



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGÍA DE LOS HACES AIRY SIMÉTRICOS Y  
SUS VARIABLES DINÁMICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

FABIÁN CAMAS AQUINO

TUTORA

DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Camas  
Aquino  
Fabián  
54215738  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
411074874

2. Datos del tutor

Dra.  
Rocío  
Jáuregui  
Renaud

3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Maximino  
Avenidaño  
Alejo

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Pedro Antonio  
Quinto  
Su

5. Datos del sinodal 3

Dra.  
Karen Patricia  
Volke  
Sepúlveda

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Alejandro  
Vásquez  
Arzola

7. Datos del trabajo escrito

Topología de los haces Airy simétricos y sus variables dinámicas  
68 p.  
2017

# Resumen

En este trabajo, se analiza la topología de un haz de luz estructurado, llamado Airy simétrico, utilizando teoría electromagnética y análisis de Fourier. Los haces de luz estructurada han sido, recientemente, objeto de amplio estudio debido a sus diversas aplicaciones en la manipulación óptica de objetos microscópicos, con repercusiones en áreas importantes de la Física, la Biología y la Medicina. En el análisis se trabaja tanto la aproximación paraxial como la no paraxial; lo que permite comparar los resultados obtenidos en todos los regímenes.

En el primer capítulo, se introducen las ecuaciones de Maxwell, sus expresiones en ausencia de fuentes de cargas y corrientes externas, y las ecuaciones de ondas electromagnéticas. Además, se analiza la solución de onda plana y su extensión a superposiciones lineales de éstas. Posteriormente, se presenta la simplificación de las ondas vectoriales a ondas escalares, y el uso de la aproximación paraxial para haces altamente dirigidos. La interacción de las ondas electromagnéticas con medios materiales, se describe en forma conveniente en términos de las cantidades conservadas, tradicionalmente: energía, momento lineal y momento angular.

En el segundo capítulo, se introducen conceptos básicos de la llamada Óptica Singular y se estudian en mayor detalle los vórtices ópticos, como ejemplos de singularidades en los campos ópticos escalares. Se reseña brevemente su historia y su importancia, así como sus propiedades, sus métodos de creación y detección. La importancia de los vórtices ópticos no se limita sólo a su producción controlada, sino a su aparición típica en la naturaleza, donde no hacen falta condiciones especiales para su realización. Esto requirió para su análisis la creación de nuevas herramientas matemáticas desarrolladas en la segunda mitad del siglo pasado y sintetizadas en la teoría de catástrofes.

En el capítulo 3, se estudian las dos primeras catástrofes en la jerarquía matemática propuesta por Thom en 1975: el doblez y la cúspide, representados por las funciones Airy y Pearcey, respectivamente. Ambas catástrofes tienen su correspondencia con haces de luz en Óptica, donde es posible visualizar sus propiedades.

Finalmente, en el capítulo 4, se presenta el haz Airy simétrico, el cual consiste de la superposición de haces Airy, y produce una catástrofe similar al tipo cúspide, que se realiza por el haz Pearcey. En este capítulo, se estudian en detalle por primera vez las singularidades de fase del haz, con y sin la aproximación paraxial. Para complementar el análisis topológico se caracterizan las variables dinámicas del sistema.



# Índice general

Resumen	III
<b>1. Ondas electromagnéticas</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones de Maxwell	1
1.1.1. Ecuación de onda electromagnética	1
1.1.2. La onda plana como solución	2
1.1.3. Aproximación paraxial	4
1.1.4. Haz Gaussiano	5
1.2. Variables dinámicas de las ondas electromagnéticas	8
1.2.1. Densidad de energía y vector de Poynting	8
1.2.2. Densidad de momento lineal	9
1.2.3. Densidad de momento angular	10
1.3. Fuerzas de radiación	11
1.3.1. Fuerza de gradiente: aproximación dipolar eléctrica	11
1.3.2. Fuerza de dispersión	12
<b>2. Óptica singular: vórtices ópticos</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción	15
2.2. La propiedad matemática fundamental de una dislocación	16
2.2.1. Experimento de Young	17
2.3. Revisión histórica de los vórtices en óptica	19
2.3.1. Cáusticas	21
2.4. Tipos de vórtices ópticos: borde, hélice y borde-hélice	23
2.5. Creación de un vórtice óptico	25
2.6. La estructura de singularidades de fase ópticas	26
2.7. Detección de vórtices ópticos	27
<b>3. Catástrofes de difracción: el doblez y la cúspide</b>	<b>31</b>
3.1. La función Airy	31
3.2. Haz Airy	33
3.3. La función Pearcey	37
3.4. Haz Pearcey	37
<b>4. Haz Airy simétrico y su topología</b>	<b>41</b>
4.1. Haz Airy simétrico paraxial	41
4.1.1. Haz Airy simétrico bidimensional como superposición de funciones incompletas de Airy	46
4.2. Haz Airy simétrico no paraxial	48

4.2.1.	2D . . . . .	48
4.2.2.	3D . . . . .	50
4.3.	Ondas electromagnéticas Airy simétricas . . . . .	53
4.3.1.	Campo eléctrico . . . . .	53
4.3.2.	Campo magnético . . . . .	54
4.3.3.	Variables dinámicas . . . . .	56
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>A.</b>	<b>Gradientes del campo eléctrico</b>	<b>63</b>
A.1.	$\partial_{s_1} E_{s_1}$ . . . . .	63
A.2.	$\partial_{s_2} E_{s_1}$ . . . . .	63
A.3.	$\partial_{s_3} E_{s_1}$ . . . . .	64
A.4.	$\partial_{s_1} E_{s_3}$ . . . . .	64
A.5.	$\partial_{s_2} E_{s_3}$ . . . . .	64
A.6.	$\partial_{s_3} E_{s_3}$ . . . . .	64
	<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Ondas electromagnéticas

La unificación de las ecuaciones que rigen a los fenómenos eléctricos y magnéticos, a comienzos de la segunda mitad del siglo XIX, fue realizada por el físico escocés James Clerk Maxwell; la empresa requirió la recopilación de los trabajos experimentales realizados por Michael Faraday [1]. Uno de los resultados más notables de estas ecuaciones es la obtención de soluciones que representan ondas electromagnéticas que se propagan en vacío a la velocidad de la luz, soluciones encontradas por el propio J. C. Maxwell. Más tarde, en 1890, el físico alemán Heinrich Hertz confirmó experimentalmente las predicciones de Maxwell al producir ondas electromagnéticas y observar sus propiedades. Desde entonces, el estudio de los fenómenos ópticos clásicos puede realizarse al considerar a la luz como onda electromagnética [2].

### 1.1. Ecuaciones de Maxwell

En el sistema gaussiano, las ecuaciones de Maxwell en un medio material en la forma de ecuaciones diferenciales parciales están dadas por [3]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.4)$$

donde el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , el desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ , el campo magnético  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  están relacionados con la polarización  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  y la magnetización  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  del medio por  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ .  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  representan la densidad de carga eléctrica y de corriente eléctrica externa, respectivamente, mientras que  $c$  es la velocidad de la luz en vacío.

#### 1.1.1. Ecuación de onda electromagnética

En un medio homogéneo, lineal, local e isotrópico, cuando la dependencia temporal es armónica, se tienen las siguientes relaciones constitutivas  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\mu$ , donde  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica, y  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. En estas ecuaciones



$\epsilon$  y  $\mu$  son, en general, funciones complejas de la frecuencia de oscilación ( $\omega$ ) del campo electromagnético. Si el medio está libre de fuentes de carga eléctrica y corriente eléctrica externa,  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ , entonces las ecuaciones de Maxwell adquieren la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.8)$$

Las ecuaciones anteriores dan lugar a dos ecuaciones vectoriales de onda, una para  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y otra para  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Al aplicar el operador rotacional a la ecuación (1.6), se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \frac{\epsilon\mu}{c} \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right). \quad (1.9)$$

Usando la siguiente identidad para un campo vectorial  $\mathbf{F}$ ,  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ , e intercambiando el orden de los operadores en el miembro derecho de la ecuación (1.9), se obtiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)). \quad (1.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.7) y (1.8) en la ecuación anterior, y reordenando los términos, se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

Análogamente para  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , se tiene:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

En las ecuaciones anteriores, se sustituyó el término  $\sqrt{\epsilon\mu}$  por el índice de refracción ( $n$ ) del medio, por lo que el término  $c/n$  es la velocidad ( $v$ ) de la onda en el medio. Por construcción el índice de refracción depende de la frecuencia  $\omega$ .

### 1.1.2. La onda plana como solución

Las ecuaciones de onda (1.11) y (1.12), admiten soluciones separables y armónicas en el tiempo, *i.e.* en términos de  $\cos(\omega t)$  o  $\sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  es independiente del tiempo, dando lugar a ondas monocromáticas. Las soluciones pueden representarse, por facilidad, como  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t}$ , por lo que es posible escribir a las ecuaciones vectoriales de onda, como ecuaciones vectoriales de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left( \frac{n\omega}{c} \right)^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left( \frac{n\omega}{c} \right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

En coordenadas cartesianas, las ecuaciones (1.13) y (1.14) tienen como soluciones a las ondas planas monocromáticas, cuya dependencia espacial también es oscilatoria, dando lugar a los siguientes campos complejos:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{m}, \quad (1.15)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = n\tilde{E}_0 e^{i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}), \quad (1.16)$$

donde  $\tilde{E}_0$  es la amplitud y corresponde por lo general a una función compleja,  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  es el vector de onda o de propagación,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición,  $\omega$  es la frecuencia de oscilación y  $\mathbf{m}$  es el vector que define la polarización del campo electromagnético. Tanto  $\mathbf{m}$  como  $\mathbf{n}$  son vectores constantes en el espacio y el tiempo. La magnitud del vector de onda satisface la relación de dispersión  $k = n\omega/c$  si  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ . De (1.5) y (1.8) se tiene que  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ , a esto se le interpreta que el campo electromagnético es vectorial transversal. Las ecuaciones (1.6) y (1.7) implican que los campos eléctrico y magnético son mutuamente ortogonales.

Hay que resaltar que los campos físicos corresponden a la parte real de las expresiones que se escriban, en particular (1.15) y (1.16), deben leerse como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \mathbf{m}, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = nE_0 \cos(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\mathbf{n} \times \mathbf{m}), \quad (1.18)$$

para  $E_0$ ,  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  reales;  $\delta$  representa un desfase de la onda. El argumento de la función coseno corresponde a la fase de la onda. En este caso, las equifases o frentes de onda forman superficies planas, paralelas entre sí, que se desplazan en la dirección  $\mathbf{n}$  con velocidad  $v$ . Si las equiamplitudes son paralelas a las equifases, entonces se tiene una onda plana homogénea.

Para el caso en que  $\mathbf{n}$  es un vector complejo constante dado por  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_R + i\mathbf{n}_I$ , donde  $\mathbf{n}_R$  y  $\mathbf{n}_I$  son vectores reales. En general,  $\mathbf{n}$  ya no será un vector unitario, e introduce un término exponencial creciente o decreciente en algunas direcciones, dependiendo del signo de  $\mathbf{n}_I$ , se obtiene:

$$e^{i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{i(k\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-k\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.19)$$

que corresponde a una onda plana inhomogénea, ya que las equifases siguen siendo planos paralelos entre sí, aunque no necesariamente serán paralelas a las equiamplitudes [4].

Debido a la linealidad de los operadores en la ecuación de onda, y por ende de esta misma, es posible obtener otras soluciones de la ecuación de onda a partir de combinaciones lineales de soluciones conocidas (principio de superposición) [5]. De hecho, esta idea permite identificar conjuntos de soluciones que hacen posible expresar cualquier onda en términos de una combinación lineal de elementos de estos conjuntos. En espacio libre las ondas sinusoidales son un conjunto completo, haciendo posible la representación de espectro angular de un campo ondulatorio [6, 7], que en este caso sólo consiste de ondas planas homogéneas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma} \int_0^{+\infty} d\omega A(\omega) \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \delta\left(\frac{n^2\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}|^2\right) \phi_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.20)$$

$$= \sum_{\sigma} \int_0^{+\infty} d\omega A(\omega) \int_{-k}^{+k} dk_y \int_{-\sqrt{k^2 - k_y^2}}^{+\sqrt{k^2 - k_y^2}} dk_x \frac{e^{i(\mathbf{k}_{\perp}\cdot\mathbf{r}_{\perp} - \omega t)}}{2k'_z} \left[ \phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, k'_z) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, k'_z) e^{ik'_z z} \right. \quad (1.21)$$

$$\left. + \phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, -k'_z) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, -k'_z) e^{-ik'_z z} \right] \quad (1.22)$$

donde  $A(\omega)$  es la amplitud,  $\sigma$  está asociada a la polarización del campo electromagnético,  $k'_z = +\sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_{\perp}|^2}$ ,  $k = n\omega/c$ ,  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$  y  $\phi_{\sigma}$  es el espectro angular. En el desarrollo anterior se utilizaron las propiedades de la delta de Dirac [8], cuyo argumento en la ecuación (1.20) es una función real de la variable de integración, que en este caso es  $k_z$ .

### 1.1.3. Aproximación paraxial

En situaciones donde los valores de  $\phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, k'_z)$  ( $\phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, -k'_z)$ ) son significativos sólo en una región de las componentes transversales,  $|\mathbf{k}_{\perp}| \ll k$ , tal que  $\phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, kz') \approx 0$  ( $\phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, kz') \approx 0$ ) se tiene que  $k'_z \approx k$  por lo que es posible reescribir  $k'_z$  como  $k'_z = k\sqrt{1 - |\mathbf{k}_{\perp}|^2/k^2}$ , y considerar sólo hasta el término lineal en la serie de Taylor de la raíz cuadrada. Resulta entonces la siguiente aproximación conocida como aproximación paraxial o de Fresnel [9]:

$$k'_z \approx k - \frac{|\mathbf{k}_{\perp}|^2}{2k}. \quad (1.23)$$

Debido al comportamiento de  $\phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}, k'_z)$  es posible sustituir la aproximación (1.23) en (1.21), obteniéndose:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{\sigma} \int_0^{+\infty} d\omega A(\omega) e^{i(kz - \omega t)} \int_{-k'_y}^{+k'_y} dk_y \int_{-k'_x}^{+k'_x} dk_x \phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}) e^{i(\mathbf{k}_{\perp}\cdot\mathbf{r}_{\perp} - \frac{\sigma}{2k}|\mathbf{k}_{\perp}|^2)} \quad (1.24)$$

$$+ \sum_{\sigma} \int_0^{+\infty} d\omega A(\omega) e^{-i(kz + \omega t)} \int_{-k'_y}^{+k'_y} dk_y \int_{-k'_x}^{+k'_x} dk_x \phi_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma}(\mathbf{k}_{\perp}) e^{i(\mathbf{k}_{\perp}\cdot\mathbf{r}_{\perp} + \frac{\sigma}{2k}|\mathbf{k}_{\perp}|^2)}, \quad (1.25)$$

donde  $k'_x$  y  $k'_y$  corresponden a los nuevos límites de integración de  $k_x$  y  $k_y$  que pueden extenderse fuera de la región física sin afectar significativamente el valor de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . En particular los límites de integración son independientes uno de otro, siempre y cuando la región de integración contenga a la región relevante en el espacio  $(k_x, k_y)$ .

Partiendo de la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico, *cf.* (1.14), y considerando un haz que viaja principalmente en la dirección  $z$ , tal que sólo tiene componentes en el plano  $xy$ , entonces el campo está dado por  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 U(\mathbf{r})$ , donde  $\mathbf{E}_0$  es un vector constante, en general complejo, y  $U(\mathbf{r})$  es un campo escalar complejo [10]. Entonces la ecuación de Helmholtz escalar para este campo es:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.26)$$

Ya que el campo se propaga muy cerca de la dirección  $z$ , es posible aproximar la función  $U(\mathbf{r})$  por:

$$U(\mathbf{r}) \approx u(\mathbf{r})e^{ikz}, \quad (1.27)$$

con  $u(\mathbf{r})$  una función que varía lentamente en la variable  $z$ , conocida como la amplitud compleja. Al sustituir la expresión de  $U(\mathbf{r})$  en (1.26), se obtiene:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (1.28)$$

Al considerar la variación lenta de  $u(\mathbf{r})$  en  $z$  en el orden de una longitud de onda ( $\lambda$ ), tal que  $\lambda|\partial_z u| \ll |u|$  y  $\lambda|\partial_{zz} u| \ll |\partial_z u|$ , se obtiene (en coordenadas cartesianas):

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (1.29)$$

Aplicando los cambios de variable  $s_1 = x/x_0$ ,  $s_2 = y/x_0$  y  $\zeta = z/kx_0^2$  a la ecuación anterior, ésta se reduce a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + 2i \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.30)$$

a esta ecuación se le conoce como la ecuación paraxial de onda o de Helmholtz en coordenadas cartesianas. Es importante mencionar que la parte transversal del laplaciano en la ecuación (1.28) puede considerarse en coordenadas cilíndricas. Si en vez de tomar  $e^{ikz}$  se toma  $e^{-ikz}$  en la ecuación (1.27), *i.e.* se invierte el sentido en la dirección de propagación del campo, sólo se cambia  $i$  por  $-i$  en las tres ecuaciones subsecuentes.

#### 1.1.4. Haz Gaussiano

Esta subsección está basada principalmente en [11]. La solución más simple a la ecuación paraxial de Helmholtz es la onda paraboloidal, cuya amplitud compleja es:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{u_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right); \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (1.31)$$

donde  $u_1$  es una constante. La onda paraboloidal es la aproximación paraxial de la onda esférica  $U(r) = (u_1/r) \exp(-ikr)$  en regiones cercanas al eje  $z$ . Al considerar la onda paraboloidal con un desplazamiento dado por  $z \rightarrow z - iz_0$ , donde  $z_0$  es una constante real conocida como rango de Rayleigh, se obtiene la siguiente amplitud compleja:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{u_1}{z + iz_0} \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2(z + iz_0)}\right]. \quad (1.32)$$

Al reexpresar el número complejo  $1/(z + iz_0)$  de forma explícita en su parte real e imaginaria, identificar estos valores con ciertas cantidades físicas, y sustituirlos en la ecuación (1.32), se obtiene el siguiente campo complejo paraxial (al usar la ecuación (1.27) para un campo que se propaga principalmente en  $-\hat{z}$ ):

$$U(\mathbf{r}) = u_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp\left[-i \left(kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z)\right)\right], \quad (1.33)$$

donde se redefinió la constante  $u_1$  por  $u_0 = u_1/iz_0$ ,

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad (1.34)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right], \quad (1.35)$$

$$\zeta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (1.36)$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}. \quad (1.37)$$

Los parámetros independientes  $u_0$  y  $z_0$  en  $U(\mathbf{r})$  están determinados por las condiciones de frontera. Los otros parámetros  $W(z)$ ,  $R(z)$ ,  $\zeta(z)$  y  $W_0$  están en términos de  $z_0$  y  $\lambda$  (longitud de onda). El significado de estas cantidades se menciona en el transcurso.

La intensidad de un haz está dada por  $I(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})U(\mathbf{r})^*$ , que en este haz resulta:

$$I(\rho, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right), \quad (1.38)$$

donde  $I_0 = |u_0|^2$ . Para cualquier plano transversal  $z$ , el patrón de intensidad es una función gaussiana dependiente de la coordenada radial  $\rho$ , de aquí que este haz tome el nombre de haz Gaussiano, y en cada plano el valor máximo en intensidad está en  $\rho = 0$ . Al hacer  $\rho = 0$ , se encuentra de (1.38) que la intensidad del haz tiene su valor máximo en  $z = 0$ , y decae gradualmente en  $z$ , siendo  $z = \pm z_0$  donde el máximo de intensidad se reduce a la mitad. En consecuencia, el punto ( $\rho = 0, z = 0$ ) es el punto de intensidad máxima, *i.e.*  $I(\rho = 0, z = 0) = I_0$ . Para valores grandes de  $z$ , *i.e.*  $|z| \gg z_0$ , la intensidad decrece con la distancia por una ley de cuadrado inverso dada por  $I(0, z) \approx I_0 z_0^2 / z^2$ .

La potencia total transportada por un haz es la integral de la intensidad sobre cualquier plano transversal, que para un haz con simetría circular en tales planos se tiene:

$$P = \int_0^{+\infty} I(\rho, z) 2\pi \rho d\rho. \quad (1.39)$$

Para el haz Gaussiano, la potencia total resulta:

$$P = \frac{1}{2} I_0 \pi W_0^2, \quad (1.40)$$

donde se deduce claramente que la potencia total de este haz, para cualquier valor de  $z$ , está dada por un medio del producto de la intensidad máxima y del área del haz en su cintura. Usando la ecuación anterior es posible expresar la intensidad del haz en términos de la potencia total:

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right). \quad (1.41)$$

Para el haz Gaussiano, la razón de la potencia transportada dentro de un círculo de radio  $\rho_0$  centrado en el eje  $z$  ( $P_{\rho_0}$ ) y la potencia total es:

$$\frac{P_{\rho_0}}{P} = 1 - \exp\left(-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right), \quad (1.42)$$

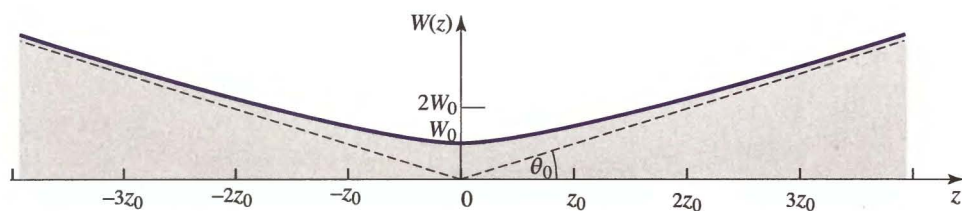


Figura 1.1: Radio o ancho del haz,  $W(z)$ , en función de la distancia de propagación. El valor mínimo del ancho es  $W_0$ , llamado la cintura del haz.  $\theta_0$  representa el ángulo de divergencia del haz. Imagen tomada de [11].

para un círculo de radio  $\rho_0 = W(z)$ , la potencia transportada es aproximadamente 86 % de la potencia total, mientras que un círculo con radio  $\rho_0 = 1.5 W(z)$  transporta cerca del 99 %.

De la ecuación (1.38), se obtiene que la intensidad del haz disminuye por el factor  $e^{-2}$  a una distancia radial  $\rho_0 = W(z)$ . Se considera a  $W(z)$  como el radio o ancho del haz (ver Figura 1.1), el cual presenta su valor mínimo  $W_0$  en  $z = 0$  y aumenta simétricamente con el valor de  $|z|$ ; el aumento es tal que para valores grandes de  $z$  la relación es aproximadamente lineal. Al diámetro de la cintura del haz,  $2W_0$ , se le conoce como el tamaño de la mancha. También es posible definir el ancho del haz por el ancho RMS, el cual está dado por  $\sigma = W(z)/2$ .

Para  $z \gg z_0$ , la ecuación (1.34) puede aproximarse por  $W(z) \approx W_0 z / z_0 = \theta_0 z$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo de divergencia del haz y representa un medio del ángulo formado por un cono recto que confina aproximadamente el 86 % de la potencia total del haz.

La distancia axial entre los puntos donde el área del haz duplica su área mínima (ubicada en la cintura del haz), se conoce como profundidad de enfocamiento o parámetro confocal. De la ecuación (1.34), se obtiene que el parámetro confocal es  $2z_0$ , mientras que la ecuación (1.37) permite obtener la relación  $2z_0 = 2\pi W_0^2 / \lambda$ .

$R(z)$  es el radio de curvatura del frente de onda en  $z$  (ver Figura 1.2). En  $z = 0$  el radio de curvatura es infinito,  $R(0) = \infty$ , lo que corresponde a un frente de onda plano. En  $z = z_0$  el radio de curvatura alcanza su valor mínimo,  $R(z_0) = 2z_0$ . Para valores de  $z$  tales que  $z \gg z_0$   $R(z) \approx z$ , por lo que los frentes de onda serán aproximadamente esféricos.

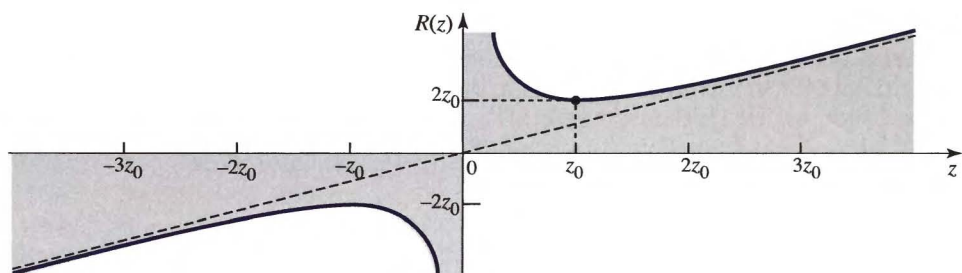


Figura 1.2: Radio de curvatura de los frentes de onda del haz en función de  $z$ . En  $z = 0$  el frente de onda es plano, en  $z_0$  el radio de curvatura alcanza su valor mínimo, y  $R(z)$  aumenta linealmente para valores muy grandes de  $z$ . Imagen tomada de [11].

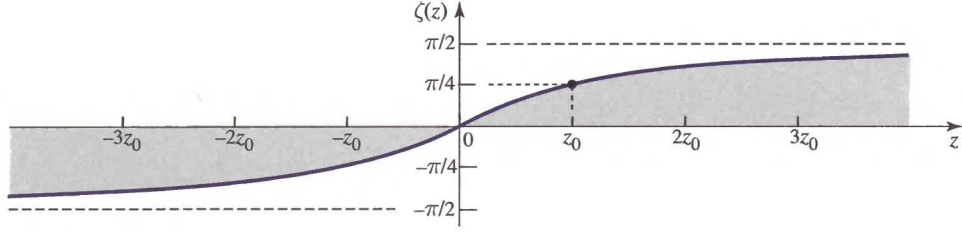


Figura 1.3: Retraso en la fase del haz Gaussiano en función de la distancia de propagación debido al efecto Gouy. Imagen tomada de [11].

De la ecuación (1.33) la fase del haz Gaussiano está dada por  $\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + k\rho^2/2R(z)$ , que en el eje del haz resulta  $\varphi(0, z) = kz - \zeta(z)$ .  $\zeta(z)$  es un retraso en la fase del haz Gaussiano relativo a una onda plana o una onda esférica (ver Figura 1.3). El retraso total en la fase al pasar de  $z = -\infty$  a  $z = +\infty$  es  $\pi$  rad, el cual es un fenómeno conocido como efecto Gouy.

## 1.2. Variables dinámicas de las ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas transportan energía y momento, lineal y angular. Las cantidades anteriores dan lugar a interacciones entre las ondas electromagnéticas con los materiales. Esta sección está basada en [3], [12] y [13].

### 1.2.1. Densidad de energía y vector de Poynting

La densidad de energía se obtiene del trabajo realizado por unidad de tiempo debido a campos electromagnéticos sobre una distribución volumétrica continua de cargas. Usando la fuerza de Lorentz sobre una región de carga eléctrica  $\Delta q$ , se obtiene el trabajo realizado sobre ésta, el cual está dado por:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \Delta q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v} dt = \Delta q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (1.43)$$

Al usar  $\Delta q = \rho \Delta \tau$  y  $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$ , e integrar sobre todo el volumen  $\mathcal{V}$ , se obtiene la tasa de cambio del trabajo realizado sobre todas las cargas:

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau. \quad (1.44)$$

Reescribiendo el integrando anterior, al usar la expresión de  $\mathbf{J}$  en la ecuación de Ampère-Maxwell (1.2), se obtiene:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.45)$$

al reexpresar el primer producto en el miembro derecho usando la divergencia del producto vectorial entre dos vectores  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ , *i.e.*  $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_2)$ , sustituir la ecuación de Faraday (1.3) en éste y reordenar los términos, se encuentra que (1.44) está dado por:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\tau - \frac{c}{4\pi} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.46)$$

donde se usó el teorema de la divergencia en el segundo término del miembro derecho, siendo  $S$  la superficie que encierra al volumen  $\mathcal{V}$ . El primer término del miembro derecho de la ecuación anterior corresponde a la tasa de la energía total almacenada en los campos electromagnéticos, mientras que la segunda integral representa la tasa de la energía que atraviesa la superficie  $S$ . Por lo que la energía por unidad de área por unidad de tiempo transportada por los campos está dada por:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.47)$$

y se le conoce como vector de Poynting. De la ecuación (1.46), se obtiene para un medio lineal la siguiente expresión para la densidad de energía total:

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (1.48)$$

La ecuación (1.46) expresa el teorema de Poynting o la conservación de energía: el trabajo realizado sobre las cargas por la fuerza electromagnética dentro de un volumen es igual al decrecimiento en la energía almacenada en los campos en el volumen, menos la energía que fluye a través de la superficie que limita al volumen.

### 1.2.2. Densidad de momento lineal

La densidad de momento lineal aparece al analizar la fuerza electromagnética sobre un volumen  $\mathcal{V}$  de cargas, dada por:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \rho d\tau = \int_{\mathcal{V}} \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) d\tau, \quad (1.49)$$

donde el integrando representa la fuerza por unidad de volumen ( $\mathbf{f}$ ):

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (1.50)$$

Expresando  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  al usar las ecuaciones (1.1) y (1.2), se obtiene:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}, \quad (1.51)$$

reexpresando el tercer elemento del segundo miembro y usando la ley de Faraday (1.3), se obtiene:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} [(\nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{E} - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}). \quad (1.52)$$

Suponiendo que  $\mathbf{F}$  es la tasa de cambio del momento mecánico, y al sustituir la expresión anterior de  $\mathbf{f}$  en la ecuación (1.49), es posible identificar al último elemento en el miembro derecho de la ecuación (1.52) con la densidad de momento lineal electromagnético:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}), \quad (1.53)$$

mientras que el primer elemento del miembro derecho conduce a la definición del tensor de esfuerzos de Maxwell, con lo cual es posible establecer una ley de conservación para momento lineal, al convertir la integral de volumen en integral de superficie.



### 1.2.3. Densidad de momento angular

La densidad de momento angular electromagnética está dada por:

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\wp} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B})] \quad (1.54)$$

Considerando que el material es lineal e isotrópico,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , y escribiendo la inducción magnética en términos del potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$  en la norma de Coulomb, *i.e.*  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}/c$  y  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , se obtiene la siguiente densidad de momento lineal:

$$\boldsymbol{\wp} = \frac{\epsilon}{4\pi c} [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})]. \quad (1.55)$$

Utilizando notación indicial para desarrollar la expresión anterior, donde  $\mathbf{E} = E_i e_i$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{mji} A_{i,j} e_m$  y  $e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k$ , la componente  $n$  del producto vectorial está dada por:

$$[\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_n = \epsilon_{lmn} E_l \epsilon_{mji} A_{i,j} \quad (1.56)$$

$$= (\delta_{nj} \delta_{li} - \delta_{ni} \delta_{lj}) E_l A_{i,j} \quad (1.57)$$

$$= E_i A_{i,n} - E_j A_{n,j} \quad (1.58)$$

$$= E_i A_{i,n} - (E_j A_n)_{,j} \quad (1.59)$$

donde se usó la identidad  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$ , y en la última igualdad se usó  $E_{j,j} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Al sustituir el resultado anterior en la expresión de la densidad de momento angular, se obtiene que la componente  $l$  del producto vectorial está dada por:

$$\{\mathbf{r} \times [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})]\}_l = \epsilon_{mnl} r_m [E_i A_{i,n} - (E_j A_n)_{,j}] \quad (1.60)$$

$$= \epsilon_{mnl} r_m E_i A_{i,n} - \epsilon_{mnl} (r_m E_j A_n)_{,j} + \epsilon_{mnl} r_{m,j} E_j A_n \quad (1.61)$$

$$= E_i (\mathbf{r} \times \nabla)_l A_i - [E_j (\mathbf{r} \times \mathbf{A})_l]_{,j} + (\mathbf{E} \times \mathbf{A})_l \quad (1.62)$$

Finalmente, la densidad de momento angular resulta:

$$\boldsymbol{\ell} = \frac{\epsilon}{4\pi c} \{E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i - \nabla \cdot [\mathbf{E} (\mathbf{r} \times \mathbf{A})] + (\mathbf{E} \times \mathbf{A})\}. \quad (1.63)$$

Es posible obtener el momento angular total al integrar en el espacio la densidad de momento angular:

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_{L^3} [E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i] d^3 r - \frac{\epsilon}{4\pi c} \oint \mathbf{E} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} + \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_{L^3} (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) d^3 r. \quad (1.64)$$

La segunda integral en la expresión anterior se desprecia cuando  $L$  es muy grande, por lo que el momento angular consiste sólo de los siguientes términos:

$$\mathbf{L}_o = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_{L^3} [E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i] d^3 r, \quad (1.65)$$

$$\mathbf{L}_s = \frac{\epsilon}{4\pi c} \int_{L^3} (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) d^3 r, \quad (1.66)$$

donde  $\mathbf{L}_s$  representa el momento angular de espín o intrínseco, y  $\mathbf{L}_o$  el momento angular orbital del campo electromagnético. Las expresiones anteriores permiten expresar a las densidades de momento angular orbital y de espín como:

$$\boldsymbol{\ell}_o = \frac{\epsilon}{4\pi c} E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i, \quad (1.67)$$

$$\boldsymbol{\ell}_s = \frac{\epsilon}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \quad (1.68)$$

### 1.3. Fuerzas de radiación

Los efectos de la presión de radiación de luz láser visible sobre partículas esféricas, micrométricas, dieléctricas y neutras inmersas en fluidos al variar los índices de refracción relativos (cociente entre el índice de refracción de la partícula y el medio), fueron descritos y estudiados experimentalmente por A. Ashkin, y reportados en 1970 [14]. Entre los efectos producidos por las fuerzas de radiación, aquellas asociadas con la presión de radiación, se encuentran la aceleración y el atrapamiento de las partículas. Las fuerzas de gradiente resultan de la distribución inhomogénea de la intensidad del haz.

En todos los casos estudiados por Ashkin la fuerza neta sobre las partículas fue tal que poseían una componente en la dirección de propagación del haz Gaussiano utilizado. Cuando el índice de refracción relativo es mayor que la unidad, la partícula tiende a acercarse al eje de propagación del haz (zona de mayor intensidad), mientras que en el caso contrario las partículas se alejan del eje de propagación.

El atrapamiento y la manipulación óptica de partículas dieléctricas pequeñas (desde decenas de  $\eta\text{m}$  hasta decenas de  $\mu\text{m}$ ) está descrita por teorías que dependen del tamaño relativo de la partícula con la longitud de onda del haz de luz que se utiliza. Cuando el tamaño de la partícula es mucho más grande que la longitud de onda del haz, la descripción puede hacerse usando óptica de rayos; mientras que en el caso opuesto, *i.e.* cuando el tamaño de la partícula es mucho menor que la longitud de onda del haz, la descripción se realiza reemplazando a la partícula por un objeto puntual con un momento multipolar adecuado. Los casos intermedios requieren emplear una descripción más completa de los efectos del campo electromagnético sobre la partícula. En esta sección únicamente analizaremos el caso de una partícula con dimensiones mucho menores que la longitud de onda del haz.

#### 1.3.1. Fuerza de gradiente: aproximación dipolar eléctrica

Cuando una partícula neutra se encuentra inmersa en un campo electromagnético tal que su radio es mucho menor que la longitud de onda del haz de luz, se induce un dipolo eléctrico sobre la partícula. Para conocer la fuerza ejercida sobre el dipolo eléctrico debido al campo electromagnético se suman las fuerzas sobre las cargas que componen al dipolo, el cual puede expresarse con respecto a las coordenadas de su centro de masa al usar una aproximación lineal en los campos. Sobre la partícula de masa  $m_1$  y carga eléctrica  $-q$  localizada en  $\mathbf{r}_1$  y moviéndose con una velocidad  $\mathbf{v}_1$  actúa la siguiente fuerza:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -q \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t) + \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1, t) \right] - \frac{q^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1.69)$$

Análogamente se puede encontrar la expresión de la fuerza sobre la partícula de masa  $m_2$  y carga  $+q$  localizada en  $\mathbf{r}_2$  y con velocidad  $\mathbf{v}_2$ , al cambiar el subíndice 1 por 2 y la carga  $-q$  por  $+q$  en la expresión anterior. Al sumar ambas fuerzas se obtiene la fuerza sobre el dipolo:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = q \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t) + \frac{\mathbf{v}_2}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2, t) - \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1, t) \right]. \quad (1.70)$$

Al aproximar los campos anteriores con su serie de Taylor hasta primer orden alrededor del centro de masa  $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/M$ , donde  $M = m_1 + m_2$  es la masa total del dipolo, se obtiene para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + ((\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}, t), \quad (1.71)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + ((\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t). \quad (1.72)$$

Al sustituir en las expresiones anteriores los valores de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , usar  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \mu \mathbf{d}/m_1$  y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mu \mathbf{d}/m_2$ , donde  $\mu = m_1 m_2 / M$  es la masa reducida y  $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  es el vector posición de  $+q$  con respecto a  $-q$ , se obtiene:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) \quad (1.73)$$

$$+ \frac{1}{c} \frac{m_1 - m_2}{M} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t), \quad (1.74)$$

donde  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  es el momento dipolar eléctrico. Si se supone que la rapidez de las componentes de  $\mathbf{R}$  son pequeñas comparadas con  $c$  y que  $m_1 = m_2$ , entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t). \quad (1.75)$$

Suponiendo que  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ , donde  $\alpha$  es una polarizabilidad constante, y usando la siguiente identidad para el campo vectorial  $\mathbf{F}_1$ ,  $(\mathbf{F}_1 \cdot \nabla) \mathbf{F}_1 = \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{F}_1|^2 \right) - \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$  junto con la ecuación de Faraday, cf. ecuación (1.3), se obtiene:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \alpha \left[ \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (1.76)$$

El segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior es despreciable cuando la potencia del haz puede considerarse constante en el tiempo, entonces el único término que compone a esta fuerza es proporcional al gradiente de la intensidad del campo eléctrico, el cual resulta en una fuerza dirigida hacia las regiones de mayor intensidad, y está dada por:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{\alpha}{2} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (1.77)$$

### 1.3.2. Fuerza de dispersión

En la práctica además de la fuerza de gradiente es necesario tomar en cuenta la fuerza de dispersión, también conocida como fuerza de presión de radiación. La fuerza de dispersión para una partícula inmersa en un medio con índice de refracción  $n_2$  está dada por [15]:

$$\mathbf{F}_{disp} = \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{n_2}{c} \right) C_{pr} I(\mathbf{r}), \quad (1.78)$$

donde  $C_{pr}$  es la sección transversal para la presión de radiación de las partículas,  $\hat{\mathbf{z}}$  es el vector unitario en la dirección principal de propagación del haz e  $I(\mathbf{r})$  es la intensidad del haz. Para

partículas esféricas pequeñas  $C_{pr}$  es igual a la sección transversal de dispersión  $C_{dis}$ , que está dada por:

$$C_{pr} = C_{dis} = \frac{8}{3}\pi k^4 a^6 \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2, \quad (1.79)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda en el medio,  $\lambda$  es la longitud de onda en el medio,  $a$  es el radio de la partícula,  $m = n_1/n_2$  es el índice de refracción relativo y  $n_1$  es el índice de refracción de la partícula. Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación (1.78), se obtiene:

$$\mathbf{F}_{dis} = \hat{\mathbf{z}} \frac{8\pi k^4 a^6 n_2}{3c} \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (1.80)$$



## Capítulo 2

# Óptica singular: vórtices ópticos

Este capítulo está basado principalmente en el reporte de Mark R. Dennis, Kevin O'Holleran y Miles J. Padgett sobre Óptica Singular [16].

### 2.1. Introducción

La primera teoría exitosa en la descripción de los fenómenos ópticos es la Óptica de rayos, que posteriormente adquirió su carácter geométrico, conocida por los griegos antiguos (*e.g.* Euclides en el siglo III antes de nuestra era). En el siglo II, Tolomeo intentó encontrar la relación entre los ángulos de los rayos de luz incidente y refractado, que forman con la perpendicular a la interfaz aire-agua [17]. La propagación rectilínea de la luz permitió a Ibn-Sahl en el siglo X explicar el comportamiento de ésta al reflejarse y al atravesar materiales transparentes con diferente índice de refracción, dando lugar a las leyes de reflexión y de refracción (también conocida como ley de Snell). La última de estas leyes fue deducida y enunciada por Snell a comienzos del siglo XVII, en un trabajo no publicado, y por Descartes en el siglo XVII.

En Óptica es muy común encontrar fenómenos asociados con enfocamiento de luz, ya sea de forma artificial o natural. En los fenómenos anteriores, a un nivel macroscópico, la óptica de rayos permite obtener una descripción aceptable de la ubicación de las regiones brillantes, no es así con la intensidad de éstas. El problema con la intensidad es que la convergencia de muchos rayos conduce a una intensidad infinita, la cual se asocia con singularidades llamadas cáusticas.

Usando óptica ondulatoria, el análisis de las cáusticas a nivel microscópico, donde la longitud de onda de la luz es comparable con la región de observación, las singularidades infinitas de intensidad son suavizadas por la difracción, la cual introduce nuevas estructuras de intensidad [18, 19]. Aunque es posible observar un nuevo tipo de singularidades, que están asociadas a la indeterminación de la fase del campo óptico escalar (en general es una función compleja). Las singularidades de fase forman parte de los fenómenos ondulatorios, como lo describen John Nye y Michael Berry en su artículo de 1974, *Dislocations in wave trains* [20]. Actualmente, a las singularidades de fase también se les conoce como dislocaciones de onda.

El término dislocación se tomó en analogía con las estructuras de las imperfecciones en cristales. Las dislocaciones pueden ser de borde, de hélice (conocidas también como vórtices) o mezclas de éstas. Las dislocaciones pueden evolucionar en diferentes direcciones, independientemente del movimiento de los frentes de onda, por deslizamiento o escalamiento. Además, las dislocaciones pueden intersectarse, colisionarse, renacer o aniquilarse entre ellas, o ser creados como lazos o pares [20].

El interés en los vórtices ópticos reside en que pueden producirse en campos ópticos en la naturaleza y en el laboratorio, además de su relación con los haces que transportan momento angular orbital [21].

Las singularidades de fase son características de la óptica escalar, y ocurren naturalmente sólo en las componentes escalares complejas de campos vectoriales. En los campos donde el estado de polarización cambia con la posición, se pueden presentar singularidades de polarización, las cuales se presentan donde alguna cantidad que describe a la polarización, como el ángulo azimutal de polarización, no está definida.

El estudio de vórtices ópticos, solitones ópticos, polarización, refracción cónica, campos con polarización variable en el espacio y su manipulación, óptica de catástrofes, entre otros, se conoce como “Óptica Singular”.

## 2.2. La propiedad matemática fundamental de una dislocación

Los campos ópticos escalares pueden representarse en el plano de Argand de los números complejos. La cantidad que se representa es la amplitud compleja, cuyo módulo es la amplitud real y su argumento es la fase. Estos campos se escriben en función del vector de posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$  como:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}, t) + i\eta(\mathbf{r}, t) = \gamma(\mathbf{r}, t)e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.1)$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  son la parte real e imaginaria del campo,  $\gamma$  y  $\chi$  representan la amplitud y la fase real del campo, tales que:

$$\gamma^2(\mathbf{r}, t) = \xi^2(\mathbf{r}, t) + \eta^2(\mathbf{r}, t) \quad (\gamma(\mathbf{r}, t) \geq 0), \quad (2.2)$$

$$\tan(\chi(\mathbf{r}, t)) = \eta(\mathbf{r}, t)/\xi(\mathbf{r}, t). \quad (2.3)$$

De las expresiones anteriores, se observa que ambas componentes del campo son importantes en la definición de su amplitud y su fase. Cuando el dominio de la función  $\chi(\mathbf{r}, t)$  se encuentra en  $(-\pi, \pi)$ , a  $\chi$  se le conoce como la fase reducida y se denota por  $\chi_0$ .

Una dislocación se encuentra en donde la amplitud de la onda se anula, *i.e.*  $\gamma(\mathbf{r}, t) = 0$ , lo que implica que la fase  $\chi$  está indeterminada. La propiedad fundamental de una dislocación es que  $\chi$  cambia por un múltiplo de  $2\pi$  en un circuito cerrado alrededor de ella. La aseveración anterior se incluye en la siguiente expresión:

$$s = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\mathbf{r} \cdot \nabla\chi = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\chi, \quad (2.4)$$

donde  $C$  es un circuito cerrado, y  $s$  representa la intensidad total (*total strength*) de las líneas de dislocación encerradas por  $C$ , también se utiliza el término carga topológica de las líneas de dislocación. El valor de  $s$  puede ser entero, ya sea positivo o negativo, al igual que 0. La expresión anterior proviene del teorema para las dislocaciones en cristales, el cual establece que el vector de Burgers se conserva a lo largo de una dislocación. En ondas monocromáticas, el vector de Burgers de cada dislocación es  $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario a lo largo de la normal a una onda no dislocada de referencia, aunque las componentes del vector paralelas al frente de onda de referencia no son significativas. Por lo que sólo la magnitud y el sentido del vector son necesarios, los cuales están dados por  $s\lambda$ . La definición de una dislocación

mediante un circuito de Burgers es lo que permite concluir que la ubicación precisa de la línea de dislocación es donde  $\gamma(\mathbf{r}, t) = 0$ .

Las singularidades de fase de  $\psi$  se encuentran donde  $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ , *i.e.*  $\xi(\mathbf{r}, t) = 0$  y  $\eta(\mathbf{r}, t) = 0$ . En 3 dimensiones, cada una de las condiciones anteriores sobre las componentes del campo representan superficies, mientras que ambas condiciones pueden representar curvas. Cualitativamente, se tienen dos ecuaciones homogéneas con tres grados de libertad debido a las coordenadas, lo que se reduce a un grado de libertad representado por las líneas de ceros [22]. En 2 dimensiones, las superficies forman líneas, por lo que las singularidades de fase corresponden a puntos.

### 2.2.1. Experimento de Young

El experimento de Young de la doble rendija, que demostró la naturaleza ondulatoria de la luz al propagarse, y su extensión a tres rendijas servirá de ejemplo para ilustrar las propiedades de las singularidades de fase. El experimento de Young se analiza sólo en el campo cercano. Suponiendo que cada una de las fuentes es puntual, que se encuentran en fase y que están ubicadas simétricamente respecto al eje  $s_1$ , la función que describe la interferencia está dada por:

$$\psi_2 = U_0 \left( \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right), \quad (2.5)$$

donde  $U_0$  es la amplitud compleja,  $\mathbf{k}$  es el vector de onda,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición del punto de observación, y  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores de posición de cada una de las fuentes. En la Figura 2.1, se ilustran los patrones de intensidad (se redujo a la unidad el valor máximo en la escala de colores para observar las franjas oscuras) y de fase reducida producidos por la interferencia entre estas dos fuentes, en una región cercana a estas (los ejes coordenados están escalados con respecto a la longitud de onda del haz,  $s_j = x_j/x_0 = x_j/\lambda$  con  $j = 1, 2$ ). En los patrones de intensidad y de fase reducida, se observa cerca de las fuentes el comportamiento propio de una onda esférica, mientras que al alejarse de las fuentes, la interferencia de las ondas produce franjas oscuras e “iluminadas”. En la Figura 2.2 se ilustran los ceros de la parte real e imaginaria, y el logaritmo natural del módulo del campo escalar complejo.

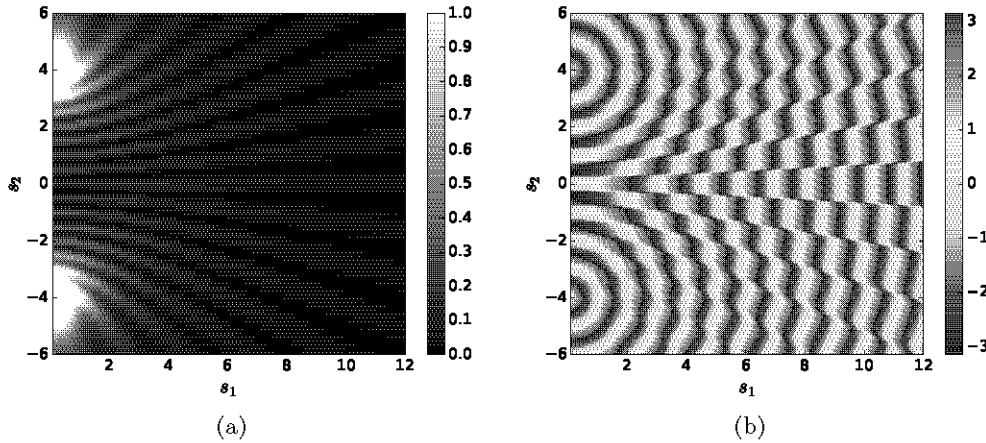


Figura 2.1: Patrón de intensidad (a) y de fase reducida (b) de la interferencia producida por  $\psi_2$  con  $U_0/\lambda = 1$ ,  $x_0 = \lambda$  y  $n = 1$ .



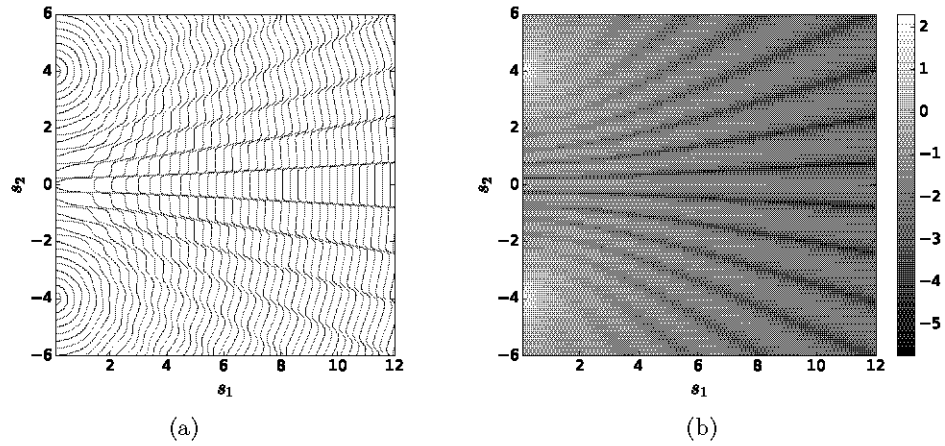


Figura 2.2: (a) Curvas de ceros de la parte real e imaginaria del campo escalar complejo  $\psi_2$  ( $\blacksquare \rightarrow \Re(\psi_2)$ ,  $\blacksquare \rightarrow \Im(\psi_2)$ ), y (b) logaritmo natural del módulo de  $\psi_2$ , con  $U_0/\lambda = 1$ ,  $x_0 = \lambda$  y  $n = 1$ .

Una variante del experimento de Young, al introducir una nueva fuente situada en el origen ( $\varphi = U_0 e^{ikr}/r$ ) entre las dos fuentes del caso anterior tales que  $\psi_3 = \psi_2 + \varphi$ , muestra patrones de intensidad y de fase reducida totalmente diferentes a las anteriores. En la Figura 2.3 se ilustran los patrones obtenidos. En el patrón de intensidad, se observan zonas oscuras e “iluminadas” distribuidas simétricamente con respecto al eje  $s_1$ , que ya no corresponden a las franjas encontradas en el caso anterior. En el patrón de fase reducida, se distinguen singularidades de fase con carga topológica  $+1$  y  $-1$ , las cuales están asociadas a puntos de intensidad nula (como se observa en los ceros de  $\psi_3$  en la Figura 2.4), *i.e.* interferencia totalmente destructiva.

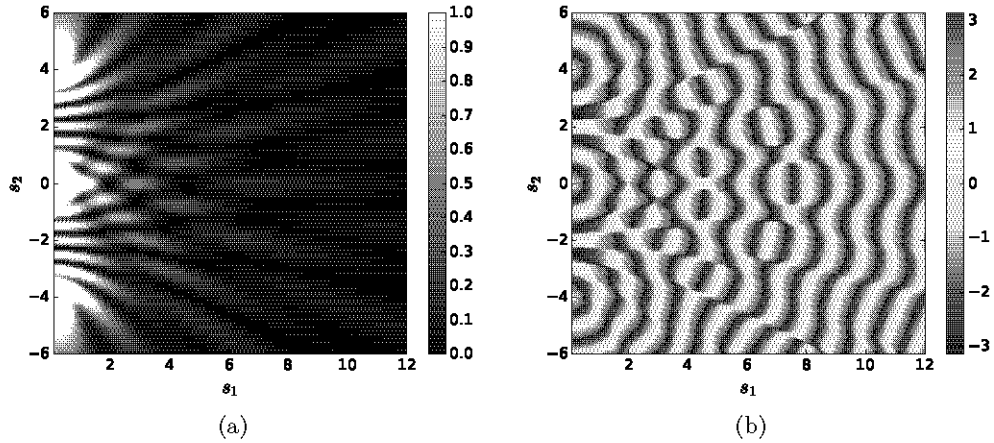


Figura 2.3: Patrón de intensidad (a) y de fase reducida (b) de  $\psi_3$ . Las constantes son iguales a las del caso anterior.

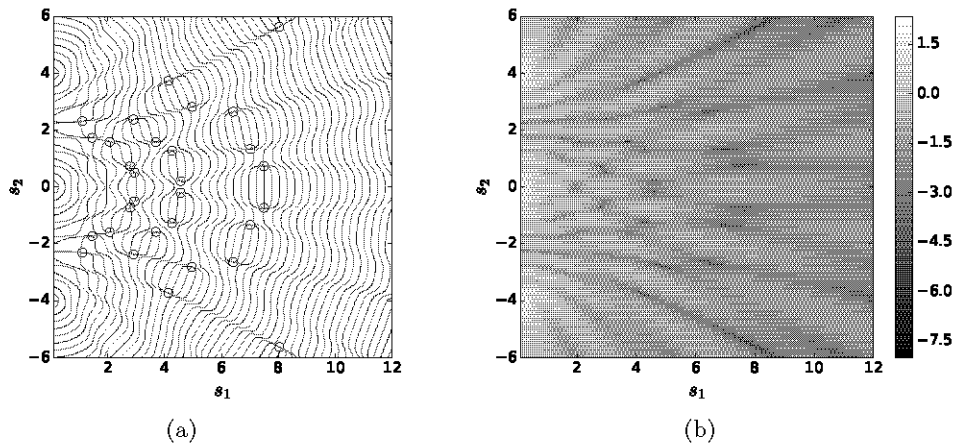


Figura 2.4: (a) Curvas de ceros de la parte real e imaginaria de  $\psi_3$  ( $\blacksquare \rightarrow \Re(\psi_3)$ ,  $\blacksquare \rightarrow \Im(\psi_3)$ ) y sus intersecciones encerradas por círculos negros, y (b) logaritmo natural del módulo de  $\psi_3$ . Las constantes usadas son iguales a las del caso con sólo dos fuentes.

## 2.3. Revisión histórica de los vórtices en óptica

Las singularidades de fase, ya sean puntos o líneas dónde una variable cíclica está indefinida, ocurren en diversos sistemas físicos. En 1836 Whewell propuso la existencia de puntos anfdrómicos en el mar del norte de Europa, estos están localizados en zonas donde las líneas cotidales (líneas que representan la misma altura de la marea) convergen [18, 23], ver Figura 2.5. Los puntos anfdrómicos son las primeras estructuras con singularidad de fase reportadas.

Las ideas principales sobre los vórtices ópticos se apreciaron en trabajos publicados entre 1940 y 1950. Los vórtices fueron observados en circunstancias diferentes por Pearcey (1946), Wolter (1950), Findlay (1951), Sommerfeld (1954, aunque pudo haber sido antes) y Stratton (1941) [25].

El primer reporte de un vórtice óptico se debe a Wolter en 1950, al analizar el problema de la estructura de la interferencia espacial en el problema del desplazamiento de Goos-Hänchen. El fenómeno anterior, se presenta cuando luz linealmente polarizada asociada a un haz, presenta un desplazamiento lateral debido al fenómeno de reflexión total interna. El problema lo analizó al representar el haz incidente como la superposición de dos ondas planas con direcciones de propagación muy cercanas al ángulo crítico. El haz al interactuar con la interfaz vidrio-aire produce dos ondas reflejadas, las cuales al interferir con las dos ondas incidentes produce singularidades de fase ubicadas sobre la normal a la interfaz. El análisis anterior lo hizo usando los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión. Wolter observó que en los vórtices, las líneas de fase convergen en un cero de intensidad en el vidrio, además notó la presencia de un punto silla de la fase y del flujo de energía en la región de aire (debido a las ondas refractadas). Como él estableció, este par de características es necesario para tener la topología global correcta de las líneas de flujo de energía.

Aunque Wolter señala que el fenómeno de circulación de energía puede ser muy general en los campos ópticos, su trabajo no es tan conocido a pesar de haber sido retomado por Rosu [26]. Boivin, Dow y Wolf (1967) observaron un patrón de flujo de energía, muy similar al encontrado por Wolter, en un campo escalar de difracción cercano a un foco en el espacio libre.

En 1951 Braunbeck señala que las líneas de gradiente de fase y las líneas de flujo de energía

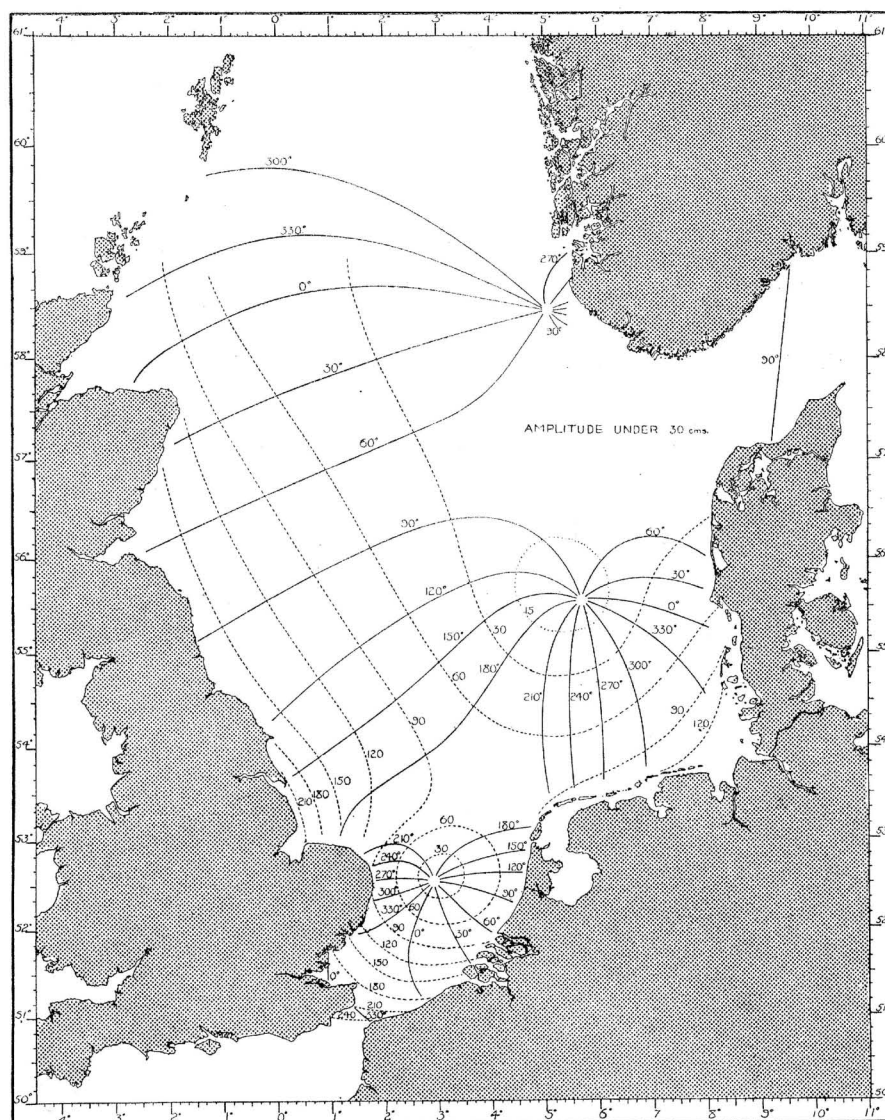


Figura 2.5: Líneas cotidales del mar del norte representadas por líneas continuas, las cuales convergen en los puntos anfdrómicos. Imagen tomada de [24].

siempre tienen la misma dirección, y que sólo se necesitan tres ondas planas para producir singularidades de fase, nodos o vórtices de energía.

En 1954 A. Sommerfeld dibuja en su libro "Optics" el patrón de interferencia producido por seis ondas planas con direcciones y números de onda similares. En su figura se observa la aparición de tres singularidades de fase, aunque Sommerfeld no les da importancia argumentando que la intensidad en esos puntos es tan baja que sus efectos no serían detectables en comparación con zonas de intensidad variable [27].

La solución encontrada por A. Sommerfeld de una onda plana difractada por una placa semi-

infinita presenta estructuras irregulares de vórtices en la zona de incidencia y reflexión. El patrón de vórtices está producido por la onda incidente, la onda reflejante y la onda producida en el borde de la placa, sin la onda de borde, el patrón de interferencia en la zona iluminada sería una simple onda estacionaria. En 1952, Braunbek y Laukien calcularon y graficaron esta solución, cuyas gráficas fueron retomadas en el libro de Born y Wolf [28].

### 2.3.1. Cáusticas

Esta subsección está basada principalmente en [19] y [29]. Las cáusticas, en la óptica geométrica, son singularidades infinitas de intensidad, cuyo estudio más detallado en términos de ondas está acompañado de singularidades de fase. Especificando un punto  $Q$  sobre el frente de onda inicial de una onda monocromática paraxial como  $(x, y, f(x, y))$ , la distancia desde  $Q$  a un punto de observación  $P = (X, Y, Z)$  por encima del frente de onda (ver Figura 2.6), en la aproximación paraxial, está dada por:

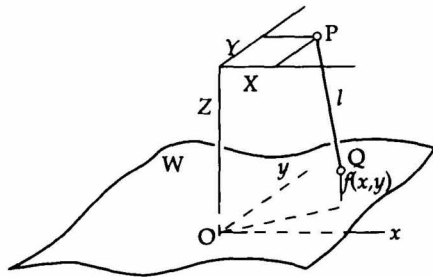


Figura 2.6: Frente de onda inicial especificada por  $f(x, y)$ , y punto de observación  $P$ . Imagen tomada de [19].

$$l(Q, P) \approx Z - f(x, y) + \frac{(X - x)^2 + (Y - y)^2}{2Z}; \quad \frac{X}{Z} \ll 1, \quad \frac{Y}{Z} \ll 1. \quad (2.6)$$

Para calcular los rayos a través de  $P$ , la condición es  $\partial l / \partial x = \partial l / \partial y = 0$  con  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  constantes. De la función  $l$  es posible construir una función potencial tipo Fermat,  $\phi = -l$ , en la que se pueden omitir los términos que no dependen explícitamente de  $x$  y  $y$ , ya que son constantes bajo la diferenciación, tal que:

$$\phi(x, y; X, Y, Z) = f(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2Z} + \frac{xX + yY}{Z}. \quad (2.7)$$

La forma del frente de onda inicial, también puede obtenerse con ayuda de un paraboloides de revolución, tal que:

$$g(x, y) \equiv f(x, y) - \frac{X^2 + Y^2}{2Z_0}, \quad (2.8)$$

donde  $Z_0$  es la altura de un origen conveniente sobre la cáustica. Por lo que la función potencial resulta:

$$\phi(x, y; \xi, \eta, \zeta) = g(x, y) + \zeta (x^2 + y^2) + \xi x + \eta y, \quad (2.9)$$

donde  $x$  y  $y$  son las variables del espacio del frente de onda, conocido como espacio de estado, y  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  son las variables del espacio de observación, conocido como espacio de control, que están dadas por:

$$\xi = \frac{X}{Z}, \quad (2.10)$$

$$\eta = \frac{Y}{Z}, \quad (2.11)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z} \right). \quad (2.12)$$

El germen de la función potencial se obtiene al hacer cero las variables de control en ésta, *i.e.*  $G(x, y) = \phi(x, y; 0, 0, 0)$ . Los rayos se obtienen al condicionar que la función potencial deba ser estacionaria (principio de Fermat):

$$\phi_x = \phi_y = 0, \quad (2.13)$$

el punto estacionario de  $\phi$  puede ser, en general, un máximo, un mínimo o un punto silla. Las condiciones de rayos proveen un mapeo de gradiente entre el espacio de estado y el espacio de control. Para cada punto en el espacio de estado, se encuentra un punto en el espacio de control, mientras que en la relación inversa, a un punto del espacio de control le pueden corresponder varios puntos del espacio de estado o ninguno.

Una cáustica se obtiene al variar  $(\xi, \eta)$  hasta encontrar una envolvente de la familia de rayos encontrados anteriormente. Por lo que  $\phi$  tendrá que ser estacionaria a orden mayor a uno. Al diferenciar las condiciones de rayos (2.13), en una cáustica se busca que los desplazamientos diferenciales  $dx$  y  $dy$  para los que  $d\xi = d\eta = d\zeta = 0$ , obteniéndose un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $dx$  y  $dy$ ), cuya solución existe si el determinante de los coeficientes es cero, *i.e.*,

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 0. \quad (2.14)$$

El teorema de Thom, de la teoría de catástrofes, clasifica e indica el número de cáusticas estables estructuralmente (diferentes entre ellas) dada la dimensión del espacio de control, llamada la codimensión  $C$ , y provee las formas estándar de las funciones potenciales. Si  $C \leq 4$  entonces existen 7 catástrofes, conocidas como elementales por la dimensionalidad del espacio-tiempo. Los casos con  $C > 4$  fueron estudiados por el matemático ruso V. I. Arnold (1975) [30, 31]. En la Tabla 2.1 se muestran las formas de los gérmenes de las siete catástrofes elementales.

Tabla 2.1: Catástrofes elementales.

Nombre	Codimensión	Germen
Doble	1	$x^3 + y^2$
Cúspide	2	$\pm x^4 + y^2$
Cola de golondrina	3	$x^5 + y^2$
Mariposa	4	$\pm x^6 + y^2$
Umbílico hiperbólico	3	$x^3 + xy^2$
Umbílico elíptico	3	$x^3 - xy^2$
Umbílico parabólico	4	$x^4 + xy^2$

Para un frente de onda unidimensional, la distancia de un punto de observación  $P = (X, Z)$  a un punto del frente de onda, *cf.* ecuación (2.6), está dada por:

$$l(x; \xi, \zeta) = R - g(x) - \zeta x^2 - \xi x = R - \phi(x; \xi, \zeta), \quad (2.15)$$

donde  $R = Z + X^2/2Z$ .

La aproximación semiclásica para el estudio de la difracción en términos de rayos, al proveerlos de amplitud y fase, permite la interferencia entre ellos. Aunque su predicción de la amplitud de la onda en la cáustica es infinita, además de presentarse una discontinuidad de la zona brillante a la oscura, donde predice una amplitud cero.

Considerando un frente de onda inicial con amplitud uniforme y unitario, es posible expresar la perturbación ondulatoria,  $\psi$ , en un punto  $P = (X, Z)$  como la contribución de ondas cilíndricas provenientes de elementos diferenciales  $dx$ :

$$\psi(\xi, \zeta) = K \int_{-\infty}^{+\infty} l^{-1/2} e^{ikl(x; \xi, \zeta)} dx, \quad (2.16)$$

donde  $K$  es una constante. Al sustituir en la ecuación anterior la aproximación  $l \approx R$  en la amplitud del integrando, y el valor de  $K$  al calcular  $\psi(0, 0)$  para un frente de onda inicial plano, se obtiene:

$$\psi(\xi, \zeta) = R^{-1/2} \left( \frac{k}{2\pi i} \right)^{1/2} e^{ikR} J(\xi, \zeta), \quad (2.17)$$

donde  $J(\xi, \zeta)$  es la integral de difracción y está dada por:

$$J(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\phi(x; \xi, \zeta)} dx. \quad (2.18)$$

El resultado anterior indica que a cada cáustica producida por una función potencial  $\phi(x; \xi, \zeta)$  le corresponde un patrón de difracción característico. En la lista de Thom, la primera catástrofe es el doblez (*fold*) y su patrón de difracción corresponde a la función Airy, mientras que la segunda catástrofe es la cúspide (*cuspl*) y su patrón de difracción es la función Pearcey, la cual presenta singularidades de fase.

En 3 dimensiones las catástrofes de difracción presentan singularidades de fase con forma de líneas infinitas, líneas rizadas y lazos cerrados: el umbílico elíptico fue estudiado matemática, numérica y experimentalmente por M. V. Berry, J. F. Nye y F. J. Wright en 1978 [32]; el umbílico hiperbólico y la cola de golondrina fueron estudiados por J. F. Nye en 2006 y 2007, respectivamente [33, 34].

## 2.4. Tipos de vórtices ópticos: borde, hélice y borde-hélice

Mucha de la terminología usada para describir a los fenómenos que se presentan en la óptica singular, como genericidad, estabilidad estructural y despliegue, provienen de la teoría matemática de catástrofes y la teoría de singularidades [35]. Los vórtices ópticos son estructuralmente estables ya que su topología no cambia bajo perturbaciones pequeñas (aunque su posición puede cambiar) [22, 36]. Los vórtices con carga topológica mayor a la unidad son inestables y bajo perturbación se despliegan a vórtices más estables, con carga topológica uno.

El estudio de los vórtices ópticos comenzó con la publicación en 1974 del artículo de J. F. Nye y M. V. Berry *Dislocations in wave trains* [19]. El trabajo anterior estableció a las singularidades de fase como estructuras generales y ubicuas de la interferencia en la física ondulatoria. El término dislocación de onda se tomó por las similitudes entre las estructuras en las singularidades de fase y las dislocaciones en redes cristalinas. La siguiente función de onda contiene una dislocación de borde-hélice [19], que está ubicada en el plano  $yz$  a un ángulo  $\delta$  con respecto al eje  $y$ , que pasa a través del origen en  $t = 0$  y se mueve paralela al eje  $z$  con velocidad  $c$ :

$$\psi = A_0 \{ kx + i[\beta_e^*(kz - \omega t) - \beta_s ky] \} \exp [i(kz - \omega t)], \quad (2.19)$$

donde  $A_0$ ,  $\beta_e^*$  y  $\beta_s$  son constantes ( $\beta_e^* \equiv \beta \cos(\delta)$  y  $\beta_s \equiv \beta \sin(\delta)$ ),  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda,  $\lambda$  es la longitud de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $x$  y  $z$  son las coordenadas espaciales y  $t$  es el tiempo. De (2.19) se obtiene la fase como:

$$\chi = \arctan \left[ \frac{\beta_e^*(kz - \omega t) - \beta_s ky}{kx} \right] + kz - \omega t. \quad (2.20)$$

Si  $\delta = \pi/2$  entonces  $\beta_e^* = 0$  corresponde a una dislocación de hélice, mientras que  $\delta = 0$  está asociada con una dislocación de borde. En la Figura 2.7 se ilustran los patrones de fase reducida asociados a estas dislocaciones en  $t = 0$  con las coordenadas espaciales escaladas por  $\lambda$ ,  $s_j = x_j/\lambda$  con  $j = 1, 2$ . De (2.20), se observa que el patrón transversal de fase de la dislocación de hélice describe frentes de onda helicoidales con periodicidad  $\lambda$  debido al término  $kz$ , mientras que en la dislocación de borde el patrón de fase es el mismo para cualquier valor de  $s_2$ . Si  $0 < \delta < \pi/2$  entonces se tiene una dislocación de borde-hélice, y los frentes de onda alrededor de éste son, en general, helicoidales.

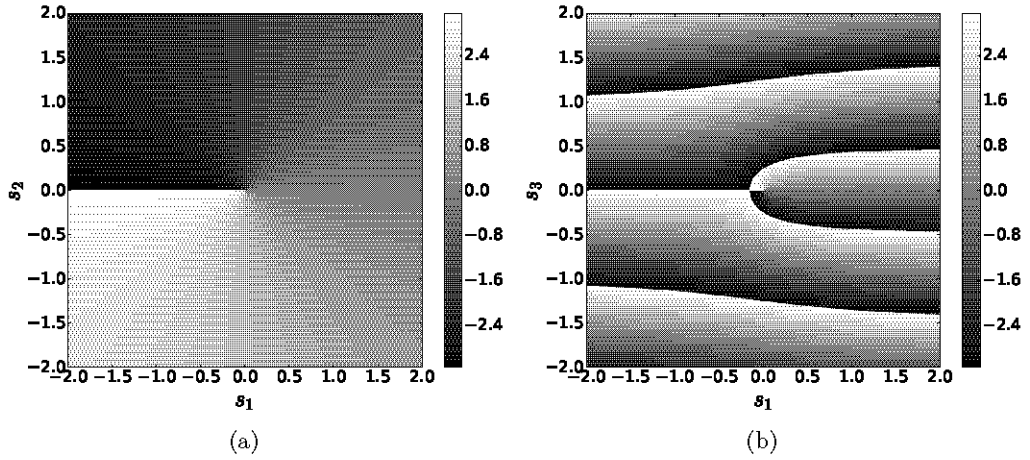


Figura 2.7: Patrón de fase reducida en  $t = 0$  de una dislocación de (a) hélice en  $s_3 = 0$  con  $\beta_s = 1$ , y de (b) borde en  $s_2 = 0$  con  $\beta_e^* = 1$ . En ambos casos se utilizó  $A_0 = 1$  y  $\beta = 1$ .

La configuración de vórtices ópticos en campos monocromáticos es estática, aunque en ondas pulsadas o cuasi monocromáticas pueden moverse. En general, los campos pueden ser más complicados que (2.19), por lo que la distinción entre dislocaciones de borde y de hélice es menos evidente. La aparición de vórtices ópticos en los ejes de los modos transversales de un láser y su relación con el momento angular orbital es lo que ha dado lugar al interés en los vórtices ópticos.

## 2.5. Creación de un vórtice óptico

El primer estudio teórico y experimental de haces que contienen vórtices se hizo en los 70's por Nye, Berry y Walford, al estudiar ondas ultrasónicas dispersadas por una superficie rugosa. La producción controlada de campos ópticos con vórtices ópticos se hizo posiblemente en 1979 por Vaughan y Willets, quienes estudiaron las propiedades de los haces de luz con una estructura helicoidal en la fase y su interferencia a lo largo del eje del haz.

En 1989, Coulet, Gil y Rocca usaron el término “vórtice óptico” para describir un posible modo de láser que podía ocurrir en cavidades con número de Fresnel grande. El modo láser natural que contiene un vórtice óptico es uno de la familia Laguerre-Gauss ( $LG_{l,p}$ , donde  $|l|$  y  $p$  son los índices del polinomio asociado de Laguerre  $L_p^{|l|}$ ). El conjunto de los modos LG es una opción de base ortogonal completa para representar haces de luz arbitrarios. El modo Laguerre-Gauss más simple ( $LG_{1,0}$ ) es un anillo circular en intensidad con una singularidad a lo largo del eje de propagación.

En los 90's comenzó la investigación del uso de elementos ópticos difractivos para la producción de haces con vórtices usando haces espacialmente coherentes con frentes de onda casi planos. En 1990, Soskin y sus colaboradores señalaron que si un haz de luz se hacía pasar por una rejilla de difracción, que incluye una dislocación de borde en su centro, entonces el primer orden del haz difractado contenía una singularidad óptica [37]. El diseño holográfico de “tenedor” es usado en la generación de vórtices, y puede ser implementado como una rejilla de amplitud o de fase. Para la rejilla de tenedor, cada orden se difracta a ángulos diferentes, por lo que sólo se necesita un filtro espacial para seleccionar el primer orden.

El primer estudio teórico del momento angular en vórtices ópticos fue realizado por J. C. Maxwell, y posteriormente fue retomado por L. De Broglie. El estudio experimental del momento angular en haces de luz fue realizado por L. Allen *et al.* [21] y M. Beijersbergen *et al.* [38] en los 90's. Su estudio estuvo basado en haces producidos por lentes cilíndricas para convertir los modos transversales HG (Hermite-Gauss) en LG. Cada modo HG con índices  $m$  y  $n$  es transformado en un modo LG con índice azimutal  $l = (m - n)$  e índice radial  $p = \min(m, n)$ . Aunque las lentes cilíndricas ofrecen una transformación sin pérdidas entre los modos HG y LG, se requiere la generación de un haz HG de orden alto como entrada, y puede presentarse astigmatismo residual en el modo LG por imperfecciones o mala alineación de las lentes. Lo anterior resulta en una sección transversal no circular y en la separación de los vórtices con carga topológica mayor en otros con carga topológica menor durante la propagación [39].

En 1993, Woerdman, Beijersbergen, *et al.* construyeron componentes ópticos, para generar haces con vórtices ópticos, conocidos como placas espirales de fase, que se implementaron como alternativa al método anterior que produce astigmatismo. Las placas espirales de fase están basadas en el retraso producido en un frente de onda al atravesar un material con índice de refracción  $n$  y un grosor determinado. Bajo transmisión una onda plana puede adquirir un vórtice óptico con carga topológica  $s$  a lo largo de su eje de propagación usando una placa espiral de fase con grosor  $\Delta t = \phi(n - 1)s\lambda/2\pi$ , donde  $\phi$  es el ángulo azimutal, y  $\lambda$  es la longitud de onda del haz. La elaboración de placas de fase con índice de refracción constante en el espectro óptico requiere una elaboración precisa en  $\phi = 0$ , donde la altura del paso es  $(n - 1)s\lambda$ .

Uno de los métodos para generar vórtices ópticos con mayor facilidad y flexibilidad está basado en los hologramas generados por computadora. Los componentes ópticos difractivos han sido ampliamente mejorados por la disponibilidad comercial de los moduladores espaciales de luz (SLM por sus siglas en inglés). Los SLM de reflexión están formados por un arreglo rectangular de dispositivos pixelados (*e.g.*  $1024 \times 760$ ), que se alinean con voltajes, lo cual le imprime a la luz reflejada una variación espacial de fase mediante un holograma formado en una computadora. Los SLM son ampliamente usados para la generación de haces arbitrarios, que se usan en pinzas



ópticas [40], en óptica atómica [41] o en enredamiento cuántico [42].

La coherencia espacial y temporal de los haces de luz no es necesaria en la producción de haces de luz que contienen vórtices ópticos. Hasta aquí, los vórtices ópticos que han sido analizados se han pensado con luz monocromática. Si salimos de este esquema cada una de las componentes espectrales genera su propia red de singularidades de fase, en general éstas no se traslapan, por lo que el resultado es una distorsión espectral variable en el tiempo en vez de puntos aislados de oscuridad [43, 44].

La generación experimental de vórtices ópticos con luz blanca no es tan sencilla. No es posible usar una placa espiral de fase estándar, ya que sólo funciona para una longitud de onda. Un holograma de tenedor introduce una fase helicoidal en cada componente espectral de la luz blanca, pero también introduce dispersión angular, lo que resulta en una separación entre los vórtices de cada longitud de onda.

## 2.6. La estructura de singularidades de fase ópticas

El estudio de las singularidades en los campos ópticos, como las de fase, es porque ellas organizan la estructura espacial global del campo óptico, *i.e.* las singularidades forman un “esqueleto” para las estructuras de intensidad y fase [19, 45]. La información sobre el resto del campo debe estar en su configuración espacial, y en la estructura local de fase e intensidad cerca de los puntos o líneas de vórtice.

En los campos bidimensionales complejos, la representación de  $\xi$  y  $\eta$  en el plano complejo conlleva a que en los puntos de vórtice las cuatro regiones del plano se encuentren. Lo anterior conduce al principio de signo, que fue establecido y estudiado en el contexto de los campos aleatorios por Freund y sus colaboradores, el cual establece que los puntos de vórtice adjuntos sobre un contorno nulo de  $\xi$  y  $\eta$  (o en forma más general, cualquier contorno de fase constante) deben tener signos opuestos. Una excepción a este principio ocurre cuando hay un punto silla sobre la línea de contorno de fase entre dos vórtices: en este caso los vórtices tienen la misma carga topológica.

Los vórtices pueden ser isotrópicos o anisotrópicos. Los vórtices anisotrópicos pueden formarse fácilmente al superponer dos haces con vórtices con carga topológica  $\pm 1$ , *e.g.* una combinación lineal de los modos Laguerre-Gauss  $a\psi_{LG+1,0} + b\psi_{LG-1,0}$ . Cerca del origen, la superposición tiene la siguiente forma

$$a(x + iy) + b(x - iy) = (a + b)x + (a - b)iy, \quad (2.21)$$

el cual es anisotrópico si ambos coeficientes  $a, b \neq 0$ , y el signo del vórtice depende en cual de los valores  $|a|$  y  $|b|$  es más grande. En términos de conservación de momento angular, esta superposición es la generación de movimiento elíptico por dos movimientos circulares de signo opuesto. La forma más general de describir la anisotropía elíptica local de un vórtice es con los parámetros de Stokes, que se usan para describir la polarización elíptica.

Los vórtices con carga topológica alta, *i.e.* aquellos en los que la fase cambia por múltiplos enteros (mayores a 1) de  $2\pi$ , también ocurren aunque son inestables. La forma permitida de tal vórtice está determinada por la ecuación de onda que el campo satisface. En particular, cualquier solución local a la ecuación de Helmholtz o ecuación de onda paraxial en el plano  $xy$  satisface localmente la ecuación de Laplace  $\nabla^2\psi = 0$ , ya que cerca del cero, cualquier término proporcional a  $\psi$  desaparece a un orden mayor. La solución más general, proporcional a  $\rho^{|s|}$ , es (con el vórtice en el origen)

$$\psi \approx a(x + iy)^{|s|} + b(x - iy)^{|s|} \quad \text{para un vórtice con carga topológica } s, \quad (2.22)$$

donde  $a$  y  $b$  son números complejos, con  $|a| > (<)|b|$  si  $s > (<)0$  [45]. Con esto, los vórtices anisotrópicos de mayor carga topológica pueden ser descritos por la misma parametrización que los vórtices con carga topológica 1. También para satisfacer la ecuación (2.22) en el vórtice,  $\psi$  debe satisfacer  $|s|(|s| + 1)$  ecuaciones. En términos de la expansión en serie de Taylor alrededor del vórtice, no pueden haber términos de orden menor que  $|s|$ , y todos los términos de orden  $|s|$  deben aparecer. Por lo que los vórtices con carga topológica alta son inestables bajo perturbación. Ninguna solución para  $|s| > 1$  es posible: los vórtices de orden alto perpendiculares a la dirección paraxial de propagación están prohibidos [45].

Los vórtices con carga unitaria son estructuralmente estables y, generalmente, bajo perturbación sólo cambian de posición y su estructura elíptica local. Un vórtice con carga topológica  $s$  mayor a la unidad, es inestable y típicamente se separa en  $|s|$  vórtices con carga topológica igual al signo de  $s$ .

Dos vórtices puntuales de signo contrario también pueden aproximarse y aniquilarse, o nuclearse como un par. Un ejemplo simple pero general es

$$\psi \approx ax^2 - c + iby, \quad (2.23)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. Cuando  $c$  es positivo, esto representa un par de vórtices con carga topológica  $\pm 1$  en  $x = \pm\sqrt{c/a}$ ,  $y = 0$ . La anisotropía de estos vórtices es proporcional a  $c$ . Cuando  $c$  se aproxima a cero los vórtices se aproximan, aniquilándose cuando  $c = 0$ . Cuando  $c < 0$ , la ecuación (2.23) no tiene ceros, por lo que el par de vórtices se aniquiló.

En 3 dimensiones los vórtices ópticos son líneas, ya que los contornos de ceros de los campos escalares complejos son unidimensionales, las cuales ocurren a lo largo de las intersecciones entre las superficies de ceros de las partes real e imaginaria, que pueden tener una topología muy complicada. La dirección de la línea de vórtice, que se encuentra en las dos superficies, es normal a las perpendiculares de ambos planos. Por lo tanto, la configuración de vórtice está determinada por la geometría de la intersección entre las superficies nodales  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ .

La geometría y topología de la intersección puede ser muy complicada, abarcando vórtices de lazo, enlace, punto, etc.. En el contexto de ondas lineales, la ecuación de onda puede imponer restricciones en la topología de las superficies nodales. Cuando se varía un parámetro en una superposición tridimensional de ondas, en general, las líneas de vórtice se mueven [20] y pueden interactuar topológicamente. Aunque es posible obtener construcciones de ondas, cuyas líneas de vórtice pasan una sobre otra sin provocarle cambios.

A lo largo de una línea de vórtice, típicamente las superficies de fase son giros helicoidales (como en una dislocación de hélice). En general, este giro no es uniforme y está relacionado con la elipse de anisotropía a lo largo de la línea.

No parece haber restricciones fuertes en las topologías de las líneas de vórtice en tres dimensiones. Las topologías de vórtice complicadas no pueden ser estables, bajo perturbaciones grandes, los nudos y los enlaces podrían disolverse por reconexión [46]. En general, encontrar una superposición de ondas que implemente ópticamente cierta topología de vórtice puede ser difícil, a pesar de no estar prohibida.

## 2.7. Detección de vórtices ópticos

Esta sección está basada principalmente en [47]. Debido a la naturaleza de un vórtice óptico, el cual produce regiones oscuras, resulta difícil detectarlo en un patrón transversal estacionario de intensidad, y más aún conocer su carga topológica. Aunque se ha reportado un método indirecto para la detección de vórtices ópticos, la técnica de imágenes astigmáticas, las limitaciones de este

método a patrones con simetría cilíndrica y la imposibilidad de ubicar a los vórtices no permiten extender su uso a patrones más generales.

La técnica interferométrica para la detección de vórtices ópticos, permite la identificación directa de los vórtices. La técnica consiste en la observación del patrón de interferencia producido por un haz con vórtice óptico y una onda plana, cuya dirección de propagación es muy cercana a la línea de vórtice óptico. Considerando un patrón con una singularidad de fase con carga topológica unitaria, compuesta por los modos  $TEM_{01}$  y  $TEM_{10}$  propagándose en la dirección  $z$  con una diferencia de fase mutua de  $\pi/2$ . El campo eléctrico escalar de este patrón sobre el plano perpendicular al eje  $z$  está dado por:

$$\psi_{\pm} = \psi_0 \frac{\rho}{W} \exp(\pm i\alpha) \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2}\right) \exp\left(-i\frac{k\rho^2}{2R}\right) + c.c., \quad (2.24)$$

donde  $k$  representa el número de onda,  $\rho$  la coordenada radial,  $W$  el tamaño del haz en la pantalla,  $R$  el radio de curvatura del frente de onda y  $\alpha$  la coordenada azimutal. El signo  $\pm$  indica la quiralidad de los frentes de onda helicoidales.  $W$  y  $R$  están dados como en el haz Gaussiano (subsección 1.1.4). Suponiendo que el radio de curvatura es muy grande ( $R \gg \rho$ ), se obtiene la siguiente aproximación a  $\psi_{\pm}$ :

$$\psi_{\pm} = \psi_0 \frac{\rho}{W} [\cos(\alpha) \pm i \text{sen}(\alpha)] \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2}\right). \quad (2.25)$$

En la Figura 2.8 se ilustran los patrones de intensidad y de fase reducida de  $\psi_+$ , en las figuras se usaron coordenadas adimensionales  $s_1 = x/\lambda$  y  $s_2 = y/\lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda del haz. El patrón de intensidad es el mismo para  $\psi_-$ , mientras que el de fase es similar, sólo que las fases se recorren en sentido opuesto.

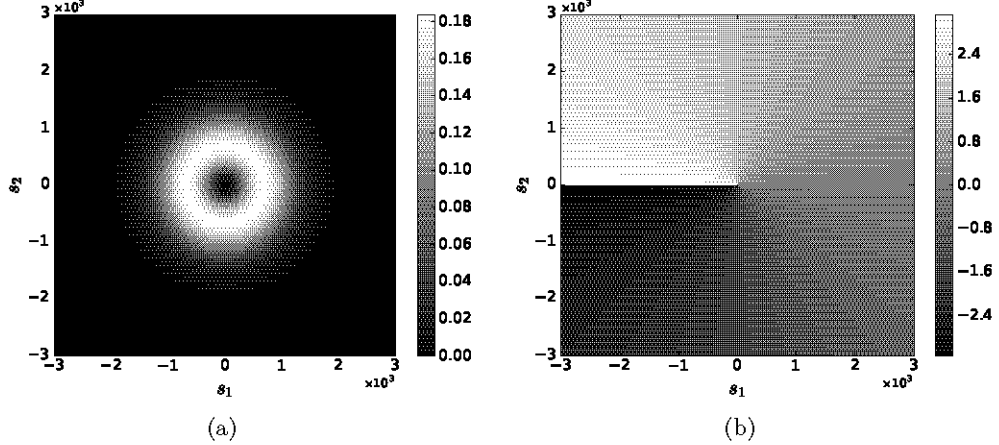


Figura 2.8: Patrón de (a) intensidad y de (b) fase reducida de  $\psi_+$  con  $\psi_0 = 1$ ,  $W_0 = 100 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  y  $z = 30 \text{ cm}$ .

Haciendo interferir  $\psi_{\pm}$  con una onda plana uniforme viajando en una dirección  $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$  muy cercana a la dirección de propagación de  $\psi_{\pm}$ , *i.e.*  $k_z \gg k_x$  y  $k_z \gg k_y$ , dada por

$$u = u_0 \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)], \quad (2.26)$$

se obtiene (en coordenadas cartesianas)

$$\Psi_{\pm} = \psi_{\pm} + u \quad (2.27)$$

$$= \psi_0 \frac{x}{W} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W^2}\right) + u_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z) \quad (2.28)$$

$$+ i \left[ \pm \psi_0 \frac{y}{W} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{W^2}\right) - u_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z) \right]. \quad (2.29)$$

Definiendo las componentes del vector de onda usando coordenadas esféricas con el ángulo polar  $\theta$  y el ángulo azimutal  $\phi$ , y escalando las coordenadas espaciales como en el caso anterior, se obtiene para  $\Psi_{\pm}$  con  $\phi = 0$ :

$$\Psi_{\pm} = \psi_0 \frac{\lambda}{W} s_1 \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{W}\right)^2 (s_1^2 + s_2^2)\right] + u_0 \cos\left\{2\pi [s_1 \sin(\theta) + s_3 \cos(\theta)]\right\} \quad (2.30)$$

$$+ i \left\{ \pm \psi_0 \frac{\lambda}{W} s_2 \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{W}\right)^2 (s_1^2 + s_2^2)\right] - u_0 \sin\left\{2\pi [s_1 \sin(\theta) + s_3 \cos(\theta)]\right\} \right\}. \quad (2.31)$$

En la Figura 2.9 se ilustra el patrón de intensidad de  $\Psi_{-}$  y  $\Psi_{+}$ . Se observan franjas brillantes y oscuras en todo el plano, aunque en el centro, donde está ubicada la singularidad de fase, se encuentra que una franja brillante se separó en dos, y que los patrones están invertidos. La observación de los defectos anteriores permite detectar y ubicar experimentalmente a las singularidades, y distinguir los signos de éstas. Los vórtices de mayor carga topológica producen un mayor número de franjas separadas.

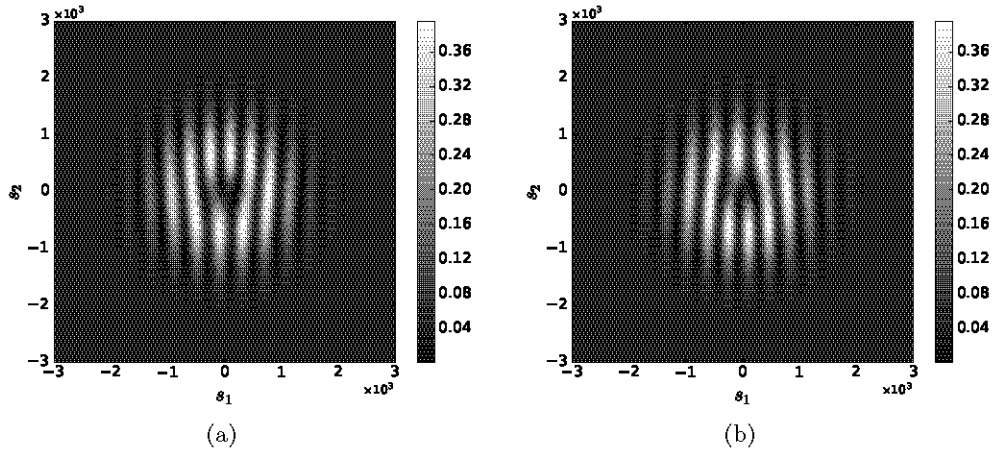


Figura 2.9: Patrón de intensidad de (a)  $\Psi_{-}$  y (b)  $\Psi_{+}$  con  $\psi_0 = 1$ ,  $u_0 = 0.2$ ,  $\theta = 0.15^\circ$ ,  $W_0 = 100 \mu\text{m}$  y  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ . Los planos de observación están en  $s_3 = 3 \times 10^5$ .

Es importante mencionar que el plano transversal de observación tiene que ser lo más perpendicular posible a la línea de vórtice, para garantizar el patrón de tenedor obtenido en la interferencia con la onda plana. De otra forma no será posible distinguir y ubicar al vórtice

óptico. En la Figura 2.10 se ilustran los patrones de intensidad de las interferencias entre la onda plana  $u$  y un campo con una línea de vórtice óptico, *cf.* (2.19), el cual forma un ángulo  $\delta$  con respecto al eje  $y$  en el plano  $yz$ , para valores diferentes de  $\delta$ . El campo de interferencia es:

$$\Psi = 2\pi A_0 [s_1 + i(\beta_e^* s_3 - \beta_s s_2)] \exp(i2\pi s_3) \quad (2.32)$$

$$+ u_0 \exp\{-i2\pi[s_1 \sin(\theta) \cos(\phi) + s_2 \sin(\theta) \sin(\phi) + s_3 \cos(\phi)]\}, \quad (2.33)$$

donde  $\beta_e^* = \beta \cos(\delta)$  y  $\beta_s = \beta \sin(\delta)$ , y se hizo  $t = 0$ . Los ejes están escalados con la longitud de onda del haz ( $s_j = x_j/\lambda$ ,  $j = 1, 2$ ) y el plano transversal de observación es  $s_3 = 0$  en todos los casos, ya que para cualquier valor de  $\delta$  el vórtice se encuentra en el plano  $s_1 s_2$ . En el caso extremo en el que la línea de vórtice se encuentra en el plano de observación, se obtiene un conjunto de líneas discontinuas, que no se pueden asociar con un tenedor.

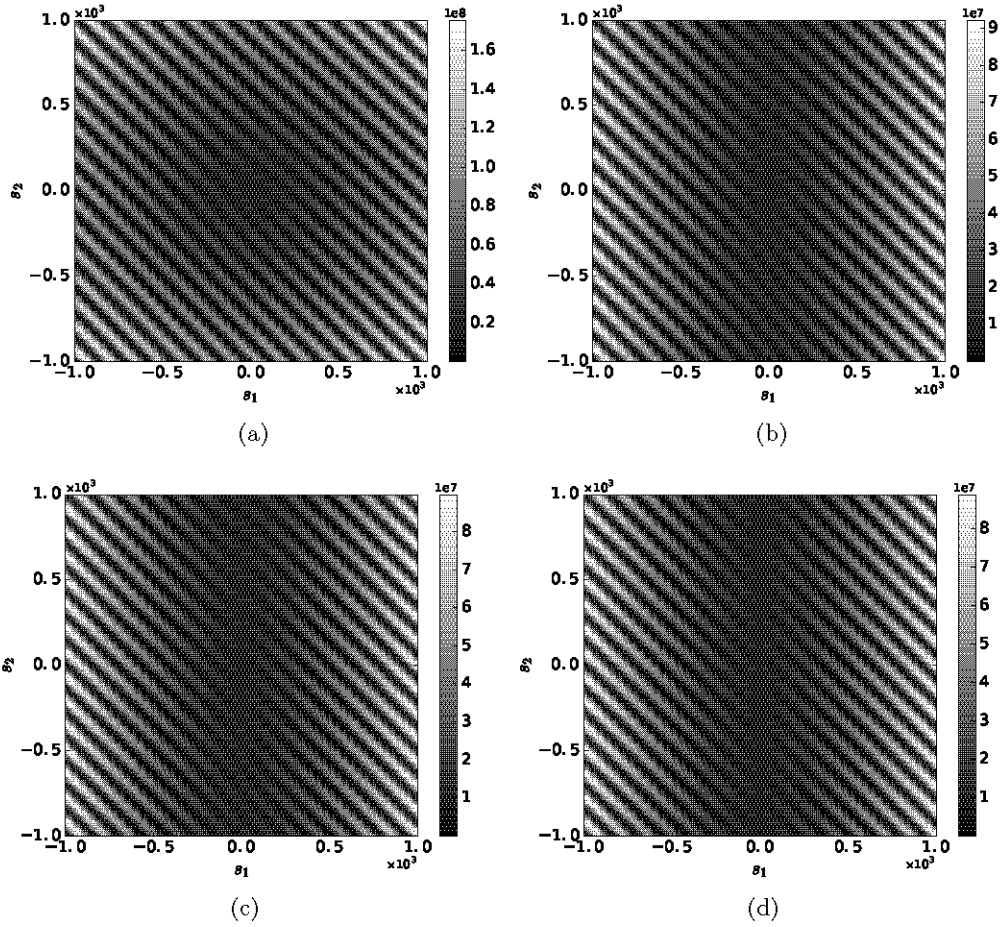


Figura 2.10: Patrones de intensidad producidos por  $\Psi$ . (a)  $\delta = \pi/2$  rad, (b)  $\delta = \pi/16$  rad, (c)  $\delta = \pi/32$  rad, (d)  $\delta = 0$  rad. En todos los planos se tomó  $A_0 = 1$ ,  $\beta = 1$  y  $s_3 = 0$ , mientras que para cada plano se tomó  $u_0 = \sqrt{\max|\psi|^2}$ .

## Capítulo 3

# Catástrofes de difracción: el doblez y la cúspide

### 3.1. La función Airy

A Sir George Biddell Airy (1801-1892) se relacionan muchos fenómenos como la espiral de Airy, que es un fenómeno óptico observable en cristales de cuarzo, el punto de Airy que se encuentra en el patrón de difracción producido por una abertura circular, donde se encuentra una función Airy diferente a la que se menciona aquí, o la función de esfuerzo de Airy que él introdujo en sus trabajos sobre elasticidad [48]. Además, él introdujo en 1838 una función para estudiar la intensidad de la luz en la vecindad de una cáustica, que se conoce como función Airy [49].

Actualmente, se utiliza la notación introducida en 1928 por Jeffreys para representar a la función Airy. Las funciones Airy homogéneas  $\text{Ai}(x)$  y  $\text{Bi}(x)$  en su forma integral para variable real [48, 50, 51]:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt, \quad (3.1)$$

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \text{sen}\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt, \quad (3.2)$$

son soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$y'' - xy = 0, \quad (3.3)$$

conocida como la ecuación de Airy, la cual es una aproximación de la ecuación diferencial de segundo orden  $y'' + F(x)y = 0$ , donde  $F$  es una función de  $x$ . La aproximación consiste en considerar el desarrollo a primer orden en la serie de Taylor de  $F(x)$  alrededor de un punto de retorno  $x_0$ ,  $F(x_0) = 0$ , con  $F'(x_0) \neq 0$ .

En la Figura 3.1 se ilustran las gráficas de  $\text{Ai}(x)$  y  $\text{Bi}(x)$ , se observa un comportamiento oscilatorio y decreciente en  $x < 0$  conforme  $x$  decrece para ambas funciones. En  $x > 0$ ,  $\text{Ai}(x)$  ( $\text{Bi}(x)$ ) decrece (crece) rápidamente al aumentar  $x$ . Las observaciones anteriores pueden verificarse analíticamente al analizar las expansiones asintóticas de cada función en los semiejes positivo y

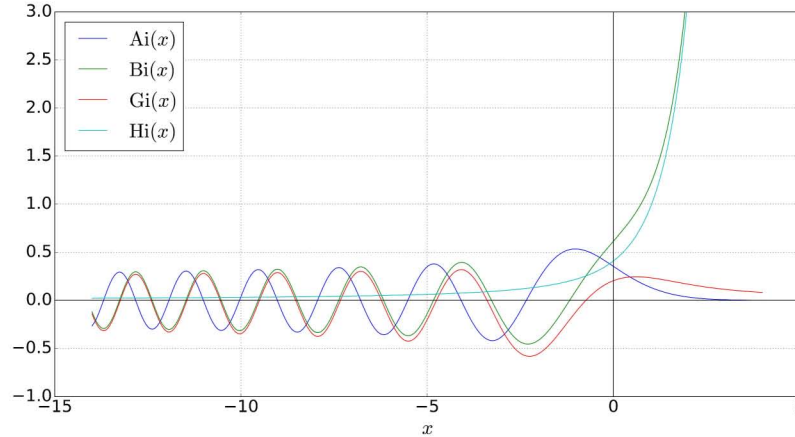


Figura 3.1: Gráficas de las funciones  $Ai(x)$ ,  $Bi(x)$ ,  $Gi(x)$  y  $Hi(x)$  en  $(-14, 4)$ .

negativo [50, 51]. Las funciones  $Ai(x)$  y  $Bi(x)$  pueden representarse como combinaciones lineales de las funciones Bessel de orden  $1/3$ .

La ecuación diferencial inhomogénea de segundo orden:

$$y'' - xy = \pm \frac{1}{\pi}, \quad (3.4)$$

tiene como soluciones a las funciones Airy inhomogéneas  $Gi(x)$  y  $Hi(x)$ , también conocidas como funciones Scorer, para el signo  $+$  y  $-$  respectivamente. Sus expresiones integrales están dadas por [48, 50, 51]:

$$Gi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt, \quad (3.5)$$

$$Hi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \quad (3.6)$$

En la Figura 3.1 se muestran las gráficas de  $Gi(x)$  y  $Hi(x)$ . Las funciones  $Gi(x)$  y  $Hi(x)$  se relacionan con  $Bi(x)$ , *cf.* ecuación (3.2), por:

$$Bi(x) = Gi(x) + Hi(x), \quad (3.7)$$

de donde  $Gi(x)$  resulta ser una función que decrece a cero en el semieje positivo, en términos de dos funciones que divergen.

La función  $Ai(x)$  es solución a la ecuación de Schrödinger de una partícula que se mueve en un campo externo uniforme en el espacio [52], *e.g.* un campo gravitacional o un campo eléctrico. En 1979 M. V. Berry y N. L. Balazs muestran que la función  $Ai(x)$  es solución de partícula libre en la ecuación de Schrödinger, y que presenta una densidad de probabilidad que se propaga en el espacio libre sin modificación y describe un perfil parabólico [53].

### 3.2. Haz Airy

Debido a la similitud entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación paraxial de difracción, es posible asociar una función de onda con un haz. En Óptica, el estudio de los haces adifraccionales (aquellos cuyos patrones transversales de intensidad no se modifican durante la propagación), como el haz Bessel bidimensional (2D), ha dado lugar al descubrimiento de otros haces adifraccionales en 2D y 3D, los cuales pueden representarse como una superposición de ondas planas. Una consecuencia de la adifracción de los haces es que poseen una potencia infinita, por lo que no son realizables. En la práctica, estos haces son truncados por una abertura, lo que resulta en una ligera difracción en ellos durante la propagación.

La ecuación paraxial de difracción, *cf.* ecuación (1.30), admite la solución adifraccional Airy [53]:

$$\phi(s, \zeta) = \text{Ai} \left[ s - \left( \frac{\zeta}{2} \right)^2 \right] \exp \left( i s \frac{\zeta}{2} - i \frac{\zeta^3}{12} \right), \quad (3.8)$$

donde  $s = x/x_0$  y  $\zeta = z/kx_0^2$  son coordenadas adimensionales escaladas por  $x_0$  y  $kx_0^2$  (rango de Rayleigh), respectivamente,  $x_0$  es el factor de escala,  $k = 2\pi n/\lambda$  es el número de onda,  $n$  es el índice de refracción del medio y  $\lambda$  es la longitud de onda del haz. De (3.8) se obtiene la intensidad del haz como  $|\phi(s, \zeta)|^2 = |\text{Ai}[s - (\zeta/2)^2]|^2$ , cuyos patrones transversales a la dirección de propagación están caracterizados por describir un perfil parabólico  $\zeta^2 = 4s$  (ver Figura 3.2), que en  $\zeta = 0$  está dado por  $|\phi(s, 0)|^2 = |\text{Ai}(s)|^2$ . Debido a que  $\text{Ai}(x)$  no es una función de cuadrado integrable, ya que diverge a  $+\infty$ , por lo que  $\phi(s, \zeta)$  posee energía infinita.

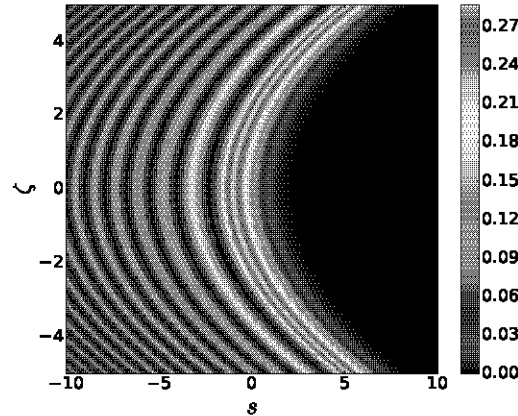


Figura 3.2: Patrón de intensidad del haz Airy, se observa el perfil parabólico y la adifracción del haz.

En 2007, G. A. Siviloglou y D. N. Christodoulides describieron un haz de luz Airy al modular a la función Airy con una función exponencial de apertura [54], tal que en la entrada del sistema  $\phi(s, 0) = \text{Ai}(s) \exp(as)$ , donde  $a > 0$  es el factor de decaimiento. Con lo anterior, la parte oscilante de la función Airy en  $s < 0$  queda contenida por la exponencial, mientras que para  $s > 0$  no hay cambios relevantes debido a que la función Airy decrece más rápidamente que la exponencial de apertura. Usando la condición anterior y la ecuación paraxial de difracción, se obtiene la siguiente solución:



$$\phi(s, \zeta) = \text{Ai} \left[ s - \left( \frac{\zeta}{2} \right)^2 + ia\zeta \right] \exp \left( as - \frac{a\zeta^2}{2} - i\frac{\zeta^3}{12} + i\frac{a^2\zeta}{2} + i\frac{s\zeta}{2} \right). \quad (3.9)$$

Lo anterior se hizo con el fin de garantizar la convergencia de la potencia del haz y hacerla realizable. Cuando  $a = 0$ , (3.9) se reduce a (3.8). El haz Airy paraxial bidimensional como superposición de ondas planas [55] está dado por:

$$\phi_a^{(1)}(s, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s \mathfrak{F}_a^{(1)}(k_s) e^{i \left( k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2} \right)} : \quad \mathfrak{F}_a^{(1)}(k_s) = e^{(a - ik_s)s/3}, \quad (3.10)$$

donde  $k_s = kx_0$  y el espectro angular del haz,  $\mathfrak{F}_a^{(1)}(k_s)$ , posee un término gaussiano que modula y limita la amplitud de los términos  $k_s$  que contribuyen a la integral, esto forzosamente está relacionado con la validez de la aproximación paraxial utilizada en (3.10). En la Figura 3.2 se ilustra el patrón de intensidad y de fase reducida de un haz Airy con  $a = 0.03$ , se observa claramente el perfil parabólico y la simetría con respecto al eje  $s$  del haz. A pesar de la modulación del haz debido al factor de decaimiento, es posible observar que el haz se vuelve cuasiadifraccional.

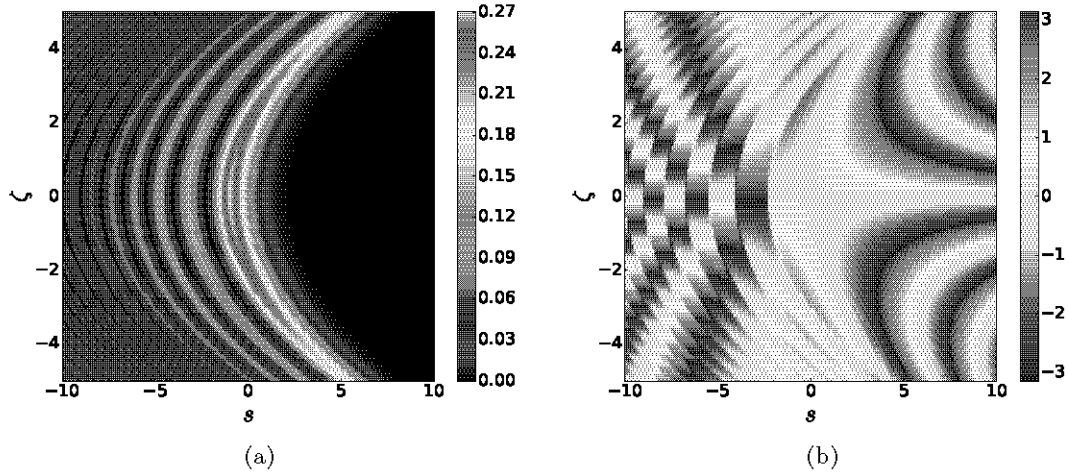


Figura 3.3: Patrón de intensidad (a) y de fase reducida (b) de un haz Airy bidimensional de energía finita, con  $a = 0.03$ .

De la integral de difracción (3.10), se obtiene la siguiente función potencial:

$$\phi(k_s; s, \zeta) = k_s s - a^2 k_s + \frac{k_s^3}{3} - \frac{k_s^2 \zeta}{2}, \quad (3.11)$$

cuyo germen,  $\phi(k_s; 0, 0) = -a^2 k_s + k_s^3/3$ , corresponde al doblez, la primera catástrofe en la lista de Thom (Tabla 2.1). Usando las condiciones generales para obtener la cáustica, *cf.* ecuaciones (2.13) y (2.14), para una función potencial con una variable de estado ( $k_s$ ) y dos parámetros de control ( $s, \zeta$ ), se obtiene:

$$\phi_{k_s} = s - a^2 + k_s^2 - k_s \zeta = 0, \quad (3.12)$$

$$\phi_{k_s k_s} = 2k_s - \zeta = 0. \quad (3.13)$$

Los rayos tangenciales a la cáustica se obtienen de (3.12), mientras que la ecuación de la cáustica se obtiene al sustituir el valor de  $k_s$  hallado en (3.13) en la ecuación (3.12), resultando:

$$(s - a^2) - \frac{\zeta^2}{4} = 0. \quad (3.14)$$

La cáustica corresponde a una parábola que abre hacia la derecha, con valores  $s \geq a^2$ . En la Figura 3.4 se ilustran algunos rayos que producen la cáustica asociada al haz Airy, en una región del espacio  $(s, \zeta)$ , con  $a = 0$ . La sección a la izquierda de la cáustica que involucra dos rayos es de enfocamiento, mientras que la sección a la derecha de la cáustica que no presenta rayos es oscura, es esta discontinuidad en el número de rayos lo que da lugar a la cáustica. De (3.12) y (3.14), se observa que si  $a \geq 0$  entonces los rayos y la cáustica obtenidos con  $a = 0$  se desplazan  $a^2$  hacia la derecha.

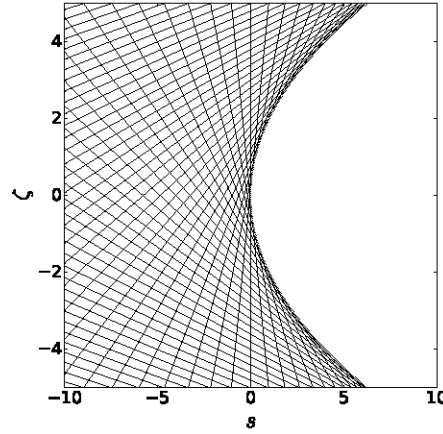


Figura 3.4: Rayos (líneas negras) y cáustica (línea roja) asociadas a un haz Airy bidimensional con  $a = 0$ . La cáustica corresponde a un doblez.

La generalización del haz a tres dimensiones se obtiene directamente de la solución anterior, ya que es posible resolver la ecuación paraxial de difracción tridimensional por separación de variables, obteniendo:

$$\phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, \zeta) = \phi_{a_1}^{(1)}(s_1, \zeta) \phi_{a_2}^{(1)}(s_2, \zeta). \quad (3.15)$$

En la abertura se tiene  $\phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, 0) = \text{Ai}(s_1) \text{Ai}(s_2) \exp(x/w_1) \exp(y/w_2)$ , donde  $w_1 = x_0/a_1$  y  $w_2 = x_0/a_2$  representan los anchos de la apertura rectangular. En la Figura 3.5 se ilustra la isointensidad de un haz Airy tridimensional en perspectivas diferentes con  $a_1 = a_2 = 0.03$ ,  $x_0 = 100 \mu\text{m}$  y  $w_1 = w_2 = 3.33 \text{ mm}$ . Se observa que el haz Airy tridimensional de energía finita es cuasiadifraccional y se desplaza en la dirección  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  del plano transversal. El haz Airy tridimensional fue realizado experimentalmente por primera vez por D. N. Christodoulides, *et*

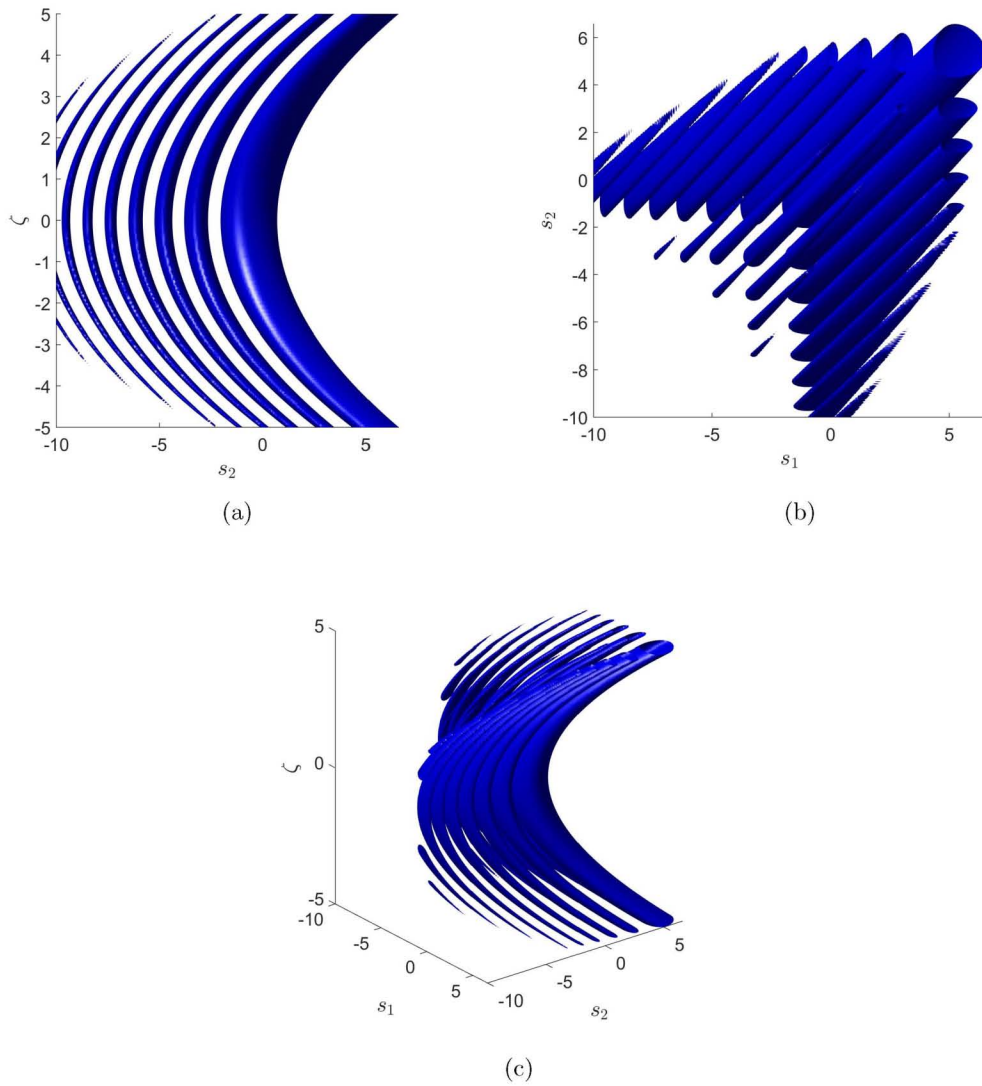


Figura 3.5: Isointensidades (0.01) de un haz Airy paraxial tridimensional con  $a_1 = a_2 = 0.03$ .

*al.*, en 2008, quienes estudiaron teórica y experimentalmente la propiedad de autoreconstrucción del haz y observaron el perfil parabólico que éste describe [56]. La autoreconstrucción de un haz consiste en que éste tiende a reformarse durante la propagación a pesar de haber sido bloqueada una parte de él.

### 3.3. La función Pearcey

La integral de Pearcey está dada por:

$$\text{Pe}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i \left( \frac{t^4}{4} + \frac{xt^2}{2} + yt \right) \right] dt, \quad (3.16)$$

donde  $x$  y  $y$  son variables de posición adimensionales y escaladas. La función  $\text{Pe}(x, y)$  fue utilizada por T. Pearcey en 1946 para estudiar la estructura de un campo electromagnético en la vecindad de la cúspide de una cáustica, al dibujar contornos del módulo y la fase de la función [57].

### 3.4. Haz Pearcey

Análogamente al haz Airy, se introduce el factor de decaimiento ( $a$ ) en el haz Pearcey [55], que está dado por:

$$\phi_a^{(1)\mathcal{P}}(s, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s \mathfrak{P}_a^{(1)}(k_s) e^{i \left( k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2} \right)} : \quad \mathfrak{P}_a^{(1)}(k_s) = e^{i \frac{k_s^4}{4} - a k_s^2}. \quad (3.17)$$

En la Figura 3.6 se ilustra el patrón de intensidad y de fase reducida de este haz con  $a = 0.03$ , donde se observa la simetría del haz con respecto al eje  $\zeta$ . El patrón de intensidad muestra máximos locales, de los cuales el máximo conocido como cúspide, está localizado en  $(0, 2)$ . Así mismo, el patrón de intensidad permite ubicar zonas oscuras, que en el patrón de fase reducida corresponden a singularidades, las cuales aparecen por pares dentro del haz y solas fuera de éste. Las singularidades de fase asociadas a esta integral de cúspide fueron analizadas y reportadas por M. V. Berry, J. F. Nye y F. J. Wright en 1978 [32]. El haz Pearcey posee las propiedades de autoenfocamiento y autoreconstrucción [58].

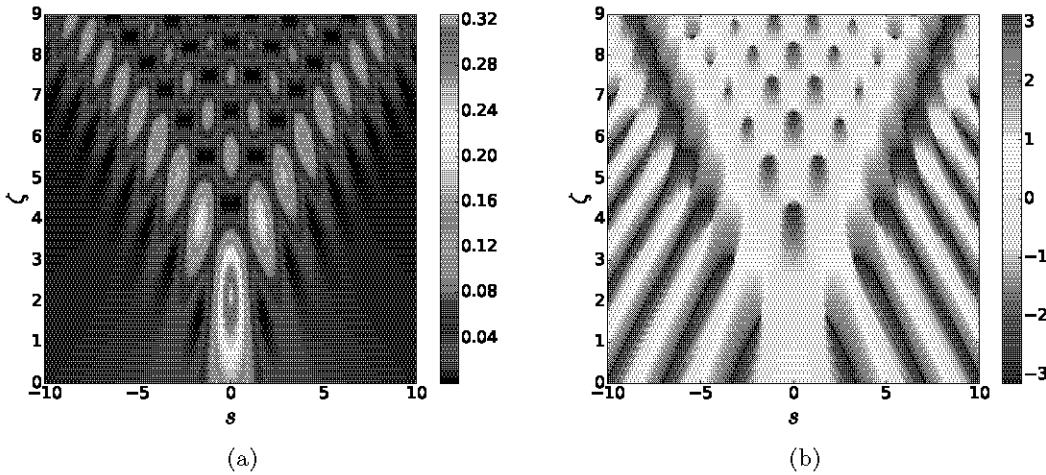


Figura 3.6: Patrón de intensidad (a) y de fase (b) de un haz Pearcey bidimensional de energía finita con  $a = 0.03$ .

De (3.17), se obtiene la siguiente función potencial para el haz Pearcey:

$$\phi(k_s; s, \zeta) = \frac{k_s^4}{4} + k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}, \quad (3.18)$$

cuyo germen,  $\phi(k_s; 0, 0) = k_s^4/4$ , corresponde a la cúspide en la clasificación de Thom. Las condiciones de rayos y de cáustica resultan en:

$$\phi_{k_s} = k_s^3 + s - k_s \zeta = 0, \quad (3.19)$$

$$\phi_{k_s k_s} = 3k_s^2 - \zeta = 0. \quad (3.20)$$

De las expresiones anteriores, la ecuación de la cáustica está dada por:

$$s^2 - \frac{4}{27} \zeta^3 = 0, \quad (3.21)$$

donde se observa que cada valor de  $\zeta$  tiene que ser mayor o igual a cero, debido al cuadrado en la coordenada  $s$ . En la Figura 3.7 se ilustra la cáustica asociada al haz Pearcey y algunos rayos que la producen. En la sección por encima de la cáustica cada punto consiste de la intersección de tres rayos diferentes, mientras que la sección por debajo de la cáustica está formada sólo por un rayo. Nuevamente la cáustica se forma debido a la discontinuidad en el número de rayos en cada punto del plano  $(s, \zeta)$ . También debe notarse que la ecuación de la cáustica no depende del factor de decaimiento.

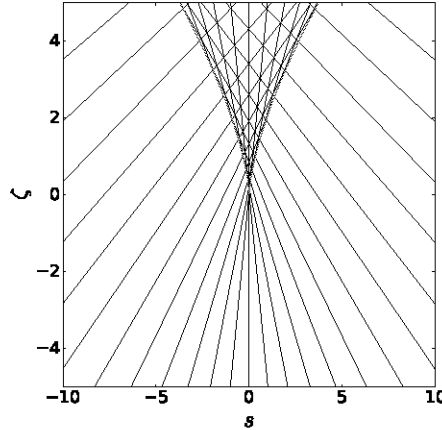


Figura 3.7: Rayos (líneas negras) y cáustica (línea roja) asociadas al haz Pearcey bidimensional, notar que la ecuación de la cáustica no depende de  $a$ . La cáustica corresponde a una cúspide.

El haz Pearcey en tres dimensiones está dado por el producto de dos haces Pearcey bidimensionales, tales que:

$$\phi_{a_1, a_2}^{(2)P}(s_1, s_2, \zeta) = \phi_{a_1}^{(1)P}(s_1, \zeta) \phi_{a_2}^{(1)P}(s_2, \zeta). \quad (3.22)$$

En la Figura 3.8 se ilustran tres perspectivas diferentes de la isointensidad obtenida para una sección con  $0 < s_1 < 10$ ,  $0 < s_2 < 10$  y  $0 < \zeta < 9$  del haz Pearcey tridimensional.

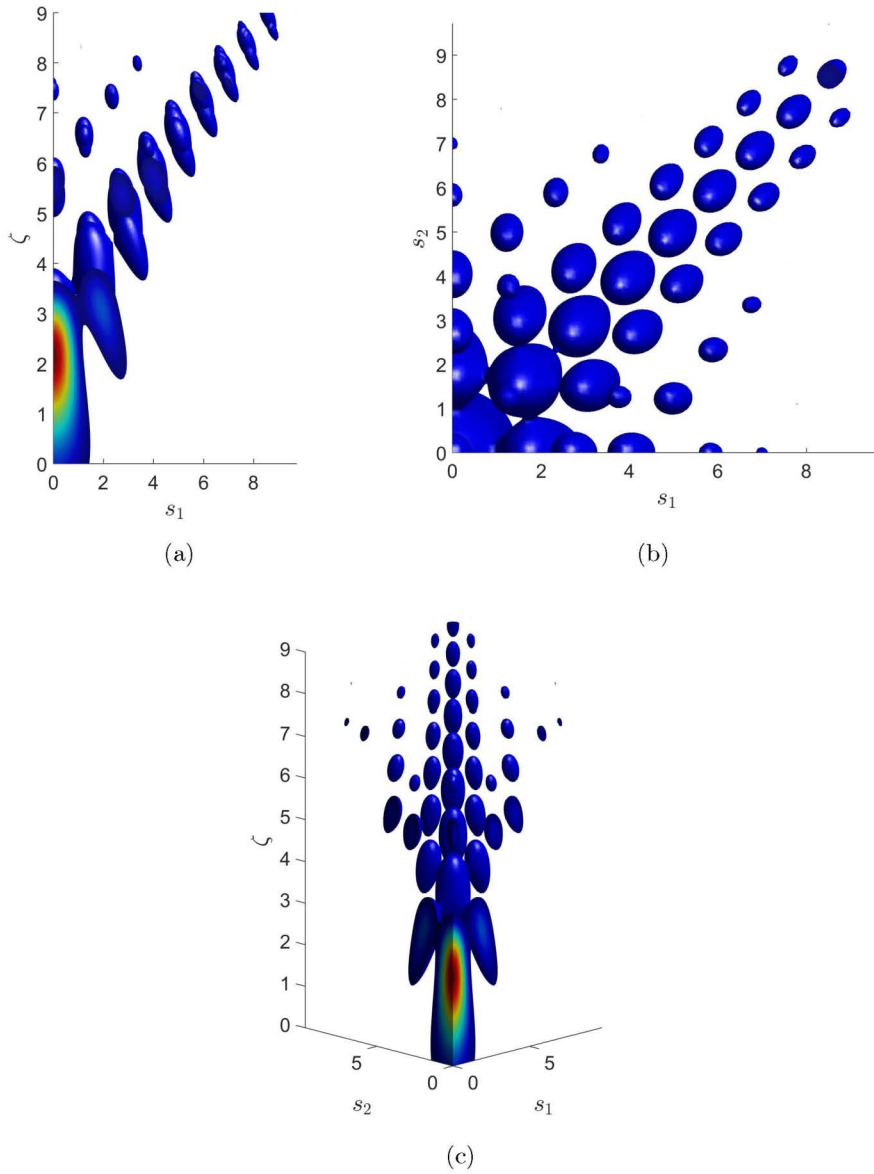


Figura 3.8: Isointensidades (0.01) de un haz Pearcey tridimensional con  $a_1 = a_2 = 0.03$ . Además se incluyen las intensidades de las regiones de intersección del haz con los planos  $s_1\zeta$  y  $s_2\zeta$ , siendo la región más intensa el centro del lóbulo central.



## Capítulo 4

# Haz Airy simétrico y su topología

### 4.1. Haz Airy simétrico paraxial

El haz Airy simétrico paraxial, se obtiene matemáticamente al simetrizar el haz Airy en las coordenadas transversales [55],  $s_i \rightarrow -s_i$ , siendo el haz bidimensional:

$$\Phi_\alpha(s, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s \mathfrak{S}_\alpha^{(1)}(k_s) e^{i\left(k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} : \quad \mathfrak{S}_\alpha^{(1)}(k_s) = e^{(a - i|k_s|)^3/3}. \quad (4.1)$$

En la Figura 4.1 se ilustra el patrón de intensidad y de fase reducida de un haz Airy simétrico bidimensional. Genéricamente todos los haces Airy simétricos muestran máximos locales de intensidad localizados en el semiplano  $\zeta > 0$ , para la estructura de fases en (4.1). Hay además un máximo global ubicado sobre el eje de simetría, y que en la mayoría de los casos no se encuentra en el origen (como ocurre en el haz Airy). También en la Figura 4.1 se ilustra el patrón de fase reducida, donde se observan singularidades de fase con carga topológica +1 y -1. .

De (4.1) se obtiene la siguiente función potencial:

$$\phi(k_s; s, \zeta) = k_s s - a^2 |k_s| + \frac{|k_s|^3}{3} - \frac{k_s^2 \zeta}{2}, \quad (4.2)$$

cuyo germen,  $\phi(k_s; 0, 0) = -a^2 |k_s| + |k_s|^3/3$ , no pertenece a ninguna de las catástrofes elementales en la lista de Thom. Esto se debe a que tal lista sólo considera polinomios y no admite funciones cuya derivada en  $k_s$  no esté definida en algún punto. Aplicando las condiciones de rayos y de cáustica al potencial, se obtiene:

$$\phi_{k_s} = s - a^2 \operatorname{sgn}(k_s) + \operatorname{sgn}(k_s) k_s^2 - k_s \zeta = 0, \quad (4.3)$$

$$\phi_{k_s k_s} = 2 \operatorname{sgn}(k_s) k_s - \zeta = 0, \quad (4.4)$$

donde  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  es la función signo. Esta expresión hace evidente la discontinuidad de la derivada en  $k_s = 0$ . De las condiciones anteriores, se obtiene la ecuación de la cáustica para los siguientes dos casos:



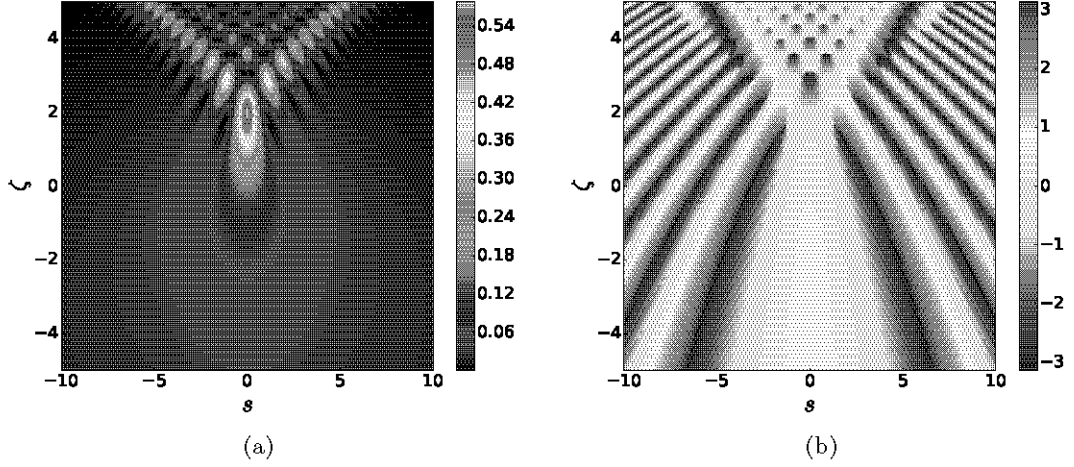


Figura 4.1: Patrón de intensidad (a) y de fase reducida (b) de un haz Airy simétrico paraxial bidimensional. Las figuras corresponden a  $a = 0.03$ . Se observa un máximo de intensidad en  $(0,2)$  para (a), y la presencia de vórtices ópticos en (b).

$$s + a^2 + \frac{\zeta^2}{4} = 0 \quad \text{si } k_s < 0, \quad (4.5)$$

$$s - a^2 - \frac{\zeta^2}{4} = 0 \quad \text{si } k_s > 0, \quad (4.6)$$

los cuales se resumen a la siguiente condición:

$$|s| - a^2 - \frac{\zeta^2}{4} = 0 \quad \text{si } k_s \neq 0. \quad (4.7)$$

En la Figura 4.2 (a) se muestran los rayos que forman la cáustica del haz Airy simétrico con  $a = 0$ . La forma de la cáustica es similar a la cúspide encontrada en el haz Pearcey del capítulo anterior, aunque cada uno de sus brazos está formado por segmentos de dos haces Airy. En cada punto de la zona exterior a la cáustica sólo se tiene un rayo, mientras que en su interior, cada cruce consiste de la intersección de sólo dos rayos. Obsérvese que  $a = 0$  conduce a un haz que no está regularizado en energía y por lo tanto la aproximación paraxial para su realización se tomaría de un corte en los límites de integración. Para  $a > 0$ , se tiene una discontinuidad en  $\zeta = 0$ , ya que cada brazo de la cáustica se desplaza alejándose  $a^2$  (brazo derecho) o  $-a^2$  (brazo izquierdo) del origen en la dirección  $s$ . Lo anterior hace que para cada valor positivo de  $\zeta$ , la separación entre los puntos correspondientes sobre la cáustica aumente en  $2a^2$ . Un ejemplo del caso anterior se ilustra en la Figura 4.2 (b).

La expresión tridimensional del haz Airy simétrico paraxial se obtiene del producto de dos haces Airy simétricos bidimensionales para las coordenadas  $(s_1, \zeta)$  y  $(s_2, \zeta)$ ,

$$\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, \zeta) = \Phi_{a_1}^{(1)}(s_1, \zeta) \Phi_{a_2}^{(1)}(s_2, \zeta), \quad (4.8)$$

donde las coordenadas transversales  $s_1$  y  $s_2$ , y la coordenada de propagación  $\zeta$  se han escalado de igual forma para los dos haces bidimensionales, *i.e.*  $y_0 = x_0$ . En la Figura 4.3 se ilustra

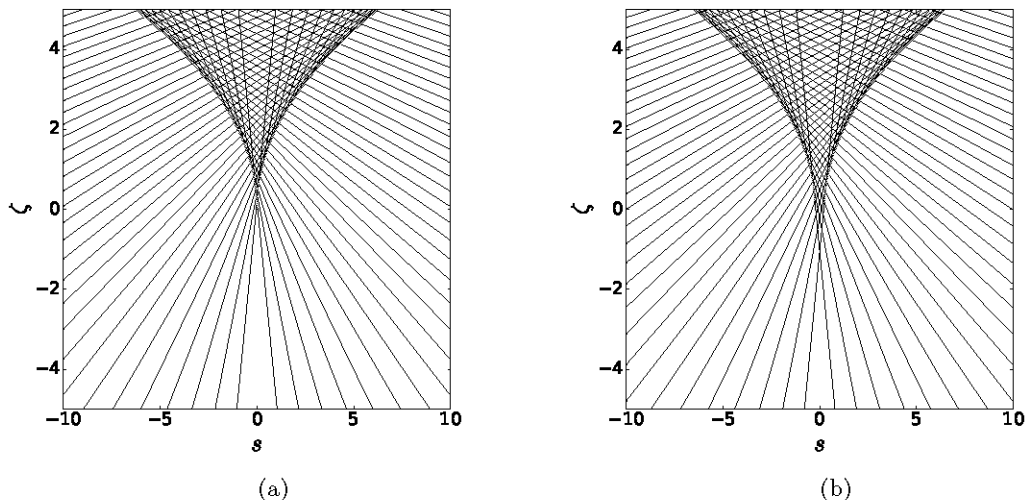


Figura 4.2: Rayos (líneas negras) y cáustica (línea roja) asociadas al haz Airy simétrico paraxial bidimensional con (a)  $a = 0$ , y (b)  $a = 0.5$ .

la isointensidad de un haz Airy simétrico tridimensional con  $a_1 = a_2 = 0.03$  en perspectivas diferentes, se observa la formación de lóbulos de luz en un arreglo piramidal con base cuadrada. El tamaño de los lóbulos es diferente, y su distribución en el espacio es tal que la mayor cantidad de lóbulos está cerca de las aristas de la pirámide, que en este caso se encuentran sobre los planos definidos por  $|s_1| = |s_2|$  ya que el factor de escala es el mismo. El caso anterior también permite que el haz sea invariante ante el intercambio de coordenadas transversales. En el ápice o vértice de la pirámide se encuentra el lóbulo central, que es el de mayor intensidad. Lo anterior es congruente con la estructura de los haces bidimensionales, ya que los máximos locales en el haz tridimensional están ubicados donde ambos haces bidimensionales son máximos.

Los vórtices ópticos se localizan en los ceros del haz, a continuación se estudia la estructura de éstos en un haz Airy simétrico tridimensional. Debido a la forma de la expresión del haz tridimensional, los ceros de cada haz bidimensional serán proyectados en la coordenada restante, dando lugar a líneas infinitas (ver Figura 4.4). Estas líneas forman un enrejado que da lugar al cruce de dos líneas de ceros, los cuales producen vórtices puntuales con carga topológica  $+2$  y  $-2$ , nuevamente este resultado está relacionado con que la coordenada de propagación se escaló igual en ambos haces bidimensionales. La detección de estas líneas de ceros por el método interferométrico en los planos transversales no será sencilla. La generación de estructuras de tenedor como las que se obtienen en la sección 2.6 se ve obstaculizada por la dirección de estas líneas y el plano de observación.

En la Figura 4.5 se ilustran, sólo para el semiplano con  $s_1 = s_2$  en la sección positiva de las coordenadas transversales, algunos de los vórtices puntuales con carga topológica de magnitud dos obtenidos por la intersección de las líneas de vórtices con carga topológica unitaria, a través de las curvas de ceros del haz, y de la fase reducida de ésta. En esta figura se encuentran todos los vórtices puntuales con carga topológica  $+2$  y  $-2$  que se ubican fuera del haz, mientras que los vórtices puntuales que se localizan en el interior no aparecen en su totalidad, ya que éstos se formaron por pares de líneas que dan lugar a cuatro vórtices puntuales por cada par (excepto aquellos que se encuentran más cerca del eje de simetría). Por lo que en el haz Airy simétrico

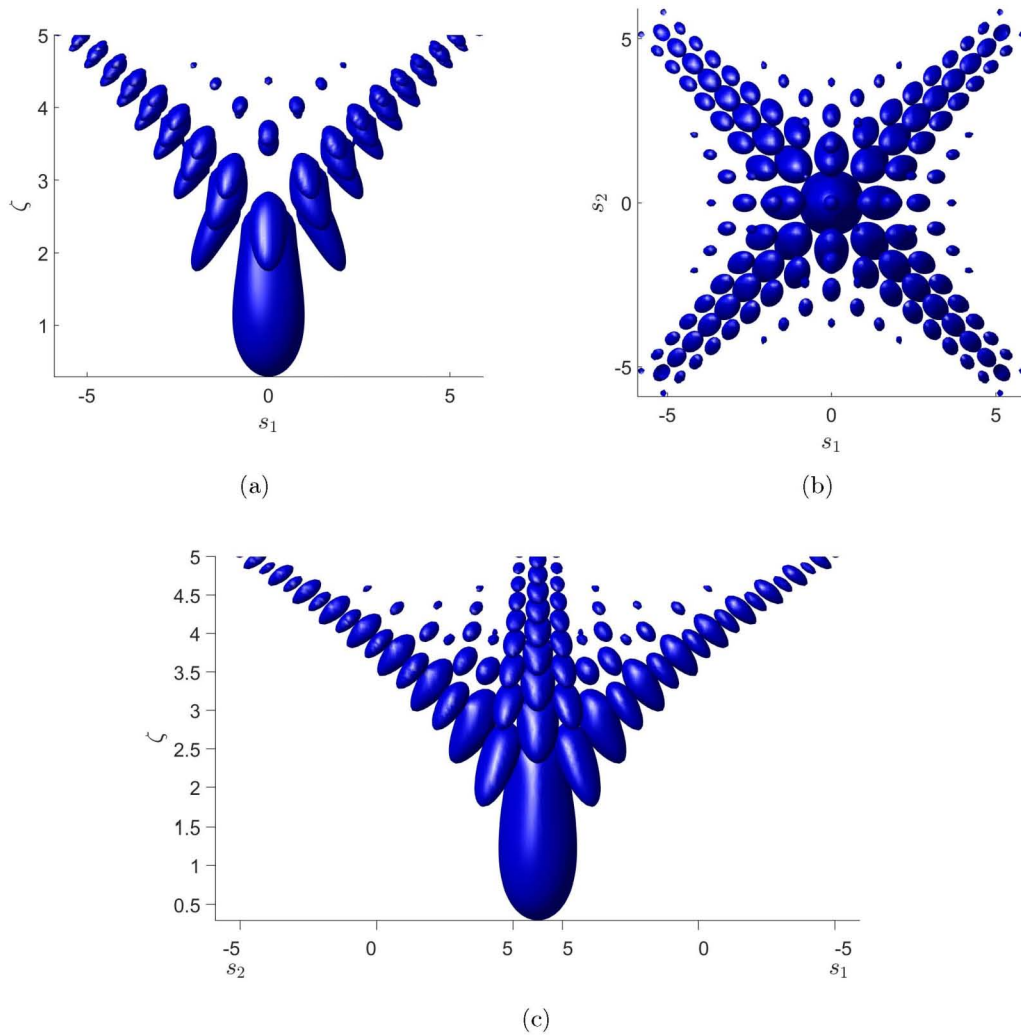


Figura 4.3: Isointensidades (0.04) del haz Airy simétrico paraxial con  $a_1 = a_2 = 0.03$ . En (a) se observa la proyección del haz Airy simétrico bidimensional, en (b) se observa que la distribución de las gotas de luz es predominante en  $|s_1| = |s_2|$ , y en (c) se distingue parte de la estructura piramidal del haz.

tridimensional existen planos transversales con 4 o 16 vórtices puntuales con carga topológica  $+2$  o  $-2$ . Ya que este haz Airy simétrico es de energía finita, el número de líneas de vórtices detectables se espera que sea finito, para cualquier carga topológica. En la Figura 4.5 es posible observar como los pares de vórtices se acercan conforme  $\zeta$  crece, dando lugar a la nucleación de estos pares y su desaparición. Este comportamiento también es visible en el patrón de fase del haz bidimensional mostrado en la Figura 4.1.

La generación y el estudio de la estabilidad estructural del haz Airy simétrico en tres dimensiones, así como su propiedad de autoreconstrucción han sido mostradas experimentalmente [55],

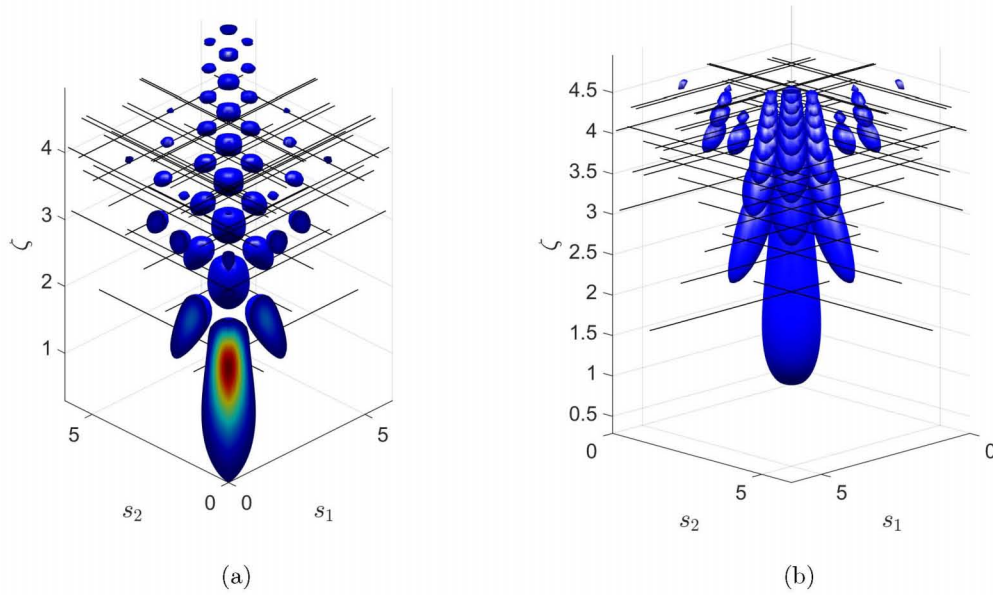


Figura 4.4: Isointensidades (0.04) del haz Airy simétrico paraxial y sus líneas de ceros para  $a_1 = a_2 = 0.03$  en la sección positiva del plano transversal. En (a) se incluyen las intensidades de las intersecciones del haz con los planos  $s_1\zeta$  y  $s_2\zeta$ , donde el color rojo indica el valor máximo, el cual está dentro del lóbulo central. En (b) se muestra la parte posterior de la figura (a).

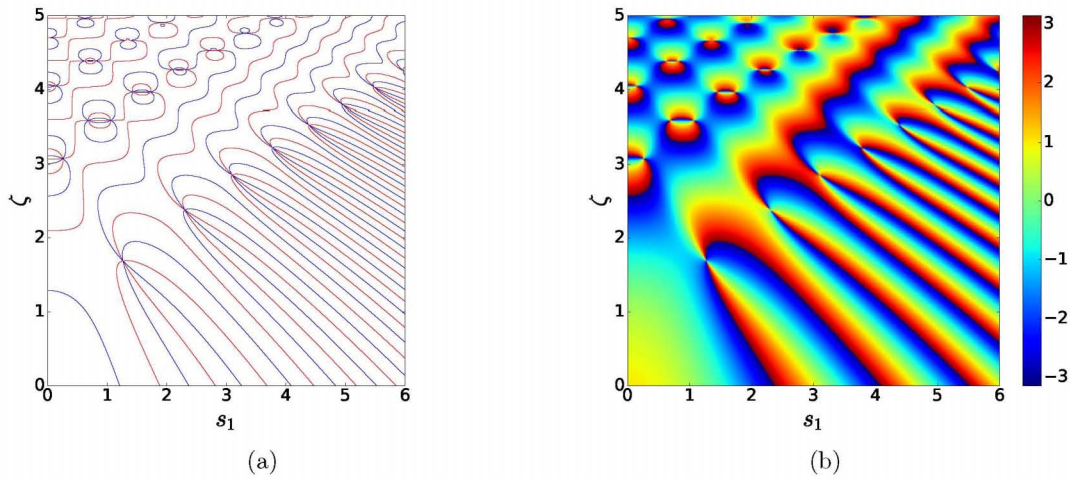


Figura 4.5: (a) Curvas de ceros de la parte real e imaginaria de un haz Airy simétrico tridimensional ( $\blacksquare \rightarrow \Re(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)})$ ,  $\blacksquare \rightarrow \Im(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)})$ ), y (b) su patrón de fase reducida con  $0 \leq s_1 = s_2 \leq 6$  y  $a_1 = a_2 = 0.03$ . En ambas figuras se utilizó la coordenada  $s_1$  como referencia.

al igual que su uso en el atrapamiento y manipulación de muchas partículas ligeras de silicio en agua destilada [59].

#### 4.1.1. Haz Airy simétrico bidimensional como superposición de funciones incompletas de Airy

En esta sección se desarrollan las expresiones del haz Airy simétrico bidimensional para valores  $a = 0$  y  $\zeta = 0$ , y cuando sólo  $a = 0$ . Estos casos son ideales, ya que  $a = 0$  corresponde a una apertura con ancho infinito. En este caso la aproximación paraxial no es válida.

##### 4.1.1.1. $a = 0$ y $\zeta = 0$

De (4.1) se obtiene en este caso:

$$\Phi_0^{(1)}(s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s \mathfrak{S}_0^{(1)}(k_s) e^{ik_s s} : \quad \mathfrak{S}_0^{(1)}(k_s) = e^{i\frac{|k_s|^3}{3}}. \quad (4.9)$$

Sustituyendo la expresión de  $\mathfrak{S}_0^{(1)}(k_s)$  en  $\Phi_0^{(1)}(s, 0)$  y desarrollando la integral:

$$\Phi_0^{(1)}(s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{|k_s|^3}{3} + k_s s\right)} \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 dk_s e^{i\left(-\frac{k_s^3}{3} + k_s s\right)} + \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s\right)} \right\} \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{+\infty}^0 dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} - k_s s\right)} + \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s\right)} \right\} \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} - k_s s\right)} + \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s\right)} \right\} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{2} \{ [\text{Ai}(-s) + i\text{Gi}(-s)] + [\text{Ai}(s) + i\text{Gi}(s)] \}, \quad (4.14)$$

donde las funciones  $\text{Ai}(s)$  y  $\text{Gi}(s)$  son las funciones Airy y Scorer, respectivamente, introducidas en la sección 3.1. La expresión (4.14) se interpreta como la superposición de haces Airy que viajan en direcciones opuestas y que dan lugar al haz Airy simétrico bidimensional en  $\zeta = 0$ .

##### 4.1.1.2. $a = 0$

De (4.1) se obtiene:

$$\Phi_0^{(1)}(s, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s \mathfrak{S}_0^{(1)}(k_s) e^{i\left(k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} : \quad \mathfrak{S}_0^{(1)}(k_s) = e^{i\frac{|k_s|^3}{3}}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo  $\mathfrak{S}_0^{(1)}(k_s)$  en  $\Phi_0^{(1)}(s, \zeta)$  y desarrollando las integrales, se obtiene:

$$\Phi_0^{(1)}(s, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 dk_s e^{i\left(-\frac{k_s^3}{3} + k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} + \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} \right\} \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{+\infty}^0 dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} - k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} + \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} \right\} \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} - k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} + \int_0^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s s - \frac{k_s^2 \zeta}{2}\right)} \right\}. \quad (4.19)$$

Debido a que se desea expresar a las integrales anteriores en términos de funciones tales que sea posible observar un comportamiento similar al caso anterior, donde se puede ver que el haz corresponde al choque de otros dos que viajan de tal forma que se intersectan, será necesario expresar el argumento de la exponencial en el integrando sin términos cuadráticos en  $k_s$ . Por lo que se hace un cambio de variable que cumpla con ello. Una forma es completar el binomio al cuadrado de la expresión  $k_s^3/3 - k_s^2 \zeta/2$ :

$$\frac{k_s^3}{3} - \frac{k_s^2 \zeta}{2} = \frac{1}{3} \left( k_s - \frac{\zeta}{2} \right)^3 - \frac{k_s \zeta^2}{4} + \frac{\zeta^3}{24}. \quad (4.20)$$

De la expresión anterior, se obtiene para los integrandos al hacer el cambio de variable  $k_s = k'_s + \zeta/2$ :

$$\frac{k_s^3}{3} - \frac{k_s^2 \zeta}{2} \mp k_s s = \frac{1}{3} \left( k_s - \frac{\zeta}{2} \right)^3 - \frac{k_s \zeta^2}{4} + \frac{\zeta^3}{24} \mp k_s s \quad (4.21)$$

$$= \frac{k'_s{}^3}{3} - \frac{k'_s \zeta^2}{4} - \frac{\zeta^3}{8} + \frac{\zeta^3}{24} \mp k'_s s \mp \frac{\zeta s}{2} \quad (4.22)$$

$$= \frac{k'_s{}^3}{3} + k'_s \left( \mp s - \frac{\zeta^2}{4} \right) - \frac{\zeta^3}{12} \mp \frac{\zeta s}{2}. \quad (4.23)$$

Al sustituir lo anterior en (4.19), se obtiene:

$$\Phi_0^{(1)}(s, \zeta) = \frac{e^{i\frac{\zeta^3}{24}}}{2\pi} \left\{ e^{-\frac{\zeta s}{2}} \int_{-\zeta/2}^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s \left(-s - \frac{\zeta^2}{4}\right)\right)} + e^{\frac{\zeta s}{2}} \int_{-\zeta/2}^{+\infty} dk_s e^{i\left(\frac{k_s^3}{3} + k_s \left(s - \frac{\zeta^2}{4}\right)\right)} \right\} \quad (4.24)$$

$$= \frac{e^{i\frac{\zeta^3}{24}}}{2\pi} \left\{ e^{-\frac{\zeta s}{2}} \tilde{\mathfrak{J}} \left( -\frac{\zeta}{2}, -s - \frac{\zeta^2}{4} \right) + e^{\frac{\zeta s}{2}} \tilde{\mathfrak{J}} \left( -\frac{\zeta}{2}, s - \frac{\zeta^2}{4} \right) \right\} \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \tilde{\mathfrak{J}} \left( -\frac{\zeta}{2}, -s - \frac{\zeta^2}{4} \right) + \tilde{\mathfrak{J}} \left( -\frac{\zeta}{2}, s - \frac{\zeta^2}{4} \right) \right\}, \quad (4.26)$$

donde se usó la función incompleta de Airy  $\mathfrak{J}(\eta_1, \eta_2)$  [60], cuya expresión integral es:

$$\mathfrak{J}(\eta_1, \eta_2) = \int_{\eta_1}^{+\infty} e^{i\left(\frac{t^3}{3} + \eta_2 t\right)} dt, \quad (4.27)$$

mientras que  $\tilde{\mathfrak{J}}(\eta_1, \eta_2)$  está dada por:

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\eta_1, \eta_2) = e^{-i\left(\frac{\eta_1^3}{3} + \eta_1 \eta_2\right)} \mathfrak{J}(\eta_1, \eta_2). \quad (4.28)$$

Las dos funciones anteriores son soluciones al siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial \eta_2^2} - \eta_2 \mathfrak{J} - i \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \eta_1^2} = 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial \eta_2^2} - i \left( \frac{\partial \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial \eta_1} - 2\eta_1 \frac{\partial \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial \eta_2} \right) = 0. \quad (4.30)$$

## 4.2. Haz Airy simétrico no paraxial

A continuación se muestra el desarrollo hecho para estudiar al haz Airy simétrico sin considerar la aproximación en la que la componente del vector de onda del haz en la dirección de propagación, es comparable al número de onda de la luz. En este caso se necesita aclarar que el haz será generado únicamente por las componentes del vector de onda que cumplen con la relación de dispersión, *i.e.* la magnitud del vector de onda es  $k = 2\pi n/\lambda$ , por lo que las componentes del vector de onda estarán sujetas a esta condición.

### 4.2.1. 2D

El haz bidimensional está dado por:

$$\Phi_a^{(1)}(s_1, s_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_s}^{k_s} dk_{s_1} \mathfrak{S}_a^{(1)}(k_{s_1}) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s}}, \quad (4.31)$$

donde,

$$\mathfrak{S}_a^{(1)}(k_{s_1}) = e^{(a - i|k_{s_1}|)^3/3}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{k}_s = k_{s_1} \hat{\mathbf{s}}_1 + k_{s_3} \hat{\mathbf{s}}_3, \quad (4.33)$$

$$k_{s_1} = k_x x_0, \quad k_{s_3} = \sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{s} = s_1 \hat{\mathbf{s}}_1 + s_3 \hat{\mathbf{s}}_3, \quad (4.35)$$

$$s_1 = \frac{x}{x_0} \quad y \quad s_3 = \frac{z}{x_0}. \quad (4.36)$$

Es posible reducir los límites de integración de la integral en (4.31) al analizar la paridad del integrando. Las expresiones de  $\mathfrak{S}_a^{(1)}(k_{s_1})$  y  $k_{s_3}$  son pares en  $k_{s_1}$ , mientras que en el exponente del integrando hay un término lineal en  $k_{s_1}$ , por lo que se obtiene:

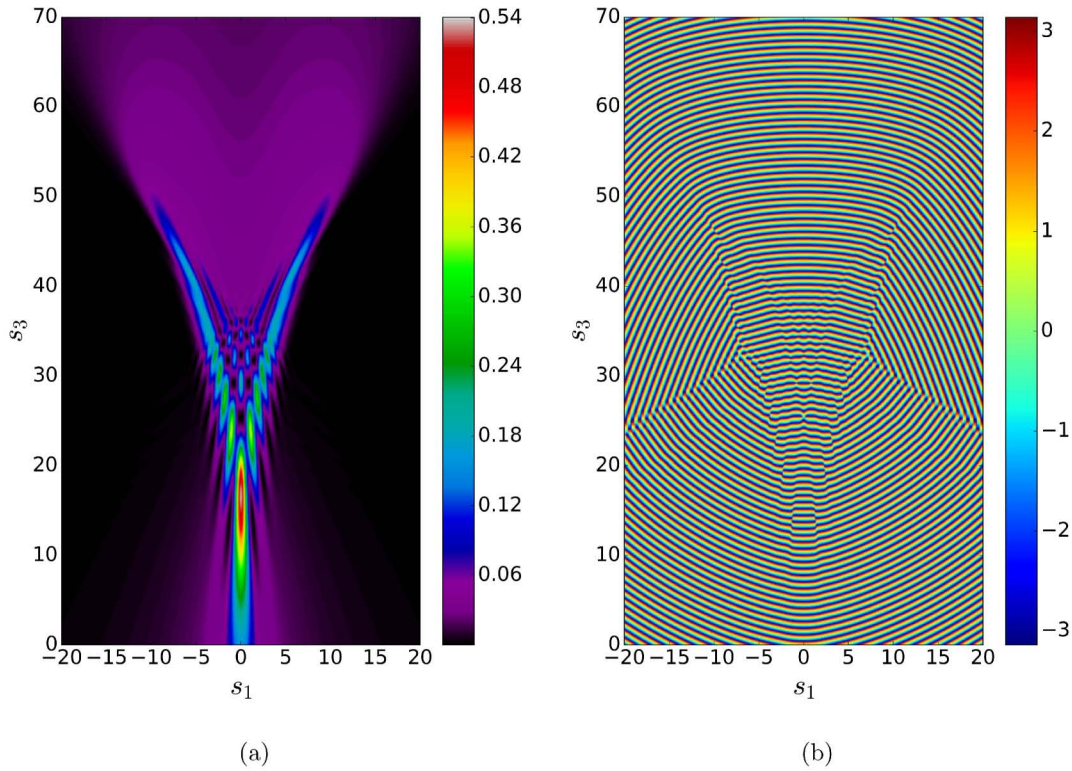


Figura 4.6: Patrón de (a) intensidad, y (b) fase reducida de un haz Airy simétrico bidimensional no paraxial con  $a = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ .

$$\Phi_a^{(1)}(s_1, s_3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{k_s} dk_{s_1} \mathfrak{S}_a^{(1)}(k_{s_1}) \cos(k_{s_1} s_1) e^{ik_{s_3} s_3}, \quad (4.37)$$

En la Figura 4.6 se ilustran los patrones de intensidad y de fase reducida de un haz Airy simétrico no paraxial con  $a = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ . En el patrón de intensidad es posible distinguir una distribución de máximos locales de intensidad dispuestos dentro de una pirámide invertida simétrica con respecto al eje  $s_3$ , siendo aquel situado sobre la cúspide de la pirámide la de mayor intensidad. En el patrón de fase reducida se observa una distribución simétrica con respecto al eje  $s_3$  de singularidades de fase con carga topológica  $+1$  y  $-1$ . En la región interior del haz, las singularidades aparecen por pares, mientras que en la región exterior aparecen solas. También se puede observar que a los costados del haz en la región  $25 < s_3 < 35$  aparece una secuencia de singularidades, algo que no se observa en el patrón de fase reducida del haz paraxial (ver Figura 4.1).



## 4.2.2. 3D

El haz tridimensional está dado por:

$$\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_A dk_{s_1} dk_{s_2} \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{s}}, \quad (4.38)$$

donde,

$$\mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) = e^{(a_1 - i|k_{s_1}|)^{3/3} (a_2 - i|k_{s_2}|)^{3/3}}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{k}_s = k_{s_1} \hat{\mathbf{s}}_1 + k_{s_2} \hat{\mathbf{s}}_2 + k_{s_3} \hat{\mathbf{s}}_3, \quad (4.40)$$

$$k_{s_1} = k_x x_0, \quad k_{s_2} = k_y x_0 \quad \text{y} \quad k_{s_3} = \sqrt{\left(\frac{n\omega x_0}{c}\right)^2 - k_{s_1}^2 - k_{s_2}^2}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{s} = s_1 \hat{\mathbf{s}}_1 + s_2 \hat{\mathbf{s}}_2 + s_3 \hat{\mathbf{s}}_3, \quad (4.42)$$

$$s_1 = \frac{x}{x_0}, \quad s_2 = \frac{y}{x_0} \quad \text{y} \quad s_3 = \frac{z}{x_0}. \quad (4.43)$$

En el cálculo numérico sólo se toman las raíces reales de  $k_{s_3}$ , por lo que los valores de  $k_{s_1}$  y  $k_{s_2}$  se restringen a la región circular  $A$  dada por

$$k_{s_1}^2 + k_{s_2}^2 \leq \left(\frac{n\omega x_0}{c}\right)^2. \quad (4.44)$$

Si se introdujeran las raíces imaginarias, éstas se interpretan como la absorción de la luz por el medio. La condición (4.44) permite considerar sólo aquellas ondas planas, con número de onda  $k$ , que contribuyen a la realización del haz. Es posible reducir los límites de integración en (4.38) al analizar la paridad del integrando. Ya que  $\mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2})$  y  $k_{s_3}$  son funciones con paridad par en  $k_{s_1}$  y  $k_{s_2}$ , y al desarrollar  $e^{i(k_{s_1} s_1 + k_{s_2} s_2)}$ , los límites de integración se reducen a la región positiva  $A_0$  de la región  $A$ :

$$\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{\pi^2} \int_{A_0} dk_{s_1} dk_{s_2} \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) \cos(k_{s_1} s_1) \cos(k_{s_2} s_2) e^{ik_{s_3} s_3}. \quad (4.45)$$

Desarrollando la expresión (4.39) (se omiten los valores absolutos ya que  $k_{s_1}$  y  $k_{s_2}$  son positivos), se obtiene:

$$\mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) = e^{\left(\frac{a_1^3}{3} - ia_1^2 k_{s_1} - a_1 k_{s_1}^2 + i \frac{k_{s_1}^3}{3}\right)} e^{\left(\frac{a_2^3}{3} - ia_2^2 k_{s_2} - a_2 k_{s_2}^2 + i \frac{k_{s_2}^3}{3}\right)} \quad (4.46)$$

$$= e^{\frac{1}{3}(a_1^3 + a_2^3)} e^{-a_1 k_{s_1}^2 - a_2 k_{s_2}^2} e^{i\left(\frac{k_{s_1}^3}{3} + \frac{k_{s_2}^3}{3} - a_1^2 k_{s_1} - a_2^2 k_{s_2}\right)}, \quad (4.47)$$

que al sustituirse en (4.45), resulta:

$$\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3) = \frac{e^{\frac{1}{3}(a_1^3 + a_2^3)}}{\pi^2} \int_0^{k_s} dk_{s_2} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_2}^2}} dk_{s_1} e^{-a_1 k_{s_1}^2 - a_2 k_{s_2}^2} \cos(k_{s_1} s_1) \cos(k_{s_2} s_2) \quad (4.48)$$

$$\cdot e^{i\left(\frac{k_{s_1}^3}{3} + \frac{k_{s_2}^3}{3} - a_1^2 k_{s_1} - a_2^2 k_{s_2} + k_{s_3} s_3\right)}, \quad (4.49)$$

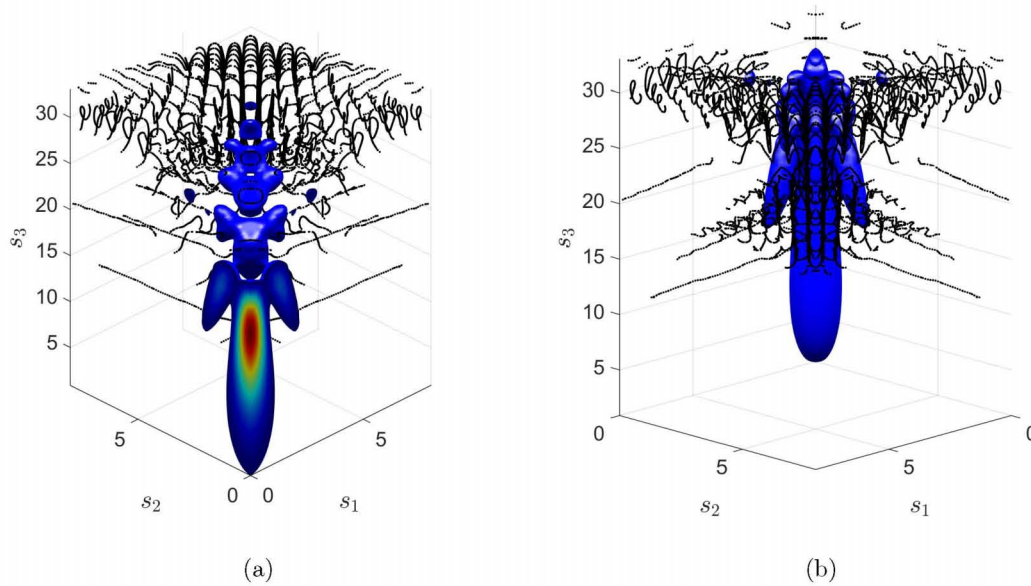


Figura 4.7: Isointensidades (0.03) y curvas de ceros del haz Airy simétrico tridimensional no paraxial con  $a = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ . En (a) se incluyen las intensidades de los cortes del haz con los planos  $s_1\zeta$  y  $s_2\zeta$ , donde el color rojo indica el valor máximo de intensidad. (b) corresponde a la vista posterior de (a).

donde  $k_s = kx_0$  es el número de onda escalado por  $x_0$ .

En la Figura 4.7 se ilustra una superficie de isointensidad, además de los ceros del haz Airy simétrico tridimensional no paraxial en una región positiva del espacio  $(s_1, s_2, s_3)$  con  $a = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ . Se observa que las líneas de ceros de este haz tienen la opción de curvarse o formar lazos (*loops*), en contraste con las líneas rectas obtenidas en el caso paraxial. A veces se relacionan los circuitos con la teoría de nudos, aunque en este caso los nudos presentan estructuras de circuitos cerrados muy simples. A pesar de las diferencias en las formas de las curvas de ceros entre este caso y el paraxial, es posible notar un comportamiento similar en ambos casos: en la región cercana a la cúspide del haz, se tienen líneas de ceros que se aproximan a esta en la dirección paralela al eje  $s_1$  y  $s_2$ . En la Figura 4.8 se ilustran los ceros del haz en perspectivas diferentes, donde es posible distinguir singularidades de lazo alrededor del eje  $s_3$ .

En la Figura 4.9 se ilustra una singularidad de lazo aislada del resto de singularidades, que se usará para observar el comportamiento de las variables dinámicas cerca de la singularidad. Nótese que los lazos pueden tener dimensiones comparables y aún menores a la longitud de onda del haz, lo que lo hace interesante desde el punto de vista físico o topológico. La detección de estas estructuras mediante los mecanismos descritos en capítulos anteriores es muy complicada. Una pregunta interesante es: ¿es posible detectar las singularidades con la dinámica de nanopartículas en este sistema?. En este contexto, se analizan en mayor detalle las propiedades del campo electromagnético cerca de los ceros del haz Airy simétrico no paraxial.

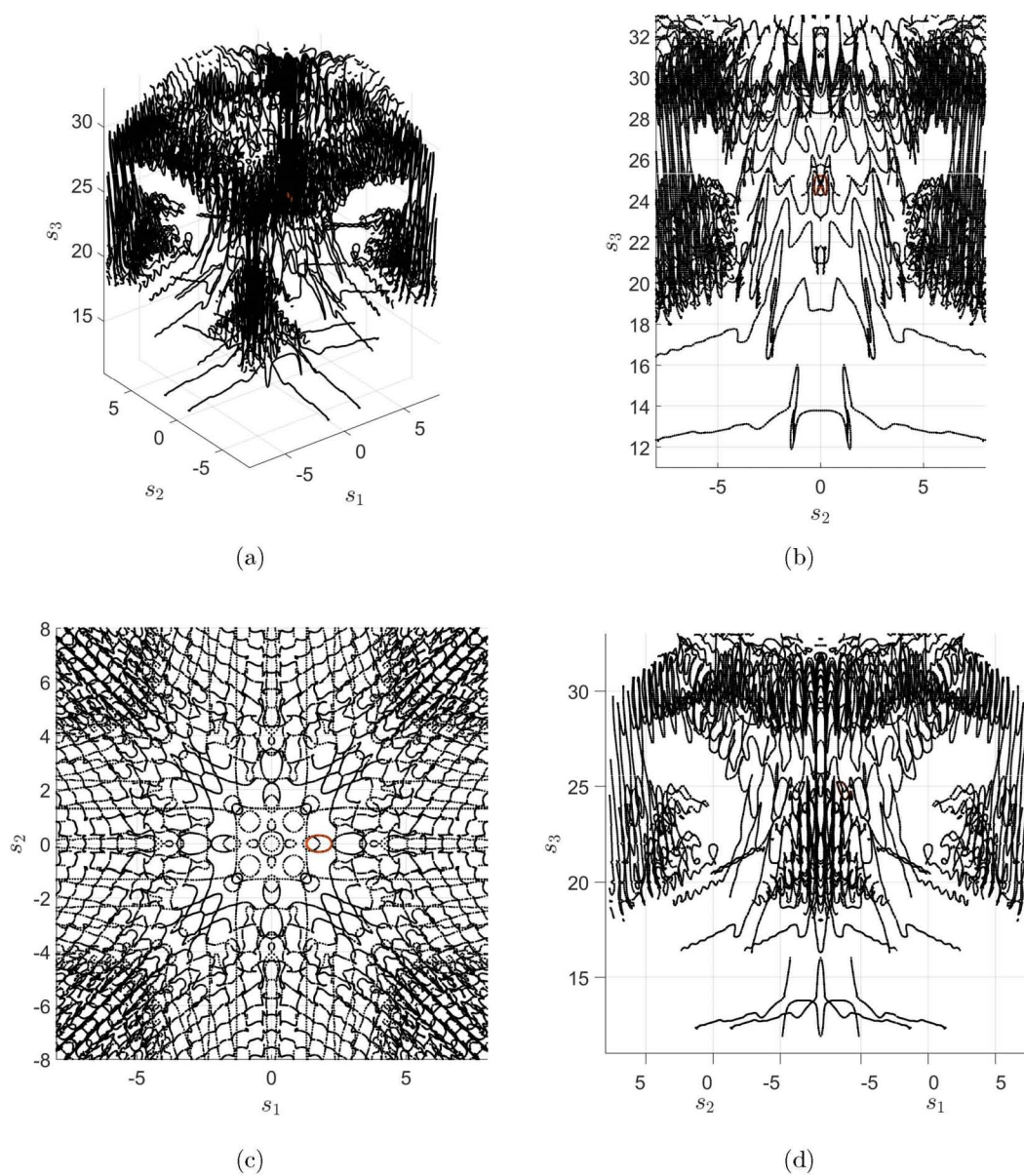


Figura 4.8: Ceros del haz Airy simétrico tridimensional no paraxial en perspectivas diferentes, con  $a = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ . En todas las figuras se incluye en color naranja la singularidad de lazo que se estudia en la siguiente sección.

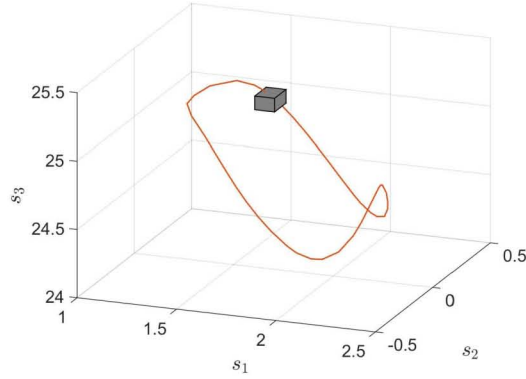


Figura 4.9: Singularidad de lazo en el interior del haz. Además, se incluye la región cúbica donde se estudian las variables dinámicas.

### 4.3. Ondas electromagnéticas Airy simétricas

#### 4.3.1. Campo eléctrico

Hasta el momento el análisis del haz Airy simétrico se ha hecho como si la luz correspondiese a un campo escalar. Sin embargo, la luz son ondas electromagnéticas asociadas a campos eléctricos y campos magnéticos con más de una componente. Una forma de construir estos campos eléctricos a partir de los campos escalares se describe a continuación: si  $\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3)$  corresponde a la dirección del campo eléctrico en una dirección  $s_1$ , existe un campo complementario en la dirección  $s_3$ , y ambos campos están relacionados por la ley de Gauss en ausencia de cargas eléctricas en el haz:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.50)$$

la cual se reescribe como:

$$\partial_{s_1} E_{s_1} = -\partial_{s_3} E_{s_3}. \quad (4.51)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior y haciendo el despeje necesario, se obtiene:

$$\mathfrak{T}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) = -\frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}), \quad (4.52)$$

donde  $\mathfrak{T}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2})$  es semejante a la transformada de Fourier de  $E_{s_3}$ . De la ecuación (4.38) se obtiene  $E_{s_3}$  como:

$$E_{s_3}(s_1, s_2, s_3) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_A dk_{s_1} dk_{s_2} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}}. \quad (4.53)$$

Obsérvese que en el caso en que el soporte involucre valores con  $k_{s_1} < k_{s_3}$ , entonces  $|E_{s_3}| < |E_{s_1}|$ . Debido a la presencia de  $k_{s_1}$  en el integrando de la ecuación anterior y la paridad de  $k_{s_3}$  en  $k_{s_1}$  y  $k_{s_2}$ , la expresión de  $E_{s_3}$  se reduce a la siguiente:

$$E_{s_3}(s_1, s_2, s_3) = -\frac{i}{\pi^2} \int_{A_0} dk_{s_1} dk_{s_2} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} \mathfrak{S}_{a_1, a_2}^{(2)}(k_{s_1}, k_{s_2}) e^{ik_{s_3}s_3} \text{sen}(k_{s_1}s_1) \cos(k_{s_2}s_2), \quad (4.54)$$

donde  $A_0$  representa la región positiva de la superficie  $A$ . Al sustituir (4.47) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$E_{s_3}(s_1, s_2, s_3) = -\frac{i}{\pi^2} e^{\frac{1}{3}(a_1^3 + a_2^3)} \int_{A_0} dk_{s_1} dk_{s_2} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} e^{-a_1 k_{s_1}^2 - a_2 k_{s_2}^2} \text{sen}(k_{s_1}s_1) \cos(k_{s_2}s_2) \quad (4.55)$$

$$\cdot e^{i\left(\frac{k_{s_1}^3}{3} + \frac{k_{s_2}^3}{3} - a_1^2 k_{s_1} - a_2^2 k_{s_2} + k_{s_3}s_3\right)}. \quad (4.56)$$

Otras opciones de polarización, por ejemplo polarización circular, se pueden generalizar de manera semejante mediante la aplicación de la ley de Gauss, donde ahora habría que tomar las componentes del campo  $E_{s_1}$  y  $E_{s_2}$ .

En el caso bidimensional  $E_{s_3}$  está dado por:

$$E_{s_3} = -\frac{i}{\pi} e^{\frac{a_1^3}{3}} \int_0^{k_s} dk_{s_1} \frac{k_{s_1}}{k_{s_3}} e^{-a_1 k_{s_1}^2} \text{sen}(k_{s_1}s_1) e^{i\left(\frac{k_{s_1}^3}{3} - a_1^2 k_{s_1} + k_{s_3}s_3\right)}. \quad (4.57)$$

En La Figura 4.10 se ilustra el patrón de intensidad y de fase reducida asociada a la componente  $E_{s_3}$  del campo eléctrico con  $a = 0.05$ . Al comparar las intensidades de  $E_{s_1}$  y  $E_{s_3}$ , se observa que  $|E_{s_1}|^2 > |E_{s_3}|^2$ , lo que no produce cambios mayores en las zonas de mayor intensidad del haz vectorial, mientras que las zonas oscuras de  $E_{s_1}$  ya no lo serán en el haz vectorial, debido a la presencia de componentes de  $E_{s_3}$ .

### 4.3.2. Campo magnético

Para haces monocromáticos, el campo magnético se obtiene usando la ecuación de Faraday, cf. ecuación (1.3),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.58)$$

$$= i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad \text{si} \quad \mathbf{B} \sim e^{-i\omega t}. \quad (4.59)$$

De la ecuación anterior se obtiene que el campo magnético  $\mathbf{B}$  está dado por:

$$\mathbf{B} = -i \frac{c}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (4.60)$$

Para el rotacional de  $\mathbf{E}$ , se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{s}_1(\partial_{s_2} E_{s_3}) - \hat{s}_2(\partial_{s_1} E_{s_3} - \partial_{s_3} E_{s_1}) + \hat{s}_3(-\partial_{s_2} E_{s_1}), \quad (4.61)$$

donde,

$$\begin{aligned} \partial_{s_2} E_{s_3} &= \partial_{s_2} \Re(E_{s_3}) + i \partial_{s_2} \Im(E_{s_3}), \\ \partial_{s_3} E_{s_1} - \partial_{s_1} E_{s_3} &= \partial_{s_3} \Re(E_{s_1}) - \partial_{s_1} \Re(E_{s_3}) + i[\partial_{s_3} \Im(E_{s_1}) - \partial_{s_1} \Im(E_{s_3})], \end{aligned}$$

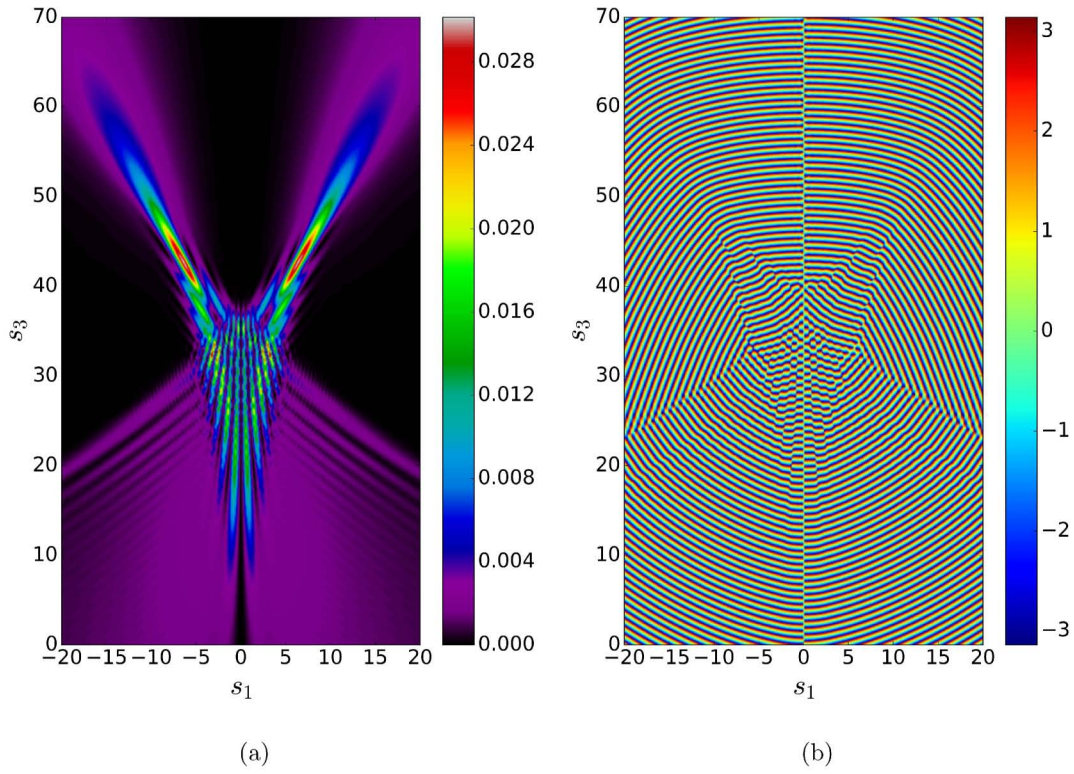


Figura 4.10: Patrón de (a) intensidad, y (b) fase reducida de  $E_{s_3}$  asociado al haz Airy simétrico bidimensional no paraxial, con  $a = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ .

$$\partial_{s_2} E_{s_1} = \partial_{s_2} \Re(E_{s_1}) + i \partial_{s_2} \Im(E_{s_1}).$$

Por lo que las componentes de  $\mathbf{B}$  están dadas por:

$$\Re(B_{s_1}) = \frac{c}{\omega} \partial_{s_2} \Im(E_{s_3}), \quad (4.62)$$

$$\Im(B_{s_1}) = -\frac{c}{\omega} \partial_{s_2} \Re(E_{s_3}), \quad (4.63)$$

$$\Re(B_{s_2}) = \frac{c}{\omega} [\partial_{s_3} \Im(E_{s_1}) - \partial_{s_1} \Im(E_{s_3})], \quad (4.64)$$

$$\Im(B_{s_2}) = -\frac{c}{\omega} [\partial_{s_3} \Re(E_{s_1}) - \partial_{s_1} \Re(E_{s_3})], \quad (4.65)$$

$$\Re(B_{s_3}) = -\frac{c}{\omega} \partial_{s_2} \Im(E_{s_1}), \quad (4.66)$$

$$\Im(B_{s_3}) = \frac{c}{\omega} \partial_{s_2} \Re(E_{s_1}). \quad (4.67)$$

De las expresiones anteriores, se observa que es necesario encontrar los gradientes de  $\mathbf{E}$ , los cuales se muestran en la sección A del Apéndice.

### 4.3.3. Variables dinámicas

El análisis de las variables dinámicas del haz permitirá conocer el comportamiento de partículas cerca de las singularidades, lo que podría posibilitar la detección de estas. De aquí en adelante, se estudia una región cúbica de la singularidad de lazo ilustrada en la Figura 4.9.

#### 4.3.3.1. Vector de Poynting

Retomando la ecuación (1.38), se tiene la siguiente expresión del vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (4.68)$$

la cual se obtiene con las componentes reales del campo electromagnético, por lo que recibe el nombre de vector de Poynting físico. Suponiendo que el material tiene respuesta magnética no observable, entonces  $\mathbf{H} \approx \mathbf{B}$  ya que  $\mu \approx 1$ . Por lo que el vector de Poynting físico está dado por:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4.69)$$

Tomando  $\mathbf{E} = E_{s_1}\hat{\mathbf{s}}_1 + E_{s_3}\hat{\mathbf{s}}_3$  y  $\mathbf{B} = B_{s_1}\hat{\mathbf{s}}_1 + B_{s_2}\hat{\mathbf{s}}_2 + B_{s_3}\hat{\mathbf{s}}_3$ , donde cada componente es compleja, se obtiene el siguiente vector de Poynting físico:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left\{ [\Re(E_{s_1})\hat{\mathbf{s}}_1 + \Re(E_{s_3})\hat{\mathbf{s}}_3] \times [\Re(B_{s_1})\hat{\mathbf{s}}_1 + \Re(B_{s_2})\hat{\mathbf{s}}_2 + \Re(B_{s_3})\hat{\mathbf{s}}_3] \right\} \quad (4.70)$$

$$= \frac{c}{4\pi} \left\{ -\Re(E_{s_3})\Re(B_{s_2})\hat{\mathbf{s}}_1 + [\Re(E_{s_3})\Re(B_{s_1}) - \Re(E_{s_1})\Re(B_{s_3})]\hat{\mathbf{s}}_2 + \Re(E_{s_1})\Re(B_{s_2})\hat{\mathbf{s}}_3 \right\}. \quad (4.71)$$

Estas expresiones tienen una dependencia temporal dada por la frecuencia, que en el espectro visible corresponden a  $\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , por eso las variables dinámicas se calculan con promedios. El vector de Poynting promediado temporalmente está dado por:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*). \quad (4.72)$$

Considerando el campo electromagnético complejo, se obtienen las siguientes componentes del vector de Poynting promediado temporalmente:

$$S_{s_1} = \frac{c}{8\pi} [-\Re(E_{s_3})\Re(B_{s_2}) - \Im(E_{s_3})\Im(B_{s_2})], \quad (4.73)$$

$$S_{s_2} = \frac{c}{8\pi} [\Re(E_{s_3})\Re(B_{s_1}) + \Im(E_{s_3})\Im(B_{s_1}) - \Re(E_{s_1})\Re(B_{s_3}) - \Im(E_{s_1})\Im(B_{s_3})], \quad (4.74)$$

$$S_{s_3} = \frac{c}{8\pi} [\Re(E_{s_1})\Re(B_{s_2}) + \Im(E_{s_1})\Im(B_{s_2})]. \quad (4.75)$$

En la Figura 4.11 se ilustran los vectores de Poynting físicos y promediados en el tiempo para la región de interés.

#### 4.3.3.2. Densidad de momento angular

De las ecuaciones (1.58) y (1.59), se tienen las siguientes densidades de momento angular orbital ( $\ell_o$ ) y de espín ( $\ell_s$ ):

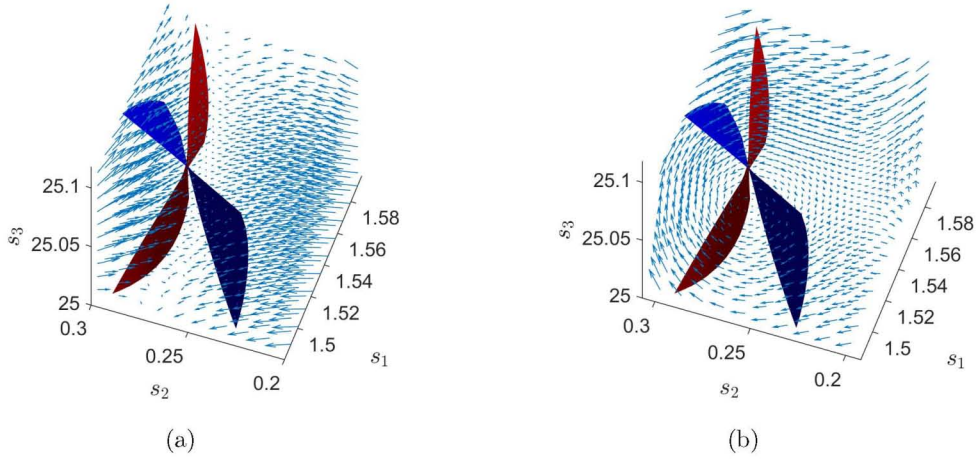


Figura 4.11: Vector de Poynting (a) físico, y (b) promedio temporal en la sección de interés. Se incluyen los isoceros del haz Airy simétrico no paraxial en esa región (■  $\rightarrow \Re(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ , ■  $\rightarrow \Im(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ). Se usó  $a_1 = a_2 = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ .

$$\boldsymbol{\ell}_o = \frac{\epsilon}{4\pi c} E_i(\mathbf{r} \times \nabla) A_i, \quad (4.76)$$

$$\boldsymbol{\ell}_s = \frac{\epsilon}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \quad (4.77)$$

Suponiendo que el potencial vectorial magnético ( $\mathbf{A}$ ) es armónico y usando la norma de Coulomb, se tiene que el campo eléctrico y el potencial vectorial magnético están relacionados por  $c\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}$ , que al sustituirlo en las expresiones anteriores, y tomar el promedio temporal de estas, se obtiene:

$$\boldsymbol{\ell}_o = \frac{\epsilon}{8i\pi\omega} E_j^*(\mathbf{r} \times \nabla) E_j, \quad (4.78)$$

$$\boldsymbol{\ell}_s = \frac{\epsilon}{8i\pi\omega} \mathbf{E}^* \times \mathbf{E}. \quad (4.79)$$

Usando las ecuaciones anteriores para el campo eléctrico  $\mathbf{E} = E_{s_1} \hat{\mathbf{s}}_1 + E_{s_3} \hat{\mathbf{s}}_3$ , que únicamente tiene componentes en  $s_1$  y  $s_3$ , se obtiene:

$$\Re(\boldsymbol{\ell}_o^{s_1}) = \frac{\epsilon}{8\pi\omega} \left\{ \Re(E_{s_1}) [s_2 \partial_{s_3} \Im(E_{s_1}) - s_3 \partial_{s_2} \Im(E_{s_1})] \right. \quad (4.80)$$

$$\left. - \Im(E_{s_1}) [s_2 \partial_{s_3} \Re(E_{s_1}) - s_3 \partial_{s_2} \Re(E_{s_1})] \right. \quad (4.81)$$

$$\left. + \Re(E_{s_3}) [s_2 \partial_{s_3} \Im(E_{s_3}) - s_3 \partial_{s_2} \Im(E_{s_3})] \right. \quad (4.82)$$

$$\left. - \Im(E_{s_3}) [s_2 \partial_{s_3} \Re(E_{s_3}) - s_3 \partial_{s_2} \Re(E_{s_3})] \right\}, \quad (4.83)$$



$$\Re(\ell_o^{s_2}) = \frac{\epsilon}{8\pi\omega} \left\{ \Re(E_{s_1}) [s_3 \partial_{s_1} \Im(E_{s_1}) - s_1 \partial_{s_3} \Im(E_{s_1})] \right. \quad (4.84)$$

$$\left. - \Im(E_{s_1}) [s_3 \partial_{s_1} \Re(E_{s_1}) - s_1 \partial_{s_3} \Re(E_{s_1})] \right. \quad (4.85)$$

$$+ \Re(E_{s_3}) [s_3 \partial_{s_1} \Im(E_{s_3}) - s_1 \partial_{s_3} \Im(E_{s_3})] \quad (4.86)$$

$$\left. - \Im(E_{s_3}) [s_3 \partial_{s_1} \Re(E_{s_3}) - s_1 \partial_{s_3} \Re(E_{s_3})] \right\}, \quad (4.87)$$

$$\Re(\ell_o^{s_3}) = \frac{\epsilon}{8\pi\omega} \left\{ \Re(E_{s_1}) [s_1 \partial_{s_2} \Im(E_{s_1}) - s_2 \partial_{s_1} \Im(E_{s_1})] \right. \quad (4.88)$$

$$\left. - \Im(E_{s_1}) [s_1 \partial_{s_2} \Re(E_{s_1}) - s_2 \partial_{s_1} \Re(E_{s_1})] \right. \quad (4.89)$$

$$+ \Re(E_{s_3}) [s_1 \partial_{s_2} \Im(E_{s_3}) - s_2 \partial_{s_1} \Im(E_{s_3})] \quad (4.90)$$

$$\left. - \Im(E_{s_3}) [s_1 \partial_{s_2} \Re(E_{s_3}) - s_2 \partial_{s_1} \Re(E_{s_3})] \right\}, \quad (4.91)$$

$$\Im(\ell_o^{s_1}) = -\frac{\epsilon}{8\pi\omega} \left\{ \Re(E_{s_1}) [s_2 \partial_{s_3} \Re(E_{s_1}) - s_3 \partial_{s_2} \Re(E_{s_1})] \right. \quad (4.92)$$

$$+ \Im(E_{s_1}) [s_2 \partial_{s_3} \Im(E_{s_1}) - s_3 \partial_{s_2} \Im(E_{s_1})] \quad (4.93)$$

$$+ \Re(E_{s_3}) [s_2 \partial_{s_3} \Re(E_{s_3}) - s_3 \partial_{s_2} \Re(E_{s_3})] \quad (4.94)$$

$$\left. + \Im(E_{s_3}) [s_2 \partial_{s_3} \Im(E_{s_3}) - s_3 \partial_{s_2} \Im(E_{s_3})] \right\}, \quad (4.95)$$

$$\Im(\ell_o^{s_2}) = -\frac{\epsilon}{8\pi\omega} \left\{ \Re(E_{s_1}) [s_3 \partial_{s_1} \Re(E_{s_1}) - s_1 \partial_{s_3} \Re(E_{s_1})] \right. \quad (4.96)$$

$$+ \Im(E_{s_1}) [s_3 \partial_{s_1} \Im(E_{s_1}) - s_1 \partial_{s_3} \Im(E_{s_1})] \quad (4.97)$$

$$+ \Re(E_{s_3}) [s_3 \partial_{s_1} \Re(E_{s_3}) - s_1 \partial_{s_3} \Re(E_{s_3})] \quad (4.98)$$

$$\left. + \Im(E_{s_3}) [s_3 \partial_{s_1} \Im(E_{s_3}) - s_1 \partial_{s_3} \Im(E_{s_3})] \right\}, \quad (4.99)$$

$$\Im(\ell_o^{s_3}) = -\frac{\epsilon}{8\pi\omega} \left\{ \Re(E_{s_1}) [s_1 \partial_{s_2} \Re(E_{s_1}) - s_2 \partial_{s_1} \Re(E_{s_1})] \right. \quad (4.100)$$

$$+ \Im(E_{s_1}) [s_1 \partial_{s_2} \Im(E_{s_1}) - s_2 \partial_{s_1} \Im(E_{s_1})] \quad (4.101)$$

$$+ \Re(E_{s_3}) [s_1 \partial_{s_2} \Re(E_{s_3}) - s_2 \partial_{s_1} \Re(E_{s_3})] \quad (4.102)$$

$$\left. + \Im(E_{s_3}) [s_1 \partial_{s_2} \Im(E_{s_3}) - s_2 \partial_{s_1} \Im(E_{s_3})] \right\}. \quad (4.103)$$

En la Figura 4.12 se ilustra la densidad de momento angular orbital en la región de interés. Debido a que en el ejemplo que se está trabajando sólo hay dos componentes del campo eléctrico, sólo se obtiene una componente no nula de la densidad de momento angular de espín:

$$\ell_s^{s_1} = 0, \quad (4.104)$$

$$\ell_s^{s_2} = \frac{\epsilon}{4\pi\omega} \left[ \Re(E_{s_3}) \Im(E_{s_1}) - \Im(E_{s_3}) \Re(E_{s_1}) \right], \quad (4.105)$$

$$\ell_s^{s_3} = 0. \quad (4.106)$$

En la Figura 4.13 se ilustra la componente real de la densidad de momento angular de espín en la región de interés.

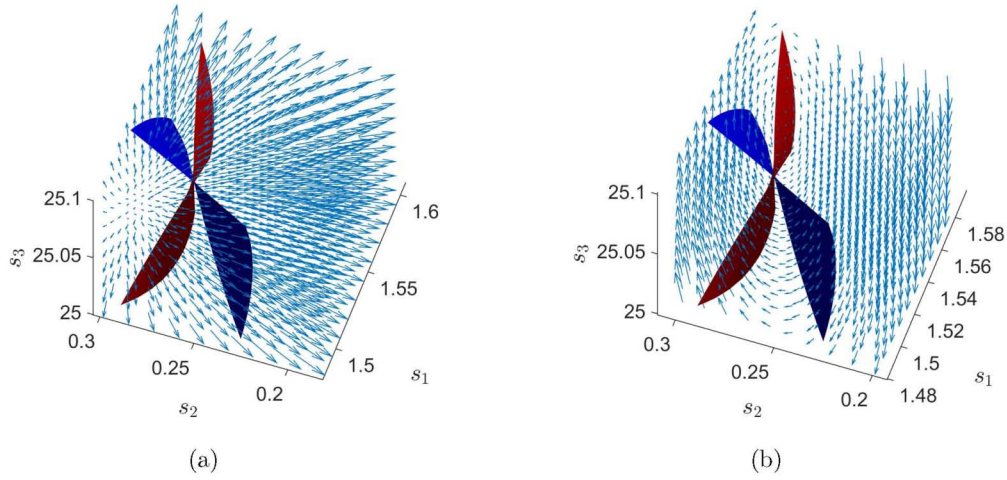


Figura 4.12: (a) Parte real y (b) parte imaginaria de la densidad de momento angular orbital, y equiceros de  $E_{s_1}$  ( $\blacksquare \rightarrow \Re(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ,  $\blacksquare \rightarrow \Im(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ). Se usó  $a_1 = a_2 = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ .

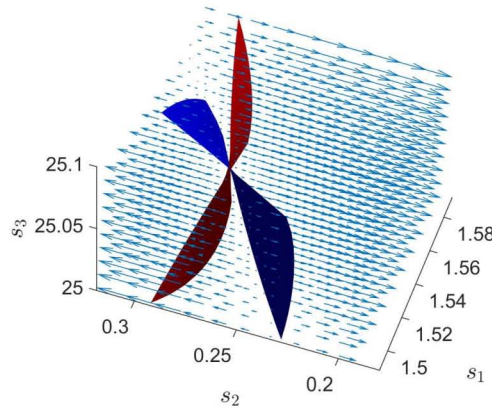


Figura 4.13: Densidad de momento angular de espín y equiceros de  $E_{s_1}$  ( $\blacksquare \rightarrow \Re(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ,  $\blacksquare \rightarrow \Im(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ). Se usó  $a_1 = a_2 = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ .

#### 4.3.3.3. Fuerzas de Gradiente

La detección de vórtices ópticos podría no ser trivial para un haz Airy simétrico mediante procedimientos meramente ópticos, como se mencionó en la sección anterior. Una opción sería analizar el comportamiento de partículas pequeñas, con respecto a la longitud de onda del haz (*e.g.* nanopartículas), inmersas en un haz Airy simétrico. Aunque no es la finalidad principal de esta tesis, a continuación se describe el comportamiento esperado de la fuerza de carácter conservativo que experimenta una partícula con momento dipolar al interactuar con un haz Airy

simétrico. Esta se calcula en términos de la llamada fuerza de gradiente, *cf.* ecuación (1.77), que en notación indicial se reescribe como:

$$F_i = \alpha \Re(E_j^* \nabla_i E_j) \quad (4.107)$$

$$= \alpha [\Re(E_j) \nabla_i \Re(E_j) + \Im(E_j) \nabla_i \Im(E_j)]. \quad (4.108)$$

De la ecuación anterior, se obtiene para el campo eléctrico en consideración las siguientes componentes de la fuerza de gradiente escaladas por la polarizabilidad isotrópica  $\alpha$ :

$$F_{s_1} = \Re(E_{s_1}) \partial_{s_1} \Re(E_{s_1}) + \Im(E_{s_1}) \partial_{s_1} \Im(E_{s_1}) + \Re(E_{s_3}) \partial_{s_1} \Re(E_{s_3}) + \Im(E_{s_3}) \partial_{s_1} \Im(E_{s_3}), \quad (4.109)$$

$$F_{s_2} = \Re(E_{s_1}) \partial_{s_2} \Re(E_{s_1}) + \Im(E_{s_1}) \partial_{s_2} \Im(E_{s_1}) + \Re(E_{s_3}) \partial_{s_2} \Re(E_{s_3}) + \Im(E_{s_3}) \partial_{s_2} \Im(E_{s_3}), \quad (4.110)$$

$$F_{s_3} = \Re(E_{s_1}) \partial_{s_3} \Re(E_{s_1}) + \Im(E_{s_1}) \partial_{s_3} \Im(E_{s_1}) + \Re(E_{s_3}) \partial_{s_3} \Re(E_{s_3}) + \Im(E_{s_3}) \partial_{s_3} \Im(E_{s_3}). \quad (4.111)$$

En la Figura 4.14 se ilustran las fuerzas de gradiente escaladas por  $\alpha$  en la región de interés de la singularidad de lazo.

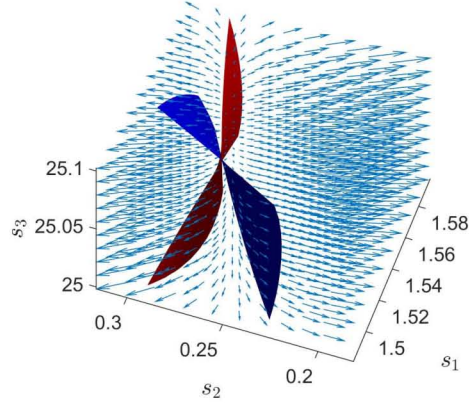


Figura 4.14: Fuerzas de gradiente escaladas por  $\alpha$  y equiceros de  $E_{s_1}$  ( $\blacksquare \rightarrow \Re(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ,  $\blacksquare \rightarrow \Im(\Phi_{a_1, a_2}^{(2)}(s_1, s_2, s_3))$ ). Se usó  $a_1 = a_2 = 0.05$  y  $x_0 = 1 \mu\text{m}$ .

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo mostramos parte de la riqueza geométrica y dinámica de los haces de luz estructurados. Nos concentramos en los haces Airy simétricos debido a su reciente realización experimental y a su simple realización matemática. Vimos que estos haces poseen singularidades ópticas con una configuración muy diferente a la ya estudiada para los haces más cercanos, *i.e.* los haces Airy y los haces Pearcey. Entre otras cosas, mostramos que el carácter vectorial del campo electromagnético permite observar efectos para haces de luz no paraxiales, que difieren enormemente de los que se obtienen en el límite paraxial unido a la descripción escalar. Resalta en este contexto la presencia de circuitos asociados a las líneas de vorticidad, y que pueden configurarse a una escala menor que la de la longitud de onda de la luz. Estos circuitos son simples lazos. Cabe la pregunta de si es posible generar haces de luz donde los circuitos posean una riqueza estructural aún mayor, y describible por teorías matemáticas como la de nudos.

La riqueza topológica va unida a distribuciones no triviales del campo electromagnético. Dada la complejidad en la detección mediante técnicas puramente ópticas de circuitos o líneas con cambios bruscos de dirección, como en el capítulo 2, consideramos que sería muy importante analizar ésta detección al observar la dinámica de nanopartículas interactuando con haces de luz simétricos. Hemos iniciado estudios teórico-experimentales en esta dirección con el Dr. Pedro Quinto Su y esperamos poder obtener resultados concluyentes pronto.



## Apéndice A

# Gradientes del campo eléctrico

A continuación se muestran las expresiones de los gradientes de  $\mathbf{E}$ , que en total son 12. El tratamiento se da por separado para cada componente, la cual consta de una parte real y una imaginaria. Se introducen los siguientes valores para reducir la expresión de los gradientes.

$$C = \frac{e^{\frac{1}{8}(a_1^3 + a_2^3)}}{\pi^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha = a_1 k_{s_1}^2 + a_2 k_{s_2}^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\beta = \frac{k_{s_1}^3}{3} + \frac{k_{s_2}^3}{3} - a_1^2 k_{s_1} - a_2^2 k_{s_2} + k_{s_3} s_3, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_1 = k_{s_1} s_1, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma_2 = k_{s_2} s_2. \quad (\text{A.5})$$

### A.1. $\partial_{s_1} E_{s_1}$

$$\partial_{s_1} E_{s_1}(s_1, s_2, s_3) = -C \int_0^{k_s} dk_{s_1} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}} dk_{s_2} k_{s_1} e^{-\alpha} e^{i\beta} \text{sen}(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \quad (\text{A.6})$$

### A.2. $\partial_{s_2} E_{s_1}$

$$\partial_{s_2} E_{s_1}(s_1, s_2, s_3) = -C \int_0^{k_s} dk_{s_1} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}} dk_{s_2} k_{s_2} e^{-\alpha} e^{i\beta} \cos(\gamma_1) \text{sen}(\gamma_2) \quad (\text{A.7})$$

**A.3.**  $\partial_{s_3} E_{s_1}$ 

$$\partial_{s_3} E_{s_1}(s_1, s_2, s_3) = iC \int_0^{k_s} dk_{s_1} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}} dk_{s_2} k_{s_3} e^{-\alpha} e^{i\beta} \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \quad (\text{A.8})$$

**A.4.**  $\partial_{s_1} E_{s_3}$ 

$$\partial_{s_1} E_{s_3}(s_1, s_2, s_3) = -iC \int_0^{k_s} dk_{s_1} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}} dk_{s_2} \frac{k_{s_1}^2}{k_{s_3}} e^{-\alpha} e^{i\beta} \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \quad (\text{A.9})$$

**A.5.**  $\partial_{s_2} E_{s_3}$ 

$$\partial_{s_2} E_{s_3}(s_1, s_2, s_3) = iC \int_0^{k_s} dk_{s_1} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}} dk_{s_2} \frac{k_{s_1} k_{s_2}}{k_{s_3}} e^{-\alpha} e^{i\beta} \sen(\gamma_1) \sen(\gamma_2) \quad (\text{A.10})$$

**A.6.**  $\partial_{s_3} E_{s_3}$ 

$$\partial_{s_3} E_{s_3}(s_1, s_2, s_3) = C \int_0^{k_s} dk_{s_1} \int_0^{\sqrt{k_s^2 - k_{s_1}^2}} dk_{s_2} k_{s_1} e^{-\alpha} e^{i\beta} \sen(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \quad (\text{A.11})$$

Se observa que las derivadas parciales en  $s_1$  de  $E_{s_1}$  son iguales al negativo de las derivadas parciales en  $s_3$  de  $E_{s_3}$ , lo que se esperaba por la deducción de esta última. Lo anterior se toma en cuenta en el cálculo numérico, para no repetir cálculos.

# Bibliografía

- [1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism, Volume I*, Clarendon Press (1873).
- [2] H. Hertz, *Electric Waves Being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity Through Space*, London Macmillan (1893).
- [3] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc, 2nd ed. (1975).
- [4] P. C. Clemmow, *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields*, Oxford University Press (1996).
- [5] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc, 2nd ed. (2008).
- [6] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company Publishers, 3rd ed. (2005).
- [7] G. J. Gbur, *Mathematical Methods for Optical Physics and Engineering*, Cambridge University Press (2011).
- [8] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods of Physicists*, Elsevier Academic Press, 6th ed. (2005).
- [9] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books (1986).
- [10] A. Forbes, *Laser Beam Propagation: Generation and Propagation of Customized Light*, CRC Press (2014).
- [11] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons, Inc, 2nd Edition (2007).
- [12] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 3rd ed. (1999).
- [13] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press (1995).
- [14] A. Ashkin, "Acceleration and trapping of particles by radiation pressure", *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156-159 (1970).
- [15] Y. Harada and T. Asakura, "Radiation forces on a dielectric sphere in the Rayleigh scattering regime", *Optics Comm.* **124**, 529-541 (1996).
- [16] M. R. Dennis, K. O'Holleran and M. Padgett, "Singular Optics: Optical Vortices and Polarization Singularities," *Progress in Optics, Volume 53*, 293-363 (2009).



- [17] L. Tarásov y A. Tarásova, *Charlas sobre la refracción de la luz*, Editorial Mir Moscú (1985).
- [18] M. V. Berry, "Singularities in waves and rays", R. Balian et al. eds., 453-543, North Holland (1981).
- [19] J. F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations*, Taylor & Francis (1999).
- [20] J. F. Nye and M. V. Berry, "Dislocations in wave trains", Proc. R. Soc. Lond. A **336**, 165-190 (1974).
- [21] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw and J. P. Woerdman, "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes", Phys. Rev. A **45**, 8185-8189 (1992).
- [22] G. J. Gbur, *Singular Optics* (Taylor & Francis, 2017).
- [23] M. V. Berry, "Making waves in physics: three wave singularities from the miraculous 1830s", Nature **403**, 21 (2000).
- [24] J. Proudman and A. T. Doodson, "The principal constituent of the tides of the north sea", Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, **224** 185-219 (1924).
- [25] M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, "Singular Optics", *Progress in Optics, Volume 42*, 219-276, North Holland (2001).
- [26] H. C. Rosu, "On Wolter's vortex in total reflection", Revista Mexicana de Física **43**, 240-247 (1997).
- [27] A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press (1954).
- [28] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon (1959).
- [29] M. V. Berry and C. Upstill, "Catastrophe Optics: Morphologies of caustics and their diffraction patterns", *Progress in Optics, Volume XVIII*, 257-323 (1980).
- [30] V. I. Arnold, *Catastrophe Theory*, Springer, 3rd ed. (2004).
- [31] V. I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Springer, Mathematics and its Applications (Soviet Series) Volume 62 (1990).
- [32] M. V. Berry, J. F. Nye and F. J. Wright, "The elliptic umbilic diffraction catastrophe", Phil. Trans. R. Soc. A **291**, 453-484 (1978).
- [33] J. F. Nye, "Dislocation lines in the hyperbolic umbilic diffraction catastrophe", Proc. R. Soc. A **462** 2299-2313 (2006).
- [34] J. F. Nye, "Dislocation lines in the swallowtail diffraction catastrophe", Proc. R. Soc. A **463** 343-355 (2007).
- [35] T. Poston and I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman Publishing Limited (1978).
- [36] G. Indebetouw, "Optical vortices and their propagation", J. Mod. Optics **40**, 73-87 (1993).
- [37] V. Y. Bazhenov, M. V. Vasnetsov and M. S. Soskin, "Laser beams with screw dislocations in their wavefronts", JETP Lett. **28**, 429-431 (1990).

- [38] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. van der Henn and J. P. Woerdman, “Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular-momentum”, *Opt. Commun.* **96**, 123-132 (1993).
- [39] J. Courtial and M. J. Padgett, “Performance of a cylindrical lens mode converter for producing Laguerre-Gaussian laser modes”, *Opt. Commun.* **159**, 13-18 (1999).
- [40] J. E. Curtis, B. A. Koss and D. G. Grier, “Dynamic holographic optical tweezers”, *Opt. Commun.* **207**, 169-175 (2002).
- [41] D. McGloin, G. C. Spalding, H. Melville, W. Sibbet and K. Dholakia, “Applications of spatial light modulators in atom optics”. *Opt. Express* **11**, 158-166 (2003).
- [42] E. Yao, S. Franke-Arnold, J. Courtial, S. Barnett and M. Padgett, “Fourier relationship between angular position and optical orbital angular momentum”, *Opt. Express* **14**, 9071-9076 (2006).
- [43] M. V. Berry, “Exploring the colours of dark light”, *New. J. Phys.* **4**, 74 (2002).
- [44] G. Gbur, T. D. Visser and E. Wolf, “Anomalous behavior of spectra near phase singularities of focused waves”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 013901 (2002).
- [45] M. V. Berry and M. R. Dennis, “Knotted and linked phase singularities in monochromatic waves”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **457**, 2251-2263 (2001).
- [46] M. V. Berry and M. R. Dennis, “Knotting and unknotting of phase singularities: Helmholtz waves, paraxial waves and waves in  $2 + 1$  spacetime”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 8877-8888 (2001).
- [47] A. G. White, C. P. Smith, N. R. Heckemberg, H. Rubinsztein-Dunlop, R. McDuff, C. O. Weiss and Chr. Tamm, “Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser”, *J. Mod. Optics* **38**, 2531-2541 (1991).
- [48] O. Vallée and M. Soares, *Airy Functions and Applications to Physics*, Imperial College Press (2004).
- [49] G. B. Airy, “On the intensity of light in the neighborhood of a caustic”, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **6**, 379-401 (1838).
- [50] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press (2010).
- [51] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications (1965).
- [52] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*, Pergamon Press, 2nd ed. (1965).
- [53] M. V. Berry and N. L. Balazs, “Nonspreading wave packets”, *Am. J. Phys.* **47**, 264-267 (1979).
- [54] G. A. Siviloglou and D. N. Christodoulides, “Accelerating finite energy Airy beams”, *Opt. Lett.* **32**, 979-981 (2007).
- [55] R. Jáuregui and P. A. Quinto-Su, “On the general properties of symmetric incomplete Airy beams”, *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 2484-2488 (2014).

- [56] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu and D. N. Christodoulides, “Observation of Accelerating Airy Beams”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 213901 (2007).
- [57] T. Pearcey, “The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **37**, 311-317 (1946).
- [58] J. D. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia and M. Dennis, “Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams”, *Opt. Express* **20**, 18955-18966 (2012).
- [59] P.A. Quinto-Su and R. Jáuregui, “Optical stacking of microparticles in a pyramidal structure created with a symmetric cubic phase”, *Opt. Express* **22**, 12283-12289 (2014).
- [60] L. Levey and L. B. Felsen, “On incomplete Airy functions and their application to diffraction problems”, *Radio Science* **4**, 959-969 (1969).