UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOLUCIONES PERIÓDICAS EN LA DINÁMICA DE TRES NEURONAS CON RETARDO

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA
EDGAR RODRÍGUEZ MENDIETA

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. RENATO CARLOS CALLEJA CASTILLO, IIMAS, UNAM.

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE DE 2017

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Soluciones Periódicas en la Dinámica de Tres Neuronas con Retardo

Edgar Rodríguez Mendieta

Septiembre de 2017

Índice general

Introducción

El sistema nervioso permite que el organismo responda a los cambios de su medio externo e interno, además controla e integra las funciones del organismo.

Desde el punto de vista anatómico, el sistema nervioso se divide en dos: el Sistema Nervioso Central (abreviado SNC, formado por el encéfalo y la médula espinal) y el Sistema Nervioso Periférico (abreviado SNP, compuesto por nervios craneales, espinales y periféricos que conducen los impulsos desde el SNC y hacia él).

La neurona es la unidad estructural y funcional del tejido nervioso. El SNC contiene más de 100000 millones de neuronas (ver el Capítulo 45, en [7], página 543), que se comunican entre sí y con células efectoras por medio de sinapsis. Las sinapsis son relaciones de contigüidad especializadas entre neuronas que facilitan la transmisión de los impulsos desde una neurona (presináptica) hacia otra (postsináptica). Es posible clasificar a las sinapsis en químicas (donde la conducción de impulsos se consigue con la liberación de sustancias químicas, llamadas neurotransmisores, desde la neurona presináptica) y en eléctricas (que se caracterizan por la presencia de canales fluidos abiertos que conducen electricidad directamente desde una célula a la siguiente). Las sinapsis químicas poseen una característica que las convierte en un elemento importante para transmitir información: siempre conducen en un sólo sentido, es decir, desde la neurona presináptica hasta la neurona postsináptica. Este es el principio de la conducción unidireccional de las sinapsis químicas y se aleja bastante de la conducción a través de las sinapsis eléctricas, que transmiten en ambos sentidos. La importancia del mecanismo de conducción unidireccional es que da la oportunidad de enviar señales dirigidas hacia objetivos específicos.

La anatomía básica de una neurona está compuesta de tres partes fundamentales: el soma (cuerpo principal de la neurona), el axón (que en neuronas motoras es único y se extiende desde el soma hacia un nervio periférico) y las dendritas, que constituyen una gran cantidad de prolongaciones ramificadas del soma. La liberación de neurotransmisores por el componente presináptico pueden causar excitación o inhibición en la membrana postsináptica; sobre la superficie de las dendritas y del soma de la neurona se hallan entre 10000 y 200000 terminales presinápticas, estas terminales son excitadas (es decir, segregan sustancias transmisoras como acetilcolina, glutamina o serotonina, que estimulan a la neurona postsináptica) o son inhibidoras (que liberan neurotransmisores como ácido $\gamma-$aminobutírico o glicina, que inhibe a la neurona postsináptica). Para obtener más información sobre el sistema nervioso, puede consultarse [7] y [18].

Uno de los primeros trabajos de investigación que tratan de modelar la interacción entre las neuronas (tomando en cuenta los datos mencionados anteriormente) es el famoso artículo de J. J. Hopfield (ver [13]). Para una mejor comprensión del modelo y su origen, presentamos la deducción del mismo tal como se muestra en [9] y [13].

Se describe una red neuronal como una red de amplificadores (neuronas electrónicas) interconectadas a través de una matriz de resistencias, por lo que la red electrónica consiste en un amplificador no lineal que transforma la señal de entrada u_i en la señal de salida v_i y la señal de impedancia de entrada del amplificador por unidad es descrita por la combinación de una resistencia ρ_i y un condensador C_i.

Se asume que la relación de entrada-salida está completamente determinada por una función (a menudo continua, monótona y creciente) de amplificación de voltaje $v_i = f_i(u_i)$. Las conexiones sinápticas de la red están representadas por resistores R_{ij} que conectan la terminal de salida del $j-$ésimo amplificador con la parte de entrada de la $i-$ésima neurona.

Para que la red funcione correctamente, las resistencias R_{ij} deben ser capaces de tomar valores negativos. Esto puede hacerse suministrando a cada amplificador una línea de salida inversora que produzca la señal $-v_j$. El número de filas en la matriz de resistencias se duplica y siempre que se necesite un valor negativo de R_{ij} podremos usar una resistencia ordinaria que esté conectada a la línea de salida inversora.

La evolución del tiempo de las señales de la red se describen mediante la Primera Ley de Kirchhoff: *en cualquier sistema, la suma de las corrientes que entran en ese sistema es igual a la suma de las corrientes que salen.* Es decir

$$C_i \frac{du_i}{dt} + \frac{u_i}{\rho_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_{ij}} (v_i - u_i), \tag{1}$$

definiendo $\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_{ij}}$, entonces (1) se escribe como

$$C_i R_i \frac{du_i(t)}{dt} + u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_i}{R_{ij}} v_i(t). \tag{2}$$

El modelo asume implícitamente que las neuronas se comunican (y responden) instantáneamente, sin embargo existen características especiales de la transmisión sináptica que hacen referencia a que la interacción no es instantánea, tales como (ver [7]) la fatiga de la transmisión sináptica (las sinapsis excitadoras reciben estímulos repetidos a un ritmo elevado), los efectos de la acidosis o alcalosis sobre la transmisión sináptica (debido a que las neuronas son muy sensibles a los cambios del pH en los líquidos intersticiales que los rodean), los efectos de la hipoxia sobre la transmisión sináptica (la interrupción, aún de pocos segundos, de oxígeno puede ocasionar ausencia completa de excitabilidad en algunas neuronas), los efectos de los fármacos sobre la transmisión sináptica (el uso de sustancias tales como cafeína, teofilina y teobromina incrementan la excitabilidad en las células) o el retraso sináptico. Esto último significa que durante la transmisión de una señal neuronal desde una neurona presináptica hasta otra postsináptica, se consume cierta cantidad de tiempo en el proceso siguiente: 1) emisión de la sustancia transmisora por la terminal presináptica; 2) difusión del transmisor hacia la membrana neuronal postsináptica; 3) acción del transmisor sobre el receptor de la membrana, 4) intervención del receptor para aumentar la permeabilidad de la membrana y 5) entrada de sodio por difusión para elevar el potencial postsináptico excitado hasta un nivel suficientemente alto como para desencadenar un potencial de acción. El período mínimo necesario para que tengan lugar todos estos fenónemos, incluso cuando se estimula simultáneamente un gran número de sinapsis excitadoras, es de unos 0.5 ms (ver [7], página 558), esto se denomina retraso sináptico. Los neurofisiólogos pueden medir el tiempo de retraso mínimo transcurrido entre la llegada de una lluvia de impulsos a un conjunto de neuronas y la correspondiente lluvia de salida. Una vez recogido este dato, ya se puede calcular el número de neuronas sucesivas que forman el circuito.

Puesto que existen factores que implican el retardo en la transmisión, entonces el modelo (2) se vuelve más realista haciendo que la velocidad de entrada-salida de los amplificadores se sustituya por $v_i(t) = f_i(u_i(t - r_i))$, con $r_i > 0$. Obteniendo el sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo

$$C_i R_i \frac{du_i(t)}{dt} = -u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{R_i}{R_{ij}} f_j(u_j(t - r_j)), \quad 1 \le i \le n. \tag{3}$$

Para simplificar (3) asumiremos que $C_i = C$, $R_i = R$, $1 \le i \le n$. Así, todos los tiempos de relajación local $C_i R_i = CR$ son iguales. Reescalando el tiempo de retardo respecto al tiempo de relajación de la red y reescalando el tiempo de conexión sináptica $x_i(t) = u_i(CRt)$, $\tau_j = \dfrac{r_j}{RC}$, $a_{ij} = \dfrac{R}{R_{ij}}$ obtenemos

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)), \quad 1 \le i \le n. \tag{4}$$

Con base en el sistema (4), K. Gopalsamy y I. Leung, en *Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition*, ([8]), estudian la dinámica de dos neuronas que constituyen un sistema activador-inhibidor, modelado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + a \tanh(c_1 y(t - \tau)), \\ \dot{y}(t) = -y(t) + a \tanh(-c_2 x(t - \tau)), \end{cases} \tag{5}$$

con a, c_1, c_2 y τ son constantes positivas y τ es el tiempo de retardo sináptico; y denota un potencial activador de x, y x denota un potencial inhibidor, también se puede ver a x como el potencial medio del soma de las neuronas que inhibe la acción de otro grupo de neuronas, cuyo voltaje está denotado por y.

El presente trabajo está inspirado principalmente en el curso de Ecuaciones Diferenciales con Retardo, impartido en el Posgrado en Ciencias de la UNAM, por el Dr. Renato Calleja, en cuyo curso se estudiaron técnicas modernas en Ecuaciones Diferenciales con Retardo; a partir del trabajo de [13] varias investigaciones han dado lugar, tales como [1], [3], [8] ó [9]. En particular, se busca información referente a procesos cognitivos tales como asociación, memoria y aprendizaje (ver [14]), lo que matemáticamente es equivalente a analizar datos sobre puntos de equilibrio, estabilidad asintótica o cambios topológicos en la dinámica del sistema, como bifurcaciones de silla-nodo, Neimark-Sacker o de Hopf (ver [2], [6], [9], [10], [11], [12], [16], [19]).

Con el fin de mostrar de manera clara y amena los resultados, este trabajo está dividido en tres capítulos. En el capítulo 1 se introduce el modelo de tres neuronas con retardo a estudiar, se muestra un resultado sobre estabilidad de la solución trivial de dicho modelo y se hace un análisis del sistema de tres neuronas con comunicación instantánea, a fin de mostrar la diferencia topológica (mediante bifurcaciones) de la comunicación con retardo y la comunicación instantánea.

En el capítulo 2 desarrollamos la herramienta necesaria para estudiar el modelo de tres neuronas con retardo como una ecuación diferencial funcional, utilizando [9] y [10] como referencias principales. Además exponemos la serie de Lindstedt del sistema a estudiar, buscando condiciones para hallar una solución periódica mediante este método.

Finalmente, en el capítulo 3 se calcula la solución periódica del sistema de tres neuronas con retardo, a través de una serie de Lindstedt, mostrando también la importancia de satisfacer las condiciones de la Bifurcación de Hopf para evitar fenómenos no deseados, tales como la resonancia. Respecto al cálculo de soluciones mediante series de Lindstedt, las Proposiciones (2.2.2) y (2.3.3) son propias del autor.

Capítulo 1

Sistema de Tres Neuronas con Retardo

A partir del modelo estudiado en [8], introducimos un sistema de tres neuronas con retardo $\tau > 0$, teniendo por constantes de conexión aquellas definidas de manera análoga como en (4) y (5), añadimos una constante s_0 que sólo toma los valores -1 y 1 para mostrar cómo las neuronas forman un sistema activador-inhibidor.

El sistema a estudiar es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + a\tanh(c_1 y(t-\tau)), \\ \dot{y}(t) = -y(t) + a\tanh(s_0 c_2 z(t-\tau)), \\ \dot{z}(t) = -z(t) + a\tanh(s_0 c_3 x(t-\tau)), \end{cases} \tag{1.1}$$

donde a, c_1, c_2, c_3 son positivos y $s_0 \in \{-1, 1\}$. Claramente $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ es un punto de equilibrio. Es conveniente hacer un estudio sobre la estabilidad de $\mathbf{0}$ en (1.1) considerando los parámetros de conexión.

1.1. Puntos de equilibrio y su estabilidad

La siguiente proposición es una adaptación del Lema 1.1, en [8], página 397 y arroja condiciones suficientes para que $\mathbf{0}$ sea asintóticamente estable, independientemente del retardo τ.

Proposición 1.1.1. *Supongamos que los parámetros positivos a, c_1, c_2, c_3 satisfacen*

$$ac_1 < 1, \;\; ac_2 < 1, \;\; ac_3 < 1, \tag{1.2}$$

entonces la solución $\mathbf{0}$ de (1.1) es asintóticamente estable.

Demostración. Definamos un funcional de Lyapunov $V = V(x, y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ como

$$V(t) = |x(t)| + |y(t)| + |z(t)| + ac_1 \int_{t-\tau}^{t} |y(s)|\, ds + ac_2 \int_{t-\tau}^{t} |z(s)|\, ds + ac_3 \int_{t-\tau}^{t} |x(s)|\, ds,$$

De (1.1) y usando la desigualdad del triángulo se obtiene

$$
\begin{aligned}
&-x-a<\dot{x}<-x+a,\\
&-y-a<\dot{y}<-y+a,\\
&-z-a<\dot{z}<-z+a,
\end{aligned}
$$

mostrando así que nuestro sistema tiene un conjunto invariante

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3:|x|\leq a,|y|\leq a,|z|\leq a,\right\},$$

que es también un atractor.

Calculando la derivada superior por la derecha D^+V de V

$$
\begin{aligned}
D^+V\leq{}&-|x(t)|-|y(t)|-|z(t)|+a|\tanh(c_1y(t-\tau))|+a|\tanh(s_0c_2z(t-\tau))|\\
&+a|\tanh(s_0c_3x(t-\tau))|+ac_1(|y(t)|-|y(t-\tau)|)+ac_2(|z(t)|-|z(t-\tau)|)\\
&+ac_3(|x(t)|-|x(t-\tau)|),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

dado que $|\tanh(t)|\leq|t|$ para toda $t\in\mathbb{R}$, simplificamos el lado derecho de (1.3) como

$$D^+V\leq-(1-ac_1)|y(t)|-(1-ac_2)|z(t)|-(1-ac_3)|x(t)|,\tag{1.4}$$

integrando (1.4) sobre $[0,t]$

$$V(t)+(1-ac_1)\int_0^t|y(s)|ds+(1-ac_2)\int_0^t|z(s)|ds+(1-ac_3)\int_0^t|x(s)|ds\leq V(0).\tag{1.5}$$

Puesto que las soluciones x,y,z de (1.1) están acotados para todo $t\geq 0$, entonces $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ también están acotados para todo $t\geq 0$; del Teorema del Valor Medio x,y,z son uniformemente continuas en $[0,\infty)$, de (1.5) se deduce que $x,y,z\in\mathcal{L}^1([0,\infty))$. Se sigue del Lema de Barbalat (Lema 8.2, en [15], página 323) que

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0,\quad\lim_{t\to\infty}y(t)=0,\quad\lim_{t\to\infty}z(t)=0.$$

□

Por lo tanto, si los parámetros de conexión satisfacen (1.2) entonces no es posible inducir inestabilidad. En lo que sigue del trabajo, se buscarán condiciones para hallar inestabilidad y así obtener periodicidad.

1.2. Ausencia de retardo y sus consecuencias

Fisiológicamente se observa que la comunicación neuronal no es inmediata, sin embargo, es posible que la dinámica de (1.1) no cambie si existe o no algún retraso en la transmisión sináptica. En esta sección veremos por qué es importante estudiar el sistema con retardo τ. Para esto, supongamos que en (1.1) la interacción es instantánea, es decir

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t)=-x(t)+a\tanh(c_1y(t)),\\
\dot{y}(t)=-y(t)+a\tanh(s_0c_2z(t)),\\
\dot{z}(t)=-z(t)+a\tanh(s_0c_3x(t)).
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

Dicho sistema es autónomo. Definamos F como $F(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} -x + a\tanh(c_1 y) \\ -y + a\tanh(s_0 c_2 z) \\ -z + a\tanh(s_0 c_3 x) \end{pmatrix}$, separando a F en su parte lineal y no lineal obtenemos

$$F(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} -x + ac_1 y \\ -y + asc_2 z \\ -z + as_0 c_3 x \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} f(c_1 y) \\ f(s_0 c_2 z) \\ f(s_0 c_3 x) \end{pmatrix},$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definido como

$$f(s) = \tanh(s) - s. \tag{1.7}$$

La ecuación lineal asociada a (1.6) es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & ac_1 & 0 \\ 0 & -1 & as_0 c_2 \\ as_0 c_3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

El polinomio característico de (1.8) es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & ac_1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & as_0 c_2 \\ as_0 c_3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda + 1 - c)(\lambda + 1 - ce^{\frac{2\pi i}{3}})(\lambda + 1 - ce^{-\frac{2\pi i}{3}}), \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde $c = a(c_1 c_2 c_3)^{\frac{1}{3}}$.

El sistema (1.8) tiene por eigenvalores $\lambda_1 = \lambda_1(c) = c - 1$, $\lambda_2 = \lambda_2(c) = -1 + ce^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$; claramente $Re(\lambda_2) < 0$ para todo $c \in [0, \infty)$.

Un eigenvector correspondiente a λ_1 es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{ac_1} \\ \frac{as_0 c_3}{c} \end{pmatrix},$$

un eigenvector asociado a λ_2 es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}{ac_1} \\ \frac{c^2 e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{a^2 s_0 c_1 c_2} \end{pmatrix}.$$

Se define la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{c}{ac_1} & \frac{\sqrt{3}c}{2ac_1} & -\frac{c}{2ac_1} \\ \frac{as_0 c_3}{c} & -\frac{\sqrt{3}c^2}{2a^2 s_0 c_1 c_2} & -\frac{c^2}{2a^2 s_0 c_1 c_2} \end{pmatrix},$$

entonces

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{ac_1}{c} & \frac{a^2s_0c_1c_2}{c^2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}ac_1}{c} & -\frac{\sqrt{3}a^2s_0c_1c_2}{c^2} \\ 2 & -\frac{ac_1}{c} & -\frac{a^2s_0c_1c_2}{c^2} \end{pmatrix},$$

Por lo tanto

$$P^{-1}DF(\mathbf{0})P = \begin{pmatrix} c-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{c}{2} & -\frac{\sqrt{3}c}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}c}{2} & -1-\frac{c}{2} \end{pmatrix},$$

Considérese el cambio de variables $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, permitiendo que el sistema (1.6) se reescriba como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \lambda_1(c)\tilde{x} + \tilde{F}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}), \\ \begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1-\frac{c}{2} & -\frac{\sqrt{3}c}{2} \\ \frac{\sqrt{3}c}{2} & -1-\frac{c}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \\ \tilde{G}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{a}{3}\Bigg(& f\left[c_1\left(\frac{c}{ac_1}\tilde{x} + \frac{\sqrt{3}c}{2ac_1}\tilde{y} - \frac{c}{2ac_1}\tilde{z}\right)\right] \\ & + \frac{ac_1}{c}f\left[s_0c_2\left(\frac{as_0c_3}{c}\tilde{x} - \frac{\sqrt{3}c^2}{2a^2s_0c_1c_2}\tilde{y} - \frac{c}{2a^2s_0c_1c_2}\tilde{z}\right)\right] \\ & + \frac{a^2s_0c_1c_2}{c^2}f\left[s_0c_3\left(\tilde{x}+\tilde{z}\right)\right]\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{a}{3}\Bigg(& \frac{\sqrt{3}ac_1}{c}f\left[s_0c_2\left(\frac{as_0c_3}{c}\tilde{x} - \frac{\sqrt{3}c^2}{2a^2s_0c_1c_2}\tilde{y} - \frac{c}{2a^2s_0c_1c_2}\tilde{z}\right)\right] \\ & - \frac{\sqrt{3}a^2s_0c_1c_2}{c^2}f\left[s_0c_3\left(\tilde{x}+\tilde{z}\right)\right]\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{a}{3}\Bigg(& 2f\left[c_1\left(\frac{c}{ac_1}\tilde{x} + \frac{\sqrt{3}c}{2ac_1}\tilde{y} - \frac{c}{2ac_1}\tilde{z}\right)\right] \\ & - \frac{ac_1}{c}f\left[s_0c_2\left(\frac{as_0c_3}{c}\tilde{x} - \frac{\sqrt{3}c^2}{2a^2s_0c_1c_2}\tilde{y} - \frac{c}{2a^2s_0c_1c_2}\tilde{z}\right)\right] \\ & - \frac{a^2s_0c_1c_2}{c^2}f\left[s_0c_3\left(\tilde{x}+\tilde{z}\right)\right]\Bigg) \end{aligned}$$

y f está definida en (1.7).

Nótese que para $c \in [0,1)$, $\lambda_1(c) < 0$ y por tanto $\mathbf{0}$ es asintóticamente estable en (1.10); si $c > 1$ entonces $\lambda_1(c) > 0$ y en consecuencia $\mathbf{0}$ es inestable en (1.10). Sin embargo, con $c = 1$ se tiene $\lambda_1(1) = 0$, dando lugar a una bifurcación de Fold (ver Definición 3.1, en [16], página 78), luego, por el Teorema de la Variedad Central Local (Teorema 1, en [17], página 155), existen $\delta > 0$ y $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^r(N_\delta(0))$, con $r \geq 1$, tales que $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ y

$$W^c_{loc} = \left\{ (\tilde{x}, (\tilde{y}, \tilde{z})^T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\tilde{x}), |\tilde{x}| < \delta \right\}. \tag{1.11}$$

Supongamos que

$$\mathbf{h}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\tilde{x}) \\ h_2(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\tilde{x}^2 + a_3\tilde{x}^3 + \mathcal{O}(\tilde{x}^4) \\ b_2\tilde{x}^2 + b_3\tilde{x}^3 + \mathcal{O}(\tilde{x}^4) \end{pmatrix}.$$

Para poder calcular $\mathbf{h}$ se recurre a la relación (5) expuesta en el Teorema 1 de [17], página 155

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{F}_1(\tilde{x}, h_1(\tilde{x}), h_2(\tilde{x})) \begin{pmatrix} h_1'(\tilde{x}) \\ h_2'(\tilde{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(\tilde{x}) \\ h_2(\tilde{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{G}_1(\tilde{x}, h_1(\tilde{x}), h_2(\tilde{x})) \\ \tilde{G}_2(\tilde{x}, h_1(\tilde{x}), h_2(\tilde{x})) \end{pmatrix},$$

obteniendo

$$\begin{aligned} a_2 &= b_2 = 0, \\ a_3 &= \frac{a^2c_1^2(1 + a^2c_3^2) - 2}{3\sqrt{3}a^4c_1^2}, \\ b_3 &= \frac{a^2c_3^2 - 1}{3a^2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\tilde{F}_1(\tilde{x}, h_1(\tilde{x}), h_2(\tilde{x})) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2c_1^2} + c_3^3\right)\tilde{x}^3 + \mathcal{O}(\tilde{x}^4).$$

En consecuencia, el flujo en la Variedad Central Local está dada por la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{\tilde{x}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2c_1^2} + c_3^3\right)\tilde{x}^3 + \mathcal{O}(\tilde{x}^4). \tag{1.12}$$

Claramente (1.12) tiene a $0 \in \mathbb{R}$ como punto de equilibrio localmente asintóticamente estable. Por lo tanto, el sistema (1.6) no tiene soluciones periódicas y en consecuencia no modela la interacción neuronal relacionada con procesos cognitivos tales como la memorización o aprendizaje (ver [14]).

Capítulo 2

Búsqueda de órbitas inducidas por el retardo

La herramienta utilizada en este capítulo proviene del Capítulo 2 de [9], página 41.

2.1. Sistema de tres neuronas como ecuación diferencial funcional

Si $\phi_t = \phi_t(\theta) = \phi(t+\theta)$ con $\phi \in \mathcal{C}_n$, $\theta \in [-\tau, 0]$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces para x, y, z se define F de la siguiente manera

$$F \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_t(0) + a\tanh(c_1 y_t(-\tau)) \\ -y_t(0) + a\tanh(s_0 c_2 z_t(-\tau)) \\ -z_t(0) + a\tanh(s_0 c_3 x_t(-\tau)) \end{pmatrix},$$

luego (1.1) adquiere la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}.$$

Expresemos $F\phi_t = \mathcal{L}\phi_t + \mathcal{N}\phi_t$, $\phi = (x, y, z)^T \in \mathcal{C}_3$, donde $\mathcal{L}$ es lineal. Dado que $\tanh(t) = t + \mathcal{O}(|t|^3)$ entonces

$$\mathcal{L}\phi_t = \begin{pmatrix} -x_t(0) + ac_1 y_t(-\tau) \\ -y_t(0) + as_0 c_2 z_t(-\tau) \\ -z_t(0) + as_0 c_3 x_t(-\tau) \end{pmatrix},$$

tomando $\mathcal{N} = \mathcal{N}\phi_t = F\phi_t - \mathcal{L}\phi_t$ se obtiene lo deseado. De esto se sigue que (1.1) es equivalente a

$$\dot{\phi}(t) = \mathcal{L}\phi_t + \mathcal{N}\phi_t;$$

se observa que

$$\mathcal{N}\phi_t = a \begin{pmatrix} f(c_1 y_t(-\tau)) \\ f(s_0 c_2 z_t(-\tau)) \\ f(s_0 c_3 x_t(-\tau)) \end{pmatrix},$$

con f dada en (1.7). Nótese además que

$$\mathcal{L}\varphi = -\mathbf{I}_3\varphi(0) + a\mathbf{B}_0\varphi(-\tau),$$

donde

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_0c_2 \\ s_0c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La linealización de (1.1) puede ser escrito como (ver también el Capítulo 3, de [1], página 1411)

$$\dot{\phi}(t) = \mathcal{L}\phi_t = \int_{-\tau}^{0} d\eta(\theta)\phi_t(\theta), \tag{2.1}$$

con $\eta : [-\tau, 0] \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dado por

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -\mathbf{I}_3, & \theta = 0, \\ \mathbf{0}, & \theta \in (-\tau, 0), \\ a\mathbf{B}_0, & \theta = -\tau. \end{cases}$$

El sistema lineal adjunto, asociado a (2.1) es

$$\dot{\psi}(t) = -\int_{-\tau}^{0} \psi_t(-\theta)d\eta(\theta), \tag{2.2}$$

con $\psi \in \mathcal{C}^*_{3,\tau}$, obteniendo la forma bilineal asociada a (2.1) y (2.2)

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \overline{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{\theta} \overline{\psi}(\xi - \theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi, \tag{2.3}$$

donde $\psi \in \mathcal{C}^*_{3,\tau}$ y $\varphi \in \mathcal{C}_{3,\tau}$. Por otro lado, el generador infinitesimal se define como

$$(\mathcal{A}\varphi)(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\theta}, & \theta \in [-\tau, 0), \\ \mathcal{L}(\varphi), & \theta = 0. \end{cases}$$

La matriz característica de (1.1) está dada por

$$\Delta(\lambda) = \lambda\mathbf{I} - \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\theta}d\eta(\theta), \tag{2.4}$$

desarrollando (2.4)

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -ac_1e^{-\tau\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -as_0c_2e^{-\tau\lambda} \\ -as_0c_3e^{-\tau\lambda} & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

En consecuencia, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ si y solo si $H(\lambda) := \det \Delta(\lambda) = 0$, lo cual se escribe

$$H(\lambda) = (\lambda+1)^3 - (ce^{-\tau\lambda})^3 = 0, \tag{2.6}$$

entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$H(\lambda) = P_c(\lambda)P_{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda)P_{ce^{-\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda) = 0,$$

donde, para $z \in \mathbb{C}$, $P_z(\lambda) = \lambda + 1 - ze^{-\tau\lambda}$. Claramente $P_z(\lambda)$, $z \in \left\{c, ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right\}$, tienen ceros distintos entre sí.

Para cada $\tau > 0$ se define

$$\Sigma(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} u = u(\omega,\tau) = \cos(\omega\tau) - \omega\cos(\omega\tau), \\ v = v(\omega,\tau) = \omega\cos(\omega\tau) + \sin(\omega\tau), \end{array} \; \omega \in \mathbb{R} \right\}, \tag{2.7}$$

algunas de las características de $\Sigma(\tau)$ (muchas otras dadas en la Subsección 2.2.6.2, de [9], página 54) son que $u(-\omega,\tau) = u(\omega,\tau)$ y $v(-\omega,\tau) = -v(\omega,\tau)$; se hace notar también que $\Sigma(\tau)$ es simétrica respecto al eje u; sea $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión creciente de ceros no negativos de $v(\cdot,\tau)$. Obviamente $t_0 = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se define

$$\Sigma_n(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} u(\omega,\tau) \\ v(\omega,\tau) \end{pmatrix} \;\middle|\; \omega \in [-t_{n+1}, -t_n] \cup [t_n, t_{n+1}] \right\}.$$

Ahora se mostrará que si $c \leq 1$, entonces no es posible inducir inestabilidad de la solución trivial de (1.1).

Si $c < 1$ entonces $c, ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \in int(\Sigma_0(\tau))$ y por el Lema 2.1, de [9], página 55, se sigue que $P_z(\lambda)$ con $z \in \left\{c, ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right\}$ tiene todos sus ceros con parte real estrictamente negativa, luego la solución trivial $\mathbf{0}$ es asintóticamente estable para (1.1) (ver [2]).

Si $c = 1$ entonces del Lema 2.1, de [9], página 55, $\lambda = 0$ es un cero de $P_1(\lambda)$ y dado que $e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \in int(\Sigma_0(\tau))$, se tiene que $P_{e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda)$ posee todos sus ceros con parte real estrictamente negativa, luego todos los ceros de $H(\lambda)$ (excepto $\lambda = 0$ y dicho cero es de multiplicidad 1) tienen parte real estrictamente negativa. De esta manera $\sigma^c(\mathcal{A}) = \{0\}$ y $\dim E^c = 1$.

En la Sección 2.9, de [9], página 59, se demuestra que un eigenvector φ_0 asociado a $\lambda = 0$ satisface $\Delta(0)\varphi_0 = \mathbf{0}$, así

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{ac_1} \\ as_0c_3 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $E^c = span\,(\varphi_0)$, obteniendo $\dim E^{c*} = 1$. Por lo que $\varphi_0^* \in E^{c*}$ si y solo si $\varphi_0^*\Delta(0) = \mathbf{0}$, dando como resultado $\varphi_0^* = \big(1,\ ac_1,\ a^2 s_0 c_1 c_2\big)$, logrando $E^{c*} = span(\varphi_0^*)$. La Subsección 2.2.5, de[9], página 50, señala que $\langle \varphi_0^*, \varphi_0\rangle$ es distinto de 0, así que $\psi_0 = \dfrac{\varphi_0^*}{\langle \varphi_0^*, \varphi_0\rangle}$ satisface $\langle \psi_0, \varphi_0\rangle = 1$, entonces existe una matriz B (de tamaño 1×1) tal que $\dot{\varphi_0} = B\varphi_0$. Puesto que φ_0 es constante, $B = 0$. En consecuencia, el espacio $B\mathcal{C}_{3,\tau}$ se escribe de la siguiente manera

$$B\mathcal{C}_{3,\tau} = E^c \oplus \ker(\pi), \tag{2.8}$$

donde $\pi : B\mathcal{C}_{3,\tau} \to E^c$ está dado por

$$\pi(\phi + X_0\xi) = \varphi_0[\langle \psi_0, \phi\rangle + \psi_0\xi],\ \ \phi \in \mathcal{C}_{3,\tau},\ \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Sabemos también que en el espacio $B\mathcal{C}_{3,\tau}$, el sistema (1.1) se escribe como

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = \mathcal{A}\varphi_t + X_0\mathcal{N}\varphi_t. \tag{2.9}$$

Dada la descomposición (2.8) de $B\mathcal{C}_{3,\tau}$ entonces $\varphi_t = uz + y$ donde $z \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathcal{Q} := \ker(\pi) \cap \mathcal{C}^1_{3,\tau}$. Se sigue de esto que el sistema (2.9) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{z} \quad &= \psi_0\mathcal{N}(\varphi_0 z + y), \\ \frac{d}{dt}y \quad &= \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}y + (\mathbf{I}_3 - \pi)X_0\mathcal{N}(\varphi_0 z + y), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ es el operador de $\mathcal{Q}$ a $\ker(\pi)$, es decir

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}\rho = \dot{\rho} + X_0(\mathcal{L}\rho - \dot{\rho}(0)),\ \ \rho \in \mathcal{Q}.$$

Por el Teorema de la Variedad Central (ver el Teorema 3.2, de [9], página 67) existen $W \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}, \ker(\pi))$, $r \geq 1$, con $W(0) = \mathbf{0}$, $D_z W(z) = \mathbf{0}$ y un abierto V de $\mathbf{0} \in \mathcal{C}_{3,\tau}$ tales que

$$M^c_{loc}(\mathbf{0}) \cap V = \{\varphi_0 z + W(z) | z \in \mathbb{R}\},$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \dot{z} \quad &= \psi_0\mathcal{N}(\varphi_0 z + W(z)), \\ \frac{d}{dt}W \quad &= \mathcal{A}_{\mathcal{Q}}W + (X_0 - \varphi_0\psi_0)\mathcal{N}(\varphi_0 z + W(z)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Se propone W visto como serie de Taylor alrededor de $z = 0$

$$W(z) = \begin{pmatrix} \alpha_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \\ \beta_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \\ \gamma_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3) \end{pmatrix},$$

con $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Claramente $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ es un operador que tiene todos sus eigenvalores con parte real estrictamente negativa, por lo que el flujo del sistema (1.1) en la variedad central local está gobernada por la ecuación diferencial ordinaria unidimensional

$$\dot{z} = \psi_0\mathcal{N}(\varphi_0 z + W(z)). \tag{2.11}$$

Calculando ψ_0 se tiene que

$$\psi_0 = \frac{1}{3}\varphi_0^*. \tag{2.12}$$

Dado que f definido en (1.7) satisface $f(s) = -\frac{s^3}{3} + \mathcal{O}(s^4)$, obtenemos

$$\mathcal{N}(x_t, y_t, z_t)^T = a \begin{pmatrix} -\dfrac{[c_1 y_t(-\tau)]^3}{3} + \mathcal{O}(y_t(-\tau)^4) \\ -\dfrac{[s_0 c_2 z_t(-\tau)]^3}{3} + \mathcal{O}(z_t(-\tau)^4) \\ -\dfrac{[s_0 c_3 x_t(-\tau)]^3}{3} + \mathcal{O}(x_t(-\tau)^4) \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue que

$$\mathcal{N}(\varphi_0 z + W(z)) = -\frac{a}{3} \begin{pmatrix} a^{-3} \\ a^3 c_2^3 c_3^3 \\ s_0 c_3^3 \end{pmatrix} z^3 + \mathcal{O}(z^4). \tag{2.13}$$

De (2.12) y (2.13), el flujo (2.11) se simplifica como

$$\dot{z} = -\frac{a}{9}\left(\frac{1}{a^3} + a^4 c_1 c_2^3 c_3^3 + a^2 c_1 c_2 c_3^3\right) z^3 + \mathcal{O}(z^4).$$

Es evidente que esta ecuación tiene a $0 \in \mathbb{R}$ como punto de equilibrio localmente asintóticamente estable. Por lo tanto, con $c = 1$ el sistema (1.1) no tiene soluciones periódicas. Como resultado se tiene que si $0 \le c \le 1$, entonces no es posible inducir inestabilidad en (1.1), independientemente de τ.

2.2. Serie de Lindstedt del sistema de tres neuronas

En lo que resta de este trabajo se asumirá que $c > 1$.

Supongamos que existe $\tau_0 > 0$ satisfaciendo las siguientes condiciones: 1) para $\tau \in [0, \tau_0)$, $H(\lambda) = 0$ tiene un par de raíces complejas conjugadas con parte real estrictamente negativa; 2) en $\tau = \tau_0$, $H(\lambda) = 0$ presenta únicamente un par de raíces complejas conjugados $\pm i\omega_0$, con $\omega_0 > 0$ y 3) $Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\big|_{\lambda = i\omega_0, \tau=\tau_0} > 0$. Entonces, por el Teorema de la Bifurcación de Hopf (ver por ejemplo la Sección 3.2 de [6], página 52; el Capítulo 3 de [8], página 402; la Subsección 3.4.1 de [9], página 69. También puede consultarse ampliamente en [16], así como el Teorema 6.1 de [19], página 90) existen una vecindad alrededor de $\mathbf{0}$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y una familia uniparamétrica $(x(t,\epsilon), y(t,\epsilon), z(t,\epsilon))^T$ de soluciones periódicas de (1.1), con período $T(\epsilon)$, de manera que $\lim_{\epsilon\to 0}(x(t,\epsilon), y(t,\epsilon), z(t,\epsilon))^T = \mathbf{0}$, $\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y ϵ puede ser elegido tal que $(x(t,\epsilon), y(t,\epsilon), z(t,\epsilon))^T$ y $T(\epsilon)$ sean analíticas.

Observación 2.2.1. *Es bien conocido que, como $P_z(\lambda)$ es entera, sus ceros son de multiplicidad finita (ver por ejemplo el Corolario 3.9, en [5], página 79). Veamos que $i\omega_0$ es de multiplicidad 1.*

Supongamos lo contrario, es decir (usando el inciso 2)

$$\lambda + 1 - ze^{-\lambda\tau_0} = (\lambda - i\omega_0)^{k+1} g(\lambda)$$

con $k \geq 1$, g analítica en una vecindad de $i\omega_0$ y $g(i\omega_0) \neq 0$, entonces

$$0 = \lim_{\lambda \to i\omega_0} \frac{\lambda + 1 - ze^{-\lambda\tau_0}}{\lambda - i\omega_0} = 1 + z\tau_0 e^{-i\omega_0\tau_0}. \tag{2.14}$$

Al ser $P_z(i\omega_0) = 0$, $ze^{-i\omega_0\tau_0} = i\omega_0 + 1$, sustituyendo en (2.14) se obtiene $0 = 1 + i\omega_0\tau_0 + \tau_0$. Separando en su parte real e imaginaria $1 + \tau_0 = 0$ y $\omega_0\tau_0 = 0$, lo cual es absurdo.

Con el fin de calcular alguna órbita de (1.1), reescalamos la variable temporal t como

$$s = \omega(\epsilon)t, \tag{2.15}$$

donde ϵ es positivo y suficientemente pequeño de manera que las soluciones que son $\frac{2\pi}{\omega}$ periódicas en t correspondan a soluciones que son 2π periódicas en s y que además sean analíticas. Con esta idea se definen

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \tilde{x}(s,\epsilon) = x\left(\frac{s}{\omega(\epsilon)}\right) = x(t),\\
\tilde{y} &= \tilde{y}(s,\epsilon) = y\left(\frac{s}{\omega(\epsilon)}\right) = y(t),\\
\tilde{z} &= \tilde{z}(s,\epsilon) = z\left(\frac{s}{\omega(\epsilon)}\right) = z(t),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

a partir de (2.16), el sistema (1.1) se reescribe como

$$\begin{cases}
\omega\dfrac{d\tilde{x}(s)}{ds} + \tilde{x}(s) = a\tanh(c_1\tilde{y}(s - \omega\tau)),\\[2ex]
\omega\dfrac{d\tilde{y}(s)}{ds} + \tilde{y}(s) = a\tanh(s_0c_2\tilde{z}(s - \omega\tau)),\\[2ex]
\omega\dfrac{d\tilde{z}(s)}{ds} + \tilde{z}(s) = a\tanh(s_0c_3\tilde{x}(s - \omega\tau)),
\end{cases} \tag{2.17}$$

luego la solución de (2.17) se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(s,\epsilon) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(s,\epsilon)\\ \tilde{y}(s,\epsilon)\\ \tilde{z}(s,\epsilon)\end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Busquemos una solución periódica para (2.17) en forma de una serie de perturbaciones (ver el Capítulo 3, en [8], página 402)

$$\mathbf{u}(s,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k(s)\epsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k(s), y_k(s), z_k(s)\right)^T \epsilon^k, \tag{2.19}$$

nótese que todos los x_k, y_k, z_k son $2\pi-$periódicas en la variable s; las soluciones periódicas tendrán período dependiente de los parámetros ω y τ, por lo que también perturbaremos la frecuencia y el retardo como sigue (véase la Subsección 5.3.6 en [4], página 425, así como el Capítulo 3 de [8], página 402)

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \epsilon^k, \\ \tau &= \tau(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k \epsilon^k. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Se considera la siguiente notación: $\tanh \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh(x) \\ \tanh(y) \\ \tanh(z) \end{pmatrix}$ y se define el funcional $\mathcal{F} : \mathcal{C}_3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{C}_3$ como

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \epsilon) = \omega(\epsilon)\dot{\mathbf{u}}(s, \epsilon) + \mathbf{u}(s, \epsilon) - a \tanh(B_0 \mathbf{u}(s - \omega(\epsilon)\tau(\epsilon), \epsilon)), \tag{2.21}$$

donde $\dot{\mathbf{u}}(s, \epsilon) = \dfrac{d}{ds}\mathbf{u}(s, \epsilon)$. Por lo que hallar un cero de $\mathcal{F}$ equivale a encontrar una solución de (2.17). Obsérvese además que $\mathcal{F}$ es una serie de potencias de ϵ, por la Fórmula de Taylor, el $k-$ésimo coeficiente de $\mathcal{F}$ está dado por

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k \mathcal{F}(\mathbf{u}, \epsilon)}{d\epsilon^k}\bigg|_{\epsilon=0},$$

luego, para hallar $\mathbf{u}$ a orden ϵ^k, únicamente se debe resolver

$$\frac{d^k \mathcal{F}(\mathbf{u}, \epsilon)}{d\epsilon^k}\bigg|_{\epsilon=0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3.$$

Dado que $\lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{u}(s, \epsilon) = \mathbf{0}$, (que es el punto de equilibrio donde estamos calculando la órbita periódica) obtenemos

$$\mathbf{u}_0(s) = \mathbf{u}(s, 0) = \mathbf{0}$$

y también se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}(\mathbf{u}, \epsilon)}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} &= \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_1(s) + \mathbf{u}_1(s) - a\mathbf{B}_0 \mathbf{u}_1(s - \omega_0\tau_0), \\ \frac{1}{2!}\frac{d^2\mathcal{F}(\mathbf{u}, \epsilon)}{d\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0} &= \omega_0 \dot{\mathbf{u}}_2(s) + \mathbf{u}_2(s) - a\mathbf{B}_0 \mathbf{u}_2(s - \omega_0\tau_0) \\ &\quad + \omega_1 \dot{\mathbf{u}}_1(s) + a(\omega_0\tau_1 + \omega_1\tau_0)\mathbf{B}_0 \dot{\mathbf{u}}_1(s - \omega_0\tau_0). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Con el fin de calcular $\mathbf{u}$ a cualquier orden, se deduce la siguiente

Proposición 2.2.2. *Para* $j \geq 2$

1) $$\begin{aligned} \frac{1}{j!}\frac{d^j\mathcal{F}(\boldsymbol{u}, \epsilon)}{d\epsilon^j}\bigg|_{\epsilon=0} &= \omega_0 \dot{\boldsymbol{u}}_j(s) + \boldsymbol{u}_j(s) - a\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{u}_j(s - \omega_0\tau_0) \\ &\quad + \tilde{F}_j(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \omega_0, \ldots, \omega_{j-1}, \tau_0, \ldots, \tau_{j-1}), \end{aligned}$$

2) $\tilde{F}_j = \Lambda_j(\omega_{j-1}, \tau_{j-1}) + F_j(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \omega_0, \ldots, \omega_{j-2}, \tau_0, \ldots, \tau_{j-2})$, *donde* Λ_j *depende únicamente de la variable paramétrica* $(\omega_{j-1}, \tau_{j-1})$ *y está dada por*
$\Lambda_j(\omega_{j-1}, \tau_{j-1}) = \omega_{j-1}\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) + a(\omega_0\tau_{j-1} + \omega_{j-1}\tau_0)\boldsymbol{B}_0 \dot{\boldsymbol{u}}_1(s - \omega_0\tau_0).$

Demostración. De la Fórmula de Taylor

$$\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathbf{u}(s,\epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} = \mathbf{u}_j(s);$$

observemos que, por la *Regla de Leibniz*

$$\begin{aligned}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\epsilon^j}\omega(\epsilon)\dot{\mathbf{u}}(s,\epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} &= \frac{1}{j!}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\omega^{(l)}(\epsilon)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\dot{\mathbf{u}}(s,\epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} \\ &= \omega_0\dot{\mathbf{u}}_j(s) + \omega_{j-1}\dot{\mathbf{u}}_1(s) + \frac{1}{j!}\sum_{l=1}^{j-2}\binom{j}{l} l!(j-l)!\omega_l\dot{\mathbf{u}}_{j-l}(s).\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la expansión de Taylor de tanh alrededor del origen

$$\begin{aligned}\frac{d^j}{d\epsilon^j}\tanh(\mathbf{B}_0\mathbf{u}(s-\omega\tau,\epsilon)) &= \frac{d^j}{d\epsilon^j}\left(\mathbf{B}_0\mathbf{u}(s-\omega\tau,\epsilon) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^3)\right) \\ &= \mathbf{B}_0\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_k(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^k\right) + \frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^3),\end{aligned} \tag{2.23}$$

donde, para $l \geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_k(s-\omega\tau) &= -\frac{d^{j-1}}{d\epsilon^{j-1}}\dot{\mathbf{u}}_k(s-\omega\tau)\,(\omega\tau)^{(1)} \\ &= -\sum_{n=0}^{l-1}\binom{l-1}{n}\frac{d^n}{d\epsilon^n}\dot{\mathbf{u}}_k(s-\omega\tau)\frac{d^{l-1-n}}{d\epsilon^{l-1-n}}\,(\omega\tau)^{(1)},\end{aligned}$$

más aún, con $l-1-n \geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{d^{l-1-n}}{d\epsilon^{l-1-n}}\,(\omega\tau)^{(1)} &= \frac{d^{l-1-n}}{d\epsilon^{l-1-n}}\left(\omega^{(1)}\tau + \omega\tau^{(1)}\right) \\ &= \sum_{m_1=0}^{l-1-n}\binom{l-1-n}{m_1}\frac{d^{m_1+1}}{d\epsilon^{m_1+1}}\omega\frac{d^{l-1-n-m_1}}{d\epsilon^{l-1-n-m_1}}\tau \\ &\quad + \sum_{m_2=0}^{l-1-n}\binom{l-1-n}{m_2}\frac{d^{m_2}}{d\epsilon^{m_2}}\omega\frac{d^{l-n-m_2}}{d\epsilon^{l-n-m_2}}\tau.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Nótese que $\dfrac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^m)\bigg|_{\epsilon=0}$, $m \geq 2$, tiene sumandos que involucran términos de la forma $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-2}$, esto se sigue de expandir a $\mathcal{O}(\mathbf{u}^m)$ en serie de potencias de ϵ. Para ver que $\dfrac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^m)\bigg|_{\epsilon=0}$ no contiene términos de la forma ω_{j-1} o τ_{j-1}, nótese que

$$\frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathbf{u}^m\bigg|_{\epsilon=0} = -\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j-1}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}[m\mathbf{u}^{m-1}(s-\omega\tau,\epsilon)\dot{\mathbf{u}}(s-\omega\tau,\epsilon)]\frac{d^{j-1-l}}{d\epsilon^{j-1-l}}(\omega\tau)^{(1)}\bigg|_{\epsilon=0},$$

de (2.24) se sigue que en $l = 0$ encontramos el único sumando que contiene los términos ω_{j-1} y τ_{j-1}. Sin embargo, con $l = 0$ se tiene que

$$\binom{j-1}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}[m\mathbf{u}^{m-1}(s-\omega\tau,\epsilon)\dot{\mathbf{u}}(s-\omega\tau,\epsilon)]\frac{d^{j-1-l}}{d\epsilon^{j-1-l}}(\omega\tau)^{(1)}\bigg|_{\epsilon=0} = \mathbf{0},$$

de esta manera $\left.\dfrac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^m)\right|_{\epsilon=0}$ sólo contiene términos de la forma $\omega_0,\ldots,\omega_{j-2}$ y $\tau_0,\ldots,\tau_{j-2}$.

Siguiendo con nuestro análisis, ya que únicamente nos interesan los valores relacionados con $\omega_{j-1}\tau_0 + \omega_0\tau_{j-1}$, se considerarán la siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1 &= l-1-n,\\ m_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

con los valores de m_1 y m_2 de (2.25) junto con (2.24) se consigue $\omega_{l-n}\tau_0 + \omega_0\tau_{l-n}$. Para obtener $\omega_{j-1}\tau_0 + \omega_0\tau_{j-1}$ se debe pedir que

$$l - n = j - 1, \tag{2.26}$$

para no anular el sumando que contiene el término $\left.\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^k\right|_{\epsilon=0}$ en (2.23), asumimos que

$$j - l = k, \tag{2.27}$$

de (2.26) y (2.27) se tiene $n = 1 - k$. Puesto que $n \geq 0$ entonces $k = 1$, así $n = 0$ y

$$\begin{aligned} l &= j-1,\\ m_1 &= j-2. \end{aligned}$$

De (2.23)

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{d\epsilon^j}\tanh(\mathbf{B}_0\mathbf{u}(s-\omega\tau,\epsilon))\bigg|_{\epsilon=0} &= \mathbf{B}_0\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_k(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^k\right)\bigg|_{\epsilon=0}\\
&\quad + \frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^3)\bigg|_{\epsilon=0}\\
&= -j!\mathbf{B}_0\dot{\mathbf{u}}_1(s-\omega_0\tau_0)(\omega_{j-1}\tau_0+\omega_0\tau_{j-1})\\
&\quad + j!\mathbf{B}_0\mathbf{u}_j(s-\omega_0\tau_0)\\
&\quad + \mathbf{B}_0\sum_{\substack{l=0\\ l\neq j-1}}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_1(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^1\bigg|_{\epsilon=0}\\
&\quad + \mathbf{B}_0\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_j(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^j\bigg|_{\epsilon=0}\\
&\quad + \mathbf{B}_0\sum_{k=2}^{j-1}\left(\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_k(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^k\right)\bigg|_{\epsilon=0}\\
&\quad + \frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^3)\bigg|_{\epsilon=0}.
\end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned}\tilde{F}_j &= \omega_{j-1}\dot{\mathbf{u}}_1(s) + \frac{1}{j!}\sum_{l=1}^{j-2}\binom{j}{l} l!(j-l)!\omega_l\dot{\mathbf{u}}_{j-l}(s) - j!\mathbf{B}_0\dot{\mathbf{u}}_1(s-\omega_0\tau_0)(\omega_{j-1}\tau_0+\omega_0\tau_{j-1})\\ &+ \mathbf{B}_0\sum_{\substack{l=0\\ l\neq j-1}}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_1(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^1\Big|_{\epsilon=0} + \mathbf{B}_0\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_j(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^j\Big|_{\epsilon=0}\\ &+ \mathbf{B}_0\sum_{k=2}^{j-1}\left(\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_k(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^k\right)\Big|_{\epsilon=0} + \frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^3)\Big|_{\epsilon=0}\end{aligned}$$

demostramos el inciso 1), y definiendo

$$\begin{aligned}F_j &= \frac{d^j}{d\epsilon^j}\mathcal{O}(\mathbf{u}^3)\Big|_{\epsilon=0} + \frac{1}{j!}\sum_{l=1}^{j-2}\binom{j}{l} l!(j-l)!\omega_l\dot{\mathbf{u}}_{j-l}(s) + \mathbf{B}_0\sum_{\substack{l=0\\ l\neq j-1}}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_1(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^1\Big|_{\epsilon=0}\\ &+ \mathbf{B}_0\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_j(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^j\Big|_{\epsilon=0} + \mathbf{B}_0\sum_{k=2}^{j}\left(\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{d\epsilon^l}\mathbf{u}_k(s-\omega\tau)\frac{d^{j-l}}{d\epsilon^{j-l}}\epsilon^k\right)\Big|_{\epsilon=0}\end{aligned}$$

se demuestra el inciso 2). □

2.3. Condiciones sobre la existencia de la serie de Lindstedt

Para poder hallar la solución de cualquier orden de $\mathcal{F}$, consideremos el sistema no lineal de la forma

$$\dot{\varphi}(t) = \mathbf{A}\varphi(t) + \mathbf{B}\varphi(t-\tau) + F(t), \tag{2.28}$$

donde $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$; $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$; $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ continua y de período $\alpha > 0$. El sistema lineal asociado a (2.28) es

$$\dot{\phi}(t) = \mathbf{A}\phi(t) + \mathbf{B}\phi(t-\tau), \tag{2.29}$$

el sistema lineal adjunto asociado a (2.29) es

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)\mathbf{A} - \psi(t+\tau)\mathbf{B}, \quad \psi \in \mathbb{R}^{n*}. \tag{2.30}$$

Observemos que el sistema (2.28) es equivalente a

$$\dot{\varphi}(t) = \int_{-\tau}^{0} d\eta_1(\theta)\varphi(t+\theta) + F(t), \tag{2.31}$$

donde $\eta_1 : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^{n^2}$ está dado como

$$\eta_1(\theta) = \begin{cases} \mathbf{B}, & \theta_= -\tau, \\ \mathbf{0}, & \theta \in (-\tau, 0), \\ \mathbf{A}, & \theta = 0. \end{cases}$$

El sistema (2.29) es equivalente a

$$\dot{\phi}(t) = \int_{-\tau}^{0} d\eta_1(\theta)\phi(t+\theta), \tag{2.32}$$

y (2.30) es equivalente a

$$\dot{\psi}(t) = -\int_{-\tau}^{0} \psi(t-\theta)d\eta_1(\theta). \tag{2.33}$$

Definimos los operadores $\Pi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3)$ y $\Omega : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{3*}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{3*})$ como

$$(\Pi\phi)(t) = \dot{\phi}(t) - \int_{-\tau}^{0} d\eta_1(\theta)\phi(t+\theta),$$

$$(\Omega\psi)(t) = \dot{\psi}(t) + \int_{-\tau}^{0} \psi(t-\theta)d\eta_1(\theta).$$

La forma bilineal asociada a (2.28) es

$$\langle\psi, \phi\rangle_1(t) = \overline{\psi}(t)\phi(t) - \int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{\theta} \overline{\psi}(t+\xi-\theta)d\eta_1(\theta)\phi(t+\xi)d\xi, \tag{2.34}$$

donde $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3)$, $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{3*})$ y $\langle\cdot, \cdot\rangle_1$ satisface

$$\frac{d}{dt}\langle\psi, \phi\rangle_1(t) = \overline{\psi}(t)\left(\Pi\phi\right)(t) + \overline{(\Omega\psi)}(t)\phi(t).$$

A continuación se presenta una proposición que refina los Teoremas 4.22 y 25.2 de [10], página 414 y [11], página 130, respectivamente, con la diferencia de que en [10] y [11] únicamente se ocupan de valores reales, mientras que la herramienta proporcionada por [9] permite usar valores complejos.

Proposición 2.3.1. *Si el sistema (2.28) posee una solución periódica de período α, entonces*

$$\int_{0}^{\alpha} \overline{\psi}(t)F(t)\,dt = 0$$

para toda solución periódica ψ de período α, del sistema (2.30).

Demostración. Sean φ y ψ soluciones periódicas de período α, de (2.28) y (2.30) respectivamente. Calculando $\frac{d}{dt}\langle\psi, \phi\rangle_1(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\psi, \phi\rangle_1(t) &= \overline{\psi}(t)\left(\Pi\varphi\right)(t) + \overline{(\Omega\psi)}(t)\varphi(t)\\ &= \overline{\psi}(t)\left(\dot{\varphi}(t) - \int_{-\tau}^{0} d\eta_1(\theta)\varphi(t+\theta)\right)\\ &= \overline{\psi}(t)F(t).\end{aligned} \tag{2.35}$$

Es claro que $\langle\psi, \phi\rangle_1(t)$ es de período α. Por lo tanto, integrando (2.35) sobre el intervalo $[0, \alpha]$

$$0 = \langle\psi, \phi\rangle_1(\alpha) - \langle\psi, \phi\rangle_1(0) = \int_{0}^{\alpha} \frac{d}{dt}\langle\psi, \phi\rangle_1(t)\,dt = \int_{0}^{\alpha} \overline{\psi}(t)F(t)\,dt.$$

$\square$

Observación 2.3.2. *Resulta obvio ver que si ψ y $\overline{\psi}$ son soluciones del sistema lineal adjunto (2.30) entonces la conclusión de la Proposición (2.3.1) puede escribirse como*

$$\int_0^\alpha \psi(t)F(t)\,dt = 0.$$

La siguiente Proposición permite dar algunas condiciones sobre la existencia de soluciones complejas periódicas de $\mathbf{u}$ a orden ϵ^j, con $j \geq 2$.

Proposición 2.3.3. *Consideremos $j \geq 2$ y $\boldsymbol{u}$ a orden ϵ^j,*

$$\omega_0 \dot{\boldsymbol{u}}_j(s) + \boldsymbol{u}_j(s) - a\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{u}_j(s - \omega_0\tau_0) + \Lambda_j(s) + F_j(s) = \boldsymbol{0}. \tag{2.36}$$

Supongamos que $\varphi(s) = e^{is}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{C}^3$, y $\psi(s) = e^{-is}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{3*}$, son soluciones complejas del sistema lineal homogéneo y del sistema lineal adjunto homogéneo, asociados a (2.36), respectivamente.

Una condición suficiente para que (2.36) posea una solución periódica (de período 2π) es

1) $C1)$ $\det \begin{pmatrix} Re(\boldsymbol{bk}) & Re\left(e^{-i\omega_0\tau_0}\boldsymbol{b}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{k}\right) \\ Im(\boldsymbol{bk}) & Im\left(e^{-i\omega_0\tau_0}\boldsymbol{b}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{k}\right) \end{pmatrix} \neq 0,$

además, si se satisface $C1$ y $\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(s)F_j(s)\,ds = 0$ entonces

2) $\omega_{j-1} = \tau_{j-1} = 0,$
3) $\boldsymbol{u}_j(s) = \varphi(s).$

Demostración. Sea $z = \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(s)F_j(s)\,ds$; de (2.22) se satisface que $\mathbf{u}_1(s) = \varphi(s)$ en su forma compleja, por lo que de la Proposición (2.3.1)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \psi(s)\Lambda_j(s)\,ds + z \\ &= 2\pi i\left[\omega_{j-1}\mathbf{bk} + ae^{-i\omega_0\tau_0}(\omega_{j-1}\tau_0 + \omega_0\tau_{j-1})\mathbf{bB}_0\mathbf{k}\right] + z \end{aligned}$$

si y solo si (separando en la parte real e imaginaria)

$$\begin{pmatrix} -\frac{Im(z)}{2\pi} \\ \frac{Re(z)}{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\mathbf{bk}) + a\tau_0 Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) & a\omega_0 Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \\ Im(\mathbf{bk}) + a\tau_0 Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) & a\omega_0 Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{j-1} \\ \tau_{j-1} \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

De esta manera, una condición suficiente para poseer una solución periódica de (2.36) es que el sistema (2.37) tenga una única solución, es decir

$$\det \begin{pmatrix} Re(\mathbf{bk}) + a\tau_0 Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) & a\omega_0 Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \\ Im(\mathbf{bk}) + a\tau_0 Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) & a\omega_0 Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Nótese que el hecho de que el valor del determinante anterior sea distinto de cero equivale a que $\det \begin{pmatrix} Re(\mathbf{bk}) & Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \\ Im(\mathbf{bk}) & Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \end{pmatrix}$ también sea distinto de cero, demostrando la condición $C1)$.

Continuando con la prueba, supongamos ahora que se satisface la condición $C1$ y además $z = 0$, entonces la única solución del sistema (2.37) es la trivial, es decir $\omega_{j-1} = \tau_{j-1} = 0$, obteniendo 2). Finalmente, (2.36) se reduce a la siguiente expresión

$$\omega_0 \dot{\mathbf{u}}_j(s) + \mathbf{u}_j(s) - a\mathbf{B}_0 \mathbf{u}_j(s - \omega_0 \tau_0) = \mathbf{0},$$

que es equivalente a $\mathbf{u}$ a orden ϵ^1 y que es el sistema lineal homogéneo asociado a (2.36), luego $\mathbf{u}_j(s) = \varphi(s)$, obteniendo 3). $\square$

Capítulo 3

Soluciones periódicas inducidas por el retardo

3.1. Un caso degenerado

Estamos en condiciones de calcular alguna solución periódica de (1.1), podríamos basarnos en el ya citado artículo [8], sin embargo, el método seguido por dicho artículo "realifica" las soluciones y esto se convierte en un procedimiento bastante tedioso, pues las soluciones se expresan en términos de las funciones sin y cos. Por lo que la Proposición (2.3.1) simplificará el cálculo de órbitas, permitiendo trabajar incluso con valores complejos.

La siguiente proposición, emanada del Lema 2.1, en [9], página 55, es la punta de lanza de esta parte.
Proposición 3.1.1. *Para $c > 1$ existen $\omega \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ tales que $u(\omega, \tau) = c$ y $v(\omega, \tau) = 0$.*

Demostración. Sea $c > 1$ fijo. Haciendo $x = \omega\tau$, entonces u y v de (2.7) se parametrizan como

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos(x) - \frac{x}{\tau}\sin(x), \\ v(x) &= \frac{x}{\tau}\cos(x) + \sin(x), \end{aligned}$$

de esta manera, para x y τ se resuelve

$$\begin{aligned} u(x) &= c, \\ v(x) &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que $v(x) = 0$ si y solo si

$$\tan(x) = -\frac{x}{\tau}. \tag{3.1}$$

Sea $r_2 = r_2(\tau)$ la solución positiva más pequeña de (3.1), en consecuencia $r_2(\tau)$ es raíz de $v(x) = 0$. Obsérvese que $\lim_{\tau \to 0} r_2(\tau) = \frac{3\pi}{2}$, $\lim_{\tau \to \infty} r_2(\tau) = 2\pi$, r_2 es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ y la imagen de r_2 es el intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Notemos también que cos es biyectivo en $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, luego $\cos \circ r_2$ es biyectiva en $(0, \infty)$.

Ahora, hallemos $\tau > 0$ que satisfaga $c = u(r_2(\tau))$, es decir

$$\begin{aligned} c &= \cos(r_2(\tau)) - \frac{r_2(\tau)}{\tau}\sin(r_2(\tau)) \\ &= \frac{1}{\cos(r_2(\tau))}, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a resolver para τ la ecuación $\cos(r_2(\tau)) = \frac{1}{c}$. Dado que $0 < \frac{1}{c} < 1$ y $\cos \circ r_2$ es biyectivo, se sigue que existe un único $\tau_0 \in (0, \infty)$ de manera que $\cos(r_2(\tau_0)) = \frac{1}{c}$. Observemos que

$$r_2(\tau_0) = \arccos\left(c^{-1}\right), \tag{3.2}$$

de esta manera

$$\begin{aligned} c &= \cos(r_2(\tau_0)) - \frac{r_2(\tau_0)}{\tau_0}\sin(r_2(\tau_0)), \\ 0 &= \frac{r_2(\tau_0)}{\tau_0}\cos(r_2(\tau_0)) + \sin(r_2(\tau_0)), \end{aligned} \tag{3.3}$$

elevando las igualdades en (3.3) al cuadrado y sumando miembro a miembro

$$c^2 = 1 + \frac{r_2^2(\tau_0)}{\tau_0^2}, \tag{3.4}$$

despejando $r_2(\tau_0)$ de (3.4)

$$r_2(\tau_0) = \tau_0\sqrt{c^2 - 1}, \tag{3.5}$$

de (3.2) y (3.5) obtenemos

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}\arccos\left(c^{-1}\right). \tag{3.6}$$

Tomando

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}\arccos\left(c^{-1}\right), \\ \omega_0 &= \frac{r_2(\tau_0)}{\tau_0}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

se tiene lo pedido. □

En consecuencia $\lambda = \pm\frac{r_2(\tau_0)}{\tau_0}i$ cumplen $P_c(\lambda) = 0$. Es fácil observar que $\pm\frac{r_2(\tau_0)}{\tau_0}i$ son ceros de $H(\lambda)$ de multiplicidad 1, y que con τ_0 fijo entonces $\omega = \pm\omega_0$ son los únicos valores que satisfacen $u(\omega, \tau_0) = c$ y $v(\omega, \tau_0) = 0$. De (1.9) se sigue que cuando $\tau = 0$, $H(\lambda) = 0$ tiene un par de raíces complejas conjugadas con parte real estrictamente negativa, entonces por la dependencia continua de las raíces de $H(\lambda) = 0$ sobre los parámetros se tiene que para todo $\tau < \tau_0$ existe un par de raíces conjugadas con parte real negativa y en $\tau = \tau_0$ hay un par de raíces $\lambda = \pm i\omega_0$.

De (2.6) y por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1 + (\lambda + 1)\tau}. \tag{3.8}$$

Vemos también que

$$Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=\tau_0,\lambda=i\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{(1+\tau_0)^2+(\omega_0\tau_0)^2} > 0.$$

Procedamos a calcular una órbita de (2.17) usando el método de Lindstedt.

A orden ϵ^1 el sistema está gobernado por

$$\omega_0\dot{\mathbf{u}}_1(s) + \mathbf{u}_1(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_1(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}, \tag{3.9}$$

para hallar una solución periódica de (3.9) se propone

$$\varphi_1(s) = e^{\lambda s}\mathbf{k};\ \ \mathbf{k}\in\mathbb{C}^3, \lambda\in\mathbb{C}, \tag{3.10}$$

sustituyendo (3.10) en (3.9) obtenemos

$$[(\lambda\omega_0+1)\mathbf{I}_3 - ae^{-\lambda\omega_0\tau 0}\mathbf{B}_0]\mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{3.11}$$

nótese que

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) : &= \det[(\lambda\omega_0+1)\mathbf{I}_3 - ae^{-\lambda\omega_0\tau 0}\mathbf{B}_0] \\
&= \det\begin{pmatrix} \lambda\omega_0+1 & -ac_1e^{-\lambda\omega_0\tau_0} & 0 \\ 0 & \lambda\omega_0+1 & -as_0c_2e^{-\lambda\omega_0\tau_0} \\ -as_0c_3e^{-\lambda\omega_0\tau_0} & 0 & \lambda\omega_0+1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda\omega_0+1)^3 - (ce^{-\lambda\omega_0\tau_0})^3 \\
&= Q_c(\lambda)Q_{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda)Q_{ce^{-\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda),
\end{aligned}$$

donde, para $z\in\mathbb{C}$ fijo, se define $Q_z(\lambda) = \lambda\omega_0 + 1 - ze^{-\lambda\omega_0\tau_0}$. Claramente $Q_z(\lambda)$, $z\in\left\{c, ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right\}$, tienen raíces distintas entre sí. Hallemos las raíces imaginarias con parte real nula de $Q(\lambda)$ para hacer de φ_1 una solución periódica.

Examinando la existencia de valores $\theta\in\mathbb{R}$ tales que $Q_z(i\theta) = 0$, se obtiene que $Q_z(i\theta) = 0$ si y solo si $u(\theta\omega_0,\tau_0) = Re(z)$ y $v(\theta\omega_0,\tau_0) = Im(z)$. Puesto que $ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \notin \Sigma(\tau_0)$, entonces sólo resolvemos para θ las ecuaciones $u(\theta\omega_0,\tau_0) = c$ y $v(\theta\omega_0,\tau_0) = 0$. Luego $\theta = \pm 1$. De esta manera $\lambda = \pm i$ son los únicos eigenvalores con parte real nula del sistema (3.9).

Para $\lambda = i$ hallemos $(k_1,k_2,k_3)^T\in\mathbb{C}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} i\omega_0+1 & -ac_1e^{-i\omega_0\tau_0} & 0 \\ 0 & i\omega_0+1 & -as_0c_2e^{-i\omega_0\tau_0} \\ -as_0c_3e^{-i\omega_0\tau_0} & 0 & i\omega_0+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que un eigenvector asociado a $\lambda = i$ es

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c_1}\frac{i\omega_0+1}{ae^{-i\omega_0\tau_0}} \\ \frac{s_0}{c_1c_2}\left(\frac{i\omega_0+1}{ae^{-i\omega_0\tau_0}}\right)^2 \end{pmatrix}; \tag{3.12}$$

recordando los valores de τ_0 y ω_0 dados en (3.7) obtenemos

$$\cos(\omega_0\tau_0) = \frac{1}{c},$$
$$\sin(\omega_0\tau_0) = -\frac{\omega_0}{c},$$

de esta manera

$$\frac{i\omega_0 + 1}{ae^{-i\omega_0\tau_0}} = \frac{\omega_0^2 + 1}{ac},$$

simplificando (3.12), se tiene que $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_0^2+1}{acc_1} \\ \frac{s_0(\omega_0^2+1)^2}{a^2c^2c_1c_2} \end{pmatrix}$. Por lo que

$$\varphi_1(s) = e^{is}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_0^2+1}{acc_1} \\ \frac{s_0(\omega_0^2+1)^2}{a^2c^2c_1c_2} \end{pmatrix},$$
$$\overline{\varphi_1}(s) = e^{-is}\mathbf{k},$$

son soluciones complejas y periódicas del sistema (3.9). Luego

$$\mathbf{u}_1(s) = (a_0\cos(s) + b_0\sin(s))\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_0^2+1}{acc_1} \\ \frac{s_0(\omega_0^2+1)^2}{a^2c^2c_1c_2} \end{pmatrix}; \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

A orden ϵ^2, la solución periódica $\mathbf{u}$ está gobernada por

$$\omega_0\dot{\mathbf{u}}_2(s) + \mathbf{u}_2(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_2(s-\omega_0\tau_0) + \omega_1\dot{\mathbf{u}}_1(s) + a(\omega_0\tau_1 + \omega_1\tau_0)\mathbf{B}_0\dot{\mathbf{u}}_1(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}, \tag{3.14}$$

el sistema lineal homogéneo asociado a (3.14) está dado por

$$\omega_0\dot{\varphi}(s) + \varphi(s) - a\mathbf{B}_0\varphi(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}, \tag{3.15}$$

el sistema lineal adjunto asociado a (3.15) es

$$\omega_0\dot{\psi}(s) - \psi(s) + a\psi(s+\omega_0\tau_0)\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad \psi \in \mathcal{C}_3^*. \tag{3.16}$$

Asumamos que la solución de (3.16) es de la forma $\psi_1(s) = e^{\lambda s}\mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{3*}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. De esta manera

$$\mathbf{b}[(\lambda\omega_0 - 1)\mathbf{I}_3 + ae^{\lambda\omega_0\tau_0}\mathbf{B}_0] = \mathbf{0};$$

obsérvese que

$$\begin{aligned} R(\lambda) :&= \det[(\lambda\omega_0 - 1)\mathbf{I}_3 + ae^{\lambda\omega_0\tau_0}\mathbf{B}_0] \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda\omega_0 - 1 & ac_1e^{\lambda\omega_0\tau_0} & 0 \\ 0 & \lambda\omega_0 - 1 & as_0c_2e^{\lambda\omega_0\tau_0} \\ as_0c_3e^{\lambda\omega_0\tau_0} & 0 & \lambda\omega_0 - 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda\omega_0 - 1)^3 + (ce^{\lambda\omega_0\tau_0})^3 \\ &= r_c(\lambda)r_{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda)r_{ce^{-\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda), \end{aligned}$$

donde, para $z \in \mathbb{C}$ fijo, se define $r_z(\lambda) = \lambda\omega_0 - 1 + ze^{\lambda\omega_0\tau_0}$. Con el fin de hallar soluciones periódicas, examinemos la existencia de valores $\theta \in \mathbb{R}$ tales que $R(i\theta) = 0$. Para esto, notemos que $r_z(i\theta) = 0$ si y solo si $u(\theta\omega_0, \tau_0) = Re(z)$ y $v(\theta\omega_0, \tau_0) = -Im(z)$. Dado que $ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \notin \Sigma(\tau_0)$ entonces resolvemos para θ el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
&u(\theta\omega_0, \tau_0) = c,\\
&v(\theta\omega_0, \tau_0) = 0,
\end{aligned}
$$

luego, $\theta = \pm 1$. Por lo tanto, los eigenvalores con parte real nula del sistema lineal adjunto (3.16) son $\lambda = \pm i$.

Para $\lambda = -i$ hallemos $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{C}^{3*}$ tal que

$$
(b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} -i\omega_0 - 1 & ac_1e^{-i\omega_0\tau_0} & 0\\ 0 & -i\omega_0 - 1 & as_0c_2e^{-i\omega_0\tau_0}\\ as_0c_3e^{-i\omega_0\tau_0} & 0 & \lambda\omega_0 - 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0),
$$

por lo que un eigenvector asociado a $\lambda = -i$ es

$$
\mathbf{b} = \left(1,\ \frac{ae^{-i\omega_0\tau_0}}{i\omega_0 + 1},\ s_oc_1c_2\left(\frac{ae^{-i\omega_0\tau_0}}{i\omega_0 + 1}\right)^2\right), \tag{3.17}
$$

de (3.7) se tiene que

$$
\frac{ae^{-i\omega_0\tau_0}}{i\omega_0 + 1} = \frac{ac}{\omega_0^2 + 1},
$$

simplificando (3.17) obtenemos $\mathbf{b} = \left(1,\ \frac{acc_1}{\omega_0^2+1},\ \frac{a^2s_0c^2c_1c_2}{\left(\omega_0^2+1\right)^2}\right)$, en consecuencia

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(s) = e^{-is}\left(1,\ \frac{acc_1}{\omega_0^2 + 1},\ \frac{a^2s_0c^2c_1c_2}{\left(\omega_0^2 + 1\right)^2}\right),\\
&\overline{\psi_1}(s) = e^{is}\mathbf{b},
\end{aligned}
$$

son soluciones periódicas de la ecuación (3.16). Puesto que

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} Re(\mathbf{bk}) & Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k})\\ Im(\mathbf{bk}) & Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \end{pmatrix} &= -(\mathbf{bk})(\mathbf{bB}_0\mathbf{k})\sin(\omega_0\tau_0)\\
&= (\mathbf{bk})(\mathbf{bB}_0\mathbf{k})\frac{\omega_0}{c}\\
&\neq 0,
\end{aligned}
$$

entonces por la Proposición (2.3.3)

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = 0,\\
&\tau_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

De esto se sigue que el sistema (3.14) se simplifica como

$$\omega_0 \dot{\mathbf{u}}_2(s) + \mathbf{u}_2(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_2(s - \omega_0\tau_0) = \mathbf{0},$$

cuya solución está dada, a partir del sistema (3.9), por (3.13), es decir

$$\mathbf{u}_2(s) = (a_0\cos(s) + b_0\sin(s)) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_0^2+1}{acc_1} \\ \frac{s_0(\omega_0^2+1)^2}{a^2c^2c_1c_2} \end{pmatrix}; \;\; a_0, b_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Observemos que las soluciones obtenidas son líneas rectas, algo que se esperaba, pues la ecuación (3.1) posee una cantidad numerable de soluciones, observando un fenómeno de resonancia.

3.2. Órbitas periódicas

Bifurcarcaremos en un número complejo, donde la curva Σ pasará sólo una vez, obteniendo buenas aproximaciones a partir del orden ϵ^1.

La siguiente proposición emana del Lema 2.1, en [9], página 55.
Proposición 3.2.1. *Para $c > 1$ existen $\omega \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ tales que $u(\omega,\tau) = -\frac{c}{2}$ y $v(\omega,\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.*

Demostración. Resolvemos para ω y τ

$$\begin{aligned} \cos(\omega\tau) - \omega\sin(\omega\tau) &= -\frac{c}{2}, \\ \omega\cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau) &= \frac{\sqrt{3}c}{2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

elevando ambos miembros al cuadrado y sumando miembro a miembro

$$c^2 = 1 + \omega^2.$$

Considérese ahora

$$\omega_0 = \sqrt{c^2 - 1},$$

sustituyendo ω_0 en (3.20), hallemos τ tal que

$$u(\omega_0, \tau) = -\frac{c}{2}, \tag{3.21}$$

$$v(\omega_0, \tau) = \frac{\sqrt{3}c}{2}, \tag{3.22}$$

multiplicando (3.22) por ω_0 y sumando la igualdad resultante con (3.21) miembro a miembro obtenemos

$$\cos(\omega_0\tau) = \frac{\sqrt{3}\omega_0 - 1}{2c}.$$

Mostremos que $\frac{\sqrt{3}\omega_0-1}{2c} \in [-1,1]$ para toda $c>1$. Notemos que $\frac{\sqrt{3}\omega_0-1}{2c}$ es estrictamente creciente, pues

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{c^2-1}-1}{2c}\right) = \frac{\sqrt{3}(\omega_0^{-1}+1)}{2c^2} > 0,$$

además

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to 1^+} \frac{\sqrt{3}\sqrt{c^2-1}-1}{2c} = -\frac{1}{2},\\
&\lim_{c\to\infty} \frac{\sqrt{3}\sqrt{c^2-1}-1}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,
\end{aligned}$$

despejando τ

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0-1}{2c}\right) > 0.$$

Por lo tanto, tomando

$$\begin{aligned}
&\omega_0 = \omega_0(c) = \sqrt{c^2-1},\\
&\tau_0 = \tau_0(c) = \frac{1}{\omega_0}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0-1}{2c}\right),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

se tiene lo pedido $\square$

En consecuencia $P_{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}(i\omega_0) = 0$ y de las características de $\Sigma(\tau_0)$ se deduce que $P_{ce^{-\frac{2\pi i}{3}}}(-i\omega_0) = 0$. Es fácil observar que $\pm i\omega_0$ son ceros de H de multiplicidad 1 y que con τ_0 fijo entonces $\omega=\omega_0$ es el único valor que satisface $u(\omega,\tau_0) = -\frac{c}{2}$ y $v(\omega,\tau_0) = \frac{\sqrt{3}c}{2}$. De (1.9) vemos que cuando $\tau=0$, $H(\lambda)=0$ tiene un par de raíces complejas conjugadas con parte real estrictamente negativa, entonces por la dependencia continua de las raíces de $H(\lambda)=0$ sobre los parámetros se tiene que para todo $\tau<\tau_0$ existe un par de raíces conjugadas con parte real negativa y en $\tau=\tau_0$ hay un par de raíces $\lambda=\pm i\omega_0$.

De (3.8) se tiene que

$$Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\bigg|_{\tau=\tau_0,\lambda=i\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{(1+\tau_0)^2+(\omega_0\tau_0)^2} > 0,$$

satisfaciendo las condiciones de la bifurcación de Hopf.

Procederemos a calcular una solución periódica usando el método de Lindstedt.

A orden ϵ^1 el sistema está gobernado por

$$\omega_0\dot{\mathbf{u}}_1(s) + \mathbf{u}_1(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_1(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}. \tag{3.24}$$

Para hallar una solución periódica de (3.24) proponemos

$$\phi_1(s) = e^{\lambda s}\mathbf{k};\;\; \mathbf{k}\in\mathbb{C}^3, \lambda\in\mathbb{C}, \tag{3.25}$$

sustituyendo (3.25) en (3.24) obtenemos

$$[(\lambda\omega_0 + 1)\mathbf{I}_3 - ae^{-\lambda\omega_0\tau 0}\mathbf{B}_0]\mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{3.26}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} Q(\lambda) : &= \det[(\lambda\omega_0 + 1)\mathbf{I}_3 - ae^{-\lambda\omega_0\tau 0}\mathbf{B}_0] \\ &= Q_c(\lambda)Q_{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda)Q_{ce^{-\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda), \end{aligned}$$

donde, para $z \in \mathbb{C}$ fijo, $Q_z(\lambda) = \lambda\omega_0 + 1 - ze^{-\lambda\omega_0\tau_0}$. Claramente $Q_z(\lambda) = 0$, $z \in \left\{c, ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right\}$, tienen raíces distintas entre sí. Hallemos las raíces imaginarias con parte real nula de $Q(\lambda) = 0$ para hacer de ϕ_1 una solución periódica.

Examinando la existencia de valores $\theta \in \mathbb{R}$ tales que $Q_z(i\theta) = 0$, se obtiene que $Q_z(i\theta) = 0$ si y solo si $u(\theta\omega_0, \tau_0) = Re(z)$ y $v(\theta\omega_0, \tau_0) = Im(z)$. Puesto que $ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \in \Sigma(\tau_0)$, entonces resolvemos para θ

$$\begin{aligned} u(\theta\omega_0, \tau_0) &= -\frac{c}{2}, \\ v(\theta\omega_0, \tau_0) &= \pm\frac{\sqrt{3}c}{2}, \end{aligned}$$

dando como resultado $\theta = \pm 1$. De esta manera $\lambda = \pm i$ son los únicos eigenvalores con parte real nula del sistema (3.9).

Para $\lambda = i$ hallemos $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ que resuelva (3.26), por lo que un eigenvector asociado a $\lambda = i$ es

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{c_1}\frac{i\omega_0+1}{ae^{-i\omega_0\tau_0}} \\ \frac{s_0}{c_1c_2}\left(\frac{i\omega_0+1}{ae^{-i\omega_0\tau_0}}\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

recordandando los valores de ω_0 y τ_0 de (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0\tau_0) &= \frac{\sqrt{3}\omega_0 - 1}{2c}, \\ \sin(\omega_0\tau_0) &= \frac{\omega_0 + \sqrt{3}}{2c}, \end{aligned}$$

resultando

$$\frac{i\omega_0 + 1}{ae^{-i\omega_0\tau_0}} = \frac{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}{a}. \tag{3.28}$$

Simplificando (3.27), se tiene que $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}{ac_1} \\ \frac{s_0c^2e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{a^2c_1c_2} \end{pmatrix}$, entonces un eigenvector asociado a $\lambda = -i$ es $\overline{\mathbf{k}}$ y

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= e^{is}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}{ac_1} \\ \frac{s_0c^2e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{a^2c_1c_2} \end{pmatrix}, \\ \overline{\phi}_1(s) &= e^{-is}\overline{\mathbf{k}}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

son soluciones periódicas complejas, del sistema (3.24). Luego

$$\mathbf{u}_1(s) = \begin{pmatrix} a_0\cos(s) + b_0\sin(s) \\ \frac{c}{2ac_1}\left[(-a_0+\sqrt{3}b_0)\cos(s) - (\sqrt{3}a_0+b_0)\sin(s)\right] \\ \frac{s_0c^2}{2a^2c_1c_2}\left[-(a_0+\sqrt{3}b_0)\cos(s) + (\sqrt{3}a_0-b_0)\sin(s)\right] \end{pmatrix}; \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

A orden ϵ^2, la solución periódica $\mathbf{u}$ está gobernada por

$$\omega_0\dot{\mathbf{u}}_2(s) + \mathbf{u}_2(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_2(s-\omega_0\tau_0) + \omega_1\dot{\mathbf{u}}_1(s) + a(\omega_0\tau_1+\omega_1\tau_0)\mathbf{B}_0\dot{\mathbf{u}}_1(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}, \tag{3.31}$$

el sistema lineal homogéneo asociado a (3.31) es

$$\omega_0\dot{\phi}(s) + \phi(s) - a\mathbf{B}_0\phi(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}, \tag{3.32}$$

el sistema lineal adjunto asociado a (3.32) está dado por

$$\omega_0\dot{\psi}(s) - \psi(s) + a\psi(s+\omega_0\tau_0)\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad \psi \in \mathcal{C}_3^*. \tag{3.33}$$

Asumamos que el sistema (3.33) posee una solución de la forma $\psi_1(s) = e^{\lambda s}\mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{3*}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, en consecuencia

$$\mathbf{b}[(\lambda\omega_0 - 1)\mathbf{I}_3 + ae^{\lambda\omega_0\tau_0}\mathbf{B}_0] = \mathbf{0}, \tag{3.34}$$

también se observa que

$$\begin{aligned} R(\lambda) :&= \det[(\lambda\omega_0 - 1)\mathbf{I}_3 + ae^{\lambda\omega_0\tau_0}\mathbf{B}_0] \\ &= R_c(\lambda)R_{ce^{\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda)R_{ce^{-\frac{2\pi i}{3}}}(\lambda), \end{aligned}$$

donde, para $z \in \mathbb{C}$ fijo, $R_z(\lambda) = \lambda\omega_0 - 1 + ze^{\lambda\omega_0\tau_0}$. Con el fin de hallar soluciones periódicas, se analiza la existencia de valores $\theta \in \mathbb{R}$ tales que $R(i\theta) = 0$. Para esto, nótese que $R_z(i\theta) = 0$ si y solo si $u(\theta\omega_0, \tau_0) = Re(z)$ y $v(\theta\omega_0, \tau_0) = -Im(z)$. Puesto que $ce^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \in \Sigma(\tau_0)$ entonces resolvemos para θ el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u(\theta\omega_0, \tau_0) &= -\frac{c}{2}, \\ v(\theta\omega_0, \tau_0) &= \pm\frac{\sqrt{3}c}{2}, \end{aligned}$$

luego $\theta = \pm 1$. Por lo tanto, los eigenvalores con parte real nula del sistema lineal adjunto (3.33) son $\lambda = \pm i$.

Para $\lambda = -i$ se busca $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{3*}$ que resuelva (3.34), por lo que un eigenvector asociado a $\lambda = -i$ es

$$\mathbf{b} = \left(1,\ \frac{ae^{-i\omega_0\tau_0}}{i\omega_0+1},\ s_oc_1c_2\left(\frac{ae^{-i\omega_0\tau_0}}{i\omega_0+1}\right)^2\right), \tag{3.35}$$

con ayuda de (3.28) se puede simplificar (3.35), obteniendo $\mathbf{b} = \left(1,\ \frac{ae^{-\frac{2\pi i}{3}}}{c},\ \frac{a^2s_0c_1c_2e^{\frac{2\pi i}{3}}}{c^2}\right)$. Así

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= e^{-is}\left(1,\ \frac{ae^{-\frac{2\pi i}{3}}}{c},\ \frac{a^2s_0c_1c_2e^{\frac{2\pi i}{3}}}{c^2}\right), \\ \overline{\psi_1}(s) &= e^{is}\overline{\mathbf{b}}, \end{aligned}$$

son soluciones complejas periódicas de la ecuación (3.33). Por otro lado

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} Re(\mathbf{bk}) & Re(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \\ Im(\mathbf{bk}) & Im(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}) \end{pmatrix} &= \mathbf{bk}Im\left(e^{-i\omega_0\tau_0}\mathbf{bB}_0\mathbf{k}\right) \\ &= \mathbf{bk}\frac{c}{a}\left(2+\frac{1}{c_1}\right)\sin\left(\frac{2\pi i}{3}-\omega_0\tau_0\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

si y solo si $\omega_0\tau_0 \neq \frac{\pi(2-3n)}{3}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$; suponiendo que la condición $C1$ se satisface, entonces de la Proposición (2.3.3)

$$\begin{aligned} &\omega_1 = 0, \\ &\tau_1 = 0. \end{aligned}$$

Así, el sistema (3.14) se simplifica como

$$\omega_0\dot{\mathbf{u}}_2(s) + \mathbf{u}_2(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_2(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0},$$

cuya solución está dada, a partir del sistema (3.24), por (3.30), a saber

$$\mathbf{u}_2(s) = \begin{pmatrix} a_0\cos(s) + b_0\sin(s) \\ \frac{c}{2ac_1}\left[(-a_0+\sqrt{3}b_0)\cos(s) - (\sqrt{3}a_0+b_0)\sin(s)\right] \\ \frac{s_0c^2}{2a^2c_1c_2}\left[-(a_0+\sqrt{3}b_0)\cos(s) + (\sqrt{3}a_0-b_0)\sin(s)\right] \end{pmatrix}; \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

Para hallar una solución periódica de $\mathbf{u}$ a orden ϵ^j, $j \geq 3$, seguimos el método descrito anteriormente (observando que es de manera recursiva). Por ejemplo, $\mathbf{u}$ a orden ϵ^3 es

$$\begin{aligned} &\omega_0\dot{\mathbf{u}}_3(s) + \mathbf{u}_3(s) - a\mathbf{B}_0\mathbf{u}_3(s-\omega_0\tau_0) \\ &+ \omega_2\dot{\mathbf{u}}_1(s) + a(\omega_0\tau_2+\omega_2\tau_0)\mathbf{B}_0\dot{\mathbf{u}}_1(s-\omega_0\tau_0) + \frac{a}{3}\mathbf{B}_0^{(3)}\mathbf{u}_1^3(s-\omega_0\tau_0) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & c_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & s_0c_2^3 \\ s_0c_3^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_1^3(s) &= \begin{pmatrix} x_1^3(s) \\ y_1^3(s) \\ z_1^3(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Claramente $\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(s)F_3(s)\,ds = 0$; asumiendo la condición $C1$ entonces $\omega_2 = \tau_2 = 0$ y

$$\mathbf{u}_3(s) = \begin{pmatrix} a_0\cos(s) + b_0\sin(s) \\ \frac{c}{2ac_1}\left[(-a_0+\sqrt{3}b_0)\cos(s) - (\sqrt{3}a_0+b_0)\sin(s)\right] \\ \frac{s_0c^2}{2a^2c_1c_2}\left[-(a_0+\sqrt{3}b_0)\cos(s) + (\sqrt{3}a_0-b_0)\sin(s)\right] \end{pmatrix}; \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}.$$

Bibliografía

[1] Bélair, Jacques and Campbell, Sue Ann, *Stability and Bifurcations of Equilibria in a Multiple-Delayed Differential Equations*, SIAM J. APPL. MATH., Vol. 54, No. 5, pp. 1402-1424, October 1994.

[2] Bellman, Richard and Cooke, Kenneth L., *Differential-Difference Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 6, Academic Press, 1963.

[3] Campbell, Sue Ann, *Time Delays in Neural System*, Handbook of brain connectivity, 65-90, Underst. Complex Syst., Springer, Berlin, (2007).

[4] Chicone, Carmen, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 34, 2nd ed., Springer (2006), New York.

[5] Conway, John B., *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 11, 2nd ed., Springer-Verlag, (1978).

[6] Erneux, Thomas, *Applied Delay Differential Equations*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 1st ed., Springer-Verlag (2009), New York.

[7] Guyton, Arthur C. and Hall, John E., *Tratado de Fisiología Médica*, Elsevier, 12va ed., (2011), España.

[8] Gopalsamy, K. and Leung, I., *Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition*, Physica D 89, 398-426, (1996).

[9] Guo, Shangjiang and Wu, Jiannhong, *Bifurcation Theory of Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 184, Springer, 1st ed., (2013), New York.

[10] Halanay, A., *Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, Vol. 23, (1965).

[11] Hale, J. *Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, Springer-Verlag, New York, (1971).

[12] Hale, J. and Koçak, H., *Dynamics and Bifurcations*, Texts in Applied Mathematics, Vol 3, Springer-Verlag (1991), New York.

[13] Hopfield, J. J., *Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties like Those of Two-State Neurons*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Vol. 81, pp. 3088-3092, May 1984, Biophysics.

[14] Izhikevich, E. M., *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting, Computational Neuroscience*, MIT Press, Cambridge, MA. (2007).

[15] Khalil, Hassan K., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 3rd ed., (2002), New Jersey.

[16] Kuznetsov, Yuri A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 112, Springer, 3rd ed., (2004).

[17] Perko, Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 7, 3rd ed., Springer, (2001).

[18] Ross, Michael H. and Pawlina, Wojciech, *Histología, Texto y Atlas color con Biología Celular y Molecular*, Médica Panamericana, 6ta ed., Buenos Aires, (2013).

[19] Smith, H., *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*, Text in Applied Mathematics, Vol. 57, Springer, (2011).