UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS RELATIVISTAS Y CUANTICOS DE LA INTERACCION DE UN DIPOLO ELECTRICO Y MAGNETICO Y SU RELACION CON EL OSCILADOR DE DIRAC

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A :

JOSE ALEJANDRO AYALA MERCADO

Asesores: Dr. Matías Moreno Yntriago
Dr. Manuel Torres Labansat

México, D. F. 1990

INDICE

INTRODUCCION

La motivación original de nuestro trabajo era presentar en términos físicos un modelo para la ecuación llamada oscilador de Dirac. Planteado en estos términos, el problema se presentaba como una oportunidad que permitía enfocar la atención hacia algunas areas del conocimiento en Física, desde siempre muy atractivas para mi, y que en este siglo han constituido un pilar fundamental para alcanzar un profundo conocimiento de la naturaleza; me refiero en particular a las teorías cuántica, relativista y cuántica-relativista.

Nuestro primer intento consistió en la busqueda de una formulación covariante para el oscilador de Dirac. Esta formulación condujo a una interpretación física de la ecuación en la que se hizo clara la necesidad de conocer el comportamiento dinámico en términos clásicos de un dipolo magnético en movimiento inmerso en un campo electrostático. Asímismo, la formulación permitía considerar la interacción cuántico-relativista de dipolos eléctricos y magnéticos con campos electromagnéticos externos (E-M e.). De este modo, el estudio de las interacciónes desde el punto de vista de la electrodinámica clásica y de las teorías cuántica y cuántica-relativista, de los dipolos con campos E-M e. se convirtió en parte escencial del trabajo y su estructura final refleja este hecho.

En el primer capítulo, se analiza el comportamiento clásico de los momentos dipolares eléctrico y magnético cuando estos interactuan con campos E-M e. Comenzamos mostrando como la fuerza de Lorentz puede deducirse a partir de la fuerza eléctrica sobre una carga en reposo y de las transformaciones de Lorentz para esta fuerza y utilizamos esta expresión para encontrar las que resultan a primer orden para la fuerza y la torca ejercidas sobre dipolos magnéticos y eléctricos por campos E-M e. También derivamos la fuerza de Lorentz a partir de una expresión covariante y mostramos como el procedimiento puede utilizarse para encontrar una expresión, análoga a la fuerza de Lorentz, para la fuerza que campos E-M e. ejercen sobre dipolos en movimiento. En esta parte del trabajo mostramos como un dipolo magnético en movimiento genera la aparición de un dipolo eléctrico.

En el segundo capítulo, analizamos el tratamiento que las teorías cuántica y cuántica-relativista dan para considerar a los dipolos eléctrico y magnético. En primer lugar, deducimos la ecuación de Pauli a partir de la ecuación de Schrödinger y posteriormente, como límite no relativista de la ecuación de Dirac. Mostramos también el tratamiento fenomenológico que da la teoría de Dirac para considerar la interacción de un dipolo magnético o un posible dipolo eléctrico, asociados a las partículas de Dirac, con campos E-M e., introduciendo términos apropiados en la ecuación de Dirac. Concluimos el capítulo analizando el comportamiento operacional de estos términos frente a transformaciones C, P y T.

En el tercer capítulo, mostramos como el oscilador de Dirac puede escribirse en forma manifiestamente covariante y juntamos todos los elementos desarrollados para proponer un modelo físico cualitativo para el oscilador de Dirac. Dejamos para los apéndices tanto un resumen de la teoría de Dirac como un análisis de la conservación de la probabilidad definida, la covariancia y la hermiticidad del hamiltoniano en la ecuación de Dirac, ante la inclusión de los términos que describen interacciones dipolares magnéticas y eléctricas no minimales.

La realización de este trabajo no corresponde en modo alguno a un esfuerzo individual. En este sentido quiero destacar ante todo, el apoyo incondicional que mis padres me han brindado a lo largo de toda mi preparación. Sobra decir que sin este apoyo hubiera sido imposible pretender siquira participar de esta aventura intelectual y emocional que resulta ser la carrera de Físico. A ellos, va toda mi gratitud y cariño. ¡Gracias Jefes!

A mis asesores, los doctores Matías Moreno y Manuel Torres, mi reconocimiento a su calidad intelectual y humana y mi gratitud por el tiempo y recursos dedicados para la culminación de este trabajo, pero mas que por eso, por su amistad y estímulo nunca escatimados y que resultaron tan valiosos en todo momento. Gracias Matías, disfruté hasta las lágrimas todas mis discusiones contigo. Gracias Manuel, espero poder llegar y permanecer siempre a tu altura.

A mis sinodales, la Dra. Rocío Jauregui y los Doctores Luis de la Peña, Rodolfo Martínez y Sahen Hacyan mi agradecimiento por su interés y valiosos comentarios en la revisión del trabajo.

También quiero agradecer la hospitalidad del departamento de Física Teórica del Instituto de Física y de su personal (académico y administrativo) con el que he tenido contacto durante estos meses. Este ha resultado una experiencia muy formativa que siempre habré de recordar.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer a los cuates y cuatas, presentes y ausentes, con los que he mantenido vivo y engrandecido el espíritu primordial, el anhelo jóven y creativo que compartimos y hemos aprendido a cultivar juntos, en inumerables discusiones, charlas, alegrias y hasta crisis. No me concibo como soy ni como pretendo ser sin su presencia por mi vida. A todos ellos mi cariño ¡Gracias chavos!

CAPITULO 1

Dipolos Clásicos

1.1 Introducción. Los momentos dipolares magnético y eléctrico.

En el electromagnetismo clásico, el desarrollo en términos de momentos multipolares de los potenciales electrostático y magnetostático presenta la ventaja de permitir enfatizar las diferentes propiedades de las distribuciones de cargas o corrientes que generan estos potenciales [1]. Dentro de estos desarrollos, los términos que representan a los momentos dipolares de las distribuciones merecen especial atención en algunas situaciones que se presentan comunmente en la naturaleza, ya que se pueden asociar a propiedades intrinsecas de las partículas.

Para el caso electrostático, si la carga neta es cero, el primer término del desarrollo distinto de cero puede ser el momento dipolar. Este se convierte en el término dominante del desarrollo cuando se considera el potencial producido por la distribución a grandes distancias, comparadas con las dimensiones de la misma. Tal situación se presenta por ejemplo para el potencial producido por algunas moléculas o por algunos materiales en presencia de campos electrostáticos externos.

Para el caso magnetostático, la ley de Gauss para el campo magnético $\vec{B}$ implica que el primer término del desarrollo multipolar del potencial magnético es el término dipolar.

El adjetivo *dipolar* asociado a estos segundos momentos de las distribuciones, tiene su orígen en la imágen a que remite su definición en el caso electrostático [2]. En efecto, para una distribución discreta de cargas, el momento dipolar se define como

$$\vec{p} = \sum_i e_i \vec{r}_i.$$

Si suponemos que la carga neta de la distribución es cero distinguiendo la suma sobre los términos con carga positiva y negativa, e introduciendo los centros de carga de cada tipo definidos por las ecuaciones

$$\sum_{+} e_i\vec{r}_i = \vec{r}_p e$$

$$\sum_{-} e_i\vec{r}_i = -\vec{r}_n e$$

en las que los vectores desde algún orígen a estos centros están representados por $\vec{r}_p$ y $\vec{r}_n$ respectivamente, y la carga positiva total es e, entonces el momento dipolar de la distribución se escribe como

$$\vec{p} = (\vec{r}_p - \vec{r}_n)e$$

que representa dos cargas o *polos eléctricos* separados por una distancia $|\vec{r}_p - \vec{r}_n|$.

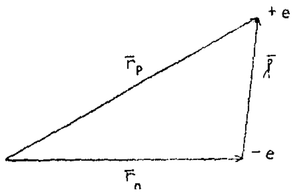

Figura 1.1 La diferencia $\vec{r}_p - \vec{r}_n$ es igual a la diferencia vectorial entre los centros de carga representados por el vector $\vec{l}$ apuntando de la carga negativa a la positiva.

Para el caso magnetostático, el adjetivo dipolar se asocia al momento de la distribución cuyo campo tiene la forma del correspondiente campo *dipolar* eléctrico.

En el presente capítulo analizamos desde el punto de vista clásico [1] y relativista la interacción de estos momentos dipolares con campos electro y magnetostáticos externos. Nuestra intensión final es presentar una expresión para la fuerza sobre un dipolo en movimiento.

[1] clásico en el sentido de no cuántico

1.2 Fuerza de Lorentz.

Con el objeto de preparar el terreno para introducir nuestra expresión covariante para la fuerza electromagnética que actua sobre un dipolo en movimiento (secc. 1.4), vamos a comenzar presentando las expresiones que resultan de la teoría electromagnética para las fuerzas que actuan sobre particulas cargadas en movimiento.

En su teoría del electrón, H.A. Lorentz [2] encontró que la fuerza sobre partículas puntuales -sin estructura interna- en movimiento, consta de dos partes; la eléctrica, que es independiente de la velocidad de la partícula, y la magnética que sí depende de esta velocidad. Esta fuerza, conocida como fuerza de Lorentz, se escribe usualmente

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}). \tag{1.1}$$

Desde el punto de vista de la relatividad especial, esta expresión se puede deducir a partir del las transformaciones de Lorentz, suponiendo que la fuerza sobre una partícula cargada en reposo es $\vec{F} = e\vec{E}$. Vamos a deducir la expresión (1.1) a partir de estos elementos.

Sea O' un sistema de referencia en el que la partícula cargada está instantáneamente en reposo. En presencia de un campo electrostático $\vec{E}'$ la fuerza $\vec{F}'$ sobre la partícula en este sistema es

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{d\tau} = q\vec{E}' \tag{1.2}$$

donde q es la carga de la partícula, y τ es el tiempo en el sistema primado. Nos preguntamos por la fuerza que se observa en un sistema O para el cual O' se mueve con velocidad $\vec{\beta}$ a lo largo de la dirección positiva del eje x.

Queremos encontrar la relación entre $\vec{F}$ y $\vec{F}'$ es decir, la relación entre $\frac{d\vec{p}'}{d\tau}$ y $\frac{d\vec{p}}{d\tau}$.

Como $d\tau = \frac{1}{\gamma}dt, \quad (\gamma = \sqrt{1-\beta^2}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}),$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} &= \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} \\ &= \gamma\frac{d}{dt}\end{aligned}$$

$\vec{p}$ son las componentes espaciales del cuadrivector de momento p_μ, de modo que ante una transformación de Lorentz, estas componentes se transforman como [1]

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(p'_x + \beta\varepsilon) \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

donde ε es la energía de la partícula en el sistema O. Como resulta que

$$\begin{aligned} \frac{dp'_x}{d\tau} &= \gamma\frac{dp'_x}{dt} \\ &= \gamma\left[\frac{dt}{dp'_x}\right]^{-1} \\ &= \gamma\left[\frac{dt}{dp_x}\right]^{-1}\left[\frac{dp_x}{dp'_x}\right]^{-1} \\ \frac{dp'_x}{d\tau} &= \gamma\frac{dp_x}{dt}\left[\frac{dp_x}{dp'_x}\right]^{-1} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma}\left[\frac{dp_x}{dt}\right] \\ &= \frac{dp_x}{dt}, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{dp'_y}{d\tau} &= \gamma\frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp'_z}{d\tau} &= \gamma\frac{dp_z}{dt}. \end{aligned}$$

podemos escribir de manera general

$$\begin{aligned} \frac{dp'_\parallel}{d\tau} &= \frac{dp_\parallel}{dt} \\ \frac{dp'_\perp}{d\tau} &= \frac{\gamma dp_\perp}{dt} \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $\parallel$ y $\perp$, denotan las componentes paralela y perpendicular al movimiento.

Con la notación anterior la transformación de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se escribe [1]

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel \\ E'_\perp &= \gamma(E_\perp + \vec{\beta}\times\vec{B}) \\ B'_\parallel &= B_\parallel \\ B'_\perp &= \gamma(B_\perp - \vec{\beta}\times\vec{E}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tomando en cuenta las expresiones (1.2), (1.3) y (1.4), las componentes paralela y perpendicular de la fuerza sobre la partícula en los sistemas O y O' están relacionadas de la manera siguiente

$$F'_{\parallel} = \frac{dp'_{\parallel}}{d\tau} = qE'_{\parallel} = qE_{\parallel} = q\frac{dp_{\parallel}}{dt} = F_{\parallel},$$

$$F'_{\perp} = \frac{dp'_{\perp}}{d\tau} = qE'_{\perp} = q\gamma(E_{\perp} + \vec{\beta}\times\vec{B}) = q\gamma\frac{dp_{\perp}}{dt} = \gamma F_{\perp}, \tag{1.5}$$

es decir, en el sistema O la fuerza sobre la partícula está dada en componentes por

$$F_{\parallel} = qE_{\parallel}$$

$$F_{\perp} = q(E_{\perp} + \vec{\beta}\times\vec{B})$$

que es la expresión para la fuerza de Lorentz.

1.3 Fuerza dipolar magnética y eléctrica.

Vamos a presentar ahora las expresiones para la fuerza y la torca ejercidas sobre un dipolo magnético inmerso en un campo magnetostático que varía suavemente con la posición.

Para representar al dipolo, consideremos un rizo de corriente de forma arbitraria y situado en un plano. El campo magnético producido por este rizo de corriente se comporta, a distancias grandes comparadas con sus dimensiones, como el campo producido por un dipolo magnético. De este modo si consideramos un rizo suficientemente localizado podremos describir la interacción entre su momento magnético y el campo magnético externo como la interacción entre un dipolo y un campo magnéticos.

El momento magnético del rizo está dado por [4]

$$\vec{m} = \frac{i}{2c}\oint \vec{r}\times d\vec{r}, \tag{1.6}$$

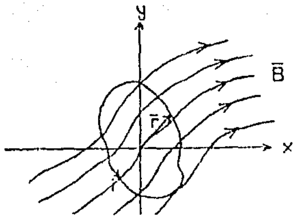

Figura 1.2 Un rizo de corriente localizado y plano inmerso en un campo magnético que varía suavemente con la posición.

donde i es la corriente estacionaria en el rizo.

Cuando la densidad de carga es nula, la fuerza sobre un elemento de corriente es -según la expresión para la fuerza de Lorentz-

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} dq\vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{dq}{dt} d\vec{r} \times \vec{B} = \frac{i}{c} d\vec{r} \times \vec{B}.$$

Expandiendo $\vec{B}$ en serie de Taylor alrededor de un orígen conveniente y considerando términos hasta primer orden podemos escribir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}|_{r=0}$$

de modo que

$$d\vec{F} = \frac{i}{c} d\vec{r} \times \vec{B}(0) + i d\vec{r} \times (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}|_{r=0}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{i}{c} \oint d\vec{r}\right) \times \vec{B}(0) + \frac{i}{c} \oint d\vec{r} \times (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}|_{r=0},$$

y como la integral $\oint d\vec{r}$ se anula, tendremos que

$$\vec{F} = \frac{i}{c} \oint d\vec{r} \times (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}|_{r=0}.$$

En adelante se entenderá que la expresión $(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B}$ está evaluada en $\vec{r} = 0$.

Utilizando la expresión para el triple producto vectorial escribimos

$$(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B} = \nabla(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{r} \times (\nabla \times \vec{B}).$$

Como para el campo magnético externo, $\nabla \times \vec{B} = 0$

$$d\vec{r} \times (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{B} = d\vec{r} \times \nabla_B(\vec{r} \cdot \vec{B})$$

(∇_B, significa ∇ actuando solo sobre $\vec{B}$).

Ahora, dado que para una función escalar u y un vector $\vec{A}$,

$$\nabla \times (u\vec{A}) = (\nabla u) \times \vec{A} + u(\nabla \times \vec{A}),$$

entonces, tomando $u = \vec{r} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} = d\vec{r}$ tendremos

$$\nabla_B(\vec{r} \cdot \vec{B}) \times d\vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{B})(\nabla_B \times d\vec{r}) = \nabla_B(\vec{r} \cdot \vec{B}) \times d\vec{r}$$

de donde

$$d\vec{r} \times \nabla_B(\vec{r} \cdot \vec{B}) = -\nabla_B \times d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})$$

y entonces

$$\vec{F} = -\frac{i}{c}\nabla_B \times \oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})$$

o bien

$$\vec{F} = -\frac{i}{c}\nabla_B \times \left\{\frac{1}{2}\left(\oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B})\right) + \frac{1}{2}\left(\oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B})\right)\right\}.$$

La primera integral se anula. En efecto, en componentes

$$\begin{aligned}\left[\oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B})\right]_i &= \left[\oint dx_i(x_j B_j) + x_i(dx_j B_j)\right] \\ &= \left[B_j \oint x_j dx_i + x_i dx_j\right] \\ &= \left[B_j \oint d(x_j x_i)\right] = 0\end{aligned}$$

puesto que se trata de la integral de una diferencial exacta evaluada a lo largo de una trayectoria cerrada. Además, utilizando la expresión para el triple producto vectorial, podemos escribir

$$d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B}) = (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\vec{F} =& \nabla_B \times \left(\frac{i}{2c} \oint (d\vec{r} \times \vec{r}) \right) \times \vec{B} \\ =& \nabla_B \times \vec{m} \times \vec{B}\end{aligned}$$

que podemos escribir como

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (\vec{m} \cdot \nabla_B)\vec{B} - \vec{m}(\nabla_B \cdot \vec{B}) \\ &= (\vec{m} \cdot \nabla_B)\vec{B},\end{aligned}$$

(puesto que $\nabla_B \cdot \vec{B} = 0$) y como además tenemos que

$$\nabla_B(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla_B)\vec{m} + (\vec{m} \cdot \nabla_B)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla_B \times \vec{m}) + \vec{m} \times (\nabla_B \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \tag{1.7}$$

La torca sobre un elemento de corriente en el rizo es, a primer orden

$$d\vec{N} = \frac{i}{c}\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}(0))$$

entonces

$$\vec{N} = \frac{i}{c} \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}(0))$$

que podemos escribir como

$$\vec{N} = \frac{1}{2c} \left\{ \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) + d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) + \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) - d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) \right\}.$$

La primera integral se anula pues podemos escribir

$$\begin{aligned}\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) &= d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r}) \\ d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) &= \vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(d\vec{r} \cdot \vec{r})\end{aligned}$$

y como hemos visto, $\oint d\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r}(d\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0$. Ahora,

$$\left[\oint 2\vec{B}(\vec{r} \cdot d\vec{r}) \right]_i = B_i \oint 2x_j dx_j = B_i \oint d(x_j^2) = 0$$

por ser la integral en una trayectoria cerrada de una diferencial exacta. Utilizando la identidad

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

podemos escribir el segundo integrando como

$$\vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) + d\vec{r} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{B} \times (d\vec{r} \times \vec{r})$$

de donde la torca ejercida por el campo externo sobre el rizo es

$$\vec{N} = \frac{i}{2c} \oint \vec{B} \times (d\vec{r} \times \vec{r}) = \frac{i}{2c} \oint (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}$$

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}. \tag{1.8}$$

Procederemos ahora a derivar las expresiones para la fuerza y la torca ejercidas sobre un dipolo eléctrico inmerso en un campo eléctrico que varía suavemente con la posición.

La fuerza del campo eléctrico sobre un elemento de una distribución localizada de cargas es

$$d\vec{F} = \vec{E}dq = \vec{E}(\vec{r})\rho(\vec{r})dV$$

de donde

$$\vec{F} = \int \vec{E}(\vec{r})\rho(\vec{r})dV.$$

Desarrollando $\vec{E}(\vec{r})$ en serie de Taylor alrededor de un orígen apropiado, tendremos que

$$\vec{F} = \int \vec{E}(0)\rho(\vec{r})dV + \int (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{E}|_{r=0}\,\rho(\vec{r})dV.$$

La primera integral se anula si la carga neta en la distribución es cero. La segunda integral puede escribirse como $(\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}|_{r=0}$ donde $\vec{p} = \oint \vec{r}\rho(\vec{r})dV$, es el momento dipolar eléctrico de la distribución de cargas. La fuerza sobre un dipolo eléctrico puede escribirse entonces como

$$\vec{p} \cdot \nabla\vec{E} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}). \tag{1.9}$$

La torca sobre el dipolo puede escribirse, a primer orden en $\vec{E}$, como

$$\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}(0)$$

$$\vec{N} = (\int \vec{r}\rho(\vec{r}) \times dV)\vec{E}(0)$$

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}. \tag{1.10}$$

1.4 Fuerza Covariante de Lorentz.

El objetivo de esta sección es mostrar como pueden deducirse, a partir de una expresión relativista, las ecuaciones clásicas de movimiento, en este caso, para una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético. En la siguiente sección, habremos de adoptar este procedimiento para deducir las ecuaciones de movimiento para un dipolo magnético inmerso en un campo electromagnético externo.

En lenguaje covariante, hacemos corresponder con los vectores de campo eléctrico y magnético, un tensor antisimétrico de segundo rango cuya expresión explícita es:[5]

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea u^ν el cuadrivector de velocidadd para una partícula cargada que se mueve con velocidad $\vec{\beta}$ con respecto a algún sistema de referencia. u^ν está dado por

$$u^\nu = \gamma(1, \vec{\beta}).$$

Vamos a valernos de este cuadrivector para escribir la fuerza de Lorentz como la parte espacial de una relación covariante, dada por

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = eF^\mu_\nu u_\nu; \tag{1.11}$$

donde como es usual

$$F^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$$

$$u_\nu = g_{\nu\mu} u^\mu$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, \text{ si } \nu = \mu = 0, \\ -1, \text{ si } \nu = \mu = i. \end{cases}$$

En efecto, puesto que $dt = \gamma d\tau$,

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dp_i}{d\tau} &= \gamma e F^i_\nu u_\nu \\ \mathrm{F}_i &= e F^i_\nu u_\nu \\ \mathrm{F}_i &= \left[e\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right]_i . \end{aligned}$$

El procedimiento adoptado ha consistido en proponer una relación covariante que reproduzca las ecuaciones de movimiento, en este caso, para una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético. Sin embargo esta relación covariante puede ser a su vez obtenida mediante un principio variacional, proponiendo una densidad Lagrangiana adecuada. En la siguiente sección vamos a continuar con el punto de vista original y a proponer una ecuación covariante para encontrar las ecuaciones de movimiento para el caso de un dipolo *electromagnético* en interacción con un campo electromagnético externo.

1.5 Fuerza tipo Lorentz sobre un dipolo magnético en movimiento.

Considerando los resultados precedentes, vamos a proponer una relación covariante para describir la interacción de un dipolo magnético en movimiento, con un campo electromagnético externo. En nuestra derivación hemos de tomar en cuenta el hecho conocido, aunque no siempre tratado con suficiente énfasis en la literatura, [6] de que un dipolo magnético (eléctrico) en movimiento, induce la aparición de un dipolo eléctrico (magnético) transversal tanto a la dirección de movimiento como a la orientación del dipolo.

Esta propiedad de los dipolos en movimiento es descrita de manera distinta por algunos autores:

G.P. Fisher [6] considera un dipolo magnético $\vec{\mu}$, representado por un rizo de corriente $\vec{j}$, y aplica una transformación de Lorentz sobre las cantidades ρ y $\vec{j}$ (ρ la densidad de carga, que considera igual a cero en el sistema en el que el dipolo está en reposo) para mostrar que en el sistema en el que el dipolo magnético tiene una velocidad $\vec{\beta}$, se observa la aparición de un dipolo eléctrico $\vec{p}'$ cuya expresión es

$$\vec{p}' = \vec{\beta} \times \frac{\vec{\mu}}{c}. \qquad (1.11)$$

A.J.D. Jackson [4] sugiere obtener la ecuación (1.11) a partir de una transformación de Lorentz sobre el cuadrivector de campos electromagnéticos A_μ, cuya expresión explícita es la de un potencial dipolar magnético

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \varphi = 0.$$

R. Becker [7] obtiene una expresión similar a (1.11), aplicando una transformación de Lorentz a los campos producidos en medios materiales por un tensor de momentos dipolares que se mezclan bajo la transformación tal como lo hacen los campos $\vec{D}$ y $\vec{H}$.

Para nuestra descripción vamos a adoptar este último punto de vista, proponienso un tensor de momentos dipolares. Sin embargo, antes de entrar en materia, es conveniente resaltar los elementos involucrados en la descripción.

En el caso antes tratado (sec.1.3) para describir la interacción, la propiedad de la partícula que se acopla al campo externo es la carga y, como la fuerza de Lorentz es dependiente de la velocidad, hubimos de buscar una expresión que relacionara las cantidades $e, F^{\mu\nu}, u^\mu$.

La expresión que ahora buscamos debe ser también dependiente de la velocidad si queremos utilizarla para modelar al oscilador de Dirac (cap 3). *Nuestro objetivo es encontrar una expresión del tipo fuerza de Lorentz para el dipolo en interacción con el campo externo.*

Para nuestro propósito, es necesario acoplar al campo externo los momentos magnético y eléctrico de la partícula, de tal modo que la interación sea dependiente de la velocidad, es decir buscamos una expresión covariante que involucre las cantidades $p^\mu, m^\mu, F^{\mu\nu}$ y u^ν, donde la parte espacial de los cuadrivectores p^μ, m^μ representan los vectores dipolares eléctrico $\vec{p}$ y magnético $\vec{m}$. En esta dirección se presenta más de una alternativa pero nos limitaremos a discutir una que resulta suficiente a nuestros fines.

Sabemos [8] que a partir de un tensor antisimétrico de segundo rango (con seis componentes independientes), podemos construir dos conjuntos de tres cantidades que se comportan, uno como un vector axial y otro como un vector polar. Ahora bien, puesto que $\vec{p}$ es un vector polar y $\vec{m}$ es un vector axial, al conjunto de seis cantidades

$$[\vec{p}, \vec{m}] = [(p_x, p_y, p_z), (m_x, m_y, m_z)]$$

podemos hacerle corresponder el tensor definido por

$$[M_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & m_z & -m_y \\ -p_y & -m_z & 0 & m_x \\ -p_z & m_y & -m_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esta definición, proponemos que la fuerza ejercida por un campo electromagnético externo sobre los momentos dipolares de la partícula puede escribirse como

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{1}{2}\nabla_\mu (M_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}).$$

Esta expresión es covariante y se reduce a (1.7) y (1.9) en el sistema propio. La dependencia con la velocidad de esta expresión está implicita en las propiedades de transformación de los tensores $M^{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$. En efecto, supongamos que en algún sistema de referencia el tensor $M^{\mu\nu}$ solo presenta componentes magnéticas

$$[M^{(0)}_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^o_z & -m^o_y \\ 0 & -m^o_z & 0 & m^o_x \\ 0 & m^o_y & -m^o_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Desde un sistema de referencia para el que el dipolo se mueve con velocidad $\vec{\beta}$, las componentes dipolares eléctrica y magnética se mezclan de modo que

$$\begin{aligned} m_\parallel &= m^o_\parallel \\ m_\perp &= \gamma m^o_\perp \\ p_\parallel &= 0 \\ p_\perp &= \gamma |\vec{\beta} \times \vec{m}^o| \end{aligned}$$

donde como antes, $\parallel$ y $\perp$, representan las direcciones paralela y perpendicular respecto al vector de velocidad $\vec{\beta}$, es decir

$$\begin{aligned}\vec{m} =&\vec{m}_{\parallel}+\vec{m}_{\perp}\\ =&(\hat{\beta}\cdot\vec{m}^{o})\vec{\beta}+\gamma[\vec{m}^{o}-(\hat{\beta}\cdot\vec{m}^{o})\hat{\beta}]\\ =&(1-\gamma)\hat{\beta}(\hat{\beta}\cdot\vec{m}^{o})+\gamma\vec{m}^{o}\\ =&-\gamma^{2}(\vec{\beta}\cdot\vec{m}^{o})\frac{\vec{\beta}}{1+\gamma}+\gamma\vec{m}^{o}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Podemos escribir entonces

$$\mathcal{F}_{\mu}=\nabla_{\mu}(m_{\parallel}^{o}B_{\parallel}+\gamma m_{\perp}^{o}B_{\perp}+\gamma(\vec{\beta}\times\vec{m}^{o})\cdot\vec{E}),$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son los campos externos eléctrico y magnético en el sistema respecto del cual, el dipolo está en movimiento. La fuerza sobre el dipolo la obtenemos como la parte espacial de la relación covariante

$$\mathcal{F}_{\mu}=\frac{dp_{\mu}}{d\tau}$$

y como sabemos que

$$\mathcal{F}_{i}=\frac{dp_{i}}{d\tau}=\gamma\frac{dp_{i}}{dt}=\gamma\vec{F}_{i}$$

tendremos

$$\begin{aligned}\gamma\frac{d\vec{p}}{dt}=&\nabla(m_{\parallel}^{o}B_{\parallel}+\gamma m_{\perp}^{o}B_{\perp}+\gamma(\vec{\beta}\times\vec{m}^{o})\cdot\vec{E})\\ \frac{d\vec{p}}{dt}=&\nabla(\frac{1}{\gamma}m_{\parallel}^{o}B_{\parallel}+m_{\perp}^{o}B_{\perp}+(\vec{\beta}\times\vec{m}^{o})\cdot\vec{E})\\ =&\nabla(\frac{1}{\gamma}mB_{\parallel}+\frac{1}{\gamma}m_{\perp}B_{\perp}+(\vec{\beta}\times\vec{m}^{o})\cdot\vec{E})\end{aligned}$$

o, finalmente

$$\vec{\mathcal{F}}=\frac{1}{\gamma}(\vec{m}\cdot\vec{B}+\vec{p}\cdot\vec{E})\tag{1.13}$$

(con $\vec{p}=\vec{p}_{\perp}=\gamma(\vec{\beta}\times\vec{m}^{o})$). La expresión (1.13) significa que el dipolo, originalmente magnético en su sistema propio, induce la aparición de un dipolo eléctrico en un sistema en el que esté en movimiento, y que la aparición de este dipolo eléctrico contribuye a la fuerza ejercida por un campo electromagnético externo.

Para terminar el capítulo vamos a escribir la expresion que resulta de (1.13) para el límite ultrarelativista. Utilizando (1.12) tomemos el límite de $\frac{\vec{m}}{\gamma}$ cuando $\gamma \to \infty, \vec{\beta} \to 1$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{\vec{m}}{\gamma} = \vec{m}_{\perp}$$

con lo que

$$\vec{\mathcal{F}}_{UR} = \nabla(\vec{m}_{\perp} \cdot \vec{B} + \vec{p} \cdot \vec{E}_{\perp}) \tag{1.14}$$

Finalmente, notamos que aún si el campo externo es puramente eléctrico, éste se acopla al dipolo eléctrico inducido y habremos de observar una interacción.

[1] E. M. Purcell. *Electricity and Magnetism, Berkeley physics course vol. 2.* Mc. Graw-Hill book company, 1965.

[2] C. J .F. Böttcher. *Theory of electric polarization vol. 1 second edition.* Elsevier scientific publishing company, 1973.

[3] H. A. Lorentz. *The theory of electrons.* Leipzig: B. G. Teubner, 1909.

[4] A. J. D. Jackson. *Classical electrodynamics.* New York John Wiley, 1962.

[5] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic quantum mechanics.* Mc. Graw-Hill inc., 1964.

[6] G. P. Fisher. *The electric dipole moment of a moving magnetic dipole.* A. J. P. vol. 39, 1528-1533. December, 1971.

[7] R. Becker. *Electromagnetic fields and interactions.* London Blackie, 1964.

[8] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Relativistic quantum theory.* Pergamon Press, 1971.

Dipolos Cuánticos

2.1 Introducción

Además de la masa, una de las propiedades características de las partículas elementales es su momento angular intrínseco o *espín*. Esta es una propiedad de naturaleza estrictamente cuántica y los intentos por modelarla como una rotación clásica conducen a inconsistencias [1]. Cualquier partícula cargada cuyo momento intrínseco sea distinto de cero tiene asociado un momento magnético y es de hecho gracias a éste que el espín de las partículas puede medirse. Estos momentos magnéticos son una de las manifestaciones de las propiedades electromagnéticas de las partículas. Valores experimentales de los momentos magnéticos para algunas partículas se listan en la siguiente tabla.

Partícula	Momento magnético en unidades de $e/2m$
electrón	$1.00115962 \pm 3 \times 10^{-8}$
muón	$1.001162 \pm 5 \times 10^{-6}$
protón	$2.79276 \pm 3 \times 10^{-5}$
neutrón	$-1.91315 \pm 7 \times 10^{-5}$

Tabla 2.1 Momentos magnéticos experimentales de algunas partículas *elementales*[1].

En principio podría esperarse que estos valores se obtuvieran a partir la ecuación de Dirac, que conjuga las propiedades cuánticas y relativistas propias de estas partículas. Sin embargo ésto no sucede así. Por ejemplo la diferencia experimental encontrada entre el momento magnético intrínseco del electón y el magnetón de Bohr —que es el valor predicho por la ecuación de Dirac— es muy pequeña y puede ser explicada mediante la Electrodinámica Cuántica, al considerar las correcciones radiativas [1]. Lo mismo es cierto para el leptón μ. Es decir, para estas partículas tenemos que

$$\mu/\mu_B = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328\frac{\alpha^2}{\pi}, & \text{electrón} \,, \\ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0.76\frac{\alpha^2}{\pi}, & \text{muón.} \end{cases}$$

Estos valores corregidos están de acuerdo con el experimento; provienen de considerar las contribuciones de la emisión y absorción de fotones virtuales por la partícula en movimiento. El acuerdo entre teoría y experimento es una buena prueba de la validez de la Electrodinámica Cuántica hasta distancias del orden de 10^{-14} cm.[1] Sin embargo, los valores para los momentos magnéticos del protón y del neutrón difieren considerablemente del magnetón Bohr, lo que lleva a pensar en éstas partículas, de alguna manera, como compuestas.

El concepto de momento dipolar eléctrico también juega un papel importante dentro de la teoría cuántica-relativista de las partículas elementales. Es sabido [2] que la existencia de dipolos eléctricos asociados a partículas elementales produciría la violación de las invariancias **P** y **T** en la interacción de estas partículas con campos electrostáticos externos. Por otra parte, la violación experimental de la invariancia ante paridad en el decaimiento beta y de la invariancia temporal en el decaimiento de K^0 [3] permite la posibilidad de considerar en la teoría algún término que describa la interacción de un momento dipolar eléctrico con un campo electromagnético externo. Aunque estos momentos dipolares no han sido detectados, los límites experimentales encontrados para el caso de algunas partículas se muestran en la tabla (2.2).

Como vemos, los momentos dipolares son propiedades que deben considerarse dentro de las teorías que describen el comportamiento de las partículas elementales, en particular en las teorías cuántica y cuántica-relativista. Es el objetivo de este capítulo presentar el tratamiento que dan ambas teorías para considerar la interacción de estos momentos dipolares de las partículas con campos electromagnéticos externos.

2.2 La ecuación de Pauli

La ecuación de Pauli se origina en el intento de describir el comportamiento del electrón

Partícula	Límite superior en unidades de $e \times$ cm
protón	$< 5 \times 10^{-29}$
neutrón	$< 1.3 \times 10^{-13}$
muón	$< 2 \times 10^{-16}$
electrón	$< 3 \times 10^{-15}$

Tabla 2.2 Límites superiores experimentales para los momentos dipolares eléctricos de algunas partículas *elementales*[1].

en presencia de un campo magnético externo. El grado extra de libertad que supone la introducción del espín (con valor $\frac{1}{2}$) se refleja en que ahora la función de onda del electrón es un espinor de dos componentes y la ecuación que describe su comportamiento es una ecuación matricial que involucra a las matrices σ de Pauli. En esta sección, vamos a obtener la ecuación de Pauli a partir de la teoría cuántica no relativista.

Consideremos la ecuación de Schrödinger, generalizada para el caso en que un campo electromagnético externo esté presente. Siguiendo la regla que conduce en el caso clásico a la fuerza de Lorentz, hacemos la sustitución minimal

$$\vec{p} \rightarrow \vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$$

y la ecuación es

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\psi + e\phi\psi$$

donde $\vec{A}$ es el potencial vectorial y ϕ es el potencial eléctrico. Para introducir en esta ecuación al espín [4][5], remplazamos el término $(\vec{p} - e\vec{A})^2$ por el término $[\sigma \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]^2$. La ecuación de Pauli se escribe entonces como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]^2\psi + e\phi\psi \qquad (2.1).$$

Podemos transformar esta ecuación y escribirla en forma más simple utilizando la siguiente propiedad de las matrices σ

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (2.2)$$

con la que podemos escribir

$$\begin{aligned}[\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-e\vec{A})]^2 =&[\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-e\vec{A})]\cdot[\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-e\vec{A})]\\ =&(\vec{p}-e\vec{A})^2+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\end{aligned}$$

y como además

$$\begin{aligned}(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\psi =&-e(\vec{p}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{p})\psi\\ =&-e(-i\nabla\times\vec{A})\psi\end{aligned}$$

tendremos que

$$(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})=ie\nabla\times\vec{A}=ie\vec{B} \qquad (2.3).$$

Por otra parte si consideramos un campo magnético uniforme y suficientemente débil como para conservar únicamente términos de primer orden, podemos escribir (puesto que $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$)

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r},$$

y trabajando en la norma de Coulomb, el término $(\vec{p}-e\vec{A})^2$ se escribe como

$$(\vec{p}-e\vec{A})^2=p^2-e\vec{p}\cdot\vec{A}-e\vec{A}\cdot\vec{p}.$$

además, puesto que

$$\vec{p}\cdot\vec{A}\psi=\vec{A}\cdot\vec{p}\psi-i(\nabla\cdot\vec{A})\psi$$

el término $(\vec{p}-e\vec{A})^2$ se escribe

$$\begin{aligned}(\vec{p}-e\vec{A})^2 =&p^2-2e\vec{p}\cdot\vec{A}\\ =&p^2-e\vec{p}\cdot(\vec{B}\times\vec{r})\\ =&p^2-e\vec{B}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})\\ =&p^2-e\vec{L}\cdot\vec{B}\end{aligned} \qquad (2.4)$$

con lo que

$$[\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-e\vec{A})]^2=p^2-e\vec{L}\cdot\vec{B}-e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

Con $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}$, la ecuación de Pauli (ec. 2.1) se escribe finalmente como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{p^2}{2m}\psi+e\phi\psi-\frac{e}{2m}[\vec{L}+2\vec{S}]\cdot\vec{B}\psi \qquad (2.5).$$

El término $-2\frac{e}{2m}\vec{S}\cdot\vec{B}$ representa la energía de interacción entre el momento magnético asociado al espín del electrón $\vec{\mu}_S$ y el campo magnético externo, donde $\vec{\mu}_S = 2\mu_B\vec{S}$, ($\mu_B = \frac{e}{2m}$ es el magnetón de Bohr) es el momento magnético intrínseco del electrón. Vemos que el factor que relaciona este momento magnético con el espín del electrón es $g = 2$. Este resultado reproduce el valor observado —hasta la epoca en que la ecuación fué propuesta— de la razón giromagnética g para el electrón, sin embargo es consecuencia de la introducción de un término ad hoc, capaz de reproducirlo.

Este mismo resultado puede deducirse a partir de la teoría para el electrón relativista de Dirac que incluye al espín de manera natural. En la siguiente sección vamos a derivarlo y generalizarlo para el caso de otras partículas como el protón y el neutrón a partir de la ecuación de Dirac.

2.3 La ecuación de Pauli como límite no relativista de la ecuación de Dirac.

La ecuación de Dirac fué propuesta en 1928 por P.A.M. Dirac. Su objetivo era encontrar una ecuación cuántica relativista, de primer orden en las derivadas temporal y espaciales que permitiera definir una densidad de probabilidad positiva definida. La ecuación de Dirac puede escribirse como [1]

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \tag{2.6}$$

donde las γ^μ son las matrices de Dirac, p_μ es el cuadrivector de momento, m es la masa de la partícula y ψ es un espinor de cuatro componentes.

La ecuación (2.6) describe el comportamiento de partículas con espín $\frac{1}{2}$. Para describir la interacción minimal de estas partículas —con carga— con un campo electromagnético externo, hacemos la sustitución $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$ donde e es la carga de la partícula y A_μ es el cuadrivector electromagnético

$$[\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0. \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) predice una razón giromagnética g=2 para la expresión $\mu_s = g\mu_B$. Esta ecuación predice además que el momento dipolar eléctrico asociado a la partícula es $\mu_E = 0$.

[1] ver Apéndice A

Para tomar en cuenta dentro de la teoría los valores correctos de los momentos magnéticos e incluir posibles momentos eléctricos, agregamos a la ecuación (2.7) los términos

$$\frac{\kappa_i e}{4m}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{y} \qquad \frac{\kappa_i' e}{4m} i\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.8}$$

respectivamente. Estos términos adicionales hacen de la teoría una teoría fenomenológica en la que κ_i y κ_i' se deben determinar empiricamente para reproducir los valores observados de los momentos dipolares magnéticos y los posibles momentos dipolares electricos de las partículas en consideración. El requisito general que deben cumplir estos términos es que su inclusión mantenga tanto la covariancia de la ecuación como la hermiticidad del operador Hamiltoniano y la conservación de la probabilidad. [2]

Consideremos en primer lugar la ecuación de Dirac para una partícula con carga y momento dipolar magnético en interacción con un campo electromagnético externo.

$$[\gamma^\mu(i\nabla_\mu - e_i A_\mu) + \frac{\kappa_i e}{4m_i}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m_i]\psi(x) = 0$$

donde como es usual $F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}A^\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu}A^\nu$.

Multiplicando la ecuación por β y reagrupando podemos escribir

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

$$H = \vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - e_i\vec{A}) + \beta M_i + e_i\phi - \frac{\kappa_i e}{4m_i}\beta\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Ahora, puesto que $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, el término en $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ se escribe como

$$-\frac{\kappa_i e}{4m_i}\beta\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{\kappa_i e}{2m_i}\beta\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + +i\frac{\kappa_i e}{2m_i}\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{E}$$

con lo que la ecuación resulta

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = [\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - e_i\vec{A}) + \beta m_i + e_i\phi - \frac{\kappa_i e}{2m_i}\beta\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + i\frac{\kappa_i e}{2m_i}\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{E}]\psi.$$

[2] ver Apéndice B

Consideremos ψ de la forma $\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$ donde $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\chi}$ son biespinores. En la representación de Dirac-Pauli [3] $\vec{\alpha} = \vec{\sigma}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ y la ecuación puede escribirse como

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + e_i\phi\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + m_i\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix} - \frac{\kappa_i e}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix} - i\frac{\kappa_i e}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\begin{pmatrix} -\tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

con $\vec{\pi} = \vec{p} - e_i\vec{A}$.

Busquemos soluciones de la forma $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = exp(-im_i t)\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ con φ y χ funciones relativamente suaves del tiempo. La ecuación a resolver es por consigiente

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + e_i\phi\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2m_i\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} - \frac{\kappa_i e}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} - i\frac{\kappa_i e}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\begin{pmatrix} -\chi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Ahora, para energías cinéticas e intensidades de campo pequeñas comparadas con mc^2 podemos aproximar la solución del segundo renglón de la ecuación por

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m_i}\varphi$$

con lo que la ecuación para φ (las grandes componentes) es

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{1}{2m_i}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) + e_i\phi - \frac{\kappa_i e}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + i\frac{\kappa_i e}{4m_i^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{E})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\right]\varphi$$

y como $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) = \pi^2 - e_i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ (ecs (2.2), (2.3)), la ecuación se escribe

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{(\vec{p} - e_i\vec{A})^2}{2m_i} - \frac{(e_i + \kappa_i e)}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e_i\phi + i\frac{\kappa_i e}{4m_i^2}\vec{E}\cdot\vec{\pi} + \frac{i}{4m_i^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\times\vec{\pi})\right]\varphi.$$

Si ahora dentro de la misma aproximación, trabajando en la norma de Coulomb, despreciamos términos de orden $1/m_i^2$ y consideramos un campo magnético uniforme suficientemente débil (aproximación lineal en el campo) podemos escribir (ecuación (2.4))

$$\frac{(\vec{p} - e_i\vec{A})^2}{2m_i} = \frac{p^2}{2m_i} - \frac{e}{2m_i}\vec{L}\cdot\vec{B}$$

y con $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, la ecuación se escribe finalmente como

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = [\frac{p^2}{2m_i} - \frac{e}{2m_i}[\vec{L} + 2(\frac{e_i}{e} + \kappa_i)\vec{S}]\cdot\vec{B}]\varphi + o(m^{-2}, B^2)\varphi. \qquad (2.9)$$

[3] ver Apéndice A

Así, en el límite de bajas energías, el término $\frac{\kappa_i e}{4m_i}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ contribuye con un factor adicional a la interacción del espín con el campo magnético externo $\vec{B}$, lo que da cuenta de los momentos magnéticos *anómalos* de partículas como el protón y el neutrón. En efecto, si para el protón $\kappa_p = 1.79$ y para el neutrón $\kappa_n = -1.91$, tendremos que los momentos magnéticos de estas partículas son, respectivamente $\mu_p = 2.79$ y $\mu_n = -1.91$ en unidades de μ_B.

Para considerar una interacción dipolar eléctrica de las partículas con un campo electromagnético externo, incluimos en la ecuación de Dirac el término $i\frac{\kappa_i' e}{4m_i}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ con $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Como

$$i\frac{\kappa_i' e}{4m_i}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = i\frac{\kappa_i' e}{2m_i}\vec{\alpha}\cdot\vec{B} - \frac{\kappa_i' e}{2m_i}\vec{\sigma}\cdot\vec{E}$$

la inclusión de éste término en la ecuación (2.7) producirá, con el tratamiento previo y dentro de las suposiciones hechas, un acoplamiento dipolar eléctrico de la partícula con el campo eléctrico externo de intensidad $2(\kappa_i')$.

2.4 Transformaciones C, P y T.

Hemos mencionado la violación de las invariancias P y T a que conduce la existencia de dipolos eléctricos asociados a partículas *elementales*. Vamos a ilustrar esta violación mediante un esquema sencillo. En la siguiente figura se ilustra un dipolo eléctrico que rota en el campo electrostático producido por una carga puntual Q.

Supongamos que esta es una situación físicamente realizable, entonces si llevamos a cabo ya sea una inversión espacial o una temporal, estas transformaciones no alterarán la dirección del campo electrostático producido por la carga Q pero ambas producirán que la dirección de la rotación del dipolo cambie y por consiguiente que la situación física que resulta sea incompatible con la supuesta originalmente. Por otra parte, es claro de la figura que para este caso, la transformación de conjugación de carga —C— es una transformación de invariancia, lo que es cierto para el caso general.

Analicemos el comportamiento operacional frente a transformaciones C, P y T de los términos (2.8), que describen respectivamente las interacciones dipolares eléctrica y magnética de la partícula de Dirac con un campo electomagnético externo.

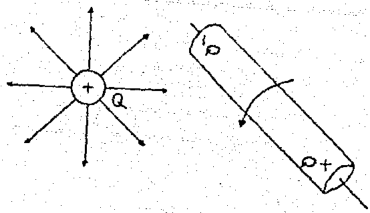

Figura 2.1 Un dipolo eléctrico rotando en el campo electrostático producido por una carga puntual Q.

En la representación de Dirac-Pauli, la transformación de Paridad **P** es tal que ψ y $\hat{\theta}$ —un operador que actue sobre ψ—, cambian a

$$\psi' = \gamma^0 \psi$$

$$\hat{\theta}' = \gamma^0 \hat{\theta} \gamma^0$$

cuando $\vec{x}$ y t cambian a $\vec{x}' = -\vec{x}$, $t' = t$.

Puesto que

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{\sigma}\cdot\vec{B} - i\vec{\alpha}\cdot\vec{E} \tag{2.10a}$$

$$\frac{i}{2}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = i\vec{\alpha}\cdot\vec{B} - \vec{\sigma}\cdot\vec{E} \tag{2.10b}$$

entonces, la transformación actuando sobre estos términos resulta en

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})' = \gamma^0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\gamma^0 = \gamma^0\sigma_k\gamma^0(\epsilon_{ijk}\partial_i' A_j')$$

$$(i\vec{\alpha}\cdot\vec{E})' = i\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\gamma^0 = i\gamma^0\alpha_k\gamma^0(-\partial_t' A_i' - \partial_i'\phi')$$

$$(i\vec{\alpha}\cdot\vec{B})' = i\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{B}\gamma^0 = i\gamma^0\alpha_k(\epsilon_{ijk}\partial_i' A_j')$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{E})' = \gamma^0\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\gamma^0 = \gamma^0\sigma_i\gamma^0(-\partial_t' A_i' - \partial_i'\phi').$$

Puesto que $\sigma_k = i\gamma_i\gamma_j$ y $\alpha_k = \gamma^0\gamma^k$ entonces γ^0 conmuta con σ_k y anticonmuta con α_k; por otro lado, cuando $\vec{x}$ cambia a $\vec{x}' = -\vec{x}$, ∂_i cambia a $\partial_i' = -\partial_i$ y A_j cambia a $A_j' = -A_j$, pues $\vec{A}$ está generado por corrientes que cambian de dirección al invertirse el espacio. De este modo

$$\gamma^0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\gamma^0 = \sigma_k\epsilon_{ijk}(-\partial_i')(-A_j') = \vec{\sigma}\cdot\vec{B}'$$

$$i\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\gamma^0 = i(-\alpha_k)(\partial_t'A_i' + \partial_i'\phi') = i(-\vec{\alpha})\cdot(-\vec{E}') = i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}'$$

pero

$$i\gamma^0\vec{\alpha}\cdot\vec{B}\gamma^0 = -i\alpha_k\epsilon_{ijk}(-\partial_j')(-A_j') = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{B}'$$

$$\gamma^0\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\gamma^0 = \sigma_i)(\partial_t'A_i' + \partial_i'\phi') = \vec{\sigma}\cdot(-\vec{E}') = -\vec{\sigma}\cdot\vec{E}'$$

En consecuencia, el término (2.10 a) es invariante bajo la transformación de paridad, pero el término (2.10 b) no lo es.

La transformación inversión en el tiempo T, actua de tal modo que

$$\psi \to \psi' = i\gamma^1\gamma^3\psi^* = -i\alpha_1\alpha_3\psi^*$$

$$\hat{\theta} \to \hat{\theta}' = (-i\alpha_1\alpha_3)\hat{\theta}^*(-i\alpha_1\alpha_3)$$

cuando $t \to t' = -t$ y $\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x}$. De este modo

$$\mathrm{T}\vec{\alpha}^*\mathrm{T}^{-1} = -\vec{\alpha}$$

$$\mathrm{T}\vec{\sigma}^*\mathrm{T}^{-1} = -\vec{\sigma}.$$

Además, cuando t cambia a $-t$, A_i cambia a $-A_i$, pues las corrientes que generan a $\vec{A}$ cambian de signo si el tiempo se invierte, mientras que $\phi'(t) = \phi(t)$ pues la carga no cambia de signo; como también $\partial_i \to \partial_i' = \partial_i$ entonces

$$\mathrm{T}\vec{B}\mathrm{T}^{-1} = -\vec{B}'$$

$$\mathrm{T}\vec{E}\mathrm{T}^{-1} = \vec{E}',$$

y así

$$\mathrm{T}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})^*\mathrm{T}^{-1} = (-\vec{\sigma})\cdot(-\vec{B}') = \vec{\sigma}\cdot\vec{B}'$$

$$\mathrm{T}(i\vec{\alpha}\cdot\vec{E})^*\mathrm{T}^{-1} = -i(-\vec{\alpha})\cdot\vec{E}' = i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}'$$

$$\mathrm{T}(i\vec{\alpha}\cdot\vec{B})^{*}\mathrm{T}^{-1} = -i(-\vec{\alpha})\cdot(-\vec{B}') = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{B}'$$

$$\mathrm{T}(\vec{\sigma}\cdot\vec{E})^{*}\mathrm{T}^{-1} = (-\vec{\sigma})\cdot(-\vec{E}') = -\vec{\sigma}\cdot\vec{E}'$$

y de este modo, (2.10 a) es invariante ante T pero (2.10 b) no lo es.

Finalmente, la conjugación de carga C es tal que

$$\psi \rightarrow \psi' = i\gamma^{2}\psi^{*}$$

$$\hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}' = i\gamma^{2}(\hat{\theta}^{*})i\gamma^{2}$$

entonces

$$\begin{aligned}(i\vec{\sigma}\cdot\vec{B})' = i\gamma^{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})^{*}i\gamma^{2} &= i\gamma^{2}\sigma_{i}^{*}i\gamma^{2}B_{i}' \\ &= i\gamma^{2}(-i\gamma^{*j}\gamma^{*k})i\gamma^{2}B_{i}' \\ &= -i(i\gamma^{2}\gamma^{*j}i\gamma^{2})(i\gamma^{2}\gamma^{*k}i\gamma^{2})B_{i}'\end{aligned}$$

y recordando que $i\gamma^{2}\gamma^{*\mu}i\gamma^{2} = -\gamma^{\mu}$ resulta

$$i\gamma^{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})^{*}i\gamma^{2} = -i(-\gamma^{j})(-\gamma^{k})B_{i}' = -\vec{\sigma}\cdot\vec{B}'$$

$$i\gamma^{2}(\vec{\alpha}\cdot\vec{E})^{*}i\gamma^{2} = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}'$$

$$i\gamma^{2}(i\vec{\alpha}\cdot\vec{B})^{*}i\gamma^{2} = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{B}'$$

$$i\gamma^{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{E})^{*}i\gamma^{2} = -\vec{\sigma}\cdot\vec{E}'.$$

Si ahora completamos la transformación haciendo el cambio

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu}' = -A_{\mu},$$

debido al cambio en el signo de las cargas y de las corrientes, la conjugación de carga es tal que

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{B} \rightarrow \vec{\sigma}\cdot\vec{B}'$$

$$i\vec{\alpha}\cdot\vec{E} \rightarrow i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}'$$

$$i\vec{\alpha}\cdot\vec{B} \rightarrow i\vec{\alpha}\cdot\vec{B}'$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{E} \rightarrow \vec{\sigma}\cdot\vec{E}'$$

y la transformación es de simetría al actuar tanto sobre (2.10 a) como sobre (2.10 b).

Notamos que pese a que las transformaciones de paridad e inversión en el tiempo no son operaciones de simetría al actuar individualmente sobre (2.10), la simetría bajo la operación **CPT** sí se conserva.

Concluimos el capítulo mencionando que ante la inclusión de los términos (2.8) la covariancia de la ecuación de Dirac así como la hermiticidad del Hamiltoniano y la conservación de la probabilidad, no se alteran. Estas propiedades se muestran en el apéndice B.

[1] V. Šimak. *High energy Physics*. Iliffe books ltd., 1968.

[2] A. Queijeiro. *Derivación de la ecuación BMT para una partícula con espín 1/2 con acoplamientos no mínimos*. Rev. Mex. Fis. vol. 34 I, enero-marzo 1988.

[3] T. D. Lee. *Particle Physics and introduction to field theory*. Harwood academic publishers, 1981.

[4] L. de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. C.E.C.S.A., 1981.

[5] J. Leite López. *Introducción a la electrodinámica cuántica*. Ed Trillas, 1977.

El Oscilador de Dirac

3.1 Introducción. La ecuación oscilador de Dirac.

En un trabajo recientemente publicado [1] M. Moshinsky y A. Szczepaniak han propuesto la ecuación [2]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - im\omega\vec{r}\beta)\psi + m\beta\psi \tag{3.1}$$

que han llamado el *oscilador de Dirac*. Esta es una ecuación de Dirac con el término adicional $im\omega\vec{\alpha}\cdot\vec{r}\beta$ en el Hamiltoniano, que representa un potencial de interacción lineal en $\vec{r}$ y en el que ω es una frecuencia de oscilación.

Al proponer esta ecuación, una de las motivaciones de los autores era conseguir una generalización relativista para el oscilador armónico que permitiera modelar la interacción entre quarks en los hadrones[3].

Como estos autores han mostrado[1], para el caso estacionario y en el límite de bajas energías, la ecuación para las grandes componentes se escribe como

$$\epsilon\varphi = \hat{H}\varphi = [(p^2 + m^2\omega^2 r^2) - 3\omega m - 4m\omega\vec{L}\cdot\vec{S}]\varphi \tag{3.2}$$

en la que ϵ, las energías del problema, resultan ser los eigenvalores del operador H que a su vez es el Hamiltoniano de un oscilador armónico de frecuencia ω junto con un término de interacción spin-órbita de intensidad $-(\frac{2\omega}{\hbar})$.

Una de las propiedades importantes de la ecuación (3.1) es que por su estructura, posee soluciones exactas[1][4].

Notamos sin embargo que (3.1) también presenta una desventaja en el hecho de que su formulación no es explícitamente covariante. En efecto, ante una transformación S del grupo propio de Lorentz, el término $\vec{\alpha}\cdot\vec{r}\beta$ se transforma según [4]

$$\begin{aligned} S\alpha_i r^i \beta S^{-1} &= S\beta\gamma^i r^i \beta S^{-1} \\ &= -S\gamma^i r^i S^{-1} \\ &= -S\gamma^i S^{-1} r'^i \\ &= -\gamma^\mu a^i_\mu r'^i \\ &= -\gamma^\mu a^i_\mu a^i_\nu r^\nu \end{aligned}$$

donde la suma implícita sobre μ y ν corre de 0 a 3, mientras que la suma sobre i corre de 1 a 3, lo que muestra que la regla de transformación no conduce a una expresión covariante.

La covariancia explícita en la formulación de una ecuación relativista es un requisito de principio que además cobra mayor importancia cuando a partir de la ecuación se procede a construir una teoría de campo covariante [5].

Nos proponemos reescribir la ecuación (3.1) llevandola a una forma manifiestamente covariante a partir de su formulación original (sec 3.2). Al conseguirlo, estaremos en posibilidad de proponer un modelo físico que corresponda a la ecuación (sec. 3.3).

3.2 Covariancia explícita de la ecuación de Dirac

El objetivo final de esta sección es escribir la ecuación (3.1) en forma manifiestamente covariante. Es sin embargo conveniente ilustrar el procedimiento a utilizar, valiendonos en primer lugar de una ecuación que aparece con frecuencia en la literatura, la ecuación de Dirac con un término que representa la interacción minimal de una partícula de Dirac con un campo electromagnético externo. Esta es la siguiente ecuación

$$(i\gamma^\mu\nabla_\mu - \epsilon\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0. \tag{3.3}$$

Supongamos que el potencial electromagnético A_μ es, en algún sistema de referencia, el producido por una carga puntual en reposo, es decir, la parte espacial del cuadrivector A_μ, $\vec{A}$

es cero, y la parte temporal, ϕ, se escribe como $\phi = \frac{ze}{r}$. De éste modo, la ecuación (3.3) toma la siguiente forma

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - \beta \frac{ze^2}{r} - m)\psi = 0 \tag{3.4}$$

Olvidemos por lo pronto el orígen de (3.4) y supongamos que se nos presenta como la ecuación de Dirac que describe la interacción de una partícula de Dirac con el campo electrostático externo debido a una carga puntual, en reposo en algún sistema de referencia. Nos preguntamos entonces por el problema inverso; ¿ Cómo llevamos esta última ecuación a la forma (3.3) que es manifiestamente covariante ?

Sea u_μ el cuadrivector de velocidad de la partícula que produce el potencial externo. En el sistema en que la partícula está en reposo, este cuadrivector tiene la forma

$$u_\mu = (1, \vec{0}).$$

Vamos a valernos de este cuadrivector para expresar en términos de escalares de Lorentz las cantidades que aparecen en el término de interacción de la ecuación (3.4). Podemos escribir

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = [-x_\mu x^\mu + (u_\mu x^\mu)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$(x_\mu = (t, \vec{r}))$$

con lo que resulta claro que la cantidad

$$^*\phi = \frac{ze}{r} = \frac{ze}{[-x_\mu x^\mu + (u_\mu x^\mu)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

es un escalar de Lorentz que puede entonces escribirse como el producto de dos cuadrivectores

$$^*\phi = u_\mu A^\mu$$

Además como A_μ, el cuadrivector de potencial electromagnético, es puramente temporaloide, en el sistema de referencia en el que estamos trabajando A_μ y u_μ son proporcionales, y el factor de proporcionalidad es precisamente $^*\phi$, entonces podemos escribir

$$^*\phi u^\mu = A^\mu$$

es decir

$$\frac{ze}{r}u^0 = A^0$$

$$\beta\frac{ze}{r}u^0 = \beta A^0 = \gamma_0 A^0 = \gamma_0 A^0 + \gamma_i A^i$$

$$(\gamma_i A^i = 0 \quad \text{puesto} \quad \text{que} \quad \vec{A} = 0)$$

o finalmente

$$\beta\frac{ze}{r} = \gamma_\mu A^\mu$$

de manera que la ecuación (3.4) puede escribirse como

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0$$

que es la ecuación (3.3) y que es manifiestamente covariante.

Apliquemos el procedimiento al caso del oscilador de Dirac, que escribimos como

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - i\beta\vec{r})\psi + m\beta\psi. \tag{3.5}$$

Multiplicando la ecuación por $\beta = \gamma_0$ y reagrupando tendremos

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - i\gamma^i\gamma^0 r_i - m)\psi = 0$$

o bien como $i\gamma^i\gamma^0 = \sigma^{i0} = -\sigma^{0i}$, podremos escribir (3.5) como

$$(\gamma^\mu p_\mu + \sigma^{0i} r_i - m)\psi = 0 \tag{3.6}$$

ecuación en la que el término $\sigma^{0i} r_i$ puede representar un potencial externo en interacción con una partícula de Dirac, visto desde un sistema de referencia particular.

Nuevamente nos preguntamos como poner en forma manifiestamente covariante esta ecuación. La respuesta consiste en escribir el término $\sigma^{0i} r_i$ en forma covariante valiéndonos del cuadrivector de velocidad $u_\mu = (1, \vec{0})$, que define al sistema de referencia en el que el oscilador está en reposo. Con este cuadrivector podemos escribir

$$\sigma^{0i} r_i = \sigma^{0\nu} r_\nu,$$

(puesto que $\sigma^{\mu\nu}$ es antisimétrico)

$$\sigma^{0\nu}r_\nu = \sigma^{0\nu}u_0 r_\nu = \sigma^{\mu\nu}u_\mu r_\nu.$$

Si finalmente hacemos que el tensor $u_\mu r_\nu$ sea explícitamente antisimétrico, podemos escribir

$$\sigma^{0i}r_i = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}(u_\mu r_\nu - u_\nu r_\mu) = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$F_{\mu\nu} = (u_\mu r_\nu - u_\nu r_\mu)$$

de modo que la ecuación (3.6) puede escribirse como

$$(\gamma_\mu p_\mu + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m)\psi = 0 \tag{3.8}$$

la cual es manifiestamente covariante puesto que $F_{\mu\nu}$ es un tensor (antisimétrico) de segundo rango.

Hemos por lo tanto alcanzado nuestro propósito. En la siguiente sección, vamos a utilizar este resultado para dar un significado físico a la ecuación (3.8) en términos de la interacción de una partícula de Dirac con un potencial específico externo.

3.3 Modelo físico para el oscilador de Dirac.

Hemos mencionado, en analogía con la ecuación (3.4), que el término $\sigma^{0i}r^i$ en (3.6) puede representar la interacción de algún potencial externo con una partícula de Dirac, descrita desde el sistema de referencia particular en el que el oscilador está en reposo, y hemos mostrado también que este término puede escribirse como $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ el cual es manifiestamente covariante dado que $F^{\mu\nu}$ es un tensor (antisimétrico) de segundo rango.

Juntando todos los elementos hasta ahora discutidos, estamos en posibilidad de dar una interpretación cualitativa y cuantitativa del tipo de potencial de interacción que en (3.8) representa el término $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Como hemos visto en el capítulo anterior (sec. 2.3), para describir la interacción dipolar magnética *anómala* de una partícula de Dirac con un campo electromagnético externo, agregamos a la ecuación de Dirac el término

$$\frac{\kappa\epsilon}{4m}\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.9}$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético en interacción con el spin $\sigma^{\mu\nu}$ de la partícula. El término (3.9) contribuye con el factor adicional $2\kappa_i$ a la intensidad de la interacción del spin de la partícula con el campo magnético externo. De este modo, si identificamos a (3.9) con el término de interacción en (3.8), éste puede entenderse entonces como la interacción del momento dipolar magnético de una partícula de Dirac con un campo electromagnético externo en la que además $\kappa' = \frac{2m}{e}$.

Como $F^{\mu\nu} = (u_\mu r_\nu - u_\nu r_\mu)$, en el sistema de referencia en el que el oscilador está en reposo $u_\mu = (1, \vec{0})$, y por lo tanto $F_{\mu\nu}$ tiene la forma

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir $F^{\mu\nu}$ tiene solo componentes eléctricas. Se trata entonces (en este sistema) de un campo electrostático cuya expresión explícita es

$$\vec{E} = \vec{r}.$$

Por la ley de Gauss, sabemos que este campo es producido por una distribución uniforme de carga. En efecto, puesto que

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\vec{E} = \vec{r},$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3,$$

de donde

$$\rho = \frac{3}{4\pi} = cte.$$

Vemos que bajo esta interpretación surge de inmediato la siguiente pregunta. ¿ Cuál es el proceso que permite entender en términos clásicos la interacción de un dipolo magnético con un campo puramente electrostático ?

Podemos esbozar una respuesta cualitativa en los siguientes términos: De acuedo con la teoría de Dirac, las partículas de Dirac están sujetas a un movimiento de oscilación azarosa alrededor de su trayectoria clásica. Este movimiento es conocido como *Zitterbewegung* y su frecuencia característica es del orden de [6]

$$\frac{2p_0c}{h} \geq \frac{2mc^2}{h}.$$

Esta peculiaridad de las soluciones de la ecuación de Dirac se entiende si se recuerda que en la teoría el operador de velocidad es $c\vec{\alpha}$ y que los eigenvalores de $\vec{\alpha}$ son ± 1 y por lo tanto, si se mide la velocidad de las partículas de Dirac, ésta resulta ser, aun en su sistema propio, $\pm c$, la velocidad de la luz. Por supuesto la velocidad promedio alrededor de su trayectoria clásica resulta ser cero.

Si además tomamos en cuenta que según los resultados del capítulo 1 (sección 1.4), un dipolo magnético en movimiento induce la aparición de un momento dipolar eléctrico transversal, estamos en condiciones de dar una posible respuesta a la pregunta anterior. Es el movimiento azaroso o *Zitterbewegung* al que está sujeto la partícula de Dirac, el responsable de que junto con el momento dipolar magnético asociado a la partícula, aparezca un momento dipolar eléctrico transversal, el cual puede interactuar, en términos clásicos, con el campo electrostático externo, y como la velocidad de la partícula sujeta a este movimiento es $\pm c$, la fuerza sobre la partícula vendrá dada por

$$F_{UR} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\perp}).$$

La energía correspondiente a la frecuencia del *Zitterbewegung* es

$$E = \omega h = 2p_0 \geq 2mc^2.$$

Esta energía es suficiente para permitir la creación y aniquilación de pares. Si pensamos que este proceso se lleva a cabo constantemente en la partícula de Dirac, e imaginamos que al crearse y hasta aniquilarse, cada partícula sigue una trayectoria semicircular confinada a la patícula de Dirac entonces la trayectoria de ambas partículas cargadas produce un rizo de corriente y por lo tanto un momento dipolar magnético perpendicular al plano de estas trayectorias y de intensidad (ec.1.6)

$$\mu = \frac{1}{2c} 2evr$$

donde v y r son la rapidez de las partículas y el radio de sus trayectorias respectivamente. Si identificamos a ω_0, la frecuencia de revolución de las partículas con la frecuencia ω asociada a la energía del zitterwebegung, dada por

$$\omega \sim \frac{2mc^2}{\hbar},$$

entonces

$$v = \omega_0 r = \frac{2mc^2}{\hbar} r$$

y en consecuencia

$$\mu = \frac{2mce}{\hbar} r^2. \tag{3.10}$$

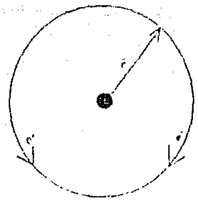

Figura 3.1 El momento dipolar magnético producido por las trayectorias de las partículas creadas es perpendicular al plano de la hoja y apunta hacia afuera.

Este modelo, simple como es, nos permite calcular un valor aproximado para el radio clásico de las partículas de Dirac, si conocemos su momento dipolar magnético. Por ejemplo, como hemos visto, la magnitud del momento dipolar magnético del neutrón es $\mu_n = 1.91\mu_B$; igualando este momento al dado por la expresión (3.10) resulta

$$\begin{aligned} r_n =& \sqrt{1.91} \frac{\hbar}{2mc} \\ \sim& 0.2 fm. \end{aligned}$$

REFERENCIAS

[1] M. Moshinsky and A. Szczepaniak. *The Dirac oscillator.* J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1989) L817-L819.

[2] En 1971, Dirac propuso una ecuación con una estructura semejante al *oscilador de Dirac* para describir estados de energía positiva de particulas con masa. Ver P.A.M. Dirac, F.R.S. *A positive-energy relativistic wave equation* Proc. Roy. Soc. London. A. 322, 435-445 (1971).

[3] M. Moshinsky y A. Sánchez. *Las tres caras de la espectroscopía: atómica, nuclear y subnuclear.* Rev. Mex. Fis. vol. 34, 3 julio-sep, 1988.

[4] J. Benitez, H. N. Nuñez-Yepez, R. P. Martínez y Romero, A. Zentella, A. L. Salas-Brito. *The Dirac oscillator: An interesting, exactly soluble problem in relativistic quantum mechanics.* Preprint.

[5] J. D. Bjorken and S. D. Drell op. c.

[6] M. Moreno and A. Zentella. *Covariance C. P. T. and the Foldy-Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator.* Jour. of Physics A: Math. Gen. 22 L821-L825 (1989).

[7] E. Merzbacher. *Quantum mechanics second edition.* New York John Willey, 1970.

CONCLUSION

Resumiendo, hemos interpretado el término de interacción en el oscilador de Dirac como el acoplamiento entre el momento dipolar magnético de la partícula de Dirac y un campo electromagnético externo y hemos hecho ver que en el sistema en el que el oscilador está en reposo, el campo externo es puramente electrostático y la interacción puede entenderse en términos del movimiento azaroso al que está sujeta la partícula, el cual induce la aparición de un momento dipolar eléctrico transversal al momento magnético, que se acopla con el campo externo.

Cabe mencionar que esta interpretación para el oscilador de Dirac presenta dos dificultades que deben señalarse.

Primero. Nuestro modelo presupone la definición de un sistema propio para la partícula de Dirac, esto significa que en un diagrama espacio-tiempo puede dibujarse una linea de universo que represente la trayectoria de la partícula como función de la coordenada temporal. Sin embargo puesto que estamos tratando con un problema de naturaleza cuántica, no podemos en principio hablar de la trayectoria de la partícula, pues tanto $\vec{r}$ como t son variables de campo que permiten definir, cuando más, valores esperados de, por ejemplo, la posición o la trayectoria de la partícula.

Segundo. Para explicar la aparición del dipolo eléctrico que da cuenta de la interacción de la partícula de Dirac con el campo externo, hemos recurrido al movimiento de *Zitterwebegung* propio de las partículas de Dirac. No obstante para la aparición de este dipolo eléctrico, es suficiente con que las condiciones iniciales de la partícula no sean de reposo. Nuevamente tenemos que, puesto que se estudia un problema cuántico, y más aún, en presencia de una interacción, es de esperarse que no pueda establecerse con certeza un instante de reposo para la partícula y en consecuencia que el movimiento que genera la aparición del dipolo eléctrico sea una combinación de efectos cuánticos (zitterwebegung) y de interacción con el campo externo.

En respuesta a estas objeciones, baste decir que nuestro objetivo se limita a proponer un modelo culitativo que permita obtener una imágen física de un problema originalmente matemático y que no se ha pretendido abordar el problema desde el punto de vista de los problemas señalados que quedan lejos del alcance de este trabajo.

APENDICE A

La ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac fué propuesta originalmente como una solución a los problemas que la sustitución cuántica $E \rightarrow \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\nabla$ introducía en la relación $E^2 = p^2c^2 - m^2c^4$, al resultar en una ecuación de segundo orden en las derivadas temporal y espaciales, que además impide definir una densidad de probabilidad positiva definida y permite la posibilidad de un espectro con energías negativas.

La ecuación de Dirac no elimina el espectro de energías negativas, sin embargo su interpretación en el contexto de la teoría de Dirac, permitió la exploración de nuevas y más ricas propiedades de las partículas *elementales* que han contribuido de manera esencial a un mejor entendimiento de su naturaleza.

Nos preguntamos si es posible respetar las reglas de cuantización y a la vez escribir una ecuación con la estructura

$$\begin{aligned} \hat{E}\psi &= \hat{H}\psi \\ \hat{H} &= (c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta) \end{aligned} \tag{A.1}$$

de primer orden, con $\vec{\alpha}$ y β cantidades adimensionales. Tomando el cuadrado del operador Hamiltoniano e imponiendo la condición

$$(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

tendremos entonces una ecuación cuántica y relativista. La condición se satisface si las cantidades α_i, β satisfacen a su vez las condiciones

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij} \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \\ \beta^2 = (\alpha_i)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{A.2}$$

lo que significa que las α_i, β son operadores que podemos representar como matrices numéricas. Entonces, el problema se transforma al de encontrar cuantro matrices con las propiedades (A.2) para introducirlas en la ecuación (A.1), en la que ψ es ahora una matriz columna con tantas componentes como la dimensión de las matrices anteriores lo requiera. De estas componentes, necesitamos dos para asociarlas con los estados de polarización del spin. Sin embargo, como no existen cuatro matrices de 2×2 que anticonmuten entre si, necesitamos buscar matrices de mayor dimensión. Este hecho es reflejo de que la ecuación es relativista y permite la posibilidad de dos estados de energía asociados con cada estado de polarización. Así pues, el número de componentes de ψ será $2(2s+1)$, que para $s = \frac{1}{2}$ se reduce a 4.

Como hay una gran variedad de matrices de 4×4 que anticonmutan, habremos de escoger una representación y, tener en mente la equivalencia entre representaciones para la descripción.

Una representación explícita de matrices con las propiedades buscadas es la representación de Dirac-Pauli

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ es el vector cuyas componentes son las matrices de 2×2 de Pauli e I es la matriz unidad de 2×2.

Multiplicando la ecuación (A.1) por la izquierda por $\frac{\beta}{c}$ y con las definiciones

$$\gamma^0 = \beta, \gamma^i = \beta\alpha_i, x^0 = ct$$

podemos escribirle como

$$i\hbar(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3})\psi - mc\psi = 0. \tag{A.3}$$

De su definición, podemos ver que γ^i son matrices antihermiteanas y que $(\gamma^i)^2 = -1$, $(\gamma^0)^2 = 1$ y también que en la representación escogida se cumple que

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \tag{A.4}$$

La propiedad (A.2) puede escribirse ahora como

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.5}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico que tomaremos como

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{cases} \ \ \ 1, \text{ si } \nu = \mu = 0, \\ - \ 1, \text{ si } \nu = \mu = i. \end{cases}$$

La ecuación (A.3) es covariante en el sentido de que, bajo una transformación de coordenadas $x'^{\nu} = a^{\nu}_{\mu} x^{\mu}$, con la que ψ cambia a

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x), \tag{A.6}$$

la ecuación, en el sistema primado se escribe como

$$(i\hbar S(a)\gamma^{\mu} S^{-1}(a)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc)\psi'(x') = 0$$

y puesto que $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = a^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}$, la ecuación

$$(i\hbar S(a)\gamma^{\mu} S^{-1}(a) a^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - mc)\psi'(x') = 0$$

es invariante si exigimos que $S(a)$ se tal que

$$S(a)\gamma^{\mu} S^{-1}(a) a^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\nu}$$

o equivalentemente que

$$a^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu} = S(a)\gamma^{\mu} S^{-1}(a). \tag{A.7}$$

Finalmente, introducimos la matriz γ_5 definida por

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Covariancia, hermiticidad y conservación de la probabilidad en la ecuación de Dirac

Los términos $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $i\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ mantienen la covariancia de la ecuación de Dirac al ser agregados a ésta; en efecto, ante el cambio de coordenadas

$$x'^{\nu} = a^{\nu}_{\mu}x^{\mu}$$

$$\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \to S\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}S^{-1}$$

$$S\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}S^{-1} = S\sigma_{\mu\nu}S^{-1}F^{\mu\nu}$$

pero

$$\begin{aligned} S\sigma_{\mu\nu}S^{-1} =& \frac{i}{2}S(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)S^{-1} \\ =& \frac{i}{2}(S\gamma_\mu S^{-1}S\gamma_\nu S^{-1} - S\gamma_\nu S^{-1}S\gamma_\mu S^{-1}) \end{aligned}$$

y de (A.7)

$$\begin{aligned} S\sigma_{\mu\nu}S^{-1} =& \frac{i}{2}(\gamma_\alpha a^{\alpha}_{\mu}\gamma_\beta a^{\beta}_{\nu} - \gamma_\beta a^{\beta}_{\nu}\gamma_\alpha a^{\alpha}_{\mu}) \\ =& \frac{i}{2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)a^{\alpha}_{\mu}a^{\beta}_{\nu} \\ =& \sigma_{\alpha\beta}a^{\alpha}_{\mu}a^{\beta}_{\nu} \end{aligned}$$

es decir

$$S\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}S^{-1} = \sigma_{\alpha\beta}a^{\alpha}_{\mu}a^{\beta}_{\nu}F^{\mu\nu} = \sigma_{\alpha\beta}F'^{\alpha\beta}. \qquad (B.1)$$

De igual manera, los términos $\beta\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $i\beta\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ incluidos en el hamiltoniano de Dirac, preservan la hermiticidad del mismo; para el primer término

$$\begin{aligned} (\beta\sigma_{\mu\nu})^\dagger =& \sigma^\dagger_{\mu\nu}\beta \\ =& (i\gamma^\mu\gamma^\nu)^\dagger\beta = -i\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger}\beta \\ =& -i\beta\beta\gamma^{\nu\dagger}\beta\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta \end{aligned}$$

y utilizando (A.4)

$$(\beta\sigma_{\mu\nu})^\dagger = -i\beta\gamma^\nu\gamma^\mu = -i\beta\gamma_\nu\gamma_\mu = i\beta\gamma_\mu\gamma_\nu = \beta\sigma_{\mu\nu}. \qquad (B.2)$$

Para el segundo término

$$
\begin{aligned}
(i\beta\gamma_5\sigma_{\mu\nu})^\dagger &= -i\sigma^\dagger_{\mu\nu}\gamma_5\beta \\
&= -i(i\gamma^\mu\gamma^\nu)^\dagger\gamma_5\beta = -i(-i\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger})\gamma_5\beta \\
&= -\beta\beta\gamma^{\nu\dagger}\beta\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta\beta\gamma_5\beta
\end{aligned}
$$

y utilizando nuevamente (A.4) junto con $\beta\gamma_5\beta = -\gamma_5$

$$(i\beta\gamma_5\sigma_{\mu\nu})^\dagger = \beta\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_5 = -\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5 = -\beta\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = -(-i)\beta\gamma_5(i)\gamma_\mu\gamma_\nu = i\beta\gamma_5\sigma_{\mu\nu}. \qquad (B.3)$$

Finalmente, la inclusión de éstos términos en la ecuación de Dirac, no altera la conservación de la probabilidad; en efecto, por (B.2) y (B.3),

$$\psi^\dagger\beta\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + \psi^\dagger i\beta\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi - \psi^\dagger(\beta\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^\dagger\psi - \psi^\dagger(i\beta\gamma_5\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^\dagger\psi = 0$$

de modo que el procedimiento usulal [1] conduce a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \qquad (B.4)$$

con la identificación $\rho = \psi^\dagger\psi$, $\vec{j} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$. Integrando la ecuación (B.4) sobre todo el espacio, utilizando el teorema de Green, establecemos la concervación de la probabilidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\psi^\dagger\psi = 0.$$

[1] ver por ejemplo Bjorken and Drell, op. c.