



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA  
INSTITUTO DE GEOFÍSICA

Atenuación de múltiples en el algoritmo  
de Migración Reversa en Tiempo.

**T E S I S**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:  
JAVIER ABREU TORRES

DIRECTOR DE TESIS  
JOSÉ CARLOS ORTIZ ALEMÁN  
INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Septiembre de 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Recompile23 estyleempty

*Todo tiene su tiempo.*

**Eclesiastés**

Agradezco a mis padres porque desde niño me enseñaron el camino de la fé, que aunque en muchas ocasiones es difícil seguirlo,es sin lugar a dudas el único camino que es seguro.

Agradezco especialmente al Dr. Carlos Ortiz por compartirme sus experiencias en el área de la investigación. Además de hacer muy amena la experiencia de la elaboración de la tesis.

Agradezco a mis sinodales que a pesar de su horario tan apretado, me sugirieron que realizara algunas modificaciones a este trabajo.

Agradezco al CONACYT por haberme otorgado la beca de maestría con el número de CVU 678864

# Índice general

<b>Índice</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Justificación</b>	<b>V</b>
<b>Objetivos</b>	<b>VI</b>
Objetivo general . . . . .	VI
Objetivos específicos . . . . .	VI
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>7</b>
1.1. Ecuación de Onda . . . . .	7
1.2. Diferencias finitas . . . . .	8
1.3. Fronteras absorbentes . . . . .	11
1.4. Migración Reversa en Tiempo . . . . .	14
1.5. Inversión de forma de onda completa . . . . .	16
1.6. Reflexiones múltiples . . . . .	17
<b>2. Metodología</b>	<b>21</b>
2.1. Datos sintéticos . . . . .	21
2.1.1. Modelos de velocidad y densidad . . . . .	21
2.1.2. Fuente . . . . .	23
2.1.3. Solución de la ecuación de onda mediante diferencias finitas . . . . .	23
2.1.4. Aplicación de condiciones de frontera absorbente . . . . .	24
2.1.5. Comparación con la solución analítica . . . . .	25

2.1.6. Obtención de los datos observados . . . . .	27
2.1.7. Resultados de la propagación directa . . . . .	30
2.1.8. Propagación reversa en tiempo y explicación previa de la condición de imagen. . . . .	34
2.1.9. Kernels de sensibilidad (resultados preliminares) . . . . .	36
2.2. Aplicación en datos reales . . . . .	36
<b>3. Resultados</b>	<b>39</b>
3.1. Datos observados con múltiples. . . . .	40
3.1.1. Una fuente. . . . .	40
3.1.2. Fuentes simultáneas. . . . .	42
3.2. Datos observados sin múltiples. . . . .	45
3.2.1. Una fuente. . . . .	45
3.2.2. Fuentes simultáneas. . . . .	46
3.3. Diferencia entre los kernels . . . . .	48
3.4. Datos reales. . . . .	49
<b>Conclusiones y discusión</b>	<b>51</b>

## Resumen

Usando los modelos de velocidad de onda P y densidad de una región que representa un área con fuerte tectonismo salino del norte del Golfo de México, se simuló un levantamiento de datos sísmicos. Para este objetivo, se implementó un código en Fortran que resuelve las ecuaciones de la elastodinámica mediante diferencias finitas. Adicionalmente, se agregaron una función que simula una fuente explosiva, y ABC (*Absorbing Boundary Conditions*) de tipo CPML (*Convolutional Perfectly Matched Layer*), y condiciones de superficie libre en la parte superior de los modelos. Los datos de salida representan los datos observados.

Posteriormente se realizó una migración RTM (*Reverse Time migration*), para este objetivo se resolvieron primeramente las ecuaciones de la elastodinámica en tiempo directo (empleando una fuente explosiva), y tiempo reverso (empleando como fuente la diferencia entre los datos sintéticos y observados); para lo cual se aplicaron ABC en el lugar de la superficie libre con la intención de que los múltiples asociados a ella se atenúen. A continuación, para obtener los kernels, se realizó una correlación entre el campo de ondas calculado en tiempo directo y el del tiempo reverso, para este objetivo se emplearon datos observados con y sin múltiples.

Adicionalmente se realizaron comparaciones entre los kernels obtenidos con una sola fuente y fuentes simultáneas. Finalmente se realizaron todos estos pasos en datos reales del sur del Golfo de México.

## Abstract

Using the P-wave velocity and density models of a region that represents an area with strong salt tectonics in the north of the Gulf of Mexico, it was simulated a seismic data acquisition. For this purpose, it was implemented a Fortran code that solves the elastodynamic equations applying finite differences. Furthermore, there were added a function that simulate an explosive source, ABC (*Absorbing Boundary Conditions*) of the CPML type (*Convolutional Perfectly Matched Layer*), and free-surface conditions. The data obtained in this process are considered the observed data.

Then, the RTM algorithm (*Reverse Time Migration*) was applied. First, were solved the elastodynamic equations in forward and reverse time. In order to perform this stage, it was applied an ABC of the CPML type in the place of the free- surface, to attenuate the multiples.

After that, a correlation between the forward and reverse time wave fields was calculated. For comparison purposes, there were used observed data with and without multiples. Furthermore, these stages were repeated for simultaneous sources, and for real data.

## Justificación

Existen muchas oportunidades exploratorias en el Golfo de México, una gran cantidad de ellas en estructuras complejas. En la parte mexicana del Golfo se encuentran dos grandes regiones donde el problema del tectonismo salino complica enormemente la exploración sísmica: la región conocida como la Cuenca salina del Istmo (figura 2), y la región que comprende al llamado cinturón plegado de Perdido y las Cordilleras Mexicanas. Uno de los retos más importantes en la exploración sísmica actual es conseguir imágenes del subsuelo con una resolución apropiada para una correcta interpretación.

La remoción de múltiples asociados a la cima y la base de la sal alóctona es uno de los retos por resolver, debido a la incertidumbre adicional que aportan para la definición de la geometría real de los cuerpos de sal a partir de los datos sísmicos.

En los años recientes se han realizado esfuerzos para obtener imágenes que faciliten la interpretación geológica en estas regiones. El algoritmo RTM, que ha ganado relevancia en años recientes gracias al avance del cómputo científico, genera múltiples por sí mismo. En este trabajo, se propone una forma de atenuar los múltiples presentes en las imágenes del subsuelo desde el mismo algoritmo RTM, lo cual supone una mejora a la hora de interpretar las estructuras existentes en el subsuelo.



# Objetivos

## Objetivo general

Implementar dentro del algoritmo de migración RTM una frontera absorbente tipo CPML en el lugar donde se encuentra la superficie libre, con la intención de que los múltiples de superficie libre se atenúen, y de esta forma obtener imágenes del subsuelo de mejor calidad para facilitar la interpretación geológica.

## Objetivos específicos

- Estudiar si el hecho de filtrar la onda directa de la propagación directa del campo de ondas en el algoritmo RTM, proporciona una mejoría en las imágenes.
- Analizar diversas maneras de normalizar la amplitud de los campos de ondas de la propagación directa y reversa en tiempo, y si estas influyen en el resultado final de la imagen.
- Aplicar el algoritmo RTM propuesto a modelos sintéticos y reales; revisar si la imagen mejora y en este caso, estimar el porcentaje de mejoría para el modelo sintético y el real.
- Identificar el mejor kernel que produzca imágenes que faciliten la interpretación.

# Introducción

*Ve a la hormiga, oh perezoso, mira sus caminos y se sabio. La cual no teniendo capitán, ni gobernador, ni señor, prepara en el verano su comida, y recoge en el tiempo de la siega su mantenimiento.* **Proverbios**

---

## Exploración del subsuelo

La geofísica es la disciplina que aplica los principios de la física al estudio de las propiedades del interior de la Tierra. Para ello es necesario realizar mediciones desde del entorno de la superficie, las cuales están influenciadas por la distribución espacial de dichas propiedades dentro del subsuelo. El análisis de esas mediciones nos lleva a comprender como varían vertical y lateralmente los parámetros del subsuelo.

Las mediciones también pueden ser tomadas desde pozos, debido a que esto permite conocer la variación de las propiedades del subsuelo con la profundidad. A pesar de las ventajas que pudiera suponer el tomar mediciones de esta manera, este método de adquisición de datos no puede ser una constante en la exploración, debido al alto costo que conlleva su perforación. Además, la utilidad de la información proporcionada por mediciones en pozos se circunscribe solamente a sus vecindades cercanas. Es por ello que la geofísica basada en mediciones superficiales ha tomado gran relevancia en la determinación de las propiedades del interior de la Tierra.

Existen diferentes métodos geofísicos, los cuales se aplican dependiendo del área de estudio. Entre los parámetros que determinan el método más apropiado, se encuentran: la profundidad, la resolución, los cuerpos geológicos. En muchas ocasiones, con el objetivo de obtener información más completa, se emplean diversos métodos para un mismo levantamiento. El cuadro 1 muestra los métodos mas conocidos, el parámetro que miden, y la propiedad física que resulta del análisis correcto de los parámetros de medición.

En la industria petrolera, el método geofísico más empleado es el sísmico. Las grandes profundidades de estudio, además de la compleja geología que rodea a las trampas petroleras, hacen necesario optar por este método en un levantamiento geofísico.

Método	Parámetro medido	Propiedad física
<b>Sísmico</b>	Tiempos de arribo de ondas reflejadas o refractadas	Densidad y módulos elásticos
<b>Gravimétrico</b>	Variaciones espaciales del campo gravimétrico de la Tierra	Densidad
<b>Magnetométrico</b>	Variaciones espaciales del campo magnético de la Tierra	Susceptibilidad magnética
<b>Eléctrico</b>		
<i>Resistivo</i>	Resistencia de la tierra	Conductividad de la tierra
<i>Polarización inducida</i>	Voltajes de polarización	Capacitancia eléctrica
<i>Auto-potencial</i>	Potenciales eléctricos	Conductividad eléctrica
<i>Electromagnético</i>	Respuesta a la radiación electromagnética	Conductividad eléctrica e inductancia
<i>Radar</i>	Tiempos de arribo de los pulsos reflejados	Constante dieléctrica

Cuadro 1: Métodos de prospección Geofísica.

El método sísmico consiste en generar una onda sísmica mediante fuentes artificiales tales como: pistolas de aire, explosivos, camiones de vibroseis; la cual se propaga a través de los estratos del subsuelo. Cuando esta onda llega a algún punto en el cual exista un contraste de impedancias (producto de la densidad por la velocidad de propagación), parte de la energía se refleja de nuevo hacia la superficie, la cual se registra en los receptores. Mientras más fuerte es el contraste de impedancias, la amplitud de la onda reflejada es más elevada.

La señal obtenida por los receptores, es conocida como un sismograma, existe uno por cada receptor. Los sismogramas se deben acomodar de acuerdo a los objetivos de cada proyecto. La figura 1 muestra los diversos tipos de registros sísmicos que se pueden encontrar. La primera figura de izquierda a derecha, muestra un registro de fuente común; este tipo de registros, es el primero que se obtiene en un levantamiento sísmico. La segunda figura, representa a un registro con un receptor común; en el cual se plasma el registro de varias fuentes por medio de un solo receptor. Consecuentemente, se encuentra un registro de offset común, en el cual las distancias entre los receptores y las fuentes son las mismas, este hecho ocasiona que los tiempos de arribo sean los mismos cuando se tiene un reflector plano. Después, se encuentra un registro de punto medio común, en el cual todos los rayos se reflejan en el mismo punto. Finalmente, se aprecia un registro de profundidad común, el tiene el mismo concepto que un registro de punto medio común, solo que en este caso el reflector es inclinado. Para este trabajo, nos enfocaremos

en los registros de fuente común.

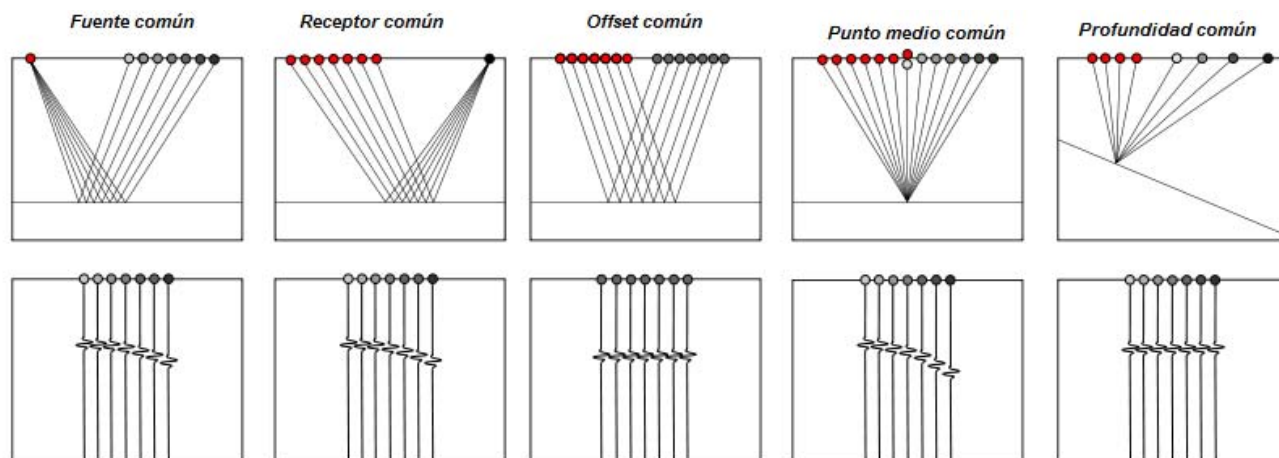


Figura 1: Diversas formas de agrupar los registros sísmicos.

El procesamiento de los datos sísmicos de reflexión, requiere un elevado uso de recursos computacionales, esto es debido a que existen diversos eventos que enmascaran los eventos primarios, como las reflexiones múltiples y las difracciones. Además, muchas veces es necesario realizar procesos como la deconvolución y el apilamiento, y siempre es necesario efectuar la migración. Este último proceso es en el que nos enfocaremos más adelante, y su correcta implementación es uno de los grandes retos en la industria petrolera.

Los domos salinos son cuerpos intrusivos muy estudiados en la industria petrolera, debido a que forman una trampa natural para los hidrocarburos. Estas estructuras, están compuestas por el mineral halita ( $\text{NaCl}$ ), las cuales penetran a través de grandes espesores de rocas sedimentarias cuando migran hacia la superficie. Se localizan en muchas partes de México, como en Chihuahua, Nuevo León y el sureste de México [García, 1983]. El espesor de los domos salinos de la región del Golfo varía aproximadamente entre 1.5 a 5 kilómetros, mientras que las crestas de los domos someros se encuentran a 1 kilómetro de profundidad [Hamlin, 2006].

La cuenca salina del sureste de México es la más importante desde la perspectiva económica. Ésta se localiza al sureste del estado de Veracruz, en los estados de Tabasco, norte de Chiapas y suroeste de Campeche, además de abarcar porciones marinas en el Golfo de México. En esta región se han realizado estudios exploratorios y se han identificado sistemas petroleros (roca sello, almacenadora y generadora), asociados a domos salinos. Por ejemplo, los domos de Sánchez Magallanes, Abkatun, Kanaab, Tonalá y Amoca, los cuales se localizan en el sector oriental de la cuenca, y se caracterizan por contener hidrocarburos ligeros y gas seco. Para darse una idea de la importancia de esta zona para la economía mexicana, la figura 2 muestra el área que abarca la cuenca salina del sureste.

De acuerdo a [Jones and Davison, 2014a], las estructuras salinas generalmente presentan ciertas características que ocasionan grandes desafíos en el proceso de migración. Entre estas propiedades, se pueden distinguir:

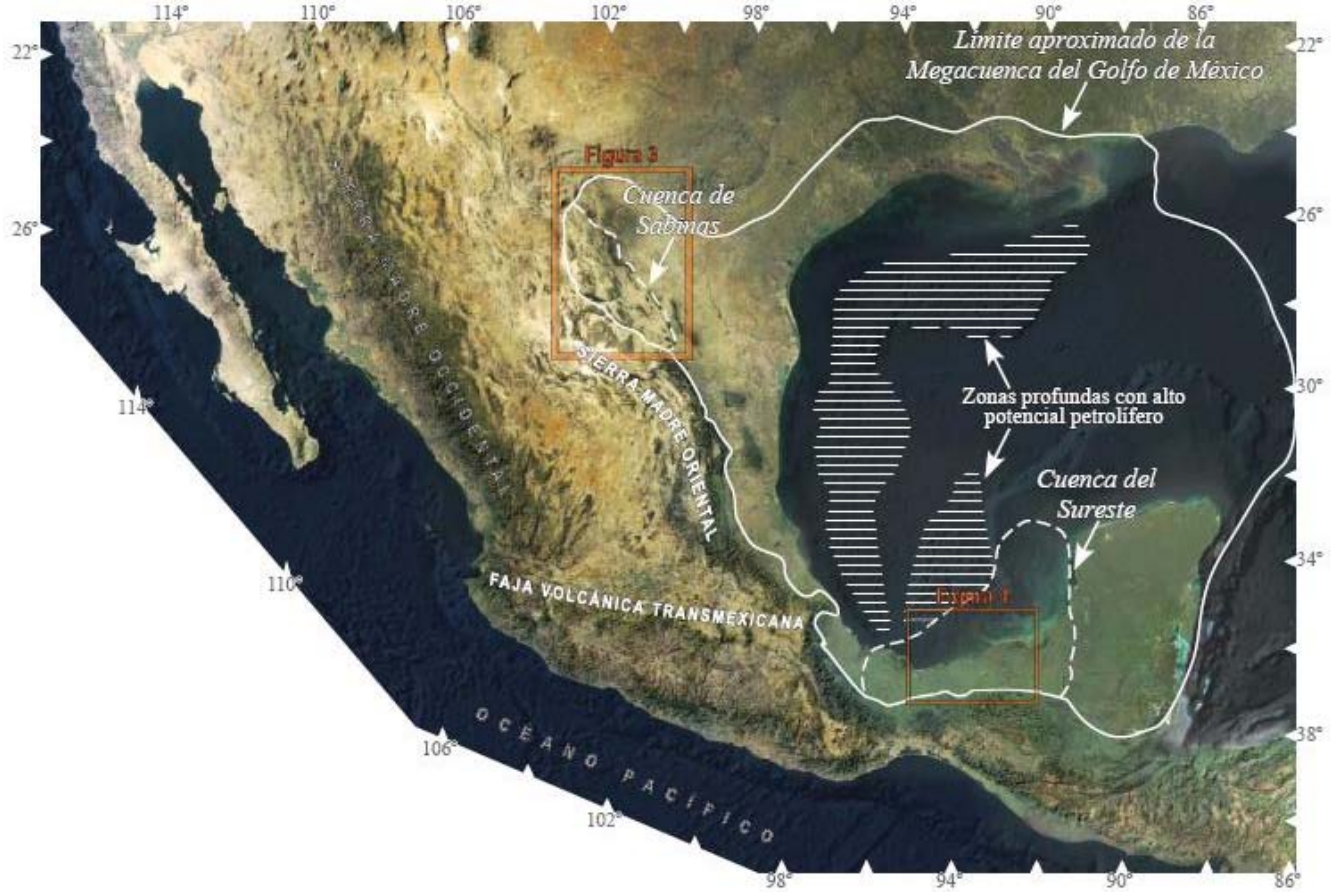


Figura 2: Extensión de la cuenca salina del sureste. Tomada de [García, 1983].

- **Forma irregular:** Los flancos con pendiente muy abrupta y la forma irregular de estos cuerpos, provoca que ciertos algoritmos de migración no reproduzcan de forma adecuada las interfaces de la cima y la base de la sal.
- **Capas superiores:** Con frecuencia unida a la cima de la sal, se encuentra una capa de roca denominada *cap rock*, la cual se puede confundir con los estratos sedimentarios adyacentes produciendo un modelo de velocidad erróneo.
- **Altas velocidades:** El mineral halita tiene una velocidad de propagación de onda sísmica de compresión que ronda los  $4500[m/s]$ , la cual contrasta drásticamente con los estratos adyacentes, provocando dificultad al observar debajo de la sal y en los estratos contiguos.

Las propiedades anteriores producen varios artefactos, como las reflexiones múltiples atribuidas a la cima y la base de la sal, que dificultan la interpretación de la imagen sísmica debido a la inclusión de interfaces espurias.

A través de los años, la energía múltiple se ha considerado un tema crucial en la obtención de imágenes sísmicas que faciliten la interpretación geológica, el cual puede ser tratado mediante dos aproximaciones. La primera (y más

difundida), es considerar a los múltiples como eventos *no deseados* los cuales interfieren con los primarios, haciendo que las imágenes migradas presenten dificultades a la hora de interpretar. No obstante, en los años recientes ha surgido una vertiente del tema que considera a los múltiples como información adicional que podría mejorar las imágenes sísmicas (véase [Liu et al., 2015], [Youn and Zhou, 2001]), esta idea se basa en el hecho de que los múltiples viajan por caminos diferentes a los primarios. Además, los múltiples pueden contribuir a obtener amplitudes más precisas y localizar fronteras geológicas heterogéneas [Youn and Zhou, 2001].

En la primera aproximación, dos propiedades de los múltiples han determinado la naturaleza del proceso de atenuación: el moveout (tiempo de retraso) y la predictibilidad [Berkhout and Verschuur, 2006]. Algunos de los métodos que aprovechan el moveout de los múltiples, incluyen el uso de la transformada Radon, la cual consiste en la transformación de los datos del dominio offset- tiempo al dominio  $\tau - p$  [Foster and Mosher, 1992], donde  $\tau$  es el tiempo de arribo cuando el offset es cero,  $p$  es un parámetro de rayo. Los múltiples con suficiente moveout respecto a los primarios se distinguen fácilmente en este dominio, por lo que pueden ser filtrados sin problemas. También, es posible distinguir los múltiples con diferente moveout de los primarios en el dominio  $f - k$ , donde  $f$  es la frecuencia y  $k$  el número de onda.

Sin embargo, cuando hay presencia de aguas someras, y existen cuerpos con velocidades de propagación elevadas, el moveout de los múltiples y los primarios puede ser muy similar. En consecuencia, los métodos que se enfocan en la predictibilidad son más convenientes. El método SRME (*Surface Related Multiple Elimination*), es el método basado en la predictibilidad más conocido. Este método se basa en la idea de que un múltiple está compuesto por dos o más primarios y que es posible obtener datos libres de múltiples únicamente al aplicar la convolución repetidamente a los datos observados [Verschuur and Berkhout, 1992].

Recientemente se han desarrollado algunos trabajos con la segunda aproximación. Estos trabajos consideran que los datos originales (primarios + múltiples), pueden ser migrados con mejores resultados que los datos sin múltiples. De acuerdo a [Liu et al., 2015], los campos de onda de las fuentes y receptores son separados en ondas ascendentes y descendentes, posteriormente una nueva condición de imagen se aplica a estos campos separados. El trabajo de [Youn and Zhou, 2001], también aplica una condición de imagen diferente basada en el operador laplaciano.

Este trabajo aborda el problema de los múltiples de acuerdo a la primera aproximación ya que se considera a estos eventos como ruido. A diferencia de los trabajos anteriores no se explota una propiedad particular del múltiple para su atenuación. Se aplica una propiedad de las fronteras absorbentes aplicadas en el dominio computacional, uno de los trabajos que aplica esta idea es [Fletcher et al., 2006].



# Capítulo 1

## Antecedentes

*Las cosas que se ven son temporales, pero las que no se ven son eternas.* 2

*Corintios*

---

### 1.1. Ecuación de Onda

El método sísmico de reflexión se sustenta en la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a};$$

que indica que la aceleración  $\vec{a}$  de una partícula es directamente proporcional a la fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre ella e inversamente proporcional a la masa inercial  $m$  de la partícula.

Dividiendo entre el volumen  $V$  de la partícula, y representando la aceleración como  $\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ , donde  $\vec{u}$  representa el desplazamiento de la partícula y  $t$  el tiempo; se puede escribir que:

$$\frac{\vec{F}}{V} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad de la partícula. Es importante recordar que los esfuerzos tienen unidades de presión, por lo tanto en un sistema de dos dimensiones donde  $x$  representa la dirección horizontal y  $z$  la dirección vertical, la fuerza que actúa en dirección  $x$ , se escribe:  $\frac{F_x}{V} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$

Entonces, se puede escribir la ecuación 1.1 como:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{zz}$  representan los esfuerzos de compresión, mientras que  $\tau_{xz}$  representa el esfuerzo de cizalla.



Por otra parte, las deformaciones de compresión y cizalla se expresan según [Stein and Wysession, 2009] de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Además de acuerdo a [Stein and Wysession, 2009], la ley de Hooke por propiedades de simetría se expresa  $\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ , donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los coeficientes de Lamé; esta ecuación relaciona los esfuerzos con las deformaciones. Por lo tanto sustituyendo la ley de Hooke en las ecuaciones 1.3, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Por último, al expresar las ecuaciones 1.2 en términos de la velocidad y al derivar las ecuaciones 1.4 respecto al tiempo, se obtiene según [Virieux, 1986] el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Las ecuaciones 1.5 son las ecuaciones de la elastodinámica expresadas en términos de las velocidades y los esfuerzos. Es importante agregar que en un medio real es más fácil medir las velocidades de propagación de ondas P y S, (representadas respectivamente mediante  $\alpha$  y  $\beta$ ), que los coeficientes de Lamé; por lo que es conveniente escribir los coeficientes de Lamé como sigue:

$$\mu = \rho \beta^2, \quad \lambda = \rho \alpha^2 - 2\mu,\tag{1.6}$$

por lo que el fenómeno físico que describen las ecuaciones 1.5 es una propagación de ondas  $P - SV$ .

## 1.2. Diferencias finitas

De acuerdo a [Mitchell and Griffiths, 1980], las diferencias finitas es un método numérico usado en la solución de ecuaciones diferenciales. El método consiste en aproximar el dominio en el cual la variable independiente está

definida mediante celdas finitas en las cuales se calcula la solución.

Las diferencias finitas se sustentan en las series de Taylor, definidas como sigue:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(l)^n}{n!} (k-l)^n,$$

donde  $f$  es una función continua y de clase  $c^\infty$ . La variable independiente es  $k$ ,  $n$  es el orden de aproximación, y  $l$  es un valor de la variable independiente donde la función es conocida. Además  $f(l)^n$  representa la derivada de orden  $n$  evaluada en el punto donde la función es conocida.

Haciendo que  $l = x_i$  y  $k = x_{i-1}$ , y  $n = 1$ , se puede escribir que:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f^1(x_i) [x_{i-1} - x_i] + E$$

donde  $E$  es el error por truncamiento. Además haciendo que  $x_{i-1} - x_i = \Delta x$ , donde  $\Delta x$  es el intervalo de muestreo, se puede expresar lo siguiente:

$$f^1(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{\Delta x} + E. \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 representa la forma general de las diferencias finitas hacia atrás de primer orden. Se puede apreciar que se ha aproximado la primera derivada de la función  $f$  con un orden de aproximación de 1. Dependiendo del valor de  $k$  y  $c$ , se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} f^1(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + E, \\ f^1(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + E. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dentro de las ecuaciones 1.8, la primera representa a las diferencias finitas hacia adelante, mientras que la segunda las centradas. Ambas son de primer orden como en la ecuación 1.7.

El error por truncamiento  $E$ , depende del intervalo de muestreo. Para las diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás,  $E$  decrece a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ , mientras que en la diferencias finitas centradas decrece cuando  $\Delta x^2 \rightarrow 0$ .

Habiendo definido las principales formas de representar una ecuación diferencial parcial con diferencias finitas de primer orden, se procede a expresar las ecuaciones 1.5 con diferencias finitas centradas de acuerdo a lo escrito por [Virieux, 1986]:

$$\begin{aligned} v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} &= v_{x(i,j)}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho(i,j)} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tau_{xx(i,j+\frac{1}{2})}^k - \tau_{xx(i,j-\frac{1}{2})}^k \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \tau_{xz(i+\frac{1}{2},j)}^k - \tau_{xz(i-\frac{1}{2},j)}^k \right) \right), \\ v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} &= v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \tau_{zz(i+1,j+\frac{1}{2})}^k - \tau_{zz(i,j+\frac{1}{2})}^k \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tau_{xz(i+\frac{1}{2},j+1)}^k - \tau_{xz(i+\frac{1}{2},j)}^k \right) \right), \\ \tau_{xx(i,j+\frac{1}{2})}^{k+1} &= \tau_{xx(i,j+\frac{1}{2})}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \lambda_{(i,j+\frac{1}{2})} + 2\mu_{(i,j+\frac{1}{2})} \right) \left( v_{x(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta z} \lambda_{(i,j+\frac{1}{2})} \left( v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{zz}^{k+1}(i,j+\frac{1}{2}) &= \tau_{zz}^k(i,j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \lambda(i,j+\frac{1}{2}) + 2\mu(i,j+\frac{1}{2}) \right) \left( v_{z(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda(i,j+\frac{1}{2}) \left( v_{x(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right), \\
\tau_{xz}^{k+1}(i+\frac{1}{2},j) &= \tau_{xz}^k(i+\frac{1}{2},j) + \mu(i+\frac{1}{2},j) \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right),
\end{aligned}$$

donde  $i, j, k$  representan los contadores en las direcciones vertical, horizontal y del tiempo respectivamente, mientras que  $\Delta z, \Delta x, \Delta t$  son los intervalos de muestreo de  $z, x$  y el tiempo respectivamente. La figura 1.1, muestra la ubicación de las incógnitas de las ecuaciones 1.9. Por otro lado, las diferencias finitas temporales se calculan en el esquema numérico de [Virieux, 1986] mediante mallas escalonadas de acuerdo a lo que muestra la figura 1.2.

Por otro lado, para que exista estabilidad en la solución de la formulación explícita en diferencias finitas de la ecuación de onda (ecuaciones 1.9), es necesario que se cumpla lo siguiente [Virieux, 1986]:

$$\alpha \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} < 1, \quad (1.10)$$

esta ecuación, se conoce como la condición de estabilidad, se puede notar su independencia de la velocidad de onda  $S$ .

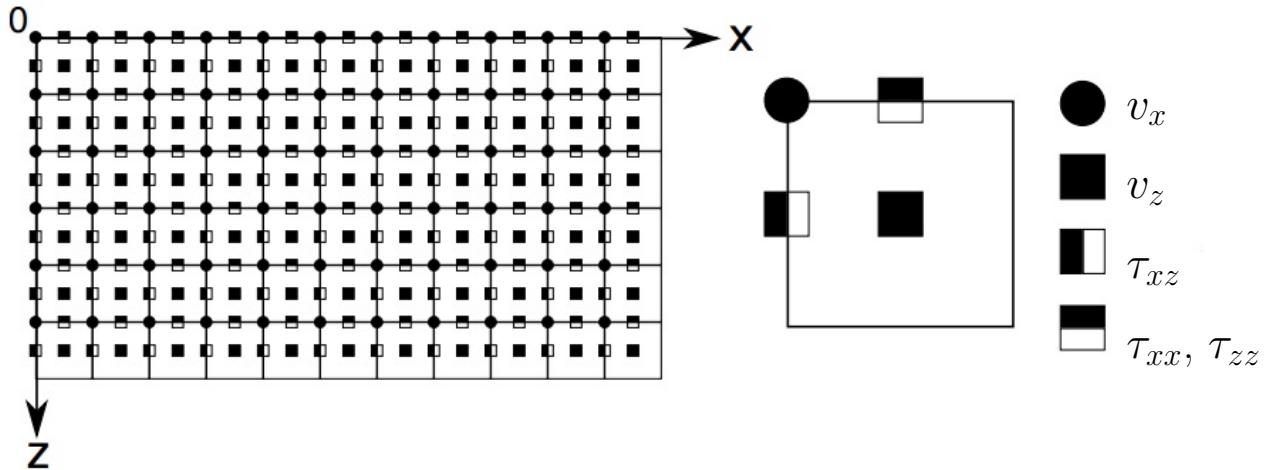


Figura 1.1: Discretización del dominio computacional para la implementación de diferencias finitas de acuerdo a lo propuesto por [Virieux, 1986].

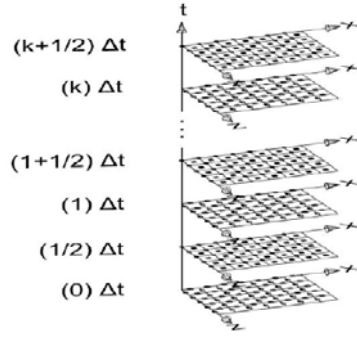


Figura 1.2: Las mallas ubicadas en los tiempo enteros contienen los esfuerzos  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{zz}$  y  $\tau_{xz}$ , mientras que en las mitades se localizan las velocidades  $v_x$  y  $v_z$ .

### 1.3. Fronteras absorbentes

En la simulación numérica de la propagación de ondas mediante métodos discretos espaciales, siempre existe la necesidad de eliminar los eventos espurios que son generados por las fronteras de la malla numérica [Kosloff and Kosloff, 1986].

En los últimos años se han aplicado numerosas técnicas para atenuar las reflexiones producidas por las fronteras artificiales de la malla computacional, entre ellas se encuentran: capas de amortiguamiento o zonas esponja, condiciones paraxiales, condiciones optimizadas, método de descomposición de eigenvalores, condiciones de absorción de fracción continua, condiciones de absorción exactas en un contorno esférico, y operadores asintóticos locales y no locales [Komatitsch and Martin, 2007]. No obstante, generalmente estas técnicas presentan problemas para absorber las ondas que presentan reflexiones con incidencia tangencial o con energía de baja frecuencia en todos los ángulos de incidencia.

Las condiciones de frontera absorbente de tipo PML (*Perfectly Matched Layer*) por sus siglas en inglés, surgieron primeramente para obtener la solución numérica de las ecuaciones de Maxwell; la PML teóricamente permite absorber las ondas electromagnéticas con una reflexión tan pequeña como sea requerida [Berenger, 1994].

En la simulación de ondas sísmicas las condiciones de frontera PML fueron aplicadas con éxito por [Liu and Tao, 1997]. La implementación clásica de la PML en la solución numérica de las ondas sísmicas, se formula en términos de las velocidades y esfuerzos [Collino and Tsogka, 1998] para evitar derivadas de segundo orden; por lo tanto estas condiciones no pueden ser usadas en esquemas numéricos que contengan la ecuación de onda en términos de los desplazamientos y esfuerzos (como la mayoría de los métodos en diferencias finitas). No obstante en los años recientes se han hecho esfuerzos para formular las condiciones PML en términos de los desplazamientos [Komatitsch and Martin, 2007].

La PML consiste en generar un dominio adyacente al dominio regular (dominio de la PML). Supongamos que la PML inicia en  $x \geq 0$ , mientras que el dominio regular se define en  $x < 0$ . También se define un perfil de amortiguamiento  $d_x$ , el cual tiene un valor de 0 en el dominio regular y un valor  $> 0$  dentro de la PML (el subíndice

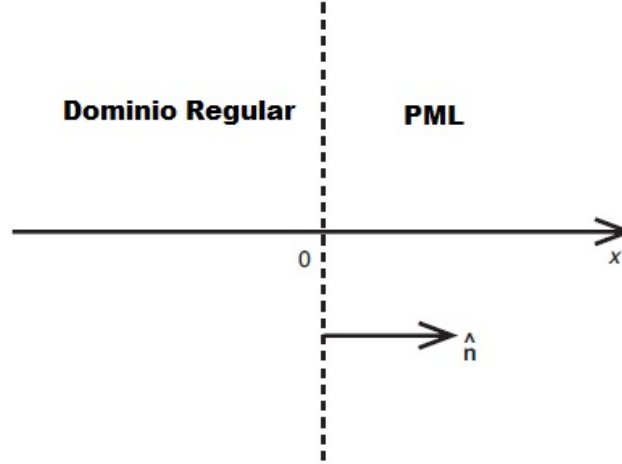


Figura 1.3: Representación gráfica de una frontera absorbente PML. Modificada de [Komatitsch and Martin, 2007].

indica que este perfil se define a lo largo del eje  $x$  ([Collino and Tsogka, 1998] y [Komatitsch and Martin, 2007]). La figura 1.3 ilustra lo que se acaba de describir.

En el dominio PML se realiza un cambio de variable de la siguiente forma:

$$\tilde{x}(x) = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d_x(s) ds, \quad (1.11)$$

donde  $\tilde{x}$  es una variable compleja,  $i = \sqrt{-1}$ , y  $\omega$  es la frecuencia angular.

A partir de 1.11, se puede aplicar la diferencial de  $\tilde{x}$ , obteniendo que:

$$\partial_{\tilde{x}} = \frac{i\omega}{i\omega + d_x} \partial_x = \frac{1}{S_x} \partial_x, \quad (1.12)$$

donde

$$S_x = \frac{i\omega + d_x}{i\omega} = 1 + \frac{d_x}{i\omega} \quad (1.13)$$

La condición de frontera CPML (*Convolutional Perfectly Matched Layer*), al igual que la condición PML fue desarrollada primeramente para el problema de la solución numérica de las ondas electromagnéticas [Roden and Gedney, 2000]. La idea principal de la CPML, consiste en hacer más general a  $S$ , la cual se definió en la ecuación 1.14. El propósito de esta generalización, es asegurar la absorción en ángulos de incidencia tangenciales.

La definición de  $S$  en la CPML se escribe como:

$$\begin{aligned} S_x &= \kappa_x + \frac{d}{\alpha_x + i\omega}, \\ \frac{1}{S_x} &= \frac{1}{\kappa_x} - \frac{d_x}{\kappa_x^2(d_x/\kappa_x + \alpha_x) + i\omega}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde la función de la variable  $\kappa$  es atenuar las ondas electromagnéticas evanescentes [Roden and Gedney, 2000].

Ahora se define la transformada de Fourier inversa de  $\frac{1}{S}$  de la segunda ecuación 1.14 como sigue:

$$\overline{S_x}(t) = \frac{\delta(t)}{\kappa_x} - \frac{dH(t)e^{(-d_x/\kappa_x + \alpha_x)t}}{\kappa_x^2}, \quad (1.15)$$

donde  $\delta(t)$  es la delta de Dirac, y  $H(t)$  es la función de Heaviside. Por lo que la ecuación 1.12 se expresa en el dominio del tiempo de la siguiente manera:

$$\partial_{\bar{x}} = \overline{S_x}(t) * \partial_x. \quad (1.16)$$

Sustituyendo la ecuación 1.15 en la ecuación 1.16, se obtiene que:

$$\partial_{\bar{x}} = \frac{1}{\kappa_x} \partial_x + \psi_x^n \quad (1.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \zeta_x(t) &= -\frac{d_x}{\kappa_x^2} H(t) e^{(d_x/\kappa_x + \alpha_x)t}, \\ \psi_x^n &= (\zeta_x(t) * \partial_x)^n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

El término  $\psi_x^n$  representa la convolución de la función  $\zeta(t)$  con la diferencial  $\partial_x$  en cada paso de tiempo  $n$ , este término se define dentro del intervalo  $m\Delta t$  y  $(m+1)\Delta t$  debido a la definición del esquema numérico de las diferencias finitas en tiempo (véase figura 1.2), por lo tanto:

$$\begin{aligned} \psi_x^n &= \sum_{m=0}^{n-1} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \partial_x^{n\Delta t - \tau} \zeta_x(\tau) d\tau \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \partial_x^{n-(m+1/2)} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \zeta_x(\tau) d\tau \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} Z_x(m) \partial_x^{n-(m+1/2)}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde

$$Z_x(m) = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \zeta_x(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Sustituyendo 1.18 en 1.20 y resolviendo la integral, se obtiene que:

$$Z_x(m) = a_x e^{(d_x/\kappa_x + \alpha_x)m\Delta t}, \quad (1.21)$$

donde

$$\begin{aligned} b_x &= e^{(d_x/\kappa_x + \alpha_x)\Delta t}, \\ a_x &= \frac{d_x}{\kappa_x(d_x + \kappa_x\alpha_x)} (b_x - 1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Posteriormente se aplica la convolución recursiva, es decir para cada paso de tiempo se calcula el término  $\psi_x^n$  usando la convolución calculada en el paso de tiempo anterior  $\psi_x^{n-1}$  de acuerdo a lo que muestra la figura 1.2. Este término se calcula de la siguiente forma:

$$\psi_x^n = b_x \psi_x^{n-1} + a_x \partial_x^{n+1/2}. \quad (1.23)$$

Finalmente, la expresión de las derivadas en el dominio complejo de la CPML, se expresa de la siguiente forma:

$$\partial_{\bar{x}} = \frac{1}{\kappa_x} \partial_x + \psi_x, \quad (1.24)$$

lo que indica la relativa simplicidad de implementar las condiciones CPML, únicamente se requiere agregar el término convolutivo  $\psi_x$ . Para el caso de las ondas sísmicas, se ha estudiado que el vector  $\kappa_x$  no aporta cambios significativos al algoritmo CPML, por lo general  $\kappa_x = 1$  [Roden and Gedney, 2000].

Además, es necesario resaltar que lo descrito anteriormente se aplica también para las otras direcciones  $y$  o  $z$ , y en las regiones de las esquinas sólo se requiere sumar las contribuciones de los términos convolutivos  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_z$ .

## 1.4. Migración Reversa en Tiempo

La migración reversa en tiempo o RTM (*Reverse Time Migration*) por sus siglas en inglés, es un proceso que intenta construir una imagen de las interfaces del interior de la Tierra a partir de los datos registrados [Jones and Davison, 2014b]. La idea de los reflectores explosivos, en la cual se basa el algoritmo RTM, indica que la trayectoria que siguen los rayos del campo de ondas de la fuente, es la misma que la de los rayos del campo de ondas de los receptores, y que deben coincidir en algún punto del tiempo [Claerbout et al., 1985]. Los primeros trabajos fueron desarrollados por [Baysal et al., 1983], donde se afirma que existe la posibilidad de implementar la RTM en regiones de geología compleja donde existen reflectores muy inclinados y fuertes contrastes de velocidad. Debido al avance de la tecnología computacional, el estudio de la RTM ha tenido un auge en los años recientes, ya que es un algoritmo que consume muchos recursos de cómputo. De acuerdo a [Chang and McMechan, 1987], existen dos formas básicas: para secciones apiladas y no apiladas. Además, los datos observados pueden ser procesados previamente con el fin de atenuar los múltiples [Zhang and Schuster, 2013].

Según el trabajo de [Chang and McMechan, 1986] y [Jiang et al., ] existen 3 pasos principales en el algoritmo de la RTM, los cuales son: modelado directo, extrapolación del campo de ondas de los receptores, aplicación de la condición de imagen.

- Modelado directo:** Consiste en calcular la solución numérica de las ecuaciones de la elastodinámica, expresadas en las ecuaciones 1.5. Como entrada, se requieren los modelos de velocidad de onda P, onda S, y densidad  $\rho$ ; en caso de que el medio sea acústico, el modelo de velocidad de onda S se anularía en todo el dominio computacional. Estos modelos se pueden obtener a partir de información *a priori* de la región de estudio [Tarantola, 1984].

Para solucionar la ecuación de onda, se puede implementar cualquier tipo de método numérico; en el caso de este trabajo se emplearon las diferencias finitas, cuyas ecuaciones se describen en 1.9. Las condiciones de superficie libre se colocan en las regiones de la malla computacional donde se refleja toda la energía. También es importante aplicar fronteras absorbentes para evitar los efectos de las fronteras artificiales dentro del dominio computacional, para esto se absorbe la energía de las ondas mediante condiciones de no reflexión [Komatitsch and Martin, 2007].

Para simular una propagación real en el medio de estudio, se aplica una fuente explosiva [Virieux, 1986], es conveniente que sea de fase cero [Jiang et al., ] y de una frecuencia baja para evitar dispersión [Virieux, 1986]. Para implementar la fuente en el esquema de las diferencias finitas, se altera el campo de ondas de la fuente  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{S}_i(\bar{x}, t) = \sum_{s=1}^{ns} \mathcal{S}_i(\bar{x}_s, t) + f(t), \quad (1.25)$$

donde  $\mathcal{S}_i(\bar{x}, t)$  es la componente  $i$  del campo de ondas de la fuente en la posición  $\bar{x}$ , y tiempo  $t$ ,  $ns$  es el número de fuentes,  $\bar{x}_s$  es la ubicación de la fuente  $s$ , y  $f(t)$  es la amplitud de la fuente en el tiempo  $t$ . De acuerdo a la figura 1.1, los esfuerzos  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{zz}$  se definen en el mismo nodo, por lo tanto amplitudes iguales son añadidas a  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{zz}$  para simular la excitación de la fuente [Virieux, 1986].

- **Propagación reversa en tiempo:** Al igual que el modelado directo, en este paso los datos de entrada incluyen los modelos de velocidad de ondas P y S, de densidad, las fronteras absorbentes y de superficie libre, y los datos observados.

La diferencia con el modelado directo, radica en que la energía propagada se obtiene a partir de la diferencia entre el campo de ondas de la fuente, obtenidos en el modelado directo, y el campo de ondas de los receptores de acuerdo a [Tromp et al., 2005] (también se le denomina fuente adjunta),

$$\mathcal{F}_i^\dagger(\bar{x}, t) = \sum_{r=1}^{nr} (\mathcal{S}_i(\bar{x}_r, N - n) - \mathcal{R}_i(\bar{x}_r, N - n)) \delta(\bar{x} - \bar{x}_r), \quad (1.26)$$

donde  $\mathcal{F}_i^\dagger$  es la fuente adjunta de la componente  $i$  en la posición  $\bar{x}$  y tiempo  $t$ ,  $nr$  es el total de receptores,  $\bar{x}_r$  es la posición del receptor  $r$ ,  $N$  es el número de muestras en tiempo,  $n$  es el tiempo discreto,  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{R}_i$  son los campos de ondas de la fuentes y receptores en la componente  $i$ , mientras que  $\delta(\bar{x} - \bar{x}_r)$  es la delta de Dirac.

El campo de ondas adjunto  $\mathcal{S}_i^\dagger$  por la propiedad de la función de Green  $G(\bar{x}, \bar{x}', t' - t)$ , se define como [Monteiller et al., 2015]:

$$\mathcal{S}_i^\dagger = \int_0^{t'} \int_V G(\bar{x}, \bar{x}', t' - t) \cdot \mathcal{F}^\dagger(\bar{x}', t) d^3\bar{x}' dt, \quad (1.27)$$

donde  $t'$  indica el tiempo reverso y  $V$  el volumen del modelo.

- **Condición de imagen:** La correlación cruzada proporciona una medida de la similitud entre dos funciones. De acuerdo a [Chattopadhyay and McMechan, 2008], es necesario realizar la propagación directa del campo de ondas de la fuente  $\mathcal{S}$ , y una retropropagación del campo de ondas  $\mathcal{S}^\dagger$ . La imagen se obtiene multiplicando los dos campos de onda en cada paso de tiempo, por lo que las regiones con mayor amplitud a la hora de realizar la correlación cruzada, indican una coincidencia en tiempo y espacio, es decir, señalan la presencia de un reflector.

$$I(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{S}_i(\bar{x}, N + 1 - n) \mathcal{S}_i^\dagger(\bar{x}, n), \quad (1.28)$$



donde  $I$  es la imagen del subsuelo  $N$  es el número de muestras de tiempo, y  $n$  representa a cada elemento del vector tiempo.

Para contrastes pequeños de impedancias, la ecuación 3.1 proporciona buenos resultados. No obstante, en contrastes grandes se genera ruido de baja frecuencia que distorsiona la imagen [Kaelin and Guitton, 2006]. Para solucionar este problema, la imagen se divide entre el cuadrado del campo de ondas  $\mathcal{S}_i$  o  $\mathcal{S}_i^\dagger$ , considerando para una sola fuente:

$$\begin{aligned} I(\bar{x}) &= \frac{\sum_{t=1}^N \mathcal{S}_i(\bar{x}, N+1-n) \mathcal{S}_i^\dagger(\bar{x}, n)}{\sum_{t=1}^N (\mathcal{S}_i^\dagger(\bar{x}))^2}, \\ I(\bar{x}) &= \frac{\sum_{t=1}^N \mathcal{S}_i(\bar{x}, N+1-n) \mathcal{S}_i^\dagger(\bar{x}, n)}{\sum_{t=1}^N (\mathcal{S}_i(\bar{x}))^2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

## 1.5. Inversión de forma de onda completa

El objetivo de la inversión de forma de onda completa, es encontrar los parámetros del modelo estructural  $\mathbf{m}$  que minimicen la función de error, la cual contiene la diferencia entre los datos observados  $\mathcal{R}(\bar{x}_r, t)$  y sintéticos  $\mathcal{S}(\bar{x}_r, t, \mathbf{m})$  [Monteiller et al., 2015]; esta función para una fuente se define como:

$$\chi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{nr} \int_0^T \|\mathcal{S}_i(\bar{x}_r, t, \mathbf{m}) - \mathcal{R}_i(\bar{x}_r, t)\|^2 dt. \quad (1.30)$$

Para realizar una inversión iterativa, es necesario introducir las derivadas de Frechet [Tromp et al., 2005]:

$$\delta\chi = \sum_{r=1}^{nr} \int_0^T (\mathcal{S}_i(\bar{x}_r, t, \mathbf{m}) - \mathcal{R}_i(\bar{x}_r, t)) \cdot \delta\mathcal{S}_i(\bar{x}_r, t, \mathbf{m}) dt, \quad (1.31)$$

donde  $\delta\mathcal{S}_i(\bar{x}_r, t, \mathbf{m})$  son los datos sintéticos (modelo directo) que resultan de la perturbación de los parámetros del modelo  $\mathbf{m}$ . Para expresar la derivada de los datos sintéticos respecto a los parámetros, se recurre a la propiedad de la función de Green y a la aproximación de Born [Tromp et al., 2005][Hudson and Heritage, 1981].

$$\delta\mathcal{S}_i(\bar{x}_r, t) = - \int_0^t \int_V [\delta\rho(\bar{x}) G(\bar{x}_r, \bar{x}, t-t') \cdot \partial_{i'}^2 \mathcal{S}_i(\bar{x}, t') + \nabla G(\bar{x}_r, \bar{x}, t-t') : \delta\mathbf{c}(\bar{x}) : \nabla \mathcal{S}_i(\bar{x}, t')] d^3x dt', \quad (1.32)$$

donde la función de Green de la elastodinámica  $G(\bar{x}_r, \bar{x}, t-t')$ , es definida en la posición de los receptores  $\bar{x}_r$  y los parámetros  $\bar{x}$ , mientras que  $\delta\rho(\bar{x})$  y  $\delta\mathbf{c}(\bar{x})$  son las perturbaciones de la densidad y el tensor de las constantes elásticas.

Aplicando la ecuación que define a la fuente adjunta 1.26 y la que define al campo de ondas adjunto 1.27 en la ecuación 1.32, y considerando un medio elástico e isótropo, se puede escribir lo siguiente véanse [Tromp et al., 2005] [Monteiller et al., 2015]),

$$\delta\chi(\mathbf{m}) = \int_V [K_\rho(\bar{x}) \delta \ln \rho(\bar{x}) + K_\lambda(\bar{x}) \delta \ln \lambda(\bar{x}) + K_\mu(\bar{x}) \delta \ln \mu(\bar{x})] d^3\bar{x}, \quad (1.33)$$

donde las derivadas de Fréchet respecto a la densidad y a las constantes de Lamé son:

$$\begin{aligned}
 K_\rho(\bar{x}) &= - \int_0^T \rho(\bar{x}) u^\dagger(\bar{x}, T-t) \cdot \partial_t^2 u(\bar{x}, t) dt, \\
 K_\lambda(\bar{x}) &= - \int_0^T \lambda(\bar{x}) \nabla \cdot u^\dagger(\bar{x}, T-t) \nabla \cdot u(\bar{x}, t) dt, \\
 K_\mu(\bar{x}) &= -2 \int_0^T \mu(\bar{x}) \nabla u^\dagger(\bar{x}, T-t) : \nabla u(\bar{x}, t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

La inversión de forma de onda completa está íntimamente relacionada con la migración reversa en tiempo, llegando muchas veces a identificarse como el mismo concepto. De forma estricta, la inversión de forma de onda completa requiere de varias iteraciones en donde en cada iteración se calcula el modelo directo, la propagación reversa, y la condición de imagen; mientras que en el algoritmo RTM se aplica con una sola iteración, modificando manualmente el modelo para volver a aplicar el algoritmo.

## 1.6. Reflexiones múltiples

De acuerdo a [Sheriff, 2002], una reflexión múltiple o simplemente múltiple, es energía sísmica que se ha reflejado más de una vez. A diferencia de las reflexiones primarias (o primarios), un múltiple proporciona información repetida de los reflectores, lo que podría ocasionar problemas. La figura contiene múltiples y primarios para apreciar su diferencia.

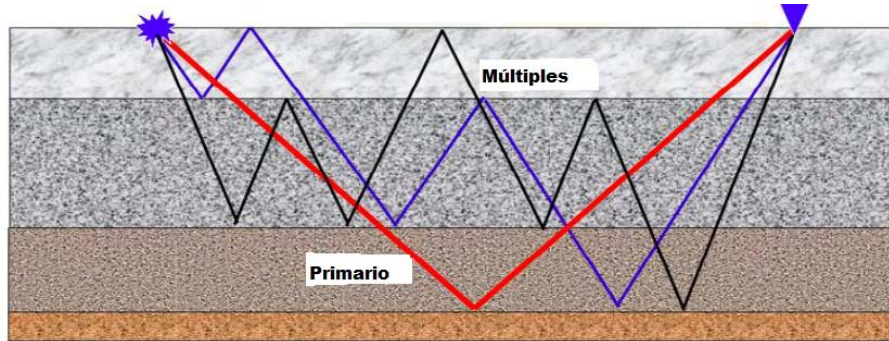


Figura 1.4: Diferencia entre primarios (color rojo) y múltiples (color azul y negro).

Los múltiples se pueden clasificar según su orden. El orden de un múltiple es el número de reflexiones *descendentes* que se producen, es decir que si una onda en su viaje entre la fuente y el receptor presenta un evento de reflexión que cambia su dirección *hacia abajo* se tiene un evento múltiples de orden 1. El orden es equivalente al número de veces que el rayo se refleja *hacia abajo*. La figura 1.5 muestra diferentes tipos de órdenes en múltiples que se reflejan en el fondo marino.

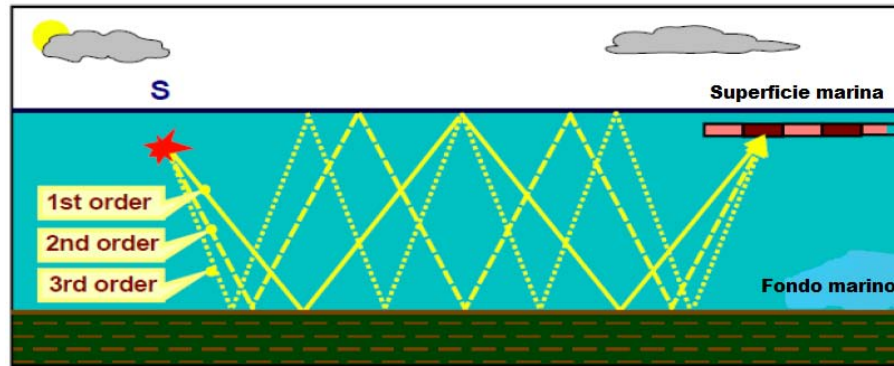


Figura 1.5: Diferentes tipos y órdenes en un múltiple.

El tamaño de su trayectoria, es una propiedad que define la naturaleza de un múltiple. Existen trayectorias largas y cortas. Los múltiples con trayectorias largas son claramente distinguibles de los eventos primarios, generalmente viajan por una capa con una velocidad menor a la que viaja el primario. Los múltiples con trayectoria corta (fantasmas o reverberaciones), tienden a *enmascararse* con los primarios, generalmente porque viajan por capas con velocidades elevadas [Sheriff, 2002], este tipo de eventos proporcionan mayor dificultad a la hora de interpretar una imagen sísmica.

Los múltiples también se pueden clasificar por su lugar de reflejo. Existen los múltiples de superficie libre, los cuales presentan al menos una reflexión descendente en la superficie libre. Los múltiples internos son los eventos que presentan al menos una reflexión descendente en los estratos del subsuelo. Las figuras 1.6 y 1.7 muestran ejemplos de múltiples de superficie libre y múltiples internos respectivamente.

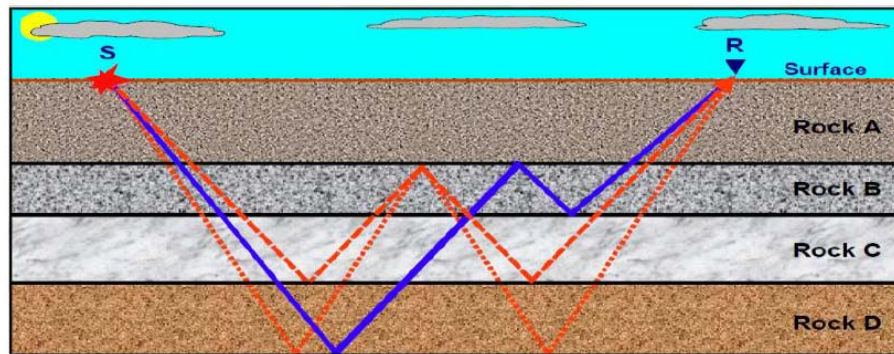


Figura 1.6: Múltiples de superficie libre.

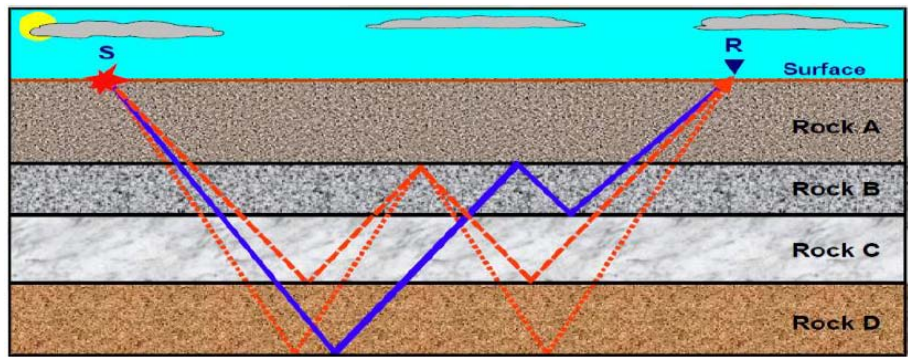


Figura 1.7: Múltiples internos.



## Capítulo 2

# Metodología

*Buena es la ciencia con herencia, y provechosa para los que ven el sol.*

*Eclesiastés*

---

En este capítulo se tratarán los pasos que se siguieron para desarrollar el algoritmo de la RTM con frontera absorbente en lugar de superficie libre. Para fines prácticos se le llamará a este algoritmo RTM-WFS (*Reverse Time Migration- Without Free Surface*). El capítulo se dividió en dos secciones, la primera con datos sintéticos y la segunda con datos reales. Se presentarán algunos resultados que se obtuvieron a lo largo del proceso.

### 2.1. Datos sintéticos

#### 2.1.1. Modelos de velocidad y densidad

Lo primero que se realizó fue adquirir los modelos de densidad y velocidad ( figuras 2.1 y 2.2 respectivamente), los cuales son el resultado de una migración realizada sobre datos reales de la zona norte del Golfo de México, esta información indica que la profundidad del cuerpo de sal, el fondo marino, el basamento, así como la forma del domo salino son buenas aproximaciones de la geología que se puede encontrar en el Golfo de México.

Se puede apreciar en la figura 2.1 que el fondo marino se encuentra aproximadamente a 2000 metros de profundidad la cual decrece de izquierda a derecha, aproximadamente entre los 2000 y 3000 metros se encuentra un domo de sal con una velocidad de propagación de onda P cercana a 4000 [m/s], además el basamento se localiza a una profundidad de alrededor de 9500 metros con una velocidad de propagación de 5500 [m/s]. En la figura 2.2 se distinguen los rasgos del fondo marino y el basamento pero no el domo de sal, lo que indica que la densidad del domo de sal es muy similar a la de los estratos adyacentes.

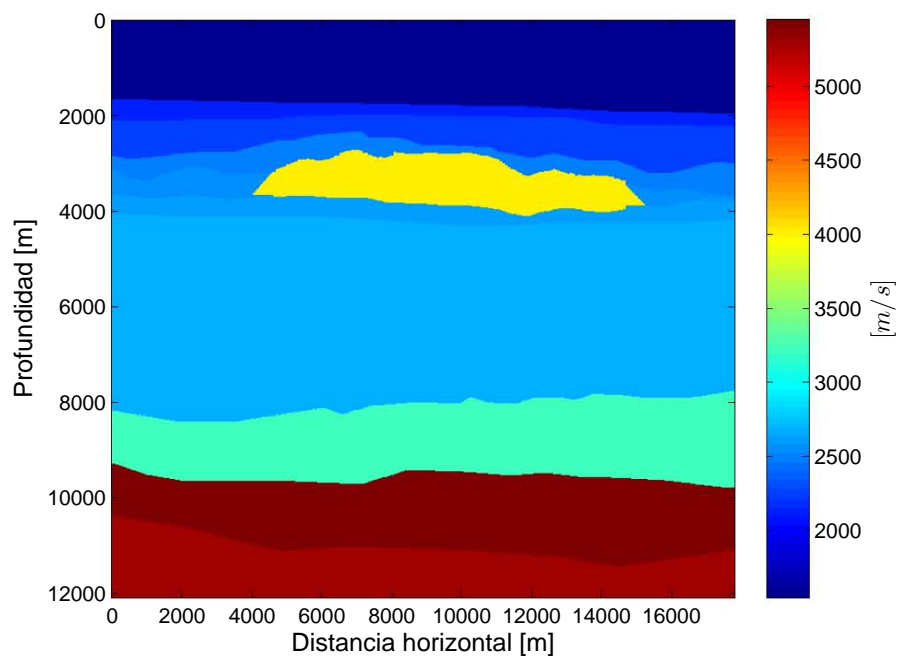


Figura 2.1: Modelo sintético de velocidad.

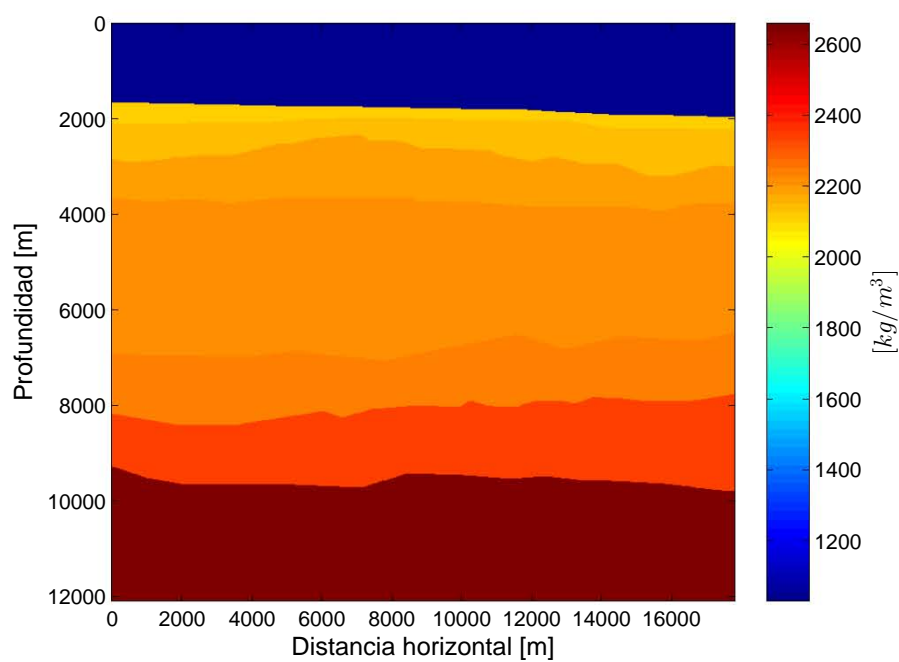


Figura 2.2: Modelo sintético de densidad.

### 2.1.2. Fuente

Con el objetivo de simular una fuente explosiva como las producidas por pistolas de aire, se consideró la fuente empleada por [Collino and Tsogka, 1998], la cual es la derivada de un pulso Gaussiano de la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d}{dt}e^{-\gamma(t-t_0)^2}, \\ f(t) &= -2\gamma(t-t_0)e^{-\gamma(t-t_0)^2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\gamma = 2\pi^2 f_0^2$ ,  $f_0$  es la frecuencia dominante de la fuente,  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo fundamental.

Para este trabajo, se empleó una frecuencia de 5 [Hz], el gráfico de la amplitud respecto al tiempo, se muestra en la figura 2.3, en la cual se aprecia que aproximadamente a los 0.5 segundos la amplitud de la onda se mantiene en cero, la máxima amplitud se localiza alrededor de 0.18 segundos, mientras que la mínima amplitud se encuentra cercana a 0.22 segundos.

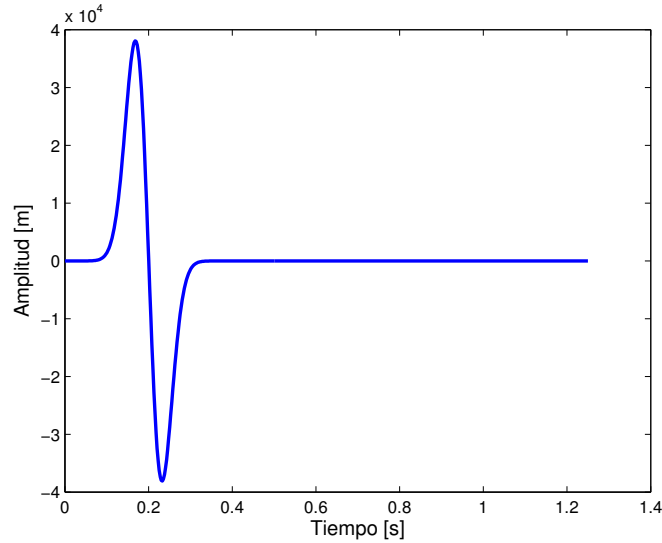


Figura 2.3: Amplitud de la fuente respecto al tiempo.

### 2.1.3. Solución de la ecuación de onda mediante diferencias finitas

Las ecuaciones de la elastodinámica (ecuaciones 1.5) se resolvieron mediante diferencias finitas centradas siguiendo el algoritmo de Vireaux. Las ecuaciones 1.5, representan las ecuaciones de la elastodinámica en diferencias finitas centradas.

Los parámetros de la discretización espacial son:  $\Delta x = \Delta z = 20.0$ , mientras que  $\Delta t = 0.0025$ . El tiempo total de la propagación es de 8 segundos. Existen 3200 muestras en tiempo, 850 en la dirección horizontal ( $x$ ) y 564 en dirección de la profundidad ( $z$ ). Los parámetros iniciales se muestran en las figuras 2.1 y 2.2; pero como



las ecuaciones 1.5 se expresan en términos de los coeficientes de Lamé, se aplican las ecuaciones 1.6 para obtener modelos de los coeficientes de Lamé ( $\lambda, \mu$ ).

La fuente se colocó en el nodo 2 de la dirección  $z$  y en el nodo 445 de la dirección  $x$ , es decir aproximadamente a la mitad. El número total de receptores es 850 (igual a los nodos horizontales), los cuales se ubican a la misma profundidad de la fuente, tal como lo muestra la figura 2.4.

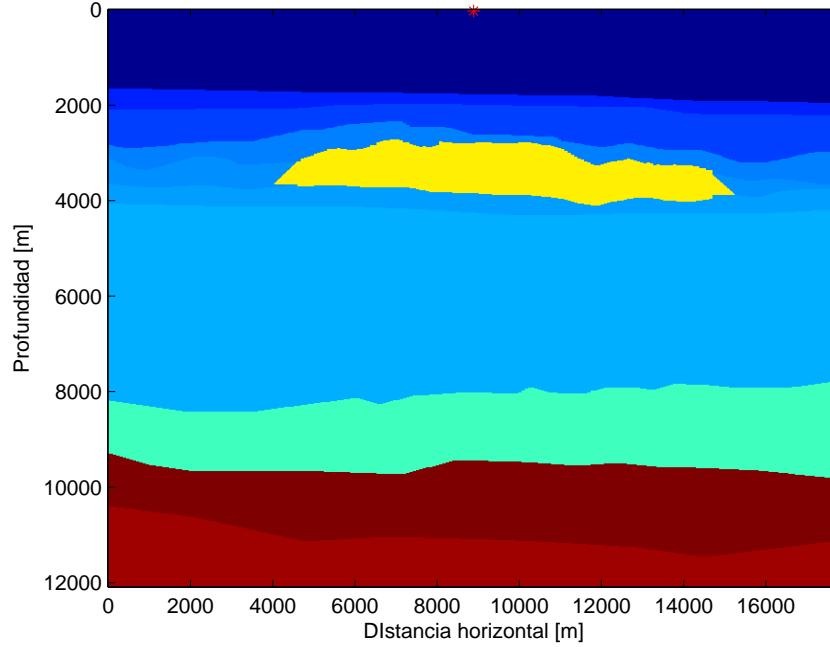


Figura 2.4: Ubicación de la fuente (asterisco rojo).

#### 2.1.4. Aplicación de condiciones de frontera absorbente

Con el objetivo de atenuar las reflexiones espurias producidas en los límites del dominio computacional, se aplicaron condiciones de frontera absorbente tipo CPML en el algoritmo de propagación de las ondas sísmicas. Aparte del dominio físico real, se definieron 5 fronteras más, las cuales son: CPML izquierda, CPML derecha, CPML inferior, CPML inferior izquierda, CPML inferior derecha, la ubicación de las mismas se muestra en la figura 2.5. La superficie libre se localiza en la parte superior de la figura, la cual es la misma que la frontera del dominio computacional. Las demás fronteras son absorbentes, para simular un dominio físico infinito.

Siguiendo los trabajos de [Komatitsch and Martin, 2007] y [Collino and Tsogka, 1998], se eligió un perfil de amortiguamiento que cumple con  $d_x = d_0(x/L)^N$  a lo largo del eje  $x$ ,  $d_z = d_0(z/L)^N$  a lo largo del eje  $z$ , donde  $L$  es el espesor de la frontera absorbente,  $N = 2$  es igual a la dimensión del dominio,  $d_0 = -(N + 1)c_p \log(R_c)/(2L)$ , y  $R_c = 0,0001$  representa un coeficiente de reflexión hipotético. El vector  $\alpha$ , varía de un  $\alpha_{max} = \pi f_0$  situado en el

elemento más cercano al dominio físico, hasta cero en el elemento más lejano, donde  $f_0$  es la frecuencia dominante de la fuente.

Las ecuaciones 1.9 se implementaron en un código de FORTRAN, para comprobar la precisión de la solución numérica, se procedió a compararla con la solución analítica, lo cual se trata en la siguiente subsección.

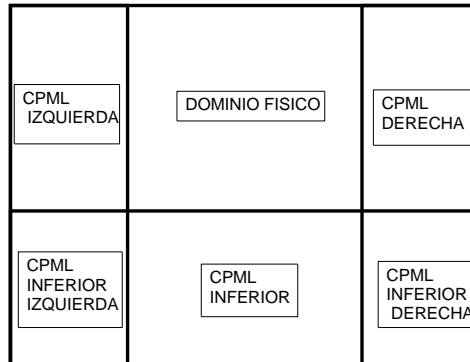


Figura 2.5: Ubicación del dominio físico y las fronteras CPML en la forma convencional.

### 2.1.5. Comparación con la solución analítica

Antes de realizar la simulación de la propagación en el medio del domo salino representado por las figuras 2.1 y 2.2. Se procedió a resolver las ecuaciones de la elastodinámica de forma analítica.

Debido a que la solución analítica de estas ecuaciones no forma parte de los objetivos de esta tesis, se procedió a emplear un código en FORTRAN desarrollado por Per Berg, el cual resuelve la ecuación de onda con una fuente puntual, vertical y direccional. Las funciones de Green son calculadas analíticamente con la técnica de Cagniard-de Hoop, mientras que las convoluciones se obtienen de forma numérica. Debido a que el código de Berg contiene una fuente diferente a la empleada en este trabajo, se modificó la fuente de nuestro código únicamente para comparar la solución numérica con la analítica.

Se emplearon modelos homogéneos de velocidad ( $3140 [m/s]$ ) y de densidad ( $2137 [kg/m^3]$ ). El tiempo total es de  $8 [s]$ , con un total de 3200 muestras y un  $\Delta t = 0,0025[s]$ . El periodo y la frecuencia fundamental son de  $0.2[s]$  y  $5[H_z]$  respectivamente. La profundidad de la fuente es de  $4000[m]$ , mientras que la del receptor es de  $8000 [m]$ , existe una distancia horizontal entre fuente y receptor de  $4000[m]$ . La figura 2.6, muestra la comparación entre un sismograma producido por la soluciones numérica y analítica con los parámetros anteriormente especificados. Los elementos del vector que contiene las amplitudes de los sismogramas respecto al tiempo se dividieron entre la

amplitud máxima de cada sismograma.

De la figura 2.6, se puede observar que la forma del sismograma de la solución analítica y numérica son prácticamente iguales. Una diferencia radica en que los valores absolutos de la amplitud máxima y mínima del sismograma resultante de la solución numérica son mayores. Este problema se puede atribuir a errores de truncamiento debido al orden de aproximación de la derivada, no obstante, el error relativo calculado con la norma L2 es de 0.0223 %.

Además, la figura 2.7 representa la diferencia de amplitudes obtenida la restar la solución analítica menos la numérica. Se puede apreciar que la diferencia máxima es de alrededor de 0.15 metros, lo cual es aceptable si tomamos en cuenta que la escala de amplitudes en las soluciones normalizadas se encuentra en un rango de -1.5 metros a 1 metro.

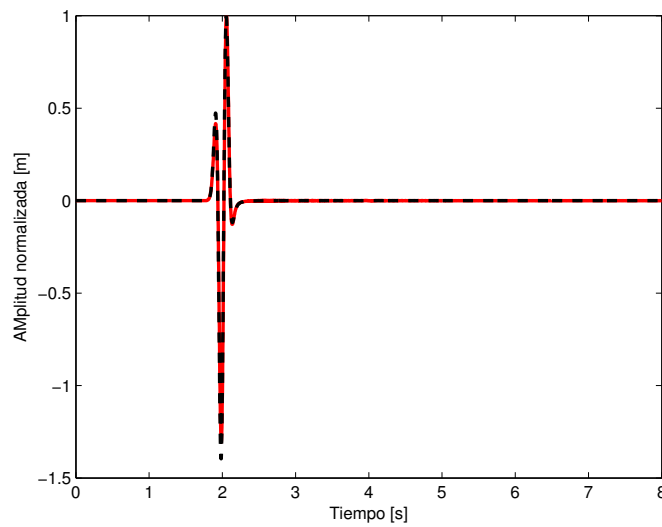


Figura 2.6: Comparación entre la solución analítica (rojo) y la solución numérica (negro guionado).

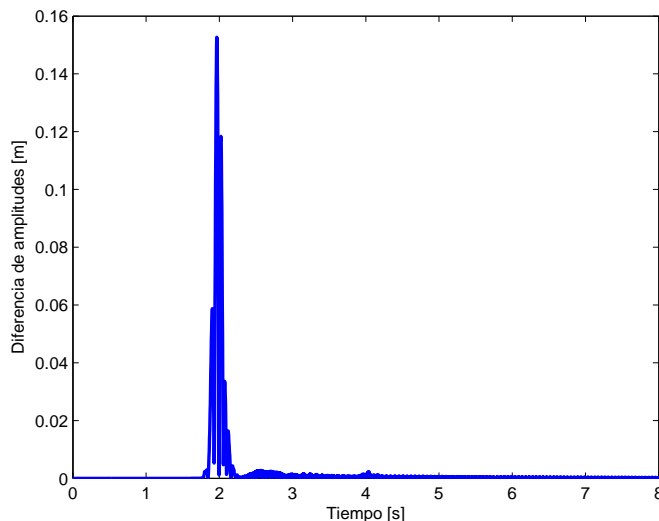


Figura 2.7: Diferencia entre la solución analítica y la numérica.

### 2.1.6. Obtención de los datos observados

En esta subsección se muestran los datos observados, que se obtuvieron empleando un dominio computacional que cuenta con condiciones de superficie libre. Para obtenerlos se realizó una propagación con el algoritmo y parámetros de diferencias finitas, fronteras absorbentes y fuente mencionados en la sección anterior. Con el objetivo de que el texto sea práctico al leerlo, he decidido nombrar a los diversos eventos como sigue:

Primario del fondo marino	Pfm
Primario de la cima	Pc
Primario de la base	Pb
Múltiple de orden 1 del fondo marino	M1fm
Múltiple de orden 1 de la cima	M1c
Múltiple de orden 1 de la base	M1b
Múltiple de orden 2 del fondo marino	M2fm
Primario arenisca	PA
Primario del basamento	PB

La figura 2.8 muestra diferentes capturas de la propagación directa, dentro del modelo de velocidad que muestra la figura 2.1. Se pueden apreciar distintos eventos, por ejemplo en la figura 2.8(a), se aprecian la onda directa y el Pfm. En la figura 2.8(b) se distingue que el Pfm ha llegado a la superficie provocando una reflexión descendente, además se aprecian el Pc y el Pb. En la figura 2.8(c) se distingue el M1fm, también el Pc ha llegado a la superficie provocando una reflexión descendente, mientras que el Pb se aproxima a la misma. La figura 2.8(d) muestra al M1fm casi llegando a la superficie, se aprecia la reflexión descendente del Pc arribando al fondo marino y más

arriba la reflexión descendente del Pb (empalmada con el M1fm), además se logra ver el M1c que asciende y llega al fondo marino. La figura 2.8(e) muestra al M1c llegando a la superficie libre, también se aprecia que el M1fm que desciende llega al fondo marino, el M1b asciende hacia la mitad de la profundidad del agua. La figura 2.8(f) muestra que el M1fm descendente llega a la cima de la sal, también M1b arriba a la superficie libre, hacia la mitad de la profundidad del agua existe una interferencia entre el M2fm que asciende y el M1c que desciende.

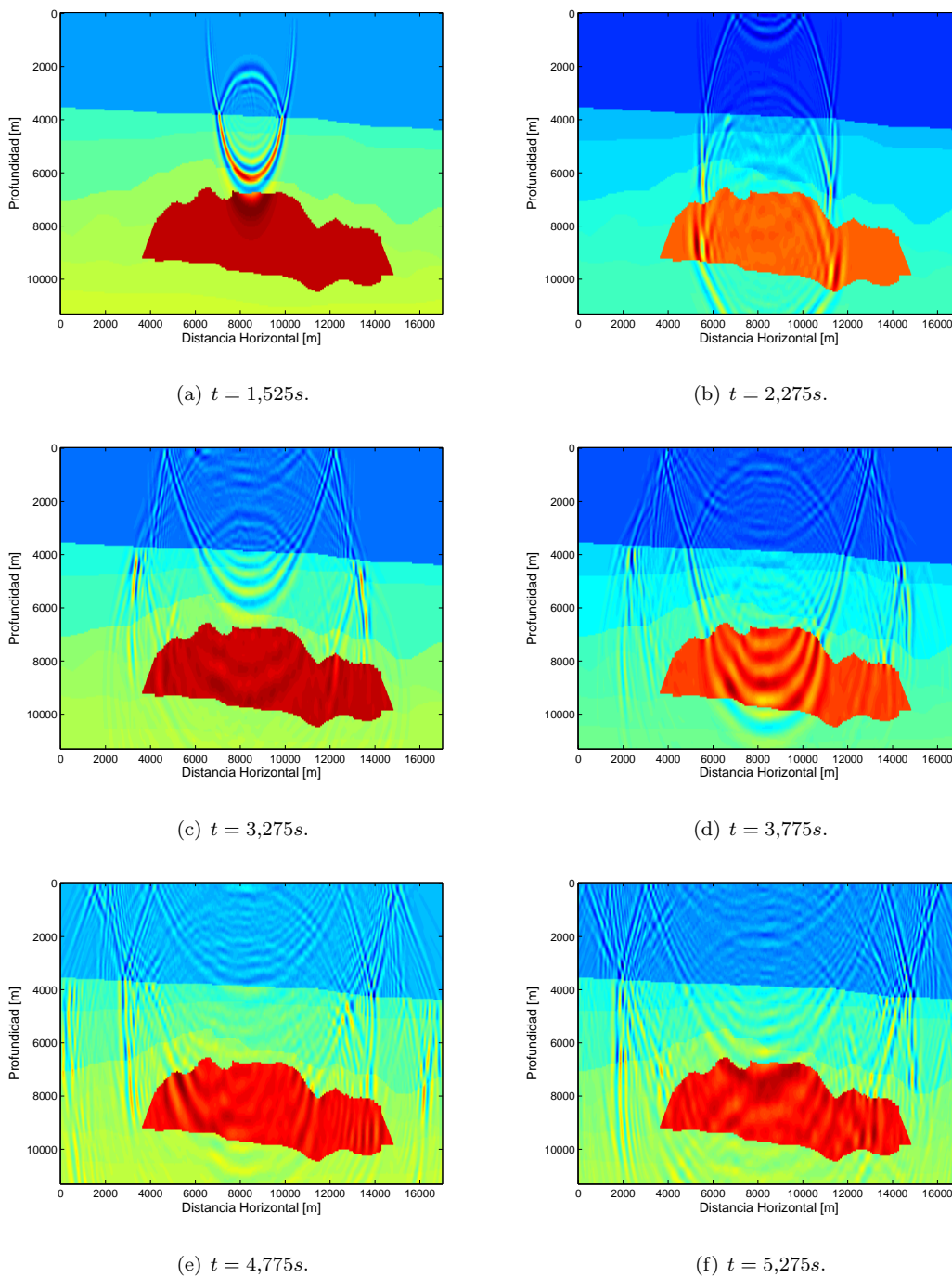


Figura 2.8: Diferentes capturas de la propagación simulada a tiempo constante.

Las figuras 2.9 y 2.10 muestran los gráficos de los sismogramas normalizados (cada dato se dividió entre el dato con el máximo valor) procedentes de las velocidades horizontales y verticales respectivamente. A las 2 figuras se les atenuó el efecto de la onda directa, la cual por su elevada amplitud respecto a los otras eventos impide apreciarlos

con claridad. El proceso de eliminación de la onda directa es relativamente simple, porque conociendo la velocidad de la capa superior y el offset entre la fuente y cada receptor, se puede estimar el tiempo de arribo de la onda directa a cada receptor.

Se puede apreciar que los eventos se encuentran mejor definidos en la figura 2.10, este hecho es posiblemente atribuido a la dirección en que actúan las velocidades  $v_z$ .

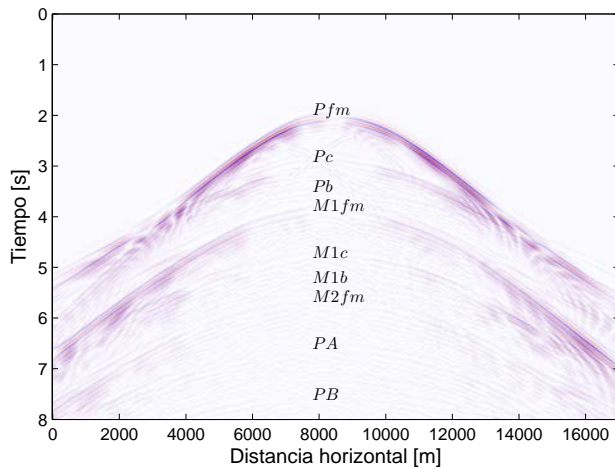


Figura 2.9: Sismogramas que proceden de las velocidades horizontales ( $v_x$ ).

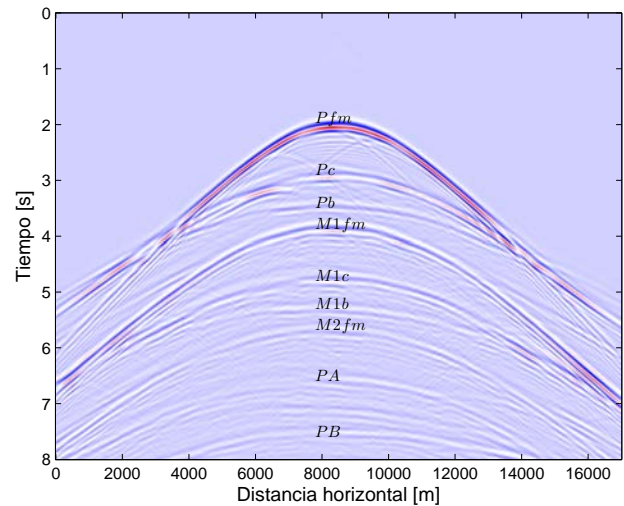


Figura 2.10: Sismogramas que proceden de las velocidades verticales ( $v_z$ ).

### 2.1.7. Resultados de la propagación directa

En el capítulo 1 sección 1.4, se describen los pasos principales del algoritmo RTM, el primero de ellos es el modelado directo. En esta subsección se presentan imágenes de la simulación de la propagación, así como los datos sintéticos.

Como se había mencionado en los objetivos, el propósito de esta tesis es implementar un algoritmo RTM con una condición de frontera absorbente en el lugar de la superficie libre. Para este objetivo se definió el dominio computacional como lo indica la figura 2.11, a la cual a diferencia de la figura 2.5, se le añaden 3 capas superiores de fronteras CPML.

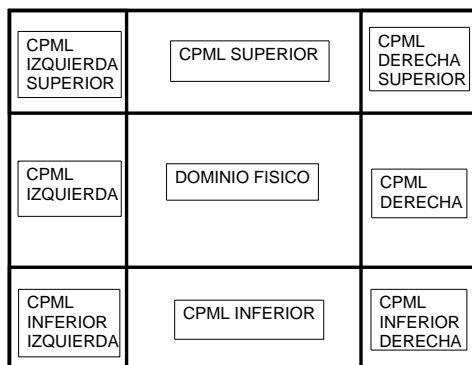


Figura 2.11: Ubicación del dominio físico y las fronteras CPML para el algoritmo RTM-WFS.

La figura 2.12 muestra diferentes capturas de la propagación con los mismos tiempo que en la figura 2.8. La figura 2.12(a) es prácticamente igual a la figura 2.8(a). La figura 2.12(b) enseña que a diferencia de la figura 2.12(b), no existe una reflexión descendente provocada por el Pfm, también se distingue el Pc y el Pb. La figura 2.12(c) presenta una diferencia más marcada respecto a la figura 2.8(c), debido a que no existen interferencias de las reflexiones descendentes con el Pc (que ha llegado a la superficie) ni con el Pb (que está llegando a ella). De las figuras 2.12(d), 2.12(e), y 2.12(f) basta comentar la gran diferencia respecto a las figuras 2.8(d), 2.8(e), y 2.8(f); este hecho se debe a que las condiciones de frontera absorbente de tipo CPML ubicadas en la parte superior del dominio, obliga a que la energía que llega a esta se absorba, provocando que no se formen reflexiones múltiples. En la figura 2.12(f), la nula presencia de múltiples provoca que el PB se distinga de una forma más clara.



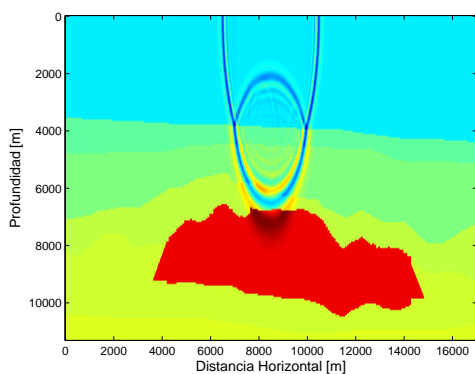
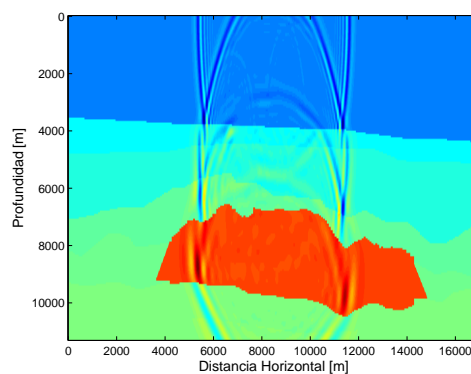
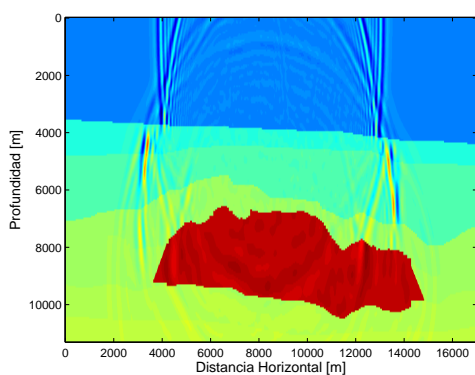
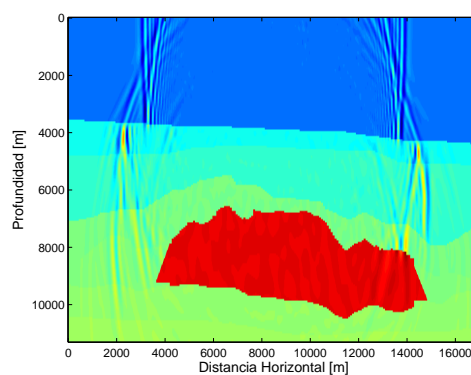
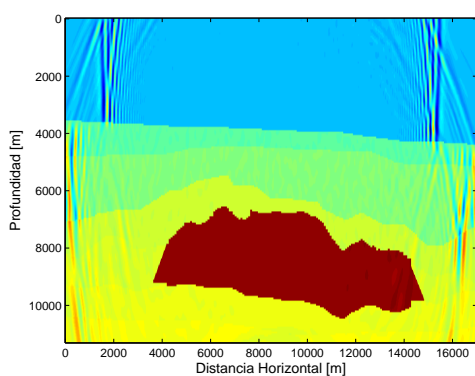
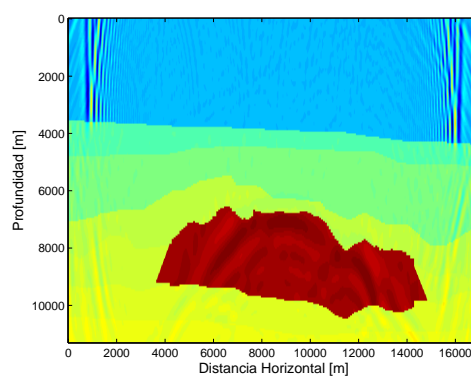
(a)  $t = 1,525s.$ (b)  $t = 2,275s.$ (c)  $t = 3,275s.$ (d)  $t = 3,775s.$ (e)  $t = 4,775s.$ (f)  $t = 5,275s.$ 

Figura 2.12: Diferentes capturas de la propagación simulada a tiempo constante con fronteras absorbentes en la parte superior.

La figura 2.13 muestra los datos sintéticos normalizados, se nota una diferencia considerable comparándola con la figura 2.10. Es evidente como en la figura 2.13 los múltiples producidos por la superficie libre se han atenuado, y

sólo aparecen los primarios. De arriba a abajo se pueden distinguir el Pfm, el Pc, el Pb, después aparece el primario de una capa que se encuentra entre la base de la sal y el basamento (véase figura 2.1), y por último el PB.

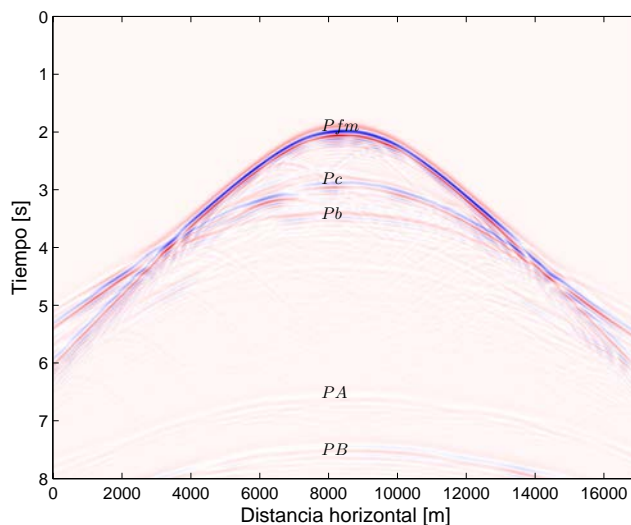


Figura 2.13: Datos sintéticos provenientes de las velocidades verticales provenientes de la propagación con condiciones de frontera CPML en la parte superior.

Las figuras 2.14 y 2.15 son una comparación de los eventos existentes en los sismogramas que representan los datos reales y los sintéticos respectivamente. Nótese como los 4 eventos múltiples (M1fm, M1c, M1b, y M2fm) se encuentran atenuados en la figura 2.15.

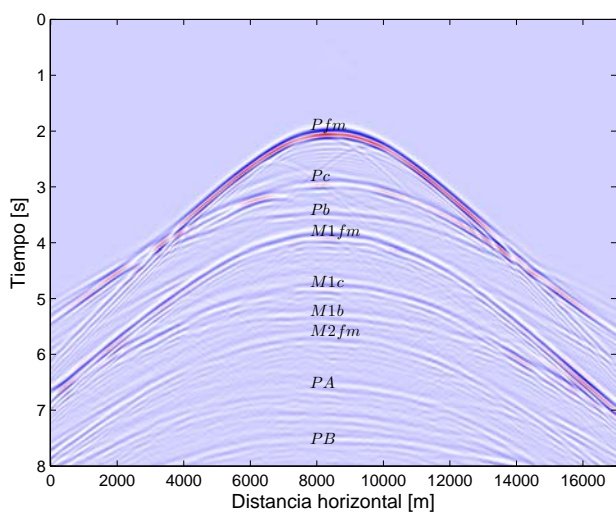


Figura 2.14: Datos reales.

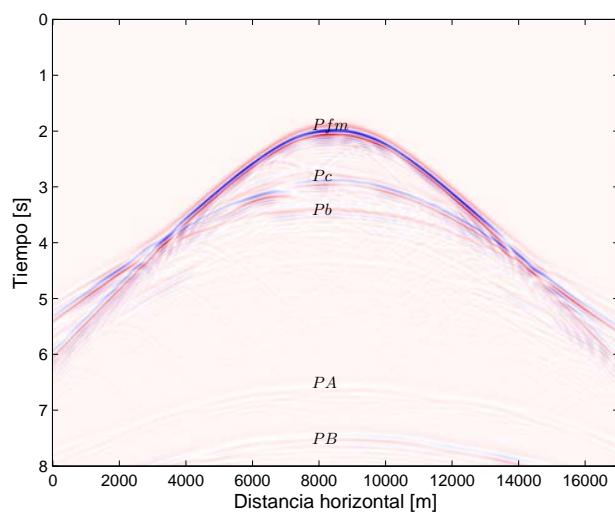


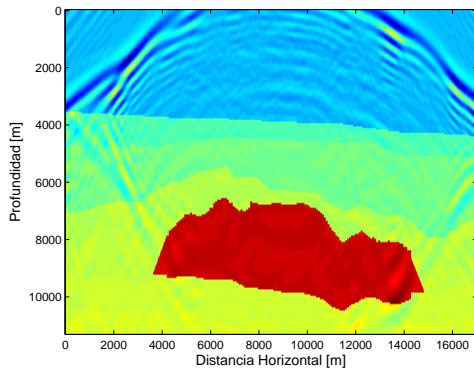
Figura 2.15: Datos sintéticos.

### 2.1.8. Propagación reversa en tiempo y explicación previa de la condición de imagen.

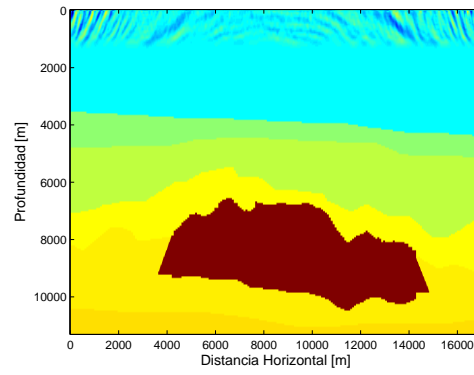
En esta subsección se presentan imágenes de la simulación de la propagación reversa en tiempo como parte del segundo paso del algoritmo RTM (capítulo 1, sección 1.4). Al igual que la propagación directa, para la propagación reversa se ocupó un dominio computacional como lo indica la figura 2.11. El proceso es similar al que se realizó en la propagación, la única diferencia es que la fuente está dada por la ecuación 1.26, por lo que se requieren el campo de ondas de la fuente y el de los receptores

Es muy importante decir que antes de calcular la propagación reversa, es necesario hacer dos cosas: la primera es eliminar la onda directa de los sismogramas sintéticos (debido a que se considera que los datos reales no la tienen), la segunda es normalizar todos los datos para que el máximo valor sea en los datos sea 1.0.

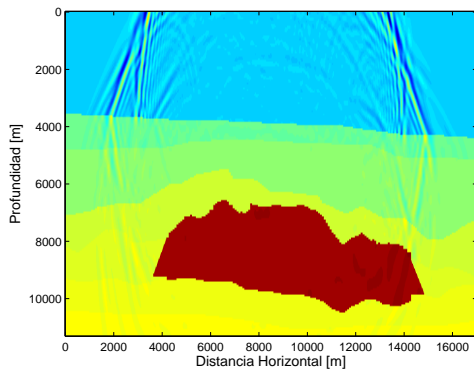
La figura 2.16, presenta una comparación entre el campo de ondas de la fuente, y el campo de ondas de los receptores (retropropagación). Esto ejemplifica lo que indica la ecuación 3.1, el primer cálculo es la última muestra temporal del campo de ondas de la fuente por la primera muestra del campo de ondas de los receptores, hasta llegar al producto entre la última muestra del campo de ondas de la fuente por la primera del campo de ondas de los receptores. Todos los cálculos se suman para obtener la imagen. Por ejemplo el campo de ondas que representa la figura 2.16(a) se multiplica con el campo de ondas que representa la figura 2.16(b), la figura 2.16(c) con la figura 2.16(d), y la figura 2.16(e) con la figura 2.16(f).



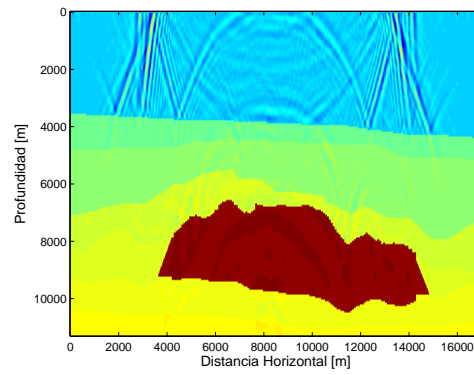
(a) muestra 3090.



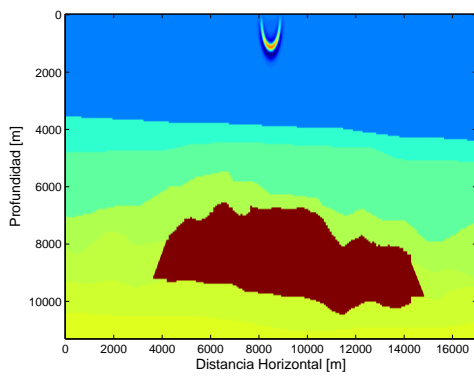
(b) muestra 110.



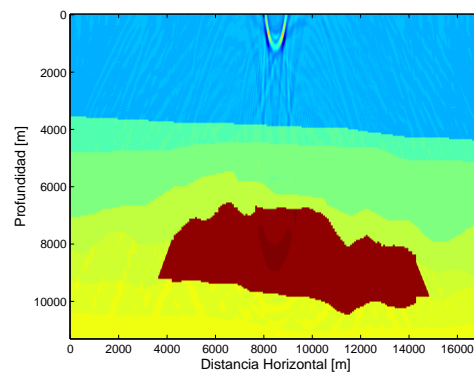
(c) muestra 2590.



(d) muestra 610.



(e) muestra 190.



(f) muestra 3010.

Figura 2.16: Comparación entre capturas de la propagación directa (izquierda) y reversa (derecha).

### 2.1.9. Kernels de sensibilidad (resultados preliminares)

Por último, antes de presentar los resultados finales, se calcularon los kernels de sensibilidad de modelos homogéneos acústicos. Para este propósito se propuso un modelo de velocidad con una velocidad de  $3140 [m/s]$  y un modelo de densidad de  $2500 [kg/m^3]$ . Se ocuparon los mismos parámetros que en las simulaciones anteriores; es decir  $\Delta x = \Delta z = 20$ ,  $\Delta t = 0.0023$ , 850 muestras en la dirección horizontal, 584 muestras en profundidad, 3200 muestras en tiempo. La posición de la fuente se encuentra en las coordenadas (445,300), y las coordenadas del receptor son (200,100) donde el primer elemento del vector indica el nodo horizontal y el segundo el vertical.

Las figuras 2.17 y 2.18, enseñan el kernel de sensibilidad con superficie libre y con condiciones de frontera absorbente en la superficie libre respectivamente. Las regiones iluminadas representan las zonas de recorrido de las ondas sísmicas entre la fuente y el receptor. Se puede notar que en la figura 2.17, iluminación entre la fuente y el receptor, pero además en el trayecto fuente- superficie libre- receptor. Por otro lado, en la figura 2.18 únicamente existe iluminación entre la fuente y el receptor debido a que la energía se absorbe al llegar a la superficie libre.

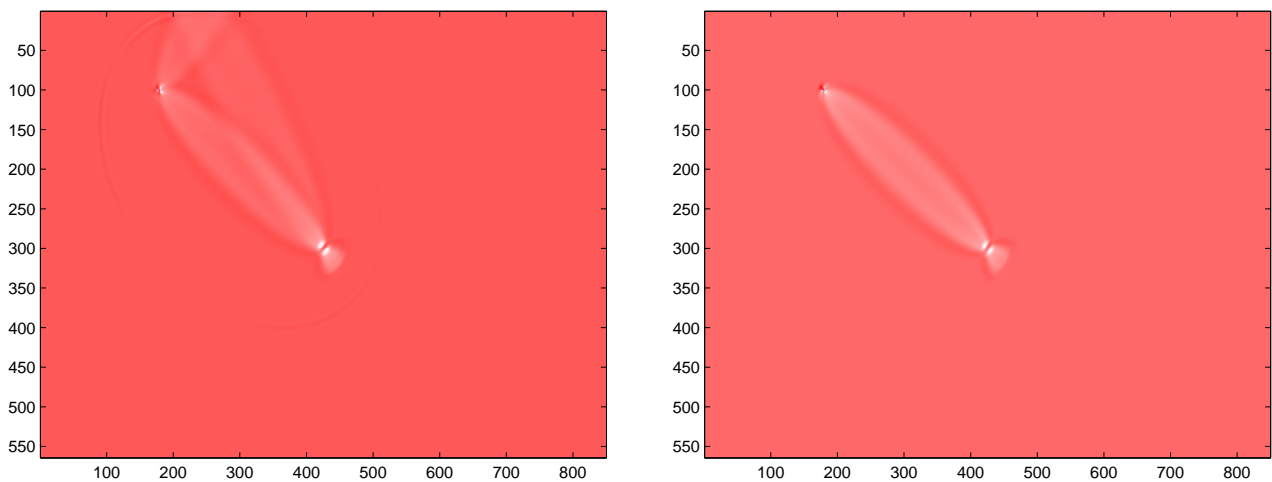


Figura 2.17: Sismogramas procedentes de las velocidades horizontales ( $v_x$ ).  
 Figura 2.18: Sismogramas procedentes de las velocidades verticales ( $v_z$ ).

## 2.2. Aplicación en datos reales

Finalmente, se aplicó el algoritmo RTM-WFS a datos reales apilados provenientes de un levantamiento en el Golfo de México, los cuales se muestran en la figura 2.19, en la cual se puede apreciar que existe una gran cantidad de ruido que no permite detectar eventos de alguna capa en particular.

Los modelos de velocidades (figura 2.20) y de densidades (figura 2.21), representan los parámetros estimados

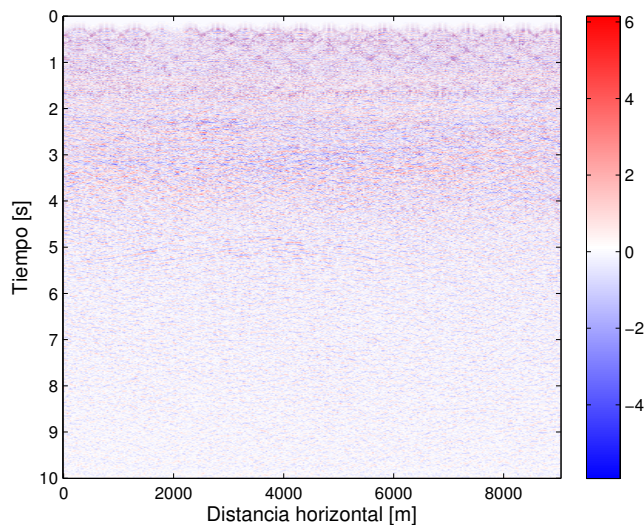


Figura 2.19: Datos reales apilados provenientes del Golfo de México.

en la cuarta iteración de la migración RTM convencional. El fondo marino tiene una la baja profundidad (500 m aproximadamente), también existe un cuerpo de sal entre los 5000 y 7000 metros de profundidad, el basamento se encuentra a 8000 metros de profundidad.

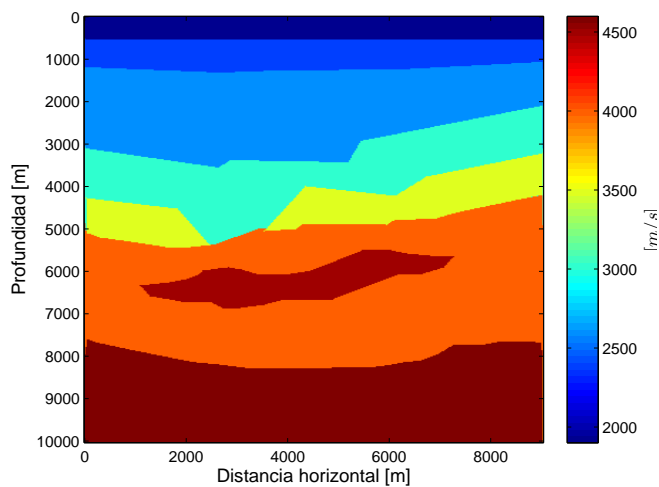


Figura 2.20: Modelo de velocidades.

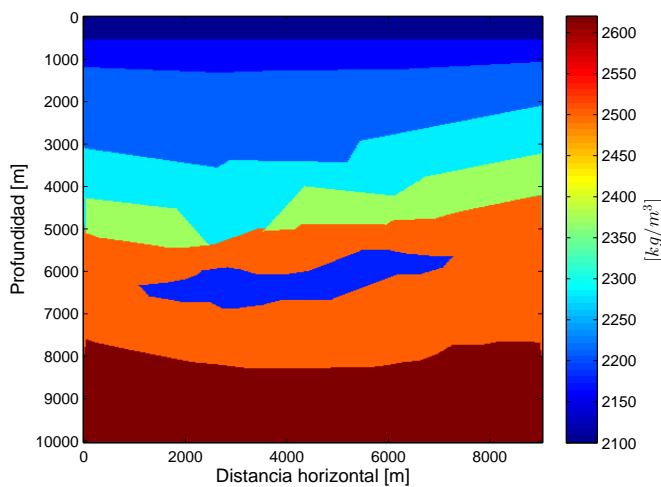


Figura 2.21: Modelo de densidades.

Los parámetros de la discretización fueron:  $\Delta x = 27.860$ ,  $\Delta z = 25.000$ , y  $\Delta t = .,004$ . El total de muestras en la dirección  $x$  es de 323, y en la dirección  $z$  de 400. El tiempo total de la propagación es de 10 segundos. La frecuencia de la fuente es de  $5[Hz]$ , con la misma función que indica la ecuación 2.2.



## Capítulo 3

# Resultados

*Sabiduría ante todo; adquiere sabiduría; y sobre todas tus posesiones  
adquiere inteligencia.*

*Proverbios*

---

En este capítulo se presentan los kernels que se obtuvieron de la migración RTM convencional y RTM-WFS. Además se presentan kernels obtenidos mediante fuentes simultáneas y una sola fuente. Primeramente es conveniente presentar nuevamente la ecuación 3.1:

$$I(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{S}_i(\bar{x}, N+1-n) \mathcal{S}_i^\dagger(\bar{x}, n), \quad (3.1)$$

recordando que  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_i^\dagger$  representan la componente  $i$  del campo de ondas de la fuente y el campo de ondas adjunto respectivamente (el cual se obtuvo mediante la fuente adjunta expresada en la ecuación 1.26).

Si los datos observados fueron procesados antes del algoritmo RTM convencional, de tal forma que estos datos cuentan únicamente con eventos primarios, el campo de ondas de la fuente  $\mathcal{S}_i$  tendría tanto múltiples como primarios, debido a que el dominio computacional en la solución de las ecuaciones de la elastodinámica, no cuentan con una condición de frontera absorbente en lugar de la superficie libre que atenúe los múltiples. Además si se aplica la fuente adjunta definida en la ecuación 1.26, el campo de ondas  $\mathcal{S}_i^\dagger$  cuenta también con múltiples y primarios. Por otro lado en el algoritmo RTM-WFS, ambos campos de onda se asumen libres de múltiples.

Además, en el caso de que los múltiples en los datos observados no hayan sido atenuados, el algoritmo RTM convencional contaría con primarios y múltiples en ambos campos de onda. A diferencia del algoritmo RTM-WFS, en el cual el campo de ondas  $\mathcal{S}_i$  estaría libre de múltiples, pero el campo de ondas  $\mathcal{S}_i^\dagger$  tendría múltiples y primarios. Lo dicho anteriormente se resume en la siguiente tabla donde  $\mathcal{P}$  se refiere a los primarios y  $\mathcal{M}$  a los múltiples.



Datos observados	RTM	RTM-WFS
Con múltiples	$\mathcal{S}_i = \mathcal{P} + \mathcal{M}, \mathcal{S}_i^\dagger = \mathcal{P} + \mathcal{M}$	$\mathcal{S}_i = \mathcal{P}, \mathcal{S}_i^\dagger = \mathcal{P} + \mathcal{M},$
Sin múltiples	$\mathcal{S}_i = \mathcal{P} + \mathcal{M}, \mathcal{S}_i^\dagger = \mathcal{P} + \mathcal{M}$	$\mathcal{S}_i = \mathcal{P}, \mathcal{S}_i^\dagger = \mathcal{P},$

Aplicando la ecuación 3.1 a cada situación descrita en la tabla, se tiene que:

- **Datos con múltiples, algoritmo RTM:** La imagen migrada  $I(\bar{x})$  aparece con Primarios y múltiples.
- **Datos con múltiples, algoritmo RTM-WFS:**  $I(\bar{x})$  aparece con los múltiples atenuados debido a que el campo de ondas  $\mathcal{S}_i$  tiene un valor aproximadamente nulo en la posición  $\bar{x}$  de cada múltiple; consecuentemente el producto de este valor por el que tiene el campo de ondas  $\mathcal{S}_i^\dagger$  en la misma posición  $\bar{x}$  (el cual no es nulo), será aproximadamente cero.
- **Datos sin múltiples, algoritmo RTM:**  $I(\bar{x})$  tiene múltiples y primarios.
- **Datos sin múltiples, algoritmo RTM-WFS:**  $I(\bar{x})$  tiene sólo primarios.

### 3.1. Datos observados con múltiples.

#### 3.1.1. Una fuente.

Las figuras 3.1 y 3.2 muestran imágenes de los kernels lambda (segunda ecuación 1.35), mientras que las figuras 3.3 y 3.4 enseñan imágenes de los kernels rho (primera ecuación 1.35). Estos kernels se obtuvieron con el modelo de adquisición que muestra la figura 2.4, es decir con una sola fuente ubicada en la superficie y 850 receptores repartidos a lo largo de la superficie.

Las figuras también contienen señaladas las interfaces más importantes con la siguiente nomenclatura:  $S_B$  es el fondo marino,  $T_S$  es la cima de la sal,  $B_S$  es la base de la sal,  $S$  es la arenisca, y  $B$  es el basamento. En los siguientes párrafos se realizarán comparaciones entre los kernels obtenidos con la RTM convencional y los obtenidos con la RTM-WFS, para que el lector tenga una mayor facilidad de comprensión, el análisis en la dirección del incremento de la profundidad.

Analizando los kernels lambda, se puede notar que el fondo marino y la cima de la sal se encuentran moderadamente mejor definidas en la figura 3.2, sin embargo la definición de la base de la sal mejora considerablemente en la figura 3.2 respecto a la figura 3.1. Las diferencias más notables se encuentran debajo de la sal. Por ejemplo, la arenisca apenas se define en la figura 3.1, mientras que la definición del basamento mejora drásticamente en la figura 3.2.

Por otro lado los kernels rho, confirman lo mencionado con los kernels lambda, sólo que aparentemente la cima de la sal (figura 3.4), presenta problemas de definición si se compara con la figura 3.2.

En la metodología se comenta que como parte del algoritmo RTM-WFS, se incluye un filtro de la onda directa. Este proceso se lleva a cabo porque en la mayoría de los datos reales, la onda directa se elimina previamente.

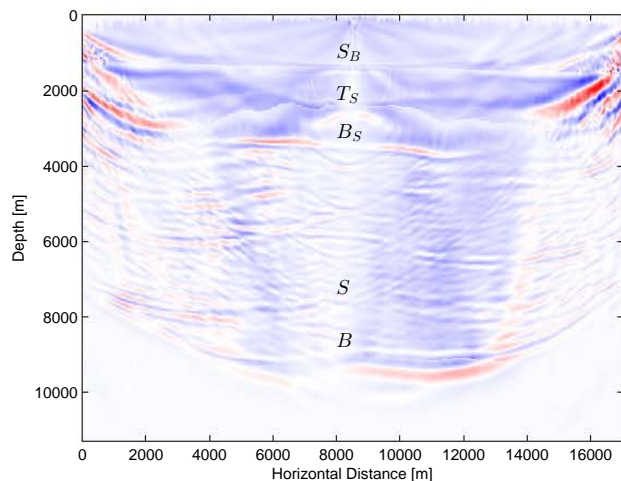
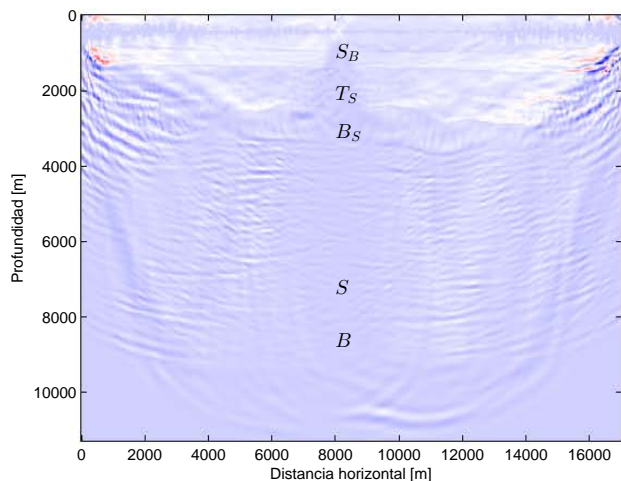


Figura 3.1: Kernel lambda, algoritmo RTM convencional. Datos observados con múltiples.  
 Figura 3.2: Kernel lambda, algoritmo RTM-WFS. Datos observados con múltiples.

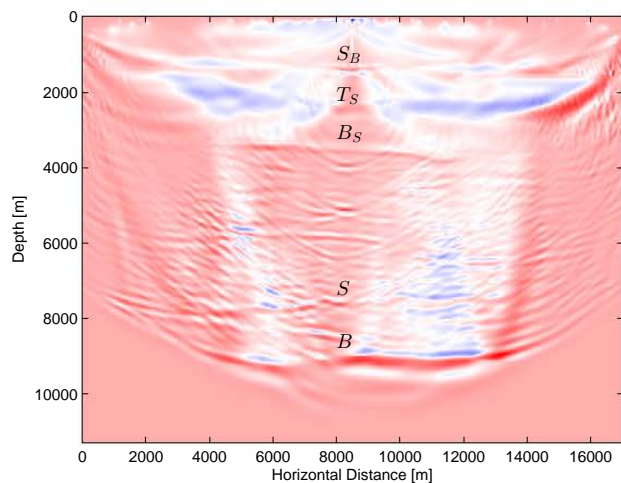
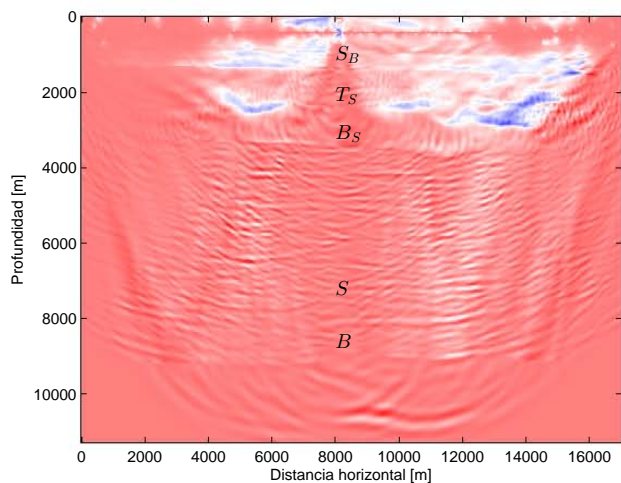


Figura 3.3: Kernel rho, algoritmo RTM convencional.

Figura 3.4: Kernel rho, algoritmo RTM-WFS.

Las figuras 3.5 y 3.6 muestran los kernels del algoritmo RTM-WFS sin eliminar la onda directa. Se puede apreciar que curiosamente la figura 3.5 es similar a la figura 3.2, aunque se distinguen mejor los eventos en esta última figura. No obstante la figura 3.6 presenta grandes problemas debido a que la onda directa enmascara a los demás eventos.

Finalmente se añaden los kernels que se obtuvieron al normalizar con el campo de ondas de la fuente  $\mathcal{S}_i$  (segunda ecuación 1.29). Claramente se aprecia que la figura 3.7 presenta graves problemas, empezando por el fondo marino que es la interface más superficial, la cual no se distingue bien. Por otro lado la figura 3.8, no presenta los mismos problemas que la figura 3.7; además al compararla con la figura 3.4 carece de definición en las interfaces subsalinas.

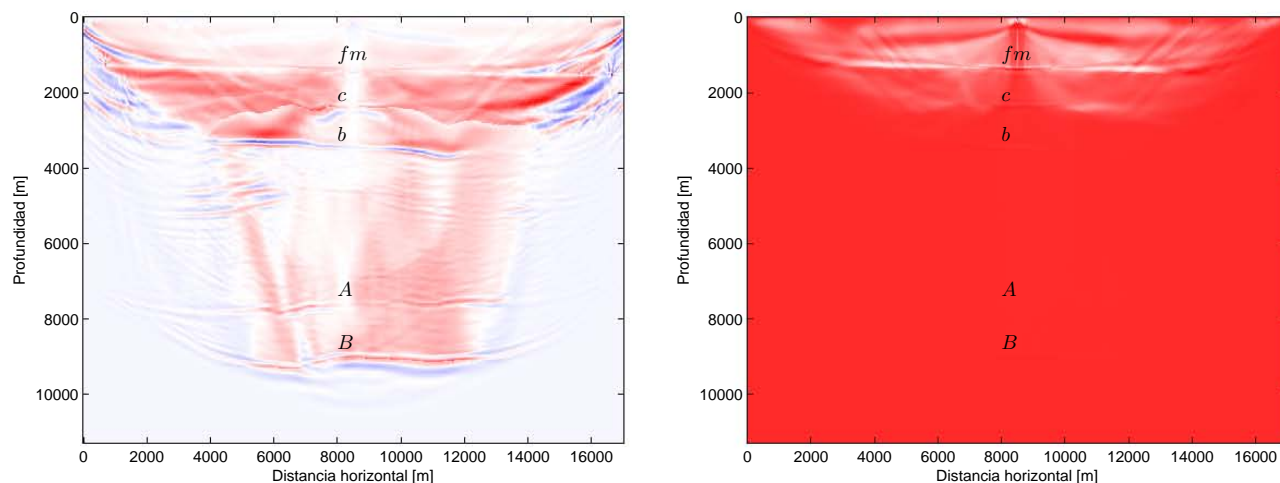


Figura 3.5: Kernel lambda, algoritmo RTM-WFS, sin eliminar la onda directa en datos sintéticos. Figura 3.6: Kernel rho, algoritmo RTM-WFS, sin eliminar la onda directa en los algoritmos sintéticos.

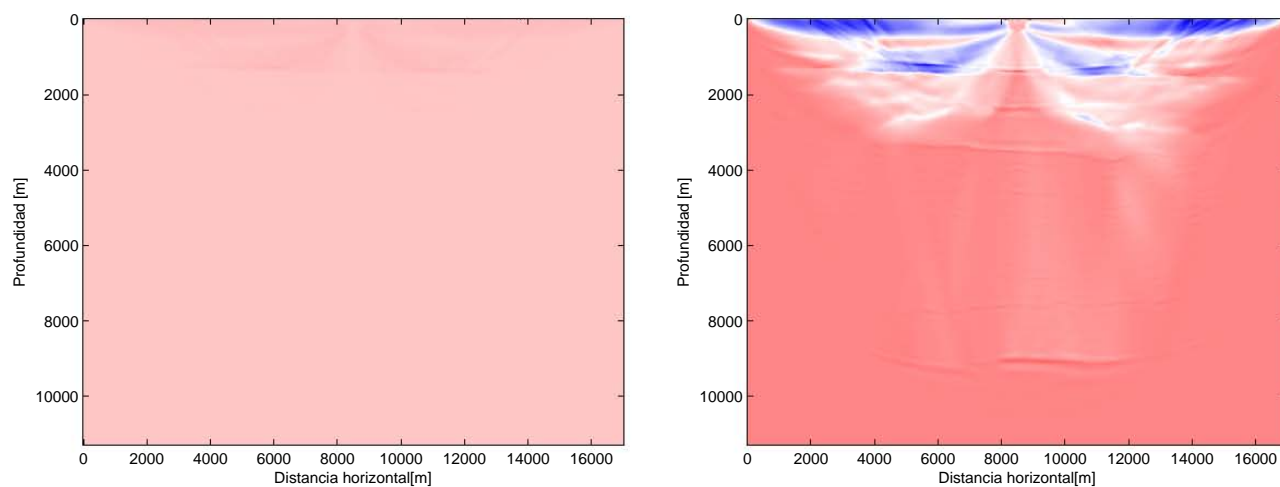


Figura 3.7: Kernel lambda, algoritmo RTM-WFS, normalización con el campo de ondas de la fuente. Figura 3.8: Kernel rho, algoritmo RTM-WFS, normalización con el campo de ondas de la fuente.

### 3.1.2. Fuentes simultáneas.

A continuación se presentan en las figuras 3.9 y 3.10 los datos reales (observados) y sintéticos obtenidos con fuentes simultáneas. Estas dos imágenes, muestran de una forma mas clara, los efectos que tiene una frontera absorbente en la atenuación de múltiples. Se puede apreciar que todos los múltiples de superficie libre que se encuentran en la figura 3.9, prácticamente desaparecen en la figura 3.10.

Las figuras 3.11 y 3.12 representan los kernels lambda de la RTM convencional y RTM-WFS respectivamente, mientras que las figuras 3.13 y 3.14 los kernels rho. Todas estas figuras fueron obtenidas de una propagación con fuentes simultáneas. Se aplicaron 425 fuentes a lo largo de la superficie a una profundidad de 40 metros separados por 40 metros (2 nodos) cada una. Los receptores, al igual que en la figura 2.4, se colocaron a 40 metros de profundidad con una separación de 20 metros entre cada uno. Se implementaron los mismos parámetros numéricos que en las simulaciones anteriores ( $\Delta t = 0,0025$ ,  $\Delta x = \Delta z = 20$ ). La función de las fuentes es la misma que en la ecuación 2.2.

Los datos observados de los cuales se generan las figuras 3.11, 3.12, 3.13, y 3.14 se presenta en la figura 3.9. Los datos sintéticos obtenidos con el algoritmo RTM-WFS se muestran en la figura 3.10.

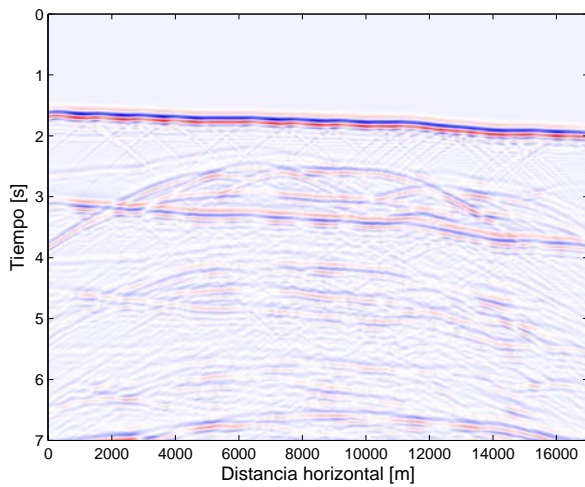


Figura 3.9: Datos reales con fuentes simultáneas.

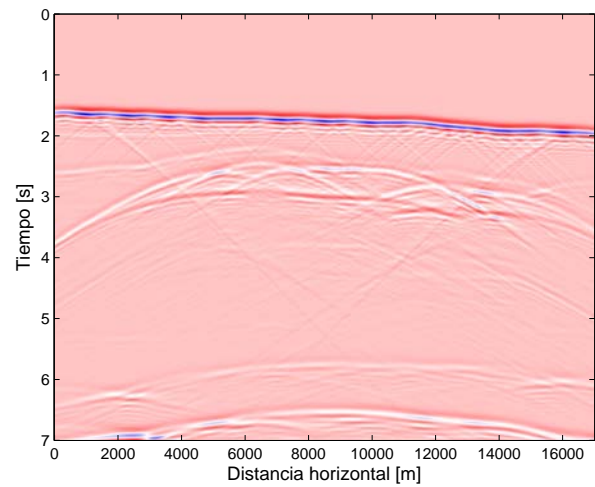


Figura 3.10: Datos sintéticos con fuentes simultáneas.

En la figura 3.9 hacia el segundo 3 se encuentra el múltiple del fondo marino muy cerca de los primarios de la cima y la base, mientras que entre el segundo 4 y 5, se encuentran el múltiple de orden 2 del fondo marino y los múltiples de orden 1 de la cima y la base de la sal, los cuales se atenúan en la figura 3.10.

Se puede destacar de una comparación entre las figuras 3.11 y 3.12 que la definición del fondo marino es mejor en la figura 3.12. El cuerpo de sal se aprecia de una forma más clara en la figura 3.2, debido a la interferencia de algunos múltiples con el domo salino en la figura 3.1. La arenisca se define débilmente en la figura 3.12, pero en la figura 3.11 no se distingue debido a la gran cantidad de múltiples. Por último, el basamento se marca drásticamente mejor en la figura 3.12. Además se sobresalta la gran cantidad de múltiples existentes entre la base de la sal y el basamento en la figura 3.11, mismos que se encuentran bastante atenuados en la figura 3.12. Debajo del basamento existen eventos espurios en la figura 3.11 que no se encuentran en la figura 3.12.

En lo que respecta a una comparación entre las figuras 3.13 y 3.14 se confirma lo dicho en la comparación entre las figuras 3.11 y 3.12. Sin embargo, analizando las figuras 3.12 y 3.14, se aprecia claramente una mejoría de la

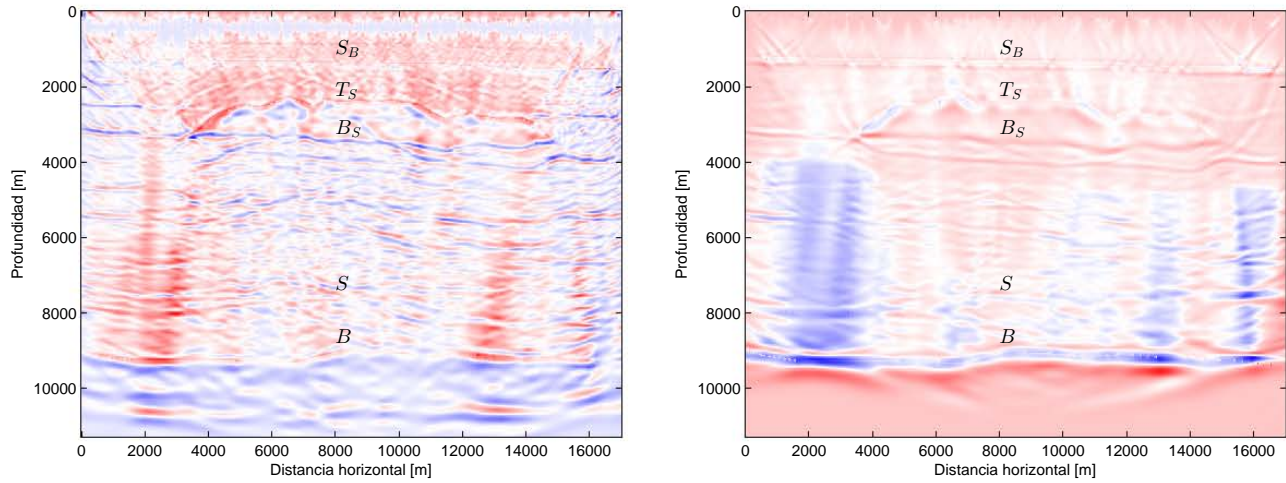


Figura 3.11: Kernel lambda, fuentes simultáneas, algoritmo RTM convencional. Datos observados con múltiples. Figura 3.12: Kernel lambda, fuentes simultáneas, algoritmo RTM-WFS. Datos observados con múltiples.

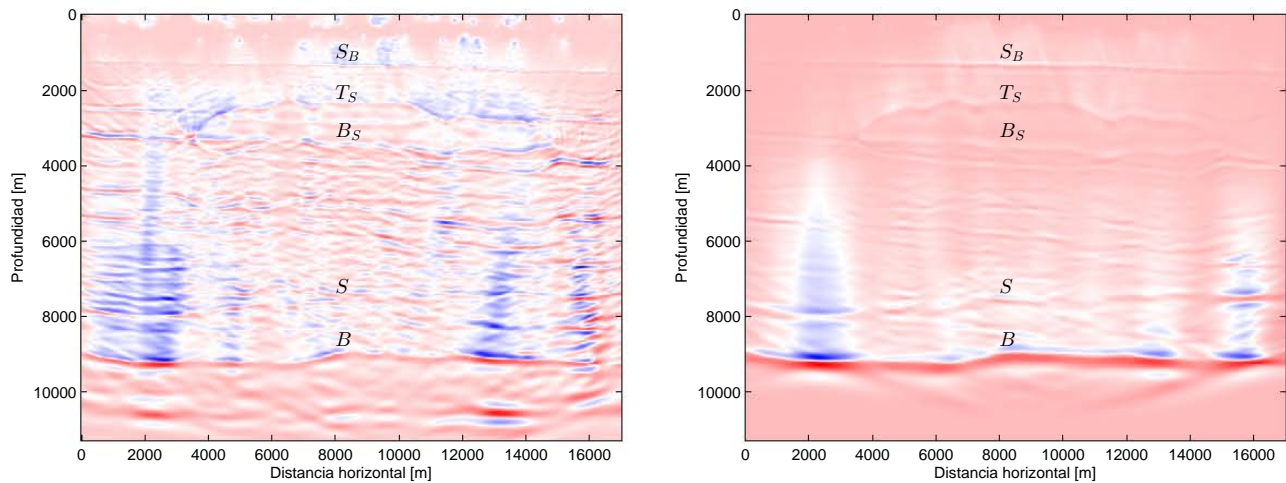


Figura 3.13: Kernel rho, fuentes simultáneas, algoritmo RTM convencional. Figura 3.14: Kernel rho, fuentes simultáneas, algoritmo RTM-WFS.

figura 3.14 en la definición de la arenisca y en la atenuación de los múltiples que se encuentran entre la base de la sal y la arenisca.

Las figuras 3.15 y 3.16 muestran una comparación de las amplitudes normalizadas en metros, que provienen de perfiles en profundidad que se obtuvieron al migrar los datos del receptor 425, el cual se encuentra justo en la mitad del modelo. Los valores del perfil sísmico están normalizados. A partir de la figura 3.10, se analizó el múltiple de orden 1 del fondo marino, el cual se localiza en el eje del tiempo entre el segundo 3 y el 4 debajo del primario de

la base de la sal. En la figura 3.15 el valor mínimo se localiza a una profundidad de 3927 metros con una amplitud de -0.407 metros, el valor máximo está a una profundidad de 4027 metros con una amplitud de 0.512 metros; en la figura 3.16, el valor máximo y mínimo en las mismas profundidades son de 0.138 y 0.086 metros. Por lo que el valor absoluto de la diferencia de amplitudes es de 0.919 metros para la figura 3.15 y de 0.052 metros para la figura 3.15. Entonces se puede afirmar que el múltiple se atenuó un 94.35 %. Además se puede observar claramente de las figuras 3.12, 3.11, y 3.16 que la amplitud de las capas que se ubican debajo de la sal incrementan.

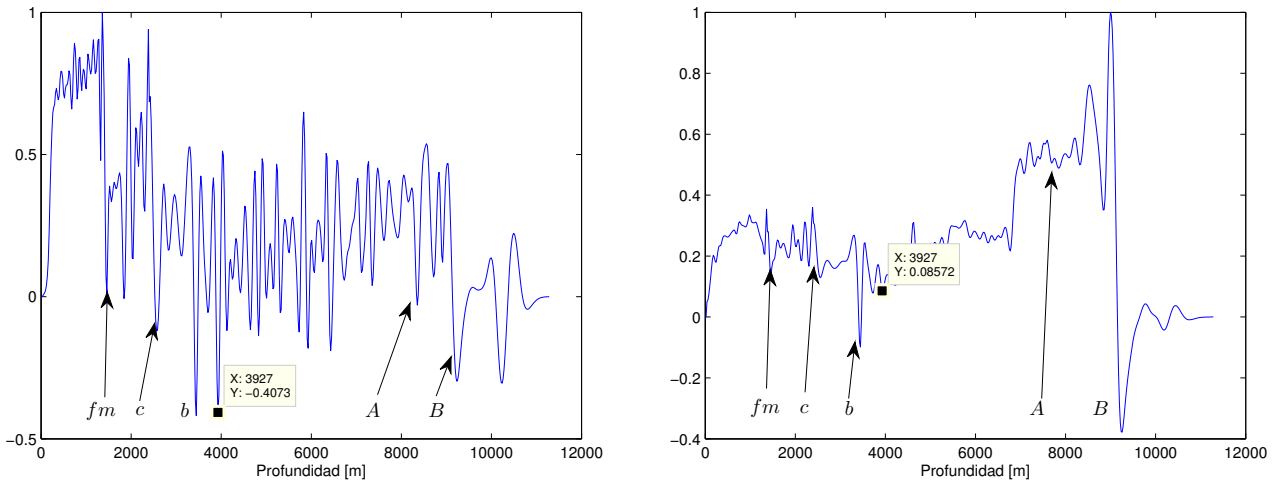


Figura 3.15: Perfil en profundidad del receptor 425, algoritmo RTM. Figura 3.16: Perfil en profundidad del receptor 425, algoritmo RTM-WFS.

## 3.2. Datos observados sin múltiples.

### 3.2.1. Una fuente.

Las imágenes 3.17, 3.18, 3.19, y 3.20; son los kernels kappa y rho con los algoritmos RTM y RTM-WFS respectivamente. Aunque se percibe una mejoría de las figuras 3.18 y 3.20 respecto a las figuras 3.17 y 3.19, existen ciertos problemas en los kernels obtenidos con el algoritmo RTM-WFS; por ejemplo arriba de la arenisca aparece un evento espurio bien definido entre otros múltiples que no se eliminan correctamente. Este hecho se puede atribuir a que los dos campos de onda usados para calcular la fuente adjunta son los mismos (en el caso de datos sintéticos), esto puede generar problemas computacionales.

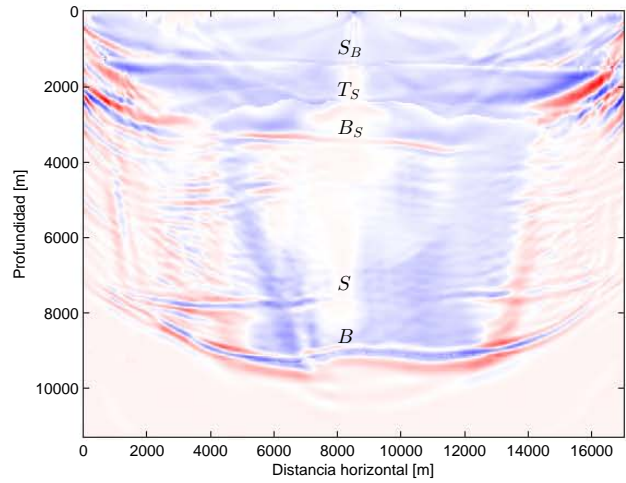
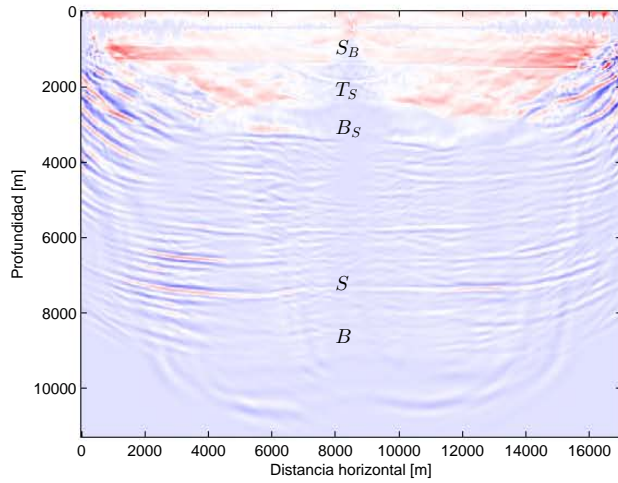


Figura 3.17: Kernel rho. Una fuente. Algoritmo RTM. Da-Figura 3.18: Kernel rho. Una fuente. Algoritmo RTM-tos observados sin múltiples.

WFS. Datos observados sin múltiples.

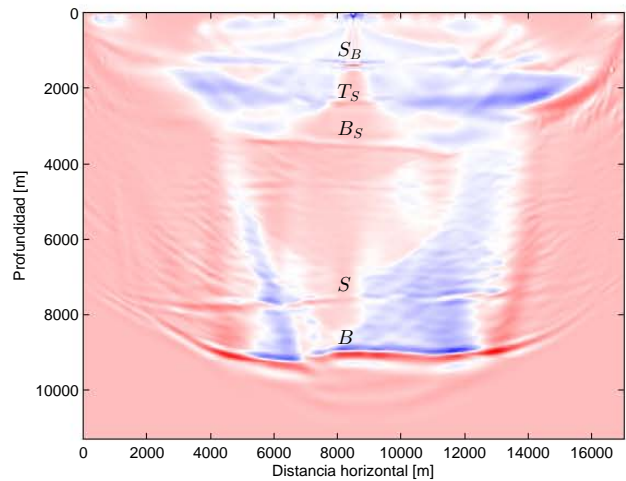
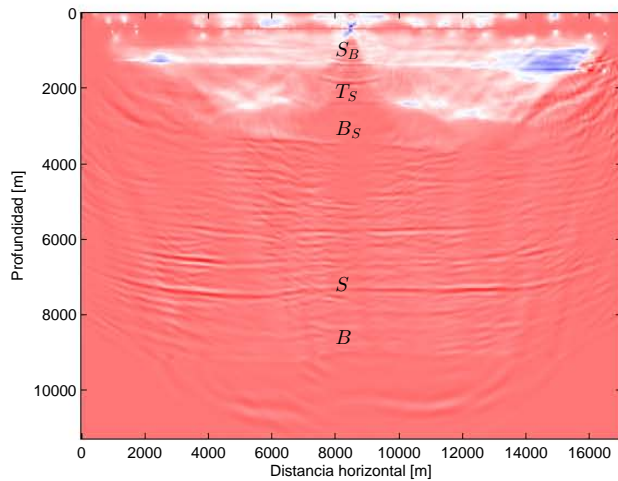


Figura 3.19: Kernel rho. Una fuente. Algoritmo RTM. Da-Figura 3.20: Kernel rho. Una fuente. Algoritmo RTM-tos observados sin múltiples.

WFS. Datos observados sin múltiples.

### 3.2.2. Fuentes simultáneas.

Analizando las figuras 3.21 y 3.22, se puede apreciar que a pesar de haber eliminado los múltiples de los datos observados, estos aparecen en la figura 3.21 afectando notablemente la imagen. No obstante, en la imagen 3.22 se aprecia una gran mejora en lo que respecta a los múltiples. Como en la subsección anterior, se confirma nuevamente el hecho de que las capas subsalinas y el cuerpo de sal se marcan con mayor claridad en las figuras empleando el

algoritmo RTM-WFS.

Las figuras 3.23 y 3.24 confirman lo expresado en el párrafo anterior. Los múltiples aparecen en la sección migrada de la imagen 3.23, mientras que la imagen 3.24 está libre de estos eventos, o se encuentran muy atenuados.

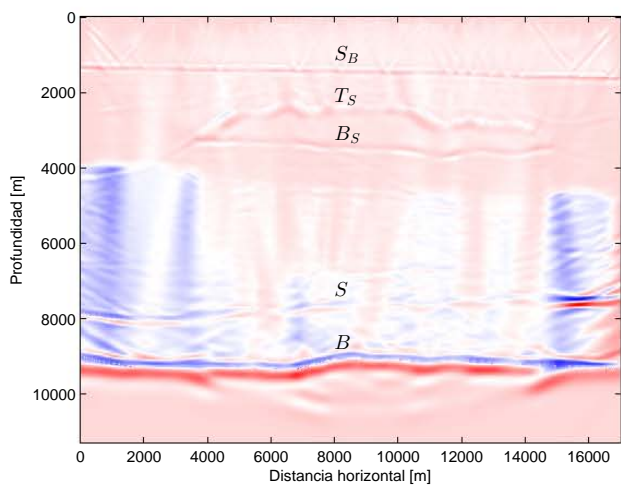
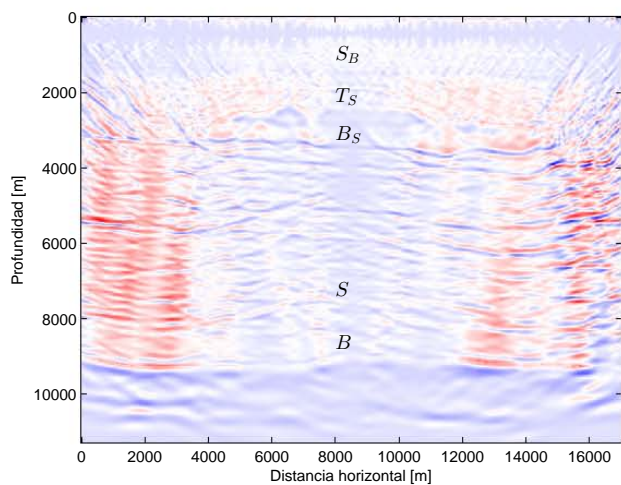


Figura 3.21: Kernel lambda. Fuentes simultáneas Algoritmo RTM. Datos observados sin múltiples. Figura 3.22: Kernel lambda. Fuentes simultáneas. Algoritmo RTM-WFS. Datos observados sin múltiples.

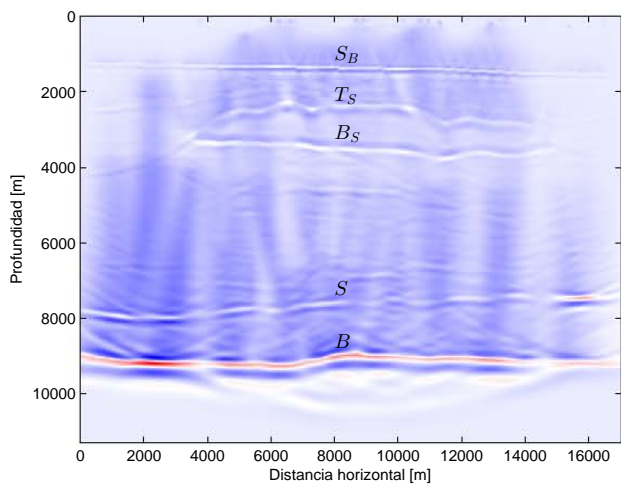
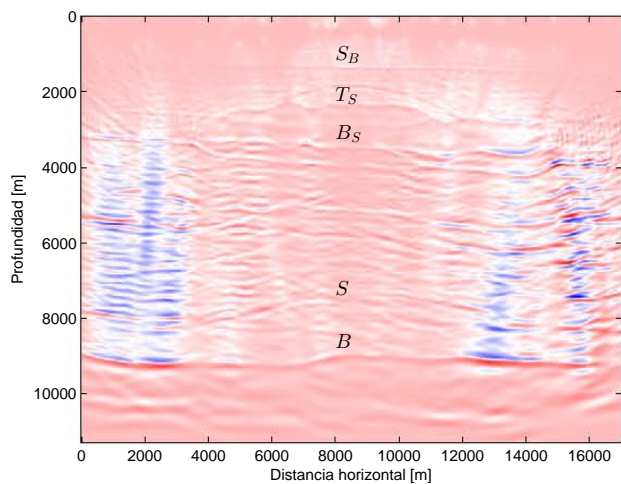


Figura 3.23: Kernel rho. Fuentes simultáneas Algoritmo RTM. Datos observados sin múltiples. Figura 3.24: Kernel rho. Fuentes simultáneas. Algoritmo RTM-WFS. Datos observados sin múltiples.



### 3.3. Diferencia entre los kernels

En esta sección, se analizarán las diferencias entre los kernels que se obtuvieron usando el algoritmo RTM con fuentes simultáneas. Las figuras 3.25 y 3.26, muestran la diferencia entre los kernels lambda obtenidos a partir de datos observados con múltiples. Se puede apreciar que los múltiples de destacan sobre los primarios. Aunque debido a que la forma de las ondas se modifica un poco al aplicar una frontera absorbente en el lugar de la superficie libre, la diferencia entre ambas figuras no proporciona una imagen correcta de los efectos de la atenuación de múltiples por medio de la RTM-WFS. Las figuras de los kernels rho 3.27 y 3.28, confirman lo confirmado anteriormente.

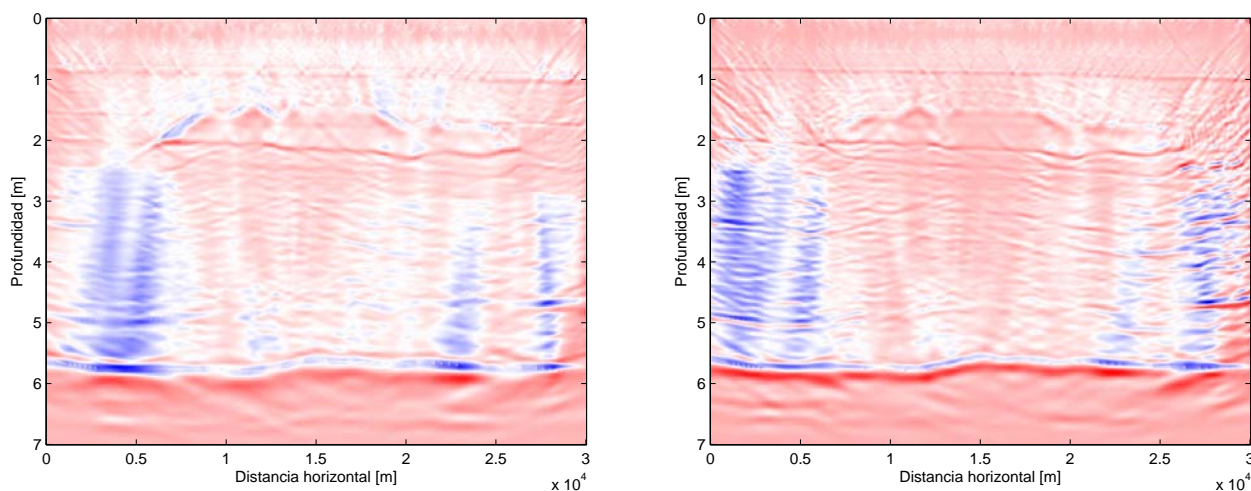


Figura 3.25: Kernel rho. Fuentes simultáneas Algoritmo RTM. Datos observados sin múltiples.

Figura 3.26: Diferencia entre los kernels lambda obtenidos con el algoritmo RTM convencional y RTM-WFS.

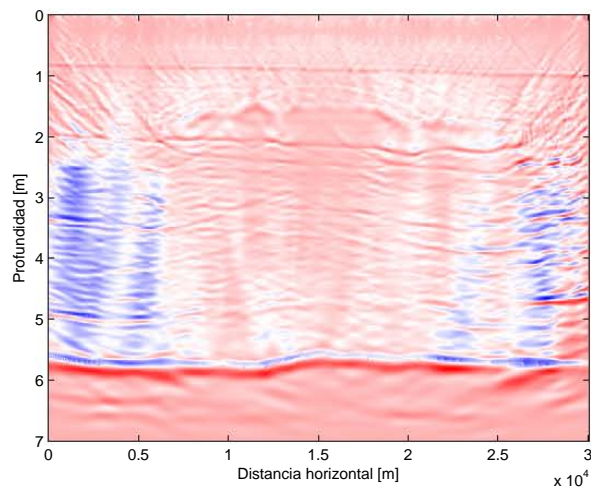
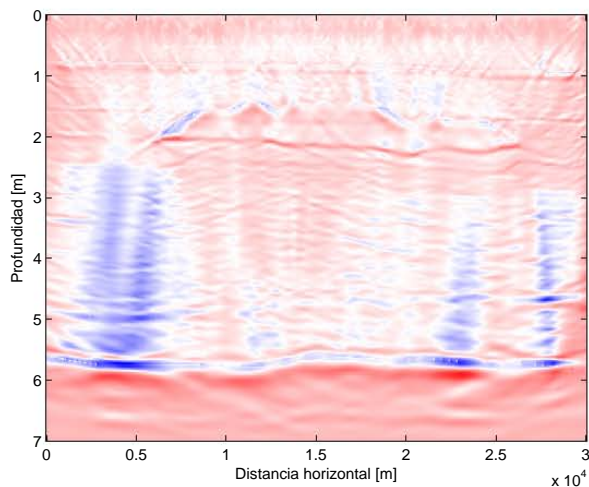


Figura 3.27: Kernel rho. Fuentes simultáneas Algoritmo RTM. Datos observados sin múltiples.

Figura 3.28: Diferencia entre los kernels rho obtenidos con el algoritmo RTM convencional y RTM-WFS.

### 3.4. Datos reales.

En esta sección se presentarán comparaciones de los kernels lambda con fuentes simultáneas debido a que los datos se encuentran apilados. Las figuras 3.29 y 3.30 representan los kernels obtenidos a partir de la migración RTM convencional y la RTM-WFS, ambas imágenes se encuentran en la misma escala de colores. Los modelos de velocidad y densidad que se ocuparon en la migración se muestran en las figuras 2.20, 2.21 respectivamente.

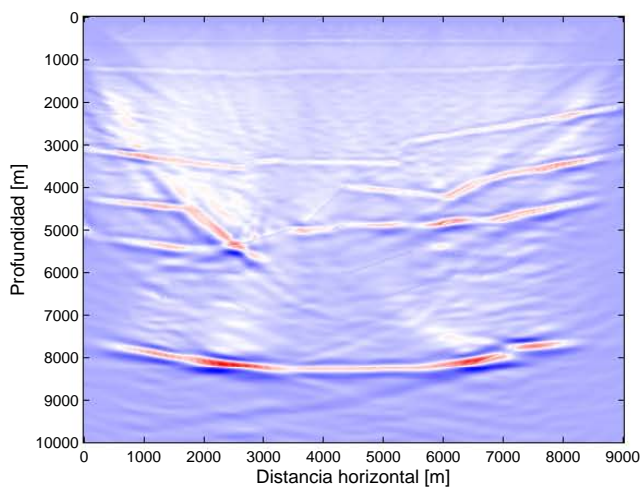
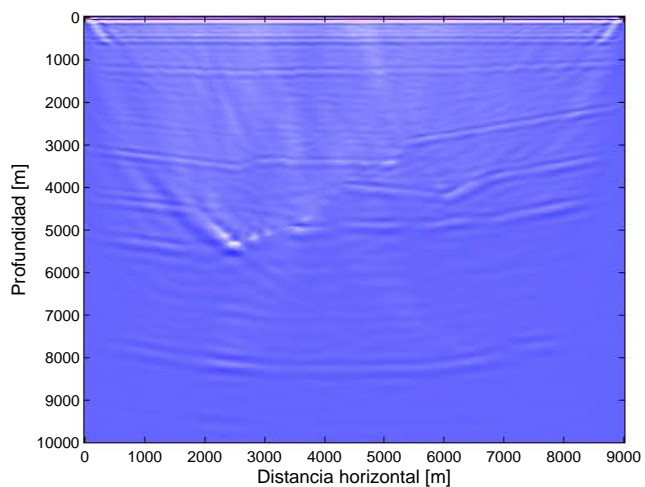


Figura 3.29: Kernel lambda, datos reales, algoritmo RTM convencional.

Figura 3.30: Kernel lambda, datos reales, algoritmo RTM-WFS.

Se puede apreciar que las capas tienen una mayor amplitud en la figura 3.30 y por lo tanto se definen mejor. Entre una profundidad de 1000 y 3000 metros se aprecian varias capas que muy seguramente provienen de eventos múltiples en la figura 3.29, las cuales desaparecen en la figura 3.30. Entre los 5000 y 8000 metros se puede comprobar nuevamente el fenómeno anteriormente mencionado. No obstante, a pesar de una considerable mejoría de la figura 3.30 respecto a la 3.29, existen ciertos problemas hacia los lados de la imagen. Para fines de interpretación es más conveniente trabajar con la imagen 3.30.

La figura 3.30 muestra la interface agua-sedimento entre los 0 y 1000 metros de profundidad. Hacia la región central del modelo entre los 3000 y 5000 metros se encuentra una zona de fallas normales. Debajo de esta sección, se encuentra un cuerpo de sal entre los 6000 y 7000 metros, el cual se debe definir mejor en las próximas iteraciones. Por último, se localiza el basamento entre los 7000 y 8000 metros.

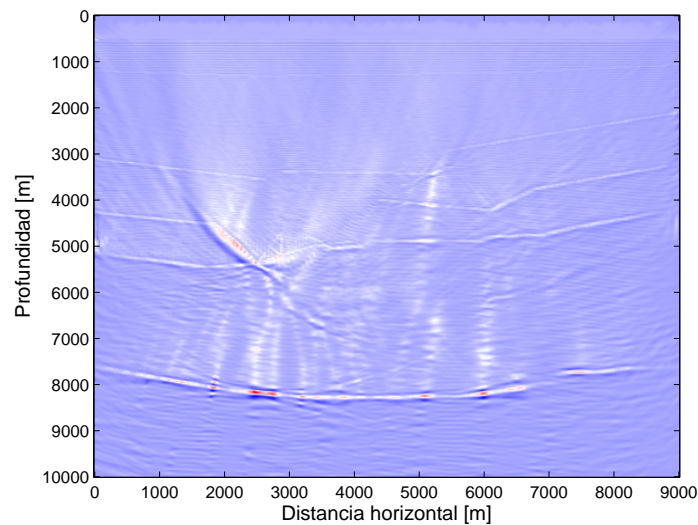


Figura 3.31: Kernel lambda, datos reales, algoritmo RTM-WFS, frecuencia de  $10[Hz]$ .

Con el objeto de mejorar la imagen, se procedió a aumentar a  $10[Hz]$  la frecuencia de la fuente. Se puede observar en la figura 3.31 que la resolución aumenta de manera considerable respecto a la figura 3.30. Este efecto ocasiona que se distingan unas capas de sedimentos localizadas hacia la superficie, además los estratos se definen mejor.

# Conclusiones y discusión

*Y si tuviese profecía, y entendiese todos los misterios y toda ciencia, y si  
tuviese toda la fe, de tal manera que trasladase los montes, y no tengo  
amor, nada soy*  
*1 Corintios*

---

## Conclusiones principales.

- **Múltiples en la RTM convencional:** El algoritmo RTM convencional genera múltiples. A pesar de que los datos observados no contengan estos eventos, las condiciones de superficie libre que imperan en este algoritmo producen eventos múltiples, los cuales al aplicar la condición de imagen, generan kernels con gran cantidad de eventos espurios.
- **Eliminación de múltiples en el proceso de migración:** El método RTM-WFS permite efectuar la migración sin necesidad de un paso previo de eliminación de múltiples con resultados muy buenos. No obstante, para mejorar más la imagen, se recomienda atenuar antes los múltiples en los datos observados.

## Otras conclusiones.

- **Onda directa:** Debido a que en la mayoría de las adquisiciones de datos sísmicos se elimina la onda directa. En los métodos de migración reversa en tiempo, cuando la fuente se encuentra en la superficie, es importante eliminar la onda directa de los datos sintéticos. En el kernel rho (figura 3.6) la amplitud de la fuente ocasiona que no se detecten los estratos del subsuelo; en el caso del kernel lambda (figura 3.5) se logran apreciar las capas interiores, aunque no con tanta claridad como cuando se elimina la onda directa de los sismogramas (figura 3.2).
- **Normalización:** La mejor forma de normalizar los kernels es dividiéndolos entre el campo de ondas de los receptores  $\mathcal{S}_i^\dagger$ ; este hecho se puede atribuir a que el campo de ondas  $\mathcal{S}_i^\dagger$  contiene una diferencia entre los datos sintéticos y los reales, mientras que el campo de ondas  $\mathcal{S}_i$  únicamente contiene la información de los datos sintéticos.

- **Absorción de la energía múltiple:** Se puede afirmar que el hecho de sustituir la condición de superficie libre por una condición de frontera absorbente en el esquema computacional, ocasiona que la energía múltiple originada en la superficie libre y otros eventos espurios no queden registrados en los sismogramas.
- **Kernels con una sola fuente:** El campo de ondas  $\mathcal{S}_i$  (que no contiene múltiples), provoca a que el resultado del producto entre los campos de ondas  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{S}_i^\dagger$  (ecuación 3.1) tenga los múltiples de superficie libre atenuados. Por lo tanto los kernels aparecen sin estos eventos. Véanse la comparación entre las figuras 3.1 y 3.2; y las figuras 3.3 y 3.4.
- **Kernels con fuentes simultáneas:** Al asignar fuentes simultáneas en el algoritmo RTM, se produce un efecto de offset cero, el cual produce que los kernels se asemejen a una imagen apilada. Se puede afirmar que el algoritmo RTM-WFS también produce buenos resultados en datos apilados, de hecho los múltiples se atenúan un 94.35 % respecto al algoritmo RTM. Véase la comparación entre las figuras 3.11 y 3.12 y las figuras 3.13 y 3.14.
- **Datos reales:** Con base en los resultados mostrados en las figuras 3.29 y 3.30, podemos afirmar que el algoritmo RTM-WFS produce imágenes más propicias para la interpretación, debido a que los reflectores se marcan mejor debido a que la energía múltiple y otros eventos como las difracciones no interfieren con los eventos primarios.

### Consideraciones.

Es de vital importante normalizar los dos campos de ondas antes de efectuar la correlación, hay diversas formas de normalizar. En este trabajo se normalizaron los dos campos de ondas dividiéndolos entre su valor máximo.

Un parámetro que sería conveniente estudiar con más detalle, es el coeficiente de reflexión hipotético  $R_c$  presente en la subsección 2.1.4 cuando se define el perfil de amortiguamiento de las condiciones de frontera absorbente. Se probaron varios valores del coeficientes de reflexión; no obstante las imágenes resultantes no diferían mucho entre ellas, sería un buen caso de estudio cuantificar el efecto de este parámetro durante el proceso de migración, y de esta manera abrir la posibilidad de mejorar los resultados.

También es importante analizar el parámetro  $A$  presente en la ecuación 2.2, el cual escala la amplitud de la fuente; este análisis tendría más relevancia en datos reales dado que se podría estimar la amplitud de la fuente e implementarla en el algoritmo. Los resultados podrían ser mejores. Aunque el hecho de normalizar los dos campos de onda pareciera quitarle importancia a este parámetro, sería importante comprobarlo.

# Referencias

- [Baysal et al., 1983] Baysal, E., Kosloff, D. D., and Sherwood, J. W. (1983). Reverse time migration. *Geophysics*, 48(11):1514–1524.
- [Berenger, 1994] Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2):185–200.
- [Berkhout and Verschuur, 2006] Berkhout, A. and Verschuur, D. (2006). Imaging of multiple reflections. *Geophysics*, 71(4):SI209–SI220.
- [Chang and McMechan, 1986] Chang, W.-F. and McMechan, G. A. (1986). Reverse-time migration of offset vertical seismic profiling data using the excitation-time imaging condition. *Geophysics*, 51(1):67–84.
- [Chang and McMechan, 1987] Chang, W.-F. and McMechan, G. A. (1987). Elastic reverse-time migration. *Geophysics*, 52(10):1365–1375.
- [Chattopadhyay and McMechan, 2008] Chattopadhyay, S. and McMechan, G. A. (2008). Imaging conditions for prestack reverse-time migration. *Geophysics*, 73(3):S81–S89.
- [Claerbout et al., 1985] Claerbout, J. F., Green, C., and Green, I. (1985). *Imaging the earth's interior*, volume 6. Blackwell scientific publications Oxford.
- [Collino and Tsogka, 1998] Collino, F. and Tsogka, C. (1998). *Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media*. PhD thesis, INRIA.
- [Fletcher et al., 2006] Fletcher, R. P., Fowler, P. J., Kitchenside, P., and Albertin, U. (2006). Suppressing unwanted internal reflections in prestack reverse-time migration. *Geophysics*, 71(6):E79–E82.
- [Foster and Mosher, 1992] Foster, D. J. and Mosher, C. C. (1992). Suppression of multiple reflections using the radon transform. *Geophysics*, 57(3):386–395.
- [García, 1983] García, L. B. (1983). Domos salinos del sureste de Mexico. origen: Exploracion: Importancia economica. in spanish. salt domes of southeastern Mexico. origin: Exploration. economic importance.

- [Hamlin, 2006] Hamlin, H. S. (2006). Salt domes in the gulf coast aquifer. *Aquifers of the Gulf Coast of Texas*, Mace, RE, Davidson, SC, Angle, ES, and Mullican, WF, eds., Texas Water Development Board, Report, 365:217–230.
- [Hudson and Heritage, 1981] Hudson, J. and Heritage, J. (1981). The use of the born approximation in seismic scattering problems. *Geophysical Journal International*, 66(1):221–240.
- [Jiang et al., ] Jiang, Z., Bancroft, J. C., and Lines, L. R. Reverse-time migration imaging with/without multiples.
- [Jones and Davison, 2014a] Jones, I. F. and Davison, I. (2014a). Seismic imaging in and around salt bodies. *Interpretation*, 2(4):SL1–SL20.
- [Jones and Davison, 2014b] Jones, I. F. and Davison, I. (2014b). Seismic imaging in and around salt bodies. *Interpretation*, 2(4):SL1–SL20.
- [Kaelin and Guitton, 2006] Kaelin, B. and Guitton, A. (2006). Imaging condition for reverse time migration. In *Seg technical program expanded abstracts 2006*, pages 2594–2598. Society of Exploration Geophysicists.
- [Komatitsch and Martin, 2007] Komatitsch, D. and Martin, R. (2007). An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *Geophysics*, 72(5):SM155–SM167.
- [Kosloff and Kosloff, 1986] Kosloff, R. and Kosloff, D. (1986). Absorbing boundaries for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics*, 63(2):363–376.
- [Liu and Tao, 1997] Liu, Q.-H. and Tao, J. (1997). The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4):2072–2082.
- [Liu et al., 2015] Liu, Y., Hu, H., Xie, X.-B., Zheng, Y., and Li, P. (2015). Reverse time migration of internal multiples for subsalt imaging. *Geophysics*, 80(5):S175–S185.
- [Mitchell and Griffiths, 1980] Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F. (1980). *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley.
- [Monteiller et al., 2015] Monteiller, V., Chevrot, S., Komatitsch, D., and Wang, Y. (2015). Three-dimensional full waveform inversion of short-period teleseismic wavefields based upon the sem-dsm hybrid method. *Geophysical Journal International*, 202(2):811–827.
- [Roden and Gedney, 2000] Roden, J. A. and Gedney, S. D. (2000). Convolutional pml (cpml): An efficient ftdt implementation of the cfs-pml for arbitrary media. *Microwave and optical technology letters*, 27(5):334–338.
- [Sheriff, 2002] Sheriff, R. E. (2002). *Encyclopedic dictionary of applied geophysics*. Society of exploration geophysicists.
- [Stein and Wysession, 2009] Stein, S. and Wysession, M. (2009). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. John Wiley & Sons.

- 
- [Tarantola, 1984] Tarantola, A. (1984). Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49(8):1259–1266.
- [Tromp et al., 2005] Tromp, J., Tape, C., and Liu, Q. (2005). Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophysical Journal International*, 160(1):195–216.
- [Verschuur and Berkhout, 1992] Verschuur, D. and Berkhout, A. (1992). Surface-related multiple elimination: practical aspects. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1992*, pages 1100–1103. Society of Exploration Geophysicists.
- [Virieux, 1986] Virieux, J. (1986). P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4):889–901.
- [Youn and Zhou, 2001] Youn, O. K. and Zhou, H.-w. (2001). Depth imaging with multiples. *Geophysics*, 66(1):246–255.
- [Zhang and Schuster, 2013] Zhang, D. and Schuster, G. T. (2013). Least-squares reverse time migration of multiples. *Geophysics*, 79(1):S11–S21.