



**Universidad Nacional Autónoma de México.**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA.  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN.

**Caracterización general de modos de  
vibración en cuerdas con  
discontinuidades de densidad.**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Maestro en Ingeniería  
Instrumentación Acústica.**

PRESENTA:

**Fis. Saulo Gonzalo Carmona Contreras**

TUTOR DEL TRABAJO:

**Dr. Pablo L. Rendón Garrido, CCADET UNAM**

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Jurado asignado:**

- Presidente: Dra. Medina Gómez Lucía.
- Secretario: Dr. Velasco Segura Roberto.
- Vocal: Dr. Rendón Garrido Pablo Luis.
- 1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Torres Zúñiga Vicente.
- 2<sup>do</sup> Suplente: M. en I. Pérez López Antonio.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, UNAM.

### **TUTOR DE TESIS:**

Dr. Pablo L. Rendón Garrido

---

**FIRMA**



## Objetivos.

- Caracterizar por métodos teórico-experimentales de instrumentación acústica los parámetros físicos: velocidad de propagación, longitud de onda, densidad lineal, tensión, frecuencias y modos normales de vibración en cuerdas con discontinuidades de densidad.
- Construir un dispositivo para generar los distintos modos normales de vibración en cuerdas con discontinuidades de densidad que permita visualizarlos.
- Proponer un modelo teórico-experimental para las cuerdas con discontinuidades de densidad y que tenga potencial de ser usado como una herramienta didáctica.

## Resumen.

En este trabajo se presenta un estudio experimental de vibraciones en cuerdas con discontinuidades de densidad, denotadas en este texto como SMC. Este tipo de sistemas han sido de interés recientemente porque pueden servir como un modelo didáctico que sirve para ilustrar propiedades físicas (longitud de onda y frecuencias propias) de vibración en cuerdas. También la tesis presenta una propuesta de instrumentación para estudiar el SMC mediante visualización de los modos de vibración y medición de las frecuencias propias.

En el primer capítulo de la tesis se describen los fundamentos teóricos de los modos de vibración de SMC, algunos resultados reportados en la literatura y una propuesta de aplicación didáctica.

En el siguiente capítulo se describen los métodos experimentales y la instrumentación usada para producir y visualizar los modos de vibración de SMC.

En el capítulo tres se presentan los resultados y se muestran y se discuten las características de las frecuencias propias de los SMC, como el hecho que las frecuencias propias de los SMC no necesariamente obedecen una relación lineal a pesar de que la vibración es armónica.

Es importante remarcar que la investigación de este trabajo se puede aplicar a los cursos de vibraciones que se estudian en las distintas maestrías y licenciaturas de la UNAM.



---

## Agradecimientos

Sobre todo quiero agradecer a mi familia que siempre me ha apoyado durante esta larga carrera de estudio.

Al Grupo de Acústica y Vibraciones del CCADET-UNAM:

Al Profesor Pablo Luis Rendón Garrido por darme la oportunidad de ser mi tutor en este trabajo, por sus sugerencias y enseñanzas durante el desarrollo de esta tesis.

Al Profesor Jesús Santiago Pérez Ruiz por capacitarme en las bases teóricas y experimentales en la materia de instrumentación acústica y sus sugerencias para mejorar las mediciones.

Al Profesor Antonio Pérez López por sus valiosas asesorías y enseñanzas en el en el laboratorio y por proporcionarme todas las comodidades durante mi estancia en el CCADET.

Al Profesor Roberto Velasco Segura por las atenciones, sus enseñanzas y sugerencias durante el desarrollo de esta Tesis pues mejoraron mucho el texto.

Al Profesor Felipe Orduña Bustamante por sus sugerencias en la búsqueda de las referencias y varias sugerencias para presentar la información.

Fuera del Grupo de acústica quiero agradecer:

Al Profesor Vicente Torres Zúñiga por guía sus valiosos comentarios y críticas de la Tesis.

Finalmente, aunque igualmente importante quiero agradecer a CONACYT por patrocinar con una de sus becas mis dos años de estudio en la Maestría, sin su apoyo este trabajo seguramente habría sido imposible.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>List of Figures</b>	<b>VI</b>
<b>List of Tables</b>	<b>VII</b>
<b>1. Teoría de los sistemas de masa concentrada (SMC).</b>	<b>1</b>
1.1. Modos normales y frecuencias propias de una cuerda fija en sus extremos. . . .	2
1.2. Ecuación para los sistemas de masa concentrada. . . . .	4
1.3. Frecuencias propias de sistemas con una y dos masas concentradas (SMC1 y SMC2). . . . .	7
1.4. Modos normales de vibración de los SMC reportados en la literatura. . . . .	11
1.5. Aplicaciones didácticas para los SMC. . . . .	13
<b>2. Metodología</b>	<b>16</b>
2.1. Generación de modos de vibración en SMC1. . . . .	17
2.2. Cambio de la masa concentrada y la tensión en SMC1. . . . .	18
2.3. Sistemas de más de una masa concentrada. . . . .	19
2.4. Fotografía de los SMC. . . . .	19
<b>3. Resultados y Discusión</b>	<b>20</b>
3.1. Cambio de la tensión y de masa concentrada en la cuerda para SMC1. . . . .	22
3.2. Sistemas de más de una masa concentrada (SMC2, SMC3, SMC4 y SMC5). . . . .	26
3.3. Fotografías de los modos de los SMC. . . . .	31
<b>4. Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>A. Complemento</b>	<b>40</b>
A.1. Nota técnica. . . . .	40
A.2. Póster presentado en el LIX Congreso Nacional de Física. . . . .	41
A.3. Voltaje RMS. . . . .	42
A.4. Tablas complementarias a la sección de resultados. . . . .	42
A.5. Figuras complementarias de la sección de resultados. . . . .	44



# Índice de figuras

1.1. El SMC1 . . . . .	7
1.2. Frecuencias propias teóricas del SMC1 . . . . .	8
1.3. El SMC2 . . . . .	9
1.4. Frecuencias propias teóricas del SMC2 . . . . .	11
1.5. Modos teóricos de los SMC para 1, 2, 3 y 4 masas . . . . .	12
1.6. Modos de SMC con una cadena de masa variable . . . . .	13
1.7. Modos experimentales reportados para los SMC . . . . .	14
1.8. Tubos de distinta sección transversal. . . . .	14
2.1. Arreglo experimental usado para los SMC . . . . .	17
2.2. Arreglo usado para fotografiar los SMC . . . . .	19
3.1. Frecuencia relativa en función del modo del SL para cuerdas de nailon y acero. . . . .	20
3.2. $f_i/f_1$ en función del modo con distintas masas concentradas para SMC1. . . . .	23
3.3. Coeficiente de correlación $R^2$ y pendiente en función de la masa . . . . .	24
3.4. Longitud de onda en función del modo para el SMC1 . . . . .	25
3.5. Longitud de onda en función de la masa concentrada en SMC1 . . . . .	26
3.6. Distancia entre nodos vecinos del SMC1 . . . . .	27
3.7. Frecuencias relativas en función del modo para los sistemas SMC1, SMC3 y SMC5. . . . .	28
3.8. Frecuencias relativas en función del modo del SMC2. . . . .	29
3.9. Frecuencias relativas en función del modo del SMC3. . . . .	30
3.10. Frecuencias relativas en función del modo usando solo $f_1'$ de SL. . . . .	31
3.11. Longitud de onda en función del modo para: SL, SMC1, SMC2, . . . , SMC5. . . . .	32
3.12. Fotografías de modos de vibración de los SMC1 y SMC2. . . . .	33
3.13. Fotografías de modos de vibración de los SMC3 y SMC4. . . . .	34
3.14. Fotografías de modos de vibración del SMC5. . . . .	35
3.15. Fotografías de modos de vibración de los SMC(4,1) y SMC(1,4,1). . . . .	36
3.16. Fotografías de modos de vibración de los SMC(4,1,4) y SMC(4,4,1). . . . .	37
A.1. Póster para LIX congreso de Física . . . . .	41
A.2. Frecuencia relativa en función del modo del SMC3(4,1,4) . . . . .	44
A.3. Frecuencia relativa en función del modo del SMC3(1,4,1) . . . . .	45
A.4. Frecuencia relativa en función del modo del SMC3 . . . . .	45

# Índice de tablas

3.1. Frecuencia en función de la tensión para SL. . . . .	21
3.2. Frecuencia en función de la tensión para SMC1. . . . .	21
3.3. Frecuencia relativa en función de la tensión para el SL. . . . .	22
3.4. Frecuencia relativa en función de la tensión para el SMC1. . . . .	22
3.5. Longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación SL y SMC1. . . . .	25
A.1. Valores de pendiente contra masa concentrada SMC1. . . . .	42
A.2. Valores experimentales de referencia para SMC1. . . . .	43
A.3. Valores de la distancia internodal SMC1 para modos 3, 5 y 7. . . . .	43
A.4. Frecuencia relativa para el SL en cuatro cuerdas dos de nailon y dos de acero. . . . .	43
A.5. Valores de frecuencia relativa del SMC1 teóricos y experimentales de referencia y valores obtenidos en este trabajo. . . . .	43
A.6. Valores de frecuencia relativa del SMC2 teóricos y experimentales de referencia y valores obtenidos en este trabajo. . . . .	44



# Capítulo 1

## Teoría de los sistemas de masa concentrada (SMC).

De forma usual, cuando se comienza a investigar los fenómenos de ondas mecánicas en los cursos de física o ingeniería se analizan las vibraciones en cuerdas pues proporcionan un modelo simple para comprender modelos más complejos. Debido a su sencillez, la teoría de vibraciones en cuerdas ha sido extensamente estudiada y ha aportado importantes aplicaciones en música e ingeniería acústica [1, 2]. Durante los cursos, un ejercicio común para los estudiantes es obtener los modos y las frecuencias propias de vibración de la cuerda, una interesante propiedad de las vibraciones que es consecuencia de las condiciones de frontera fija, la propuesta frecuente es usar una cuerda con densidad lineal. En los cursos es muy raro estudiar el caso en el que la cuerda presenta otro tipo de densidades.

La propuesta de esta tesis es un modelo teórico-experimental con discontinuidades de densidad, proporcionado por efecto de colocar sobre la cuerda masas de magnitud comparable a la masa de la cuerda y volumen pequeño. Debido a esto en esta tesis a la cuerda con discontinuidades de densidad se le da el sinónimo de sistema de masas concentradas **SMC**.

El modelo de cuerda con discontinuidades de densidad o sistema de masa concentrada fue comenzado a estudiar en instrumentos musicales [2, 3] y presenta propiedades físicas interesantes que podrían complementar el tema de vibraciones en cuerdas de los cursos de instrumentación acústica que se estudian en el posgrado.

Para una cuerda finita con discontinuidades de densidad o sistema de masa concentrada, se encuentran modos de vibración a frecuencias específicas y aparece cuantización de frecuencias como consecuencia de las fronteras del sistema [3, 4]. La cuerda tiene la misma

densidad lineal en todos los puntos, excepto en donde se coloca la masa. La masa concentrada genera ondas transmitidas y reflejadas que tienen la misma velocidad de propagación y no violan principios de conservación.

Un problema análogo al de una cuerda con masa concentrada consiste de un par de tubos idénticos conectados por medio de un tubo corto de sección transversal pequeña. El problema del tubo ha resultado interesante recientemente para algunos grupos de investigación pues su espectro de energías guarda similitudes con el caso cuántico de un pozo cuadrado con un potencial tipo delta de Dirac [5].

En este capítulo, se presentan la teoría básica de la ecuación para cuerdas con discontinuidades de densidad o sistemas de masa concentrada 1.12, que serán referidos como **SMC** en lo que sigue.

## 1.1. Modos normales y frecuencias propias de una cuerda fija en sus extremos.

Antes de comenzar a deducir la ecuación de para los SMC, es importante aclarar que son los modos normales de vibración y las frecuencias propias de una cuerda.

Suponga una cuerda fija en ambos extremos, lo cual implica que las condiciones de frontera en la cuerda son:

$$\begin{aligned} y(x = 0, t) &= 0, \\ y(x = L, t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Entonces dada la ecuación de onda 1.2 se propone para  $k$  y  $\omega$  arbitrarios la solución 1.3:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}. \tag{1.3}$$

La sustitución de 1.3 en 1.2 y las condiciones de frontera 1.1 producen las siguientes ecuaciones para A y B:

$$\begin{aligned} B &= -A, \\ 2jA \sin(kL) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La condición 1.4 puede ser satisfecha de dos maneras: si  $A = 0$  entonces  $y(x, t) = 0$  que significa que la cuerda esta inmóvil. Si  $A \neq 0$  entonces  $\sin(kL) = 0$  lo cual ocurre cuando:

$$kL = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.5)$$

se omite el valor  $n = 0$  ya que indica como en el caso anterior que la cuerda esta inmóvil. La ecuación 1.5 muestra que solo valores discretos  $k = k_n = \frac{n\pi}{L}$  permiten soluciones. Como la velocidad de propagación  $c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}$  entonces, las frecuencias permitidas son:

$$f_n = \frac{nc}{2L}. \quad (1.6)$$

Por lo tanto, hay un conjunto de soluciones cada una de la forma:

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) e^{j\omega_n t}. \quad (1.7)$$

El valor  $A_n$  es la amplitud de la  $n$ -ésima solución y se determina de las condiciones iniciales.

Las soluciones posibles de la ecuación de onda 1.7, se llaman **funciones propias o modos normales** [1]. Las cuales siempre están determinadas por las condiciones iniciales y de frontera.

Asociada con cada una de las soluciones  $y_n$  hay una única frecuencia propia  $f_n$  de vibración para la cuerda. Las frecuencias propias están definidas por la ecuación 1.6. El modo normal con la frecuencia más baja es  $n = 1$ , de forma usual se le llama modo fundamental  $f_1 = \frac{2c}{L}$  y las frecuencias propias  $n = 2, 3, \dots$  son llamada sobre tonos [1]. Para el caso de la cuerda con extremos fijos los sobretonos son múltiplos de la frecuencia fundamenta  $f_1$ :

$$f_n = nf_1 \quad , \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

La solución completa para la cuerda con fronteras fijas es la suma de todos los modos individuales:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{j\omega_n t}. \quad (1.9)$$

La ecuación 1.9 indica que el desplazamiento transversal de la cuerda para cualquier tiempo  $t$  es una combinación lineal de todos los modos normales.

## 1.2. Ecuación para los sistemas de masa concentrada.

Se propone teóricamente el siguiente sistema físico en una dimensión: una cuerda de longitud  $L$  sobre el eje  $X$ , a la cual se le han colocado  $N$  masas  $M_i$  donde  $i = 1, 2, \dots, N$ , la cuerda está sometida a una tensión  $T$  y está fija en un extremo en  $x = L$ , mientras que en el otro en  $x = 0$  es excitada por una fuerza armónica  $Fe^{j\omega t}$ . Entonces, las condiciones de frontera dadas en los extremos de la cuerda con estas características son [1, 3]:

$$\begin{aligned} Fe^{j\omega t} &= -T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ y(x = L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Aquí la función  $y(x, t)$  describe el desplazamiento transversal de la cuerda. La densidad de una cuerda con masas concentradas  $M_i$  está dada por la siguiente expresión [3]:

$$\mu(x) = \mu_0 + \sum_{i=1}^N M_i \delta(x - x_i), \quad (1.11)$$

donde  $\mu_0$  es la densidad de masa lineal de los segmentos de cuerda que conectan las masas y el término  $M_i \delta(x - x_i)$  representa una densidad puntual de la  $i$ -ésima masa concentrada. Usando 1.11, la ecuación que describe la oscilación transversal de la cuerda es [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

La ecuación 1.12 es conocida como **ecuación para masas cargadas en una cuerda** [3]. Si se integra en  $x$  desde  $x_i - \epsilon$  hasta  $x_i + \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) se obtiene:

$$T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} = M_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x_i, t),$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , la ecuación representa una discontinuidad de la derivada de  $y$  en  $x_i$ :

$$T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = M_i \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x_i, t). \quad (1.13)$$

La ecuación 1.13 proporciona una condición sobre la tensión que se aplica en la cuerda del lado izquierdo ( $x_i - 0$ ) y del lado derecho ( $x_i + 0$ ) de  $x_i$ . Otra condición que debe cumplir es la continuidad de  $y(x, t)$  en  $x_i$ :

$$y(x_i - 0, t) = y(x_i + 0, t). \quad (1.14)$$

De lo anterior, la formulación completa del problema consiste en encontrar la solución de la ecuación 1.12 que satisface las condiciones de frontera 1.10 y continuidad 1.13 y 1.14. Un problema con estas características se puede resolver si se sustituye la solución de onda viajera 1.3 en 1.13 para encontrar la condición dinámica en cada masa  $M_i$ :

$$jkT \left( Ae^{j(\omega t - kx)} - Be^{j(\omega t + kx)} \right) \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = M_i \omega^2 \left( Ae^{j(\omega t - kx_i)} + Be^{j(\omega t + kx_i)} \right). \quad (1.15)$$

Ahora, usando la condición de continuidad 1.14 en 1.15:

$$-2BjkTe^{j(\omega t + kx)} \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = M_i \omega^2 \left( Ae^{j(\omega t - kx_i)} + Be^{j(\omega t + kx_i)} \right) = M_i \omega^2 y(x_i, t). \quad (1.16)$$

Como la tensión es constante a lo largo de la cuerda entonces la forma de la cuerda a la izquierda ( $x_i - 0$ ) y a la derecha ( $x_i + 0$ ) de  $x_i$  debe satisfacer que  $e^{jk(x_i-0)} = -e^{jk(x_i+0)} = -e^{jk(x_i)}$ , por tanto la ecuación 1.16 se reduce a:

$$-4BjkTe^{j(\omega t + kx_i)} = M_i \omega^2 y(x_i, t). \quad (1.17)$$

Con la ecuación 1.17 y la condición  $y(x = L, t) = 0$  de 1.10 se verifica que los SMC presentan modos de vibración:

$$-4BjkTe^{j(kL)} = 0,$$

tomando la parte real y  $B \neq 0$ :

$$\Rightarrow \cos(kL) = 0,$$

$$\Rightarrow kL = \frac{\pi}{2}(2n - 1) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

por lo tanto:

$$k = k_n = \frac{\pi}{2L}(2n - 1). \quad (1.18)$$

Por tanto, de forma similar a la ecuación 1.5, 1.18 induce un conjunto de frecuencias propias. Para determinar las constantes  $A$  y  $B$  usamos la ecuación 1.17 y la condición en  $x = 0$  de 1.10, con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= A + \left(1 + j \frac{4kT}{M_i \omega^2}\right) B, \\ -j \frac{F}{kT} &= A - B. \end{aligned} \quad (1.19)$$

La solución del sistema 1.19 nos proporciona dos conjuntos de constantes  $A = A_i$  y  $B = B_i$  que dependen de cada masa  $M_i$ :

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{F}{2kT} \left( \frac{4kT - jM_i \omega^2}{M_i \omega^2 + j2kT} \right), \\ B_i &= \frac{F}{2kT} \left( \frac{jM_i \omega^2}{M_i \omega^2 + j2kT} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Por lo tanto, los modos normales del sistema son:

$$y_i(x, t) = A_i e^{j(\omega t - kx)} + B_i e^{j(\omega t + kx)}. \quad (1.21)$$

La ecuación 1.17 es clave para este trabajo, pues permiten obtener de manera implícita las frecuencias propias del **SMC**. Si desarrollamos 1.17 usando las constantes 1.20:

$$\begin{aligned} -4B_i j k T e^{jkx_i} &= M_i \omega^2 \left( A_i e^{-jkx_i} + B_i e^{jkx_i} \right), \\ \Rightarrow A_i e^{-j2kx_i} &= -B_i \left( 1 + j \frac{4kT}{M_i \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

La función 1.18 indica que las frecuencias de resonancia del **SMC** ocurren en  $k = \pi(2n - 1)/2L$ . Sin embargo, debido a que  $k$  tiene que satisfacer al mismo tiempo la ecuación trascendental 1.22, las frecuencias propias no pueden ser obtenidas de forma analítica, pues se generan ecuaciones trascendentales para las frecuencias de vibración que dependen de las masas  $M_i$  [1, 4].

Con el fin de entender un poco más el comportamiento de las frecuencias propias del **SMC** y la ecuación 1.22 se presentan a continuación dos ejemplos para una y dos masas.

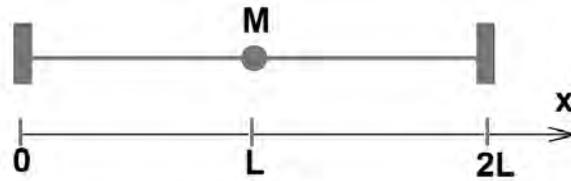


Figura 1.1: se muestra el SMC1 para una cuerda de longitud  $2L$  con una masa de valor  $M$  localizada en  $x = L$ .

### 1.3. Frecuencias propias de sistemas con una y dos masas concentradas (SMC1 y SMC2).

En esta sección se discuten las frecuencias propias de los **SMC** para los casos de una y dos masas. Es importante mencionar que en el desarrollo de esta sección se tomó algunas partes de los ejemplos del artículo [4], en este artículo se obtienen las frecuencias propias de los sistemas SL, SMC1 y SMC2 midiendo los valores de manera gráfica. A diferencia del artículo, en esta sección se hace énfasis en las soluciones de las ecuaciones de SMC1 y SMC2. Las soluciones son las frecuencias propias y estas satisfacen ecuaciones trascendentales que no se pueden determinar de manera analítica.

Considere el sistema de masa concentrada mostrado en la Figura 1.1 con una cuerda de densidad  $\mu_0$  y longitud  $2L$  y una masa de valor  $M$  localizada en el punto medio en  $x = L$  **SMC1**. Se puede verificar que las soluciones del sistema son [4]:

$$\phi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ B \sin(k(x - 2L)) & \text{si } L \leq x \leq 2L. \end{cases} \quad (1.23)$$

Si en la ecuación 1.23 aplicamos las condiciones<sup>1</sup>de frontera 1.10 y las de continuidad 1.13 y 1.14, se tiene que:

$$\phi(L - 0) = \phi(L + 0) \implies A \sin(kL) = B \sin(-kL),$$

$$\implies A = -B,$$

<sup>1</sup>Aunque usar la condición de frontera 1.10 en  $x = 0$  parece ambigua, la justificación física experimental que fue observada en la mayoría de los modos es la siguiente: el vibrador ubicado en  $x = 0$  tiene una amplitud de oscilación menor comparada con la amplitud de los modos de vibración generados, por lo que de manera aproximada es una frontera fija para al menos los diez primeros modos de vibración. Por ejemplo, de manera experimental se observó que la oscilación del vibrador es orden de algunos milímetros mientras que la amplitud del modo fundamental es de algunos centímetros. La aproximación deja de ser válida para modos de vibración de frecuencia muy alta en los que la amplitud de las vibraciones son del orden de las del vibrador, este no es el caso del trabajo.

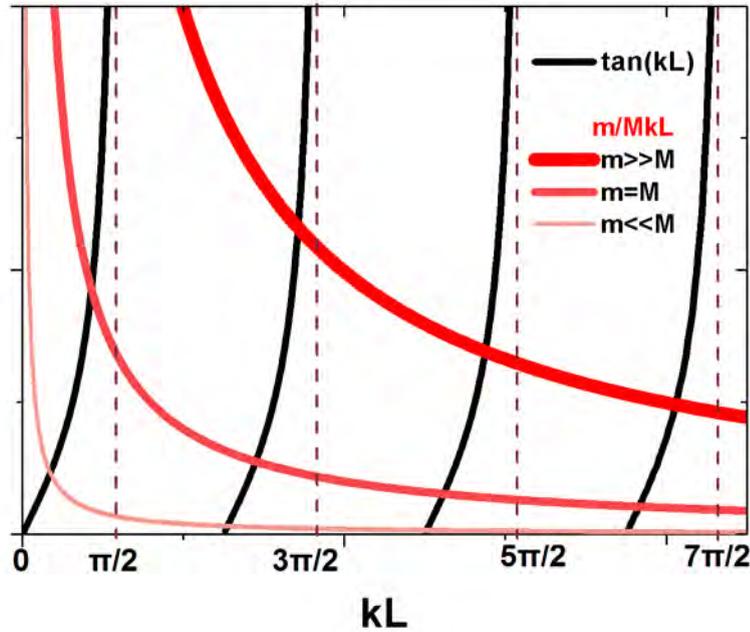


Figura 1.2: se muestran algunas soluciones para el SMC1 de la ecuación 1.24 para tres casos:  $M \gg m$ ,  $M = m$  y  $M \ll m$ . Los puntos de intersección de las curvas rojas con la negra representan las frecuencias propias del sistema.

$$\left( T \frac{d\phi}{dx} \right)_{L-0}^{L+0} = -(kc)^2 M \phi(L) \implies Tk^2 \cos(kL) = M(kc)^2 \sin(kL),$$

$$\implies \frac{Mk}{\mu_0} \sin(kL) - 2 \cos(kL) = 0,$$

$$\implies \frac{m}{MkL} = \tan(kL). \quad (1.24)$$

En la ecuación 1.24 se substituyó  $\mu_0 = m/2L$ , donde  $m$  es el valor de la masa de la cuerda. La ecuación trascendental anterior define de manera implícita las frecuencias propias de **SMC1**, los valores de estas frecuencias son los puntos de intersección de las dos funciones dadas en 1.24.

Como ejemplo, en la Figura 1.2 se muestran algunas frecuencias propias para los casos  $M \gg m$ ,  $M = m$  y  $M \ll m$ , las frecuencias son los puntos de intersección de las curvas rojas con las curvas negras. Se observa en todos los casos que, cuando  $kL \rightarrow \infty$  que indica que los valores de frecuencia son altos y la  $\tan(kL) \simeq 0$ , esto implica que:  $kL = n\pi$  donde  $n$  es un número natural. Si se reescribe  $k$  en términos de frecuencias:

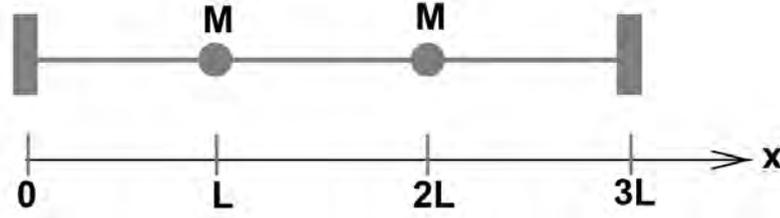


Figura 1.3: se muestra el SMC2 para una cuerda de longitud  $3L$  con dos masas de valor  $M$  localizadas en  $x = L$  y  $x = 2L$ .

$$f = \frac{nc}{2L}. \quad (1.25)$$

La ecuación 1.25 representa las frecuencias propias de un sistema de cuerda libre con extremos fijos [3]. Quiere decir que el SMC1 converge al sistema de cuerda libre a partir de un valor  $n$  suficiente grande. De manera intuitiva indica que el SMC1 vibra básicamente como el SL para frecuencias altas. Se puede ver de la Figura 1.2 que el valor  $n$  puede ser reducido por medio de la masa  $M$ , si se aumenta la masa concentrada valor de las frecuencias propias se reduce.

Por otro lado, de forma completamente análoga para el caso de una cuerda de longitud  $3L$  con dos masas de valor  $M$ , como se muestra en la Figura 1.3 se propone ahora la solución:

$$\phi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) & \text{si } 0 \leq x \leq L, \\ B \sin(k(x-L)) + C \cos(k(x-L)) & \text{si } L \leq x \leq 2L, \\ D \sin(k(x-3L)) & \text{si } 2L \leq x \leq 3L. \end{cases} \quad (1.26)$$

Entonces, es relativamente sencillo verificar por medio de las condiciones de continuidad en  $M_i$  que las condiciones 1.13 y 1.14 en  $x_i = L$  dan lugar a:

$$B = A \left( \cos(kL) - \frac{M(kc)^2}{Tk} \sin(kL) \right), \quad (1.27)$$

$$C = A \sin(kL), \quad (1.28)$$

y las condiciones 1.13 y 1.14 en  $x_i = 2L$  dan lugar a:

$$(D - B) \cos(kL) + \left( C - \frac{M(kc)^2}{Tk} D \right) \sin(kL) = 0, \quad (1.29)$$

$$(D + B) \sin(kL) + C \cos(kL) = 0. \quad (1.30)$$

Sustituyendo 1.27 y 1.28 en 1.30:

$$D = A \left( \frac{M(kc)^2}{Tk} \sin(kL) - 2 \cos(kL) \right), \quad (1.31)$$

y sustituyendo 1.27, 1.28 y 1.31 en 1.29 y usando  $\mu_0 = m/3L$ :

$$\left( 1 - \left( \frac{3MkL}{m} \right)^2 \right) \frac{\tan(kL)}{3} + 4 \frac{MkL}{m} = \cot(kL). \quad (1.32)$$

Como en la ecuación 1.24, se puede ver que 1.32 genera nuevas frecuencias propias que no pueden ser determinadas de forma analítica. Las frecuencias se muestran en la Figura 1.4 como puntos de intersección de las curvas en color con la función  $\cot(kL)$ . Se ha indicado las curvas en distinto color para mostrar tres casos de interés:  $M \gg m$ ,  $M = m$  y  $M \ll m$ . Se observa en la Figura 1.4 que el factor  $M/m$  es crítico pues determina los puntos de corte de las curvas y por tanto la aparición de frecuencias propias del SMC2. Por ejemplo, se observa que la curva  $M \ll m$  no corta a  $\cot(kL)$  en el intervalo  $kL$  usado. Se observa en los casos  $M \gg m$  y  $M = m$  los puntos de intersección aparecen de dos en dos en intervalos específicos de  $kL$ , esto es una propiedad física de los SMC que se verifica de manera experimental: *el número de frecuencias propias que aparecen en intervalos de  $kL$  depende del número de masas del SMC.*

Esta penúltima afirmación sera justificada ampliamente en la sección de resultados.

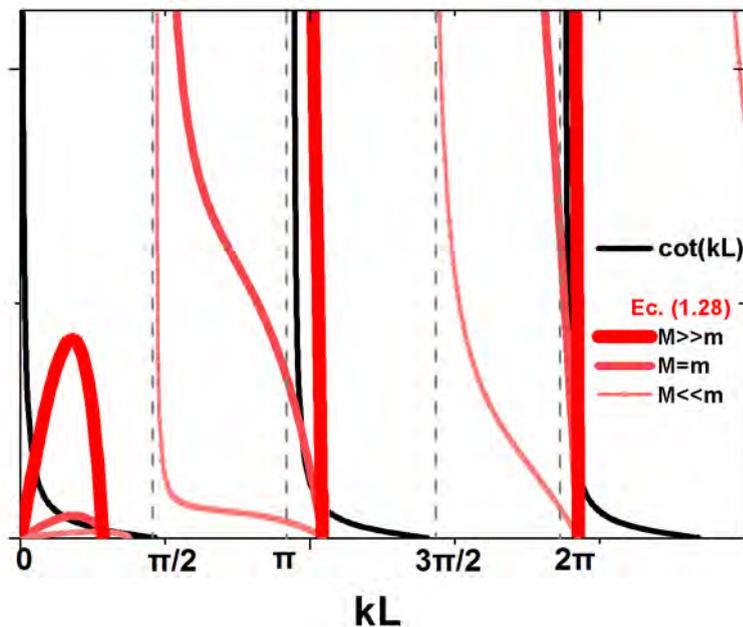


Figura 1.4: se muestran algunas soluciones para el SMC2 de la ecuación 1.32 para tres casos:  $M \gg m$ ,  $M = m$  y  $M \ll m$ . Los puntos de intersección de las curvas rojas con la curva negra son las frecuencias propias del sistema.

#### 1.4. Modos normales de vibración de los SMC reportados en la literatura.

Cuando el sistema SL está vibrando, como cualquier sistema real sufre amortiguamiento debido a fuerzas internas de torsión de la cuerda, las cuales son despreciables comparadas con la fuerza de excitación. Pero las fuerzas de torsión se vuelven más significativas si al SL se cargan masas concentradas. Para hacer el análisis sencillo de este último enunciado, consideremos el hecho físico de que los sistemas SMC se comportan de manera aproximada como los sistemas masa resorte. Donde la constante de rigidez  $s$  tiene su análogo con la tensión  $T$ .

Para un movimiento armónico amortiguado de una masa  $M$  que se mueve bajo la influencia de dos fuerzas una que depende del coeficiente de rigidez  $s$  y otra que depende del coeficiente de amortiguamiento  $D$  del material, la frecuencia de oscilación  $f$  y el tiempo medio de amortiguamiento  $\tau$  están descritos por las siguientes ecuaciones [2]:

$$f = \sqrt{\frac{s}{M}}, \quad (1.33)$$

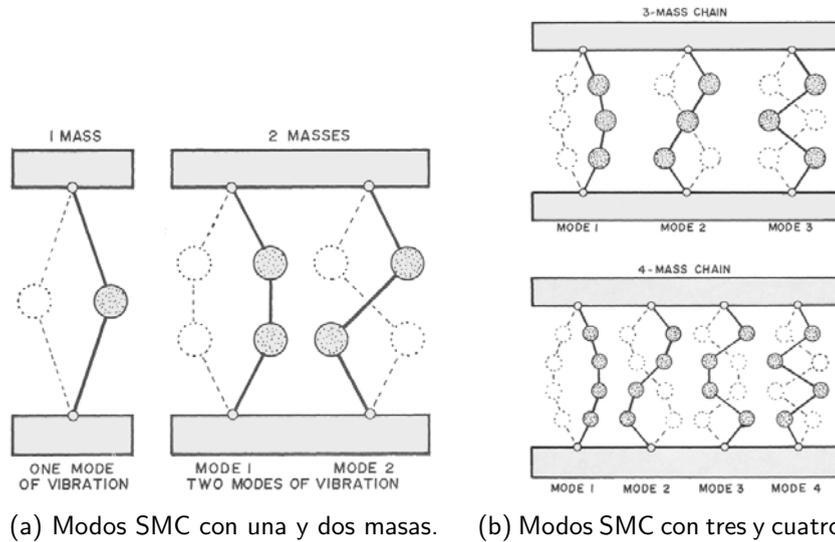


Figura 1.5: modos de vibración teóricos de los SMC para 1, 2, 3 y 4 masas. Las figuras fueron tomadas de [2].

$$\tau = \frac{M}{D}. \quad (1.34)$$

La ecuación 1.33 indica que si  $M$  es constante,  $f$  crece si se aumenta la rigidez  $s$ , o de manera equivalente  $f$  crece si se fija  $s$  y se reduce  $M$ . De forma análoga, el tiempo medio 1.34 es menor si  $M$  es constante y  $D$  es grande. Como ejemplo, en la Figura 1.5 se muestran los posibles modos de vibración de una cadena de masas concentradas, que se rigen por las ecuaciones 1.33 y 1.34.

En general, para los SMC existen al menos tres posibles formas de vibración[2]: oscilación transversal, oscilación longitudinal y oscilación de torsión debida a un giro alternante (levógiro y dextrógiro) de la masa. Sin embargo, la oscilación por torsión y la oscilación longitudinal pueden ser despreciadas si la masa concentrada tiene un volumen esférico y la tensión es suficiente y no produce deformación en la cuerda. Entonces, si la amplitud de oscilación es pequeña comparada con la longitud de onda tendremos solo oscilación transversal armónica [2]. Esta condición se puede lograr bien de manera experimental.

La frecuencia de oscilación está determinada por el parámetro  $s$  que de forma implícita vincula a la tensión de la cuerda. Si incrementamos la tensión de la cuerda incrementamos la frecuencia y por su parte, si disminuimos la masa incrementamos la frecuencia.

Para un SMC de múltiples masas en las que todas son de la misma magnitud, los modos de vibración presentan simetría vertical y horizontal. La simetría vertical se pierde si las masas son de distinto valor, en este caso, los nodos se recorren en dirección de las masas de mayor magnitud. Algunos de los modos posibles se muestran en la Figura 1.6.

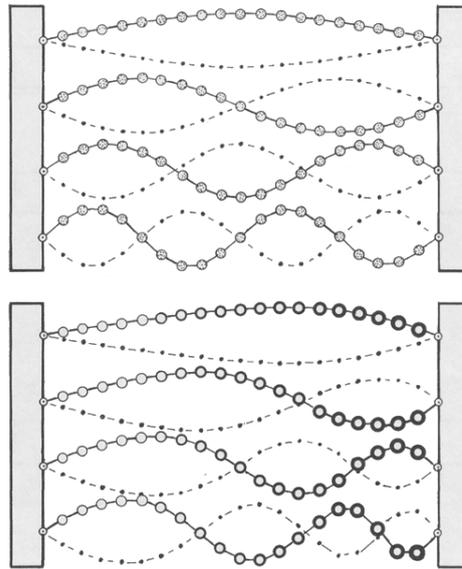


Figura 1.6: cuando en el SMC hay una cadena de masas de distinta magnitud, los nodos se desplazan en dirección de las masas de mayor magnitud. Las figuras fueron tomadas de [2].

Por otro lado, en el artículo [4] se han generado los modos de vibración que se muestran en la Figura 1.7 los cuales fueron obtenidos de manera experimental. En el artículo se menciona que en lugar de cuerda se usaron resortes (no se menciona el valor de  $s$ ) que se acoplaban por medio de rondanas. La magnitud de la masa de los resortes y las rondanas era de un par de gramos. Como se observa en la Figura 1.7, los primeros modos retratados en estas imágenes tienen formas de las similares a los indicados en la Figura 1.5, no obstante que en las figuras 1.7 se observa una clara curvatura de los modos respecto a la horizontal debido a que el sistema es afectado por la gravedad, sin embargo el autor del artículo no menciona que esto sea significativo para las medidas. Se puede evitar el efecto de la gravedad sobre la cuerda si en lugar de colocar el sistema de forma horizontal se coloca vertical, entonces si la tensión es suficiente la gravedad puede ser despreciada. Con esta orientación, los modos de vibración deberían ser muy similares a los de las Figuras 1.5 y 1.6.

## 1.5. Aplicaciones didácticas para los SMC.

Durante la investigación se encontró en la literatura[5] que el SMC con una masa (SMC1) presenta correcta analogía con un sistema de dos tubos cerrados en los extremos de idéntica sección transversal y acoplados por medio de un tubo corto de sección transversal variable. También de acuerdo con los mismos autores el SMC1 tiene su modelo análogo cuántico, con un pozo de potencial cuadrado infinito superpuesto con un potencial tipo delta de Dirac.

En el modelo de tubos mostrado en la Figura 1.8, se tienen dos tubos de longitud  $L$  y sección transversal  $S_1$  acoplados por un tubo corto de longitud  $d \ll L$  y sección trasversal

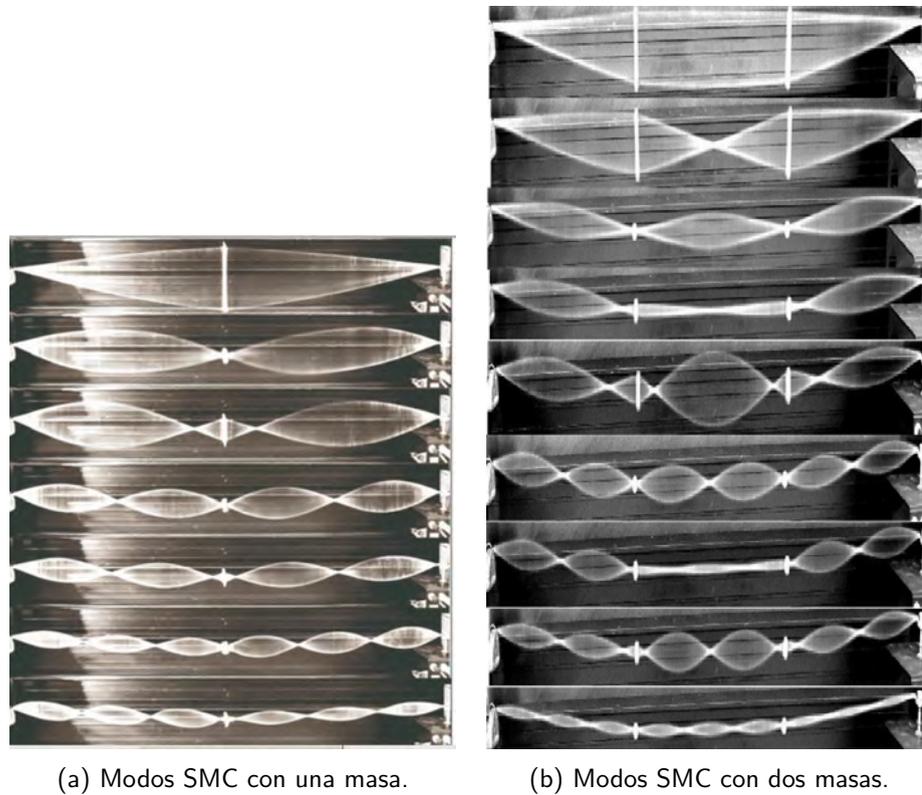


Figura 1.7: modos de vibración experimentales de los SMC. Las figuras fueron tomadas de la referencia [4].

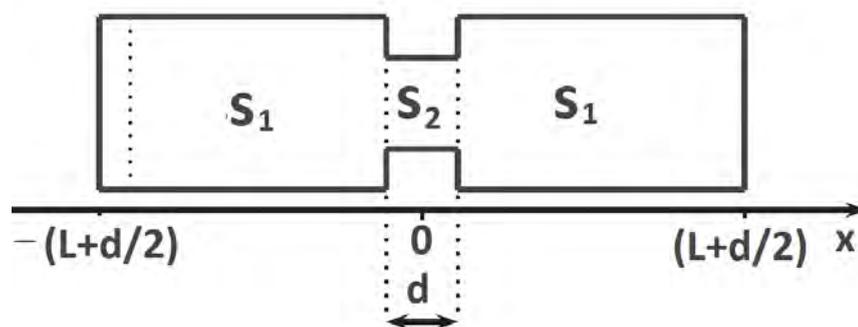


Figura 1.8: se muestran dos tubos de la misma sección transversal  $S_1$  y longitud  $L$  acoplados por otro tubo de sección transversal  $S_2 \ll S_1$  y longitud  $L \gg d$ . La figura fue tomada de [5].

$S_2$ . Los valores propios del sistema son función de la sección transversal variable  $S_2$ . Las frecuencias propias del sistema de tubos se obtienen a partir de la ecuación trascendental:

$$\tan(kL) = \frac{2}{\beta kL}, \quad (1.35)$$

donde  $\beta = S_1 d / S_2 L$ . La ecuación trascendental 1.35 es idéntica a la ecuación 1.24 obtenida antes para el sistema SMC1.

Respecto al pozo cuadrado cuántico infinito se supone de ancho  $2L$  y se propone un potencial delta de Dirac de la siguiente manera:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \leq -L, \\ \alpha \delta(x) & \text{si } -L \leq x \leq L, \\ \infty & \text{si } x \geq L, \end{cases} \quad (1.36)$$

donde  $\alpha$  es la magnitud de la función delta. Se resuelve la ecuación estacionaria de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \phi = 0, \quad (1.37)$$

para encontrar los valores propios de 1.37 con el potencial 1.36 y se obtiene la siguiente ecuación trascendental [5]:

$$\tan(kL) = -2 \frac{kL}{\beta}, \quad (1.38)$$

donde  $\beta = (2m/\hbar^2)\alpha L$  el valor  $\hbar^2 = h/2\pi$  y  $h$  es la constante de Plank. La ecuación 1.38 también es similar a aquella obtenida para el SMC1. Es importante considerar que la analogía entre los tubos y el caso cuántico, aunque resulta en equivalencia si se usa un potencial  $\delta$  atractivo (implica  $\beta \leq 0$ ) no es completa porque la dependencia de  $kL$  en cada ecuación trascendental proviene de ecuaciones de distinto grado en la parte temporal (la ecuación de Schrödinger es de primer grado y la de ecuación de onda en tubos es de segundo grado).

De manera didáctica, los SMC representan buenos ejemplos de sistemas de vibraciones con discontinuidades en frecuencias, en el que un sistema con frecuencias propias pasa de un estado a otro de forma abrupta en función del número de masas. Por toda la discusión anterior, se puede afirmar que el modelo de SMC puede ser una herramienta útil para uso didáctico en problemas de fenómenos ondulatorios en física e ingeniería.



## Capítulo 2

# Metodología

El sistema usado se muestra en la Figura 2.1. Consta de una cuerda fija en los extremos y estirada por medio de una masa y una polea de tal modo que tenga una tensión constante. A la cuerda se le transmite una fuerza de vibración armónica por medio de una punta acoplada a un altavoz. La señal que recibe el altavoz es suministrada por medio de un generador de funciones conectado a un amplificador (ver nota técnica en apéndice A.1 para saber las características técnicas de los equipos). Al sistema que consiste de la punta junto con el altavoz se le designa en el texto como *vibrador*.

Se estudió la vibración de la cuerda desde la punta del vibrador a uno de los extremos fijos, en estas condiciones la cuerda esta fija en un extremo y en el otro está sometida a una fuerza de vibración<sup>1</sup>, la longitud de la cuerda entre el extremo fijo y la punta móvil fue de  $0.56\text{ m}$  ( $\pm 0.5\text{ mm}$ ). En la Figura 2.1 estos extremos se indican con los círculos rojos.

Para mantener contacto entre el vibrador y la cuerda, es necesario que la punta aplique una pequeña fuerza sobre la cuerda. Esta fuerza es adicional y se considera en los resultados que estén relacionados con la tensión. Se usó el valor de la aceleración de la gravedad en la Ciudad de México que es  $9.78\text{ m/s}^2$  para las medidas de tensión. En todas las medidas se suministró al vibrador un voltaje de  $7\text{ }V_{rms}$ <sup>2</sup>(ver  $V_{rms}$  en apéndice A.3).

En general las medidas fueron realizadas a una temperatura ambiente de  $22\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Para cada modo generado se consideró que la frecuencia normal de vibración como aquella en que se observó máxima amplitud (o resonancia). Se trabajó con cuerdas de guitarra de acero y nailon.

---

<sup>1</sup>Como se observa en la Figura 2.1 hay dos extremos fijos, uno superior y otro inferior. La distancia entre la punta y el extremo inferior, fue de  $0.09\text{ m}$  y no fue considerada en los resultados de este trabajo. Se observó en las fotografías que en este segmento de la cuerda, la amplitud de las vibraciones eran pequeñas comparadas con la amplitud de las vibraciones en el segmento de  $0.56\text{ m}$ .

<sup>2</sup>Este es el voltaje de operación óptimo del altavoz.

Retomando la ecuación 1.16 o bien la ecuación 1.33 es importante recordar que la velocidad de propagación de onda con fronteras fijas es:  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}$  y se puede combinar con la ecuación:  $c = f\lambda$  donde  $f$  es la frecuencia de oscilación y  $\lambda$  la longitud de onda por lo que se tiene:

$$f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}. \quad (2.1)$$

Entonces, la frecuencia de vibración depende de los parámetros de tensión, densidad lineal, longitud de onda además de las posibles masas con las que carguemos a la cuerda. Para cada cuerda se calculó su densidad lineal y se trabajó en cada una de la forma que se describe a continuación.

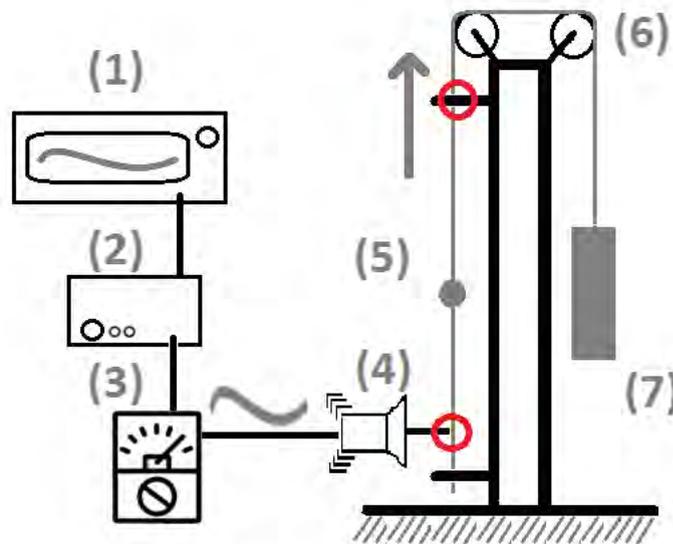


Figura 2.1: arreglo experimental usado para producir los modos de vibración de los SMC. Representa una cuerda con un extremo fijo y otro sometido a una fuerza de vibración, los extremos se indican en rojo. Se genera una señal senoidal (1), se amplifica (2) y se manda a un altavoz a un voltaje constante de  $7 V_{rms}$  (3). La vibración (4) es transmitida a la cuerda con la masa concentrada (5) para generar los modos de vibración. La cuerda se mantiene a una tensión ajustable y que es igual al peso de una masa (7) transmitido por poleas(6).

## 2.1. Generación de modos de vibración en SMC1.

Primero se obtuvieron **los modos normales de vibración** de la cuerda sin masas concentradas, para tener modos de referencia. Este sistema en el que la cuerda vibra sin masas concentradas es definido en el texto en lo sucesivo como sistema libre **SL**.

Con el vibrador se excitó la cuerda y se determinaron los primeros siete modos de vibración y se usó el segundo modo para determinar el punto medio de la cuerda (el punto medio es un nodo del segundo modo de vibración). Las frecuencias normales de vibración de SL fueron aproximadas con ayuda de la ecuación 1.25. Para usar esta ecuación se tomó en cuenta que las vibraciones en el extremo móvil son pequeñas (del orden de milímetros). Por tanto se consideró adecuado buscar las frecuencias normales de SL en valores cercanos a las frecuencias del sistema de una cuerda con condiciones de fronteras fijas.

Ya que los modos de vibración del SL dividen la longitud de la cuerda por medio de sus nodos de acuerdo a la serie armónica, se decidió usar estos puntos para colocar masas concentradas.

Para construir el **SMC1**, se colocó en el punto medio de la cuerda una masa de plastilina epóxica aproximadamente esférica. Se excitó el sistema con el vibrador y se observó el segundo modo de vibración de la cuerda. Como se agregó masa a la cuerda, entonces el SMC1 presentó modos de vibración de menor frecuencia respecto a los del SL. De manera específica, los modos impares 1, 3, 5 y 7 presentaron menores frecuencias, los valores fueron encontrados por medio del generador de funciones usando como referencia las frecuencias pares del sistema SL. Cada una de las frecuencias impares del SMC1 fue localizada haciendo un barrido entre las frecuencias pares de SL. Por ejemplo, para obtener el valor de la frecuencia 3 de SMC1 se obtuvo al hacer un barrido entre la frecuencia 2 y 4 obtenidas del SL. Los valores de SMC1 se identificaron por un notable aumento de la amplitud de la vibración en frecuencias específicas, es decir, se presentaban claras resonancias.

## 2.2. Cambio de la masa concentrada y la tensión en SMC1.

El cambio de la masa concentrada y la tensión en SMC1, se hizo para encontrar el valor de masa y la amplitud adecuadas. También para verificar y contrastar con el modelo teórico de la sección 1.2 en el laboratorio.

Se midieron las primeras siete frecuencias de vibración del SMC1 manteniendo una tensión  $T = 16.3 \text{ N}$  constante y variando la masa concentrada  $M$ . Los valores de  $M$  fueron: 0.0, 0.2, 0.4, 0.7, 1.2, 2.0 y 4.0 g. Luego, manteniendo una masa concentrada constante  $M = 1.2 \text{ g}$  se redujo la tensión tres veces, los valores de fueron: 16.3, 10.5 y 5.8 N.

### 2.3. Sistemas de más de una masa concentrada.

Se extendió el estudio a 2, 3, 4 y 5 masas concentradas. Como en los procedimientos anteriores para SMC1, en los cuatro casos se usaron los nodos naturales del SL como referencia. Para el sistema de dos masas SMC2 se usó el tercer modo de SL para ubicar las dos masas, para el sistema de tres masas SMC3 se usó el cuarto modo para ubicar las tres masas y así de manera sucesiva para los sistemas de cuatro y cinco masas (SMC4 y SMC5). En los cuatro casos se usaron masas constantes de 1 g ( $\pm 0.1$  g) y la masa de la cuerda fue de 5.6 g excepto en dos casos particulares para SMC2 y SMC3 en que se colocaron masas distintas en los nodos. Estos casos son de interés, pues proporcionan asimetrías distintas a los casos SMC2 y SMC3 con masas constantes.

### 2.4. Fotografía de los SMC.

Para la fotografía del SMC se usó un ambiente de baja iluminación. Se usaron dos lámparas: una estroboscópica y otra fluorescente, la luz estroboscópica fue usada para una correcta identificación de los modos y la lámpara fluorescente para visualización de la cuerda para con la cámara fija. La disposición de los instrumentos para la captura de imágenes se muestra en la Figura 2.2. Para obtener una buena imagen, para cada modo de vibración se tomaron varias fotografías y luego, en la revisión se seleccionó la mejor.

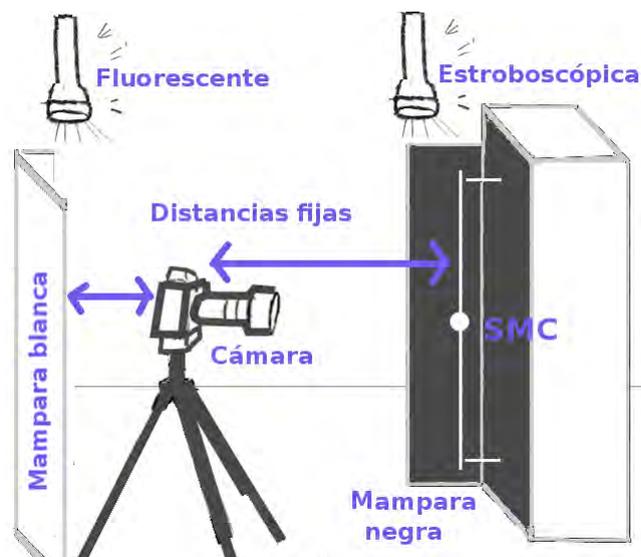


Figura 2.2: se muestra la disposición de los elementos para la captura de las fotografías.



## Capítulo 3

# Resultados y Discusión

Se trabajaron con cuerdas de acero y nailon para guitarra acústica de todos los valores estándar (tipo: 1, 2, ... y 6). Al analizar los valores y contrastar las tendencias de los resultados entre cada cuerda, mostraron ser independientes del tipo de cuerda. Es por ello que en este capítulo se presentan los resultados más significativos para una cuerda de nailon de masa  $m = 3.3 \text{ g}$  ( $\pm 0.06 \text{ g}$ ) con densidad lineal  $5.84 \text{ g/m}$  ( $\pm 0.01 \text{ g/m}$ ) que corresponde a una cuerda tipo 6 entorchada.

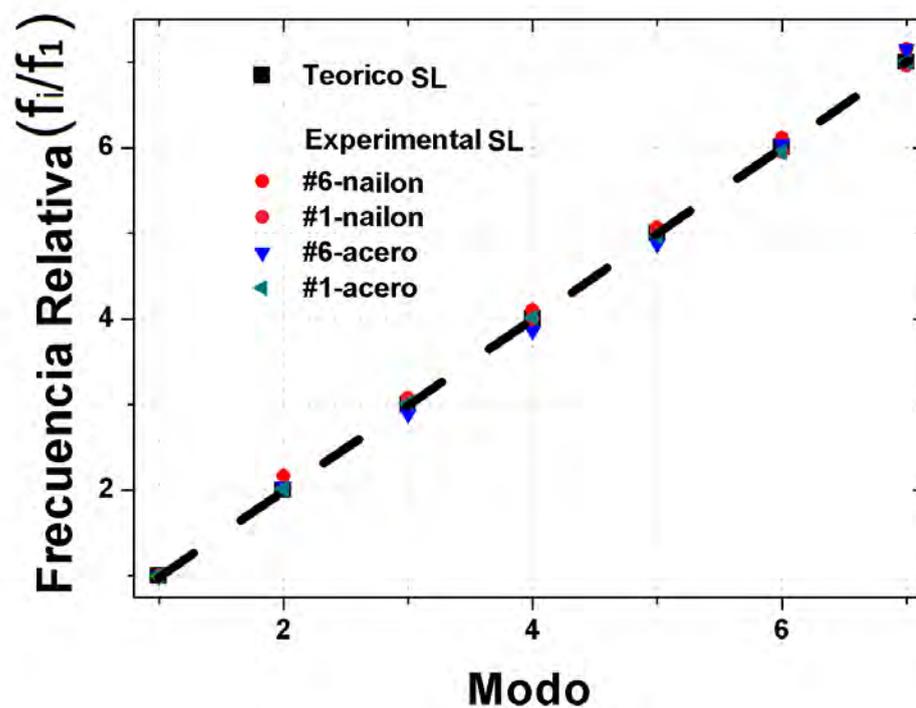


Figura 3.1: frecuencias relativas medidas para el SL. Las cuerdas usadas fueron nailon y acero.

Por ejemplo, la Figura 3.1 muestra la frecuencia relativa de SL para cuerdas de acero y nailon comparada contra el modelo teórico dado por la relación 1.8. Se observa que los valores de las frecuencias fueron bastante consistente con el modelo. Es importante remarcar que las masas se colocaron en los nodos del SL por lo que los resultados presentados aquí son consecuencia de esta configuración, además las medidas fueron hechas cuando el sistema se encontraba en la condición de resonancia, en este estado, la frecuencia de la excitación externa es igual a la frecuencia de alguno de los modos normales de vibración.

En este capítulo muchos de los resultados obtenidos hacen referencia a la **frecuencia relativa**, este término significa que se compara la frecuencia del modo fundamental  $f_1$  respecto a cualquier otra frecuencia medida  $f_i$ , por lo que su valor es:

$$\frac{f_i}{f_1} \quad (3.1)$$

Se uso la frecuencia relativa porque en la revisión de referencias fue el parámetro que se usaba en la caracterización de los sistemas y fue necesario comparar los resultados de este trabajo con los valores reportados. La ventaja de usar este valor es que se evita el uso de unidades y se puede caracterizar el sistema en términos de sus cualidades analíticas.

Tensión[N]	16.3	10.5	5.8
Modos	Frecuencia [ $\pm 0.05\text{Hz}$ ]		
1	36.5	28.8	26.8
2	76.8	63.0	54.0
3	112.0	85.5	80.0
4	144.0	117.0	106.0
5	179.0	144.0	132.1
6	214.4	173.0	167.8
7	250.0	202.0	183.4

Tabla 3.1: frecuencias propias en función de la tensión para SL. La incertidumbre de la frecuencia se obtuvo del generador de funciones.

Tensión[N]	16.3	10.5	5.8
Modos	Frecuencia [ $\pm 0.05\text{Hz}$ ]		
1	24.6	25	21.5
2	64.0	61.3	50.0
3	80.0	74.0	63.8
4	126.2	115	106.8
5	143.0	126.3	110.6
6	188.0	175.5	155.0
7	205.0	192.0	180.7

Tabla 3.2: frecuencias propias en función de la tensión para SMC1 (masa de 1 g). La incertidumbre de la frecuencia se obtuvo del generador de funciones.

$f_i/f_1$	[sin unidades]	Desv.Est.
$f_1/f_1$	1	-
$f_2/f_1$	2.102	0.086
$f_3/f_1$	3.007	0.054
$f_4/f_1$	3.995	0.061
$f_5/f_1$	4.944	0.050
$f_6/f_1$	6.047	0.197
$f_7/f_1$	6.902	0.097

Tabla 3.3: frecuencia relativa  $f_i/f_1$  en función de la tensión para el SL, la razón es independiente de las tensiones: 16.3, 10.5 y 5.8 N. Se encontró una baja desviación estándar.

$f_i/f_1$	[sin unidades]	Desv.Est.
$f_1/f_1$	1	-
$f_2/f_1$	2.471	0.123
$f_3/f_1$	3.060	0.166
$f_4/f_1$	4.899	0.272
$f_5/f_1$	5.336	0.415
$f_6/f_1$	7.291	0.319
$f_7/f_1$	8.139	0.399

Tabla 3.4: frecuencia relativa  $f_i/f_1$  en función de la tensión para el SMC1, se encontró que la razón fue independiente de las tensiones: 16.3, 10.5 y 5.8 N. La desviación estándar fue baja y hay dependencia con la masa concentrada.

### 3.1. Cambio de la tensión y de masa concentrada en la cuerda para SMC1.

Los resultados de las primeras siete frecuencias normales para cada tensión se muestran en las Tablas 3.1 y 3.2. Cuando se cambió la tensión, no se observó cambio significativo en la amplitud y si un cambio en la frecuencia de los modos normales de vibración en SL y SMC1. Esto se obtuvo al analizar y medir en las fotografías las amplitudes de los modos normales de ambos sistemas, para lograr estas medidas se uso el software libre Tracker<sup>1</sup>. Varias de estas imágenes se muestran en la sección 3.3.

Las Tablas 3.3 y 3.4 muestran que en SL y SMC1 la frecuencia relativa ( $f_i/f_1$ ), mostró una tendencia a aproximarse a un valor constante que fue independiente del cambio de tensión, pues se observó a que las medidas tuvieron baja desviación estándar (**Desv.Est.**). Estos resultados son importantes, ya que garantizan que las frecuencias relativas no dependen de la tensión que se uso en el experimento y que las medidas fueron reproducibles.

La Figura 3.2 muestra la frecuencia relativa para SMC1 con diferentes valores de masas concentradas. Los valores obtenidos son consistentes con los valores reportados en la referencia [4] en la que se indica un crecimiento lineal de  $f_i/f_1$  respecto al número de modo.

<sup>1</sup>Esto se verificó analizando las mejores fotografías con el programa Tracker. Este software es una herramienta libre que se utiliza de manera popular en los cursos de laboratorio de Física pues es muy versátil para analizar experimentos que requieran el uso de fotografía o video [6].

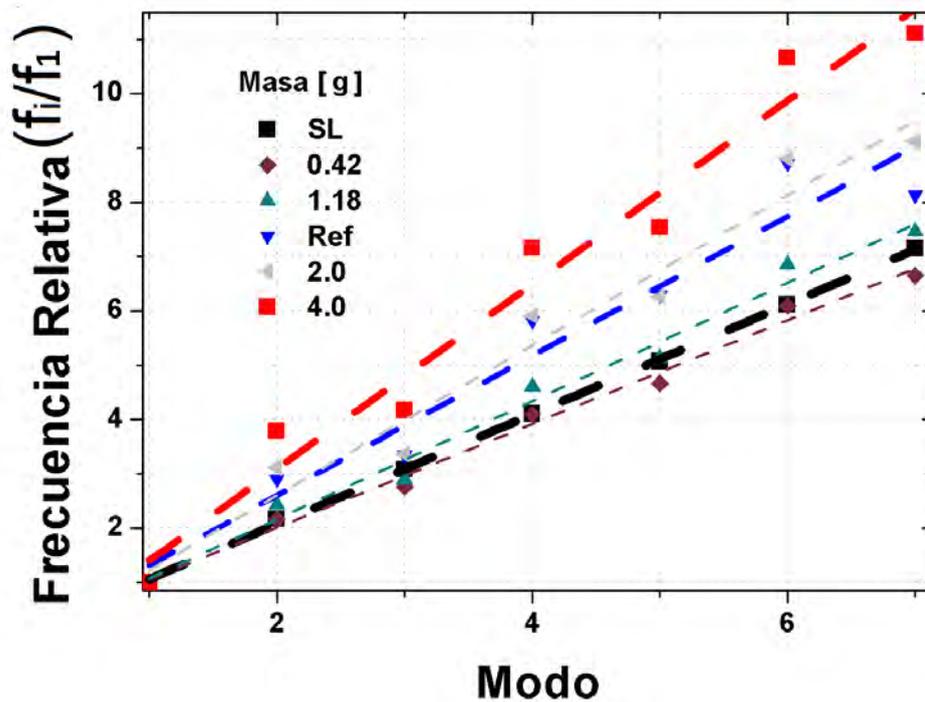


Figura 3.2: frecuencia relativa ( $f_i/f_1$ ) de SMC1 en función del modo para distintas masas concentradas. Estos patrones son independientes de la tensión. En la figura la etiqueta **Ref** indica los valores reportados en la referencia [4].

Los valores de referencia se indican como **Ref** en la Figura, de acuerdo con los resultados mostrados cuando aumenta la masa concentrada disminuye la frecuencia fundamental  $f_1$ , lo cual es independiente al cambio de tensión. El valor  $f_1$  se reduce debido a que el vibrador con la misma fuerza tiene que mover a un objeto con mayor masa, el aumento en la pendiente es una propiedad del SMC1.

A las gráficas mostradas en la Figura 3.2 se les hizo un ajuste lineal, los parámetros de pendiente y ordenada al origen se muestran en el apéndice A.4 en la Tabla A.1. Se observa que el aumento en la pendiente, se debe al aumento en la masa, la cual disminuye la frecuencia del modo fundamental. Se observa que SMC1 converge al SL conforme la masa concentrada tiende a cero. Es decir, en el límite donde la masa añadida es despreciable las frecuencias de los modos superiores son múltiplos de la frecuencia fundamental. De acuerdo con los resultados de la Figura 3.3 las frecuencias relativas comienzan a “perder” linealidad conforme se aumenta la masa lo cual se refleja en una disminución del coeficiente de correlación  $R^2$ . Entonces, el modelo de SMC1 descrito en las referencias [1, 3], debería tener una pendiente aún mayor debido a que  $f_1$  es más baja y un coeficiente de correlación aún menor, que indicaría que la relación ya no es lineal.

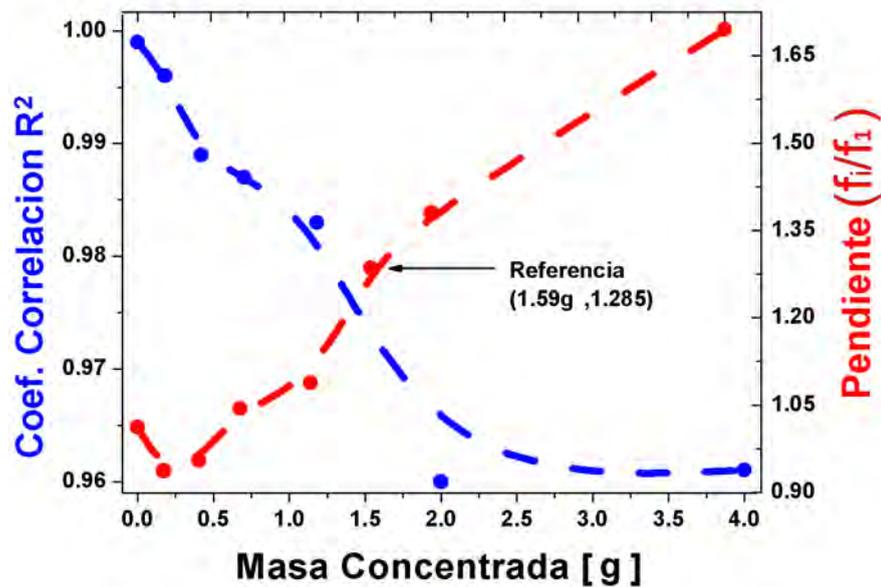


Figura 3.3: coeficiente de correlación y pendiente de SMC1 en función de la masa concentrada.

Por otro lado la presencia de la masa concentrada afecta solo a los modos impares del SMC1, la longitud de onda en función de la masa concentrada para estos modos se muestra en la Figura 3.4. Como el valor de  $k = \frac{n\pi}{L}$  entonces, la longitud de onda de los modos correspondientes a SL es:  $\lambda = \frac{2L}{n}$  donde  $n$  es el número de modo, en la Figura 3.4 estos valores están indicados como curva de referencia de 0 g. Se verificó estos datos midiendo en las fotografías de los modos de SL con el programa Tracker. La longitud de onda del SMC1 fue obtenida por medio de la ecuación  $\lambda = \frac{c}{f_i}$ , donde  $f_i$  son las frecuencias propias medidas del SMC1 y  $c$  la velocidad de propagación del SL que es la misma en ambos sistemas.

De la Figura 3.4 se observa que los valores de longitud de onda del SMC1 convergen a los valores de SL si la masa concentrada tiende a cero, para las masas concentradas de mayor valor 2 g y 4 g, el SMC1 tiene mayor variación en su longitud de onda en los modos 3 y 5, pues se observa una pendiente más pronunciada en las curvas. La Figura 3.5 proporciona un poco más de información de la longitud de onda en función de la masa concentrada, se observa que a partir del tercer modo de vibración, sin importar la masa el SMC1 tiende a tener longitud de onda constante conforme sus modos de vibración crecen, esto físicamente indica que en frecuencias altas el sistema vibra como si no existiera la masa concentrada: *para modos de vibración altos, las vibraciones de SMC1 corresponden a SL.*

Como la masa fue colocada en el punto medio de la cuerda, ésta afectó solo al antinodo central de cada modo de vibración impar. Esto tiene el claramente el efecto de disminuir la amplitud de vibración y para masas lo suficiente grandes se suprimen modos pares. Los modos pares no son afectados, ya que el lugar donde se coloca la masa es un nodo. La Figura

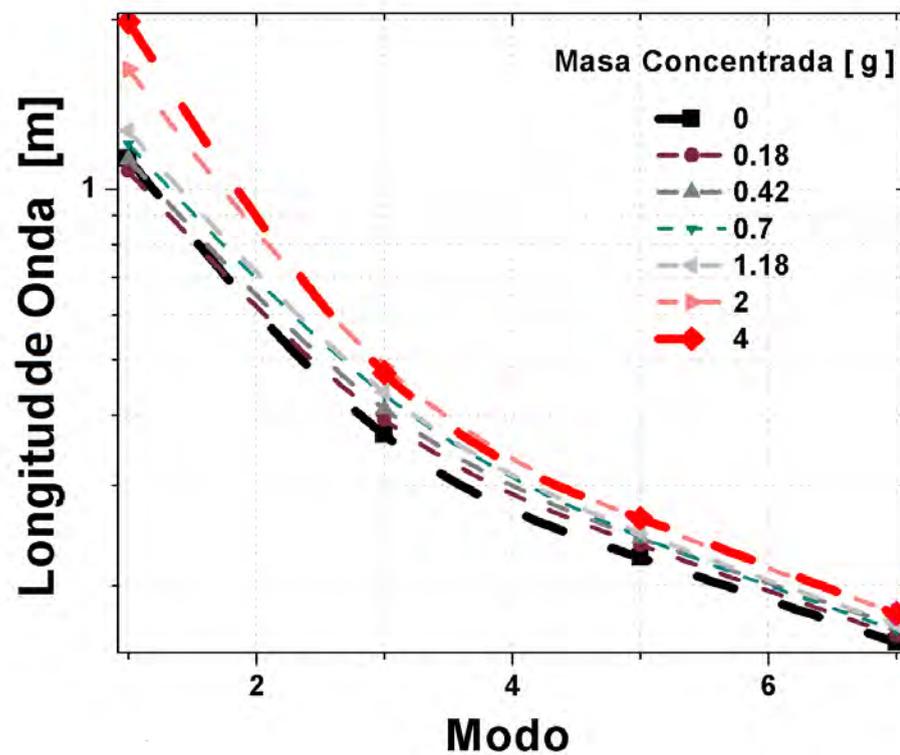


Figura 3.4: longitud de onda en función de los modos normales impares del SMC1. Se ha indicado la curva de referencia del SL (0 g).

3.6 muestra el comportamiento de la distancia internodal, es decir, entre nodos vecinos, para distintos valores de masa concentrada. Se observó un comportamiento tipo  $1/n$  (con  $n$  el número de modo) conforme se aumentó la masa. Los valores de esta gráfica se muestran en la Tabla A.3 en el apéndice A.4.

Modo	Long. Onda [ $\pm 0.005\text{m}$ ]	Frecuencia [ $\pm 0.05\text{Hz}$ ]	Vel. Prop. [ $\pm 1\text{m/s}$ ]
1	1.107	31.4	34.76
2	0.554	68	37.67
3	0.371	96.6	35.81
4	0.276	128.9	35.58
5	0.222	159.1	35.34
6	0.189	191.9	36.17
7	0.161	224.6	36.18

Tabla 3.5: valores de longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación para el sistema SL, con una tensión fija de 5.8 N. La velocidad de propagación coincide con la del SMC1.

A partir de los resultados anteriores, se verificó que la velocidad de propagación de onda del SL es constante para todos los modos normales de vibración y se asume que es la misma para SMC1. Por ejemplo, para la tensión de 5.8 N los valores medidos de longitud de onda

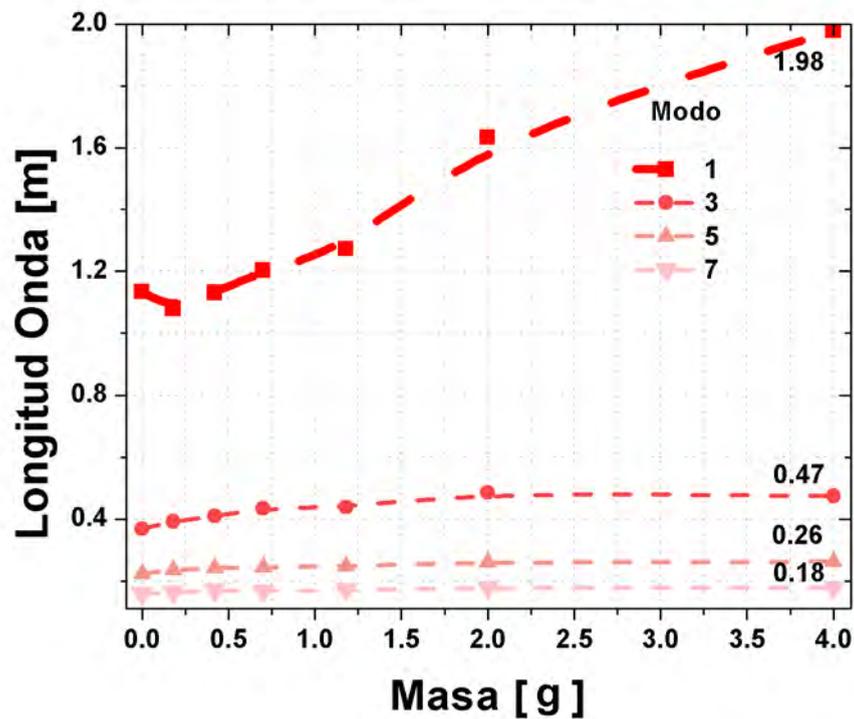


Figura 3.5: longitud de onda en función de la masa concentrada para los primeros cuatro modos impares del SMC1. Conforme el número de modo crece la longitud de onda tiende a mantener un valor constante, esto implica que las vibraciones del SMC1 son muy parecidas al SL.

y frecuencia se muestran en la Tabla 3.5, las longitudes de onda se obtuvieron después de analizar las fotografías por medio del programa Tracker. De estos valores se tiene que la velocidad de propagación promedio en la cuerda es de  $35.9 \text{ m/s}$  de acuerdo con la ecuación  $c = \lambda f$  (con error de  $\pm 1 \text{ m/s}$  por desviación estándar).

### 3.2. Sistemas de más de una masa concentrada (SMC2, SMC3, SMC4 y SMC5).

En esta sección se presentan los resultados de SMC de 2, 3, 4 y 5 masas concentradas, denotados respectivamente como: SMC2, SMC3, SMC4 y SMC5.

Se observa en la Figura 3.2 que el SMC1 mantiene entre sus frecuencias propias una relación lineal, respecto a su frecuencia fundamental y esta relación se mantiene en todos sus modos de vibración. Sin embargo, se encontró que para los SMC de más de una masa las frecuencias propias del sistema son lineales solo en intervalos específicos de modos, como se observa en la Figura 3.7.

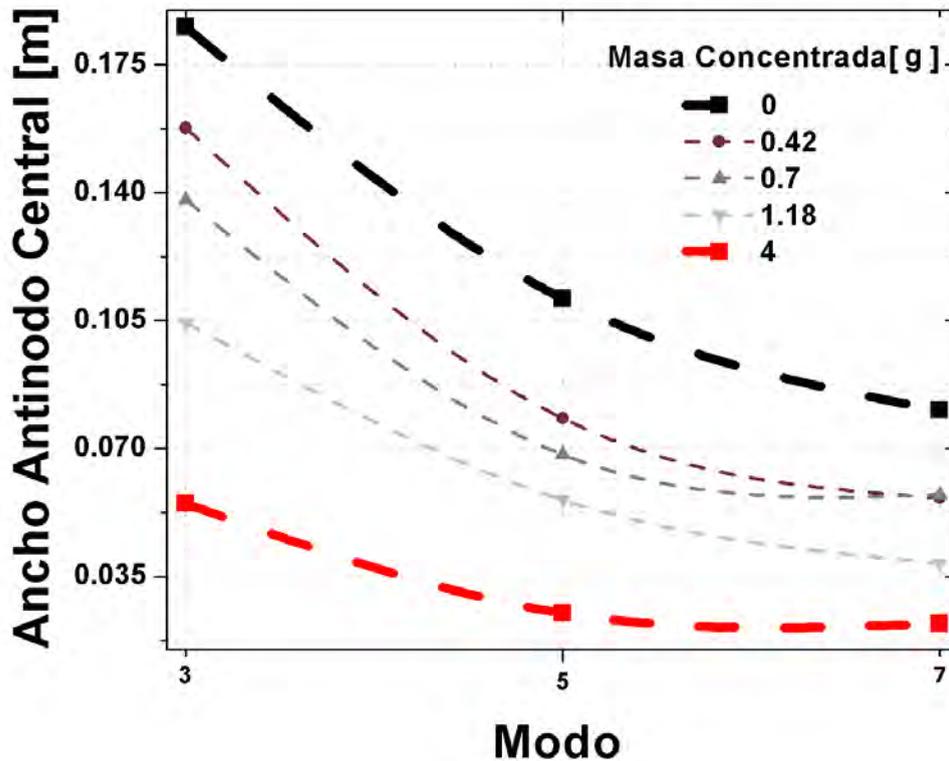


Figura 3.6: distancia entre nodos vecinos en función de los modos 3, 5 y 7 para cinco distintas masas concentradas del SMC1.

Como lo predice (en parte) el modelo teórico propuesto en la ecuación 1.32, la cantidad de frecuencias propias en un intervalo de modos depende del número de masas en el SMC; en la figura se observa que las frecuencias propias en el primer intervalo de SMC1, SMC3 y SMC5 coincide con el número de masas  $N = 1, 3$  y  $5$ , adyacente a este intervalo aparece un discontinuidad de escalón en un intervalo de longitud igual a  $N + 1$ , a continuación de este último aparece otro escalón sobre un intervalo la misma longitud y este patrón de crecimiento por escalones se repite conforme crecen los modos. De acuerdo con estos resultados: *en cada SMC las frecuencias propias mantienen linealidad por intervalos de modos definidos por el número de masas.*

Por ejemplo: para SMC2 como se ve en la Figura 3.8 las primeras dos frecuencias relativas son cercanas a las del SL y cada dos modos se observan discontinuidades de tipo escalón a partir del tercer modo. Estas discontinuidades mantienen una relación lineal durante un intervalo de tres modos y después aparece un nuevo salto en un intervalo de tres modos consecutivos. Este comportamiento coincide bien con los valores reportados en el artículo [4] en la figura estos valores están indicados como **Ref**. Este patrón de “escalonamiento” se observó también en el SMC3, además los escalones se observan cada tres modos como se ve

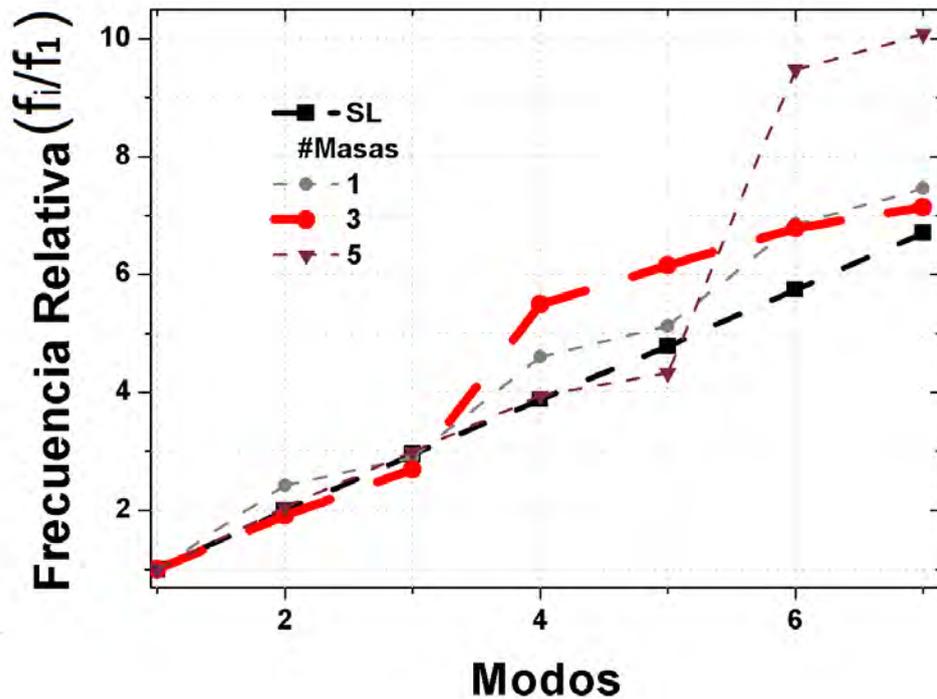


Figura 3.7: frecuencias relativas en función del modo para los sistemas SMC1, SMC3 y SMC5. Cada masa en el sistema fue de 1 g.

en la Figura 3.9, en el apéndice A.5 se pueden consultar otras configuraciones de SMC3, en esta sección solo se reportan los más significativos (ver Figuras A.2, A.3 y A.4).

Es importante ver que en ambas figuras 3.8 y 3.9 los patrones de escalonamiento no dependen de la cantidad de masa concentrada. En general, si el valor de masa concentrada respecto a la masa de la cuerda es significativamente mayor hará que la amplitud de cada escalón sea también mayor y esto simplemente se debe a que se redujo la frecuencia fundamental  $f_1$  del SMC.

De los patrones que presentan las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9 se puede hacer la siguiente inferencia del los SMC: *Dado un SMC con  $N$  masas en el que es posible ver modos normales de vibración, habrá  $N$  frecuencias propias que mantienen una relación lineal durante un intervalo de  $N$  modos, en el modo  $N + 1$  aparecerá una discontinuidad de escalón en la cual las frecuencias propias del SMC volverán a ser lineales en un intervalo de  $N + 1$  modos.*

Se puede tener una interpretación diferente de los “escalonamientos” si en lugar de usar la frecuencia fundamental  $f_1$  de cada SMC se usa como frecuencia de comparación solo una<sup>2</sup>, en este trabajo se propone usar solo la frecuencia fundamental  $f'_1$  del SL. Por ejemplo, para  $f'_1 = 34 \text{ Hz}$  que corresponde a la frecuencia fundamental de la cuerda de nailon tipo 6 usada

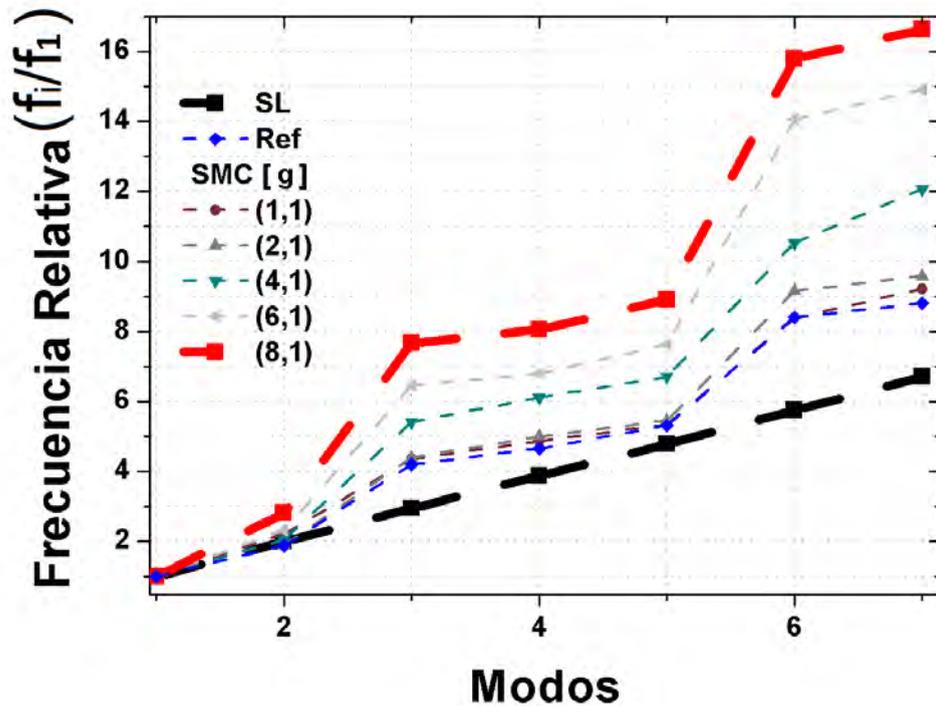


Figura 3.8: frecuencias relativas en función del modo para el sistema SMC2. En la figura **Ref** indica los valores reportados en la referencia [4].

se obtienen las gráficas de la Figura 3.10. Entonces, debido a que las masas están colocadas en los nodos de SL se observa que hay frecuencias de los SMC fijas (o difieren poco) respecto al SL y hay otras que se reducen debido a la presencia de las masas concentradas. Por ejemplo, para SMC1 se observa que las frecuencias pares coinciden con las del SL y que las frecuencias impares se reducen debido a las masas de 1 g.

De la Figura 3.10 se observa que debido a que las masas fueron colocadas en los nodos del SL, algunas de las frecuencias del SMC son las mismas frecuencias del SL. Estas frecuencias se identifican con facilidad ya que son los modos donde ocurre la discontinuidad de escalón. Las frecuencias propias sobre el escalón son frecuencias del SMC que tienen un valor menor respecto a las de SL por la presencia de las masas concentradas.

La Figura 3.11 muestra el comportamiento de la longitud de onda para los siete primeros modos de vibración de los SMC desde una masa hasta cinco masas y se compara con la longitud de onda del SL (indicada con una curva de color negro). Las curvas mostradas presentan un patrón: a partir de un modo específico cuyo valor depende claramente del número de masas, los valores de longitud de onda del SMC parecen converger a los valores

<sup>2</sup>En el primer caso se usó  $f_1$  de cada SMC, para poder comparar con los valores reportados en las referencias.

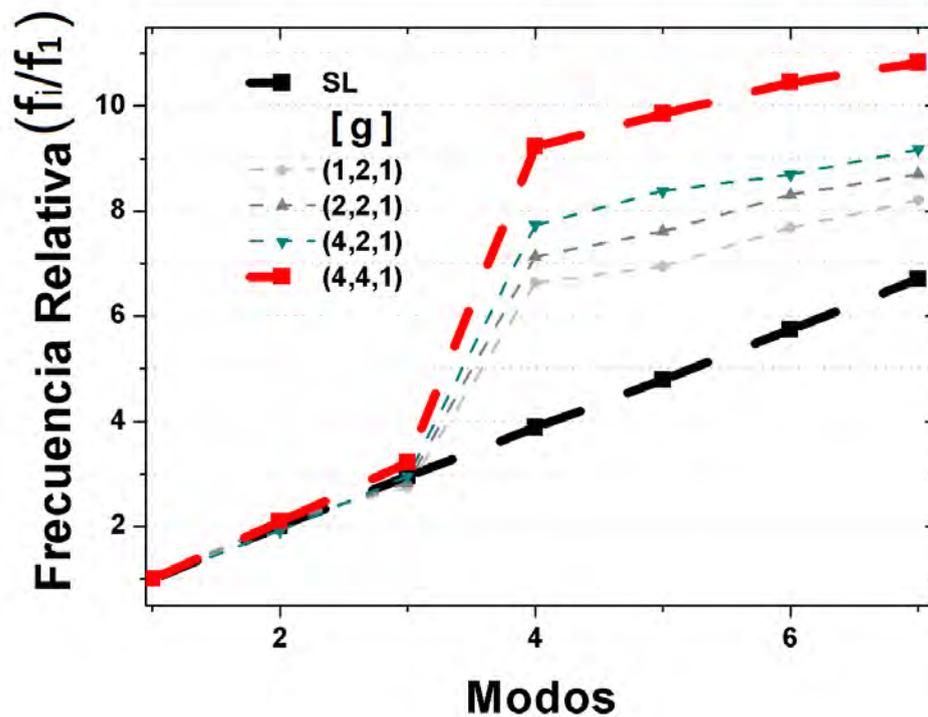


Figura 3.9: frecuencias relativas en función del modo para el sistema SMC3.

del SL. Por ejemplo, para el SMC3 se observa que exceptuando las tres primeras, todas las longitudes de onda tienden a las del SL este efecto es más notable en SMC5.

La Figura 3.11 es importante por que nos muestra de manera experimental un fenómeno interesante e intuitivo de los SMC. Vemos que conforme vamos agregando una masa del mismo valor al sistema, el SMC se va convirtiendo en una nueva cuerda. Por tanto, las seis curvas mostradas en 3.11 muestra la progresión desde el sistema SL hasta un nuevo sistema que llamaré  $SL'$ . Por tanto, se puede decir que el SMC se convierte en un nuevo sistema  $SL'$  conforme el número N masa crece. Así sin proponerlo, el SMC muestra de manera didáctica un proceso de límite.

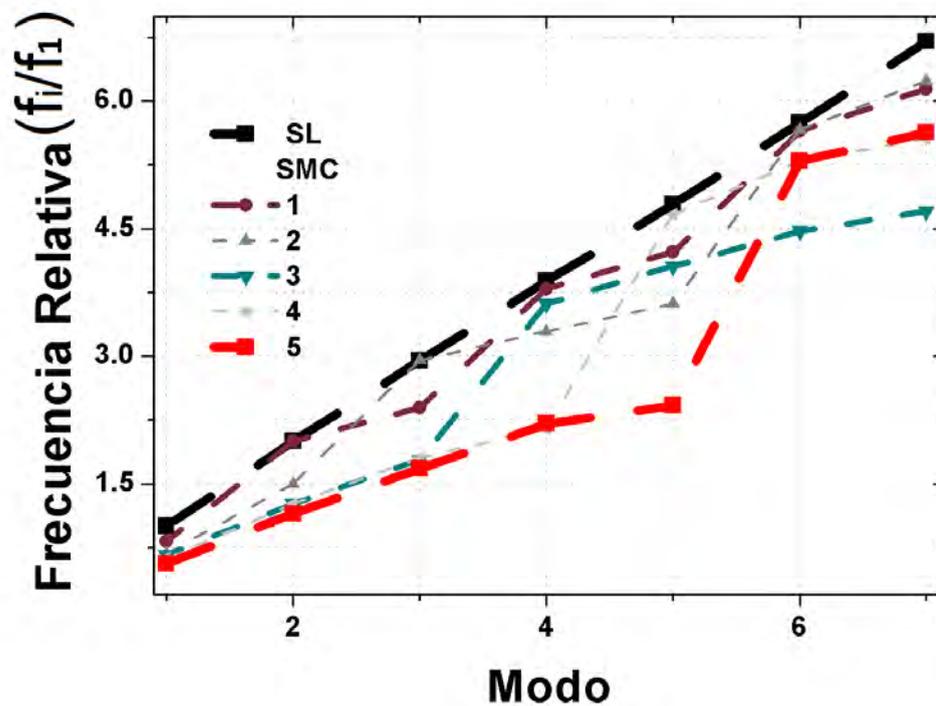


Figura 3.10: frecuencias relativas en función del modo para los cinco SMC. En este caso se usó  $f_1' = 34 \text{ Hz}$  del SL como frecuencia de referencia.

### 3.3. Fotografías de los modos de los SMC.

Se presentan a continuación las fotografías de los modos normales de vibración. Se encontraron las siguientes características: en los casos de las Figuras 3.12, 3.13 y 3.14 se puede ver en los modos una simetría vertical y horizontal debido al hecho que todas las masas son iguales (todas de  $1 \text{ g}$ ). Se han indicado en todas las figuras las frecuencias propias de vibración, note que no son múltiplos de la frecuencia fundamental. Cuando las masas son de distinta magnitud, como ocurre en las Figuras 3.15 y 3.16 se pierde la simetría vertical y además aparecen desplazamientos en la posición de los nodos. Por ejemplo, compare la Figura 3.12 (B) con 3.15 (F), donde se observa que los nodos tienden a desplazarse a hacia la masa de mayor magnitud. Se observa en cada conjunto de fotografías A y B que los modos generados por medio del vibrador coinciden bien con los descritos en la sección 1.4.

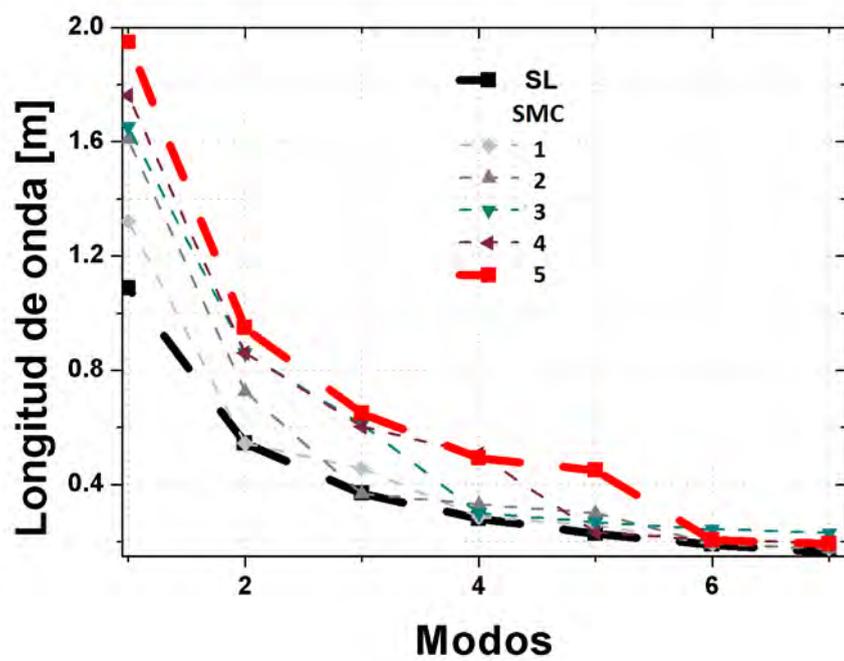


Figura 3.11: longitudes de onda en función del modo para los sistemas: SL, SMC1, SMC2,... y SMC5.

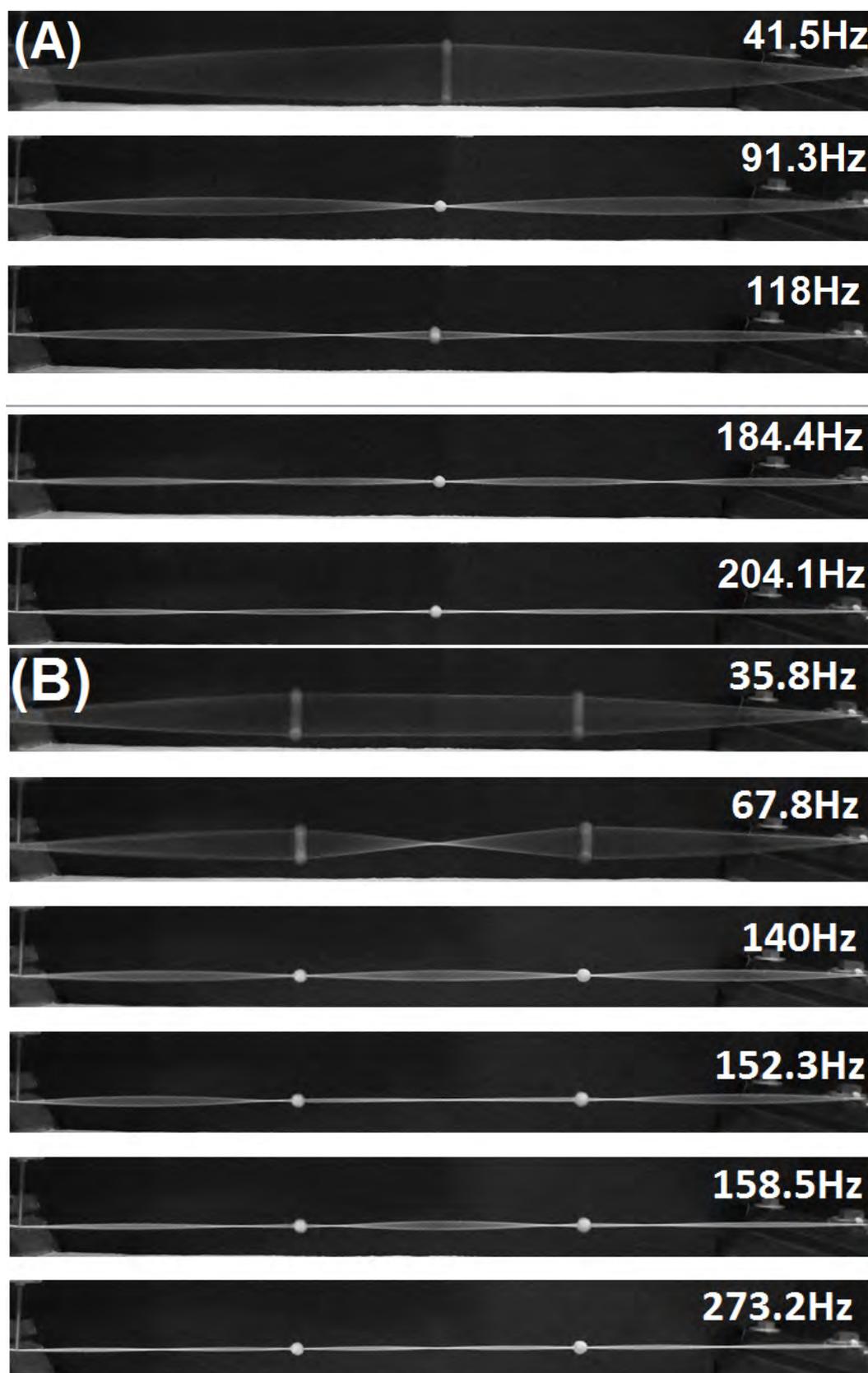


Figura 3.12: modos de vibración de los sistemas: (A) SMC1 y (B) SMC2.

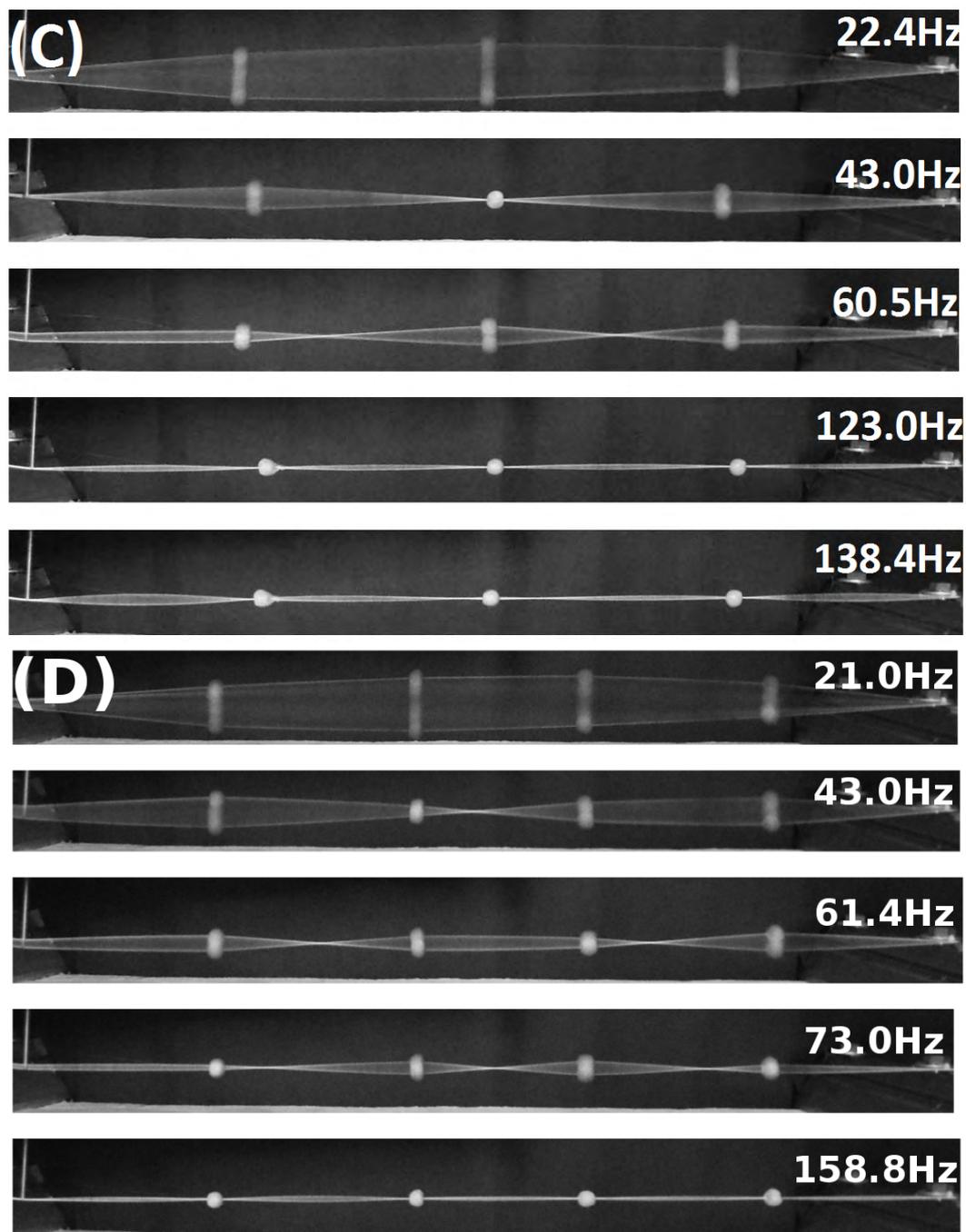


Figura 3.13: modos de vibración de los sistemas: (C) SMC3 y (D) SMC4.

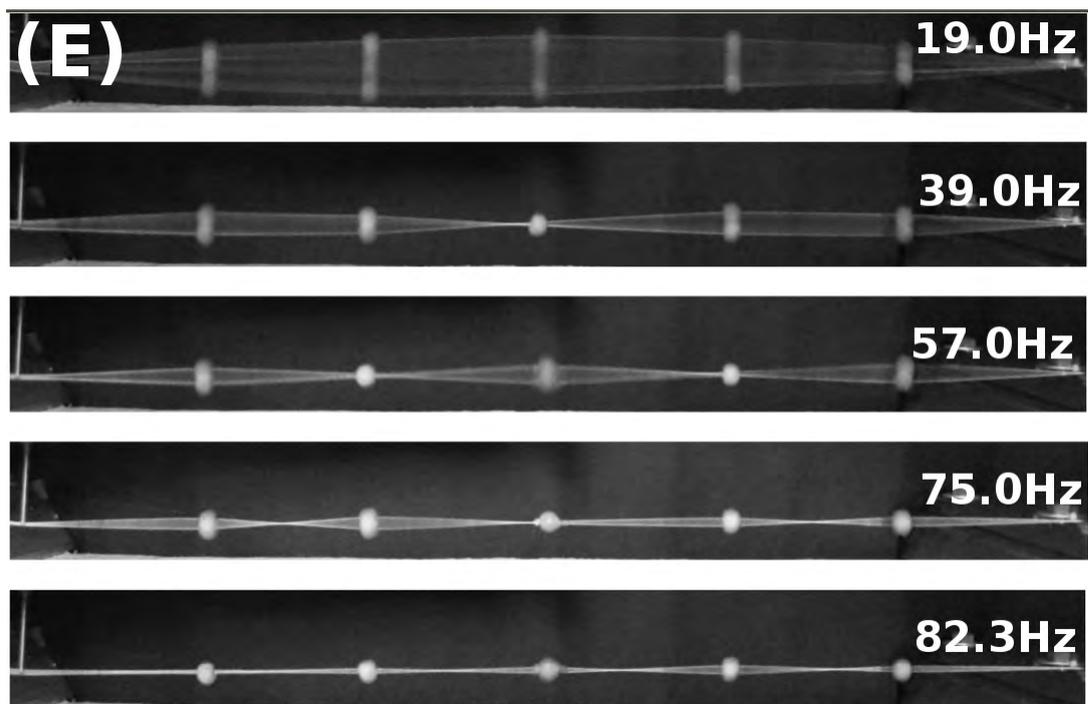


Figura 3.14: modos de vibración del sistema (E) SMC5.

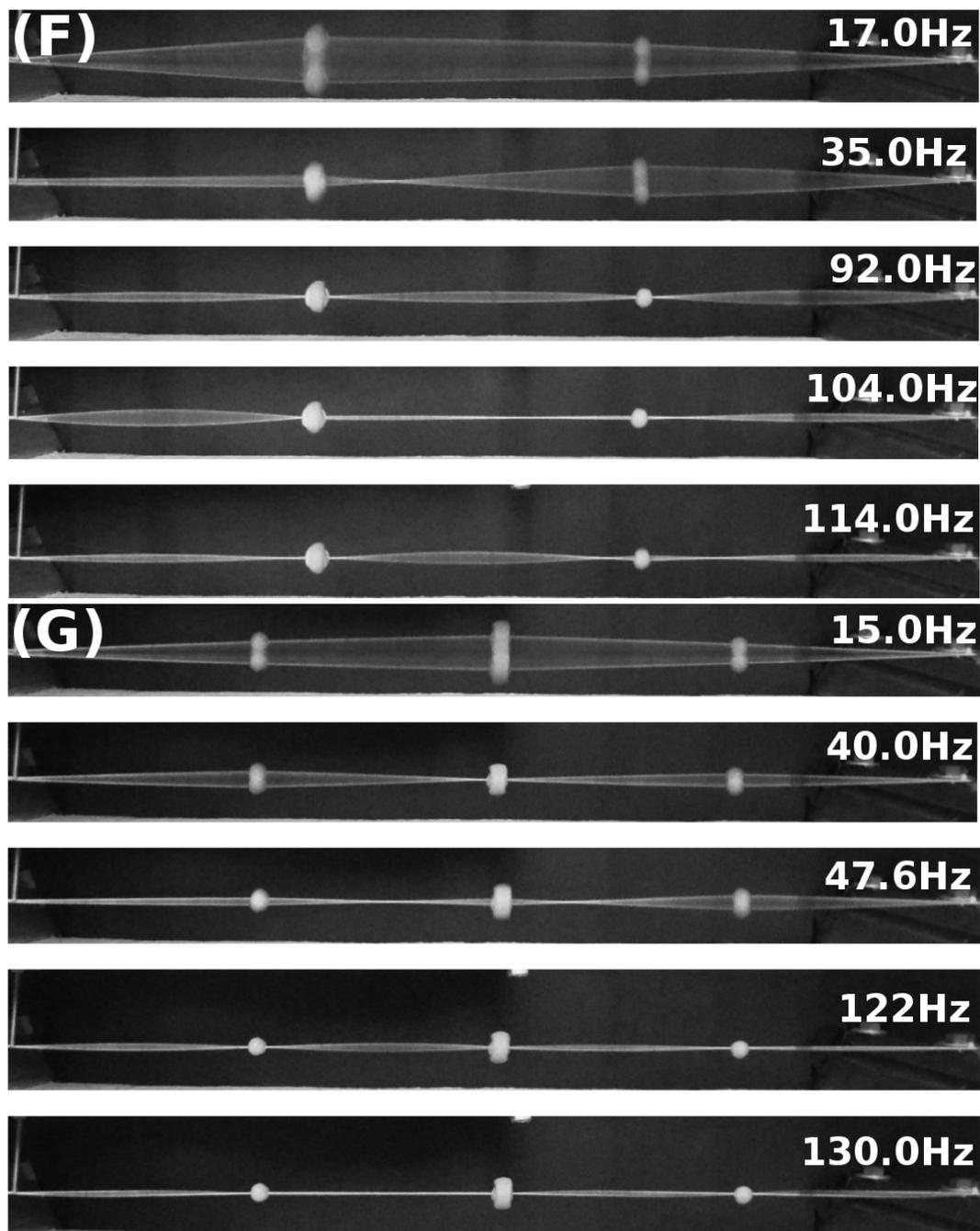


Figura 3.15: modos de vibración de los sistemas asimétricos: (F) SMC(4,1) y (G) SMC(1,4,1).

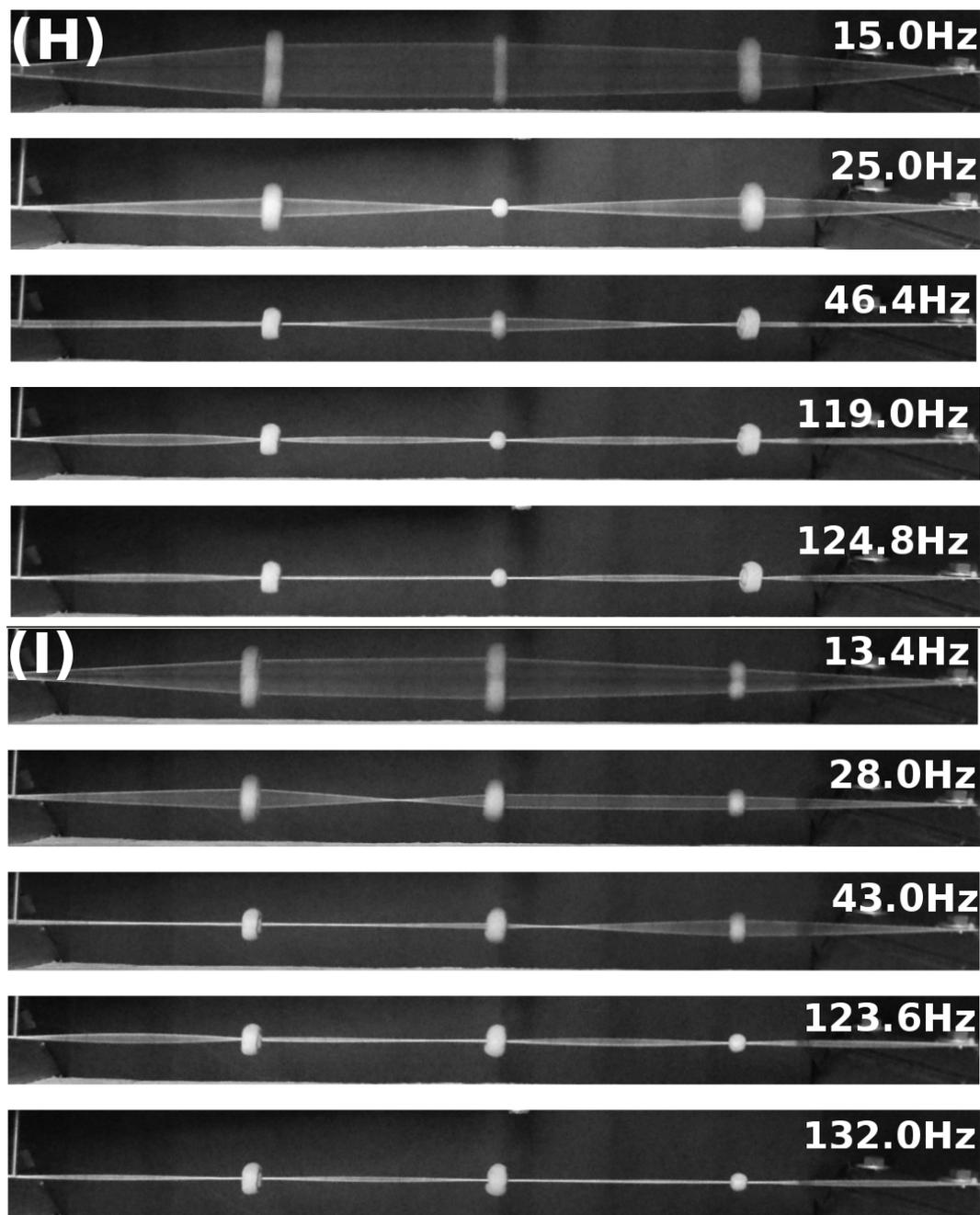


Figura 3.16: modos de vibración de los sistemas asimétricos: (H) SMC(4,1,4) y (I) SMC(4,4,1).



## Capítulo 4

# Conclusiones

Se midieron los modos normales de vibración de los sistemas con discontinuidades de densidad (SMC). Los valores encontrados son consistentes con los resultados que se reportan en los artículos recientes y que han sido comentados durante el texto. De acuerdo con los resultados obtenidos para el SMC1 tenemos que:

- Sus frecuencias propias no son múltiplos de la frecuencia fundamental.
- Las frecuencias propias mantienen una relación lineal con respecto al número de modo para masas concentradas de orden comparable a la masa de la cuerda.
- La correlación lineal pierde fuerza conforme la masa concentrada crece.
- Conforme las frecuencias propias del SMC1 crecen se convierten en las frecuencias del SL.
- Son más significativos los modos de vibración de bajas frecuencias.

Para los sistemas SMC2, SMC3, SMC4 y SMC5 y posiblemente los de más masas concentradas:

- Las frecuencias propias del sistema son lineales solo en intervalos específicos de número de modos y aparecen discontinuidades de escalón o un patrón de crecimiento por escalones que se repite conforme crece el número de modos.
- El patrón de crecimiento es consistente con el modelo de frecuencias propias siguiente:  
*Dado un SMC con  $N$  masas en el que es posible ver modos normales de vibración, habrá  $N$  frecuencias propias que mantienen una relación lineal durante un intervalo de  $N$  modos, y en el modo  $N + 1$  aparecerá una discontinuidad de escalón después de la*

*cual las frecuencias propias del SMC volverán a ser lineales en un intervalo de  $N + 1$  modos.*

- Los patrones de escalonamiento son independientes de la magnitud de masa concentrada y dependientes del número de masas. Si el valor de la masa concentrada respecto a la masa de la cuerda es significativamente mayor hará que la amplitud de cada escalón sea mayor debido a la disminución de la frecuencia fundamental  $f_1$ .
- Con referencia a la frecuencia fundamental  $f_1'$  del SL: si las masas están colocadas en los nodos de SL se observa que hay frecuencias de los SMC que coinciden con las del SL y las otras se reducen debido a la presencia de las masas concentradas. Las frecuencias que coinciden con SL son los modos donde ocurre la discontinuidad de escalón. Las frecuencias sobre el escalón pertenecen al SMC y tienen un valor menor respecto a las de SL por la presencia de las masas concentradas.
- Los SMC de más de una masa son importantes pues muestran de manera experimental un fenómeno interesante e intuitivo: el SMC se convierte en un nuevo sistema  $SL'$  conforme el número  $N$  de masas crece. Así sin proponerlo, el SMC muestra de manera didáctica un proceso de límite.
- Sus modos normales tienen simetría horizontal y vertical si las masas son del mismo valor, si son de distinto valor aparecen asimetrías. En estas asimetrías los puntos nodales se desplazan hacia las masas concentradas de mayor magnitud.

En términos de los objetivos de esta tesis, se logró una caracterización adecuada teórico-experimental general de los modos normales de vibración y frecuencias propias en los SMC y sus parámetros: velocidad de propagación, longitud de onda, densidad lineal y tensión. Se construyó dispositivo didáctico para poder general y visualizar los modos de los SMC.

Con todos los argumentos anteriores, considero que es válido proponer el SMC como un modelo didáctico, ya que posee las cualidades que se buscan en estos modelos: es sencillo de entender y puede ser usado para describir características de sistemas físicos.



# Apéndice A

## Complemento

### A.1. Nota técnica.

Material usado para desarrollar este trabajo:

- Altavoz Marca Bomber, impedancia:  $8 \Omega$ , Potencia: 100 *watt*, diámetro: 4".
- Generador de Funciones: Stanford Reserch Systems model DS345, SN:32103.
- Amplificador, KRELL Model KAV-300i, SN: 8979073238.
- Bascula OKAUS, Triple Beam 750SW.
- Cuerdas de guitarra de acero y nailón.
- Para las masas concentradas se usó plastilina epóxica.

## A.2. Póster presentado en el LIX Congreso Nacional de Física.



### Visualización de vibración de cuerdas con masas concentradas.



**Saulo Gonzalo Carmona Contreras<sup>(1)</sup>, Pablo L. Rendón Garrido<sup>(2)</sup>, Antonio Pérez López<sup>(2)</sup>.**

1) Posgrado Ingeniería Eléctrica, campo Instrumentación, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, Ciudad Universitaria, 04510 México D.F.  
 2) Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (UNAM) Circuito Exterior s/n C.P. 04510 Cd. Universitaria México, 70-186, México D.F.  
[fiisgcarmona@gmail.com](mailto:fiisgcarmona@gmail.com)

46.4Hz

41.5Hz

94.4Hz

91.3Hz

140.5Hz

118Hz

194Hz

184.4Hz

232.3Hz

204.1Hz

35.8Hz

30Hz

67.8Hz

67.1Hz

140Hz

96.9Hz

162.3Hz

146Hz

158.5Hz

155Hz

#### Sistema de masa concentrada

El problema de una cuerda vibrante con densidad discontinua ha sido estudiado por Lagrange, Helmholtz y Rayleigh entre muchos otros.

La colocación de un número arbitrario de masas sobre una cuerda homogénea fija en ambos extremos da lugar a modos no-armónicos de vibración.

En este trabajo colocamos una, dos y tres masas en posiciones simétricas con respecto al centro de la cuerda para visualizar las vibraciones libres de una cuerda no-homogénea, lo que permite identificar las funciones propias del sistema, así como las frecuencias de la oscilación.

Para llevar a cabo los experimentos se ha montado una cuerda de guitarra verticalmente, sujeta en ambos extremos de tal modo que la longitud de la cuerda es 56cm.

Se ha utilizado la quinta cuerda, que típicamente se afina a La2 (110 Hz), y que está entorchada con

un recubrimiento plateado, lo que permite visualizar más fácilmente las vibraciones transversales de la misma.

Además la cuerda fue tensada con una fuerza constante, y se excitó con una vibración armónica por medio de un sistema de vibración.

Primero se estudian las vibraciones libres de la cuerda homogénea, y posteriormente se añaden una, dos y tres masas pequeñas, siempre colocadas simétricamente con respecto al punto medio de la cuerda.

La frecuencia de la excitación, que se da a través de un generador de funciones, se varía lentamente hasta observar que la amplitud de la oscilación del primer modo es máxima. La cuerda se pesa en una balanza de precisión, obteniendo una masa de 3.5gr. Como la cuerda tiene una longitud total de 102cm podemos concluir que la densidad de la cuerda es de 5.39gr/cm<sup>3</sup>.

#### Dispositivo experimental

La longitud de onda del primer modo de vibración es 204cm, por lo que la frecuencia del modo fundamental de vibración es 46.4Hz. Por tanto, como la velocidad de propagación es 53m/s, podemos obtener indirectamente la tensión a la que se encuentra sujeta la cuerda, y que es 10.7N.

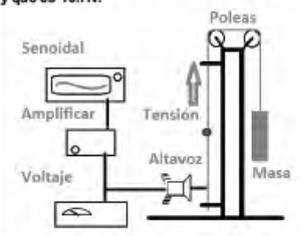


Figura A.1: póster presentado en el LIX Congreso Nacional de Física en Leon Guanajuato en Octubre de 2016.

### A.3. Voltaje RMS.

En muchos procesos de medición se cuantifica un voltaje variable con el tiempo que es proporcional a la variable física a medir. Una manera de cuantificar este voltaje independiente de la forma de la onda de la señal, es determinando su valor raíz cuadrático medio  $V_{rms}$  (también voltaje efectivo). Un medidor de  $V_{rms}$  es no lineal, por tanto, no se puede caracterizar con una curva de respuesta en frecuencia, y entonces lo que se hace es comparar el  $V_{rms}$  medido con uno de referencia.

El voltaje cuadrático medio  $V_{rms}$  de una señal se define como el valor constante que debe llevar la misma potencia promedio de la señal [7] (el  $V_{rms}$  es mayor que voltaje promedio) y esta dado por la siguiente ecuación:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt}. \quad (A.1)$$

Donde  $v(t)$  es el voltaje de la señal medido en el tiempo  $t$  y  $T$  es el periodo de observación de la señal.

### A.4. Tablas complementarias a la sección de resultados.

Masa	Pendiente	error pendiente	Ordenada	error Ordenada	$R^2$
[±0.05 g]	[sin unidades]				
0	1.012	0.01	0.048	0.046	0.999
0.18	0.937	0.025	0.073	0.11	0.996
0.42	0.955	0.04	0.098	0.18	0.989
0.7	1.043	0.049	-0.021	0.22	0.987
1.18	1.088	0.059	-0.012	0.265	0.983
1.59	1.285	0.139	0.032	0.62	0.934
2	1.381	0.115	-0.153	0.513	0.96
4	1.695	0.139	-0.294	0.623	0.961

Tabla A.1: se muestran resultados de los valores de la pendiente respecto a la masa concentrada del SMC1.

En la referencia [4] para un SMC1, se compara la frecuencia del modo fundamental con las frecuencias de los modos superiores. Estos valores se muestran en Tabla A.2 . Los resultados obtenidos por el procedimiento propuesto están de acuerdo los valores obtenidos en [4].

Modo	Frecuencia [Hz]	$f_i/f_1$
1	6.1	1
2	17.7	2.902
3	21	3.343
4	35.5	5.82
5	38	6.299
6	53.2	8.721
7	55.71	8.133

Tabla A.2: valores experimentales tomados de la referencia [4] para un SMC1.

Masa [ $\pm 0.05$ g]	0	0.18	0.42	0.7	1.18	2	4
Modo	Distancia internodal [ $\pm 0.5$ mm]						
3	0.185	0.171	0.158	0.138	0.105	0.078	0.055
5	0.111	0.981	0.078	0.068	0.056	0.041	0.025
7	0.081	0.067	0.057	0.057	0.039	0.034	0.022

Tabla A.3: se muestran los valores de la distancia internodal para los modos 3, 5 y 7. Se observa un decrecimiento de la distancia conforme aumenta la masa.

$f_i/f_1$	# 6-nailon	#1-nailon	#6-acero	#1-acero
$f_1/f_1$	1.000	1.000	1.000	1.000
$f_2/f_1$	2.166	2.047	2.042	2.015
$f_3/f_1$	3.076	3.044	2.890	3.012
$f_4/f_1$	4.105	3.998	3.861	4.018
$f_5/f_1$	5.067	4.999	4.876	4.969
$f_6/f_1$	6.111	5.943	6.040	5.946
$f_7/f_1$	7.153	6.951	7.147	7.007

Tabla A.4: comportamiento de la frecuencia relativa  $f_i/f_1$  (error de  $\pm 0.001$ ) para el SL en cuatro cuerdas dos de nailon y dos de acero.

Frec. relativa	SMC1 [ $f_i/f_1$ ]			
	Teo. ref.	Exp. ref.	Exp. tesis.	error [%]
1.000	1.000	1.000	1.000	0
2.917	2.902	3.119	3.119	6.97
3.383	3.443	3.358	3.358	2.54
5.835	5.820	5.913	5.913	1.57
6.109	6.229	6.261	6.261	0.52
8.752	8.721	8.803	8.803	0.93
8.942	9.133	9.128	9.128	0.05

Tabla A.5: valores de  $f_i/f_1$  del SMC1 teóricos y experimentales de referencia y valores obtenidos en este trabajo. En la referencia se usó una masa concentrada y una masa de cuerda de valor 6.9 g mientras que en este trabajo se usó una masa concentrada de  $\sim 1$  g y una masa de cuerda de  $\sim 3$  g.

Frec. relativa	SMC2[ $f_i/f_1$ ]					
	Teo. ref.	Exp. ref.	Exp. tesis.SMC(1,1)	Exp. tesis.SMC(2,1)	error[%]	error[%]
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0
1.897	1.886	2.217	1.898	17.57	0.64	
4.295	4.202	4.361	4.398	3.78	4.67	
4.670	4.660	4.870	5.000	4.50	7.30	
5.268	5.316	5.348	5.454	0.60	2.59	
8.590	8.404	8.378	9.157	0.31	8.96	
8.799	8.806	9.217	9.583	4.67	8.83	

Tabla A.6: valores de  $f_i/f_1$  del SMC2 teóricos y experimentales de referencia y valores obtenidos en este trabajo. En la referencia se usó dos masas concentradas y una masa de cuerda de valor 4.2 g mientras que en este trabajo se usaron dos masas concentradas de  $\sim 1$  g en un primer caso y luego en un segundo caso dos masas de  $\sim 1$  g y  $\sim 2$  g, en ambos casos se uso una masa de cuerda de  $\sim 3$  g.

### A.5. Figuras complementarias de la sección de resultados.

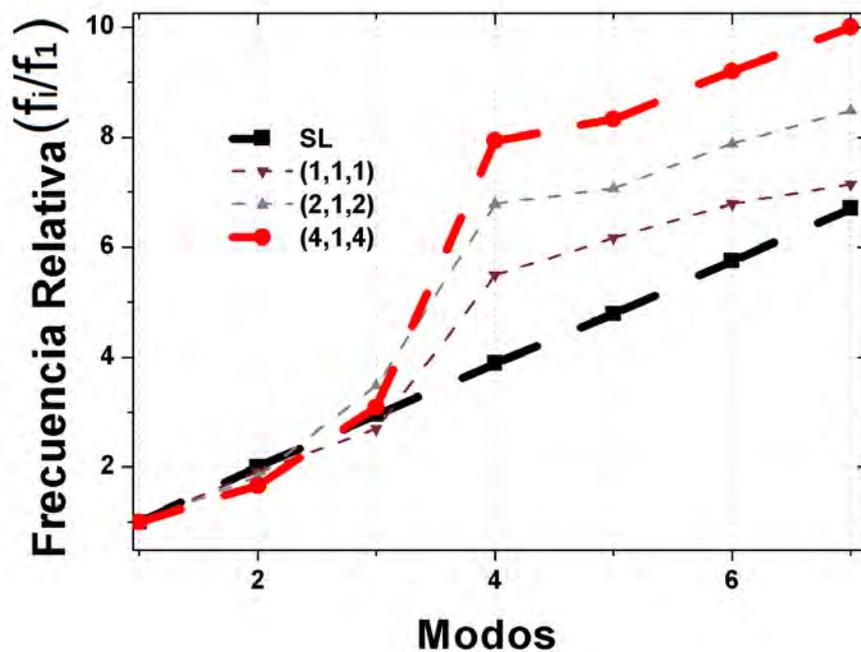


Figura A.2: frecuencias relativas en función del modo del SMC3. En este caso se mantuvo fija la masa intermedia y se aumentó las masas de los extremos. Se observan escalonamientos en intervalos de cuatro modos.

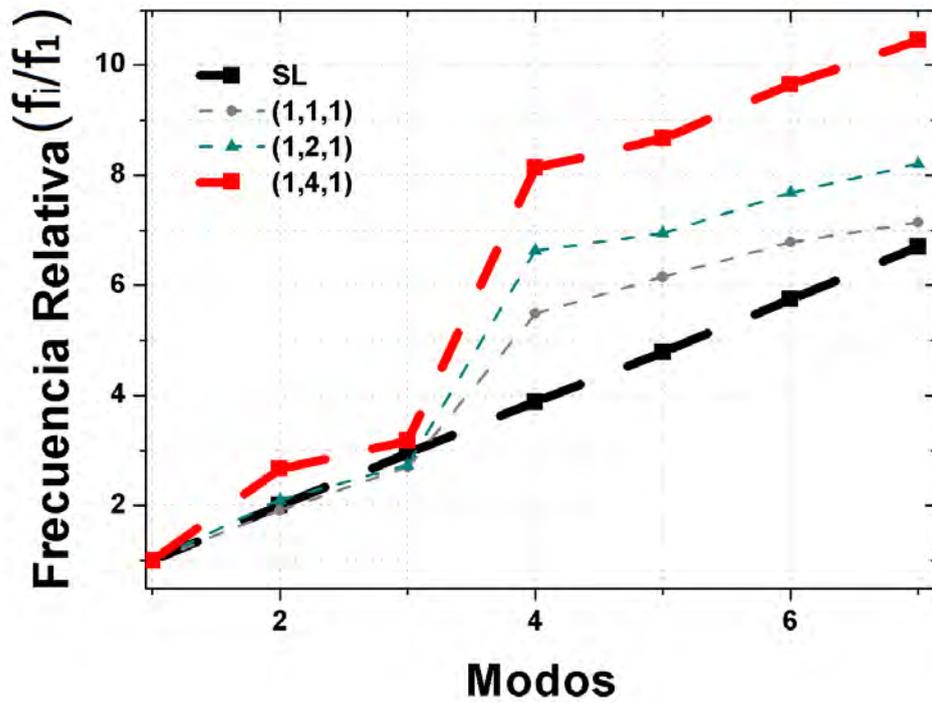


Figura A.3: frecuencias relativas en función del modo del SMC3, para distintas masas. En este caso se mantuvo fijas las masa del los extremos y se aumentó la masa intermedia. Se observan dos escalonamientos en intervalos de cuatro modos.

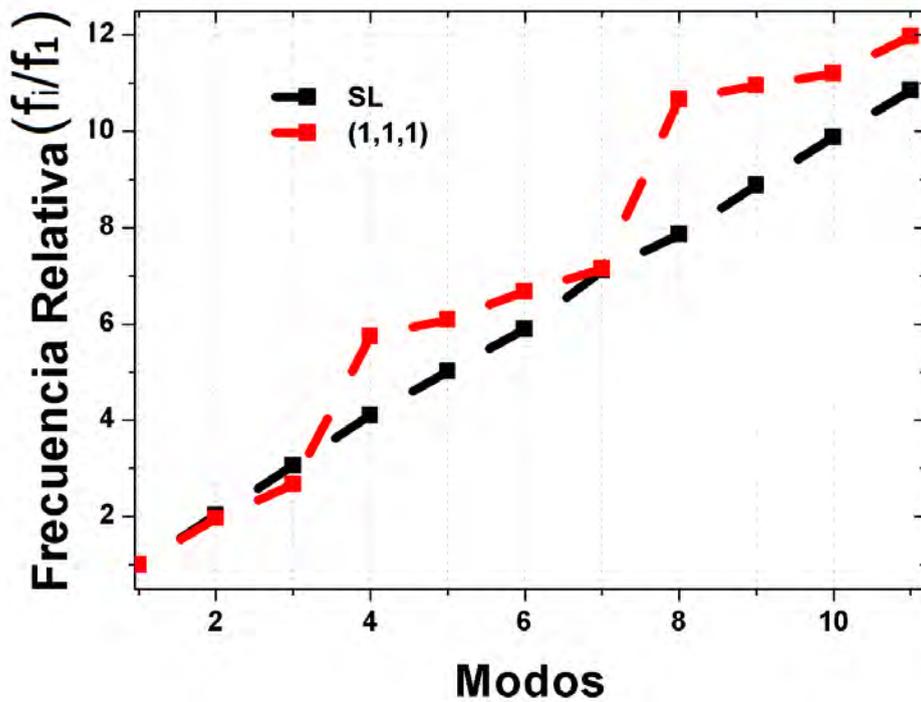


Figura A.4: frecuencias relativas en función del modo del SMC3.



# Bibliografía

- [1] Kinsler and Frey. *Fundamentals of Acoustics*. Jhon Wiley Sons, 2000.
- [2] Arthur H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Dover Publications, 1990.
- [3] A. A. Samarskii A. N. Tikhonov. *Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications, 2011.
- [4] C. R. Stia B. J. Gómez, C. E. Repetto and R. Welti. Oscillations of a string with concentrated masses. *JOURNAL OF PHYSICS*, Vol.28, 2007.
- [5] C. R. Stia B. J. Gómez, C. E. Repetto and R. Welti. Acoustic and quantum-mechanical analogues to the problem of a loaded string fixed at both ends. *Eur. J. Phys.*, Vol.30, 2009.
- [6] Douglas Brown. Tracker: Video analysis and modeling tool, Julio 2017. URL <http://physlets.org/tracker/>.
- [7] William M. Hartmann. *Signals, Sound and Sensation*. Springer, 1998.