}$; pero podemos añadir a $\overline{V}$, de acuerdo con los principios de $\overline{\text{AFR}}$, algunos postulados, finitariamente consistentes con los de $\overline{V}$, que nos den un $\overline{W}$ tal que $\overline{W}: \varphi(\overline{q}(\underline{x})) \in R(\underline{x})$ para algún $\overline{q}(\underline{x})$ que satisfaga

$$\overline{W}: (\forall^* \underline{n})\left[\overline{q}(\underline{n}) \in N \ \& \ \vdash \overline{q}(S(\underline{n})) > \overline{q}(\underline{n})\right]$$

o equivalentemente, en otra notación,

$$(\forall^* \underline{n})\left[\overline{q}(\underline{n}) \in N_{\overline{W}} \ \& \ \overline{W} \vdash \overline{q}(S(\underline{n})) > \overline{q}(\underline{n})\right]$$

Con el fin de describir con un poco mas de detalle cómo funciona $\overline{\text{AFR}}$ podemos adelantar que la expresión $\underline{a}$ $N_{\overline{W}}$, que se lee "$\underline{a}$ es un $\overline{W}$-número", significará que

$$\overline{W} \vdash \underline{a} = \underline{c}_1 \vee \ldots \vee \underline{a} = \underline{c}_r$$

para ciertos "numerales" $\underline{c}_i$, donde r no es fijo (y los numerales son 0, S(0), S(S(0)),...). Según esto, dar efectivamente un $\overline{W}$-número no significa exhibir un numeral, sino un término $\underline{a}$ para el cual podamos demostrar la afirmación anterior, sin que sea necesario que podamos demostrar $\overline{W} \vdash \underline{a} = \underline{c}_i$ para algún i. Esto significa que un $\overline{W}$-número no es, en general, "computable". En este sentido podemos decir que el teorema de Bolzano-Weierstrass de $\overline{\text{AFR}}$ es efectivo, como es efectivo, en general, el análisis matemático desarrollado en $\overline{\text{AFR}}$, puesto que se da efectivamente la sucesión $\overline{q}(\underline{x})$. Si se piensa que la palabra "efectivo" es demasiado reminiscente de "computable", y si se tiene en cuenta que la sucesión $\overline{q}(\underline{x})$ que se da efectivamente no es, en general, computable, podemos usar "exhibitorio" en lugar de "efectivo". Podemos decir entonces que el análisis matemático basado en $\overline{\text{AFR}}$ es, según se puede ver en [To], exhibitorio, puesto que exhibe los segmentos y los términos que afirma que existen.

Se tiene así, grosso modo, una justificación finitaria de teoremas del análisis que en algún momento quizá llegó a pensarse que no tenían tal justificación. Algo del mismo estilo es lo que se describe en [Sim], § 3. No estamos en condiciones de comparar los dos tipos de justificación ahora.

3. EL FORMALISMO RECURSIVO $\overline{AFRR}$ (ARITMETICA FORMALMENTE RECURSIVA RESTRINGIDA). UN ANALISIS DE LA A.C. (ARITMETICA CLASICA O ARITMETICA DE PEANO DE PRIMER ORDEN) EN CUANTO A CONSISTENCIA.

3.1. El lenguaje de (los segmentos de) $\overline{AFRR}$. Los símbolos son 0, E, =, la coma, los paréntesis, las variables, los operadores y los conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$. Las variables, representadas por $\underline{w}$, $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, $\underline{x}_1, \ldots$, son los miembros de una lista infinita. Para cada entero positivo n debemos tener una lista infinita de símbolos, que son los operadores de grado n. Los operadores se representan por $\overline{f}$, $\overline{g}$, $\overline{f}_1$, etc. Entre los operadores tenemos algunos que llamamos distinguidos. Son el operador S, de grado 1, los operadores $+$, $\cdot$ y $\dot{-}$, de grado 2, y los operadores pred, α y β, de grado 1.

Los términos de $\overline{AFRR}$, representados por $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{f}$, $\underline{a}_1, \ldots$, se definen como sigue: 1) 0 es un término; 2) las variables son términos; 3) si f es un operador de grado n, y si $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ son términos, entonces $\overline{f}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ es término; y si $\overline{f}$ no es distinguido entonces $E\overline{f}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1})$ también es término (donde hay que notar el último índice n-1, siendo $\overline{f}$ de grado n).

Según lo anterior, las expresiones de la lista

$$0,\ S(0),\ S(S(0)), \ldots$$

son términos, a los cuales denominaremos numerales. También son términos las expresiones $+(\underline{a}, \underline{b})$, $\cdot(\underline{a}, \underline{b})$, $\dot{-}(\underline{a}, \underline{b})$, pred $(\underline{a})$, $\alpha(\underline{a})$, $\beta(\underline{a})$ y $S(\underline{a})$, siempre que $\underline{a}$ y $\underline{b}$ sean términos.

Usamos las notaciones auxiliares siguientes:

$$S^{\circ}(0) \equiv 0,\ S^1(0) \equiv S(0),\ S^2(0) \equiv S(S(0)) \text{. etc.}$$

$$\underline{a}+\underline{b} \equiv +(\underline{a},\underline{b})$$

$$\underline{a}\cdot\underline{b} \equiv \cdot(\underline{a},\underline{b})$$

$$\underline{a}\dot{-}\underline{b} \equiv \dot{-}(\underline{a},\underline{b})$$

Las fórmulas de $\overline{AFRR}$, representadas por $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{A}_1$, $\underline{A}'$, etc., se definen como sigue: 1) si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son términos, entonces $\underline{a}=\underline{b}$ es una fórmula (atómica); 2) si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son fórmulas, entonces $\neg(\underline{A})$, $(\underline{A}) \vee (\underline{B})$, $(\underline{A}) \wedge (\underline{B})$ y $(\underline{A}) \Rightarrow (\underline{B})$ son fórmulas. Suprimiremos paréntesis de la manera habitual.

3.2. Los principios de $\overline{AFRR}$ y algunas observaciones. Los segmentos de $\overline{AFRR}$, todavía no definidos, serán sistemas formales basados en el cálculo proposicional cuyo lenguaje es el que se acaba de describir. Como ya se ha dicho, todos los postulados de cada segmento serán fórmulas constantes; y serán teoremas del segmento las fórmulas constantes tautológicas, los postulados y todo lo que se deduzca a partir de ellos por uso reiterado de la inferencia *modus ponens*. Así, pues, no necesitamos incluir entre los postulados a las fórmulas constantes tautológicas (postulados lógicos).

Las condiciones que hacen que un tal sistema formal sea un segmento de $\overline{AFRR}$ estarán dadas por medio de los principios que se enunciarán a continuación.

Pero antes necesitamos introducir cierta terminología.

Para cada segmento $\overline{V}$ de $\overline{AFRR}$ y cada término $\underline{a}$ decimos que $\underline{a}$ es un $\overline{V}$-número, y escribimos $\underline{a} \in N_{\overline{V}}$, si podemos encontrar numerales $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_r$, con r no fijo, para los cuales podemos demostrar que

$$\overline{V} \vdash \underline{a}=\underline{c}_1 \vee \dots \vee \underline{a}=\underline{c}_r$$

Como todos los teoremas de cada segmento son fórmulas constantes es claro que todos los $\overline{V}$-números son términos constantes.

Decimos que un término $\underline{g}$ es $\overline{V}$-función de las variables $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$, y escribimos $\underline{g} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$, o bien $\underline{g} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$, si

$\underline{g}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] \in N_{\overline{V}}$ para cada substitución de las variables $\underline{x}_i$ por numerales $\underline{a}_i$. Si $\underline{g} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$ es claro que en $\underline{g}$ no está presente ninguna variable distinta de las $\underline{x}_i$.

Si $\underline{g}$ es un término, hemos representado por $\underline{g}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]$, o por $\underline{g}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] \ldots [\underline{a}_n/\underline{x}_n]$, el resultado de substituir, en $\overline{g}$, las variables $\underline{x}_i$ por términos $\underline{a}_i$. Ahora bien, si $\overline{f}$ es un operador de grado n y $\underline{g}$ es el término $\overline{f}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ es claro que

$$\overline{f}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)[\underline{a}_i/\underline{x}_i] \equiv \overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n);$$

pero si $\underline{g}$ no es de esa forma evitamos cuidadosamente el uso de una expresión auxiliar $\underline{g}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ para representar $\underline{g}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]$ porque tal uso podría inducir a pensar que el término $\underline{g}$ es un operador, cosa que no sucede nunca.

Podemos ahora exponer los principios PR_R1, PR_R2 y PR_R3 de $\overline{AFRR}$.

PR_R1. El sistema formal que tiene el lenguaje y la lógica que se acaba de describir, y cuyos únicos postulados (no lógicos) son los casos de los <u>esquemas de postulados iniciales</u> EPI_R1, EPI_R2, EPI_R3 y EPI_R4 y de los <u>esquemas de postulados básicos</u> EPB_R1-12 que se escriben a continuación es un segmento de $\overline{AFRR}$, el <u>segmento básico</u>, representado por B_R.

Los EPI_R son los siguientes:

EPI_R1. $\underline{a}=\underline{a}$, para cada numeral $\underline{a}$

EPI_R2. $\neg\, \underline{a}=\underline{b}$, para cada dos numerales, $\underline{a}$ y $\underline{b}$, diferentes

EPI_R3. $\underline{a}=\underline{b} \quad \underline{b}=\underline{a}$, siempre que $\underline{a}$ y $\underline{b}$ sean términos constantes

EPI_R4. $\underline{a}=\underline{b} \wedge \underline{f}=\underline{g} \Rightarrow \underline{f}'=\underline{g}$, siempre que $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, sean términos constantes y que $\underline{f}'$ se obtenga de $\overline{f}$ por substitución de una presencia de $\underline{a}$ por $\underline{b}$.

Los EPB_R, algunos de los cuales, por razones técnicas que se harán patentes mas adelante, están expresados de manera poco habitual, son los siguientes esquemas, para cualesquiera numerales $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$:

EPB_R1. $\underline{a}+0=\underline{a}$

EPB_R2. $S(a+b)=\underline{c} \Rightarrow \underline{a}+S(\underline{b})=\underline{c}$

EPB_R3. $\underline{a}\cdot 0=0$

EPB_R4. $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}=\underline{c} \Rightarrow a\cdot S(\underline{b})=\underline{c}$

EPB_R5. $\underline{\text{pred}}\ (0)=0$

EPB_R6. $\underline{\text{pred}}\ (S(\underline{a}))=\underline{a}$

EPB_R7. $\underline{a}\dot{-}0=\underline{a}$

EPB_R8. $\underline{\text{pred}}(\underline{a}\dot{-}\underline{b})=\underline{c} \Rightarrow a\dot{-}S(\underline{b})=\underline{c}$

EPB_R9. $\alpha(0)=0$

EPB_R10. $\alpha(S(\underline{a}))=S(0)$

EPB_R11. $\beta(0)=S(0)$

EPB_R11. $\beta(S(\underline{a}))=0$

Dado el punto 2) en la definición de los formalismos recursivos, es claro que nos comprometemos tácitamente a demostrar finitariamente la consistencia de $\overline{B}_R$.

Por los principios siguientes será claro que todos los postulados de B_R serán postulados de todos los segmentos de $\overline{AFRR}$. Esto es, todos los segmentos de $\overline{AFRR}$ serán posteriores a $\overline{B}_R$.

PR_R2. Si $\overline{V}$ es un segmento de $\overline{AFRR}$ y $\underline{r}\in N_{\overline{V}}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\ y)$, y si $\overline{f}$ es un operador de grado n+1 <u>nuevo</u> para $\overline{V}$ (es decir, que no aparece en ningún postulado de $\overline{V}$ que no sea un caso de los EPI_R1-4), entonces también es un <u>segmento</u> de $\overline{AFRR}$ el sistema formal que se obtiene al añadir a $\overline{V}$, como nuevos postulados, todos los casos, para numerales $\underline{a}_i$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, de los esquemas (A), (B), (C) siguientes;

(A) $\underline{r}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{y}]=\underline{c} \Rightarrow \overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b})=\underline{c}$

(B) $\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b})=0 \Rightarrow E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=S(0)$

(C) $E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=0 \quad \vee \quad E\overline{f}\ (\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=S(0)$

Como antes, ahora nos comprometemos a demostrar finitariamente, a partir de la consistencia de $\overline{V}$, que el nuevo segmento que se obtiene al añadir como nuevos postulados los casos de (A), (B), (C), también es consistente.

PR_R3. Si:

1) $\overline{U}$ es un segmento de $\overline{AFRR}$, $\overline{g}$ un operador no distinguido de grado n+1 y $\overline{g}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{y}) \in N_{\overline{U}}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{y})$;

2) $\underline{h}_i$, $\underline{k}_i$, $\underline{m}_j$ son $\overline{U}$-funciones de las variables $\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_q$ (diferentes de $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,y$), para $i \equiv 1,\ldots,p$, $j \equiv 1,\ldots,n$;

3) tenemos demostrado, para cualesquiera numerales d_1, $\ldots,\underline{d}_q,\underline{c}$, que

$$\overline{U} \vdash (\bigvee_{i\equiv 1}^{p} \neg\, \underline{h}_i=\underline{k}_i \quad \vee \neg\overline{g}(\underline{m}_j,\underline{c})=0)[\underline{d}_j/\underline{z}_j];$$

4) podemos demostrar finitariamente que $\overline{U}$ es consistente con el esquema (D) siguiente:

(D) $(\bigvee_{i\equiv 1}^{p} \neg\, \underline{h}_i=\underline{k}_i \ \vee\ \neg E\overline{g}(\underline{m}_j)=S(0))[\underline{d}_j/\underline{z}_j]$,

para todas las q-adas $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_q$ de numerales;

entonces también es un segmento de $\overline{AFRR}$ el sistema formal que se obtiene de añadir a $\overline{U}$, como nuevos postulados, todos los casos de (D).

Aquí, según 4), la consistencia debe ser probada en cada aplicación del principio. Un ejemplo muy simple en que se satisface

4) se dará después de la demostración de la consistencia para $PR_R 1$ y $PR_R 2$.

3.2.1. Observación. La razón para expresar (A) en forma poco habitual, como antes también EPB_R 2,4,8, es que en algún momento en la demostración de la consistencia será conveniente que todos los postulados específicos de cualquier segmento puedan ser expresados en la forma

$$\neg \underline{a}_1 = \underline{b}_1 \vee \ldots \vee \neg \underline{a}_s = \underline{b}_s \vee \underline{c}_1 = \underline{d}_1 \vee \ldots \vee \underline{c}_r = \underline{d}_r,$$

donde cada $\underline{d}_i$ es un numeral y cada $\underline{c}_i$ es lo que, en su momento, llamaremos un "término primitivo". Esto también explica la forma de (D) en $PR_R 3$.

3.2.2. Observación. Como se desprende de $PR_R 2$ y $PR_R 3$, se quiere que, por medio de los postulados, $E\overline{f}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ adquiera hasta donde sea posible el significado "función que vale 1 o 0 según que exista o no un y tal que $\overline{f}(\underline{x}_i,\underline{y})=0$". Así, por ejemplo, (C) de $PR_R 2$ nos asegura que $E\overline{f}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \in N_{\overline{W}}(x_i)$, si $\overline{W}$ es el segmento que se obtiene de $\overline{V}$ al añadir los esquemas de postulados (A), (B), (C). Pero entonces se puede pensar que sería mas natural y simple manejar E como un transformador que, a partir de $\underline{r}$, nos diera un término $E_{\underline{y}}\underline{r}$ en lugar de $E\overline{f}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, sin necesidad, pues, de pasar por $\overline{f}$. Sería, en efecto, mas natural y simple hacer esto si no fuera porque entonces no sabríamos como demostrar la consistencia del formalismo. La dificultad, expresada en términos de $\overline{AFRR}$, es la siguiente: es posible, de hecho, para numerales $\underline{a}_i$, que hayamos demostrado que

$$\overline{T} \vdash \overline{g}_1(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b}) = \overline{g}_2(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b})$$

para cada numeral $\underline{b}$, pero que no sepamos si se puede demostrar que en $\overline{T}$ es un teorema la fórmula

$$\overline{Eg_1}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=\overline{Eg_2}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$$

La presencia de este tipo de fenómeno está en la raíz del análisis de la A.C. desde el punto de vista de la consistencia que se expondrá mas adelante.

3.2.3. Observación. Si, en $PR_R 3$, ponemos $\underline{A} \equiv \bigvee_{i\equiv 1}^{p} \neg\, \underline{h}_i=\underline{k}_i$, podemos escribir la condición 3) como $\overline{U} \vdash (\overline{g}(\underline{m}_j,\underline{c})=0 \Rightarrow \underline{A})[\underline{d}_j/\underline{z}_j]$, para cada numeral $\underline{c}$ y podemos escribir (D) como

$$(E\overline{g}(\underline{m}_j)=S(0) \Rightarrow \underline{A})[\underline{d}_j/\underline{z}_j]$$

Recordando entonces lo que se acaba de decir sobre el significado de $E\overline{g}(\underline{m}_j)$ vemos claramente que $PR_R 3$ es un sucedáneo en $\overline{AFRR}$ de la tan usada $\exists$-regla del cálculo de predicados, donde $E\overline{g}(\underline{m}_j)=S(0)$ substitu ye a $(\exists\underline{x})(\overline{g}(\underline{m}_j,\underline{x})=0)$. En $\overline{AFRR}$ la regla toma, a través de $PR_R 3$, la forma siguiente, en lenguaje común y de manera aproximada: "si $\overline{g}(\underline{m}_j,\underline{c})=0 \Rightarrow \underline{A}$ para cada $\underline{c}$, entonces podemos postular $E\overline{g}(\underline{m}_j)=S(0) \Rightarrow \underline{A}$, siempre que podamos demostrar que esta postulación es consistente".

3.2.4. Será muy frecuente tener demostrado

$$\overline{V} \vdash \underline{A}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]$$

para cualesquiera numerales $\underline{a}_i$, $i \equiv 1,\ldots,n$. Siempre que esto suceda sabremos que lo mismo es cierto para $\underline{a}_i \in N_{\overline{V}}$. En efecto, si esto último sucede tendremos

(0) $\qquad \overline{V} \vdash \underline{a}_i=\underline{c}_{i,1} \vee \ldots \vee \underline{a}_i=\underline{c}_{i,r(i)}$

para ciertos $r(i)$, $i \equiv 1,\ldots,n$, donde los $\underline{c}_{i,j}$ son numerales. De $\overline{V} \vdash \underline{A}[\underline{c}_{i,j}/x_i]$ podemos entonces deducir, por casos, que $\overline{V} \vdash \underline{A}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]$ para nuestros $\underline{a}_i \in N_{\overline{V}}$. Esto se expresa como lo que llamamos <u>meta-teorema de inducción</u>:

Metateorema de inducción. Si $\overline{V}\vdash \underline{A}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]$ para cualesquiera numerales $\underline{a}_i$, lo mismo suceda siempre que $\underline{a}_i \in N_{\overline{V}}$.

3.2.5. Observación. Otra afirmación que se demuestra de manera parecida pero que no es consecuencia del metateorema de inducción es la siguiente:

Si $\underline{f} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, entonces $\underline{f}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] \in N_{\overline{V}}$ siempre que $\underline{a}_i \in N_{\overline{V}}$.

La afirmación es cierta para numerales por definición. Si tenemos (0) como en 3.2.4. tendremos, para

$J \equiv (j(1),\ldots,j(n))$, con $1 \leq j(i) \leq r(i)$ para cada i,

$$\overline{V}\vdash \underline{f}[\underline{c}_{i,j(i)}/\underline{x}_i] = \underline{d}_{J,1} \vee \ldots \vee \underline{f}[\underline{c}_{i,j(i)}/\underline{x}_i] = \underline{d}_{J,t(J)},$$

para cierto $t(J)$ y ciertos numerales $\underline{d}_{J,k}$. De donde, si

$$\{\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_s\} \equiv \bigcup_J \{\underline{d}_{J,1},\ldots,\underline{d}_{J,t(J)}\},$$

tenemos, para cada J,

$$\overline{V}\vdash \underline{f}[\underline{c}_{i,j(i)}/\underline{x}_i] = \underline{d}_1 \vee \ldots \vee \underline{f}[\underline{c}_{i,j(i)}/\underline{x}_i] = \underline{d}_s$$

Procediendo por casos obtenemos lo que se desea:

$$\overline{V}\vdash \underline{f}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = \underline{d}_1 \vee \ldots \vee \underline{f}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = \underline{d}_s$$

3.2.6. Observación. Una consecuencia de la observación anterior es que la composición de funciones es función: si $\underline{f} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_j)$ y $\underline{g}_j \in N_{\overline{V}}(\underline{y}_i)$, para $j = 1,\ldots,n$, entonces $\underline{f}[\underline{g}_j/\underline{x}_j] \in N_{\overline{V}}(\underline{y}_i)$.

Otra observación, todavía más simple: si $\underline{r} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$ y $\overline{V}\vdash (\underline{r}=\underline{s})[\underline{a}_i/\underline{x}_i]$ para cualesquiera numerales $\underline{a}_i$, entonces $\underline{s} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$. Una consecuencia es, por ejemplo, que en $PR_R 2$ el término $\overline{F}(x_i, \underline{y})$ pasa a ser $\overline{W}$-función de las $\underline{x}_i$ y $\underline{y}$ en el nuevo segmento que se obtiene de agregar a $\overline{V}$ los esquemas de postulados (A), (B), (C).

3.2.7. Observación. Las propiedades de las funciones bien conocidas que aparecen en los EPB_R se demuestran fácilmente para numerales, adaptando las demostraciones de cualquier exposición de la aritmética recursiva primitiva, por ejemplo [Go]. Estas propiedades se pueden demostrar para $\overline{B}_R$ y continuar siendo ciertas en todos los segmentos de $\overline{AFRR}$, puesto que son posteriores a B_R. Pero en cada segmento $\overline{V}$ esas propiedades pasarán a ser válidas también para los $\overline{V}$-números, según el metateorema de inducción. Tendremos, por ejemplo

$\overline{AFRR}: \vdash \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$, para cualesquiera numerales $\underline{a}$, $\underline{b}$ o, si $\forall^*$ tiene como dominio los numerales,

$$\overline{AFRR}: \ (\forall^* \underline{a},\underline{b})[\vdash \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}],$$

que significa

$\overline{V}: (\forall^* \underline{a},\underline{b})[\vdash \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+a]$, para cada segmento $\overline{V}$ de $\overline{AFRR}$, o lo que es lo mismo,

$(\forall^* \underline{a},\underline{b})[\overline{V} \vdash \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}]$, para cada $\overline{V}$

lo que también implica, por el principio de inducción,

$\overline{V} \vdash \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$, para cada $\overline{V}$, para cualesquiera $\underline{a} \in N_{\overline{V}}$, $\underline{b} \in N_{\overline{V}}$.

3.3. Demostración general de la consistencia de $\overline{AFRR}$.

Dado cualquier segmento $\overline{V}$ de $\overline{AFRR}$ tenemos una sucesión

$$\overline{B}_R \equiv \overline{V}_0 < \overline{V}_1 < \ldots < \overline{V}_t \equiv \overline{V}$$

de segmentos tal que cada $\overline{V}_{i+1}$ se obtiene de $\overline{V}_i$ por aplicación de PR_R2 o PR_R3, adjuntando postulados de los tipos (A), (B), (C) o del tipo (D). Cada vez que el paso de $\overline{V}_i$ a $\overline{V}_{i+1}$ se hace por PR_R3 la consistencia de $\overline{V}_{i+1}$ debe haberse demostrado finitariamente a partir de la de $\overline{V}_i$, según la condición 4) de ese principio. Esto no es, pues, algo que debamos demostrar en general. Pero debemos demostrar en general que si el paso de $\overline{V}_i$ a $\overline{V}_{i+1}$ es por PR_R2, entonces la consistencia de $\overline{V}_{i+1}$ se sigue finitariamente de la de $\overline{V}_i$. También debemos demostrar finitariamente la consistencia de $\overline{B}_R$. Esto es lo que entendemos por demostración general de la consistencia de $\overline{AFRR}$.

Con ese fin empezamos por definir los <u>términos primitivos</u> de $\overline{AFRR}$. Decimos, en primer lugar, que son <u>primitivos</u> los términos de la forma $\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ en los que $\overline{f}$ es un operador de grado n (distinguido o no) diferente de S y los $\underline{a}_i$ son numerales. Si, además, $\overline{f}$ no es distinguido, entonces también decimos que son <u>primitivos</u> los términos $E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{n-1})$ en los que $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{n-1}$ son numerales. Llamamos <u>identificación</u> a cualquier fórmula atómica $\underline{b}=\underline{c}$ en la que $\underline{b}$ es un término primitivo y $\underline{c}$ es un numeral. Una colección D de identificaciones es <u>admisible</u> si no contiene dos identificaciones, $\underline{b}=\underline{c}_1$ y $\underline{b}=\underline{c}_2$, en las que el primer miembro es el mismo pero los numerales $\underline{c}_1$ y $\underline{c}_2$ no son el mismo. Desde ahora sólo consideraremos colecciones finitas admisibles de identificaciones. Para una tal D definimos simultáneamente cierta colección N_D de términos constantes, cierta función $\#_D$ de N_D en el conjunto de los numerales y una valuación W_D (compatible con $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$) asociada a ellas, definida en las fórmulas constantes, como sigue. Consideramos cualquier término constante $\underline{d}$ de $\overline{AFRR}$ y, hacemos, si podemos, la operación de substituir, para alguna identificación $\underline{b}=\underline{c}$ de D, una presencia de $\underline{b}$ en $\underline{d}$ por $\underline{c}$; con el resultado obtenido hacemos si es posible, otra operación de este tipo, y así sucesivamente, hasta obtener un $\underline{d}'$ con el cual no es posible hacer ninguna otra operación del mismo tipo. La clave en todo esto es que el $\underline{d}'$ así obtenido es independiente del orden en que se hayan podido efectuar esas operaciones. Esta es una afirmación de tipo standard, fácil de comprobar. Habiendo obtenido de este modo $\underline{d}'$ a partir de $\underline{d}$ procedemos como sigue. Si $\underline{d}'$ es un numeral, y sólo en este caso, ponemos

$$\underline{d} \in N_D \quad y \quad \#_D(\underline{d}) \equiv \underline{d}'$$

En caso contrario $\underline{d}$ no pertenece a la colección N_D. Definimos ahora W_D empezando, para términos constantes $\underline{d}_1$ y $\underline{d}_2$, con

$$W_D(\underline{d}_1 = \underline{d}_2) \equiv \begin{cases} \underline{\text{ver}}, \text{ si } \underline{d}_1 \in N_D,\ \underline{d}_2 \in N_D \text{ y} \\ \qquad \#_D(\underline{d}_1) \equiv \#_D(\underline{d}_2) \\ \underline{\text{fal}}, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

y extendiendo W_D a todas las fórmulas constantes por medio de las tablas de verdad de $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$.

Nos referimos a W_D como a la D-valuación.

Tenemos:

3.3.1. Observación. Toda D-valuación es compatible con todos los casos de EPI_R1-4.

Lo comprobaremos en la situación menos trivial, un caso de EPI_R-4,

$$\underline{a}=\underline{b} \quad \wedge \quad \underline{f}=\underline{g} \Rightarrow \underline{f}'=\underline{g}$$

Si $W_D(\underline{a}=\underline{b}) \equiv W_D(\underline{f}=\underline{g}) \equiv \underline{\text{ver}}$, tenemos que $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$ pertenecen a N_D y que $\#_D(a) \equiv \#_D(b)$, $\#_D(f) \equiv \#_D(g)$. Consideremos cualquier presencia de $\underline{a}$ en $\underline{f}$ y substituyámosla por $\underline{b}$, obteniendo $\underline{f}'$. Haciendo, en esa presencia de $\underline{a}$ en $\underline{f}$ y en la correspondiente presencia de $\underline{b}$ en $\underline{f}'$, sucesivamente todas las substituciones posibles de presencias de $\underline{b}_i$ por $\underline{c}_i$, para todas las identificaciones $\underline{b}_i=\underline{c}_i$ de D, esa presencia de $\underline{a}$ y esa presencia de $\underline{b}$ quedan substituidas finalmente por el mismo numeral, que es $\#_D(\underline{a})$ y es $\#_D(\underline{b})$. Así, pues, a partir de $\underline{f}$ y de $\underline{f}'$ llegamos a un mismo término, que denotaremos $\underline{f}_1$, y es claro entonces que

$$\#_D(\underline{f}') \equiv \#_D(\underline{f}_1) \equiv \#_D(\underline{f}) \equiv \#_D(\underline{g})$$

y que, por lo tanto, $W_D(\underline{f}'=\underline{g}) \equiv$ ver, como se quería demostrar.

Con la idea de demostrar la consistencia de $\overline{B}_R$ consideremos ahora cualquier colección finita B_o de sus postulados. Tenemos $B_o \equiv B'_o \cup B''_o$, donde B'_o consta de casos de EPI_R1-4 y B''_o de casos de EPB_R1-12. En vista de la observación anterior será suficiente construir una D tal que W_D sea compatible con (todos los miembros de) B''_o. Empezamos con $D_o \equiv \emptyset$. Añadimos a D_o todos los casos de EPB_R1 que pertenecen a B''_o, obteniendo D_1. Cada vez que tenemos, para un numeral $\underline{a}$,

$$\underline{a}+0=\underline{a} \in B''_o$$
$$S(\underline{a}+0)=S(\underline{a}) \Rightarrow \underline{a}+S(0)=S(\underline{a}) \in B''_o$$
$$\ldots$$
$$S(\underline{a}+S^m(0))=S^{m+1}(\underline{a}) \Rightarrow \underline{a}+S^{m+1}(0)=S^{m+1}(\underline{a}) \in B''_o$$
$$S(\underline{a}+S^{m+1}(0))=S^{m+2}(\underline{a}) \Rightarrow \underline{a}+S^{m+2}(0)=S^{m+2}(\underline{a}) \notin B''_o$$

añadimos a D_1 todas las identificaciones $\underline{a}+S^i(0)=S^i(\underline{a})$ para $i \equiv 1, \ldots, m+1$, obteniendo D_2. Añadimos a D_2, como nuevas identificaciones, todos los casos de EPB_R3 que pertenecen a B''_o, obteniendo D_3. Procedemos con EPB_R4 de manera parecida a como se ha procedido con EPB_R2, y con EPB_R5,6 y 7 como se ha procedido con EPB_R1 y 3, y así sucesivamente hasta obtener D_{12}. Tomamos $D \equiv D_{12}$ y no es difícil comprobar que W_D es compatible con B''_o.

Debemos ahora considerar un paso de $\overline{V}_i$ a $\overline{V}_{i+1}$ por medio de PR_R2, suponiendo demostrada finitariamente la consistencia de $\overline{V}_i$. Como no podemos suponer nada sobre la particular manera finitaria como se ha demostrado esa consistencia es útil la observación general siguiente.

3.3.2. Lema. $\overline{V}$ es finitariamente consistente si y sólo si para cada colección finita B de postulados de $\overline{V}$ existe una colección finita de identificaciones D tal que W_D es compatible con B.

Demostración. La demostración será finitaria, claro está. En un sentido la afirmación es trivial. Supongamos que la consistencia de $\overline{V}$ se ha demostrado finitariamente, lo que significa que para cada B se sabe cómo obtener una valuación G compatible con ella. Observamos que todo postulado de $\overline{V}$ que no sea un caso de EPI_R1-4 se puede expresar canónicamente como

(*) $$\neg\, \underline{a}_1=\underline{b}_1 \vee \ldots \vee \neg\, \underline{a}_r=\underline{b}_r \vee \underline{c}_1=\underline{d}_1 \vee \ldots \vee \underline{c}_s=\underline{d}_s$$

para ciertos r y s que pueden ser 0 (no ambos a la vez), donde los $\underline{a}_i$ y $\underline{b}_i$ son términos constantes, los $\underline{c}_i$ son términos primitivos y los $\underline{d}_i$ son numerales.

Consideramos ahora cualquier colección finita de postulados específicos de $\overline{V}$. Ponemos $B \equiv B' \cup B''$, donde B' es la colección de los miembros de B que son casos de EPI_R1-4 y B" es su complemento. Tomamos una lista

(**) $$\underline{c}_1'=\underline{d}_1', \ldots, \underline{c}_t'=\underline{d}_t'$$

de todos los $\underline{c}_i'=\underline{d}_i'$ que aparecen, no precedidos de $\neg$, en algún miembro de B" que esté expresado en la forma (*). Para cada colección admisible D' de identificaciones que son miembros de (**) hacemos lo siguiente: cada vez que $\neg\,\underline{a}'=\underline{b}'$ aparezca en un miembro de B" y que se tenga $\#_{D'}(\underline{a}') \equiv \#_{D'}(\underline{b}')$ añadimos a B' una colección finita de casos de EPI_R1-4 para obtener una B_1' que nos permita demostrar $D' \cup B_1' \cup B'' \vdash \underline{a}'=\underline{b}'$. Esto es posible porque los EPI_R1-4 son los postulados de la igualdad. La comprobación es sencilla.

Cambiando la notación, hagamos que B' sea la unión de todos esos B_i'. Supongamos ahora que G es cualquier valuación dada compatible con B. Consideramos la colección D de miembros $\underline{c}_i'=\underline{d}_i'$ de (**) tales que

$$G(\underline{c}_i'=\underline{d}_i') \equiv \underline{ver}$$

Afirmamos que W_D es compatible con B. En primer lugar W_D es compatible con B', según 3.3.1. Sea $\underline{A}$ cualquier miembro de B", expresado en la forma (*). Si $G(\underline{c}_i=\underline{d}_i) \equiv \underline{ver}$ para algún i, entonces $\underline{c}_i=\underline{d}_i \in D$ y $W_D(\underline{c}_i=\underline{d}_i) \equiv \underline{ver}$, de modo que $W_D(\underline{A}) \equiv \underline{ver}$. Si $G(\underline{c}_i=\underline{d}_i) \equiv \underline{fal}$ para cada i, entonces $G(\underline{a}_i=\underline{b}_i) \equiv \underline{fal}$ para algún $\underline{a}_i=\underline{b}_i$, y esto implica, por la ampliación de B' que se ha hecho, que $W_D(\underline{a}_i=\underline{b}_i) \equiv \underline{fal}$, ya que en caso contrario deberíamos tener $\#_D(\underline{a}_i) \equiv \#_D(\underline{b}_i)$ y $D \cup B \vdash \underline{a}_i=\underline{b}_i$, contra el hecho que $G(\underline{a}_i=\underline{b}_i) \equiv \underline{fal}$ y la compatibilidad de G con $D \cup B$.

Esto termina la demostración del lema. Tenemos:

Corolario de la demostración. Los miembros de D pueden tomarse de la lista (**).

Volvamos ahora al paso a $\overline{V}_{i+1}$ por medio de PR_R2. Supongamos que B_{i+1} es una colección finita de postulados de $\overline{V}_{i+1}$. Sea B_{i+1}' la colección de miembros de B_{i+1} que son postulados de $\overline{V}_i$ y B_{i+1}'' su complemento. Por el lema tenemos una valuación $W_{D(i)}$ compatible con B_{i+1}'. Según el corolario podemos suponer que en ninguna identidad de D(i) aparece ningún operador nuevo para $\overline{V}_i$. Agregaremos a D las identificaciones necesarias para obtener un D(i+1) tal que $W_{D(i+1)}$ sea compatible con B_{i+1}'' sin dejar de serlo con B'_{i+1}. Cada vez que un caso

$$\underline{r}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{y}]=\underline{c} \Rightarrow \overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b})=\underline{c}$$

de (A) pertenezca a B_{i+1}'' y que $W_{D(i)}(\underline{r}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{y}]=c) \equiv \underline{ver}$

agregamos a D(i) la identificación $\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b})=\underline{c}$. Así obtenemos una colección D(i,1). Cada vez que un caso

$$\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,\underline{b})=0 \Rightarrow E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=S(0)$$

de (B) pertenezca a B''_{i+1} y que $W_{D(i,1)}(\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n,b)=0) \equiv$ ver añadimos a D(i,1) la identificación $E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=S(0)$. Obtenemos así la colección D(i,2). Cada vez que un caso

$$E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=0 \vee E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=S(0)$$

de (C) pertenezca a B''_{i+1} y que $W_{D(i,2)}(E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=S(0)) \equiv$ fal añadimos a D(i,2) la identificación $E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)=0$. Así obtenemos $D_{(i+1)}$. Es claro que $W_{D(i+1)}$ coincide con $W_{D(i)}$ en su restricción a B'_{i+1} y que es compatible con B''_{i+1}.

Esto termina la demostración general de la consistencia para $\overline{\text{AFRR}}$.

Como se ha visto, se puede escoger W_D compatible con un segmento $\overline{V}$ de manera que en las identificaciones de D no aparezca ningún operador nuevo para $\overline{V}$. Por lo tanto $W_D(\overline{f}(\underline{a}_i)=b) \equiv$ fal siempre que $\overline{f}$ sea nuevo para $\overline{V}$. Tenemos, pues:

3.3.3. Observación. Para un operador no distinguido $\overline{f}$ sólo es posible tener $\overline{f}(\underline{x}_i) \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$ si $\overline{f}$ ha sido introducido por medio de PR_R2 en alguna etapa en la formación de $\overline{V}$, y entonces $\overline{f}$ satisface en $\overline{V}$ postulados del tipo (A), (B), (C).

Daremos ahora un ejemplo (trivial) de aplicación de PR_R3 en el que se puede satisfacer la condición 4) de consistencia. Para empezar tomemos, en PR_R2, $\overline{V} \equiv \overline{B}_R$, $\underline{r} \equiv S(\underline{y})$, $\overline{g}$ cualquier operador no distinguido de grado 1; y sea $\overline{U}$ el segmento que se obtiene de agregar a $\overline{B}_R$ los esquemas de postulados siguientes para numerales $\underline{b}$ y $\underline{c}$:

$$S(\underline{b})=\underline{c} \Rightarrow \overline{g}(\underline{b})=\underline{c}$$

$$\overline{g}(\underline{b})=0 \Rightarrow E\overline{g}=S(0)$$

$$E\overline{g}=0 \vee E\overline{g}=S(0)$$

Consideremos ahora $PR_R 3$ para este $\overline{g}$ y este $\overline{U}$, y para $i \equiv 0$. Tenemos, claramente

$$\overline{U} \vdash \neg \overline{g}(\underline{c})=0 \text{ para cada numeral } \underline{c}$$

Queremos comprobar que el nuevo postulado

$$\neg E\overline{g}=S(0)$$

es compatible con $\overline{U}$. Para ello, sea B cualquier colección finita de postulados de $\overline{U}$. Consideremos una W_D compatible con B, construida de la manera que se acaba de describir. Como $W_D(S(b)=0) \equiv \underline{fal}$ para todo numeral $\underline{b}$, se tiene igualmente $W_D(\overline{g}(b)=0) \equiv \underline{fal}$ y $W_D(E\overline{g}=S(0)) \equiv \underline{fal}$, de donde $W_D(\neg E\overline{g}=S(0)) \equiv \underline{ver}$.

3.4. Los cuantificadores $\exists^\circ$ y $\forall^\circ$ definidos en $\overline{AFRR}$ y la $^\circ$-lógica. Algunas observaciones y un lema heurístico. Nos limitaremos a introducir explícitamente $\forall^\circ$. Así mismo, para definir y manejar las $^\circ$-fórmulas que definiremos nos limitaremos al uso de $\neg$, $\Rightarrow$ y $\forall^\circ$. Esto traerá consigo las simplificaciones bien conocidas y nos permitirá, llegado el momento, una comparación fácil de la "$^\circ$-aritmética" con la aritmética clásica (A.C.) tal como está expuesta en el texto [Me], en el que $\vee$, $\wedge$ y el cuantificador existencial son nociones definidas o símbolos auxiliares.

Así, pues, llamamos $^\circ$-fórmulas a las expresiones formadas a partir de las fórmulas atómicas de $\overline{AFRR}$ por medio de $\neg$, $\Rightarrow$ y $\forall^\circ$, a la manera del cálculo de predicados, como si $\forall^\circ$ fuera el cuantificador universal. Las nociones de presencia libre o ligada, etc., son las mismas que para el cálculo de predicados.

Definiremos el significado de $\underline{m} \in T(\underline{A})$, que se lee "el término $\underline{m}$ es una <u>traducción</u> o <u>transporte</u> de la °-fórmula $\underline{A}$", así como su interpretación en cada segmento de $\overline{AFRR}$. También definiremos la noción de °-<u>teorema</u>, y su interpretación o significado en cada segmento. Las definiciones serán por inducción sobre el número de símbolos lógicos que aparecen en $\underline{A}$ (complejidad de $\underline{A}$). En lo que sigue se entiende, en cada caso, que las $\underline{x}_i$ comprenden todas las variables que aparecen libres en la fórmula protagonista.

Recordemos que $\forall^*$ y $\exists^*$ son los cuantificadores efectivos de las matemáticas finitarias, tal como se conviene en la introducción. El dominio de $\forall^*$ será siempre el de los numerales, y el de $\exists^*$ el de los términos de $\overline{AFRR}$.

$$\underline{m} \in T(\underline{a}=\underline{b}) \equiv (\forall^* a_i)[\vdash (\underline{m} = \alpha((\underline{a} \dot{-} b) + (\underline{b} \dot{-} a)))[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$$

$$\overline{V}{:}\underline{m} \in T(\underline{a}=\underline{b}) \equiv \underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{a}=\underline{b})$$

$$\equiv (\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V} \vdash (\underline{m} = \alpha((\underline{a} \dot{-} b) + (\underline{b} \dot{-} a)))[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$$

Es un hecho que $\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{a}=\underline{b})$ implica que $\underline{m} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$, cosa que puede verse como consecuencia de la demostración de la consistencia; pero también puede pensarse como una parte sobreentendida de la definición. Otra observación que quizá no carece de interés es que no se puede cumplir $\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{a}=\underline{b})$ a menos que $\underline{a} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$, $\underline{b} \in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i)$. Observaciones del mismo tipo son válidas para las partes siguientes de la definición.

$$\underline{m} \in T(\neg \underline{A}) \equiv (\exists^* \underline{m}')[\underline{m}' \in T(\underline{A}) \ \& \ (\forall^* \underline{a}_i)[\vdash (\underline{m} = \beta(\underline{m}'))[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$$

$$\overline{V}{:}\underline{m} \in T(\neg \underline{A}) \equiv \underline{m} \in T_{\overline{V}}(\neg \underline{A})$$

$$\equiv (\exists^* \underline{m}')[\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A}) \ \& \ (\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V} \vdash (\underline{m} = \beta(\underline{m}'))[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$$

$$\underline{m} \in T(\underline{A} \Rightarrow \underline{B}) \equiv (\exists^* \underline{m}', \underline{m}'')[\underline{m}' \in T(\underline{A}) \ \& \ \underline{m}'' \in T(\underline{B})$$

$$\& (\forall^* \underline{a}_i)[\vdash (\underline{m} = \beta(\underline{m}') \cdot \underline{m}'')[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]]$$

$$\overline{V}: \underline{m} \in T(\underline{A} \Rightarrow \underline{B}) \equiv \underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{A} \Rightarrow \underline{B})$$

$$\equiv (\exists^* \underline{m}', \underline{m}'')[\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A}) \ \& \ \underline{m}'' \in T_{\overline{V}}(\underline{B})$$

$$\& (\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V} \vdash (\underline{m} = \beta(\underline{m}') \cdot \underline{m}'')[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]]$$

$$\underline{m} \in T((\forall^\circ \underline{y})\underline{A}) \equiv (\exists^* \underline{m}')[\underline{m}' \in T(\underline{A}) \ \& (\exists^* \overline{f}(\underline{x}_i, \underline{y}))(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})$$

$$[\vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b}) = \beta(\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{y}]) \wedge \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = E\overline{f}(\underline{a}_i)]]$$

$$V: m \in T((\forall^\circ \underline{y})\underline{A} \equiv \underline{m} \in T_{V}-((\forall^\circ \underline{y})\underline{A})$$

$$\equiv (\exists^* \underline{m}')[\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A}) \& (\exists^* \overline{f}(\underline{x}_i, \underline{y}))(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})$$

$$[\overline{V} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b}) = \beta(\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{y}]) \wedge \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = E\overline{f}(\underline{a}_i)]]$$

Definiremos la noción de °-<u>teorema</u>, para lo cual usaremos el símbolo auxiliar $\overset{\circ}{\vdash}$.

$$\overset{\circ}{\vdash} \underline{A} \equiv (\exists^* \underline{m})[\underline{m} \in T(\underline{A}) \& (\forall^* \underline{a}_i)[\vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0]]$$

$$\overline{V}: \overset{\circ}{\vdash} \underline{A} \equiv \overline{V} \overset{\circ}{\vdash} \underline{A}$$

$$\equiv (\exists^* \underline{m})[\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{A}) \& (\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0]$$

Hablaremos de °-<u>lógica</u>, o °-aritmética, vagamente, cuando nos refiramos a cuestiones lógicas o aritméticas que tienen que ver con $\forall^\circ$ y $\overset{\circ}{\vdash}$.

Un poco de reflexión muestra que las °-fórmulas tienden a adquirir, por medio de $\overset{\circ}{\vdash}$, el significado que su aspecto tipográfico sugiere. Pero hay que proceder con cautela, según veremos enseguida.

La noción de °-teorema no se comporta como la noción de teorema del cálculo de predicados. Para empezar, no sabemos si la inferencia modus ponen vale siempre para $\overset{\circ}{\vdash}$. Por otro lado nos podemos preguntar si es posible tener $\underline{m}_1 \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ y $\underline{m}_2 \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ tales que

$$(\forall^{*}\underline{a}_i)[\bar{V}\vdash m_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0 \text{ y } (\forall^{*}\underline{a}_i)[\bar{V}\vdash \neg\underline{m}_2[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$$

Como $\underline{m}_2 \in T_{\bar{V}}(\underline{A})$ implica $\beta(\underline{m}_2)\in T_{\bar{V}}(\neg\underline{A})$, y ya que

$$(\forall^{*}\underline{a}_i)[\bar{V}\vdash(\neg\underline{m}_2=0 \Leftrightarrow \beta(\underline{m}_2)=0)[\underline{a}_i/\underline{x}_i] \quad ,$$

esta pregunta es la misma que la siguiente:

¿Es posible tener $\bar{V}\overset{\circ}{\vdash}\underline{A}$ y $\bar{V}\overset{\circ}{\vdash}\neg\underline{A}$?

La respuesta es negativa si $\underline{A} \equiv 0=0$, ya que en este caso se tiene, para cualquier $\underline{m}\in T_{\bar{V}}(0=0)$,

$$\bar{V}\vdash\underline{m}=\alpha((0\dot{-}0)+(0\dot{-}0)), \quad V\vdash\underline{m}=0,$$

de manera que no es posible $\bar{V}\vdash\neg\underline{m}=0$ puesto que esto implicaría, por los EPI_R1-4, que $\bar{V}\vdash\neg 0=0$, lo cual es imposible porque $\bar{V}\vdash 0=0$ y $\bar{V}$ es consistente.

Pero, como la °-lógica no se comporta como el cálculo de predicados, esto no implica que la respuesta no pueda ser afirmativa para alguna $\underline{A}$.

Nos podemos también preguntar hasta qué punto la °-lógica se comporta como el cálculo de predicados.

Para ampliar esta problemática consideremos las fórmulas de la A.C. pensadas a la manera de [Me], sin usar explícitamente $\vee$, $\wedge$ ni el cuantificador existencial. Escribamos, en tales fórmulas, $S(\underline{a})$ en lugar de $\underline{a}'$ y $(\forall^{\circ}\underline{x})$ en lugar del cuantificador universal $(\underline{x})$. Es claro entonces que toda fórmula de la A.C. se convierte en una °-fórmula. Nos podemos preguntar si, y en qué sentido preciso, cabe esperar que las fórmulas que son teoremas de la A.C. sean, también, "°-teoremas".

Toda esta problemática que se acaba de esbozar alrededor de las °-nociones y la A.C. se puede atacar por medio de las observaciones y del lema heurístico que se dan a continuación.

3.4.1. Observación. Para cada postulado aritmético $\underline{A}$ de la A.C., con excepción del axioma de inducción (ver [Me]), se tiene $\overline{B}_R \overset{\circ}{\vdash} \underline{A}$.

Tomemos, por ejemplo, $\underline{A} \equiv \underline{x}_1 = \underline{x}_2 \Rightarrow (\underline{x}_1 = \underline{x}_3 \Rightarrow \underline{x}_2 = \underline{x}_3)$. Tomemos

$$\underline{m}_1 \equiv \alpha((\underline{x}_1 \dot{-} \underline{x}_2) + (\underline{x}_2 \dot{-} \underline{x}_1)),$$

$$\underline{m}_2 \equiv \alpha((\underline{x}_1 \dot{-} \underline{x}_3 + (\underline{x}_3 \dot{-} \underline{x}_1)),$$

$$\underline{m}_3 \equiv \alpha((\underline{x}_2 \dot{-} \underline{x}_3) + (\underline{x}_3 \dot{-} \underline{x}_2))$$

Entonces, si $\underline{m} \equiv \beta(\underline{m}_1) \cdot (\beta(\underline{m}_2) \cdot \underline{m}_3)$, tenemos

$$\overline{B}_R : \underline{m} \in T(\underline{A})$$

y bastará demostrar que $(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{B}_R \vdash \underline{m}[\underline{a}_i / \underline{x}_i] = 0]$.

Si $\underline{a}_1 \not\equiv \underline{a}_2$, $\overline{B}_R \vdash \beta(\underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i]) = 0$. Si $\underline{a}_1 \not\equiv \underline{a}_3$, entonces $\overline{B}_R \vdash \beta(\underline{m}_2[\underline{a}_i/\underline{x}_i]) = 0$. Si no sucede ninguna de las dos cosas, entonces $\underline{a}_1 \equiv \underline{a}_2 \equiv \underline{a}_3$, y se tiene $\overline{B}_R \vdash \underline{m}_3[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0$.

3.4.2. Observación. Dado $\overline{V}$, segmento de $\overline{AFRR}$, y cualquier fórmula $\underline{A}$ de la A.C., podemos construir $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual se puede encontrar $\underline{m}$ tal que $\underline{m} \in T_{\overline{W}}(\underline{A})$.

La demostración es por inducción sobre la complejidad de $\underline{A}$. Si $\underline{A} \equiv \underline{a} = \underline{b}$, entonces $\alpha(\underline{a} \dot{-} \underline{b}) + (\underline{b} \dot{-} \underline{a})) \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$. Si $\underline{A} \equiv \neg \underline{B}$ y tenemos $\underline{m}' \in T_{\overline{V}'}(B)$ para ciertos $\underline{m}'$ y $\overline{V}' > \overline{V}$, entonces $\beta(\underline{m}') \in T_{\overline{V}'}(\underline{A})$. Si $\underline{A} \equiv \underline{B} \Rightarrow \underline{C}$ y tenemos $\underline{m}_1 \in T_{\overline{V}'}(B)$, $\underline{m}_2 \in T_{\overline{V}}(\underline{C})$, entonces

$\beta(\underline{m}_1) \cdot \underline{m}_2 \in T_{\overline{V}'}(\underline{B} \Rightarrow \underline{C})$. Si $\underline{A} \equiv (\forall^\circ \underline{y})\underline{B}$ y tenemos $\underline{m}' \in T_{\overline{V}'}(\underline{B})$, entonces, si $\underline{x}_i$, $\underline{y}$, son las variables de $\underline{m}'$, obtenemos, por medio de

$PR_R 2$, un segmento $\overline{U} > \overline{V}'$ para el cual, para cierto $\overline{f}$, tenemos

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}) [\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b}) = \beta(\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{y}])]$$

y entonces

$$E\overline{f}(\underline{x}_i) \in T_{\overline{U}}(\underline{A})$$

3.4.3. Observación. Para cualesquiera fórmulas $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, de la A.C. y cualquier segmento $\overline{V}$ podemos encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ tal que

$$\overline{W} \overset{o}{\vdash} \underline{A} \Rightarrow (\underline{B} \Rightarrow \underline{A})$$

$$\overline{W} \overset{o}{\vdash} (\underline{A} \Rightarrow (\underline{B} \Rightarrow \underline{C})) \Rightarrow ((\underline{A} \Rightarrow B) \Rightarrow (\underline{A} \Rightarrow \underline{C}))$$

(Nótese que estos son los postulados del cálculo proposicional que aparecen en la A.C. de |Me]).

Sea $\overline{W} > \overline{V}$ en donde existan $\underline{m}_1 \in T_{\overline{W}}(\underline{A})$, $\underline{m}_2 \in T_{\overline{W}}(\underline{B})$ y $\underline{m}_3 \in T_{\overline{W}}(C)$. Entonces

$$\underline{m} \equiv \beta(\underline{m}_1) \cdot (\beta(\underline{m}_2) \cdot \underline{m}_1) \in T_{\overline{W}}(\underline{A} \Rightarrow (\underline{B} \Rightarrow \underline{A}))$$

$$\underline{m}' \equiv \beta(\beta(\underline{m}_1) \cdot (\beta(\underline{m}_2) \cdot \underline{m}_3)) \cdot (\beta(\beta(\underline{m}_1) \cdot \underline{m}_2) \cdot (\beta(\underline{m}_1) \cdot \underline{m}_3))$$

$$\in T_{\overline{W}}((\underline{A} \Rightarrow (\underline{B} \Rightarrow \underline{C})) \Rightarrow ((\underline{A} \Rightarrow \underline{B}) \Rightarrow (\underline{A} \Rightarrow \underline{C})))$$

Es fácil demostrar lo que se quiere. Por ejemplo: si $\underline{m}_3[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0$ o $\underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i] \neq 0$ tenemos $\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0$. En caso contrario es fácil ver que esto último sucede tanto si $\underline{m}_2[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0$ como en caso contrario.

3.4.4. Lema heurístico. Supongamos que $\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son °-fórmulas y que $\overline{V}$ es un segmento de $\overline{AFRR}$. Cada una de las operaciones a)-h) siguientes puede realizarse por medio de una cierta sucesión de aplicaciones de los principios, siempre que seamos capaces de satisfacer la condición de consistencia finitaria 4) de $PR_R 3$ para cada aplicación del mismo en dicha realización.

a) Si $\underline{x}_i$ son las variables diferentes de $\underline{x}$ que tienen presencias libres en $\underline{A}$, si $\underline{t} \in N_{\overline{V}}[\underline{x}_i, \underline{y}_j]$ y $\underline{t}$ es libre para $\underline{x}$ en $\underline{A}$, y si $\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ y $\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A}[\underline{t}/\underline{x}])$, encontrar algún $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual demostraremos que

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j)[\overline{W} \vdash (\underline{m}' = \underline{m}[\underline{t}/\underline{x}])[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j]]$$

b) Si $\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$, $\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ y

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0],$$

donde las $\underline{x}_i$ son las variables que tienen presencias libres en $\underline{A}$, encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual se demuestre

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash \underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0]$$

c) Si $\underline{A}$ es una fórmula de la A.C. y $\underline{t}$ es un término de la A.C. libre para $\underline{x}$ en $\underline{A}$, encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual se demuestre

$$\overline{W} \vdash^{\circ} (\forall^{\circ} \underline{x})\underline{A} \Rightarrow \underline{A}[\underline{t}/\underline{x}]$$

d) Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son fórmulas de la A.C. y $\underline{x}$ no aparece libre en $\underline{A}$, encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual demostremos

$$\overline{W} \vdash^{\circ} (\forall^{\circ} \underline{x})[\underline{A} \Rightarrow \underline{B}] \Rightarrow (\underline{A} \Rightarrow (\forall^{\circ} x)\underline{B})$$

e) Si $\underline{A}$ es una fórmula de la aritmética clásica, encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual se demuestre

$$\overline{W} \vdash^{\circ} \underline{A}[0/\underline{x}] \Rightarrow ((\forall^{\circ} \underline{x})[\underline{A} \Rightarrow \underline{A}[S(\underline{x})/\underline{x}]] \Rightarrow (\forall^{\circ} \underline{x})\underline{A})$$

f) Si $\overline{V} \vdash^{\circ} \underline{A}$ y $\overline{V} \vdash^{\circ} \underline{A} \Rightarrow \underline{B}$, encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual se demuestre $\overline{W} \vdash^{\circ} \underline{B}$.

g) Si $\overline{V} \vdash^{c} \underline{A}$, encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ para el cual se demuestre que

$$\overline{W}\vdash^{\circ}(\forall^{\circ}\underline{x})\underline{A}$$

h) Si la fórmula $\underline{A}$ es un teorema de la A.C., encontrar un $\overline{W}>\overline{V}$ para el cual se demuestre $\overline{W}\vdash^{\circ}\underline{A}$.

Demostración

a) La demostración será por inducción sobre la complejidad de $\underline{A}$.

a.1) Sea $A\equiv\underline{a}=\underline{b}$. Tenemos entonces

(1) $(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{c})\left[\overline{V}\vdash(\underline{m}=\alpha((\underline{a}\dot{-}\underline{b})+(\underline{b}\dot{-}\underline{a})))\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{c}/\underline{x}\right]\right.$

(2) $(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{b}_j)\left[\overline{V}\vdash(\underline{m}'=(\alpha((\underline{a}\dot{-}\underline{b})+(\underline{b}\dot{-}\underline{a})))\left[\underline{t}/\underline{x}\right])\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right]\right.$

Pero

$$\alpha((\underline{a}\dot{-}\underline{b})+(\underline{b}\dot{-}\underline{a}))\left[\underline{t}/\underline{x}\right]\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right]$$

$$\equiv\alpha((\underline{a}\dot{-}\underline{b})+\underline{b}\dot{-}a))\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{t}\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right]/\underline{x}\right]$$

La afirmación (1), donde $\forall^{*}$ corre sobre numerales $\underline{a}_i$, $\underline{c}$, es verdadera también si $\underline{c}\in N_{\overline{V}}$, por el metateorema de inducción 3.2.4, de modo que, por (2) y lo que se acaba de observar, tenemos

$$(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{b}_j)\left[\overline{V}\vdash\underline{m}'\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right]=\underline{m}\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{t}\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right]/x\right]\right]$$

Pero

$$\underline{m}\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{t}\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right]/\underline{x}\right]\equiv\underline{m}\left[\underline{t}/\underline{x}\right]\left[\underline{a}_i/\underline{x}_i\right]\left[\underline{b}_j/\underline{y}_j\right],$$

con lo que queda demostrado lo que se quería.

a.2) Sea $\underline{A}\equiv\neg\underline{B}$ y supongamos la afirmación demostrada para $\underline{B}$. Entonces $\underline{A}\left[\underline{t}/\underline{x}\right]\equiv\neg\underline{B}\left[\underline{t}/\underline{x}\right]$ y tenemos, para ciertos $\underline{m}_1\in T_{\overline{V}}(\underline{B})$ y $\underline{m}_1'\in T_{\overline{V}}(\underline{B}\left[\underline{t}/\underline{x}\right])$,

$$(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{c})[\overline{V}\vdash(\underline{m}=\beta(\underline{m}_1))[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}]$$

$$(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{b}_j)[\overline{V}\vdash(\underline{m}'=\beta(\underline{m}_1'))\cancel{[\underline{t}/\underline{x}]}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j]]$$

y, por hipótesis de inducción, para algún $\overline{W}>\overline{V}$,

$$(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{b}_j)[\overline{W}\vdash(\underline{m}_1'=\underline{m}_1[\underline{t}/\underline{x}])[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j]],$$

de donde obtenemos inmediatamente lo que queremos.

a.3) el caso $\underline{A}\equiv\underline{B}\Rightarrow\underline{C}$ es igualmente simple

a.4) suponemos ahora que $\underline{A}\equiv(\forall^{\circ}\underline{y})\underline{B}$ y que la afirmación está demostrada para $\underline{B}$. Consideramos dos subcasos según que $\underline{y}\equiv\underline{x}$ o no.

a.4, subcaso 1) Si $\underline{y}\equiv\underline{x}$. Entonces $\underline{x}$ no aparece libre en $\underline{A}$ y se tiene $\underline{A}[\underline{t}/\underline{x}]\equiv\underline{A}$. En este subcaso se tiene, para ciertos $\underline{m}_1\in T_{\overline{V}}(\underline{B})$ y $\underline{m}_1'\in T_{\overline{V}}(\underline{B})$, y para ciertos $\overline{f}(\underline{x}_i,y)$, $\overline{f}'(\underline{x}_i,y)\in N_{\overline{V}}(\underline{x}_i\underline{y})$,

$$(\forall^{*}\underline{a}i,\underline{c})[\overline{V}\vdash\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{c})=\beta(\underline{m}_1)[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}]]$$

$$(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{c})[\overline{V}\vdash\overline{f}'(\underline{a}_i,\underline{c})=\beta(\underline{m}_1')[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}]$$

$$(\forall^{*}\underline{a}_i)[\overline{V}\vdash\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=E\overline{f}(\underline{a}_i)]$$

$$(\forall^{*}\underline{a}_i)[\overline{V}\vdash\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=E\overline{f}(\underline{a}_i)]$$

Tenemos además, por la hipótesis de inducción en el caso $\underline{t}\equiv\underline{x}$,

$$(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{c})[\overline{W}'\vdash(\underline{m}_1'=\underline{m}_1)[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{y}]]\ \text{para cierto } \overline{W}'>\overline{V},$$

de donde

(3) $\quad(\forall^{*}\underline{a}_i,\underline{c})[\overline{W}'\vdash\overline{f}'(\underline{a}_i,\underline{c})=\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{c})]$

Dado que $\underline{m}[\underline{t}/\underline{x}] \equiv \underline{m}$, lo que necesitamos demostrar es, para algún $\overline{W} > \overline{W}'$, que

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash (\underline{m}'=\underline{m})[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$$

o, equivalentemente, que

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash E\overline{f}'(\underline{a}_i)=E\overline{f}(\underline{a}_i)]$$

Con ese fin, observamos, por (3) y por los postulados de tipo (B) de PR_R2 correspondientes a $\overline{f}'$, que tenemos

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{c})[\overline{W}' \vdash E\overline{f}'(\underline{a}_i)=0 \Rightarrow \neg \overline{f}'(\underline{a}_i, \underline{c})=0$$

$$\Rightarrow \neg \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{c})=0 \;]$$

Esto es, tenemos

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{c})[\overline{W}' \vdash \neg E\overline{f}'(\underline{a}_i)=0 \;\overset{\vee}{\cancel{\Rightarrow}}\; \neg \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{c})=0]$$

Esto nos sugiere el uso de PR_R3. Por medio de él podemos postular, para todos los numerales $\underline{a}_i$,

$$\neg E\overline{f}'(\underline{a}_i)=0 \vee \neg E\overline{f}(\underline{a}_i)=S(0),$$

siempre que podamos demostrar, como exige la condición 4) del principio, la consistencia (finitaria) de esos nuevos postulados con $\overline{W}'$. Si esto es así, y si $\overline{W}''$ es el nuevo segmento así obtenido, tendremos, dad. el postulado (C) correspondiente a $\overline{f}$,

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W}'' \vdash E\overline{f}'(\underline{a}_i)=0 \Rightarrow E\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \;]$$

Procediendo simétricamente tendremos, para un cierto $\overline{W}$ posterior a $\overline{W}''$, y siempre que hayamos podido cumplir con la condición de consistencia para la correspondiente aplicación de PR_R3.

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash E\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \Rightarrow E\overline{f}'(\underline{a}_i)=0 \;]$$

Pero esas dos condiciones nos dicen, dados los axiomas (C) de PR_R2 correspondientes a $\overline{f}$ y a $\overline{f}'$, que

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash E\overline{f}(\underline{a}_i) = E\overline{f}'(\underline{a}_i)],$$

como queríamos

a.4, subcaso 2) Debemos suponer ahora $\underline{y} \not\equiv \underline{x}$. Tenemos, en este subcaso,

$$\underline{A}[\underline{t}/\underline{x}] \equiv (\forall^\circ \underline{y})[\underline{B}[\underline{t}/\underline{x}]]$$

Para ciertos $\underline{m}_1 \in T_{\overline{V}}(\underline{B})$ y $\underline{m}_1' \in T_{\overline{V}}(\underline{B}\ \underline{t}/\underline{x})$, y para ciertos $\overline{f}$ y $\overline{f}'$, tenemos

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{c}, \underline{d})[\overline{V} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{c}, \underline{d}) = \beta(\underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}][\underline{d}/\underline{y}])$$

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j, \underline{d})[\overline{V} \vdash \overline{f}'(\underline{a}_i, \underline{b}_j, \underline{d}) = \beta(\underline{m}_1'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j][\underline{d}/\underline{y}])$$

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{c})[\overline{V} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}] = E\overline{f}(\underline{a}_i, \underline{c})]$$

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j)[\overline{V} \vdash \underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_i/\underline{y}_j] = E\overline{f}'(\underline{a}_i, \underline{b}_j)]$$

Tenemos además, por la hipótesis de inducción,

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j, \underline{d})[\overline{W}' \vdash (\underline{m}_1' = \underline{m}_1[\underline{t}/\underline{x}])[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j][\underline{d}/\underline{y}]]$$

para cierto $\overline{W}' > \overline{V}$, de donde deducimos sin dificultad,

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j, \underline{d})[\overline{W}' \vdash \overline{f}'(\underline{a}_i, \underline{b}_j, \underline{d}) = \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{t}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j], \underline{d})]$$

A partir de este momento se puede proceder como en el subcaso anterior.

b) En este caso $\underline{x}$ no aparece en $\underline{A}$, y no tenemos mas que usar el caso a) y obtener para algún, $\overline{W} > \overline{V}$,

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash (\underline{m} = \underline{m}')[\underline{a}_i/\underline{x}_i]],$$

de donde obtenemos lo que queremos

c) Sean $\underline{x}_i$ y, posiblemente, $\underline{x}$ las variables libres de $\underline{A}$, y sean $\underline{y}_j$ las variables libres de $\underline{t}$ que no están entre las $\underline{x}_i$. Puede ser que $\underline{x}$ sea una de las $\underline{y}_j$. Podemos construir un cierto $\overline{V}'$ posterior a $\overline{V}$ para el cual tenemos $\underline{m}_1 \in T_{\overline{V}'}(\underline{A})$, $\underline{m}_1' \in T_{\overline{V}'}(\underline{A}[\underline{t}/\underline{x}])$, para ciertos $\underline{m}_1$, $\underline{m}_1'$. Esto es posible por la observación 3.4.2. según a) tenemos, para algún $\overline{V}'' > \overline{V}'$,

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j)[\overline{V}'' \vdash (\underline{m}_1' = \underline{m}_1[\underline{t}/\underline{x}])[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j]]$$

(siempre que hayamos podido demostrar finitariamente la consistencia de las postulaciones que haya sido necesario hacer por medio de $PR_R 3$). Por medio de $PR_R 2$ podemos obtener un $\overline{W} > \overline{V}''$ en el cual se tiene, para un cierto $\overline{f}$ nuevo para $\overline{V}''$,

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{c})[\overline{W} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{c}) = \beta(\underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}])]$$

y tenemos $\underline{m} \in T_{\overline{W}}((\forall^\circ \underline{x})\underline{A})$ tal que

$$(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = E\overline{f}(\underline{a}_i)]$$

Entonces

$$\beta(\underline{m}) \cdot \underline{m}_1' \in T((\forall^\circ \underline{x})\underline{A} \Rightarrow \underline{A}[\underline{t}/\underline{x}])$$

Sólo necesitamos mostrar que

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j)[\overline{W} \vdash (\beta(\underline{m}) \cdot \underline{m}_1')[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j] = 0]$$

Para ello, razonando en $\overline{W}$, supongamos, para cualesquiera $\underline{a}_i$, que $\beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]) \neq 0$ (nótese que las $\underline{y}_j$ no están presentes en $\underline{m}$). Entonces $E\overline{f}(\underline{a}_i) = 0$ y $\overline{f}(\underline{a}_i, \underline{c}) \neq 0$ para todo $\underline{c}$, de donde $m_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{x}] = 0$ para todo numeral $\underline{c}$ y, por el metateorema de inducción,

$$\underline{m}_1\,[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{t}[\underline{b}_j/\underline{y}_j]/\underline{x}]=0$$

para cualesquiera $\underline{b}_j$, de donde $\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i]\,[\underline{b}_j/\underline{y}_j]=0$. Es decir, se ha demostrado

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_j)[\overline{W} \vdash \neg\beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j])=0 \Rightarrow \underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_j/\underline{y}_j]=0]$$

que dadas las propiedades del producto, nos da lo que necesitamos.

d) Sean $\underline{x}_i$ las variables que aparecen libres en $\underline{A}$ y en $\underline{B}$, $\underline{y}_j$ las que sólo aparecen libres en $\underline{A}$ y $\underline{z}_k$ las que son distintas de $\underline{x}$ y sólo aparecen libres en $\underline{B}$. En algún $\overline{V}' > \overline{V}$ tenemos, para ciertos $\underline{m}$ y $\underline{m}'$, $\underline{m} \in T_{\overline{V}'}(\underline{A})$, $\underline{m}' \in T_{\overline{V}'}(\underline{B})$. Entonces

$$\beta(\underline{m})\cdot\underline{m}' \in T_{V'}(\underline{A} \Rightarrow \underline{B})$$

Sean $\overline{f}$ y $\overline{V}'' > V'$ tales que

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b}_k, \underline{c})[\overline{V}'' \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b}_k, \underline{c}) = \beta(\underline{m}'\,[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_k/\underline{z}_k][\underline{c}/\underline{x}])]$$

Entonces $E\overline{f}(\underline{x}_i, \underline{z}_k) \in T_{\overline{V}''}((\forall^\circ \underline{x})\underline{B})$ y

$$\beta(\underline{m})\cdot E\overline{f}(\underline{x}_i, \underline{z}_k) \in T_{\overline{V}''}(\underline{A} \Rightarrow (\forall^\circ \underline{x})\underline{B})$$

Sean $\overline{V}''' > \overline{V}''$ y $\overline{g}$ tales que

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{d}_j, \underline{b}_k, \underline{c})[\overline{V}''' \vdash \overline{g}(\underline{a}_i, \underline{d}_j, \underline{b}_k \underline{c}) =$$

$$= \beta((\beta(\underline{m})\cdot\underline{m}')[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j][\underline{b}_k/\underline{z}_k][\underline{c}/\underline{x}])]$$

Entonces

$$E\overline{g}(\underline{x}_i, \underline{y}_j, \underline{z}_k) \in T_{\overline{V}'''}((\forall^\circ \underline{x})[\underline{A} \Rightarrow \underline{B}])$$

$$\beta(E\overline{g}(\underline{x}_i, \underline{y}_j, \underline{z}_k)\cdot(\beta(\underline{m})\cdot E\overline{f}(\underline{x}_i, \underline{z}_k))$$

$$\in T_{\overline{V}'''}((\forall^\circ x)[\underline{A} \Rightarrow \underline{B}] \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall^\circ \underline{x})\underline{B}))$$

Queremos demostrar ahora que

(4)

$$(\forall^* \underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k)[\overline{W} \vdash \beta(E\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k))\cdot(\beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j])\cdot E\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{b}_k))=0]$$

para algún $\overline{W} > \overline{V}'''$.

Supongamos que $\beta(E\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k))\neq 0$ y $\beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j])\neq 0$. Entonces $E\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k)=0$, de donde $\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k,\underline{c},)\neq 0$ para todo $\underline{c}$, de donde

$$(\beta(\underline{m})\cdot\underline{m}')[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j][\underline{b}_k/\underline{z}_k][\underline{c}/\underline{x}]=0 \text{ para todo } \underline{c}$$

y

$$\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}_k/\underline{z}_k][\underline{c}/\underline{x}]=0 \text{ para todo } \underline{c},$$

de donde $\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{b}_k,\underline{c})\neq 0$ para todo $\underline{c}$.

Hemos demostrado, pues,

$$(\forall^* \underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k,\underline{c})[\overline{V}''' \vdash \neg\beta(E\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k))=0 \wedge \neg\beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j])=0$$

$$\Rightarrow \neg\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{b}_k,\underline{c})=0],$$

o bien

$$(\forall^* \underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k,\underline{c})[\overline{V}''' \vdash \neg E\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k)=0 \vee \neg\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j]=0$$

$$\vee \neg\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{b}_k,\underline{c})=0]$$

Podemos entonces postular, por PR_R3, si logramos cumplir con la exigencia de consistencia de ese principio, el esquema

$$\neg E\overline{g}(\underline{a}_i,\underline{d}_j,\underline{b}_k)=0 \vee \neg\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{d}_j/\underline{y}_j]=0 \vee \neg E\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{b}_k,\underline{c})=S(0)$$

En el segmento $\overline{W}$ así obtenido se cumple (4).

e) Sean $\underline{x}_i$ las variables diferentes de $\underline{x}$ que aparecen libres en $\underline{A}$. Para algún $\overline{V}' > \overline{V}$ tenemos $\underline{m}\in T_{\overline{V}'}(\underline{A})$, $\underline{m}_o\in T_{\overline{V}'}(A[0/\underline{x}])$,

$\underline{m}' \in T_{\overline{V}'}(\underline{A}[S(\underline{x})/\underline{x}])$,

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})[\overline{V}' \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b}) = \beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{x}])]$$

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})[\overline{V}' \vdash \overline{g}(\underline{a}_i, \underline{b}) = \beta((\beta(\underline{m}) \cdot \underline{m}')[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{x}])]$$

$$E\overline{f}(\underline{x}_i) \in T_{\overline{V}'}((\forall^\circ \underline{x})\underline{A})$$

$$E\overline{g}(\underline{x}_i) \in T_{\overline{V}'}((\forall^\circ \underline{x})[\underline{A} \Rightarrow \underline{A}[S(\underline{x})/\underline{x}]])$$

$$\beta(\underline{m}_o) \cdot (\beta(E\overline{g}(\underline{x}_i)) \cdot E\overline{f}(\underline{x}_i))$$

$$\in T_{\overline{V}'}(\underline{A}[0/\underline{x}] \Rightarrow ((\forall^\circ \underline{x})[\underline{A} \Rightarrow \underline{A}[S(\underline{x})/\underline{x}]] \Rightarrow (\forall^\circ \underline{x})\underline{A}))$$

Debemos demostrar, para algún $\overline{W} > \overline{V}'$, que

(5) $(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash \beta(\underline{m}_o[\underline{a}_i/\underline{x}_i]) \cdot (\beta(E\overline{g}(\underline{a}_i)) \cdot E\overline{f}(\underline{a}_i)) = 0]$

Según a), podemos encontrar un $\overline{V}'' > \overline{V}'$ tal que

(6) $(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V}'' \vdash (\underline{m}_o = \underline{m}[0/\underline{x}])[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$,

(7) $(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})[\overline{V}'' \vdash (\underline{m}' = \underline{m}[S(\underline{x})/\underline{x}])[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{x}]]$,

si es que podemos hacer la demostración finitaria de la consistencia para cada utilización de PR_R3 a lo largo del proceso. Suponemos que así es.

Para demostrar (5) supongamos ahora, razonando en $\overline{V}''$, que $\underline{m}_o[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0$ y $E\overline{g}(\underline{a}_i) = 0$. Entonces por (6),

(8) $\underline{m}[0/\underline{x}][\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0$

y, por el esquema (B) de PR_R2 para $\overline{g}$ tenemos $\overline{g}(\underline{a}_i, b) \neq 0$ para cada $\underline{b}$, de donde, según la definición de $\overline{g}$,

(9) $(\beta(\underline{m}) \cdot \underline{m}')[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{x}] = 0$ para cada $\underline{b}$

Por (8) y (9), $\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][0/\underline{x}]=0$ y, por (7),

(10) $\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][S(0)/\underline{x}]=0$

Por (10) y (9), $\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][S(0)/\underline{x}]=0$ y, por (7),

(11) $\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][S(S(0))/\underline{x}]=0$

Por (11) y (9), $\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i][S(S(0))/\underline{x}]=0$ y, por (7),

(12) $\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][S(S(S(0)))/\underline{x}]=0$

etc.

Se tiene, pues,

$(\forall^*\underline{a}_i,\underline{b})[\overline{V}''\vdash\neg\underline{m}_o[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0 \ \vee\ \neg E\overline{g}(\underline{a}_i)=0 \ \vee\ \neg\overline{f}(\underline{a}_i,\underline{b})=0]$

Podemos ahora proceder como antes, usando PR_R3. Si pode mos satisfacer la condición de consistencia tendremos, si $\overline{W}$ es el nuevo segmento que se obtiene al agregar los postulados,

$(\forall^*\underline{a}_i)[\overline{W}\vdash\neg\underline{m}_o[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0 \ \vee\ \neg E\overline{g}(\underline{a}_i)=0 \ \vee\ \neg E\overline{f}(\underline{a}_i)=S(0)]$, que es equi valente a (5).

f) Se tiene

(13) $(\forall^*\underline{a}_i)[\overline{V}\vdash\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$

(14) $(\forall^*\underline{a}_i)[\overline{V}\vdash\underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$

para ciertos $\underline{m}\in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ y $\underline{m}'\in T_{\overline{V}}(\underline{A}\Rightarrow\underline{B})$. Entonces

(15) $(\forall^*\underline{a}_i)[\overline{V}\vdash(\underline{m}'=\beta(\underline{m}_1)\cdot\underline{m}_2)[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$

para ciertos $\underline{m}_1\in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ y $\underline{m}_2\in T_{\overline{V}}(\underline{B})$. Tenemos además, por b), según (13),

$(\forall^*\underline{a}_i)[\overline{W}\vdash\underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$

para cierto $\overline{W} > \overline{V}$. Pero entonces

$$(\forall^* \underline{a}_i)\left[\overline{W} \vdash \neg\beta(\underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i])=0\right]$$

de donde, por (14) y (15),

$$(\forall^* \underline{a}_i)\left[\overline{W} \vdash \underline{m}_2[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0\right],$$

como se quería demostrar.

g) Si las variables libres diferentes de $\underline{x}$ de $\underline{A}$ son las $\underline{x}_i$, $\overline{V} \overset{\circ}{\vdash} \underline{A}$ significa

(16) $(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})\left[\overline{V} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{x}]=0\right]$

para cierto $\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$. Tenemos, para cierto $\overline{V}' > \overline{V}$ y cierto $\overline{f}$, por $PR_R 2$,

(17) $(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})\left[\overline{V}' \vdash \overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b}) = \beta(\underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i][\underline{b}/\underline{x}])\right]$

Entonces $E\overline{f}(\underline{x}_i) \in T_{\overline{V}'}((\forall^\circ \underline{x})\underline{A})$. Queremos, pues, demostrar, para algún $\overline{W} > \overline{V}'$, que

$$(\forall^* \underline{a}_i)\left[\overline{W} \vdash E\overline{f}(\underline{a}_i)=0\right]$$

Tenemos, para ese fin, según (16) y (17), que

$$(\forall^* \underline{a}_i, \underline{b})\left[\overline{V}' \vdash \neg\overline{f}(\underline{a}_i, \underline{b})=0\right]$$

Por $PR_R 3$, si podemos satisfacer la condición de consistencia, introducimos nuevos postulados (D) que hacen que en el nuevo segmento $\overline{W}$ así obtenido se cumpla lo que queremos.

h) Pensemos en la exposición de la A.C. en [Me]. Si $\underline{A}$ es un teorema de la A.C. es porque tenemos una sucesión de fórmulas de A.C.,

$$\underline{A}_0, \underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n \equiv \underline{A}$$

tal que cada $\underline{A}_i$ es un postulado (lógica o específico) o se infiere de fórmulas anteriores por modus ponens o por generalización. Suponiendo que se puede satisfacer la condición de consistencia finitaria 4) de PR_R3 cada vez que necesitemos ese principio, lo que haremos será construir una sucesión de segmentos

$$\overline{V} < \overline{W}_o < \ldots < \overline{W}_n$$

tal que $\overline{W}_i \vdash^{\circ} \underline{A}_i$ para cada i. Esto se hará por inducción sobre i.

$\underline{A}_o$ es un postulado de la A.C. Por las observaciones 3.4.1 y 3.4.3, y por los incisos c), d) y e) del presente lema tenemos que existe $\overline{W}_o > \overline{V}$ tal que $\overline{W}_o \vdash^{\circ} \underline{A}_o$. Lo mismo sucede para cualquier otro $i > 0$ si $\underline{A}_i$ es un postulado de la A.C. (existe $\overline{W}_i > \overline{W}_{i-1}$ tal que $\overline{W}_i \vdash^{\circ} \underline{A}_i$). Supongamos ahora que $\underline{A}_i$ se infiere de fórmulas anteriores de la lista por modus ponens. Por el inciso f) existe entonces $\overline{W}_i > \overline{W}_{i-1}$ tal que $\overline{W}_i \vdash^{\circ} A_i$. Si la inferencia es por generalización hay que usar g).

Esto termina la demostración del lema heurístico.

3.4.5. <u>Corolario</u>. Si $\overline{V} \vdash^{\circ} \underline{A}$ y $\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$ podemos encontrar $\overline{W} > \overline{V}$ tal que $(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{W} \vdash \underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0]$ siempre que podamos demostrar finitariamente la condición de consistencia en cada uso de PR_R3 que se haga necesario. Si esto lo podemos hacer para cada $\underline{m}'$ sabremos que no se tiene $\overline{V} \vdash^{\circ} \underline{A}$.

En efecto: si $\overline{V} \vdash^{\circ} \underline{A}$ es porque $(\forall^* \underline{a}_i)[\overline{V} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i] = 0]$ para algún $\underline{m} \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$. Por b) del lema heurístico vemos entonces que se puede hacer lo que afirma la primera parte del corolario. Si la comprobación finitaria de la consistencia para todas las aplicaciones de PR_R3 se puede llevar a cabo para cada $\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(A)$, entonces no podemos tener $\overline{V} \models^{\circ} \neg \underline{A}$ ya que eso implicaría que $(\forall^{*}\underline{a}_i)[\overline{V} \vdash \underline{m}_1[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$ para algún $\underline{m}_1 \in T_{\overline{V}}(\neg \underline{A})$, pero ese $\underline{m}_1$ satisfacería la condición

$$(\forall^{*}\underline{a}_i)[\overline{V} \vdash (\underline{m}_1 = \beta(\underline{m}'))[\underline{a}_i/\underline{x}_i]]$$

para algún $\underline{m}' \in T_{\overline{V}}(\underline{A})$; y al tenerse $(\forall^{*}\underline{a}_i)[\overline{W} \vdash \underline{m}'[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$ en algún $\overline{W} > \overline{V}$ estaríamos ante una contradicción en $\overline{W}$, cosa que no es posible porque cada $\overline{W}$ es consistente.

A través de las observaciones y del lema heurístico y su corolario vemos que las cuestiones planteadas tienen, en principio, las respuestas que mas nos pueden satisfacer, pero sólo a condición de que se pueda satisfacer la exigencia finitaria de consistencia en cada utilización de PR_R3 que se haga necesaria en el proceso de justificar dichas respuestas. Esto da lugar al análisis de la A.C. que se hará a continuación.

3.5. <u>Un análisis de la A.C. en base a las °-nociones de</u> $\overline{AFRR}$. Recordemos, según la introducción, que $\overline{V}: \mapsto \mathcal{A}$ significa que $\overline{W}: \mathcal{A}$ para algún $\overline{W}$ posterior a $\overline{V}$, y que $\overline{AFRR}: \mapsto \mathcal{A}$ significa que $\overline{V}: \mapsto \mathcal{A}$ para todo segmento $\overline{V}$ de $\overline{AFRR}$. Nos preguntábamos en 3.4 de qué manera podemos esperar que un teorema $\underline{A}$ de la A.C. sea un "°-teorema" de $\overline{AFRR}$. Lo que sugieren los resultados de 3.4 es que, en principio, para un teorema $\underline{A}$ de la A.C. podemos esperar que se tenga $\overline{AFRR}: \mapsto \vdash^{c} \underline{A}$, cosa que significa que para cada $\overline{V}$ podemos encontrar un $\overline{W} > \overline{V}$ y un $\underline{m} \in T_{\overline{W}}(\underline{A})$ tales que $(\forall^{*}\underline{a}_i)[\overline{W} \vdash \underline{m}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0]$. De hecho, es fácil ver que los resultados de 3.4 se pueden condensar en la proposición siguiente, si recordamos que expresamos las fórmulas de la A.C. con $(\forall^{\circ}\underline{x})$ en lugar de $(\underline{x})$ y $S(\underline{a})$ en lugar de $\underline{a}'$; y que pensamos en la A.C. tal como se expone en [Me].

3.5.1. <u>Proposición heurística</u>. Mediante utilizaciones de los principios de $\overline{\text{AFRR}}$ podemos realizar cada una de las operaciones siguientes siempre que seamos capaces de satisfacer la condición de consistencia finitaria 4) de PR_R3 en cada utilización de este principio.

α) Para cada postulado (lógico o específico) $\underline{A}$ de la A.C., demostrar que $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A}$.

β) Para cualesquiera fórmulas $\underline{A}$ y $\underline{B}$ de la A.C., si $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A}$ y $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A} \Rightarrow \underline{B}$, demostrar que $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{B}$.

γ) Para cualquier fórmula $\underline{A}$ de la A.C., si $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} A$, demostrar que $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} (\forall^{\circ}\underline{x})\underline{A}$.

δ) Para cualquier teorema $\underline{A}$ de la A.C., demostrar que $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A}$.

ε) Para cualquier fórmula $\underline{A}$ de la A.C., si $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A}$, demostrar que no se tiene $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \neg \underline{A}$.

Por ejemplo, si $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A}$ y $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A} \Rightarrow \underline{B}$, consideremos cualquier $\overline{V}$. Entonces $\overline{V}' \vdash^{\circ} \underline{A}$ para algún $\overline{V}' > \overline{V}$ y $\overline{V}'' \vdash^{\circ} \underline{A} \Rightarrow \underline{B}$ para algún $\overline{V}'' > \overline{V}'$. Por e) del lema heurístico se tiene entonces $\overline{W} > \overline{V}''$ tal que $\overline{W} \vdash^{\circ} \underline{B}$. Pero $\overline{W} > \overline{V}$, y esto muestra lo que queríamos.

Podemos ya sacar conclusiones y hacer comentarios.

<u>Conclusión 1.</u> Si dispusiéramos de una demostración general de la condición de consistencia finitaria 4) de PR_R3, entonces, según δ) de la proposición heurística, se tendría $\overline{\text{AFRR}}: \Mapsto \vdash^{\circ} \underline{A}$ para cada teorema $\underline{A}$ de la A.C. Pero ya se ha visto que $\neg 0=0$ no es

°-teorema de ningún segmento, de modo que se tendría entonces que $\neg 0=0$ no es un teorema de la A.C., lo que nos proporcionaría una demostración finitaria de su consistencia. Como tal cosa es imposible podemos concluir que es igualmente imposible tener una demostración general de dicha condición finitaria 4) de PR_R3. Una demostración directa de este hecho sería interesante, claro está.

<u>Conclusión 2.</u> A pesar de lo que se acaba de observar es claro, según la proposición heurística, que las °-nociones de $\overline{AFRR}$ contienen en principio todos los elementos necesarios para demostrar que $\overline{AFRR}{:}\Rightarrow\vdash^{\circ} \underline{A}$ para cada teorema $\underline{A}$ de la A.C. y que no se tiene $\overline{AFRR}{:}\Rightarrow\vdash^{\circ} \neg\underline{A}$ para ningún teorema $\underline{A}$ de la misma. Lo que falta son las ya tan mencionadas demostraciones finitarias de la consistencia para las aplicaciones de PR_R3. Pero es incluso pensable que esas demostraciones siempre resultan factibles, aunque esto no podamos saberlo de antemano, por carecer de una demostración general. Nada parece oponerse a una tal hipótesis de trabajo. Nada nos dice, por ejemplo, que deba haber un caso $\underline{A}$ del postulado de inducción para el cual no pueda demostrarse $\overline{AFRR}{:}\Rightarrow \underline{A}$. Por eso, si no queremos renunciar a la exigencia finitaria en las demostraciones de consistencia podríamos tomar la actitud de que la "verdadera" aritmética clásica o "aritmética clásica finitariamente consistente" es $\overline{AFRR}$. Los "teoremas" de tal aritmética serían las °-fórmulas $\underline{A}$ para las cuales pudiéramos demostrar que $\overline{AFRR}{:}\Rightarrow\vdash^{\circ} \underline{A}$ y que no se tiene $\overline{AFRR}{:}\Rightarrow\vdash^{\circ} \neg\underline{A}$. Ningún "teorema" podría considerarse demostrado en este sentido mientras no hubiéramos satisfecho la condición de consistencia en cada aplicación de PR_R3. Podríamos proponernos desarrollar por medio de $\overline{AFRR}$ la parte de la aritmética que se encuentra en las buenas exposiciones de la misma. Si en algún momento pudiéramos demostrar la

imposibilidad de cumplir con los requisitos de la consistencia finitaria para un teorema *A* de la A.C. estaríamos, sin duda, ante un hecho aritmético muy interesante; pero eso no perturbaría en nada lo que ya se hubiera demostrado previamente.

Tenemos para terminar:

Un comentario adverso a las °-nociones. Se ha visto cómo las °-nociones son centrales para el análisis de la A.C. que se acaba de hacer. Pero si nuestra finalidad no es la de hacer un tal análisis, si no la de dar una buena fundamentación finitariamente consistente de las matemáticas, entonces esas °-nociones, sin dejar quizá de ser útiles, pasan a ser muy secundarias. Lo que se ha hecho, en ese sentido, ha sido considerar un formalismo más amplio, el $\overline{\text{AFR}}$ (aritmética formalmente recursiva), quizá comparable con una aritmética de segundo orden, y por medio de él se ha logrado un desarrollo del análisis que está en sus inicios, pero en el que se demuestra un resultado muy fuerte, el teorema de Bolzano-Weierstrass, tal como se menciona en la introducción. Como se ve ya en esa introducción, el °-lenguaje no interviene para nada. De hecho, se prefiere el metalenguaje natural de los formalismos recursivos que se describe en la introducción, mas ágil y poderoso que el °-lenguaje, que permite desarrollar el análisis de manera efectiva o exhibitoria.

4. EL FORMALISMO RECURSIVO $\overline{AFR}$ (ARITMETICA FORMALMENTE RECURSIVA).

Describimos ahora el formalismo $\overline{AFR}$, del cual $\overline{AFRR}$ es una restricción, cosa que nos permite aprovechar la descripción de este último. Los símbolos de $\overline{AFR}$ son los de $\overline{AFRR}$ y uno mas, el símbolo M. En la descripción de los términos de $\overline{AFRR}$ se dice: si $\overline{f}$ es operador de grado n y $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ son términos, entonces $\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ y $E\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{n-1})$ son términos. Esto continúa siendo cierto para $\overline{AFR}$ pero hay que agregar que también es término de $\overline{AFR}$ la expresión $M\overline{f}(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{n-1})$. Se entiende que 0 y las variables continúan siendo términos de $\overline{AFR}$. Esta es toda la diferencia entre $\overline{AFR}$ y $\overline{AFRR}$, en cuanto a lenguaje. Veamos ahora cuáles son los principios, PR 1, PR 2 y PR 3 de $\overline{AFR}$.

PR 1. Se expresa del mismo modo que $PR_R 1$, excepto que ahora leeremos $\overline{AFR}$, PR, EPI, EPB y $\overline{B}$ en lugar de $\overline{AFRR}$, PR_R, EPI_R, EPB_R y $\overline{B}_R$, respectivamente.

PR 2. Si $\overline{U}$ es un segmento de $\overline{AFR}$, n es un entero no negativo, $\underline{r} \in N_{\overline{U}}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$, $\underline{s} \in N_{\overline{U}}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,\underline{y},\underline{z})$ y $\overline{f}$ es un operador de grado n+1 nuevo para $\overline{U}$, entonces también es un <u>segmento</u> de $\overline{AFR}$ el sistema formal que se obtiene de agregar a $\overline{U}$, como nuevos postulados, los casos de los siguientes esquemas, para todos los numerales $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c},\underline{d}$:

$$\text{(I)} \quad \underline{r}[\underline{b}_i/\underline{x}_i]=\underline{d} \Rightarrow \overline{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=\underline{d}$$

$$\text{(II)} \quad s[\underline{b}_i/\underline{x}_i][\underline{c}/\underline{y}][\overline{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})/\underline{z}]=\underline{d}$$

$$\Rightarrow \overline{f}(\underline{b},\ldots,\underline{b}_n,\ S(c))=\underline{d}$$

$(III)_0\ \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \Rightarrow M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0$

$(III)'\ \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0\ \wedge\ldots\wedge\ \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$

$\wedge\ \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0 \Rightarrow M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})$

(IV) $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0 \Rightarrow E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$

(V) $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$

(VI) $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c} \Rightarrow \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$

(VII) $S^m(\underline{d})=M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n) \Rightarrow \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{d})=0$, si m es un entero positivo.

PR 3. Se expresa del mismo modo que PR_R3, excepto que ahora leeremos PR 3, $\overline{AFR}$ y (VIII) en lugar de PR_R3, $\overline{AFRR}$ y (D).

Las observaciones 3.2.1-7 son trasladables a $\overline{AFR}$. Hay que agregar que $M\bar{g}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{n-1})$ tiende a adquirir el significado de "mínimo y tal que $\bar{g}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{n-1},\underline{y})=0$, si existe un tal $\underline{y}$". También agregaremos que PR 2 hace que $\bar{f}(\underline{x}_i,\underline{y})$ sea función para el nuevo segmento que se obtiene de añadir a $\bar{V}$ los postulados (I)-(VII). Es claro que PR 2 permite introducir nuevas funciones por recursión primitiva. Pero también se puede observar, y es fácil demostrarlo, que PR 2 se puede usar, análogamente a PR_R2, para cambiar notación e introducir $E\bar{f}(\underline{x}_i)$ y $M\bar{f}(\underline{x}_i)$ por medio de (I)-(VII), aunque ese último término no siempre se puede demostrar que es función en el nuevo segmento.

La demostración general de la consistencia de $\overline{AFR}$ es una simple adaptación de la de $\overline{AFRR}$, pero hay que agregar los términos

$M\overline{f}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{n-1})$ (para $\overline{f}$ de grado n) a la colección de los términos primitivos. El lema 3.3.2 sigue siendo válido, para $\overline{AFR}$.

En $\overline{AFR}$ se tiene el siguiente metateorema muy importante:

M-metateorema. Supongamos que los esquemas (I)-(VII) de PR 2 son postulados de $\overline{U}$, para $\overline{f}(\underline{x}_i,\underline{y})$ (y ciertos $\underline{r}$ y $\underline{s}$). Esto es, supóngase que $\overline{f}(\underline{x}_i,\underline{y})$, $E\overline{f}(\underline{x}_i)$, $M\overline{f}(\underline{x}_i)$ han sido introducidos por medio de PR 2 en alguna etapa en la formación de $\overline{U}$. Entonces:

1) Para $\underline{a}_i \in N_{\overline{U}}$ y cualquier numeral $S^m(0)$,

$$\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,S^m(0))=0 \Rightarrow (M\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \vee \ldots \vee M\overline{f}(a_i)=S^m(0))$$

$$\wedge\ \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$$

2) Para $\underline{a}_i \in N_{\overline{U}}$ y $c \in N_{\overline{U}}$,

$$\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,\underline{c})=0 \Rightarrow \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$$

3) Para numerales $\underline{a}_i$, si $\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$, entonces $M\overline{f}(\underline{a}_i) \in N_{\overline{U}}$.

La parte 3) es muy importante. El tener $\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$ podría ser inútil, en ocasiones, si no se supiera, además, que $M\overline{f}(\underline{a}_i)$ es un $\overline{U}$-número.

Notemos también que 3) vale sólo para numerales $\underline{a}_i$ y que el metateorema de inducción (3.2.4) no es de ninguna utilidad al tratar de extenderlo a $\overline{U}$-números, debido a que la afirmación $M\overline{f}(\underline{a}_i) \in N_{\overline{U}}$ no es expresable en la forma $\overline{U} \vdash \underline{A}$ para ninguna fórmula $\underline{A}$ de $\overline{AFR}$, puesto que afirma que "existen numerales $\underline{c}_1,\ldots,\underline{c}_r$, para algún r, tales que $\overline{U}$ $M\overline{f}(\underline{a}_i)=c_1 \vee \ldots \vee M\overline{f}(\underline{a}_i)=\underline{c}_r$".

Demostración del M-metateorema. Para cualesquiera numerales $\underline{a}_i$ tenemos por $(III)_o$ y EPI 1-4 (esto es, los EPI_R 1-4 de PR_R1 y PR 1),

$$\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,0)=0 \Rightarrow M\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \wedge \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$$

Por (III)' para S(0), S(S(0)), etc. y los mismos EPI 1-4 tenemos entonces

$$\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,S(0))=0 \Rightarrow \overline{f}(\underline{a}_i,0)=0 \vee M\overline{f}(\underline{a}_i)=S(0)$$

$$\Rightarrow (M\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \wedge \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0)$$

$$\vee (M\overline{f}(\underline{a}_i)=S(0) \wedge \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0)$$

$$\Rightarrow (M\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \vee M\overline{f}(a_i)=S(0)) \wedge \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$$

$$\overline{U} \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,S(S(0)))=0 \Rightarrow (M\overline{f}(\underline{a}_i)=0 \vee M\overline{f}(\underline{a}_i)=S(0)$$

$$\vee M\overline{f}(\underline{a}_i)=S(S(0))) \wedge \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$$

etc.

Esto nos da 1) para numerales $\underline{a}_i$ y cada $S^m(0)$; y, por el metateorema de inducción, para cada $\underline{a}_i \in N_{\overline{U}}$. Por el mismo metateorema obtenemos 2) de 1).

Demostremos ahora 3). Por hipótesis se tiene

(***) $B \vdash \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$

para alguna colección finita de postulados de $\overline{U}$. De acuerdo con la demostración del lema 3.3.2 podemos suponer que B es suficientemente grande para tener, con cada G compatible con B, una $W_{D(G)}$ también compatible con B, donde D(G) consta de las identificaciones $\underline{c}'=\underline{d}'$ que aparecen no precedidas de $\neg$ en algún miembro de B que no es un caso de EPI 1-4, está expresado en la forma (*) de 3.3 y satisface la condición $G(\underline{c}'=\underline{d}') \equiv \underline{ver}$. Como $W_{D(G)}$ es compatible con B es claro, por (***), que

$$W_{D(G)}(\bar{f}(\underline{a}_i, M\bar{f}(\underline{a}_i))=0) \equiv \underline{ver}$$

Esto muestra, por la manera en que se define $W_{D(G)}$, que $D(G)$ debe contener ciertas identificaciones, $M\bar{f}(\underline{a}_i)=S^{m(G)}(0)$ y $\bar{f}(\underline{a}_i, S^{m(G)}(0))=0$, para algún numeral $S^{m(G)}(0)$. Pero esto significa que la identificación $M\bar{f}(\underline{a}_i)=S^{m(G)}(0)$ aparece no precedida de $\neg$ en algún miembro de B que esté expresado en la forma (*), y que G vale ver en ella. Como B es finita, esto muestra que tenemos un conjunto finito de numerales, $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_s$, tales que

$$G(M\bar{f}(\underline{a}_i)=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee M\bar{f}(\underline{a}_i)=\underline{c}_s) \equiv \underline{ver}$$

para cada G compatible con B. Es bien sabido, y fácilmente (y finitariamente) demostrable que entonces se tiene

$$B \vdash M\bar{f}(\underline{a}_i)=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee M\bar{f}(\underline{a}_i)=\underline{c}_s,$$

y lo mismo es cierto, claro está, para $\bar{U}$ en lugar de B, quedando así demostrado que $M\bar{f}(\underline{a}_i) \in N_{\bar{U}}$, como se quería.

Esto termina la demostración del M-metateorema.

Podemos observar que $\overline{AFR}$ es un instrumento que sirve para formalizar de manera finitariamente consistente la aritmética ultradiofántica, entendiendo por ésta la ampliación de la aritmética recursiva general que se obtiene agregando a ésta el esquema de existenciación, que exige que si $f(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, y)$ pertenece a la clase (de funciones de la aritmética ultradiofántica) entonces también pertenece a esta la función

$$f_E(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)=\begin{cases}1, & \text{si existe } \underline{y} \text{ tal que } f(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n,y)=0\\ 0, & \text{si no}\end{cases}$$

Es claro que la contrapartida formal de esta función es $E\overline{f}(\underline{x}_i)$, para $\overline{f}(\underline{x}_i,\underline{y})$.

Sin embargo, el instrumento es imperfecto en el sentido de que no podemos demostrar en general que $\overline{V}\vdash E\overline{f}(\underline{a}_i)=S(0)$ implique $M\overline{f}(\underline{a}_i)\in N_{\overline{V}}$ y $\overline{V}\vdash \overline{f}(\underline{a}_i,M\overline{f}(\underline{a}_i))=0$. Lo que mas se aproxima a esto es el M-metateorema. Si exigiéramos que se diera siempre esa inferencia no sabríamos como demostrar finitariamente la consistencia.

Como ya se mencionó en la introducción, con $\overline{AFR}$ se puede desarrollar un análisis matemático finitariamente consistente efectivo o exhibitorio que es mas fuerte que el análisis constructivo, ya que permite demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass. Lo que se ha desarrollado de este análisis está descrito con todo detalle en [To]. Ese desarrollo está inspirado básicamente en [Go 1]. Quizá en desarrollos ulteriores haya que buscar otras fuentes de inspiración, como el suplemento IV de [Hi-Be].

Las nociones que aparecen en la exposición del teorema de Bolzano-Weierstrass en la introducción se definen como sigue, usando las expresiones auxiliares $\underline{a}-\underline{b}/c$.

$$\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\in Q'(\underline{x}_i) \equiv \underline{b}\in N(\underline{x}_i)\,\&\,\underline{c}\in N(\underline{x}_i)\,\&\,\underline{d}\in N(\underline{x}_i)$$

$$\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\in Q(\underline{x}_i) \equiv \underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\in Q'(\underline{x}_i)\,\&\,(\forall^* a_i)[\vdash \neg\underline{d}[\underline{a}_i/\underline{x}_i]=0],$$

Representemos las expresiones $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}$ por $\alpha,\beta,\varphi,\ldots$. Las definiciones de $\alpha\pm\beta$, $\alpha<\beta$, $\alpha\leq\beta$, $|\alpha-\beta|$, son las obvias. Se define entonces, si $1/n \equiv S(0)-0/n$,

$$\varphi(\underline{x}) \in R(\underline{x}) \equiv \varphi(\underline{x}) \in Q'(\underline{x}) \,\&\, (\exists^* \overline{m}(\underline{x}))[\overline{m}(\underline{x}) \in N(\underline{x})$$

$$\& (\forall^* \underline{n},\underline{r})[\vdash |\varphi(\overline{m}(\underline{n})+\underline{r}) - \varphi(\overline{m}(\underline{n})| < 1/\underline{n}\,]]$$

En [To] el teorema de B.-W. se demuestra de manera un poco diferente a como se ha expuesto en la introducción. La parte más difícil y laboriosa de la demostración es el cumplimiento de la exigencia de consistencia finitaria en todas las aplicaciones de PR 3 que son necesarias (condición 4) de $PR_R 3$ y PR 3).

REFERENCIAS

[Ar-To] G. Arenas y F. Tomás. Formally recursive arithmetic and classical arithmetic. An. Inst. Mat. UNAM, 26 (1986), pp. 1-19.

[Be] E. Bencivenga. Free Logics. En [Ga-Gu], pp. 373-426.

[Br] L.E.J. Brouwer. On the significance of the principle of excluded in middle in mathematics, especially in function theory. En [He], pp. 334-41.

[Fe] S. Feferman. Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions. The J. of Symb. Log., 53 (1988), pp. 364-84.

[Ga-Gu] D. Gabbay & F. Guenthner. Handbook of Philosophical Logic. Vol. III: Alternatives to Classical Logic. D. Reidel Pub. Co. 1986.

[Go] R.L. Goodstein. Recursive number theory. North Holland, 1957.

[Go 1] Id. Recursive analysis. Id., 1961.

[Gö] K. Gödel. On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I. En [He], pp. 596-616.

[Gö 1] Id. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, vol. 4, pp. 34-38. Hay traducción al español en Obras Completas de Gödel (AE).

[He] J. v. Heijenoort. From Frege to Gödel. Harvard UP, 1977.

[Hi] D. Hilbert. On the infinite. En [He], pp. 367-92.

[Hi-Be] D. Hilbert & P. Bernays. Grunlagen der Mathematik. Bd. 2, Springer, 1939.

[Me] E. Mendelson. Introduction to mathematical logic. v. Nostrand 1965.

[Me-Ur] R.K. Meyer & I. Urbas. Conservative extension in relevant arithmetic. Zeitschr. f. math. Logik und Grundl.der Math, 32 (1986), pp. 45-50.

[Si] W. Sieg. Hilbert's program sixty years later. The J. of Symb. log., 53 (1988), pp. 338-48.

[Sim] S.G. Simpson. Partial realizations of Hilbert's program. The J. of Symb. Log., 53 (1988), pp. 349-63.

[Ta] W.W. Tait. Finitism. Journal of Philosophy, 78 (1981) pp. 524-46.

[To] F. Tomás. On Hilbert's program. Exposición preliminar 164, Inst. de Mat. UNAM 1989.

[Tor] C. Torres. Los teoremas de Gödel. Tesis de maestría, F. de C. UNAM, 1989.

[We] H. Weyl. David Hilbert and his mathematical work. Bull. of the Amer. Math. Soc. 50 (1944), pp. 612-54. Boletín da Sociedade Mat. de São Paulo 1 (1946), pp. 76-104, 2 (1947) pp. 37-60 (versión en portugués). También en: Gesammelte Abhandlungen Bd. 4, Springer, 1908, pp. 130-172 (en particular: Axiomatics, pp. 153-63. Reproducido en versión abreviada en: Constance Reid. Hilbert (pp. 245-83). Springer, 1970.