



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**COBERTURA CON BALIZAS EN POLÍGONOS Y POLIEDROS
ORTOGONALES**

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

P R E S E N T A:

JESÚS NESTALY MARÍN NEVÁREZ

DIRECTOR DE TESIS: JORGE URRUTIA GALICIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CD. DE MÉXICO, SEPTIEMBRE DE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción y trabajo previo	7
1.1. Introducción	7
1.2. Trabajo previo	8
1.3. Resultados obtenidos	9
2. Preliminares	10
2.1. Polígonos	10
2.2. Gráficas	14
2.3. Poliedros	18
3. Problemas de galería de arte	23
3.1. Introducción	23
3.2. Definición del problema	24
3.3. Vigilancia de galerías de arte poligonales	25
3.4. Vigilancia de galerías de arte ortogonales	28
4. Atracción con balizas	34
4.1. Introducción	34
4.2. Preliminares	34
4.3. Propiedades de las regiones de atracción	36
4.4. Atracción en polígonos	37
4.5. Atracción en poliedros ortogonales	39
4.6. El Problema de cobertura con balizas	42
5. Cobertura de polígonos ortogonales	43
5.1. Introducción	43
5.2. Cobertura del interior	43
5.3. Cobertura de interior y exterior	48

- 6. Cobertura de poliedros ortogonales** **51**
- 6.1. Cobertura de poliedros ortogonales 51
- 6.2. Cobertura del interior con balizas arista 55
- 6.3. Cobertura simultánea del interior y el exterior con aristas baliza . . . 57

- 7. Cobertura de ortoárboles** **61**
- 7.1. Introducción 61
- 7.2. Vigilancia de ortoárboles 62
- 7.3. Cobertura con balizas 66
 - 7.3.1. Cota superior 66
 - 7.3.2. Cota inferior 69

Índice de figuras

2.1.	Un polígono \mathcal{X} -monótono.	11
2.2.	Un polígono con tres hoyos en su interior, los cuales se muestran sombreados.	11
2.3.	Clasificación de los vértices y aristas de un polígono ortogonal.	12
2.4.	Un histograma cuya arista base se muestra resaltada.	12
2.5.	Partición de un polígono obtenida con diagonales.	13
2.6.	Representación de la gráfica del Ejemplo 2.2.2.	14
2.7.	Representación de (a) una trayectoria de longitud 4, (b) un ciclo de longitud 5.	15
2.8.	Representación de una gráfica plana y su gráfica dual.	17
2.9.	Un poliedro con cuatro caras.	18
2.10.	Un poliedro ortogonal con una arista cóncava, e	19
2.11.	Clasificación de los vértices de un poliedro ortogonal: (a) vértice de un octante, (b) vértice de tres octantes, (c) vértice de cuatro octantes de tipo 1, (d) vértice de cuatro octantes de tipo 2, (e) vértice de cinco octantes, (f) vértice de siete octantes.	20
2.12.	Clasificación de las aristas de un poliedro ortogonal: (a) arista convexa o de dos octantes, (b) arista cóncava o de seis octantes.	21
2.13.	Ejemplos de ortoárboles, los ortoedros sombreados representan sus conectores. (a) Un ortoárbol bien separado, (b) un ortoárbol mal separado.	22
2.14.	Tipos de uniones en ortoárboles bien separados.	22
3.1.	Existencia de una diagonal en un polígono: (a) el segmento uw está contenido en P , (b) el segmento uw no está contenido en P	26
3.2.	Triangulación 3-coloreada de un polígono y su gráfica dual.	27
3.3.	Una familia de polígonos que requieren $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias para ser vigilados.	28
3.4.	Un polígono 1-ortogonal cuya nariz se muestra sombreada.	29
3.5.	Caso 1: e'' toca una arista completa.	30

3.6.	Caso 2.1: (a) e'' toca sólo un vértice x , (b) h toca un vértice y	31
3.7.	Caso 2.2. h toca una arista f que lo contiene completamente.	31
3.8.	Familia de polígonos ortogonales que requieren $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias para ser vigilados.	32
3.9.	Gráfica obtenida al agregar diagonales a una cuadrilaterización. La gráfica se muestra 4-coloreada.	32
4.1.	La atracción con balizas es asimétrica: (a) la región de atracción del punto a (en azul) contiene al punto b , (b) la región de atracción del punto b (en café) no contiene al punto a	35
4.2.	El punto p alcanza un mínimo local x con respecto a b	36
4.3.	Un polígono P y un punto $b \in P$ tal que $A(b) = V(b)$	37
4.4.	El objeto colocado en el punto p se atora en el vértice convexo v	38
4.5.	El camino de atracción de p con respecto a b en u es indeterminado.	39
4.6.	El camino de atracción de p alcanza a b	40
4.7.	El objeto colocado en el punto p se atora en un vértice convexo al ser atraído por v y se atora en una arista convexa al ser atraído por un punto en e	41
4.8.	(a) El objeto colocado en el punto p se atora en una cara al ser atraído por un punto en e . (b) El objeto colocado en el punto p es atraído por b hasta una arista cóncava y puede moverse sobre cualquiera de sus caras adyacentes disminuyendo su distancia hasta b , $AP(p, b)$ es indeterminado.	41
5.1.	El camino de atracción de p con respecto a b alcanza a b en el subpolígono P_1 , mostrado en gris en (a), pero no alcanza a b en el polígono completo (b).	45
5.2.	(a) Polígono que admite un corte seguro, (b) polígono que no admite un corte seguro. (Figura tomada de [4].)	45
5.3.	La espiral de los polígonos (a) P_9 y (b) P_{18} . (Figura tomada de [4].)	46
5.4.	Colocar dos balizas b_1 y b_2 en P_7 cerca de v_2 y v_6 no es suficiente para cubrir la región triangular mostrada en gris. (Figura tomada de [4].)	47
5.5.	(a) El punto $s(p)$ aparece antes que el punto $s(q)$ en la espina de la espiral, por lo que $p \prec q$. (b) La partición de P_r en $3r + 2$ rectángulos. (Figuras tomadas de [4].)	48
5.6.	Descomposición del interior y el exterior de un polígono ortogonal en histogramas.	50

6.1.	Un poliedro ortogonal que no puede ser cubierto con balizas en los vértices.	52
6.2.	Las tres diferentes proyecciones ortogonales del octoplex con muescas, los segmentos muestran que el punto central se atora en una muesca cuando es atraído por cada uno de los vértices de una esquina. . . .	52
6.3.	Un ortoárbol cuyo exterior no puede ser cubierto con balizas en los vértices.	53
6.4.	(a) Cuña cuyo ápice es vertical y contiene al punto p . (b) Proyección ortogonal en el plano \mathcal{XY} de algunos elementos seleccionados del poliedro.	54
6.5.	Proyección ortogonal de un poliedro ortogonal que necesita $\lfloor \frac{e}{21} \rfloor$ balizas arista para ser cubierto.	57
6.6.	(a) Un poliedro ortogonal y un punto p en su exterior, p es intersecado por un plano- \mathcal{X} . (b) La intersección del plano \mathcal{X} con p . Los vértices rojos y verdes representan las aristas baliza en el poliedro.	60
7.1.	Un ortoárbol bien separado que requiere $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices para ser vigilado.	64
7.2.	Un ortoárbol con un ortoedro maximal distinguido mostrado en azul, y la gráfica generada al incluir los vértices asignados a cada ortoedro maximal de P y unir dos vértices si son asignados al mismo ortoedro.	65
7.3.	(a) Un ortoárbol P intersecado por el plano β que contiene una cara inferior de P , f ; (b) el polígono generado por la componente conexa de $P \cap \beta$ que contiene la cara f ; los δ -rectángulos son mostrados de color rojo.	68
7.4.	Un ortoárbol bien separado P y la gráfica H obtenida de las uniones (mostradas de color o de gris oscuro) y las hojas de P . En cada paso, obtenemos una trayectoria más larga en H (mostradas como p_1 , p_2 y p_3), después colocamos una baliza en la unión de P correspondiente al nodo coloreado en H (el cual se muestra del mismo color que la trayectoria a la que pertenece), y finalmente, separamos los subárboles al eliminar la arista correspondiente (mostrada con una cruz del mismo color).	70

Capítulo 1

Introducción y trabajo previo

1.1. Introducción

La atracción con *balizas* (del inglés *beacons*) es un sistema de movimiento en el que un objeto (representado por un punto) se mueve de manera que se disminuya de manera local su distancia euclidiana con respecto a una baliza activada. Se eligió el termino baliza como traducción de beacon porque las balizas son objetos señalizadores que se utilizan para indicar un lugar geográfico. Ejemplos de balizas son los faros, las boyas y los sonares. En los dominios poligonales pueden existir obstáculos entre los objetos a mover y las balizas. Un objeto se moverá a lo largo de cualquier obstáculo que encuentre hasta que alcance a la baliza activada o hasta que se quede atorado en un punto donde ya no exista un movimiento que pueda realizar para disminuir su distancia a la baliza. Si un objeto logra llegar a una baliza, entonces se dice que la baliza *cubre* o *atrae* al objeto.

Este modelo de atracción fue presentado recientemente por Biro [5, 6, 8]. La atracción con balizas puede ser vista como una generalización de la noción clásica de visibilidad. Si una baliza puede ver a un objeto, entonces puede hacer que el objeto se mueva en línea recta hasta llegar a ella.

En esta tesis consideramos el problema de *cobertura* con balizas. En el problema de cobertura con balizas queremos colocar un conjunto de balizas B dentro de un dominio P , de forma tal que cualquier punto $p \in P$ sea cubierto por al menos un elemento de B . Cuando lo anterior se cumple decimos que el conjunto B *cubre* a P .

El problema de cobertura con balizas ha sido estudiado en \mathbb{R}^2 en polígonos simples, polígonos con hoyos y polígonos ortogonales. Para los últimos se conocen cotas combinatorias justas.

En este trabajo extendemos la noción de atracción con balizas a \mathbb{R}^3 , estudiando el problema de cobertura de poliedros ortogonales con balizas.

1.2. Trabajo previo

El trabajo previo al problema de cobertura con balizas de un polígono inicia con los resultados del Problema de la galería de arte. En el Problema de la galería de arte se estudia la vigilancia con guardias colocados en puntos de un polígono. Si el segmento de recta entre dos puntos de un polígono está completamente contenido en el polígono, entonces decimos que esos dos puntos son *visibles* entre sí. Se dice que un guardia vigila el subconjunto de un polígono que es visible para él.

En el Problema de la galería de arte se busca encontrar un conjunto de puntos de cardinalidad mínima contenidos en un polígono simple, de modo tal que todo punto del polígono sea visible para al menos un elemento del conjunto. Se sabe que este problema es tanto NP-difícil como difícil de aproximar (APX-difícil) para varios tipos de polígono [15, 19, 24, 26]. También se conoce la cantidad de guardias suficientes y necesarios para diferentes tipos de polígonos [11, 16, 17, 18, 12], y diferentes tipos de guardias [10, 22, 28].

Podemos considerar problemas análogos al problema de la galería de arte utilizando balizas en lugar de guardias de visibilidad. Una baliza colocada en un punto de un polígono simple cubre el subconjunto del polígono que puede atraer hasta alcanzarlo. En el problema de cobertura con balizas se busca encontrar un conjunto de puntos de cardinalidad mínima en un polígono simple, de modo que cada punto del polígono sea cubierto por al menos un elemento del conjunto. Biro mostró que encontrar tal conjunto mínimo de balizas es tanto NP-difícil como APX-difícil [5]. En el mismo trabajo, se muestra que el problema de decisión subyacente es NP-completo: dados un polígono simple y un conjunto de balizas en su interior, es posible verificar en tiempo polinomial que el polígono queda cubierto por tal conjunto de balizas.

En cuanto a la cantidad de balizas necesarias y suficientes para cubrir un polígono simple con n vértices, Biro [5] da una cota inferior de $\lfloor \frac{4n}{13} \rfloor$ y una cota superior de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, la cual se deriva de la cota superior para el problema de la galería de arte. En

el mismo trabajo se muestra que si el polígono tiene h hoyos, entonces $\lfloor \frac{4n}{13} \rfloor$ balizas son a veces necesarias y $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ balizas son siempre suficientes para cubrirlo.

En el problema de cobertura con balizas en polígonos ortogonales, Biro *et al.* [7] demostraron que $\lfloor \frac{n+4}{8} \rfloor$ balizas son a veces necesarias mientras que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ balizas son siempre suficientes para cubrir un polígono ortogonal con n vértices. También hicieron la conjetura de que $\lfloor \frac{n+4}{8} \rfloor$ balizas sería la cota justa, pero después fueron refutados por Bae *et al.* [4], quienes demostraron que $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ balizas son a veces necesarias y siempre suficientes para cubrir un polígono ortogonal.

1.3. Resultados obtenidos

En esta tesis presentamos los siguientes resultados:

- Demostramos que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ balizas colocadas en los vértices de un polígono ortogonal P con n vértices son siempre suficientes para cubrir simultáneamente el interior y el exterior de P .
- Demostramos que existe un poliedro ortogonal tal que su interior no puede ser cubierto por balizas colocados en sus vértices, aún si se colocaran balizas en todos sus vértices.
- Mostramos un poliedro ortogonal tal que su exterior no puede ser cubierto por balizas colocadas en sus vértices, aún si se colocaran balizas en todos sus vértices.
- Estudiamos una familia de poliedros ortogonales llamados *ortoárboles*, los cuales pueden ser tanto vigilados como cubiertos desde sus vértices. En este trabajo demostramos que $\lfloor \frac{n}{12} \rfloor$ balizas son a veces necesarias para cubrir un ortoárbol con n vértices. También demostramos que $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ balizas colocadas en los vértices son siempre suficientes para cubrir un ortoárbol, y si el ortoárbol es de una clase especial, son suficientes $\lfloor \frac{n}{12} \rfloor$ balizas. También mostramos que $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ guardias colocados en los vértices son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar un ortoárbol con n vértices.
- Finalmente, definimos el modelo de aristas baliza y demostramos que $\lfloor \frac{e}{12} \rfloor$ aristas baliza son siempre suficientes, mientras que $\lfloor \frac{e}{21} \rfloor$ aristas baliza son a veces necesarias para cubrir cualquier poliedro ortogonal con e aristas. También demostramos que $\lfloor \frac{e}{6} \rfloor$ aristas balizas son siempre suficientes para cubrir simultáneamente el interior y el exterior de un poliedro ortogonal con e aristas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Polígonos

Las definiciones contenidas en esta sección pueden consultarse en [23] o [25].

Definición 2.1.1. Un *polígono* P es una sucesión ordenada de n puntos v_1, v_2, \dots, v_n en el plano, con $n \geq 3$, llamados *vértices*, junto con el conjunto de segmentos de línea que une a v_i con v_{i+1} , para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, y a v_n con v_1 , llamado el conjunto de *aristas* de P .

Se dice que P es un polígono *simple* si ningún par de aristas no consecutivas se intersecan. Un polígono simple divide al plano en dos regiones, una no acotada, llamada el *exterior*, y una acotada, llamada el *interior*. La colección de vértices y aristas de P es llamada la *frontera* de P , y será denotada como ∂P . Por simplicidad, de aquí en adelante usaremos el término polígono para denotar a un polígono simple junto con su interior.

Un vértice v de P es llamado *convexo* si el ángulo interno de P en v es menor a π , y *cóncavo* si el ángulo interno de P en v es mayor a π .

Definición 2.1.2. Un polígono P es *convexo* si para cualquier par de puntos $a, b \in P$, el segmento de línea ab está completamente contenido en P .

Definición 2.1.3. Un polígono P es *monótono* con respecto a una línea l si cualquier línea l' perpendicular a l interseca a P en a lo más una componente conexa. Un polígono monótono respecto al eje \mathcal{X} o al eje \mathcal{Y} es llamado *\mathcal{X} -monótono* o *\mathcal{Y} -monótono*.

respectivamente.

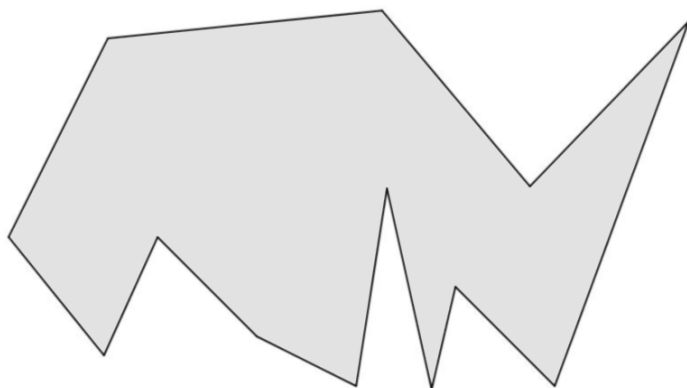


Figura 2.1: Un polígono \mathcal{X} -monótono.

Sean P un polígono y $H = \{P_1, P_2, \dots, P_h\}$ un conjunto de polígonos ajenos contenidos en el interior de P . El conjunto $P - \bigcup H$ es llamado polígono con hoyos. Consideramos a la unión de la región no acotada con $\bigcup H$ como el exterior del polígono con hoyos.

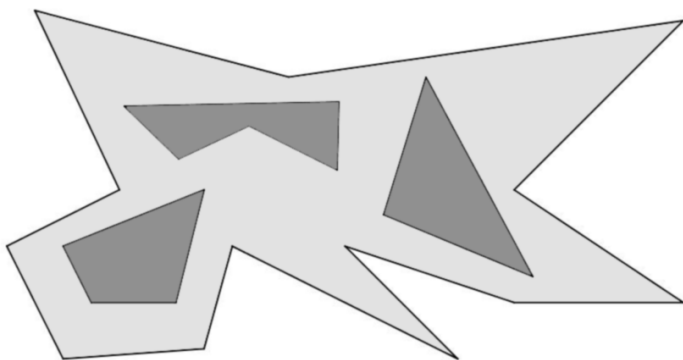


Figura 2.2: Un polígono con tres hoyos en su interior, los cuales se muestran sombreados.

Definición 2.1.4. Un polígono P es *ortogonal* si cualquier arista de P es paralela a uno de los dos ejes canónicos, y además el ángulo interior de dos aristas consecutivas es siempre $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$.

Una arista a de un polígono ortogonal es llamada *arista derecha* si existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquier punto a distancia menor o igual que ε de un punto interior de a y

a la izquierda de a está contenido en el interior del polígono. Las aristas *izquierdas*, *superiores* e *inferiores* son definidas de manera similar.

Un vértice de un polígono ortogonal es llamado *vértice superior derecho* si es el extremo derecho de una arista superior. Los vértices *superior izquierdo*, *inferior derecho*, e *inferior izquierdo* son definidos de manera similar.

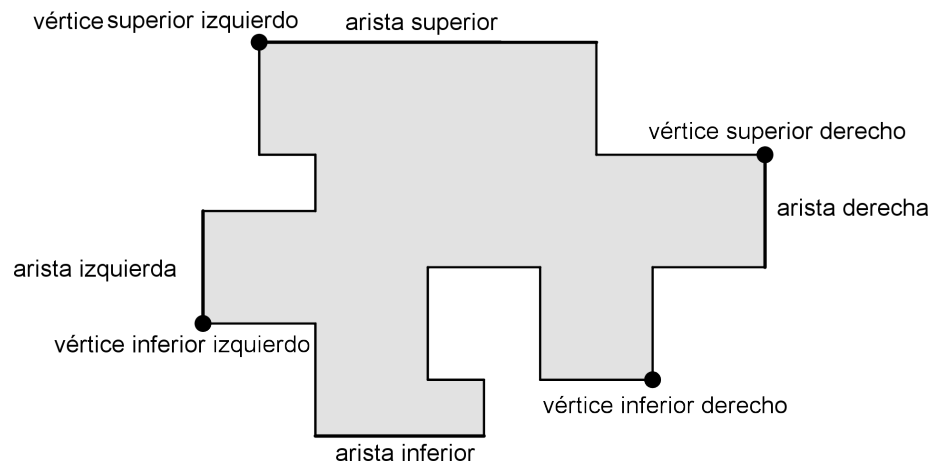


Figura 2.3: Clasificación de los vértices y aristas de un polígono ortogonal.

Definición 2.1.5 (Edelsbrunner *et al.* [14]). Un *histograma* H es un polígono ortogonal que tiene una arista distinguida, llamada *base*, tal que la longitud de la base es igual a la suma de las longitudes del resto de las aristas de H que son paralelas a la base.

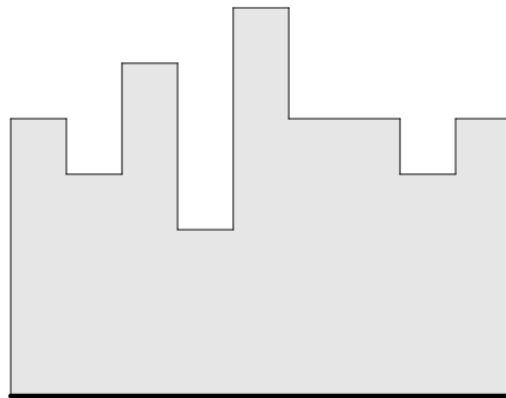


Figura 2.4: Un histograma cuya arista base se muestra resaltada.

Una *diagonal* en un polígono P es un segmento de línea que conecta dos vértices de P cuyo interior está contenido en el interior de P .

Una *partición* de un polígono P es un conjunto de polígonos tal que los interiores de los polígonos no se intersecan y la unión de todos los polígonos del conjunto es igual a P .

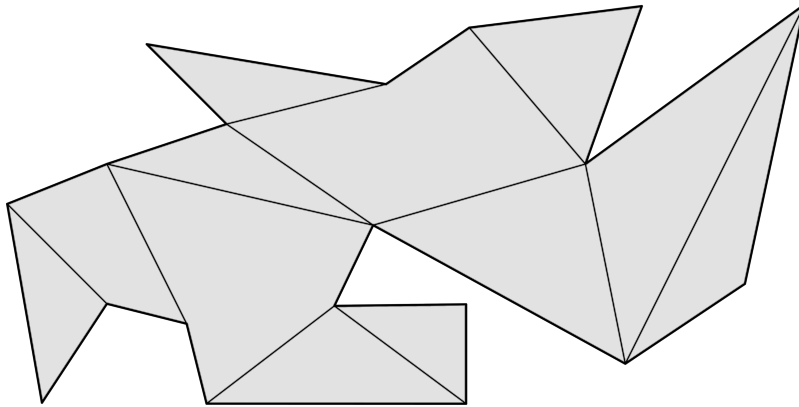


Figura 2.5: Partición de un polígono obtenida con diagonales.

Si todos los polígonos resultantes de una partición de un polígono P son triángulos, entonces decimos que la partición es una *triangulación* de P . Si todos los polígonos son cuadriláteros, entonces la partición es llamada *cuadrilaterización*.

2.2. Gráficas

Las definiciones contenidas en esta sección pueden consultarse en [9].

Definición 2.2.1. Una *gráfica* G es una tupla $(V(G), E(G))$ que consiste de un conjunto $V(G)$ de *vértices* y un conjunto $E(G)$, ajeno de $V(G)$, de *aristas*, junto con una *función de incidencia* Φ_G , la cual asocia a cada arista de G con un par no ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de G .

De aquí en adelante, nos referiremos a $V(G)$ y $E(G)$ simplemente como V y E cuando no exista ambigüedad.

Si en una gráfica G tenemos una arista e y un par de vértices u, v , tales que $\Phi_G(e) = \{u, v\}$, entonces se dice que e *une* a u y v , y los vértices u y v son llamados los *extremos* de e . Por simplicidad, nos referiremos a la arista que une al par de vértices $\{u, v\}$ como uv .

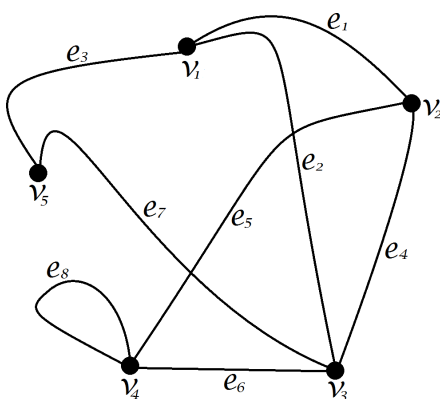


Figura 2.6: Representación de la gráfica del Ejemplo 2.2.2.

Ejemplo 2.2.2.

$$G = (V, E)$$

donde

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

y Φ_G se define por:

$$\Phi_G(e_1) = v_1v_2, \Phi_G(e_2) = v_1v_3, \Phi_G(e_3) = v_1v_5, \Phi_G(e_4) = v_2v_3,$$

$$\Phi_G(e_5) = v_2v_4, \Phi_G(e_6) = v_3v_4, \Phi_G(e_7) = v_3v_5, \Phi_G(e_8) = v_4v_4.$$

El número de vértices de una gráfica G es llamado el *orden* de G mientras que el número de aristas de G es llamado el *tamaño* de G . El número de aristas que inciden en un vértice v es llamado el *grado* de v .

Se dice que los extremos de una arista *inciden* en la arista, y viceversa. Dos vértices que inciden en la misma arista, o dos aristas que inciden en el mismo vértice son llamados *adyacentes*. Dos vértices adyacentes distintos son llamados *vecinos*.

Definición 2.2.3. Una gráfica F es llamada una *subgráfica* de una gráfica G si $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$ y Φ_F es la restricción de Φ_G al conjunto de aristas $E(F)$.

Dadas una gráfica G y una subgráfica F de G , decimos que G *contiene* a F , o que F está *contenida* en G , lo cual se escribe $G \supseteq F$ o $F \subseteq G$.

Una arista cuyos vértices incidentes son idénticos es llamada *lazo*. Un lazo cuenta como una doble incidencia. Una arista que incide en vértices distintos se llama *enlace*. Los enlaces que tienen el mismo par de extremos se llaman *aristas paralelas*. Una gráfica que no contiene lazos ni aristas paralelas es llamada *gráfica simple*.

Un *camino* es una secuencia lineal de vértices en una gráfica, tal que existe una arista entre cada vértice de la secuencia y el vértice siguiente. Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices. Un *ciclo* en tres o más vértices en una gráfica es una trayectoria en la que el primer y el último vértice son el mismo. Un ciclo en dos vértices consiste en un par de vértices unidos por dos aristas paralelas, mientras que un ciclo en un vértice consiste en un vértice con un lazo. La *longitud* de una trayectoria o un ciclo es igual al número de aristas que los componen.

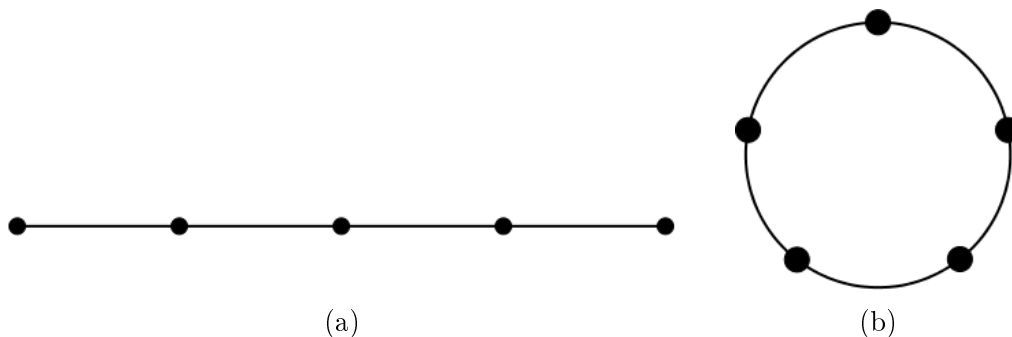


Figura 2.7: Representación de (a) una trayectoria de longitud 4, (b) un ciclo de longitud 5.

Una gráfica es *conexa* si para cada partición de su conjunto de vértices en dos

subconjuntos no vacíos X y Y , existe una arista con un extremo en X y otro en Y ; de otro modo, la gráfica es llamada no conexa.

Un *árbol* es una gráfica conexa que no tiene ciclos. Una gráfica (posiblemente no conexa) que no tiene ciclos es llamada *bosque*. Una subgráfica de un árbol es también conocida como un *subárbol*.

Una gráfica *aplanable* es aquella que puede ser representada en el plano de modo tal que sus aristas (representadas por curvas) sólo se encuentren en sus extremos comunes (representados por puntos), a tal representación se le conoce como *encaje plano*. A una gráfica aplanable junto con su encaje plano se le conoce como gráfica *plana*.

Una gráfica plana G representada en el plano divide al mismo en diferentes regiones, llamadas las caras de G . La región no acotada es llamada *cara exterior*, mientras que las regiones acotadas son llamadas *caras interiores*. Se dice que una cara *incide* en los vértices y aristas de su frontera, y que dos caras son *adyacentes* si sus fronteras tienen una arista en común. El grado de una cara f en una gráfica plana es igual a la cantidad de caras adyacentes a f .

Dada una gráfica plana G podemos definir una segunda gráfica G^* , llamada la gráfica dual de G , de la siguiente manera: por cada cara f de G existe un vértice f^* en G^* , y por cada arista e de G existe una arista e^* en G^* . Dos vértices f^* y g^* son unidos por la arista e^* de G^* si y sólo si sus caras correspondientes f y g de G son separadas por la arista e en G . Observemos que si e no pertenece a un ciclo en G , entonces $f = g$, por lo que e^* es un lazo en G^* ; del mismo modo, si e es un lazo en G , la arista e^* no pertenece a un ciclo en G^* .

La gráfica dual G^* de una gráfica plana G es también una gráfica plana. Para verlo podemos colocar cada vértice f^* en la cara correspondiente f del encaje plano de G , y después trazar cada arista e^* de forma que cruce la arista e correspondiente de G exactamente una vez y que no cruce otras aristas de G . Un ejemplo es mostrado en la Figura 2.8.

Dados un polígono P y una partición de P , definimos la gráfica dual de P , G^* , como sigue. Por cada polígono de la partición de P existe un vértice en G^* , y dos vértices de G^* están unidos por una arista si y sólo si sus polígonos correspondientes comparten una arista en la partición de P . La región exterior de P no es tomada en cuenta en esta definición.

Una gráfica simple, plana y conexa en la que todas sus caras tienen grado tres es llamada *triangulación del plano*, o triangulación. Una triangulación es también

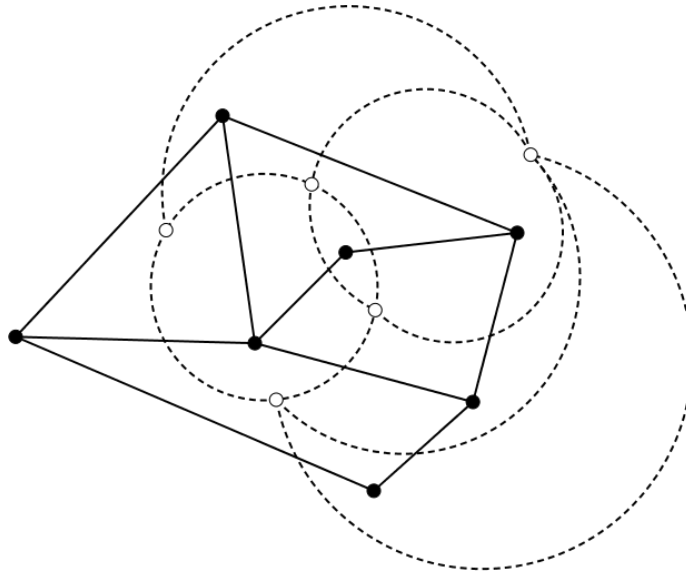


Figura 2.8: Representación de una gráfica plana y su gráfica dual.

llamada gráfica plana máxima.

Dada una gráfica $G = (V, E)$, se define una k -coloración de los vértices de G como una función $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Cuando a ningún par de vértices adyacentes en G se le asigna el mismo color, se dice que la coloración es *propia*. Una k -coloración induce una partición de V en subconjuntos de la forma $C_i = \{v \in V \mid c(v) = i\}$, los cuales son llamados las *clases cromáticas* inducidas por c . Cuando una gráfica G acepta una k -coloración propia se dice que G es k -coloreable.

2.3. Poliedros

Los conceptos de topología utilizados en esta sección pueden consultarse en [3].

Definición 2.3.1. Un *poliedro (cerrado)* en \mathbb{R}^3 es un conjunto compacto acotado por una 2-variedad.

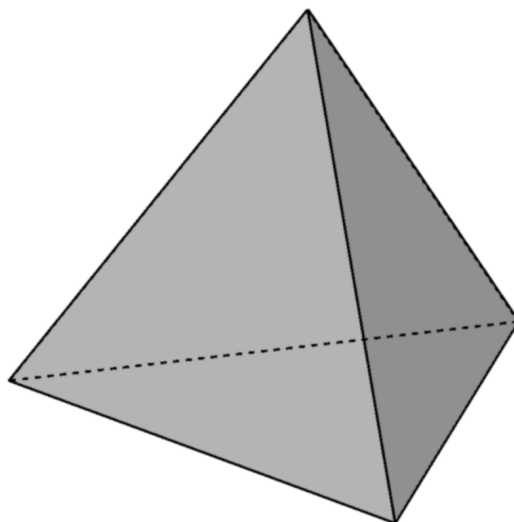


Figura 2.9: Un poliedro con cuatro caras.

Dado un poliedro P , denotamos su *interior abierto* como $int(P)$, su *frontera* como ∂P y su *exterior abierto* como $ext(P)$. La frontera es considerada como parte del poliedro. A $int(P)$ también se le conoce como *poliedro abierto*.

Siguiendo la definición dada, un poliedro cerrado es un espacio topológico compacto (acotado y cerrado), y su frontera es homeomorfa a la esfera o al toro con g agujeros (en caso de ser un poliedro con g hoyos). A g se le conoce como el *género* del poliedro. Si g es cero, entonces el poliedro es homeomorfo a una esfera.

Una *cara* de un poliedro es un subconjunto plano maximal de su frontera tal que su interior es conexo y no vacío. Así, una cara es un polígono, posiblemente con hoyos. Consideramos como un vértice del poliedro a un vértice de cualquiera de sus caras.

Una *arista* de un poliedro es un segmento de línea minimal, que es compartido por dos caras distintas, y que une a dos vértices del poliedro. Cada arista junto con sus dos caras adyacentes determina un ángulo diedro en el interior del poliedro. Si

tal ángulo es mayor que 2π se dice que la arista es *cóncava*, de lo contrario, la arista es *convexa*. Un *poliedro convexo* es aquel que no contiene aristas cóncavas.

Definición 2.3.2. Un poliedro P es un *poliedro de levantamiento* si es conexo y existe un plano Q perpendicular al eje- Z tal que:

- la intersección de P con Q es no vacía, y
- para todos los planos paralelos a Q , su intersección con P es vacía o es una traslación vertical de la intersección de P con Q .

Los prismas son ejemplos de poliedros de levantamiento.

Definición 2.3.3. Un poliedro es *ortogonal* si todas sus caras son paralelas al plano- \mathcal{XY} , al plano- \mathcal{XZ} , o al plano- \mathcal{YZ} . De manera equivalente, un poliedro es ortogonal si todas sus aristas son paralelas a uno de los ejes. Un *ortoedro* es un poliedro ortogonal convexo.

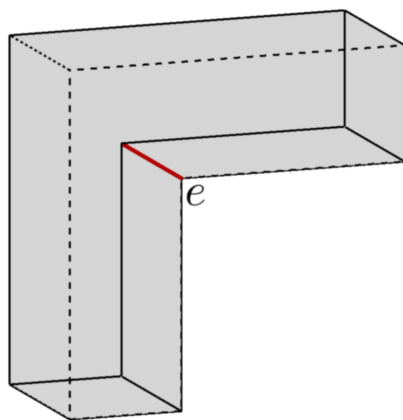


Figura 2.10: Un poliedro ortogonal con una arista cóncava, e .

En un poliedro ortogonal las aristas cóncavas tienen ángulo interior de 270 grados, mientras que las aristas convexas tienen ángulo interior de 90 grados.

Un *plano- \mathcal{X}* es un plano perpendicular al eje \mathcal{X} ; un *plano- \mathcal{Y}* y un *plano- \mathcal{Z}* se definen de forma similar.

Una *cara- \mathcal{X}* es aquella que pertenece a un plano- \mathcal{X} . Una *cara- \mathcal{Y}* y una *cara- \mathcal{Z}* son definidas de manera análoga.

Una cara- \mathcal{Y} f de un poliedro ortogonal P es una *cara izquierda* (*cara derecha*), si para cualquier punto interior $q \in f$ existe un $\varepsilon > 0$, tal que cualquier punto

a distancia menor o igual que ε de q y a la derecha (izquierda) de f pertenece al interior de P . De manera similar se define una cara- \mathcal{Z} como una *cara superior* o una *cara inferior*, y se define una cara- \mathcal{X} como una *cara frontal* o una *cara posterior*.

En [2] se da una clasificación de los vértices de un poliedro ortogonal P según sus ángulos sólidos interiores. Para medir el ángulo sólido interior de un vértice v se considera una esfera lo suficientemente pequeña con centro en v , se mide el área la porción de la esfera que se encuentra dentro del poliedro, y se divide ese valor entre el cuadrado del radio de la esfera. El área de la esfera unitaria es 4π , por lo que con ella podemos obtener ángulos que van desde 0 hasta 4π . De modo que los vértices se clasifican de la siguiente manera. Un vértice de P es un vértice de *un octante* si su ángulo sólido interior es $\frac{\pi}{2}$, ver la Figura 2.11a, y es un vértice de *tres octantes* si su ángulo sólido interior es $\frac{3\pi}{2}$, ver la Figura 2.11b. Los vértices de *cuatro octantes*, *cinco octantes* y *siete octantes* se definen de forma similar, como se muestra en las figuras 2.11c, 2.11d, 2.11e y 2.11f.

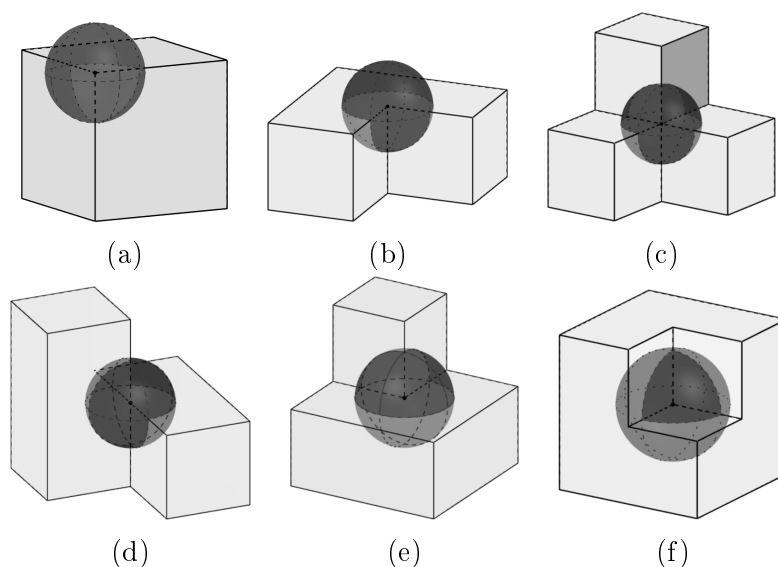


Figura 2.11: Clasificación de los vértices de un poliedro ortogonal: (a) vértice de un octante, (b) vértice de tres octantes, (c) vértice de cuatro octantes de tipo 1, (d) vértice de cuatro octantes de tipo 2, (e) vértice de cinco octantes, (f) vértice de siete octantes.

Del mismo modo, se pueden clasificar las aristas convexas como aristas de dos octantes, y las aristas cóncavas como aristas de seis octantes, como se muestra en la Figura 2.12.

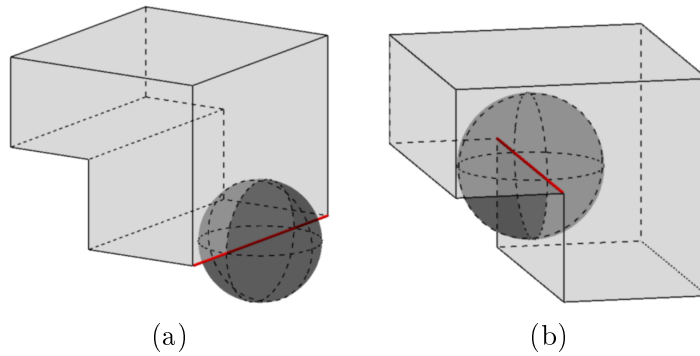


Figura 2.12: Clasificación de las aristas de un poliedro ortogonal: (a) arista convexa o de dos octantes, (b) arista cóncava o de seis octantes.

Definición 2.3.4 (Damian *et al.* [13]). Un *ortoárbol* O es un poliedro ortogonal hecho de ortoedros pegados cara a cara, tal que la gráfica dual de O es un árbol. La intersección de dos ortoedros adyacentes es una cara 2-dimensional de ambos ortoedros.

El *grado* de un ortoedro $o_i \in O$ está definido como el grado de su vértice correspondiente en la gráfica dual de O . Un ortoedro de grado uno es llamado *hoja*; un ortoedro o_i de grado dos tal que sus dos vecinos están pegados en caras opuestas de o_i es llamado *conector*; cualquier otro ortoedro de O es una *unión*.

En este trabajo asumiremos que los conectores y las hojas en un ortoárbol sólo son adyacentes a uniones. De no ser así, podemos fusionar hojas y conectores adyacentes en un sólo ortoedro antes de aplicar en el ortoárbol las soluciones dadas en este trabajo.

Se dice que un ortoárbol O está *bien separado* si todos los vecinos de cualquier unión de O son hojas o conectores, es decir, si ninguna unión de O es vecina de otra unión. Si existen uniones adyacentes en O , entonces decimos que O está mal separado.

En la Figura 2.14 se muestran los distintos tipos de unión que pueden existir en un ortoárbol bien separado.

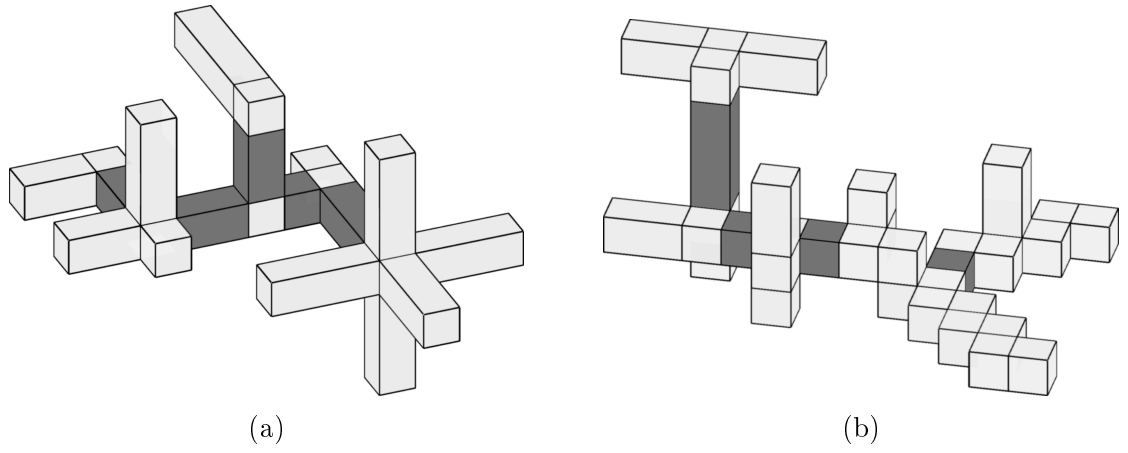


Figura 2.13: Ejemplos de ortoárboles, los ortoedros sombreados representan sus conectores. (a) Un ortoárbol bien separado, (b) un ortoárbol mal separado.

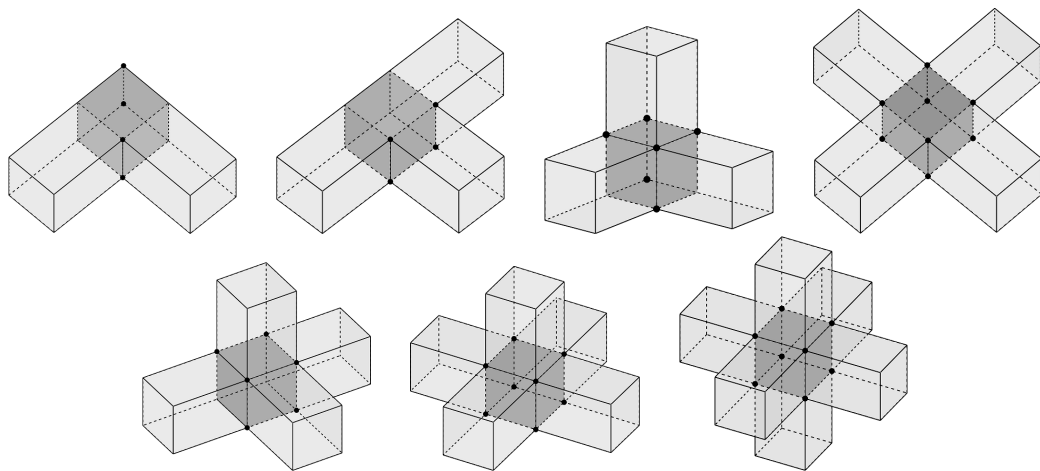


Figura 2.14: Tipos de uniones en ortoárboles bien separados.

Capítulo 3

Problemas de galería de arte

3.1. Introducción

Imaginemos que una asociación encargada de una galería de arte se encuentra en el proceso de contratación de guardias de seguridad con el fin de mantener cada una de las valiosas obras siempre vigilada. Por desgracia, las personas a cargo de dicha tarea no tienen a la mano un plano del edificio para consultar su forma y sólo recuerdan que puede ser representado como un polígono con n lados. Se desea que los guardias permanezcan en una ubicación fija para evitar incomodar a los visitantes. Se asume que cada guardia puede girar 360 grados y vigilar todo lo que esté en su línea visual. La pregunta que queremos responder es la siguiente:

¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar las obras de arte en una galería con n paredes?

Esta pregunta fue formulada por primera vez por Victor Klee en 1973, en respuesta a una solicitud de un problema geométrico interesante hecha por Vasek Chvátal. Poco tiempo después, Chvatal respondió esta pregunta con el que sería llamado el *Teorema de la galería de arte de Chvátal*: $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono simple con n vértices, [11]. Luego, en 1978, una prueba más sencilla fue encontrada por Steve Fisk. Dicha prueba es la que se presenta en este capítulo.

3.2. Definición del problema

Dado un polígono P , decimos que un punto $x \in P$ es *visible* desde un guardia C en P si existe un punto $y \in C$ tal que el segmento de línea xy es un subconjunto de P , es decir, $xy \subseteq P$. Notemos que xy podría tocar ∂P en uno o más puntos, es decir, la visibilidad no es bloqueada por hacer contacto con la frontera.

Se dice que una colección $G(P)$ de guardias en un polígono P *vigila* o *ilumina* P si cualquier punto $p \in P$ es vigilado por al menos un guardia $g \in G(P)$.

El problema de la galería de arte consiste entonces en encontrar un conjunto de guardias de cardinalidad mínima $G(P)$, de tal forma que cualquier punto $p \in P$ sea visible desde un guardia $g \in G(P)$.

Si en cada punto de $G(P)$ colocamos una lámpara que emite luz en todas las direcciones, entonces cada punto de P es iluminado por al menos una lámpara. Esto significa que el problema de encontrar la menor cantidad de lámparas que iluminen a P es equivalente al problema de la galería de arte. Es por lo anterior que a los problemas de galería de arte se les conoce también como problemas de iluminación.

Se han estudiado diversas variantes del problema, las cuales han surgido al imponer distintas restricciones en cuanto al tipo de guardias y la forma de la galería. Las principales variantes sobre los tipos de guardias son las siguientes:

- **Puntos guardia.** Se permite colocar guardias en cualquier punto de P .
- **Vértices guardia.** Solamente se permite colocar guardias en los vértices de P .
- **Aristas guardia.** Un punto se considera vigilado si es visible desde algún punto de una arista guardia. Se pueden considerar a los guardias como aristas cerradas o abiertas, es decir, incluyendo o no incluyendo sus vértices respectivamente.
- **Guardias móviles.** En esta variante introducida por O'Rourke en [22]. En ella se permite que los guardias se muevan sobre diagonales de P .
- **Reflectores.** Los reflectores tienen un ángulo de visión limitado, al igual que muchos dispositivos de vigilancia de la vida real. Distinguimos los que se colocan en cualquier punto de P de aquellos que sólo pueden colocarse en vértices de P .
- **Módems.** Esta variante fue introducida en [1]. La motivación es que la intensidad de la señal emitida por un módem se ve afectada por la cantidad de paredes que tiene que atravesar hasta alcanzar un dispositivo. Se dice que un

módem m ve a un punto p si el segmento que los une interseca a lo más un número acotado de obstáculos.

Existe una cantidad significativa de variantes interesantes que surgen como resultado de imponer restricciones sobre la forma de la galería. A continuación se mencionan algunas de las principales.

- **Galerías poligonales.** En esta variante la galería es un polígono simple.
- **Galerías ortogonales.** En este tipo de galerías todas las aristas deben ser paralelas a alguno de los ejes coordenados y todos los vértices tienen ángulo interior de $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$. La motivación para estudiar este tipo de polígonos es que la mayoría de los edificios son construcciones ortogonales.
- **Galerías tradicionales.** En esta variante las galerías están formadas por un conjunto de habitaciones rectangulares dentro de un edificio rectangular.
- **Galerías con hoyos.** En esta variante se permite que las galerías tengan en su interior otros polígonos, llamados hoyos, cuyo interior no se considera parte de la galería.

3.3. Vigilancia de galerías de arte poligonales

Antes de presentar la prueba de Fisk para el teorema de la galería de arte de Chvátal, mostraremos que todo polígono admite una triangulación.

Teorema 3.3.1. [25] *Todo polígono admite una triangulación, y cualquier triangulación de un polígono con n vértices consiste de exactamente $n - 2$ triángulos.*

Demostración. Probamos este teorema por inducción en n . Cuando $n = 3$ el polígono es un triángulo y el teorema es trivialmente cierto. Sea $n > 3$ y asumamos que el teorema es cierto para todo $m < n$. Sea P un polígono con n vértices. Primero probaremos la existencia de una diagonal en P . Sea v el vértice más a la izquierda de P , y sean u y w los dos vértices vecinos de v en la frontera de P . Si el segmento abierto uw está contenido en el interior de P , entonces hemos encontrado la diagonal. De otro modo, existen uno o más vértices dentro del triángulo formado por v , u , y w , o en la diagonal uw . Sea v' el vértice más alejado de uw dentro de uvw . El segmento de recta vv' no puede intersecar una arista de P , de lo contrario, tal arista tendría uno de sus extremos dentro del triángulo y estaría más alejado de uw que v' , lo que

contradice la definición de v' . Por lo tanto, vv' es una diagonal. Ambos casos son mostrados en la Figura 3.1.

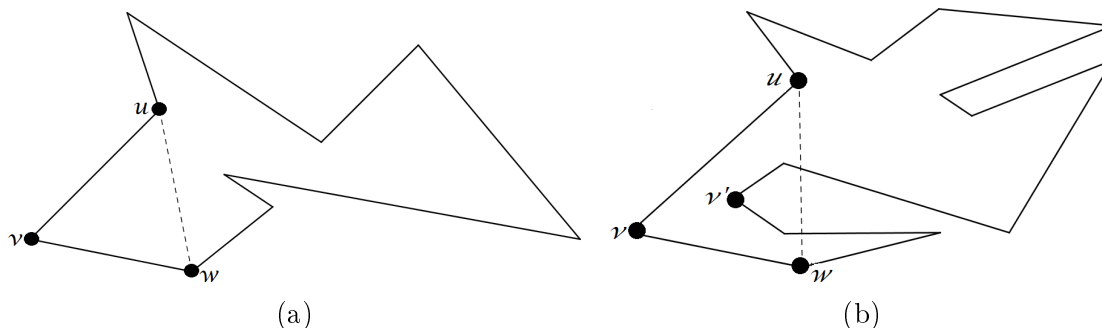


Figura 3.1: Existencia de una diagonal en un polígono: (a) el segmento uw está contenido en P , (b) el segmento uw no está contenido en P .

Cualquier diagonal divide a P en dos polígonos P_1 y P_2 . Sea m_1 el número de vértices de P_1 y m_2 el número de vértices de P_2 . Tanto m_1 como m_2 deben ser menores que n , así que por inducción P_1 y P_2 pueden ser triangulados. Por lo tanto, también P puede ser triangulado.

Falta probar que cualquier triangulación de P consiste de $n - 2$ triángulos. Para esto, consideremos cualquier diagonal en una triangulación T_P . Esta diagonal divide a P en dos subpolígonos con m_1 y m_2 vértices respectivamente. Cada vértice de P está en exactamente uno de los subpolígonos con excepción de los vértices que definen la diagonal, los cuales aparecen en ambos subpolígonos. Por lo tanto, $m_1 + m_2 = n + 2$. Por inducción, cualquier triangulación de P_i consiste de $m_i - 2$ triángulos, lo que implica que T_P consiste en $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n - 2$ triángulos. \square

El siguiente resultado se utiliza para demostrar que toda triangulación de un polígono admite una 3-coloración.

Lema 3.3.2. *La gráfica dual de una triangulación de un polígono, con un nodo por cada triángulo y una arista conectando dos nodos cuyos triángulos comparten una diagonal, es un árbol en el que cada nodo tiene grado a lo más 3.*

Demostración. El que cada nodo tenga grado no mayor a 3 se cumple por el hecho de que todo triángulo tiene 3 lados. Supongamos que la gráfica no es un árbol. Entonces debe existir al menos un ciclo en la gráfica. Un ciclo encierra algunos vértices de la gráfica y por lo tanto encierra puntos del exterior del polígono, lo que contradice la definición de polígono. \square

Una vez demostrado que todo polígono admite una triangulación, y que la gráfica dual de una triangulación es un árbol, procedemos a demostrar que toda triangulación de un polígono es 3-coloreable.

Teorema 3.3.3. *Sean P un polígono y T_P una triangulación de P . Entonces T_P es 3-coloreable.*

Demostración. Sea T_P^* la gráfica dual de T_P . Por el lema 3.3.2 sabemos que T_P^* es un árbol.

Cada árbol tiene al menos dos hojas. Notemos que si un vértice v de un triángulo de T_P que corresponde a una hoja de T_P^* no forma parte de ningún otro triángulo de T_P , entonces v tiene grado dos.

Tomemos cualquier vértice $v \in T_P$ de grado dos. Removemos el triángulo formado por v y sus dos vecinos. Luego, 3-coloreamos el resto de T_P por inducción y volvemos a agregar el triángulo removido, coloreando v del color que no fue usado en los vértices vecinos de v . □

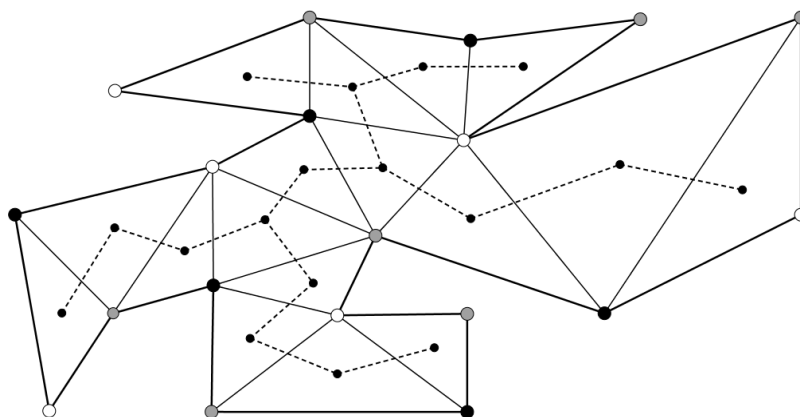


Figura 3.2: Triangulación 3-coloreada de un polígono y su gráfica dual.

Ahora estamos listos para probar el teorema de la galería de arte de Chvátal.

Teorema 3.3.4 (Chvátal [11]). *Sea P un polígono con n vértices. Entonces $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar el interior de P .*

Demostración. Sea P un polígono con n vértices y sea T_P una triangulación de P . Asignamos una 3-coloración a los vértices de T_P . Esto divide al conjunto de vértices de

P en tres clases cromáticas C_1, C_2, C_3 . Una de las tres clases cromáticas, digamos C_1 , tiene cardinalidad a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Colocamos un guardia en cada elemento de C_1 . Los vértices de cada triángulo reciben colores diferentes, por lo que P está completamente vigilado.

Para ver que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son a veces necesarios, consideremos el polígono de peine que se presenta en la figura 3.3. El polígono cuenta con $n = 3m$ vértices y m picos. Cada uno de los picos del polígono necesita un guardia diferente, por lo que se requieren $m = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias para vigilar al polígono. \square

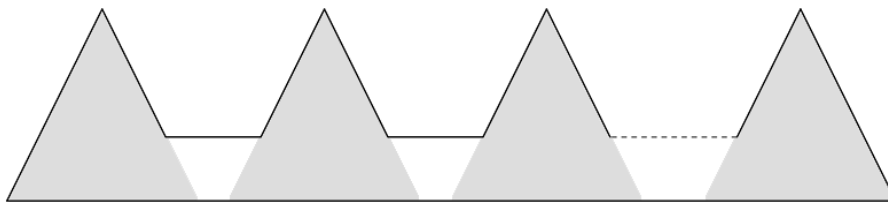


Figura 3.3: Una familia de polígonos que requieren $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias para ser vigilados.

3.4. Vigilancia de galerías de arte ortogonales

Los polígonos ortogonales son una clase particular de polígonos, por lo tanto, sabemos que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son suficientes para vigilar galerías de arte ortogonales. Sin embargo, las restricciones en los polígonos ortogonales les permiten ser vigilados con una cantidad menor de guardias.

En 1983, Kahn, Klawe y Kleitman [18] demostraron que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar un polígono ortogonal. Para su prueba, primero muestran que todo polígono ortogonal puede cuadrilateralizarse de manera convexa.

Una *cuadriletarización convexa* de un polígono P es una partición de P en cuadriláteros convexos con interiores disjuntos, tal que las aristas de los cuadriláteros son, o aristas de P , o diagonales que unen vértices de P .

Una demostración más sencilla de que todo polígono ortogonal puede ser convexamente cuadrilateralizado es dada por Lubiw en [20]. Tal demostración es la que se muestra en este trabajo, para lo cual, primero definimos un polígono 1-ortogonal.

Un polígono *1-ortogonal* P es un polígono sin hoyos que satisface las siguientes condiciones:

1. Todas las aristas de P , con excepción de una arista distinguida denotada por e y llamada la *arista sesgada*, son paralelas al eje x o al eje y .
2. P tiene un número par de aristas.
3. Todos los ángulos internos son menores o iguales a $\frac{3\pi}{2}$.
4. El interior de la nariz de la arista sesgada no contiene vértices de P .

La *nariz* de la arista sesgada e de P es el triángulo recto T en el interior de P con un lado horizontal, otro vertical, y e como su hipotenusa. Ver la Figura 3.4.

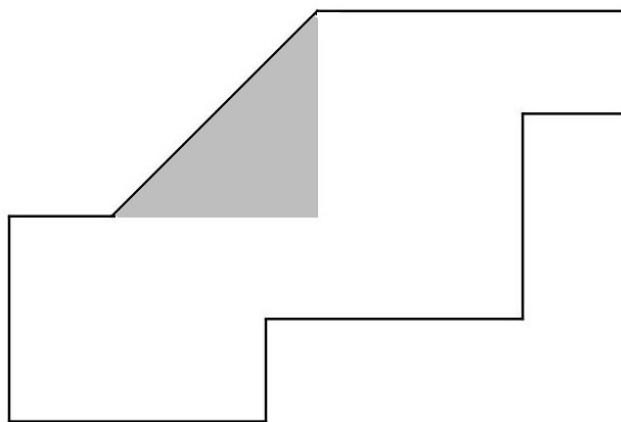


Figura 3.4: Un polígono 1-ortogonal cuya nariz se muestra sombreada.

Notemos que los polígonos ortogonales son también 1-ortogonales. En la definición dada no se prohíbe a la arista sesgada e ser paralela al eje x o al eje y . En caso de que P sea ortogonal se puede elegir a cualquier arista de P como e . Por lo tanto, si se demuestra que cualquier polígono 1-ortogonal admite una cuadrilaterización convexa, entonces también se demuestra que cualquier polígono ortogonal admite una cuadrilaterización convexa.

Teorema 3.4.1. *Cualquier polígono 1-ortogonal admite una cuadrilaterización convexa.*

Demostración. La prueba es por inducción. Si P tiene cuatro aristas, entonces P es convexo y el teorema se cumple. Probaremos que si P tiene más de cuatro aristas, entonces P siempre tiene un cuadrilátero Q' , el cual al ser removido divide a P en polígonos 1-ortogonales más pequeños.

Por las primeras dos propiedades de los polígonos 1-ortogonales, sabemos que las dos aristas incidentes en e deben ser ambas horizontales o verticales.

Asumamos sin pérdida de generalidad que la pendiente de e está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, lo que implica que las dos aristas incidentes en e son horizontales. Sean u y v los vértices incidentes a e , de tal modo que u es el vértice con menor coordenada y . Sea w el tercer vértice de la nariz T de P .

Ahora procedemos a encontrar los cuatro vértices de Q' . Los primeros dos vértices de Q' son u y v . Sea e' la arista de P que precede a e en el orden contrario a las manecillas del reloj en la frontera de P . Sea e'' el segmento de recta semiabierto que une a v con w , abierto en w . Deslizamos e'' hacia la derecha hasta que toca un vértice de P . Si e'' toca una arista completa de P , entonces los extremos de esta arista, junto con u y v , son los vértices de Q' , ver Figura 3.5. Supongamos que e'' toca sólo un vértice x de P ; x es el tercer vértice de P .

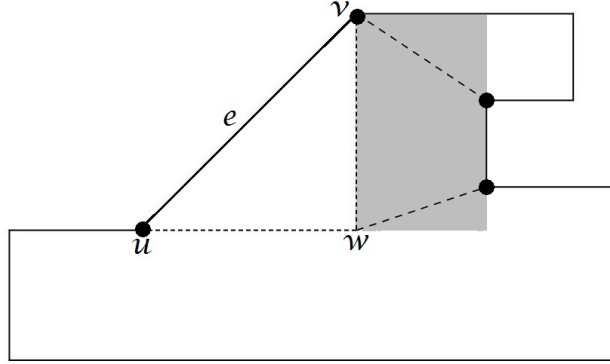


Figura 3.5: Caso 1: e'' toca una arista completa.

Consideremos ahora el segmento de recta horizontal semiabierto h que une a u con la recta vertical que contiene a x ; h no contiene a u , pero sí contiene a su extremo derecho. Deslizamos h hacia abajo hasta que alcanza un vértice de P , o hasta h que toca una arista horizontal f de P tal que f contiene a h completamente. En el primer caso, sea y el punto más a la derecha que es alcanzado por h . El cuarto vértice de Q' es y . Un ejemplo de este caso es mostrado en la Figura 3.6b.

Falta lidiar con el caso en el que h toca una arista f de P . Esto solamente puede ocurrir si x es el segundo extremo de e' , como se muestra en la Figura 3.7. Consideremos el segmento de recta vertical semiabierto h' que une a x con f , abierto en x . Deslizamos h' a la derecha hasta que toque un vértice de P . Si toca más de un vértice, elegimos y , el más bajo de esos puntos, como el último vértice de Q' .

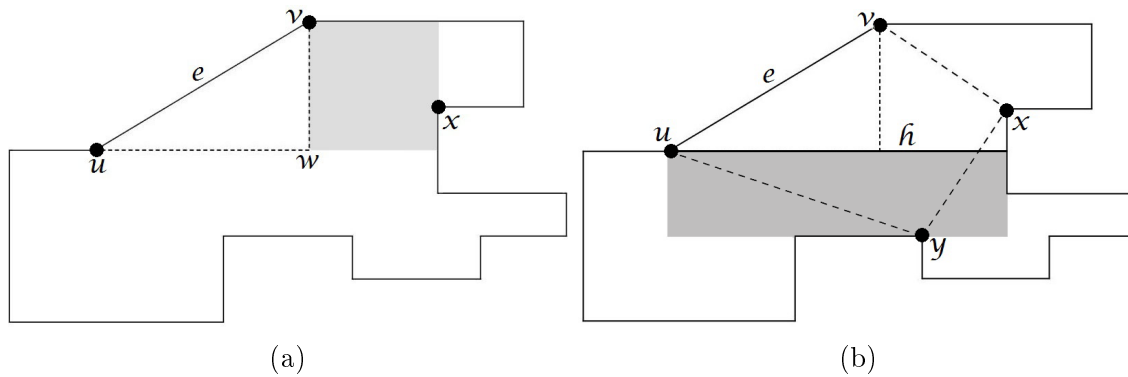


Figura 3.6: Caso 2.1: (a) e'' toca sólo un vértice x , (b) h toca un vértice y .

Q' es convexo y es sencillo verificar que $P - Q'$ puede ser dividido en dos o tres polígonos 1-ortogonales.

□

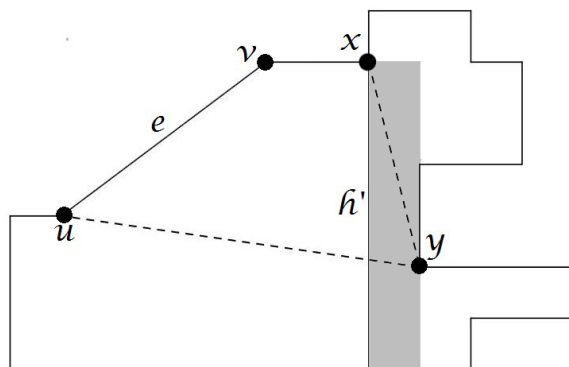


Figura 3.7: Caso 2.2. h toca una arista f que lo contiene completamente.

Teorema 3.4.2 (Kahn, Klawe y Kleitman [18]). *Cualquier polígono ortogonal con n vértices puede ser vigilado utilizando a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias colocados en los vértices.*

Demostración. En la Figura 3.8 se muestra una familia de polígonos ortogonales que necesitan $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias para ser vigilados.

Para mostrar que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias son siempre suficientes, primero obtenemos una cuadrilaterización convexa Q de P . Después, obtenemos la gráfica H al agregar a

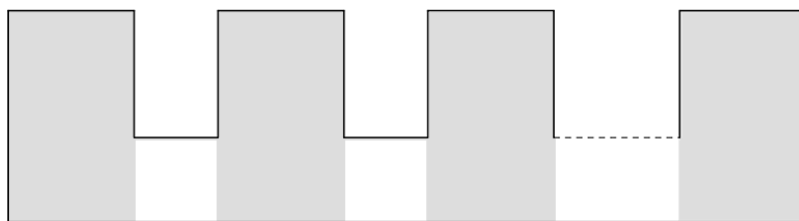


Figura 3.8: Familia de polígonos ortogonales que requieren $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias para ser vigilados.

cada cuadrilátero de Q dos diagonales conectando los vértices opuestos, como se muestra en la Figura 3.9.

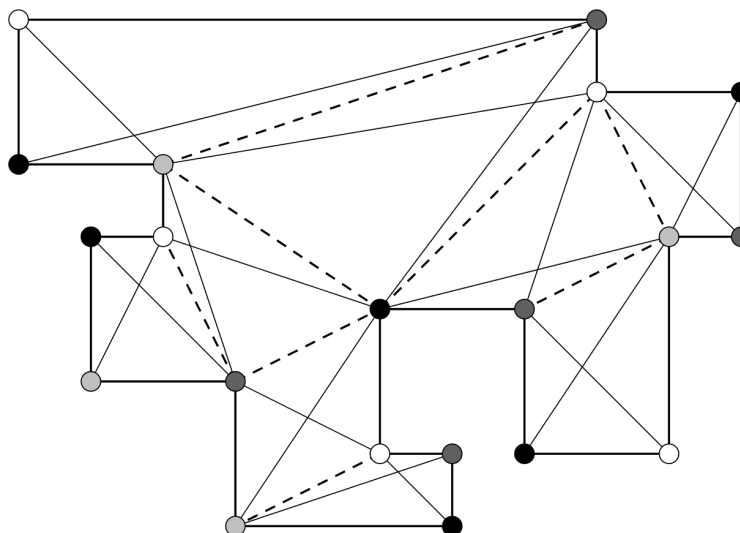


Figura 3.9: Gráfica obtenida al agregar diagonales a una cuadrilaterización. La gráfica se muestra 4-coloreada.

Ahora mostraremos que H es 4-coloreable. Consideremos la gráfica dual de Q , la cual denotaremos Q^* . Los vértices de Q^* son los cuadriláteros de Q , y unimos dos vértices de Q^* si sus cuadriláteros correspondientes comparten una diagonal en Q . Entonces Q^* es un árbol, ya que la presencia de un ciclo implicaría que P tiene un hoyo. Removemos de Q un cuadrilátero q correspondiente a una hoja en Q^* , lo cual produce una subgráfica H' de H . El cuadrilátero q tiene grado uno, por lo que sólo comparte una diagonal d con el resto de la cuadrilaterización. Asumimos que H' es 4-coloreable por la hipótesis de inducción. Al volver a colocar el cuadrilátero q en

Q' , los dos extremos de d han recibido colores distintos en la coloración, y los dos vértices restantes de q pueden recibir los dos colores restantes.

Notemos que en la coloración resultante, a todos los vértices de cualquier cuadrilátero en Q se les asignan colores diferentes. Por lo anterior, los vértices de cualquiera de las cuatro clases cromáticas vigilan a P . Como la clase cromática de menor cardinalidad tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices de P , se cumple que esa cantidad de guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar cualquier polígono ortogonal P con n vértices. \square

Capítulo 4

Atracción con balizas

4.1. Introducción

La atracción con *balizas* es un tipo de movimiento en el que los objetos dentro de un dominio dado se mueven de manera que siempre se disminuya de manera local su distancia euclidiana con respecto a una baliza activada. Así, un objeto se mueve directamente hacia la baliza cuando le es posible, o se desliza a lo largo de los obstáculos que encuentra en su camino mientras su distancia hacia la baliza disminuya de manera monótona. Una baliza b *cubre* a un punto p si el camino recorrido por un objeto colocado en p logra llegar a b bajo su atracción.

4.2. Preliminares

Las siguientes definiciones fueron dadas por Biro en [5].

Definición 4.2.1. Una *baliza* (del inglés *beacon*) b es colocada en un punto de un polígono P y puede ser activada para ejercer una atracción sobre los objetos (representados por puntos) en P . Cuando b es activada, los objetos en P se mueven de forma que se minimice su distancia euclidiana hacia b , con la restricción de permanecer en el interior de P .

Definición 4.2.2. Una baliza *cubre* a un punto p si, bajo la atracción de b , un objeto colocado en p se mueve de modo tal que su distancia Euclidiana con respecto a b

disminuya hasta ser 0. De manera equivalente, decimos que p es *cubierto* por b .

Las siguientes definiciones son utilizadas para determinar el conjunto de puntos que son cubiertos por una baliza b , y para determinar el conjunto de ubicaciones que cubren a un punto p si se coloca en ellas una baliza.

Definición 4.2.3. La región de atracción de una baliza b en un polígono P , denotada $A(b)$, se define como el conjunto de puntos $p \in P$ que son cubiertos por b .

Definición 4.2.4. La región de atracción inversa de un punto p en un polígono P , denotada $IA(p)$, se define como el conjunto de puntos $b \in P$ que cubren a p .

La atracción con balizas puede ser vista como una generalización de la visibilidad. El *polígono de visibilidad* $V(q)$ de un punto q en un polígono P es el conjunto de puntos de P que son visibles desde q . El polígono de visibilidad de un punto q está contenido en su región de atracción, $A(q)$. Cualquier punto p en $V(q)$ puede ser atraído en línea recta hasta llegar a q a lo largo de \vec{pq} . Sin embargo, a diferencia de la visibilidad, la atracción con balizas es asimétrica. Esto significa que existen ejemplos en los que, para dos puntos b_1 y b_2 en un polígono P , tenemos que $b_1 \in A(b_2)$ mientras que $b_2 \notin A(b_1)$. Un ejemplo es mostrado en la Figura 4.1.

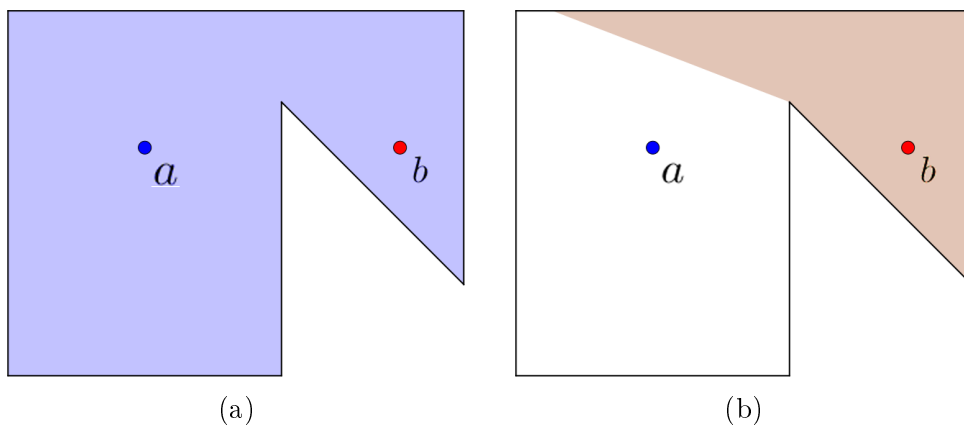


Figura 4.1: La atracción con balizas es asimétrica: (a) la región de atracción del punto a (en azul) contiene al punto b , (b) la región de atracción del punto b (en café) no contiene al punto a .

Cuando una baliza b es activada, los objetos colocados sobre los puntos que son cubiertos por b se moverán hasta llegar a b , mientras que los objetos colocados en puntos que no son cubiertos por b alcanzarán un mínimo local con respecto a su distancia a b en P y permanecerán ahí bajo la influencia de b .

Definición 4.2.5. Un punto d en P es un *punto muerto* con respecto a una baliza b si d no es b y un objeto en d permanece inmóvil bajo la influencia de la baliza b . Es decir, d es un punto tal que la distancia euclidiana desde b hasta d es un mínimo local distinto de 0 dentro de P . El punto x es un punto muerto en la Figura 4.2.

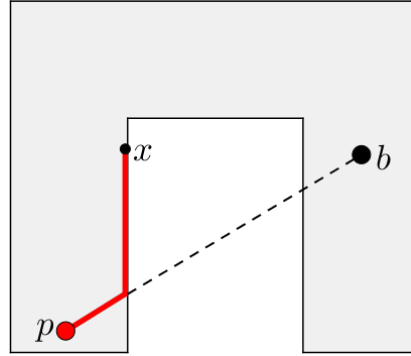


Figura 4.2: El punto p alcanza un mínimo local x con respecto a b .

La siguiente proposición establece que las ubicaciones en donde un objeto puede alcanzar un mínimo local bajo la atracción de una baliza siempre se encuentran en la frontera de P [5].

Proposición 4.2.6. *Para cualquier baliza b en un polígono o poliedro P , todos los puntos muertos con respecto a b yacen en la frontera de P , ∂P .*

Demostración. Asumimos que p no es un punto en ∂P . Entonces, existe una bola de radio $\delta > 0$ y con centro en p que está contenida completamente en P , de modo que el vector (paralelo a) $\delta\vec{pb}$ está contenido en P , en particular el punto $p + \delta\vec{pb}$, que está más cerca de b que p . Por lo tanto, p no está en un mínimo local con respecto a b , de modo que p no puede ser un punto muerto. \square

Corolario 4.2.7. *Todos los puntos p en el interior de P se encuentran libres cuando b es activado y se mueven sobre \vec{pb} .*

4.3. Propiedades de las regiones de atracción

Las siguientes propiedades de las balizas fueron mostradas por Biro en [5].

Proposición 4.3.1. *Dada una baliza b , $b \in A(b)$, donde $A(b)$ es la región de atracción de b . Además, el polígono de visibilidad de b , $V(b)$, es un subconjunto de $A(b)$. En algunos casos se presenta la igualdad $A(b) = V(b)$.*

Demostración. Como el segmento de recta que conecta a b con cualquier punto $p \in V(b)$ está contenido en $V(b)$, es esa la trayectoria que un objeto colocado en p sigue al ser atraído por b . La Figura 4.3 muestra un ejemplo en el que se da la igualdad $A(b) = V(b)$. \square

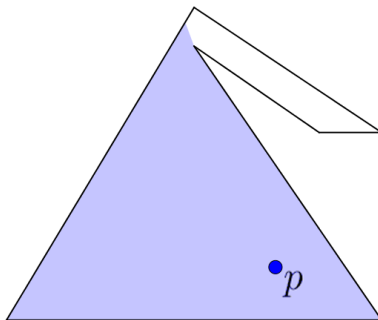


Figura 4.3: Un polígono P y un punto $b \in P$ tal que $A(b) = V(b)$.

Teorema 4.3.2. *La región de atracción de una baliza b en un polígono P es conexa.*

Demostración. Sean p_1 y p_2 dos puntos en $A(b)$. Sea P_1 la trayectoria que un objeto en p_1 sigue bajo la atracción de b . Del mismo modo, sea P_2 la trayectoria que un objeto en p_2 sigue bajo la atracción de b . Como p_1 y p_2 son ambos cubiertos por b , P_1 y P_2 están completamente contenidas en $A(b)$, y P_1 y P_2 comparten al menos el punto en el que se encuentra b . Además, los objetos visitan cada punto de sus respectivas trayectorias en su camino hacia b . Por lo tanto, hemos encontrado una trayectoria completamente contenida en $A(b)$ que conecta dos puntos arbitrarios en $A(b)$, de modo que $A(b)$ es conexa. \square

4.4. Atracción en polígonos

A continuación describimos el movimiento de los objetos al ser atraídos por una baliza en un polígono:

Sean p un punto en el polígono P y b una baliza colocada en un punto fijo en P .

Cuando b es activada, p se mueve en línea recta hacia b siempre que le sea posible, siguiendo \vec{pb} hasta que alcanza a b o a la frontera ∂P . Si p hace contacto con la frontera, entonces se mueve a lo largo de ella en la dirección que disminuya de forma monótona su distancia Euclidiana con respecto a b , si tal dirección existe. Así, el camino seguido por p bajo la atracción de b puede alternar entre secciones en línea recta hacia b y secciones en ∂P . El camino lineal por partes creado por el movimiento de p bajo la influencia de b es llamado el *camino de atracción* de p con respecto a b , al cual denotaremos $AP(p, b)$.

Si $AP(p, b)$ alcanza a b se dice que b atrae a p . Si p se encuentra en una posición en la cual le es imposible moverse de manera que su distancia hacia b disminuya, entonces p ha alcanzado un punto muerto y se dice que está “atorado”. El camino de atracción $AP(p, b)$ de un punto p con respecto a una baliza b podría no alcanzar a b por tres diferentes razones (Shermer, [27]):

- $AP(p, b)$ llega a un mínimo local en un punto interior x de una arista e tal que la recta de x a b es perpendicular a e . Un ejemplo es mostrado en la Figura 4.2.
- $AP(p, b)$ encuentra un mínimo local en un vértice convexo v tal que si dividimos el plano con la recta perpendicular a vb que pasa por v , entonces ambas aristas incidentes en v se encuentran contenidas en el semiplano que no contiene a b . Ver Figura 4.4.

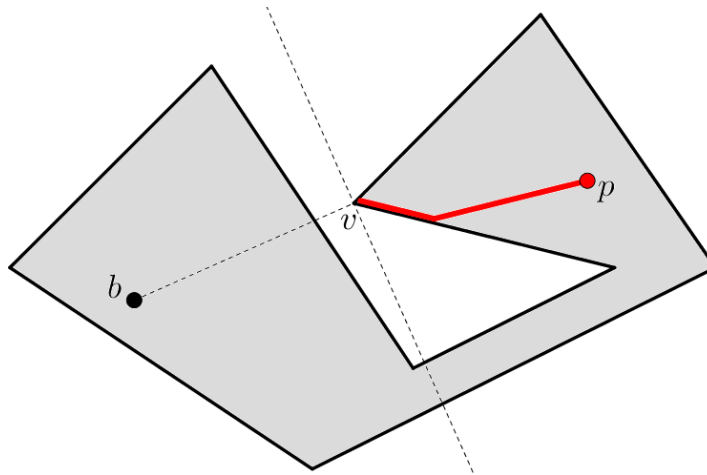


Figura 4.4: El objeto colocado en el punto p se atora en el vértice convexo v .

- $AP(p, b)$ llega a un vértice cóncavo u tal que si dividimos el plano con la recta perpendicular a ub que pasa por u , ambas aristas incidentes en u se

encuentran en el mismo semiplano que b . Este es el caso del punto p en la Figura 4.5. Cuando p llega a u puede moverse a lo largo de cualquiera de las dos aristas incidentes en u , ya que en ambos casos su distancia Euclidiana a b disminuye de manera local. En este caso adoptaremos la estrategia de Shermer [27] de considerar el camino de atracción como *indeterminado*. Por lo anterior, colocaremos las balizas de manera tal que para todo punto en P exista una baliza que lo atraiga en un camino de atracción único.

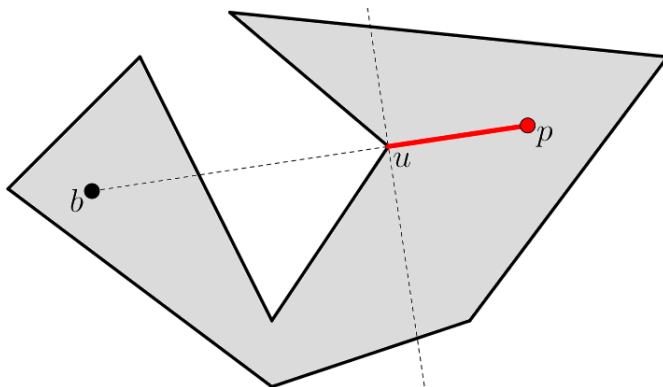


Figura 4.5: El camino de atracción de p con respecto a b en u es indeterminado.

Así como para un punto dado la región atracción es un superconjunto del polígono de visibilidad, en los polígonos ortogonales ocurre que la región de atracción de una baliza en un punto p es un subconjunto del polígono de visibilidad de escalera de p ; si b atrae a p , entonces p y q son visibles en visibilidad de escalera. (En la visibilidad de escalera, dos puntos son visibles entre sí si existe un camino C entre ellos formado exclusivamente de segmentos de recta verticales y horizontales, donde C es monótono).

4.5. Atracción en poliedros ortogonales

Ahora describimos el movimiento de los objetos dentro de un poliedro ortogonal al ser atraídos por una baliza:

Sea p un punto en un poliedro ortogonal P y sea $b \in P$ una baliza en un punto fijo de P . De forma similar a como ocurre en \mathbb{R}^2 , cuando b es activada, un objeto $p \in P$ se mueve hacia b en línea recta hasta que alcanza a b o toca la frontera de P , ∂P . El camino de atracción $AP(p, b)$ de un objeto colocado en un punto p con

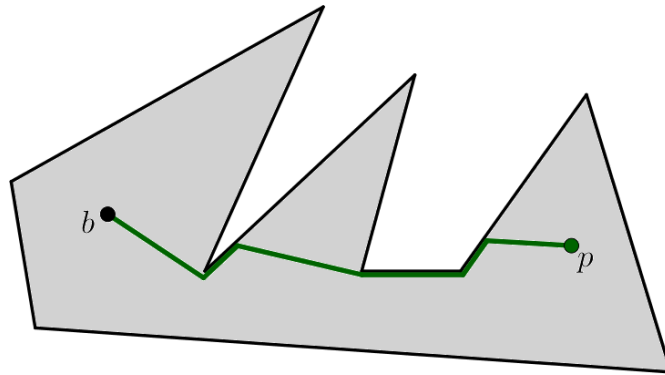


Figura 4.6: El camino de atracción de p alcanza a b .

respecto a b puede tocar un vértice, una arista, o una cara de P con los siguientes resultados:

- $AP(p, b)$ llega a un vértice v de un octante, entonces ha llegado a un mínimo local, dado que las tres caras incidentes a v restringen el movimiento del objeto en las direcciones de los tres ejes.
- $AP(p, b)$ toca una arista convexa (de dos octantes) e . En este caso todo lo que el objeto puede hacer es moverse a lo largo de e hasta que ocurre uno de los siguientes casos: Primero, el camino alcanza un punto x en la arista donde el objeto no tiene dirección para moverse de modo que su distancia a b disminuya. Esto sucede cuando la recta que pasa por x y b , xb , es perpendicular a e . Segundo, $AP(p, b)$ alcanza un extremo de e y toca una tercera cara, por lo que ha alcanzado un vértice de un octante y está atorado. Tercero, $AP(p, b)$ llega a un extremo de e en un vértice de cinco octantes. En este caso el objeto puede moverse en línea recta hacia b hasta alcanzarla o encontrar otro obstáculo.
- Si $AP(p, b)$ toca una cara f entonces el objeto puede moverse sobre la cara en las dos direcciones no restringidas (las direcciones de los dos ejes que no son perpendiculares a f), siempre y cuando se reduzca de manera monótona su distancia euclidiana a b . Existen dos posibles resultados, o $AP(p, b)$ alcanza un mínimo local x en f en un punto de f donde la recta que pasa por x y b es perpendicular a f (ver Figura 4.8a), o $AP(p, b)$ alcanza la frontera de f . En el segundo caso puede suceder que al objeto le sea posible moverse libremente en el interior de P hacia b , o que $AP(p, b)$ toque otra cara de P en una arista convexa.

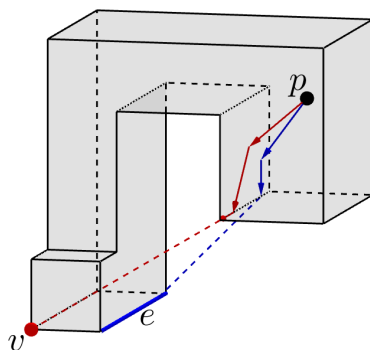


Figura 4.7: El objeto colocado en el punto p se atrae en un vértice convexo al ser atraído por v y se atrae en una arista convexa al ser atraído por un punto en e .

- Si $AP(p, b)$ toca una arista cóncava e (ver Figura 4.8b) o un vértice v de 4, 5 o 7 octantes, entonces existe más de una dirección en la que el objeto puede moverse de manera que su distancia Euclidiana hacia b disminuya de manera local. Cuando eso sucede decimos que $AP(p, b)$ es indeterminado. En este trabajo colocaremos las balizas en P de manera que para todo punto de P se defina de manera no ambigua el camino de atracción hacia una de las balizas colocadas.

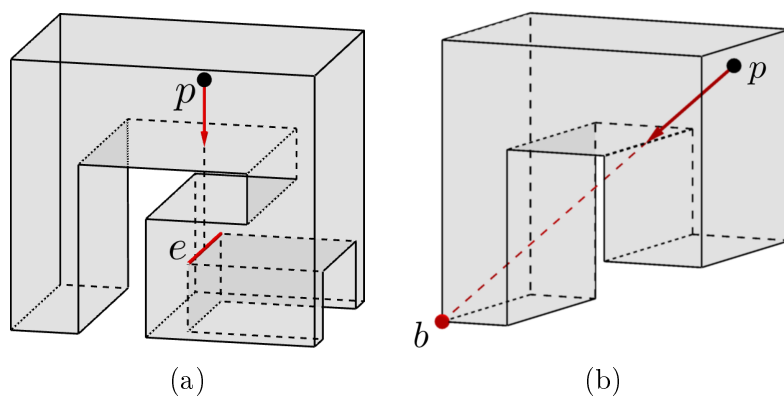


Figura 4.8: (a) El objeto colocado en el punto p se atrae en una cara al ser atraído por un punto en e . (b) El objeto colocado en el punto p es atraído por b hasta una arista cóncava y puede moverse sobre cualquiera de sus caras adyacentes disminuyendo su distancia hasta b , $AP(p, b)$ es indeterminado.

4.6. El Problema de cobertura con balizas

Sean P un polígono o un poliedro y sea B un conjunto de balizas colocadas en la frontera de P . Se dice que B cubre a P si cualquier punto $p \in P$ es cubierto por al menos un elemento de B . Se dice que B cubre el exterior de P si cualquier punto $p' \notin P$ es cubierto por al menos un elemento de B .

El *problema de cobertura con balizas* consiste en encontrar un conjunto de cardinalidad mínima de balizas contenidas en P que cubra a P . El *problema de cobertura del exterior con balizas* consiste en encontrar un conjunto de cardinalidad mínima de balizas contenidas en la frontera de P que cubra al exterior de P .

Capítulo 5

Cobertura de polígonos ortogonales

5.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos el problema de cobertura de polígonos ortogonales con balizas. Para el problema de cobertura del interior ya existen cotas justas: cualquier polígono ortogonal con n vértices puede ser cubierto con $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ balizas colocadas en vértices cóncavos, como lo demostraron Bae *et al.* en [4]. En este trabajo estudiamos el problema de cubrir al mismo tiempo el interior y el exterior de un polígono ortogonal, para el cual damos una cota superior.

A continuación, mostramos las ideas usadas por Bae *et al.* para demostrar la cota inferior y la cota superior del número de balizas que cubren un polígono ortogonal. Posteriormente, mostraremos que tanto el interior como el exterior de un polígono ortogonal P con n vértices pueden ser cubiertos de manera simultánea utilizando a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ balizas colocadas en los vértices de P .

5.2. Cobertura del interior

Como se mencionó anteriormente, el problema de cobertura (del interior) de un polígono P consiste en encontrar un conjunto de balizas de cardinalidad mínima que cubra a P . Se dice que un conjunto de balizas B cubre a P si y sólo si cada punto $p \in P$ puede ser atraído por al menos uno de los elementos de B . Este es un problema NP-Completo, como se demostró en [5], por lo tanto se muestran cotas combinatorias

sobre el número de balizas que son a veces necesarias y siempre suficientes para cubrir un polígono ortogonal.

Teorema 5.2.1 ([4]). *Sea P un polígono ortogonal P con $n \geq 6$ vértices, de los cuales $r \geq 1$ son vértices cóncavos. Entonces $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor = \lceil \frac{r}{3} \rceil$ balizas son siempre suficientes y a veces necesarias para cubrir P . Además, todas las balizas pueden ser colocadas en vértices cóncavos de P .*

A continuación se da un esbozo de la demostración dada por Bae *et al.* en [4]. La demostración de la cota superior es por inducción. Para el caso base se muestra que cualquier polígono ortogonal con a lo más 3 vértices cóncavos puede ser cubierto colocando una baliza en el vértice cóncavo adecuado. El paso inductivo se aplica para polígonos con $r \geq 4$ vértices cóncavos. En estos casos se divide el polígono haciendo un corte para después manejar cada parte de manera recursiva.

Un *corte* en un polígono ortogonal P es una diagonal vertical u horizontal. Existe un único corte en un punto p de la frontera de P , ∂P , a menos que p sea un vértice. Si p es un vértice cóncavo existen dos cortes, uno horizontal y otro vertical, mientras que si p es convexo no existe un corte en p . Un corte horizontal c divide a P en dos subpolígonos, uno abajo de c , denotado P_c^- , y el otro arriba de c , denotado P_c^+ . De manera análoga, para cualquier corte vertical c , sean P_c^- y P_c^+ los subpolígonos a la izquierda y a la derecha de c , respectivamente.

En algunos casos, la unión de los conjuntos de balizas que cubren a dos subpolígonos de P no cubre a P . Esto se debe a que un camino de atracción dentro de un subpolígono podría no ser un camino de atracción en P , por lo que es necesario que, al hacer un corte c en P , los caminos de atracción en un subpolígono Q de P no toquen la arista de Q que es producida por c , ver Figura 5.1.

Observación 5.2.2 ([4]). *Sea b una baliza en un polígono ortogonal P y sea $p \in P$ cualquier punto tal que p es cubierto por b . Si el camino de atracción de p con respecto a b toca una arista e de P , entonces $p \in H_e$ y $b \notin H_e$, donde H_e es el semiplano acotado por la recta que pasa por e . Por lo tanto, el camino de atracción de p con respecto a un b no toca *aristas convexas* de P (una arista convexa es una arista cuyos dos extremos son vértices convexos).*

Como consecuencia de la observación anterior, si se elige un corte que se convierta en una arista convexa de ambos lados, entonces se puede resolver cada subpolígono por separado de modo que P quede cubierto.

Cuando dividen el polígono, Bae *et al.* intentan realizar lo que llaman un *corte seguro*. Un corte seguro c es un corte que no incide en ningún vértice cóncavo de P , tal

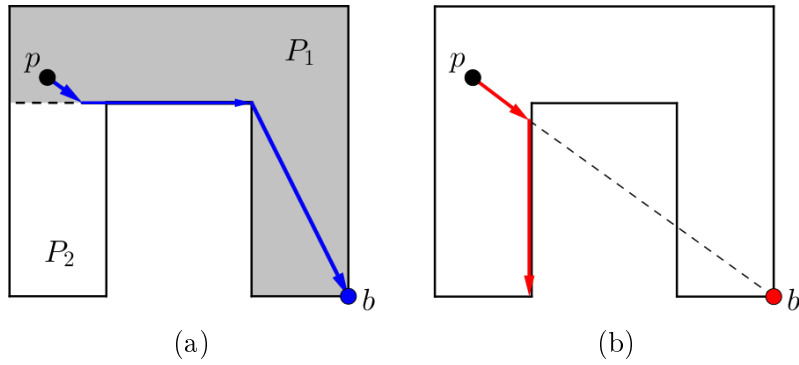


Figura 5.1: El camino de atracción de p con respecto a b alcanza a b en el subpolígono P_1 , mostrado en gris en (a), pero no alcanza a b en el polígono completo (b).

que existe al menos un vértice cóncavo en cada lado de c , y $\lceil r(P_c^-)/3 \rceil + \lceil r(P_c^+)/3 \rceil = \lceil r/3 \rceil$, donde $r(P)$ es la cantidad de vértices cóncavos en el polígono P . Si tal corte existe en P , se puede manejar cada subpolígono resultante de forma recursiva, y por la Observación 2, la unión de los conjuntos de balizas para dos subpolígonos generados con cortes seguros cubre a P .

Existen polígonos en los que no se puede realizar un corte seguro. Si ese es el caso, Bae *et al.* muestran mediante un análisis por casos que siempre se puede encontrar un corte adecuado. Los detalles de esta demostración están fuera del alcance de este trabajo y pueden consultarse en [4].

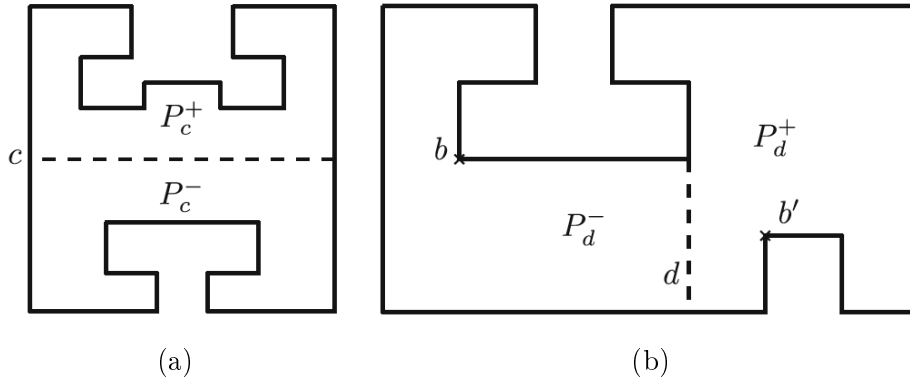


Figura 5.2: (a) Polígono que admite un corte seguro, (b) polígono que no admite un corte seguro. (Figura tomada de [4].)

Para probar la cota inferior, Bae *et al.* construyen un polígono ortogonal P_r

con forma de espiral que tiene r vértices cóncavos. P_r está conformado por $r + 1$ rectángulos delgados, y no puede ser cubierto con menos de $\lceil \frac{r}{3} \rceil$ balizas. Se dice que un polígono ortogonal es una espiral si todos sus vértices cóncavos son consecutivos a lo largo de su frontera.

La secuencia de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{r+1}$, donde v_1, v_2, \dots, v_r son los vértices cóncavos de P_r , forma una cadena poligonal llamada la *espina* de la espiral. Los dos extremos de la espina de la espiral son los únicos vértices convexos adyacentes a un vértice cóncavo. También se puede especificar una espiral con la secuencia de longitudes de aristas (a_0, a_1, \dots, a_r) tal que a_i es la longitud de la arista $v_i v_{i+1}$ para $i = 0, \dots, r$.

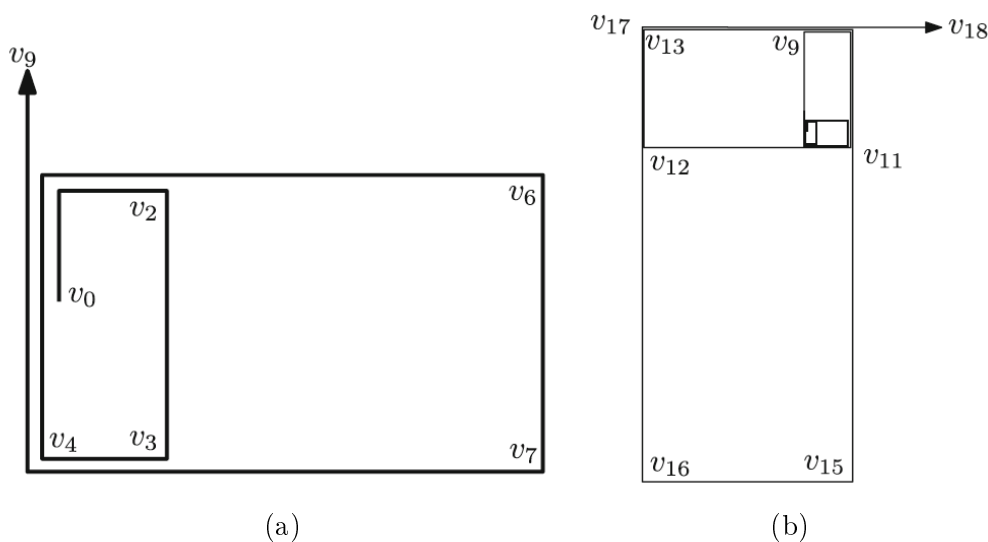


Figura 5.3: La espiral de los polígonos (a) P_9 y (b) P_{18} . (Figura tomada de [4].)

La Figura 5.3 muestra la espina de P_r , como fue mostrada por Bae *et al.* en [4]. En esta figura la relación dimensional de los rectángulos de P_r es aproximadamente $4 + \frac{r}{2}$.

La idea principal de la demostración es construir una espiral con las dimensiones adecuadas, de modo que al colocar una baliza cada vez que la espiral da una vuelta completa exista una región que no es cubierta entre dos balizas consecutivas. Consideremos a P_7 en la Figura 5.4. Si se colocan dos balizas b_1 y b_2 sobre el corte horizontal de v_2 y el corte vertical de v_6 , entonces una región triangular en la esquina inferior izquierda de P_7 no está cubierta. Por lo tanto, P_7 necesita $3 = \lceil \frac{7}{3} \rceil$ balizas para ser cubierto. De manera que al demostrar que para una selección adecuada de

las longitudes de aristas de la espina de P_r , una cobertura óptima de P_r consiste en colocar una baliza cada tercer rectángulo de P_r , por lo que se llega a la cota inferior de $\lceil \frac{r}{3} \rceil$.

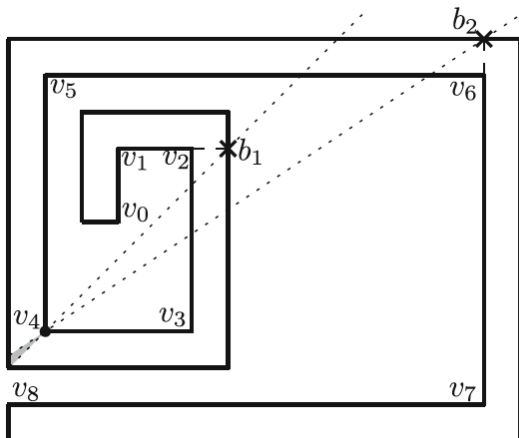


Figura 5.4: Colocar dos balizas b_1 y b_2 en P_7 cerca de v_2 y v_6 no es suficiente para cubrir la región triangular mostrada en gris. (Figura tomada de [4].)

Se define un orden \prec entre los puntos de cualquier espiral P de la siguiente manera. Sean q y p dos puntos en P . Sean $s(p)$ y $s(q)$ los puntos sobre la espiral más cercanos a p y q , respectivamente. Se dice que p precede a q , lo que se denota $p \prec q$, si $s(p)$ precede a $s(q)$ en la espiral, es decir, si $s(p)$ está en la sección de la espiral entre v_0 y $s(q)$.

Se utiliza una partición de una espiral P_r en $3r + 2$ subpolígonos rectangulares. Para obtener la partición se hacen cortes horizontales y verticales en v_i para cada $i = 0, \dots, r$ y se hace un corte en el punto medio de la arista $v_i v_{i+1}$ para cada $i = 0, \dots, r$. Los rectángulos obtenidos son etiquetados como $A_0, B_0, C_1, A_1, B_1, \dots, C_r, A_r, B_r$, ordenados a lo largo de la espina, comenzando desde el interior de la espiral.

Sea $k = k(r)$ el mínimo número de balizas que pueden cubrir a P_r . Se dice que una secuencia de balizas b_1, b_2, \dots, b_k que cubre a $P - r$ es una disposición *greedy* si $s(b_1) \prec \dots \prec s(b_k)$, y la secuencia $s(b_1), \dots, s(b_k)$ es máxima en orden lexicográfico. De manera intuitiva, una disposición *greedy* se obtiene al alejar las balizas tanto como sea posible del origen v_0 . Es fácil ver que b_1 debe colocarse de modo que $s(b_1) = v_2$. Luego, para b_2, \dots, b_{k-1} Bae *et al.* hacen siguiente observación:

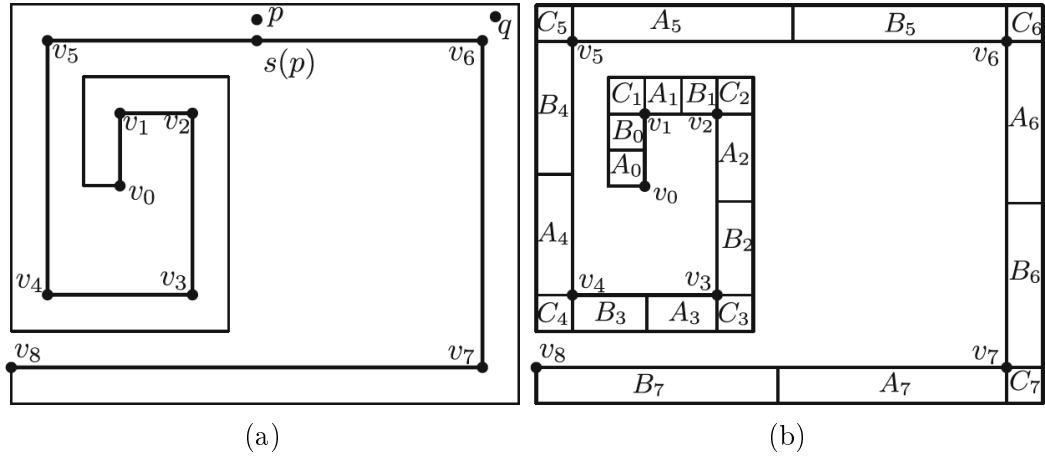


Figura 5.5: (a) El punto $s(p)$ aparece antes que el punto $s(q)$ en la espina de la espiral, por lo que $p \prec q$. (b) La partición de P_r en $3r + 2$ rectángulos. (Figuras tomadas de [4].)

Lema 5.2.3. Para $2 \leq i \leq k - 1$, la i -ésima baliza b_i de una disposición greedy para P_r se encuentra en el rectángulo A_{3i-1} .

La demostración del Lema 5.2.3 está fuera de los alcances de esta tesis. Como consecuencia del Lema 5.2.3, las primeras $k - 1$ balizas en una disposición greedy óptima cubren la espiral hasta el rectángulo B_{3k-3} , y por lo tanto: $r \geq 3k - 2$. Dicho de otro modo:

Lema 5.2.4. La espiral P_r no puede ser cubierta con menos de $\lceil \frac{r}{3} \rceil = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ balizas, donde n denota el número de vértices de P_r .

5.3. Cobertura de interior y exterior

Ahora consideramos el problema de cubrir de manera simultánea el interior y el exterior de un polígono P ortogonal colocando balizas en los vértices de P . En este problema buscamos un conjunto de balizas de cardinalidad mínima B tal que, dado un polígono ortogonal P , todo punto $p \in P$ y todo punto $p' \notin P$ sean cubiertos por al menos un elemento de B . En el siguiente teorema demostramos que $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ balizas colocadas en los vértices de P son suficientes para cubrir tanto el interior como el exterior de P :

Teorema 5.3.1. *Sea P un polígono ortogonal, posiblemente con hoyos, con n vértices. Entonces, tanto el interior como el exterior de P pueden ser cubiertos utilizando a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ balizas colocadas en los vértices de P .*

Demostración. Existen cuatro tipos distintos de aristas en P , por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ aristas derechas en P . Sea B el conjunto de vértices inferiores de las aristas derechas de P . Colocamos una baliza en cada elemento de B . Ahora probaremos que el conjunto B cubre a P . Para cada $b \in B$ consideremos al segmento de recta vertical maximal contenido en P que pasa por b , al que denotaremos s_b . El conjunto de segmentos de línea $S = \{s_b : b \in B\}$ divide a P en subpolígonos que por construcción sólo tienen una arista derecha, por lo que P es dividido en histogramas. Además, dado que sólo usamos segmentos de recta verticales para dividir a P , todas las aristas superiores e inferiores de los histogramas generados están contenidas en aristas de P .

Sea p un punto en un histograma $H \subset P$ y sea b_h uno de los vértices de B que yacen en la arista derecha de H . Probaremos que p está cubierto por b_h cuando p está por arriba de b_h , el otro caso es simétrico. Si p está en la arista derecha de H , entonces puede moverse en línea recta hasta b_h . Supongamos que p está arriba y a la izquierda de b_h . Como H sólo tiene una arista derecha, entonces el camino de atracción de p con respecto a b_h , $AP(p, b_h)$, sólo puede tocar aristas inferiores de H . Dado que todas las aristas de H están contenidas en aristas de P , $AP(p, b_h)$ está contenido en H . Si $AP(p, b_h)$ no termina en b_h entonces ha alcanzado un mínimo local con respecto a b_h en el punto interior de una arista de H . Tal mínimo local tiene que estar exactamente arriba de b_h , lo que no es posible puesto que b_h está contenido en la única arista derecha de H . Por lo tanto, las balizas colocadas sobre los elementos de B cubren el interior de P .

Ahora probamos que las balizas colocadas en los elementos de B y una baliza adicional cubren el exterior de P . Sea R un rectángulo que contiene a P en su interior. Sea $P' = R \setminus \text{int}(P)$. Notemos que en P' los elementos de B son vértices inferiores de aristas izquierdas. Podemos utilizar la misma técnica que se usó en el interior para probar que se puede cubrir a P' con las balizas colocadas en B , además de una baliza colocada en el vértice inferior de la arista izquierda de R . A continuación probaremos que se puede reemplazar esa baliza por otra colocada en el vértice inferior v_i de una arista más a la izquierda de P .

Sea $H_R \subset P'$ el histograma cuya arista izquierda es la arista izquierda de R . Sea P un punto contenido en H_R . Si p está a la izquierda de la recta vertical ℓ que pasa por v_i entonces puede ser atraído por v_i en línea recta. Probaremos el caso cuando p

está a la derecha y arriba de v_i . Si p está abajo de v_i la demostración es simétrica.

Como p está a la derecha de v_i , el camino de atracción de p con respecto a v_i , $AP(p, v_i)$, sólo puede tocar aristas inferiores de H_R . Dado que todas las aristas inferiores de H_R están contenidas en aristas de P , excepto por aquella que está contenida en la arista inferior del rectángulo R , $AP(p, v_i)$ está contenido en H_R . Si $AP(p, v_i)$ no termina en v_i , entonces ha alcanzado un mínimo local con respecto a v_i en una arista inferior de H_R . Este mínimo local debe estar exactamente arriba de v_i , lo cual no es posible ya que v_i es un vértice incidente en una de las aristas más a la izquierda de P . Por lo tanto, H_R está cubierto por la baliza colocada en v_i . Como resultado, tanto el interior como el exterior de P están cubiertos al colocar una baliza en los elementos de B y en v_i . \square

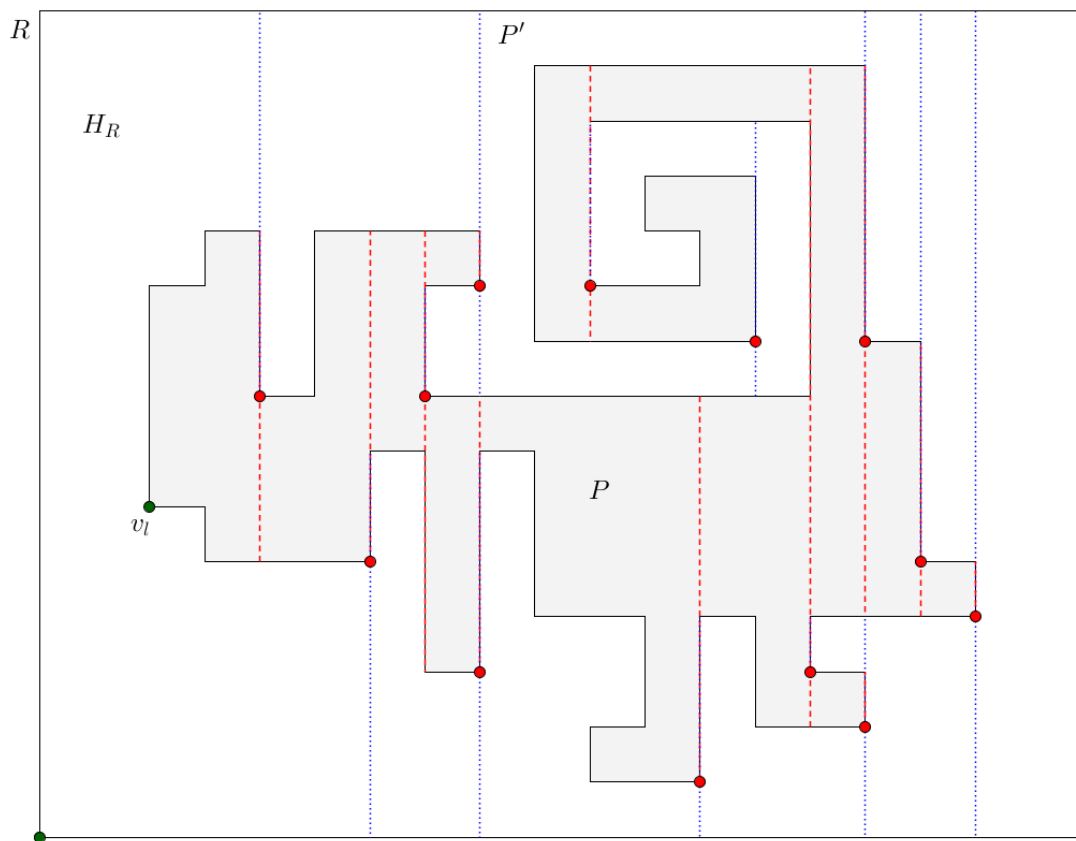


Figura 5.6: Descomposición del interior y el exterior de un polígono ortogonal en histogramas.

Capítulo 6

Cobertura de poliedros ortogonales

6.1. Cobertura de poliedros ortogonales

En este capítulo estudiamos el problema de cobertura con balizas en el interior y el exterior de poliedros ortogonales. Comenzamos respondiendo a la pregunta hecha por J. Urrutia en el evento *12th Latin American Theoretical Informatics Symposium*, realizado en la ciudad de Ensenada en Abril de 2016: ¿Es verdad que si colocamos una baliza en cada vértice de un poliedro ortogonal P , cualquier punto p en el interior de P puede elegir una baliza b (un vértice de P) tal que b cubra a p ?

Es sabido que existen poliedros ortogonales cuyo interior no puede ser vigilado por guardias colocados en sus vértices. Tal es el caso del poliedro *octoplex*, propuesto por T.S. Michael en [21]. El octoplex es un ortoedro con seis canales en sus caras, cada uno de ellos en una cara distinta.

A continuación presentamos un poliedro ortogonal P tal que si colocamos una baliza en cada vértice de P , existe un punto $p \in P$ que no está cubierto por ninguna de las balizas. Para nuestra construcción, tomamos un octoplex alargado y pegamos en el centro de cada canal un ortoedro de la misma longitud pero más bajo y estrecho. El resultado es que cada canal del octoplex alargado tiene una muesca, como se muestra en la Figura 6.1.

Observemos en la Figura 6.2 que el camino de atracción del punto central p con respecto a cualquiera de los vértices distinguidos llega a un mínimo local ubicado en la muesca de un canal del poliedro P . Por simetría, sucede lo mismo para el resto de

los vértices de P . Como resultado, el interior de P no puede ser cubierto con balizas colocadas en sus vértices.

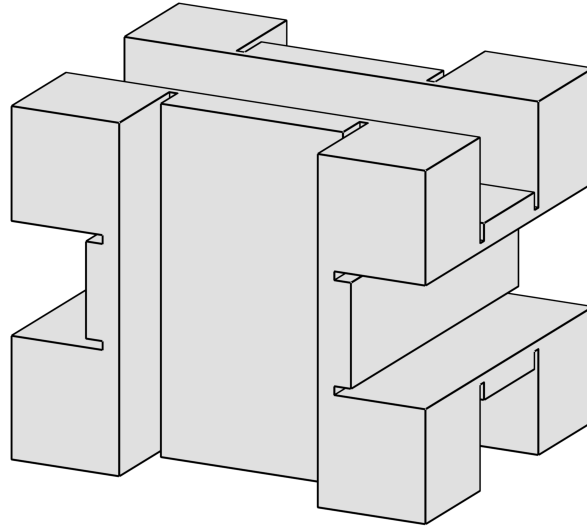


Figura 6.1: Un poliedro ortogonal que no puede ser cubierto con balizas en los vértices.

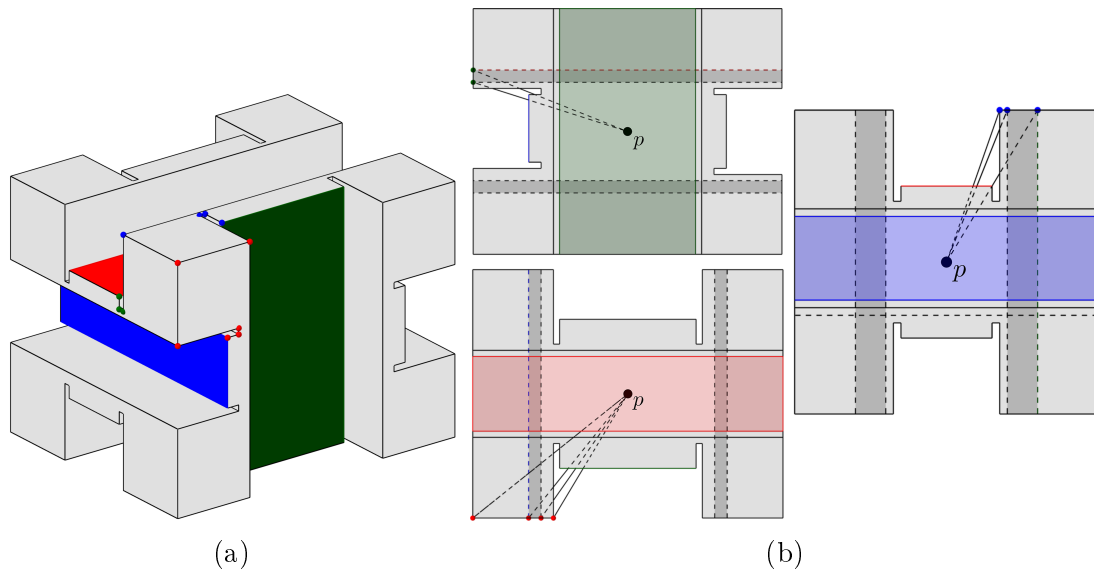


Figura 6.2: Las tres diferentes proyecciones ortogonales del octoplex con muescas, los segmentos muestran que el punto central se atora en una muesca cuando es atraído por cada uno de los vértices de una esquina.

Existen familias de poliedros ortogonales cuyo interior puede ser vigilado con guardias colocados en sus vértices, y también cubierto con balizas colocadas en los vértices. Tal es el caso de los ortoárboles, los cuales estudiamos en el Capítulo 7.

Aunque el interior de los ortoárboles puede ser tanto vigilado como cubierto desde sus vértices, existe un ortoárbol cuyo exterior no puede ser cubierto con balizas colocadas en sus vértices, como el que se presenta en la Figura 6.3. Este poliedro está compuesto por seis vigas dentadas dispuestas de la misma manera que los seis canales del octoplex, unidas por medio de tubos ortogonales de manera que se forme un ortoárbol.

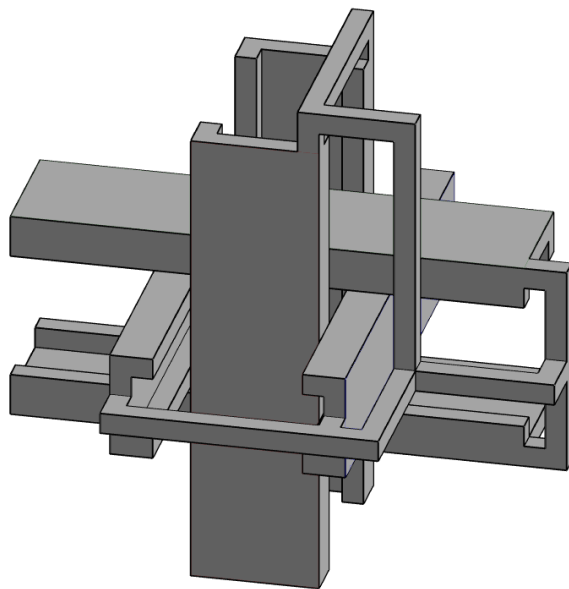


Figura 6.3: Un ortoárbol cuyo exterior no puede ser cubierto con balizas en los vértices.

El punto central p de la región delimitada por la seis vigas en el exterior del poliedro no puede ser cubierto por ninguno de sus vértices. Consideremos la *cuña* (prisma triangular) cuya arista ápice es vertical y contiene a p , como la que se muestra en la Figura 6.4a. Esta cuña está delimitada por las dos aristas verticales de una viga que son convexas y comparten cara con una arista cóncava, ver el vértice v que representa una de esas dos aristas en la Figura 6.4b. Notemos que esa viga divide a la cuña en dos regiones conexas: W_p , la cual contiene a p , y W'_p , la cual no contiene a p . Conforme a la notación en la Figura 6.4, la proyección del poliedro en el plano está construida con p en el origen, de modo que q y v satisfacen $\frac{q_y}{q_x} < \frac{v_y}{v_x}$,

asegurando así que el rayo pq interseque la hendidura de la viga roja. Por lo tanto, cualquier baliza colocada en la región interior de W'_p no puede cubrir a p . Podemos construir una cuña por cada viga de tal manera que cada vértice de P esté contenido en el interior de una de esas cuñas. Concluimos en que este poliedro no puede ser cubierto con balizas colocadas en sus vértices.

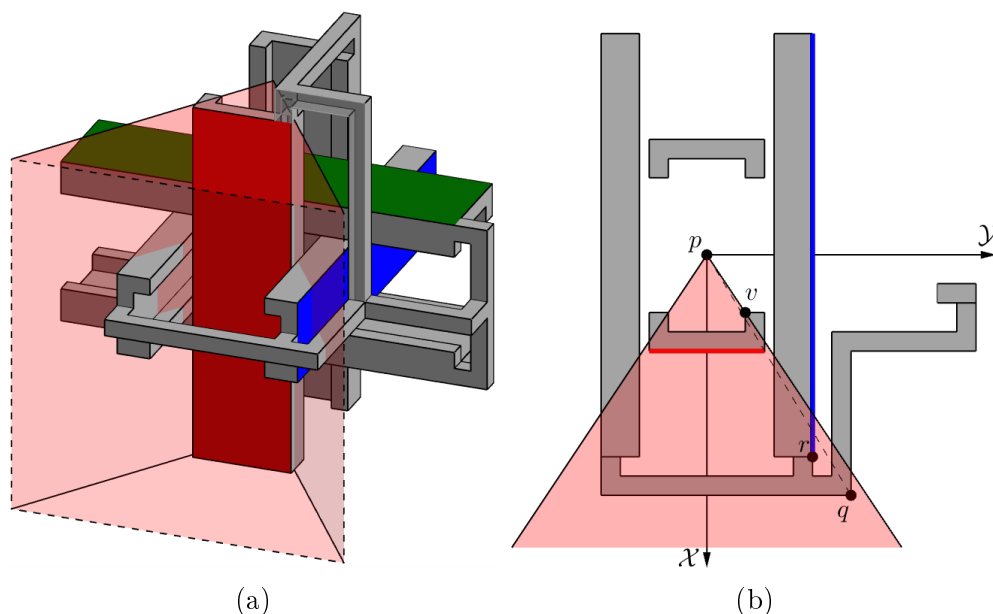


Figura 6.4: (a) Cuña cuyo ápice es vertical y contiene al punto p . (b) Proyección ortogonal en el plano \mathcal{XY} de algunos elementos seleccionados del poliedro.

Con el fin de estudiar la atracción con balizas en poliedros ortogonales, proponemos el modelo de *aristas baliza*. En este modelo, una baliza es toda una arista junto con sus dos vértices. Cuando una arista baliza b es activada, cada objeto p se mueve hacia q , donde q es el punto de b más cercano a p . Consideramos que b cubre a p si, bajo su atracción, p puede llegar a q .

Hacemos la siguiente observación sobre el camino de atracción de un punto con respecto a una arista baliza en un polígono ortogonal:

Observación 6.1.1. Sean P un poliedro ortogonal, e una arista baliza en P , y p un punto en el interior o en el exterior de P . Si el punto $q \in e$ más cercano a p es un punto en el interior de e (q no es un vértice), entonces el camino de atracción de p con respecto a e está contenido en el plano perpendicular a e que contiene a p y q .

6.2. Cobertura del interior con balizas arista

Para cada tipo de cara $F \in \{\text{izquierda, derecha, superior, inferior, frontal, trasera}\}$ y cada tipo de arista $E \in \{\text{izquierda, derecha, superior, inferior, frontal, trasera}\}$ definimos la regla FE . La regla FE selecciona las aristas del tipo E incidentes a las caras del tipo F en un poliedro ortogonal P . Por ejemplo, la regla *derecha inferior* selecciona las aristas inferiores de las caras derechas de P . Cada tipo de cara es incidente a sólo cuatro tipos de arista distintos, por lo que reglas como la *superior superior* no seleccionan ninguna arista. El siguiente lema garantiza que para cualquier poliedro ortogonal se puede elegir una regla FE que seleccione a lo más una doceava parte de sus aristas.

Lema 6.2.1. *Para todo poliedro ortogonal P existe una regla FE que selecciona a lo más $\lfloor \frac{e}{12} \rfloor$ aristas de P , donde e es el número de aristas de P .*

Demostración. Sean X , Y , y Z el número de aristas incidentes a las caras \mathcal{X} , \mathcal{Y} , y \mathcal{Z} de P , respectivamente. Dado que $X + Y + Z = 2e$, uno de entre X , Y , o Z tiene valor a lo más de $\lfloor \frac{2e}{3} \rfloor$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que el conjunto F de caras \mathcal{Y} incide en a lo más $\lfloor \frac{2e}{3} \rfloor$ caras de P . Existen dos tipos de caras en F : caras izquierdas y caras derechas. Sea $R \subset F$ el conjunto de caras derechas de P y sea E_R el conjunto de aristas incidentes en los elementos de R . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|E_R| \leq \lfloor \frac{e}{3} \rfloor$. Existen cuatro tipos de aristas incidentes en los elementos de E_R : aristas superiores, aristas inferiores, aristas frontales y aristas traseras. Por lo tanto, uno de esos cuatro tipos tiene a lo más $\frac{|E_R|}{4}$ aristas de P . Supongamos sin pérdida de generalidad que el conjunto de aristas inferiores incidentes en los elementos de E_R contiene a lo más $\frac{|E_R|}{4} \leq \lfloor \frac{e}{12} \rfloor$ elementos. Notemos que esas son las aristas seleccionadas por la regla *derecha inferior*. En cualquier otro caso, la prueba es análoga si se selecciona la regla FE apropiada. \square

Para demostrar que $\lfloor \frac{e}{12} \rfloor$ aristas baliza son siempre suficientes para cubrir un poliedro ortogonal P solo resta demostrar que el conjunto de aristas elegido por cualquier regla FE cubre el interior de P .

Teorema 6.2.2. *Sea P un poliedro ortogonal con e aristas. Entonces $\lfloor \frac{e}{12} \rfloor$ aristas baliza son siempre suficientes para cubrir P .*

Demostración. Podemos suponer por el Lema 6.2.1 que el conjunto B de aristas

seleccionadas por la regla *FE derecha inferior* tiene a lo más $\lfloor \frac{e}{12} \rfloor$ aristas.

Colocamos una baliza en cada $b \in B$. Demostraremos que este conjunto de balizas cubre a P . Sea p un punto en P . Sea β el plano- \mathcal{X} que contiene a p y sea Q el componente conexo de $\beta \cap P$ que contiene a p . Notemos que Q es un polígono ortogonal, y que cada vértice inferior de una arista derecha de Q es de la forma $b \cap Q$ para algún $b \in B$, es decir, las aristas de P en las que se colocó una baliza se convierten en vértices en Q .

Por la Observación 6.1.1, el camino de atracción de p con respecto a la arista b , $AP(p, b)$, está contenido en el plano β . Por lo tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el Teorema 5.3.1 se demuestra que p está cubierto por una baliza colocada en una arista $b \in B$. □

Para la cota inferior, mostramos una familia de poliedros ortogonales con e aristas que requieren de $\lfloor \frac{e}{21} \rfloor$ aristas baliza para cubrir su interior.

Teorema 6.2.3. *Existe una familia de poliedros ortogonales con e aristas que necesitan de $\lfloor \frac{e}{21} \rfloor$ aristas baliza para cubrir su interior.*

Demostración. Construimos un poliedro de levantamiento P basado en el polígono espiral ortogonal que consiste en una secuencia de $r + 1$ rectángulos delgados. La Figura 6.5 muestra una vista superior de P .

Sea e_0, e_1, \dots, e_{r+1} la secuencia de aristas convexas consecutivas de P que son paralelas al eje \mathcal{Z} , cuyas proyecciones ortogonales son mostradas en la Figura 6.5. Sea e'_1, e'_2, \dots, e'_r la secuencia de aristas cóncavas de P , y sean e'_0 y e'_{r+1} las aristas convexas de P paralelas al eje \mathcal{Z} que tienen una cara en común con e'_1 y e'_r , respectivamente. Vistas desde arriba, corresponden a los vértices cóncavos y convexas de la proyección de P en el plano \mathcal{XY} , ver Figura 6.5.

Supongamos por simplicidad que $r = 7m$ para $m \in \mathbb{N}$. Para cada $0 \leq k < m$, colocamos un punto distinguido p_k en el interior de P , lo suficientemente cerca del centro de la cara formada por las aristas e'_{7k} y e'_{7k+1} , y colocamos un punto distinguido p'_k en el centro del rectángulo formado por las aristas e_{7k+4} y e'_{7k+4} , como se muestra en la Figura 6.5. Notemos que p'_k está en una región que no está cubierta por e_{7k+2} , e'_{7k+2} , e_{7k+6} ni e'_{7k+6} .

Notemos que no existe una arista que cubra dos puntos distinguidos. Dado que existen $\frac{2r}{7}$ puntos distinguidos y que P tiene $e = 6(r + 1)$ aristas, son necesarias al

menos $\lfloor \frac{e}{21} \rfloor$ aristas baliza para cubrir a P . □

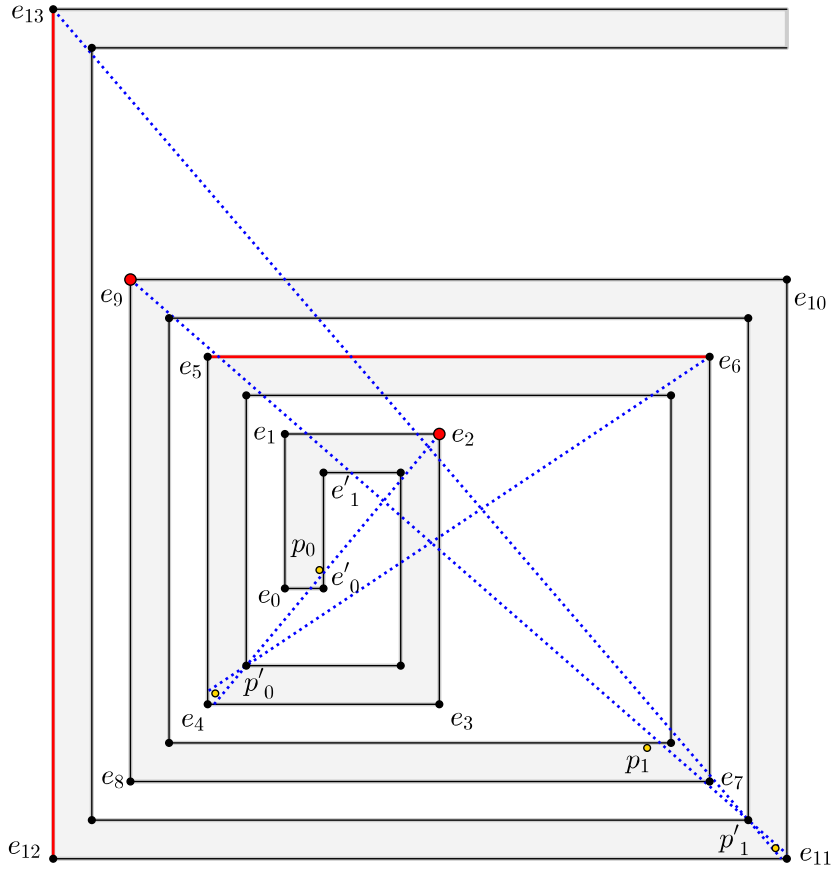


Figura 6.5: Proyección ortogonal de un poliedro ortogonal que necesita $\lfloor \frac{e}{21} \rfloor$ balizas arista para ser cubierto.

6.3. Cobertura simultánea del interior y el exterior con aristas baliza

A continuación mostramos que $\lfloor \frac{e}{6} \rfloor$ aristas baliza son siempre suficientes para cubrir simultáneamente el interior y el exterior de un poliedro ortogonal.

Teorema 6.3.1. *Sea P un poliedro ortogonal con e aristas. Entonces $\lfloor \frac{e}{6} \rfloor$ aristas baliza son siempre suficientes para cubrir tanto el interior como el exterior de P .*

Demostración. Sean X , Y , y Z el número de aristas incidentes a las caras \mathcal{X} , \mathcal{Y} , y \mathcal{Z} de P , respectivamente. Dado que $X + Y + Z = 2e$, uno de entre X , Y , o Z tiene valor de a lo más $\lfloor \frac{2e}{3} \rfloor$.

Sea F el conjunto de aristas incidentes a las caras- \mathcal{Y} de P y supongamos sin pérdida de generalidad que $|F| \leq \lfloor \frac{2e}{3} \rfloor$. Existen dos tipos de caras- \mathcal{Y} , caras izquierdas y caras derechas, y cada una de ellas incide en cuatro tipos diferentes de aristas: superiores, inferiores, frontales y traseras. Sea E_{tb} el conjunto obtenido al seleccionar primero las aristas superiores de las caras izquierdas de P y después las aristas inferiores de las caras derechas de P . Decimos que E_{tb} es un conjunto de aristas opuestas de P . En el conjunto de caras elegidas podemos seleccionar solo cuatro subconjuntos diferentes de aristas opuestas (aristas superiores de caras izquierdas y aristas inferiores de caras derechas, aristas frontales de caras izquierdas y aristas posteriores de caras derechas, etc.). Por lo tanto, uno de tales subconjuntos de aristas contiene a lo más $\lfloor \frac{|F|}{4} \rfloor$ aristas de P .

Supongamos sin pérdida de generalidad que $|E_{tb}| = \lfloor \frac{|F|}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{e}{6} \rfloor$. Colocamos una baliza en cada arista $e \in E_{tb}$. Consideremos el ortoedro más pequeño que contiene a P , al cual denotaremos O . Notemos que la cara superior de O contiene las caras de P con mayor coordenada \mathcal{Z} , cada una de las cuales contiene al menos un elemento de E_{tb} . Por lo tanto, cualquier punto que se encuentre por encima de la cara superior de O está cubierto. Se puede utilizar un razonamiento similar para probar que cualquier punto a la derecha de la cara derecha de O , a la izquierda de la cara izquierda de O , o por debajo de la cara inferior de O está cubierto. Una cara frontal de P contiene al menos los extremos de dos elementos de E_{tb} , por lo tanto, cualquier punto al frente de la cara frontal de O está cubierto. De forma análoga, un punto que está atrás de la cara trasera de O está cubierta. Sólo tenemos que probar que un punto $p \notin P$ en el interior del ortoedro O puede ser cubierto por alguna de las balizas colocadas en los elementos de E_{tb} .

Sea Q_p el plano- \mathcal{X} que contiene a p . Notemos que Q_p contiene uno o más polígonos producidos por la intersección de Q_p con P , y que cada vértice inferior de una cara derecha de un polígono en Q_p y cada vértice superior de una arista izquierda de un polígono en Q_p es de la forma $b \cap Q_p$ para algún $b \in E_{tb}$.

Desde p , disparamos dos rayos verticales, uno hacia arriba y otro hacia abajo, y dos rayos horizontales, uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha. Pueden ocurrir

dos casos, o uno de los rayos toca un polígono en Q_p o ningún rayo toca un polígono.

Supongamos sin pérdida de generalidad que el rayo ℓ disparado hacia arriba toca una arista inferior e de un polígono en Q_p . Si deslizamos ℓ hacia la derecha pueden ocurrir tres casos:

- Alcanzamos el extremo derecho v de la arista e , y v es un vértice convexo. Como v es el vértice inferior de una arista derecha de un polígono en Q_p , entonces v corresponde a un elemento de E_{tb} en P .
- Alcanzamos el extremo derecho v de la arista e , y v es un vértice cóncavo. Como v es el vértice superior de una arista izquierda de un polígono en Q_p , entonces v corresponde a un elemento de E_{tb} en P .
- Alcanzamos una arista vertical de un polígono en Q_p , la cual corresponde a una cara izquierda de P con un elemento de E_{tb} en su parte superior.

En cualquier caso, p está cubierta por una baliza. La prueba para los otros tres rayos es similar, deslizando ℓ hacia el lado correcto.

Ahora supongamos que ninguno de los rayos lanzados desde p toca una arista de Q_p . Sea ℓ la línea horizontal que contiene a p y supongamos sin pérdida de generalidad que existe un polígono arriba de p en Q_p . Deslizamos ℓ hacia arriba hasta que toca una arista a de un polígono en Q_p . Como a es una arista inferior, tiene un vértice derecho correspondiente a un elemento de E_{tb} en P . La Figura 6.6 muestra un ejemplo de este caso. La prueba para el caso en el que existe un polígono abajo de p en Q_p es simétrica.

Se cumple que el exterior de P está cubierto. Notemos que E_{tb} está conformado por las aristas que son seleccionadas por la regla *FE izquierda superior* y la regla *FE derecha superior*. Por el Teorema 6.2.2, el interior de P también está cubierto. \square

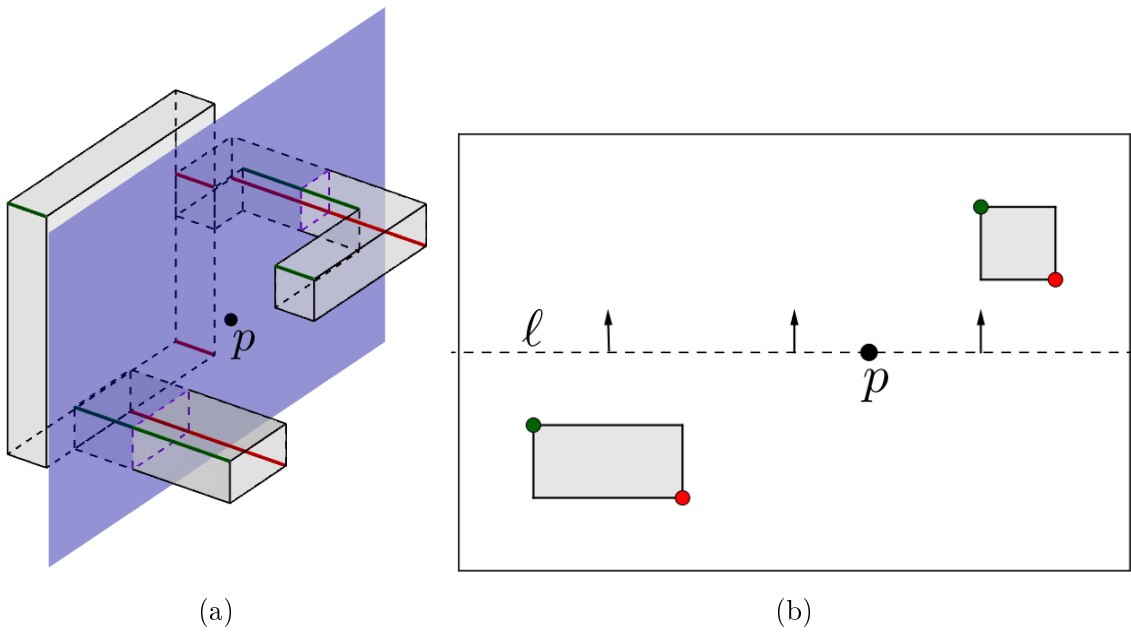


Figura 6.6: (a) Un poliedro ortogonal y un punto p en su exterior, p es intersecado por un plano- \mathcal{X} . (b) La intersección del plano \mathcal{X} con p . Los vértices rojos y verdes representan las aristas baliza en el poliedro.

Capítulo 7

Cobertura de ortoárboles

7.1. Introducción

En este capítulo estudiamos una familia de poliedros ortogonales llamados ortoárboles. Recordemos que los *ortoárboles* son poliedros ortogonales compuestos de ortoedros pegados cara a cara de modo tal que la intersección de dos ortoedros adyacentes sea una cara 2-dimensional de ambos ortoedros. Además, la gráfica G que se obtiene al colocar un nodo por cada ortoedro que conforma a un ortoárbol P y unir dos nodos con una arista si sus ortoedros correspondientes son adyacentes, llamada la *gráfica dual* de P , es un árbol.

Cada ortoedro que compone a un ortoárbol P tiene grado igual al grado del nodo que lo representa en la gráfica dual de P . Un ortoedro o de grado uno es una *hoja*. Un ortoedro de grado dos tal que sus vecinos son adyacentes a caras opuestas de o es un *conector*. Cualquier otro ortoedro es conocido como una *unión*.

Se dice que un ortoárbol está *bien separado* cuando ninguna unión es adyacente a otra unión.

La familia de ortoárboles tiene la particularidad de que el interior de los poliedros que la componen puede ser cubierto con balizas colocadas en sus vértices. Lo anterior es consecuencia de la siguiente observación:

Observación 7.1.1. Todo punto al interior de un ortoárbol P es visible para al menos 8 vértices de P .

A continuación estudiaremos el problema de la galería de arte en ortoárboles para guardias restringidos a estar en sus vértices. Para este problema obtuvimos cotas combinatorias justas. Finalmente, estudiaremos el problema de cobertura con balizas en ortoárboles. En este problema probamos cotas justas para el caso en que los ortoárboles son bien separados. Para el otro caso mostramos la prueba de cota superior que obtuvimos previamente para el caso general, similar a la obtenida después para el problema de la galería de arte.

7.2. Vigilancia de ortoárboles

En esta sección estudiamos el Problema de la Galería de Arte en ortoárboles. Recordemos que en este problema queremos encontrar un conjunto de cardinalidad mínima de guardias, representados por puntos, que vigilen el interior de un ortoárbol. Este problema es NP-difícil en polígonos delgados [29], que son polígonos tales que la gráfica dual de la partición obtenida al extender sus aristas hacia el interior hasta que toquen la frontera es un árbol. El polígono de levantamiento de cualquier polígono delgado es un ortoárbol, por lo que asumimos que vigilar ortoárboles es al menos tan difícil como vigilar polígonos delgados. Con base en lo anterior, damos cotas combinatorias sobre el número de guardias necesarios y suficientes para vigilar ortoárboles. Además, restringimos los guardias a estar ubicados en los vértices de los mismos.

El primer resultado que obtuvimos es para la familia de ortoárboles bien separados, el cual es expuesto en esta tesis con el fin de mostrar el proceso de investigación. Posteriormente encontramos la solución para vigilar ortoárboles en general. A continuación demostramos que $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar a un ortoárbol bien separado.

Teorema 7.2.1. *Sea P un ortoárbol bien separado con n vértices. Entonces $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar a P .*

Demostración. Sea P un ortoárbol bien separado con n vértices. Decimos que dos uniones en un ortoárbol bien separado son adyacentes si están unidas por un conector. Sea H la gráfica que contiene un nodo por cada ortoedro del tipo hoja o del tipo unión que compone a P , tal que dos nodos de H están unidos por una arista si los ortoedros que representan son adyacentes.

Observemos que H es un árbol, y supongamos que H tiene m nodos para algún

entero m . Cada nodo de H representa un ortoedro de P que es unión u hoja. Si un nodo s de H representa a una hoja, podemos asociar a s cuatro vértices que no son adyacentes a ningún otro ortoedro de P . Cada unión j en P es un ortoedro tal que al menos cuatro y a lo más ocho de sus vértices son vértices de P , ver la Figura 2.14; asociamos esos vértices a j . Así, a cada nodo de H se le han asignado al menos cuatro vértices de P .

Dado que H es un árbol, podemos colorear sus vértices con dos colores distintos de manera que dos nodos adyacentes tengan colores distintos. Al hacer esto, estamos creando un partición de los nodos de H en dos clases cromáticas, C_1, C_2 . Una de las dos clases cromáticas, digamos C_1 , tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices.

Luego, por cada nodo $u \in C_1$, colocamos un guardia en uno de los vértices asociados al ortoedro de P representado por u . Ahora demostraremos que esos guardias vigilan P .

Observemos que si un ortoedro v de P tiene un guardia en uno de sus vértices, tanto v como todos los ortoedros adyacentes a v , o unidos a v por medio de un conector, están vigilados. Si una hoja o unión es representada por un nodo que pertenece a C_1 , entonces está vigilada. Cada conector es adyacente a un elemento de C_1 y por lo tanto está vigilado. Si una unión t no tiene un guardia, entonces el nodo que representa a t en H es adyacente al menos a dos elementos de C_1 , los cuales representan ortoedros adyacentes a t o unidos a t por medio de un conector. Por lo tanto, t está vigilado. Si una hoja ℓ no tiene un guardia en uno de sus vértices asociados, entonces el nodo correspondiente a ℓ en H es adyacente a un elemento de C_1 , el cual representa una unión adyacente a ℓ que contiene un guardia. Por lo tanto, ℓ está vigilado.

Dado que la cantidad de guardias colocados en P es a lo más la mitad del número de nodos de H , y dado que cada nodo de H representa al menos a cuatro vértices de P , se cumple que $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices son siempre suficientes para vigilar P .

Para la cota inferior consideremos el peine ortogonal de tres dimensiones con k puntas y $n = 8k$ vértices mostrado en la Figura 7.1, que es un ortoárbol bien separado. Este poliedro necesita al menos $k = \lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices para ser vigilado. \square

El resultado anterior solamente se cumple para ortoárboles bien separados. La razón es que en el árbol construido para la demostración solamente es posible asegurar que a cada nodo que representa a una unión le corresponden cuatro vértices cuando las uniones en el ortoárbol son disjuntas en vértices. A continuación demostramos que

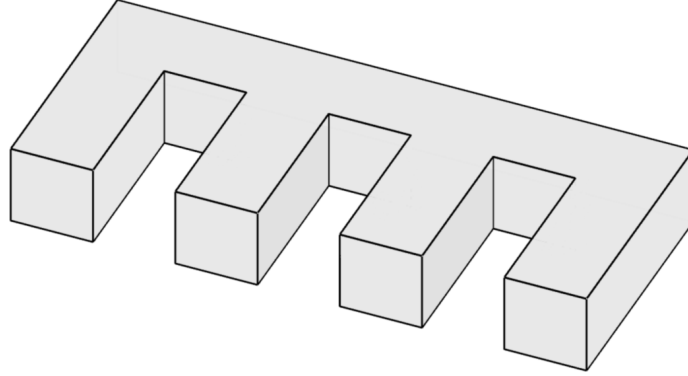


Figura 7.1: Un ortoárbol bien separado que requiere $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices para ser vigilado.

$\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ guardias colocados en los vértices son siempre suficientes para vigilar cualquier ortoárbol P , aún cuando P no sea un ortoárbol bien separado.

Teorema 7.2.2. *Sea P un ortoárbol con n vértices. Entonces $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ vértices son siempre suficientes para vigilar a P .*

Demostración. Sea P un ortoárbol con n vértices. Definimos un *ortoedro maximal* de un ortoárbol P como un ortoedro maximal alineado a los ejes contenido en P . Sea C el conjunto de todos los ortoedro maximales de P , con excepción de aquellos en cuya frontera existan menos de 8 vértices de P . No es difícil ver que la unión de los elementos de C es igual a P , ya que todo punto en p es visible para al menos ocho vértices. Notemos también que a lo más tres ortoedros maximales de P tienen una intersección no vacía.

Asignamos a cada ortoedro maximal $T \in C$ 8 de los vértices de P contenidos en la frontera de T (ver los vértices distinguidos en la Figura 7.2).

Sea $G = (V, E)$ la gráfica en la que V es el conjunto de vértices asignados a los elementos de C , y existe una arista (u, v) en E si u y v son asignados al mismo ortoedro maximal. Notemos que, por la elección de los vértices de cada ortoedro maximal, G podría no ser conexa. La subgráfica inducida por los vértices asignados a cualquier ortoedro maximal de C es entonces una gráfica completa con 8 vértices.

No es difícil ver que G es 8-coloreable, ya que podemos utilizar un argumento inductivo en el que eliminemos de la gráfica los vértices que fueron asignados a sólo un ortoedro maximal M , obtengamos una 8-coloración de la gráfica restante y volvamos a agregar los vértices y aristas removidos, coloreando tales vértices con los colores

no utilizados en los vértices asignados a M que no fueron removidos de G por que también habían sido asignados a otro ortoedro maximal de P .

Obtenemos una 8-coloración de los vértices de G . Esto divide los vértices de G en ocho clases cromáticas, una de las cuales tiene a lo más $\lfloor \frac{m}{8} \rfloor$ vértices, donde m es el número de vértices en G . Cada ortoedro maximal de C tiene un vértice de cada color, y la unión de los elementos de C es igual a P . Como consecuencia de lo anterior, los vértices de cualquier clase cromática vigilan a P . Por lo tanto, P puede ser vigilado utilizando a lo más $\lfloor \frac{m}{8} \rfloor$ de sus vértices.

□

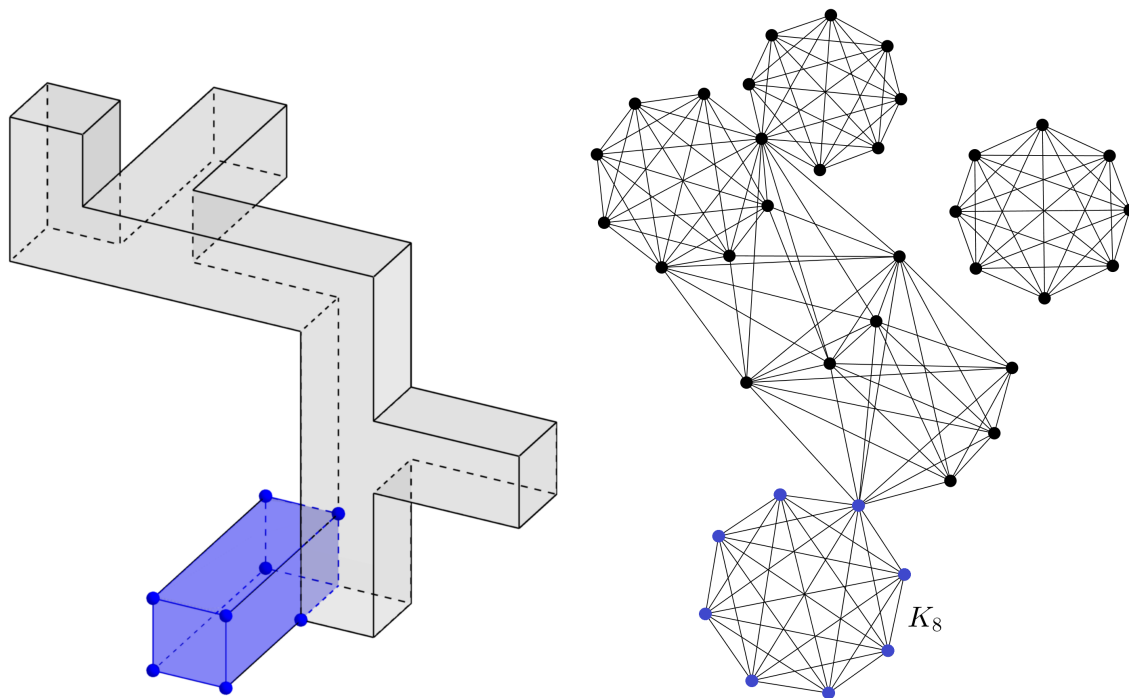


Figura 7.2: Un ortoárbol con un ortoedro maximal distinguido mostrado en azul, y la gráfica generada al incluir los vértices asignados a cada ortoedro maximal de P y unir dos vértices si son asignados al mismo ortoedro.

7.3. Cobertura con balizas

Ahora consideramos el problema de cobertura del interior de ortoárboles con balizas. Similar al problema anterior, en este problema queremos encontrar un conjunto de cardinalidad mínima de balizas que cubran el interior de un ortoárbol, restringiendo las balizas a estar ubicadas en los vértices. El primer resultado que mostramos es para ortoárboles en general. La cota superior que encontramos es similar a la obtenida para el número de guardias, pero incluimos el resultado en este trabajo para mostrar el desarrollo de la investigación.

7.3.1. Cota superior

Teorema 7.3.1. *Sea P un ortoárbol con n vértices. Entonces $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ balizas colocadas en los vértices de P son siempre suficientes para cubrir a P .*

Demostración. Sea B el conjunto de caras inferiores de P y sea S el conjunto de caras superiores de P . Los elementos de B no comparten vértices con los elementos de S . Además, los elementos de $B \cup S$ son incidentes a todos los vértices de P . Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los elementos de B son incidentes a lo más a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices de P . Supongamos que las caras de B son etiquetadas como g_1, g_2, \dots, g_m de forma tal que si $i < j$ entonces el plano β_i que contiene a g_i está por debajo del que contiene a g_j , o $\beta_i = \beta_j$.

Sea R_i el componente conexo de $P \cap \beta_i$ que contiene a g_i . Observemos que R_i es un polígono ortogonal. R_i podría contener otra cara g_j de P y en ese caso se tendría que $R_i = R_j$.

Consideremos el conjunto R de polígonos distintos generados por las caras inferiores de P . Para cada $R_i \in R$ definimos un subpoliedro P_i de P de la siguiente manera: El subpoliedro P_i está compuesto de los puntos p en P tales que el segmento vertical de recta contenido en P que conecta a p con R_i no cruza otro R_j , con $i \neq j$. Por construcción, todos los subpoliedros resultantes tienen solamente una cara inferior.

Para cada subpoliedro P_i , sea f_i la cara inferior de P_i . Observemos que f_i se compone de caras de P y de rectángulos que no son caras de P . Por simplicidad, nos referiremos a los últimos como δ -rectángulos de ahora en adelante. Ver Figura 7.3.

Sea f'_i el polígono obtenido al remover de P_i los δ -rectángulos en los que tres de sus lados están contenidos en la frontera de f_i . Ver la Figura 7.3b. Este tipo de

δ -rectángulos agregan a f_i vértices que no existen en P .

Ahora mostraremos que la suma de la cantidad de vértices de f'_i (mostrados en negro en la Figura 7.3b) para todos los i subpoliedros no es mayor de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Un δ -rectángulo en el que sólo dos lados adyacentes son contenidos en la frontera de f'_i contiene un vértice que no existe en P (mostrado con forma de diamante en la Figura 7.3b). Sin embargo, un δ -rectángulo de ese tipo es adyacente a dos vértices de P que no son incluidos en f'_i (ver los vértices blancos adyacentes al vértice en forma de diamante en la Figura 7.3b). Además, todos los vértices contenidos en los δ -rectángulos de los tipos restantes son vértices de P (ver los vértices negros y blancos de la Figura 7.3b).

Por el Teorema 3.4.2 sabemos que existe un conjunto G de vértices de f'_i que vigila a f'_i utilizando a lo más la cuarta parte de sus vértices. Si el conjunto G tiene un vértice v que no es un vértice en P , podemos reemplazarlo por un vértice de P incidente a la cara inferior del ortoedro de tipo unión que contiene a v en su cara inferior.

Probaremos que si colocamos una baliza en cada $g \in G$, entonces cubrimos a P . Consideremos el poliedro P'_i conformado de los ortoedros cuya cara inferior se encuentre contenida en f'_i . Notemos que $P'_i \subset P_i$. Cualquier punto $p \in P'_i$ es visible al menos para una baliza, por lo tanto P'_i está cubierto.

Sea p un punto que está en P_i y no está en P'_i . Entonces p está dentro de un ortoedro T contenido en $P_i - P'_i$. Supongamos que p no es visible para ningún elemento de G , de otro modo p ya está cubierto.

Sea I la intersección de T con P'_i . Notemos que, como cualquier punto en P'_i es visible para al menos un $g \in G$, todo I está vigilado por al menos una baliza b colocada en la cara inferior de P'_i .

El ortoedro T está pegado a la cara superior de P'_i o está pegado a un lado de P'_i . En cualquier caso, cuando b atrae a p , p se mueve hasta llegar a I . Cuando p alcanza a I , p se mueve en línea recta hasta alcanzar la baliza b . Por lo tanto, p está cubierto por una baliza b .

Como resultado P_i está cubierto con a lo más $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ vértices baliza, donde m es la cantidad de vértices incidentes a la cara inferior de P'_i . Dado que la cantidad de vértices incidentes a las caras inferiores de P es a lo más $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se cumple que $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ balizas colocadas en los vértices son suficientes para cubrir a P .

□

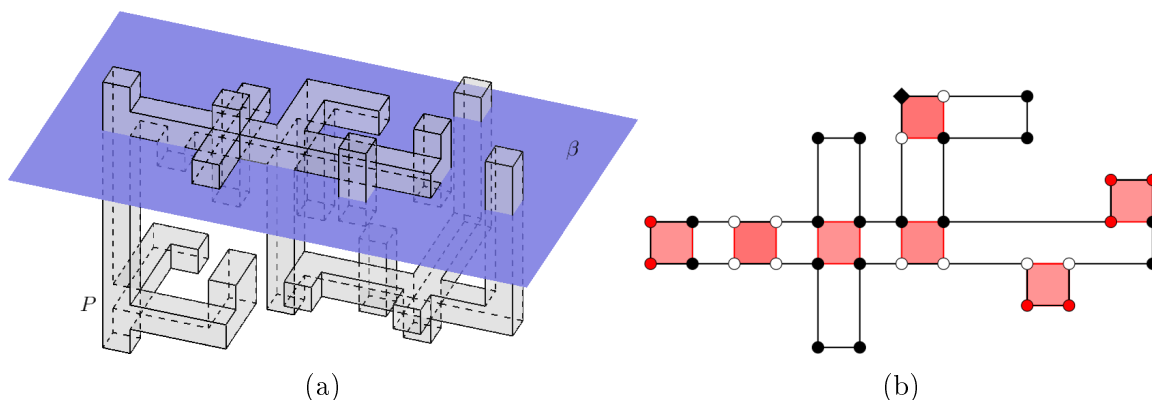


Figura 7.3: (a) Un ortoárbol P intersecado por el plano β que contiene una cara inferior de P , f ; (b) el polígono generado por la componente conexa de $P \cap \beta$ que contiene la cara f ; los δ -rectángulos son mostrados de color rojo.

Adicional al resultado anterior, obtuvimos una cota mejor considerando solamente los ortoárboles que cumplen con la condición de estar bien separados.

Teorema 7.3.2. *Sea P un ortoárbol bien separado con n vértices. Entonces $\lfloor \frac{n}{12} \rfloor$ balizas colocadas en los vértices de P son siempre suficientes para cubrir a P .*

Demostración. Sea P un ortoárbol bien separado con n vértices. Sea H la gráfica que contiene un nodo por cada ortoedro del tipo hoja o del tipo unión que compone a P , tal que dos nodos de H están unidos por una arista si los ortoedros que representan son adyacentes.

Observemos que H es un árbol, y supongamos que H tiene m nodos para algún entero m . Cada nodo de H representa un ortoedro de P que es unión u hoja. Si un nodo s de H representa a una hoja, podemos asociar a s cuatro vértices que no son adyacentes a ningún otro ortoedro de P . Cada unión j de P es un ortoedro tal que al menos cuatro y a lo más ocho de sus vértices son vértices de P , ver la Figura 2.14; asociamos esos vértices a j . Así, a cada nodo de H se le han asignado al menos cuatro vértices de P .

Definimos la distancia entre dos uniones en P como la distancia entre los nodos que las representan en H . Notemos que si una unión j está a distancia exactamente 1 de una unión que contiene una baliza b , entonces tanto j como los cuboides adyacentes a j (un conector y al menos una hoja o conector más) son cubiertos por b .

Colocamos balizas en P de la siguiente manera:

Sea v_1, \dots, v_s una trayectoria más larga en H . Colocamos una baliza en uno de los vértices del ortoedro de P que es representado por el vértice v_3 de H . Eliminamos de H la arista (v_3, v_4) . Luego, consideramos como H la subgráfica que contiene a v_4 y repetimos este proceso hasta que la trayectoria más larga en H tenga longitud menor o igual a 4. Mostramos un ejemplo de este proceso en la Figura 7.4.

Ahora probaremos que P está cubierto con las balizas colocadas con el proceso anterior. Afirmamos que si j es una unión de P , entonces j está a lo más a distancia 1 de una unión que contiene una baliza en uno de sus vértices.

Sea j una unión en P y sea u su nodo correspondiente en H . Notemos que u puede convertirse en una hoja de H como consecuencia de la eliminación de una arista. Si u no es una hoja de H en el momento de remover su subárbol correspondiente, entonces o j contiene una baliza, o j está unida por un conector a una unión que contiene una baliza. De otro modo, para que u pudiera convertirse en una hoja de H , tendríamos que haber eliminado al menos una arista (v, u) incidente a u . Esto significa que eliminamos un subárbol con raíz en v , la unión representada por v tiene una baliza y está a distancia 1 de j , ver el nodo u y su unión correspondiente j en la Figura 7.4.

Como una unión j en P y sus al menos dos cuboides adyacentes son cubiertos por una baliza colocada en una unión a distancia 1 de j , y como cualquier unión j en P tiene una baliza o está a distancia 1 de una unión que tiene una baliza, tenemos que P está cubierto.

En el proceso anterior colocamos en P una baliza por cada subárbol removido de H . Cada subárbol removido contiene al menos tres nodos de H . Cada nodo en H representa al menos 4 vértices de P . Por lo tanto, $\lfloor \frac{n}{12} \rfloor$ balizas colocadas en los vértices de P son suficientes para cubrir P . \square

7.3.2. Cota inferior

Bae *et al.* [4] demostraron que $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ balizas colocadas en vértices cóncavos son siempre suficientes y a veces necesarias para cubrir un polígono ortogonal de n vértices. Para demostrar la cota inferior, dieron la construcción de una espiral ortogonal P_r con r vértices cóncavos, tal que para cubrir P_r son necesarias $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ balizas.

Para obtener la cota inferior en \mathbb{R}^3 , construimos un poliedro de levantamiento P generado a partir del polígono espiral ortogonal P_r . Este poliedro ortogonal es un

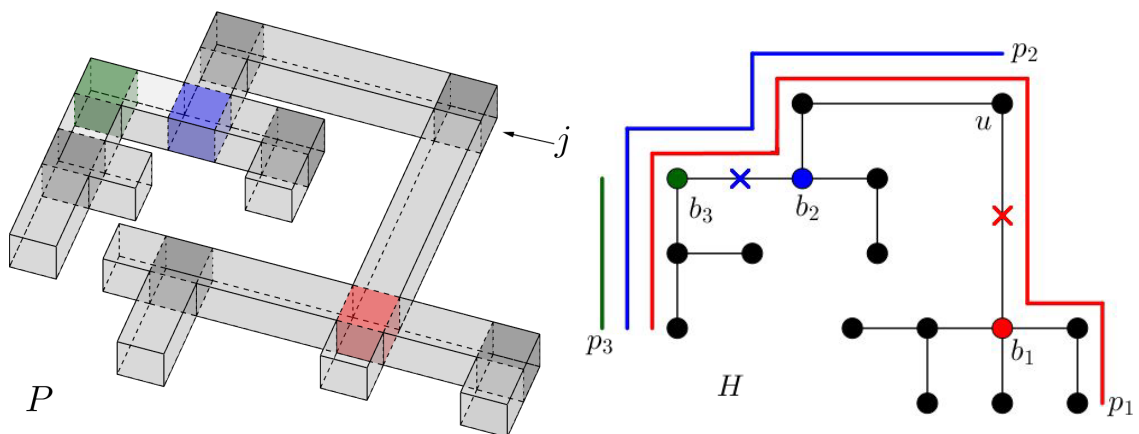


Figura 7.4: Un ortoárbol bien separado P y la gráfica H obtenida de las uniones (mostradas de color o de gris oscuro) y las hojas de P . En cada paso, obtenemos una trayectoria más larga en H (mostradas como p_1 , p_2 y p_3), después colocamos una baliza en la unión de P correspondiente al nodo coloreado en H (el cual se muestra del mismo color que la trayectoria a la que pertenece), y finalmente, separamos los subárboles al eliminar la arista correspondiente (mostrada con una cruz del mismo color).

ortoárbol y tiene el doble de la cantidad de vértices en P_r , así, para cubrir a P son necesarios $\lfloor \frac{n}{12} \rfloor$ vértices. Como resultado, las cotas que obtuvimos para este problema son justas cuando el ortoárbol es bien separado.

Bibliografía

- [1] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, J. Urrutia, and B. Vogtenhuber. Modem illumination of monotone polygons. *arXiv preprint arXiv:1503.05062*, 2015.
- [2] I. Aldana-Galvan, J. L. Alvarez-Rebollar, J. C. Catana-Salazar, M. Jimenez-Salinas, E. Solids-Villareal, and J. Urrutia. Minimizing the solid angle sum of orthogonal polyhedra and guarding them with $\pi/2$ -edge guards. In *CCCG*, pages 175–181, 2016.
- [3] P. S. Alexandroff. Combinatorial topology, vol. 1. *Graylock, Rochester, NY*, 21, 1956.
- [4] S. W. Bae, C.-S. Shin, and A. Vigneron. Tight bounds for beacon-based coverage in simple rectilinear polygons. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 110–122. Springer, 2016.
- [5] M. Biro. *Beacon-based routing and guarding*. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, 2013.
- [6] M. Biro, J. Gao, J. Iwerks, I. Kostitsyna, and J. Mitchell. Beacon-based routing and coverage. In *21st Fall Workshop on Computational Geometry*, 2011.
- [7] M. Biro, J. Gao, J. Iwerks, I. Kostitsyna, and J. S. Mitchell. Combinatorics of beacon-based routing and coverage. In *Proceedings of the 25th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG)*, 2013.
- [8] M. Biro, J. Iwerks, I. Kostitsyna, and J. S. Mitchell. Beacon-based algorithms for geometric routing. In *Workshop on Algorithms and Data Structures*, pages 158–169. Springer, 2013.
- [9] J. Bondy and U. Murty. *Graph theory (graduate texts in mathematics)*, 2008.
- [10] P. Bose, L. Guibas, A. Lubiw, M. Overmars, D. Souvaine, and J. Urrutia. The floodlight problem. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 7(01n02):153–163, 1997.

- [11] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18(1):39–41, 1975.
- [12] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Urrutia, and J. Zaks. On illuminating line segments in the plane. *Discrete Mathematics*, 137(1-3):147–153, 1995.
- [13] M. Damian, R. Flatland, H. Meijer, and J. O’Rourke. Unfolding well-separated orthotrees. In *15th Annu. Fall Workshop Comput. Geom*, pages 23–25. Citeseer, 2005.
- [14] H. Edelsbrunner, J. O’Rourke, and E. Welzl. Stationing guards in rectilinear art galleries. *Computer vision, graphics, and image processing*, 27(2):167–176, 1984.
- [15] S. Eidenbenz, C. Stamm, and P. Widmayer. Inapproximability results for guarding polygons and terrains. *Algorithmica*, 31(1):79–113, 2001.
- [16] S. Fisk. A short proof of Chvátal’s watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(3):374, 1978.
- [17] F. Hoffmann, M. Kaufmann, and K. Kriegel. The art gallery theorem for polygons with holes. In *Proceedings of the 32nd annual symposium on Foundations of computer science*, pages 39–48. IEEE Computer Society, 1991.
- [18] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(2):194–206, 1983.
- [19] D. Lee and A. Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(2):276–282, 1986.
- [20] A. Lubiw. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. In *Proceedings of the first annual symposium on Computational geometry*, pages 97–106. ACM, 1985.
- [21] T. Michael. Guards, galleries, fortresses, and the octoplex. *The College Mathematics Journal*, 42(3):191–200, 2011.
- [22] J. O’Rourke. Galleries need fewer mobile guards: a variation on Chvátal’s theorem. *Geometriae Dedicata*, 14(3):273–283, 1983.
- [23] J. O’Rourke. *Art gallery theorems and algorithms*, volume 57. Oxford University Press Oxford, 1987.
- [24] J. O’Rourke and K. Supowit. Some np-hard polygon decomposition problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(2):181–190, 1983.
- [25] M. Overmars, M. De Berg, M. van Kreveld, and O. Schwarzkopf. Computational geometry: Algorithms and applications. *Berlin, Heidelberg*, 1997.

- [26] D. Schuchardt and H.-D. Hecker. Two np-hard art-gallery problems for ortho-polygons. *Mathematical Logic Quarterly*, 41(2):261–267, 1995.
- [27] T. C. Shermer. A combinatorial bound for beacon-based routing in orthogonal polygons. *arXiv preprint arXiv:1507.03509*, 2015.
- [28] I. Suzuki and M. Yamashita. Searching for a mobile intruder in a polygonal region. *SIAM Journal on computing*, 21(5):863–888, 1992.
- [29] A. P. Tomás. Guarding thin orthogonal polygons is hard. In *International Symposium on Fundamentals of Computation Theory*, pages 305–316. Springer, 2013.