2 ej
6

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIFERENTES POSICIONES SOBRE LAS APLICACIONES DE LAS MATEMATICAS Y ANALISIS CRITICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A

ESPERANZA ALICIA ANZALDO MENESES

ASESOR: DR. ALEJANDRO LOPEZ YAÑEZ

MEXICO D.F. 1989

C O N T E N I D O .

INTRODUCCION

Las Matemáticas se estudian en la escuela, pero..¿Por qué?, ¿Porque así debe de ser ?, ¿Porque siempre ha sido así?, o ¿Porque son útiles?.

El estudio de las Matemáticas da un cierto "pensamiento matemático" que ayuda al que las estudia en sus actividades, ya que le enseñan a sistematizar, a analizar, a desprender de una situación lo importante y a deshechar lo superfluo, y a deducir de ciertas premisas y "operaciones", resultados.

Por esta sola razón se acabaría por pensar que es importante estudiar Matemáticas, ya que servirá y será útil en este sentido, para fines futuros.

Además de esto, las Matemáticas se aplican, es decir que sus contenidos serán utilizados en otra disciplina, ya sea científica, técnica, artística o social, como herramienta o para desarrollar una Teoría en esa disciplina; en este caso, lo mejor sería hacer uso del "pensamiento matemático" y de los contenidos matemáticos que se requieran para obtener mejores resultados; por ejemplo, si un Ingeniero además de usar ciertas fórmulas matemáticas meramente como una receta médica, supiera un poco más del procedimiento matemático para obtenerlas, echando mano del razonamiento deductivo y de sus conocimientos de Ingeniería, podría desarrollar una nueva Teoría en su rama.

De lo anterior se puede deducir que efectivamente las Matemáticas son útiles. El cómo aplicar las Matemáticas ya sería un tema de la Enseñanza de las Matemáticas y tiene que ver directamente con técnicas educativas, determinación de contenidos y a la situación dentro y fuera del salón de clase.

El Maestro de Matemáticas al enfrentarse a los alumnos en el salón de clase, encuentra que su tema es muy árido y aislado de todo lo demás. Es muy frecuente que los alumnos tengan una aversión hacia las Matemáticas debido a ésto y a otros factores más, aunado con la falta de aplicaciones concretas ya sea a su vida común, o a las demás materias que llevan junto con Matemáticas.

Los alumnos cada vez están más interesados e inquietos por saber para qué les va a servir lo que están aprendiendo, y ésto puede ser debido a que la situación actual del país les exige tener una preparación adecuada para salir adelante.

Pero, aparte de que las Matemáticas se aplican, existe otro concepto que es el de las MATEMATICAS APLICADAS , ¿qué son las Matemáticas Aplicadas?, ¿para qué sirven?. De hecho, ésta tesis surgió de la necesidad de responder a estas preguntas. Por ejemplo, podríamos pensar que Computación, Probabilidad y Estadística son Matemáticas Aplicadas, y que Algebra o Topología no lo son. Estas preguntas no se pueden responder inmediatamente y se plantean como un problema complejo ahondando un poco más.

El propósito de este trabajo es el de orientar y de proporcionar al lector, elementos para tener una visión más clara de lo que son las Matemáticas Aplicadas, de que las Matemáticas son útiles, de que se aplican y de cómo se aplican; para lo cual hice una exhaustiva revisión en 26 revistas Matemáticas y algunos libros, de cerca de 100 artículos de los que seleccioné 21 artículos básicos, dejando los demás incluídos como información adicional.

Para la consulta de las revistas acudí a la Biblioteca de las Facultad de Ciencias, a la del Departamento de Matemáticas de la UNAM, a la del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV del IPN, a la Biblioteca de la UAM Iztapalapa y a la del CIMAT en Guanajuato.

Las revistas en las que encontré información fueron:

1. *Bulletin. The Institute of Matemathics and its Applications*
2. *Educational Studies in Mathematics*
3. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*
4. *Mathematics Magazine*
5. *Mathematics Teacher*
6. *Mathematics Teaching*
7. *Notices of the American Mathematical Society*
8. *School Science and Mathematics*
9. *The American Mathematical Monthly*

10. The Mathematical Intelligenser

11. The UMAP Journal

12. Two Years College Mathematical Journal

Clasifiqué los artículos por temas aunque muchas veces cada artículo toca varios temas, por lo cual son mencionados en diferentes ocasiones. El orden de esta clasificación se debe a que consideré importante primero dar a conocer que hay Matemáticos que opinan que no existen las Matemáticas Aplicadas, ¿cómo hablar de Matematicas Aplicadas si no se sabe si es correcto siquiera hablar de ellas?. Enseguida partiendo de opiniones de que sí existen las Matemáticas Aplicadas y por lo tanto se pueden carcterizar y hablar de ellas mas ampliamente, continúo con los artículos sobre su carácter, su método y su enseñaza.

De modo que la estructura del trabajo es la siguiente:

Primeramente artículos sobre la <u>existencia</u> misma de las Matemáticas Aplicadas, en donde encontraremos opiniones muy radicales en cuanto a fundamentos y a la Historia de las Matemáticas, al concepto de la Matemática como un todo y no algo separado en varias ramas o procedimientos.

En segundo lugar artículos en donde los autores piensan que <u>sí existen</u> las Matemáticas Aplicadas y las Matemáticas Puras aunque no lo digan algunos de ellos explícitamente, se deduce por su inclinación de caracterizarlas por su contenido y su método, incluso con diagramas sinópticos para trazar algunas relaciones entre los diferentes temas.

En tercer lugar, artículos sobre lo que es un MATEMATICO APLICADO, lo que hace y cómo desarrolla su actividad. También la diferencia entre un Matemático Aplicado y uno Puro, y de un "aplicador" de Matemáticas.

En cuarto lugar artículos sobre la <u>distinción</u> entre el trabajo de las Matemáticas Aplicadas y el de las Matemáticas Puras ;por su método y haciendo analogías con el arte, la Física y la Música. Son artículos donde se contrapuntean las Matemáticas Aplicadas y las Matemáticas Puras.

En quinto lugar, artículos sobre la MODELACION MATEMATICA, el concepto de MODELO, principios de la Modelación Matemática, sus procedimientos, explicación de cada paso de la modelación: Construcción, Formulación, Simplificación, Solución Matemática, Comparación, Valuación, Revisión, etc.

En sexto lugar artículos donde "atacan" a las Matemáticas Aplicadas, argumentando que son insulsas y triviales, y donde se destaca la prístina belleza de la Matemática Pura.

En séptimo lugar artículos sobre la Enseñanza de las Matemáticas Aplicadas; de cómo enseñar Matemáticas que sean útiles y cómo enseñar a aplicar Matemáticas.

En octavo lugar, artículos con ejemplos de algunas aplicaciones de las Matemáticas en donde se analizan ejemplos claros y sencillos y otros más sofisticados de un nivel un poco más alto.

Finalmente incluí un apéndice en donde incluyo un artículo que es una contrapartida a los artículos anteriores, el cual trata de una entrevista al Profesor Fomenko, un eminente Matemático soviético que ilustra libros de texto de Topología con "diagramas libres", como él mismo llama, para dar una idea más clara de los objetos matemáticos que se discuten. Así como una homerobibliografía clasificada por temas y por autor.

Por último debo señalar que las referencias a los artículos no son traducciones literales generalmente, sino literarias, son síntesis que he ido intercalando segun ha sido necesario. Además en cada capítulo y en el apéndice, solamente al final de cada capítulo o bien al final de éstos incluyo comentarios míos, y todo lo demás son opiniones de los Matemáticos y Científicos a quien hago referencia.

1. EXISTEN LAS MATEMATICAS APLICADAS?

¿Es posible dividir a las Matemáticas?. Según opiniones que inmediatamente transcribiré no es posible debido a que ven a las Matemáticas como un universo unificado en donde todo es posible debido a las interrelaciones entre sus temas y procedimientos y a su historia misma.

1.1. M.L. Cartwright apunta que

> *Los orígenes de algunas de las Matemáticas más puras y abstractas fueron trazados a través de Series de Fourier con cuerdas vibrantes y también a través de la Teoría de los Números Irracionales para la Geometría Griega; aunque las Matemáticas Puras de los últimos 100 a 150 años han seguido para su propio beneficio.*
>
> *Por otro lado, muchos desarrollos importantes nuevos en Matemáticas Puras, fueron iniciados entera y específicamente para usarlos en alguna aplicación. Por ejemplo, en las contribuciones de Newton al Cálculo, la Teoría de la Probabilidad, Investigación de Operaciones y la Teoría de Control.*

Para distinguir las Matemáticas Puras de las Aplicadas cabe la pregunta: ¿Es el trabajo matemático verdaderamente abstracto y separado de toda aplicación?, ¿Será más matemático si es verdaderamente abstracto y continúa sólo para su propio provecho?...

Ahondando en los comienzos de la Matemática, hay plena evidencia para mostrar que el poder de la completa abstracción aparece muy despacio, y por cierto, es probable que mucha gente no la obtenga en un sentido muy estricto.

Los Griegos desarrollaron la Teoría de la Geometría y fueron los primeros en deliberar un desarrollo de un sistema lógico en las Matemáticas. ¿ Es posible que su Geometría no fuera verdaderamente abstracta y que los símbolos de punto y línea estuvieran en cierto modo fijamente unidos con los abstractos punto y línea?, ¿La Geometría y los conceptos espaciales son realmente parte de las bases de las Matemáticas o son un campo de aplicación similar al de la Mecánica?.

El pensamiento espacial ha llevado a una Teoría altamente abstracta de los números irracionales de Cantor y Dedekind. Las Ciencias físicas han dado el ascenso al Cálculo (con ayuda *de la Geometría), la Estadística y la Probabilidad tienen sus bases en numerosos problemas prácticos...*

A.Robinson en "Some thoughts on the History of Mathematics" dice:

> *La Geometría de Euclides fue supuesta para tratar con objetos reales, ya sea en el mundo físico o en algún mundo ideal.Las definiciones que prologan muchos libros de los Elementos están supuestas para comunicar de qué objeto el autor esta hablando, como la famosa definición del punto y línea. La importancia fundamental de la Geometría No-Euclideana es por la contradicción del axioma de las paralelas que niega la unicidad de conceptos geométricos y por lo tanto su realidad.*

Resulta difícil separar las Matemáticas de sus aplicaciones. Algunos Matemáticos Puros hacen su Matemática pensando en ideas físicas y espaciales.

La división entre el pensamiento estrictamente abstracto en Matemáticas y el pensar del mundo real, no está claramente definida ya que algunos de los desarrollos mayores en Matemáticas como el Cálculo, fueron hechos a través de términos del mundo real. (1)

1.2.J.A.Adam opina que

La clasificación de las Matemáticas en "aplicadas" y "puras" es artificial. A veces una teoría es sugerida por una experiencia concreta. de la que es deprendida por un proceso de abstracción (por ej. Ecuaciones Diferenciales). Y a veces una Teoría es trabajada en un ejercicio puramente intelectual en una primera etapa y sólo después se prueba que tiene una aplicación significativa (por ej. Cálculo Tensorial)...

La Matemática es una sola, pero el método que usa un Matemático, ya sea escogiendo axiomas de un mundo natural, o bien, de un mundo abstracto es lo que lo hace Aplicado o Puro.
El problema principal no es tanto cómo es que las Matemáticas producen verdades, sino más bien, la naturaleza de la correspondencia entre la "realidad fisica" y su representación matemática. (2)

1.3. B.L. Moiseiwitch escribe

Courant opina que no puede haber una línea divisoria entre las Matematicas "Puras" y "Aplicadas". Puesto que las proposiciones primitivas o axiomas, las definiciones y la terminología de la Geometría, Algebra, y Análisis, han sido escogidos por Matemáticos con el mundo externo en mente. Las nociones de punto, línea, vector, superficie, distancia, área, volúmen, etc. todas ellas estan estrechamente asociadas con la realidad física...

Sin embargo, es de notar que sí existen las <u>Matemáticas Aplicables</u>, es decir, los métodos matemáticos que son las Matemáticas que usan los Ingenieros, Físicos, Quimicos, Biólogos, Ecónomos, etc.

No obstante lo anterior, fijándose en la Historia de las Matemáticas , parece completamente aceptable sugerir que las Matemáticas Aplicadas empezaron con la introducción de la Teoría de Flujo y Dinámica de Newton, basadas en los estudios de Galileo concernientes con la Ciencia del movimiento. (3)

Finalmente terminaré con esta lista de opiniones citando a Hermite en una carta a Stieljes el 8 de Nov. de 1882:

> *Estoy del todo convencido de que las más abstractas especulaciones del Análisis son evidencias de realidad que existen fuera de nosotros mismos y que eventualmente vendrán a nuestra atención. El trabajo de los Geómetras Puros está dirigido, sin su conocimiento, hacia tal fin, y la Historia de la Ciencia prueba que un descubrimiento matemático surge en el momento preciso en que es necesitado para cada avance nuevo en el estudio de aquellos fenómenos del mundo real que son sujetos de cálculo...*

N O T A S

1. *M.L. Cartwright* *Mathematics and thinking Mathematically*
The Amer. Math. Monthly V77(1981) P.P.20-28

2. *J.A. Adam* *Some thoughts of Mathematical Statements*
Bull. The Inst. of Math. and its Applic.
V17(1981)#1.p.p.21-25

3. *B.L. Moiseiwitch* *What is Applied Mathematics*
Bull. The Inst. of Math. and its Applic.
V17(1981)#7,p.p.130-132

2. MATEMATICAS APLICADAS: SUS ORIGENES SUS CONTENIDOS, SU METODO.

Las Matemáticas Aplicadas sí existen y por lo tanto son susceptibles de caracterizarlas por sus contenidos y su método.

2.1. F.J. Murray explica

Las Matemáticas Aplicadas tienen su desarrollo después de la guerra y están asociadas con las máquinas computadoras automáticas. Esta "nueva" disciplina debe establecerse a nivel profesional dándole una educación apropiada. En las Matemáticas Aplicadas se relacionan las Matemáticas y las Ciencias Físicas, y hay tres caminos para lograrlo:

1. Utilitario: los resultados e información de estas ciencias están formulados en términos matemáticos y por lo tanto para aplicar este conocimiento se debe usar Matemáticas.

2. Conceptual: ideas y procedimientos de las Ciencias Físicas tienen en su lado teórico orígen matemático, el entendimiento de conceptos *matemáticos es escencial para entender estas ciencias.*

3. *Los Matemáticos son por sí mismos creativos; desarrollan conceptos y procedimientos para su propio beneficio.* (1)

2.2 Dorothy Bernstein explica

Hay un intercambio contínuo y fructífero entre la ciencia y las Matemáticas desde muy al principio. Nadie puede predecir qué Matemáticas serán útiles para aplicaciones o cuándo sucederá ésto.

Las ideas matemáticas pueden originar conceptos abstractos y entonces tener aplicaciones útiles, o bien, originarse en el contexto de las aplicaciones y ser generalizadas en conceptos abstractos. (2)

2.3. H.P. Greenspan explica y define

Las Matemáticas Aplicadas sufren aún de una imagen amorfa, debido principalmente a la necesidad de una presentación precisa y aceptada de su filosofía básica y de su contenido distintivo. Sin embargo, las Matemáticas Aplicadas crean una disciplina nueva por su desarrollo, cuya existencia está asegurada por única, indispensable, de investigación en altos niveles intelectuales y una estimulante intervención con otros campos científicos.

Las Matemáticas Aplicadas son el estudio matemático de conceptos , principios y fenómenos científicos generales. Donde al sujeto se le interpreta como una ciencia, ya que el objetivo principal es el conocimiento del mundo real. Los progresos son medidos así, y los resultados están sujetos a pruebas experimentales y de verificación. Al respecto, el rigor y la elegancia del análisis son subordinados, como los resultados, a la verdad y validez del conocimiento obtenido, además de una correlación entre los objetivos.

Para enumerar los contenidos específicos de las Matemáticas Aplicadas es necesario identificar los conceptos, principios y fenómenos, que por su extensa ocurrencia y aplicación relaciona o unifica varios campos de estudio. (3)

2.4.B.L. Moiseiwitch escribe

Russel en su ensayo "Matemáticos y los Metafísicos" escribe:

> *nosotros partimos en Matemáticas Puras de ciertas reglas de inferencia, con las que inferimos que si una proposición es cierta, entonces así lo será otra proposición. Si tomamos cualquier hipótesis acerca de cualquier cosa y no acerca de una o más cosas particulares, entonces nuestras deducciones constituyen Matemáticas. Así, las Matemáticas pueden ser definidas como el tema en que nosotros nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que estamos diciendo es cierto.*

Si se toma como literalmente cierto lo que dice Russell, inevitablemente se concluiría que en Matemáticas Aplicadas debemos conocer lo que estamos hablando, y es importante que lo que digamos en Matemáticas Aplicadas sea cierto.

¿Qué es lo que estudian los Matemáticos?

Matemáticas Puras: Lógica Simbólica, Teoría de Conjuntos, Teoría de Números, Algebra, Teoría de Grupos, Geometría, Espacios Vectoriales, Topología, Análisis Real, Análisis Complejo, Análisis Tensorial.

Matemáticas Aplicadas: Dinámica Newtoneana, Dinámica de Fluidos, Elasticidad, Movimiento de Onda, Conducción de Calor, Teoría Electromagnética, Teoría Cuántica, Mecánica Estadística, Teoría de la Relatividad, Teoría de Partículas Elementales.

En esta clasificación no se consideran las Matemáticas Aplicables. Ni se hace mucha énfasis en la Teoría de la Probabilidad, Estadística, Investigación de Operaciones o Análisis Numérico, sino más bien en temas tradicionales de las Matemáticas.

Hay además temas que podrían ser pensados como pertenecientes a las Matemáticas Puras o a las Matemáticas Aplicadas dependiendo del contexto de estudio: Algebra Vectorial y Análisis, Análisis Tensorial, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y

Parciales, Análisis de Fourier, Transformadas Integrales y Cálculo de Variaciones.

En el siguiente diagrama vienen mostrados estos temas, con sus interrelaciones y con otros temas del quadrivium: Aritmética, Geometría, Astronomía y Música, formando los fundamentos históricos de las Matemáticas. Aunque hay muchas interconexiones entre diferentes temas que no ha sido ni remotamente posible mostrar en el diagrama:

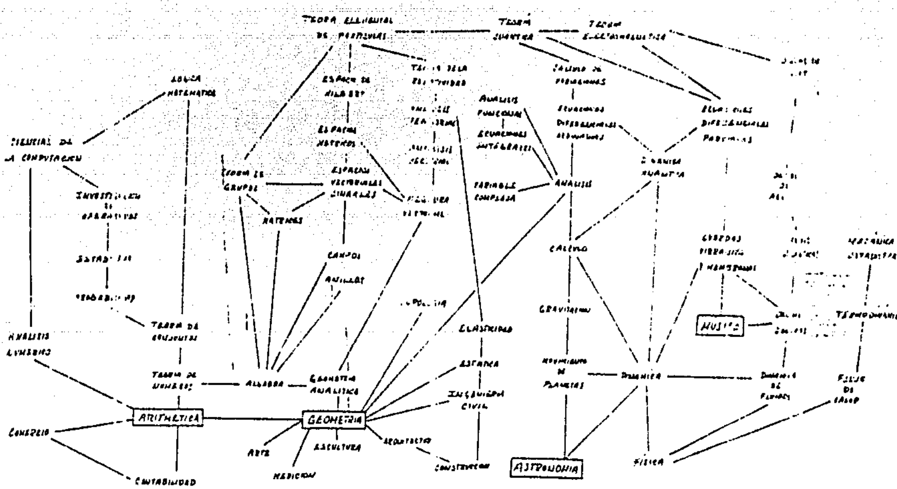


FIG.1. EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS

Es fácil reconocer la separación de varios temas en sus roles acostumbrados, a saber, sobre el análisis riguroso en del caso de los temas de las Matemáticas Puras y la conección estrecha con el universo físico para los temas de las Matemáticas Aplicadas. (4)

2.5., G.G. Hall apunta

Las Matemáticas Aplicadas son difíciles de caracterizar . Hay quienes las ven como exclusivamente Mecánica Newtoneana de un mundo ideal de puntos en movimiento, y otros las reducen a una colección de métodos matemáticos utiles. Tal es la confusión que en muchos países no son reconocibles como una disciplina distinta, y su trabajo es dividido en otras especialidades de un modo insatisfactorio.

Si las Matemáticas Aplicadas son pensadas como el arte de aplicar Matemáticas a situaciones problemáticas, entonces su naturaleza puede ser exhibida mejor examinando aplicaciones actuales.

Las Matemáticas Aplicadas son un sujeto con un abarcamiento muy amplio pero con una unidad de metodología. El objetivo de las Matemáticas Aplicadas es entender la realidad matemáticamente.

La observación del universo natural revela toda su rica variedad y complejidad. Junto a todo ésto, toda la racionalidad y abstracción del pensamiento matemático tienen que ser ordenados hasta que los patrones y armonías interiores puedan ser comprendidas.

Las Matemáticas Aplicadas conciernen con la Naturaleza como un todo y no meramente con una colección de aplicaciones especiales. (5)

N O T A S

1. F.J. Murray ***Education for Applied Mathematics***

The Amer.Math. Monthly V69(1962),p.p.347-357

2. Dorothy Bernstein ***The role of the Applications in Pure Mathematics***

The Amer.Math. Monthly V86(1979) p.p. 245-253

3.H.P. Greenspan ***Applied Mathematics at MIT***

The Amer. Math. Monthly V86(1973) p.p.67-72

4. B.L. Moiseiwitch ***What is Applied Mathematics ?***

Bull. the Inst.of Math. and its Applic. V17(1981)#7, p.p. 130-132

5. G.G. Hall ***Mathematical Education***

LIBRO editado por G.T. Wain 1978 CAP.II, p.p.25-37

3.EL MATEMATICO APLICADO

¿Qué es un Matemático Aplicado?.¿Qué hace?. ¿Qué estudia y cuáles son sus requerimientos?

3.1. G.G.Hall define

> *El Matemático Aplicado es un anfibio que habita en el mundo de las Matemáticas Puras y el Mundo de la Ciencia. En Matemáticas es un generalizador, puesto que la solución de problemas reales lo envolverán en muchas ramas de las Matemáticas. Su acercamiento a la Ciencia es a través de la cooperación que necesitará de científicos de situaciones actuales y de sus datos. A menos de que entienda el lenguaje técnico de ambos mundos será capáz de asir los problemas originales o de explicar sus situaciones actuales. En su mente siempre hay una tensión fructífera entre los métodos inductivos y el deductivo, entre la Ciencia y las Matemáticas. (1)*

3.2. F.J.Murray opina

Aquella persona entrenada en Matemáticas y que se emplea en el gobierno o en la industria como Matemático es un Matemático Aplicado. (2)

3.3 J.L.Synge escribe

Los Matemáticos pueden ser divididos en tres clases de acuerdo a su actitud hacia las Matemáticas Aplicadas:

a.Aquellos quienes no tienen nada que hacer con Matemáticas Aplicadas pero no las observan como un tipo inferior de ejercicio intelectual.

b.Aquellos a quienes les gustaría estar mayormente enterados de éstas, pero no tienen tiempo para prolongar sus estudios.

c. Aquellos que primeramente interesados en Matemáticas Aplicadas estudian casi solamente las Puras para su repercución en las Aplicadas.

Cuando un Matemático Aplicado describe sus trabajos a un Físico, se entrega al panorama

3.5. Steen opina

Un Matemático Aplicado es alguien que tiene una preparación en Matemáticas buena y que está disponible para que lo consulten personas con problemas matemáticos que no pueden resolver ellos mismos, y que finalmente él resolverá. Este Matemático a lo mejor pertenece a una Compañía, o es un consultante individual que cobra honorarios según la dificultad del problema, la importancia de la solución para el cliente, etc.; en este caso debería llamarse "consultante matemático". Los Matemáticos Aplicados y éstos últimos tienen absolutamente una orientación intelectual diferente.

Por ejemplo en Dinámica de Fluídos una persona explora y dilucida el comportamiento dinámico de los fluídos; puede hacerlo analíticamente, o en el laboratorio o de ambas formas. Si lo hace analíticamente usará Matemáticas, que pueden ser avanzadas o elementales, pero en cualquier caso tratará de usarlas correctamente. Será raro que desarrolle nuevas Matemáticas en el transcurso de su investigación, de todas formas lo que se desarrolle será justamente Matemáticas. También puede suceder que el "Dinámico de Fluídos" no pueda resolver el problema y acuda a un Matemático para *natural que ha visto; pero cuando los describe a un Matemático Puro, debe subrayar los axiomas de que partió y los aspectos principales de su argumento matemático. (3)*

3.4.H.P.Greenspam escribe

En cuanto a la identificación del trabajo de un Matemático Aplicado, ¿Cómo es que difiere un Matemático Aplicado investigando la propagación de onda de un Meteorólogo haciendo lo mismo?.

Durante esa fase en nada, sin embargo, un problema físico en particular ocupará solamente un tiempo corto en la carrera de un Matemático Aplicado, e idealmente a largo paso, perseguirá los conceptos generales descubiertos en su investigación.

Por ejemplo, muchos fenómenos de onda envueltos en la circulación atmosférica, son rasgos dinámicos generales, que aparentemente además están en el tráfico vehicular, o en la estructura galáctica. Así el estudio de problemas específicos puede culminar en generalizaciones teóricas de una aplicación amplia. (4)

que lo ayude. En este caso ambos campos y personas se benefician. Sin embargo, tal Matemático no sería un Matemático Aplicado, pues él ha desarrollado Matemáticas que ahora tienen una existencia propia independientemente de su orígen. Si son buenas o malas dependerá del Matemático. (5)

3.6. J.A.Adam explica

Un Matemático Aplicado es quien destila ciertos axiomas de un sistema natural (físico, biológico, etc.) o hecho por el hombre (económico, social, etc.), y entonces procede a examinar las consecuencias necesarias lógicas de éstos. Quizás la única diferencia entre este trabajo y el del científico técnico en la misma área, sea que el último va a estar interesado en las leyes subyacentes o descripciones observadas del fenómeno, habiendo usado Matemáticas como medio para formularlas, en tanto que la actitud del Matemático puede estar más por el lado de querer entender primero la estructura matemática subyacente y entonces referirla al trabajo del científico. (6)

N O T A S

1. *G.G.Hall* *Mathematical Education*

LIBRO editado por G.T.Wain 1978 CAP.II p.p.25-37

2. *F.J.Murray* *Education for Applied Mathematics*

The Amer.Math.Monthly V69(1962), p.p.347-357

3. *J.L.Synge* *Potscards on Applied Mathematics*

The Amer. Math.Monthly V46(1939)

4. *H.P.Greenspan* *Applied Mathematics at MIT*

The Amer.Math.Monthly V80(1973),p.p.67-72

5. *Steen Critica del LIBRO* *Mathematics Tomorrow*

New York Springer 1981,255pp. The Math. Intel,igenser V4(1982)#3

6. *J.A.Adam* *Some thougths on the Nature of Mathematical Statements*

Bull.The Inst.of Math. and its Applic. V17(1981)#1, p.p.21-25

4.DISTINCION ENTRE EL TRABAJO DE LAS MATEMATICAS APLICADAS Y EL DE LAS PURAS

El conocimiento es integral, tarde o temprano, los distintos temas por más que se les aisle se tocan entre sí. Si es que hay una división entre Matemáticas Puras y Aplicadas, esta queda bien delineada con analogías en la Música, el arte, el cine y la Arquitectura como inmediatamente veremos.

4.1. J.L.Springe opina

> *La lógica es la forma con que la mente planea facilmente. Los axiomas determinan el rumbo a tomar, y es la manera de escoger los axiomas en que las Matemáticas Aplicadas difieren fundamentalmente de las Puras. (1)*

4.2. F.J.Murray explica

Las Matemáticas Puras son controladas por un principio de isotropía lógica: cualquier línea de pensamiento es tan buena como otra, la condición es que sea uniformemente logica.

Las Matemáticas Aplicadas por otro lado, solo siguen aquellos rumbos que ofrezcan una visión mas natural. (2)

4.3. Wolfang Kruil piensa

Definitivamente hay diferencias profundas entre Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas, pero son diferencias en el gusto.

Haciendo una analogía con la Arquitectura: existen algunas gentes a las que les gustan las construcciones excesivamente ornamentadas. Otras inclinadas a la objetividad moderna siguiendo la *gran "Línea", renuncian a los accesorios ornamentales. Transfiriendo a Matemáticas, los primeros a los Matemáticos Aplicados, y los segundos a los Puros. (3)*

4.4.B.L. Moiseiwitch dice

La distinción escencial entre Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas es como aquella entre la Estática y las Estructuras Dinámicas, que está entre las estructuras matemáticas que son independientes de la variable tiempo y aquellas que dependen explícitamente del tiempo, respectivamente.

Para un tratamiento correcto de todos los temas enlistados como Matemáticas Aplicadas, es indispensable la presencia de la variable tiempo, excepto en temas como Estaticidad en las Estructuras Estáticas.

En Matemáticas Puras todas las variables son tratadas igualmente, tal que, colectivamente representan un punto o vector de un espacio generalizado. Sin embargo, para fin de incluir la variable tiempo como una de las coordenadas *especificando un punto, como las Matemáticas Aplicadas hacen en la Teoría Especial de la Relatividad, ésta tiene que ser distinguida de todas las otras definiendo una coordenada puramente imaginaria de tiempo, en un espacio de Minkowski contínuo 3+1 dimensional.*

La Teoría General de la Relatividad y la Teoría Cuántica poseen un carácter puramente matemático, ya que estos temas están basados en una considerable extensión, en la Geometría Riemaneana y en los Espacios de Hilbert respectivamente.

Las Matemáticas Puras están mayormente interesadas en Geometrías Estáticas , Algebraicas o alguna otra.

La variación de tiempo es atributo evidente de la "escuela" de las Matemáticas Aplicadas, en que la velocidad, aceleración, momento, fuerza y energía son discutidas, mientras que las configuraciones estáticas conciernen con la "escuela" de las Matemáticas Puras, que tratan con puntos, curvas, gradientes, superficies y volúmenes, esto es, Geometría y Cálculo.

Para usar una analogía en el mundo del arte y de la Música, se podría pensar en la diferencia como el contraste entre un dibujo cuidadosamente ejecutado, grabado o pintado, que representa una escena helada en un instante de tiempo dado, y una composición musical que pudiera ser completamente incomprensible si su flujo con el tiempo fuera ignorado.

En un dibujo o en una pintura, se pueden analizar el diseño, color y textura de la escena, en detalle microscópico si se desea; mientras que en el compás musical la duración de las notas, la variación en la frecuencia del tono y la intensidad o sonoridad, como tiempo, es superior.

Naturalmente esta idea no es nueva, es consistente con la Música de las Esferas imaginada por los antiguos griegos para acompañar el movimiento de los planetas.

Otra menos vívida ilustración sería la diferencia entre una fotografía particularmente lograda, de una escena en un instante dado y un filme cinematográfico cuyo desarrollo en el tiempo representa una sucesión de eventos. Esta distinción tiene similitudes con el contraste entre la Filosofía de los Griegos y Heráclito, quienes *creían que todas las cosas fluían, y Parménides quien decía que nada cambiaba. (4)*

4.5. Jerome Spanier escribe

Si observamos la dicotomía tradicional entre Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas probablemente no veremos nada claro.

En verdad , bajo la rúbrica de Matemáticas Puras encontraremos temas como Algebra, Topología, Análisis, Teoría de Números y muchos otros.

Materias como Análisis Numérico, Computación, Estadística y equivalentes a menudo se describen como pertenecientes a las Matemáticas Aplicadas.

Mi opinión es que a menudo no es cuestión del tema más que de enfoque. Por ejemplo, muchos analistas numéricos tratan su tema de una manera abstracta,estableciendo y probando teoremas cuyas hipotesis pueden abarcar poco en el sendero de la realidad. ¡Realmente, hay muchos artículos de Análisis Numérico que mengüan cualquier resultado de computadora!.

Así, para distinguir entre Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas, no hay que hacer la distinción entre la metodología necesaria para llevar a cabo la abstracción matemática, sino la distinción estaría en el tipo de problema que se trate de resolver. (5)

N O T A S

1. *S.L.Synge* *<u>Potscards on Applied Mathematics</u>*
   The Amer. Math. Monthly V46(1939)

2. *F.J.Murray* *<u>Education for Applied Mathematics</u>*
   The Amer. Math. Monthly V69(1962)p.p.347-357

3. *Wolfang Kruil* *<u>The Aesthetic Viewpoint in Mathematics</u>*
   The Math. Intelligenser V9(1987)#1,p.p.48-52

4. *B.L.Moiseiwitch* *<u>What is Applied Mathematics?</u>*
   Bull.The Inst.of Math.and its Applic.
   V19(1983)#3,p.p.130-132

5. *Jerome Spanier* *<u>The Education of an Applied Mathematician</u>*
   Bull. The Inst.of Math.and its Applic.
   V19(1983)#3,p.p.430-44

5. MODELACION MATEMATICA

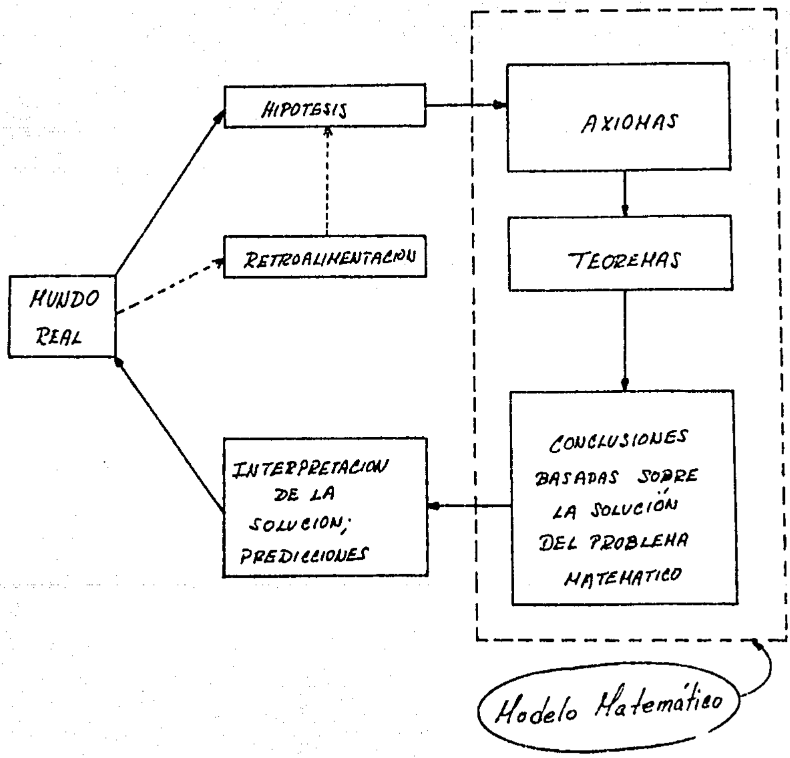
Un modelo es algo que imita a un objeto, actitud, etc. ¿Un modelo matemático entonces de qué se trata específicamente?

5.1. J.J.Adam opina

Aparte del razonamiento deductivo existe otra característica de las Matemáticas. Las Matemáticas tratan con conceptos abstractos que a menudo se derivan de objetos físicos. Las líneas rectas físicas tienen espesor, color, estructura molecular y rigidez. Las líneas rectas matemáticas no tienen ninguna de estas propiedades. Parte del secreto del poder de las Matemáticas radica en el uso de tales conceptos abstractos.

En común con este proceso de abstracción (sin detalles irrelevantes), está la idealización de los problemas que se pretenden resolver. El destilador de ideas escenciales matemáticas del problema que se trata y la solución del problema matemático así formulado se conoce como <u>MODELO MATEMATICO</u>.

La siguiente figura ilustra algunos de los principios subyacentes de la Modelación Matemática:



5.2. M.L. Cartwright dice

Pfeiffer explica que la Historia de la Teoría de la Probabilidad (lo cual es cierto en otras teorías) está marcada por una intuición y descubrimiento brillantes, también por confusión y controversia. Además una larga experiencia fué necesaria para descubrir un modelo matemático apropiado, es decir, un sistema matemático cuyos conceptos y relaciones correspondan a conceptos apropiados y relaciones del mundo real.

Una vez que el modelo ha sido descubierto, estudiado y refinado, se vuelve posible de asir para una mente ordinaria en un tiempo razonablemente corto. Pfeiffer asegura que los más prósperos modelos de la Teoría de la Probabilidad conocidos en el presente se caracterizan por su considerable abstracción matemática.

En la modelación tenemos:

A. Mundo real del fenómeno actual, conocido por varios caminos en la experiencia de este fenomeno.

B. Mundo Abstracto del modelo matemático que usa símbolos para establecer relaciones y factores con gran presición y economía.

C. Modelo Auxiliar

La transición de A → B es la formulación del mundo real del fenómeno en términos matemáticos.

La transición de B → A es la interpretación de la deducción por Matemáticas Puras de esa formulación.

Ambas son pensamiento matemático, pero sólo las deducciones dentro de B son Matemáticas.

Además se piensa matemáticamente de B → C como una interpretación secundaria y entonces se regresa a B para confirmar C, o bien, de C directamente a A.

Pfeiffer apunta que:

> *"el valor del modelo matemático y del modelo auxiliar depende de cómo pueden ser relacionadas las características apropiadas del modelo con la situación de la "vida real", con buenos resultados. "Un modelo no es verdadero ni falso, sino que encaja o no encaja. No será satisfactorio si está incompleto o inconsistente, es decir, que produzca contradicciones; o bien, si las soluciones del modelo tienen interpretaciones irreales". (2)*

5.3. G.G.Hall escribe su visión de la Modelación

El proceso comienza observando una situación. Esto usualmente es en una situacion actual o en el récord experimental de una situación actual. El primer paso significativo es la invensión de variables que describan la situación. Las variables pueden ser discretas o contínuas, numéricas o lógicas, escalares o vectoriales. Pueden ser además conjuntos, listas o gráficas.

En general no todas las variables que se observan serán relevantes para la situación, de tal manera que sólo un subconjunto apropiado es seleccionado. El proceso de selección puede ser elaborado si las variables son independientes o si las observaciones son de un alcance limitado.

El modelo se establece como una relación sugerida entre estas variables. El primer chequeo de esta relación es el de verificar que ésta produce las regularidades observadas. Si falla esta validación entonces se establece otro modelo y el proceso continúa hasta que se encuentra un modelo válido. El modelo se prueba entonces para predecir lo que sucede cuando algunas de las variables toman valores extremos, de modo que las predicciones sean fáciles de observar. Un modo mas inusual de predecir comportamiento más convincente, sera su confirmación experimental; mientras ésta sea posible en las Ciencias Físicas, lo cual a menudo es imposible en las Ciencias Sociales, ya que no pueden ser repetidas o demandadas, pues los experimentos interfieren mucho con la situación, o bien porque su escala de tiempo es muy larga.

Aunque se puedan obtener resultados valiosos, el proceso de construcción del modelo no debe parar en este punto. Se debe intentar generalizar el modelo. Esto puede tomar la forma de una extensión de su alcance de modo que una clase amplia de situaciones pueda ser incluída, o puede tomar la forma de una relación entre éste y otros modelos en el mismo campo. Analogías útiles de modelos similares en otros campos podrían ser buscadas.

El paso final es la <u>formulación</u> de un concepto simple que encarne mucho de la escencia del modelo y permita ser asimilado en la mente. En el final del propósito de la teoría no sólo es el control del fenómeno, sino de construir una estructura intelectual que aumente el entendimiento de la naturaleza y permita conjeturar la solución de problemas que podrían ser matemáticamente intratables. (3)

5.4. Jerome Spanier tiene otra idea más, aunque parecida a las anteriores:

En las Matemáticas Abstractas, el proceso puede ser visto como el empezar con la contrucción de un conjunto de axiomas o suposiciones acerca del sistema matemático. Se procede probando o estableciendo contraejemplos que son diseñados para delinear la estructura descrita en los axiomas.

Los teoremas, claro, describen qué es verdadero, y los contraejemplos describen las limitaciones de los teoremas, contruyendo ejemplos que exhiban aspectos claves de la teor'a o cosas semejantes.

El principal propósito de trabajar en Matemáticas Abstractas es el de proveer una descripción completa de la estructura surgida del sistema axiomático.

En lo que ahora se llama "Matemáticas Aplicadas" siempre se empieza por un problema enunciado. Este enunciado puede estar en Lenguaje de Física, Ingeniería, Ciencias Sociales o en el lenguaje de muchas otras áreas. En cualquier evento, el problema esta inicialmente en términos *no-matemáticos. La primera gran tarea en aplicar Matemáticas al problema, es la de crear un modelo matemático, es decir, un conjunto de ecuaciones o desigualdades. suficientemente simple para que pueda ser acabado a través de su uso. El modelo matemático se ejercita entonces y una solución analítica o aproximada es obtenida.*

Esta solución matemática se compara con la evidencia física disponible por observaciones o medidas hechas sobre el problema original. Cuando esta evidencia física o datos experimentales, son comparados con los resultados matemáticos, debe hacerse un juicio. Si la comparación no es favorable y si se tiene una gran fé en los datos, entonces se sugiere una revisión del modelo matemático. Esto podría hacerse añadiendo ecuaciones o alterando términos en una ecuación existente. Como sea que se proceda, el M..temático debe forzar al modelo para que se obtenga un apoyo más directo sobre el problema físico original;de tal modo que finalmente la evidencia matemática esté de acuerdo en algún nivel con la evidencia física reunida .

La descripción dada de la distinción entre Matemáticas Abstractas y Matemáticas Aplicadas, deja por considerar dos tipos de métodos que *podrían construirse basados en esa distinción. Por un lado, los métodos de las Matemáticas Tradicionales (en Ec. Dif.,Series de Fourier, etc.) son propiamente orientados a la técnica: las técnicas son usadas para probar teoremas bajo hipótesis mínimas, creando ejemplos que ilustren los rasgos críticos de la teoría. Por otro lado, en relación con las Matemáticas Aplicadas a problemas reales, la clave claramente es el problema. Por esta razón parece que el trabajo que se dá en relación con las Matemáticas Aplicadas es realmente de una naturaleza completamente diferente del trabajo en Matemáticas Abstractas, y requiere de prácticas educacionales distintas.*

Viéndolo mas esquemáticamente: se empieza con un problema enunciado en términos no-matemáticos, y como se dijo anteriormente, la primera tarea del Matemático Aplicado será de construir un modelo que usualmente consistirá de un sistema de ecuaciones y desigualdades.Estas ecuaciones son diseñadas para ser inicialmente tan leales como sea posible, al problema original. Sin embargo, si el problema es complejo y las ecuaciones son suficientemente fieles, las ecuaciones serán aptas para probar cuestiones difíciles. Por lo tanto, el siguiente paso será simplificar las ecuaciones E para producir un sistema reducido E', que luego se *resolverá para producir la solución matemática S. Habiendo obtenido esta solución (exacta o aproximada) del sistema simplificado E', entonces debe comparase esta solución con los datos experimentales para evaluar el modelo. Si fuera necesaria tal revisión se podría producir un nuevo conjunto de ecuaciones E' (o posiblemente hasta el mas fundamental nivel E). Finalmente se espera obtener un modelo cuya solución S pueda ser aceptada en virtud de un razonable buen acuerdo con los datos experimentales.*

Con un poco más de detalle se puede ver que el primer paso de P a E, constituye la construcción del modelo original. Este envuelve la formulación en términos matemáticos del problema original y la derivación de ecuaciones de los primeros principios físicos. El segundo paso, que resulta de la simplificación. envuelve conceptos tales como Análisis Dimensional de Escalamiento y la discriminación de términos pequeños en las Ecuaciones E. Aquí es donde viene el "condicionamiento" del problema, es decir, extenderse a que la solución del problema cambia cuando un pequeño cambio se hace en el enunciado.

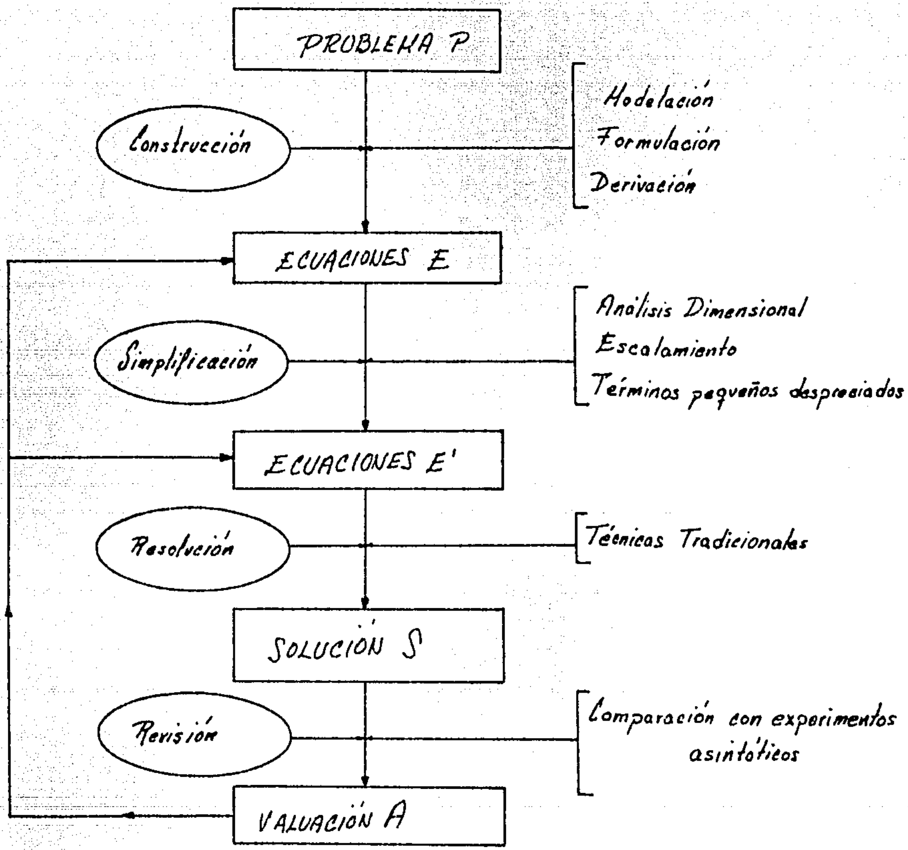
Es en el paso de E' a S que las técnicas tradicionales son usadas para obtener la solución

S del sistema E'. Así los métodos de una clase más tradicional — aquella relacionada con técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales e Integrales, con Análisis Numérico, etc. son usadas y necesitadas para sostener esta fase del proceso de modelación.

En el paso de valuación, que en muchos casos es el más misterioso de todos, es a menudo llevado a cabo por Análisis Asintótico. Esto es, en casos donde el comportamiento del sistema físico es conocido cuando ciertas de sus variables son parámetros tomados de valores límites, el Análisis asintótico puede revelar si el método matemático ademas exhibe el mismo comportamiento.

Consideremos el diagrama:

Modelación Matemática



Lo siguiente se sugiere como ingrediente de un Curso de Modelación Matemática:

1. *Clasificación de tipos de ecuación, estudio de técnicas de solución.*
2. *Derivación de ecuaciones de los primeros principios.*
3. *Simplificación de ecuaciones del modelo: preanálisis, análisis dimensional, escalamiento, condicionamiento.*
4. *Análisis de Perturbación.*
5. *Aplicación de principios fundamentales de modelación a casos estudiados.*

Puesto que el mayor número de modelos resultan en sistemas de ecuaciones, los estudiantes deberían tener algún conocimiento de tipos de ecuaciones que surjan en la modelación, con qué frecuencia y las principales líneas usadas para resolver tales ecuaciones. Por lo cual, se empieza un curso de modelación con una clasificación de tipos de ecuación y un estudio de técnicas de solución. (4)

N O T A S

1. *J.A. Adam* *<u>Some thougths on the nature of Mathematical Stamements</u>*
Bull. The Inst.of Math.and its Applic. V17(1981)#1,p.p.21-25

2. *M.L.Cartwright* *<u>Mathematics an Thinking Mathematically</u>*
The Amer.Math.Monthly V77(1970),p.p.20-28

3. *G.G.Hall* *<u>Mathematical Education</u>*
LIBRO editado por G.T.Wain 1978 CAP.II secc. 2.3

4. *Jerome Spanier* *<u>The Education of an Applied Mathematician</u>*
Bull.The Inst.of Math.and its Applic V19(1983)#3,p.p.43-47

6.¿LAS MATEMATICAS APLICADAS SON MALAS MATEMATICAS?

Existen Matemáticos Puros como G.Hardy y P.R. Halmos, que piensan que las Matemáticas Aplicadas no tienen la importancia ni la validez de las Matemáticas Puras. De hecho manifiestan desprecio a éstas, en artículos como "A Mathematician Apology" y "Applied Mathematics is Bad Mathematics" respectivamente.

Las siguientes opiniones defienden a las Matemáticas Aplicadas dando argumentos interesantes.

6.1. B.L. Moiseiwitch dice

El Matemático Puro G.Hardy en su "A Mathematician Apology" escribe:

> *Las Matemáticas crean modelos o universos imaginarios compuestos de relaciones abstractas usando lógica simbólica.*

Esta es la "realidad matemática" que Hardy contrasta con la realidad física.

Hardy implica que la realidad matemática de los Matemáticos Puros es independiente de la realidad física, y que en cierto sentido significativo es más real que la realidad de los Matemáticos Aplicados, puesto que los modelos de los Matemáticos Puros no tienen que ser descartados si estos fallan de ajustarse con la Naturaleza.

Estas opiniones tienen una profunda influencia sobre las actitudes matemáticas en Inglaterra. Forman un punto de vista tradicional del Matemático Puro.

6.2. L.J.Mordell opina

Siguiendo con los puntos de vista de Hardy acerca de la utilidad de las Matemáticas, a Hardy le parece denigrante el uso de las Matemáticas "reales":

Las Matemáticas "reales" de los Matemáticos "Reales": Matemáticas de Euler, Fermat, Gauss, Abel y Riemann, son casi enteramente inútiles.

Esto es fácilmente refutable. Si solamente una parte microscópica de las Matemáticas Puras probaran su utilidad, su producción estaría justificada.

Por ejemplo:

1. La investigación de las propiedades de las secciones cónicas por los griegos y sus aplicaciones muchos años después a las órbitas de los planetas.

2. Las investigaciones de Gauss en Teoría de Números llevo al estudio de los Números Complejos. Este es el comienzo del Algebra Abstracta, que ha probado su utilidad en Física Teórica y Matemáticas Aplicadas.

3. El trabajo de Riemann sobre Geometría Diferencial proporcionó un servicio invaluable a Einstein para su Teoría de la Relatividad.

4. El trabajo de Fourier sobre series han sido útiles en investigaciones físicas.

5. Una de las más útiles y notables aplicaciones de las Matemáticas Puras fue en Radiotelegrafía, que tuvo su orígen en la *solución de Maxwell de una ecuación diferencial.*

Así muchas disciplinas como Biología, Economía, Teoría de Juegos, Teoría de Comunicaciones, han usado Matemáticas Puras.

Bertrand Rusell dijo:

> *En Matemáticas, al menos uno de nuestros impulsos nobles puede mejor escapar del triste exilio del mundo actual.*

Aparentemente Hardy no tiene placer por contemplar a las Matemáticas, es decir, la belleza de sus demostraciones, la importancia de sus resultados y la historia de su desarrollo. (2)

6.3. N. Levinson dice

Hardy en la pag. 141 de su apología opina:

> *En contraste con la inocencia de las Matemáticas Reales (lo que el entiende por Matemáticas "reales" son las Puras), las Matemáticas "triviales" (que son las Aplicadas) por otro lado, tiene muchas aplicaciones en la guerra.*

Es decir, que si pudieran ser útiles las Matemáticas Aplicadas podrían serlo para el mal, más bien que para el bien.

Hardy se recocija particularmente en la inutilidad de la Teoría de Números. Pero, la Teoría de Códigos es un contraejemplo a la noción de Hardy:

Los Campos Finitos también llamados Campos de Galois y los Teoremas de la Teoría de Números, juegan un papel central en la Teoría de Códigos.

En algunas áreas de las Matemáticas Aplicadas, el papel de la Matemática Pura es a menudo como una reafirmación, tal y como lo hace en la prueba de un teorema de Unicidad o el Teorema de Existencia No-constructiva, pero no en la de proveer procedimientos de cálculo o analíticos que producen los resultados reales.

En la práctica, los procedimientos usados pueden envolver mas intuición y experiencia que rigor. No es este el caso de la Teoría de Códigos, donde las Matemáticas Puras proporcionan el procedimiento constructivo para llevar a cabo la codificación. Esto puede sorprender más a los Matemáticos Aplicados que a los Puros.

Se partirá con el problema de corrección de error en la transmisión de error por uso de códigos, y se mostrara como ésto permite la introducción de un cierto objeto matemático que es en efecto un Campo Finito. Los polinomios Ciclotómicos descubiertos por Gauss jugarán un papel importante. También entrarán Residuos Cuadráticos y la Ley de Reciprocidad Cuadrática y el Teorema del Residuo Chino.(3)

(Para aquél mas interesado en el tema ver la referencia indicada)

6.4. F.F.Bonsall explica

Es instructivo notar que Hardy incluye a la Relatividad y al la Mecánica Cuántica dentro de las Matemáticas Reales, y cuenta a Maxwell, Einstein, Eddington y Dirac, como Matemáticos Reales.

Además de que seguramente Hardy escribió su apología en un estado depresivo y en declinación de su poder creativo.

Lo mejor para un Matemático es mantener el interés por intentar probar algo, que cejar en el intento. Es natural y deseable que los Matemáticos sean atraídos por los problemas famosos aún no resueltos y que hagan grandes esfuerzos para resolverlos. Tales esfuerzos dan nuevos y valiosos métodos en las Matemáticas.

Halmos en su artículo mantiene que las Matemáticas Aplicadas son diferentes de las Matemáticas Puras y que muchas de ellas son malas.

Pero, ¿Cómo saber que parte de las Matemáticas son buenas o malas?.

Para Halmos las Matemáticas son un arte, y el mérito es un juicio antiestético. Lo cual no es una respuesta satisfactoria.

Las Matemáticas difieren de otras artes en que hay condiciones necesarias que deben ser satisfechas por una parte de las Matemáticas Buenas, por ejemplo, deben ser correctas y no triviales. ¿Existe algún criterio para hacer pinturas o poemas?.

No se trata de mostrar que el mérito de un trabajo matemático puede ser medido en términos de su aplicación fuera de las Matemáticas; aunque tal aplicación pueda ser muy bien parte o hasta el total de su mérito. El hecho de que las Matemáticas sean necesarias a muchas ciencias y a la Ingeniería, es en términos globales e históricos, una parte vital de justificación y motivación para su trabajo. Pero, cuando se considera un teorema individual, la aplicabilidad rara vez es una consideración importante. Por ejemplo, el Teorema de los Números Primos (el número de primos no excedente de n es asintótico a n/log n), que de acuerdo a los Matemáticos es de una clase alta en Matemáticas, ¿Es aplicable?.

En las Matemáticas, el mérito corresponde a la utilidad de un cierto tipo, especialmente a su contribución a la ciencia de las Matemáticas.

La Matemática es una actividad humana y está sujeta a limitaciones y defectos. Es principalmente una actividad de individuos en la que parece no haber lugar para un gran trabajo de equipo como en algunas otras ciencias experimentales. Si bien, las Matemáticas son una actividad de colaboración, en que cada gran Matemático necesita usar el trabajo de otros.

Las Matemáticas cuentan con el método axiomático introducido por los Griegos hace más de 2000 años de uso casi universal. La presentación explícita de los axiomas permite que otro matemático decida si el teorema es aplicable a su propio problema y la demostración le permite checar si el teorema es correcto. Con esta colaboración entre Matemáticos cualquier error significativo es eliminado automáticamente.

El método axiomático frecuentemente ha sido mal interpretado por matemáticos distinguidos. Ha sido interpretado como un intento de partir de unos axiomas primitivos de Teoría de Conjuntos y entonces construir el total del edificio matemático sobre tal fundación, por lógica rigurosa. Lo cual es opuesto al metodo axiomático entendido por el Matemático de la vida real. Esta descripción de la ciencia de las Matemáticas puede ser sólo aplicable completamente a las Matemáticas Puras. Muchos Matemáticos Aplicados naturalmente sienten menos responsabilidad para la posible corrección de los teoremas de las Matemáticas Puras que ellos usan.

Es meritorio en Matemáticas referirse a sus necesidades prácticas. Son buenas Matemáticas si se puede lograr un avance importante, ya sea des-

cubriendo teoremas nuevos, o bien, dando nuevos enfoques a los anteriores. Si un teorema pareciera caer en una rama muerta, ésto podría prevenirse estimulando el interés por la vida real en los Matemáticos para que en su trabajo de investigación se garantizara alguna aplicación.

Esto podría darse ya sea contribuyendo en alguna rama que sea interesante ya, a otros Matemáticos, o desarrollando una rama nueva que resulte sorprendente y que les atraiga. La necesidad de estimular el interés de los Matemáticos es un logro de la buena Matemática.

Por ejemplo, el Teorema de los Números Primos es de un alto nivel según todos los Matemáticos. Pero, ¿en qué sentido el teorema es importante?. La larga investigación para la primera prueba, y después la investigación de pruebas simples proporcionó un estímulo invaluable para el desarrollo de la teoría analítica de los Números y partes relacionadas con Análisis.

Todavía ahora muchos Matemáticos estarían felices de encontrar una prueba sustancialmente más simple. Es más, el teorema parece no ser útil para las Matemáticas Aplicadas, y aún, es raramente usado por las Matemáticas Puras. Es típico que muchos teoremas difíciles sean impor-

tantes sólo porque son una fuente de inspiración.

Todo ésto indica que hay varios tipos de importancia matemática. El teorema de los Números Primos puede ser contrastado con el Teorema de Cauchy y el Teorema de Hahn-Banach, que son completamente superficiales y fáciles de demostrar, pero que son útiles para un Analista. Este segundo tipo de teoremas obviamente son escenciales para la Ciencia de las Matemáticas, pero no por esto se desacredita el otro tipo. La vida real del Matemático debe tener su inspiración, pero para la existencia de tales brillantes realizaciones no puede atreverse a atacar los problemas realmente difíciles. Esto tiende a ser el caso de los teoremas realmente útiles para las aplicaciones en Matemáticas Puras y Aplicadas: son teoremas elementales pero no es cierto que los teoremas duros siempre carezcan de aplicación. (4)

N O T A S

1. *B.L.Moiseiwitch* *What es Applied Mathematics ?*

Bull.The Inst.of Math.and its Applic.

V17(1981)#7,p.p.130-132

2. *L.J.Mordell* *Hardy's "A Mathematician Apology"*

The Amer.Math.Monthly V77(1970)#8,p.p.831-836

3. *N.Levinson* *Coding Theory:An counterexample to Hardy's Conception of Applied Mathematics*

The Amer. Math. Monthly V77(1970)#3,p.p.249-258

4. *F.F.Bonsall* *A down-to-Earth view of Mathematics*

The Amer. Math. Monthly V89(1982)#1,p.p.8-15

7. LA EDUCACION Y LAS MATEMATICAS APLICADAS

¿ Será lo mismo enseñar Matemáticas Puras a enseñar Matemáticas Aplicadas?. ¿Cómo se debe enseñar a aplicar las Matemáticas?. ¿El Matemático Aplicado requiere de una preparación especial, distinta de la del Matemático Puro?.

Veamos:

7.1. Arthur Engel escribe

> *En cuanto a la educación de nuestros estudiantes, no hay que olvidar que con muy pocas escepciones, no serán Matemáticos profesionales.*
>
> *Pero, muchos de ellos serán científicos y usarán a la Matemática como herramienta. Por lo tanto, los temas que se enseñen en la escuela, deberán tener muchas aplicaciones. No hay lugar para teorías estériles cultivadas por su inherente belleza.*

Se debe partir de un problema que pueda tener un rango extenso de aplicaciones significativas. Además de que a la hora de resolverlo se pueda desarrollar una rama importante de las Matemáticas.

Los temas importantes en cuanto a aplicaciones son Cálculo, Algebra Lineal, Geometría, Probabilidad, Estadística y Computación. La Probabilidad y La Estadística debido a su utilidad deberían enseñarse desde los 10-11 años del estudiante. Los cálculos intuitivos tan pronto como las destrezas de cálculo lo permitan, a la edad de 15-16 años. Y los otros requerirían de un tratamiento más específico. (1)

Se debe enseñar una ciencia fundamental, que proporcione modos indispensables de pensamiento y herramientas que hagan frente al mundo real:el mundo físico y el mundo que el hombre hizo. La educación no pretende enseñar algunos teoremas acerca de algunas estructuras exóticas. Antes bien, se quiere cambiar al estudiante para influir en el modo en que él ve al mundo real y en modo en que él actúa. Por lo que deben tratarse problemas importantes mostrando que lo son. (2a)

7.2. H.Freudenthal opina

Es importante saber cómo pueden ser útiles las Matemáticas. y en lo que le sucede al individuo cuando aplica Matemáticas o trata de hacerlo. Sin embargo, muy poco, si no es que nada, se sabe acerca de cómo el individuo maneja lo que ha aprendido, si bien este conocimiento ayudaría a saber el porqué mucha gente nunca pone sus conocimientos teóricos en práctica.

Debido a que las Matemáticas son indispensables para el entendimiento y el control tecnológico, no sólo en el mundo físico, sino además en la estructura social, se deben enseñar Matematicas que sean útiles.

Las Matemáticas se distinguen de otros sujetos de estudio, en que en su actual totalidad, son un cuerpo comparativamente pequeño de conocimiento, de tal generalidad, que se aplican a una rica variedad de situaciones. En verdad, es el maravilloso poder de las Matemáticas de eliminar el contexto y poner el residuo en una forma matemática, lo que hace que pueda ser usado una y otra vez.

Enseñar Matemáticas y esperar que los estudiantes sean capaces de aplicarlas cada vez que las necesiten, es absurdo, ya que los estudiantes son incapaces de aplicarlas a la Física, Química, ni a situaciones triviales de su vida.

Enseñar y mostrar cómo aplicarlas no es lo mejor. De ser posible, hay que enseñar a los estudiantes una gran virtud de las Matemáticas: la sistematización, pero no llegar al extremo de querer que lleguen a funcionar como una máquina. (2)

7.3. F.J.Murray explica

Las Matemáticas Aplicadas deben establecerse como una disciplina nueva a nivel profesional y con una educación apropiada. La educación en Matemáticas Aplicadas está asociada con problemas universales.

La educación debe relacionarse con su cultura como un todo. Un aspecto de la cultura consiste en la tecnología y en habilidades de producir necesidades y bellezas de la vida; y la educación tiene la responsabilidad de mantener la tecnología de la cultura de la cual es parte.

La civilización occidental comprende una tecnología tremenda, que está basada en un conocimiento científico inmenso.Sin embargo,como la tecnología cambia rápidamente, el procedimiento imitativo se vuelve obsoleto. Una educación adecuada debe incluir un entendimiento fundamental del conocimiento científico en que la tecnología se basa. Pero, una educación científica próspera no debe de estar limitada a un mero mantenimiento de la tecnología, sino de proporcionar al estudiante una comprensión tal, que sus acciones tengan un carácter profesional.

Un Matemático Aplicado necesita de una comprensión básica buena de las Matemáticas que va a usar; debe tener una buena apreciación de los logros de las Ciencias Físicas.

La educación en Matemáticas Aplicadas se aplicaría al estudiante cuando éste esté apto para actuar en forma profesional. No obstante, hay que enfatizar que la especialización exagerada no es lo deseable, ya que tiende a acentuar la habilidad en un campo y corta el contacto con los especialistas en otros campos. Muchos estudiantes están satisfechos con la presentación aislada de pureza prístina, divorciada de todas las otras materias e incluso de su orígen.

Es necesario para una orientación general, crear cursos relativos a todas las Ciencias, observando a las Ciencias Físicas como un todo, además también de implementar cursos sobre sus orígenes históricos.

7.4. Sir Cryil Hinshelwood, primer presidente de la Royal Society dijo

> Los científicos necesitan que se les enseñe Matemáticas como un lenguaje que puedan hablar actualmente. Es de una gran importancia para el científico ser capaz de aprender el arte de formular problemas en términos matemáticos, que claro, es un trabajo bastante difícil. Se tiene que pensar esmerada y cuidadosamente acerca de un problema antes de solucionarlo. Se tiene que tener práctica en hablar el lenguaje de las Matemáticas. Debería haber una labor temprana y bastante extensiva acerca del poder pensar en cosas reales y la aplicación del simbolismo matemático para las ideas físicas. (4)

7.5. H.P. Greenspan dice

Debido a su versatilidad, innovación, aproximación y a su incumbencia con conceptos fundamentales de importancia interdisciplinaria, las Matemáticas Aplicadas pueden contrarrestar efectivamente el curso hacia una especialización limitada.

Un programa académico que subraye el reconocimiento y explotación de analogías importantes y la transferencia de métodos y técnicas de un campo a otro, indudablemente estimulará una diseminación efectiva y productiva de Matemáticas. Además, las Matemáticas Aplicadas proveen en una forma completamente natural la mejor y mas relevante educación matemática para la comunidad científica y tecnológica. (5)

7.6. Steen explica

En un mundo incierto, sería prudente para un Matemático estar preparado para *ganarse la vida, fuera de la academia. Hay muchas razones convincentes para aprender otras disciplinas que usan Matemáticas, aprendiendo no justamente lo usable de las Matemáticas, sino la disciplina misma...No es cuestión de restringir la vista del mundo, sino de no privarse de una experiencia intelectual excitante. El Matemático que rehusa explorar estas otras ciencias, es como aquel que escucha música y sólo escucha a Bach, pero no a Mozart no a Bethoveen. (6)*

7.7. Peter Hilton explica

Para tener gente capaz y efectiva para aplicar Matemáticas, los ingredientes necesarios son:

a. Una fuerte educación en Matemáticas

b. Habilidad de pensar matemáticamente para entender cómo formular un problema en términos matemáticos precisos.

c. Una motivación fuerte para resolver un problema dado.

Hay quienes opinan también que para crear un apetito y una habilidad para aplicar Matemáticas, es además necesario entrenar al individuo en alguna ciencia que éste entienda realmente, y en que se haga un progreso en una disciplina científica o de ingeniería con el uso de métodos matemáticos.

Como una base para un programa de postgraduados o de niveles de licenciatura, se debe inculcar apetito para resolver problemas del mundo real, y un curso de Matemáticas con conceptos necesarios y modelos científicos que permitan ver al estudiante cómo las Matemáticas pueden ser aplicadas y qué pasos son escenciales en una pieza genuina de Matemáticas Aplicadas. Y tal vez, aunque esto no sea muy real, que el estudiante previamente a sus estudios de licenciatura, adquiera un puñado suficientemente bueno de alguna otra ciencia para aplicar una al estudio de la otra. (7)

Para aquellos más interesados en el tema doy una extensa hemerobobliografia al respecto, al final ya que la finalidad del presente trabajo es *de dar sólo un bosquejo general. Tal vez sería necesario otro trabajo sobre Educación de las Matemáticas Aplicadas ya que el tema lo amerita y además hay suficiente literatura para hacerlo.*

N O T A S

1. *Arthur Engel* *<u>Systematic Used of Applications in Mathematics teaching</u>*
   Educ.Studies in Math.V1(1968).p.p.202-221

1a. *Arthur Engel* *<u>The relevance of Modern Fields of Applied Mathematics for Mathematical Eduaction</u>*
   Educ. Studies in Math. V2(1969-70)#1-4.p.p.257-269

2. *H. Freudenthal* *<u>Why to teach Mathematics so as to be Useful?</u>*
   Educ. Studies in Math. V1(1968-69).p.p.3-8

3. *F.J.Murray* *<u>Education for Applied Mathematics</u>*
   The Amer.Math.Monthly V69(1952).p.p.347-357

4. *CITA en* *<u>Mathematics and thinking Mathematically</u>*

The Amer.Math.Monthly V77(1970), p.p.20-28

5. *H.P.Greenspan* <u>*Applied Mathematics at MIT*</u>

   The Amer.Math.Monthly V80(1973).p.p.67-72

6. *Steen* <u>*Mathematics Tomorrow*</u>

   LIBRO critica en The Math.Intelligenser V4(1983)#3

7. *Peter Hilton* <u>*Cryptanalysis in world War II and Mathematics Education*</u>

   Math. Teacher V77(1984)#7.p.p.548-552

8. LOS ALCANCES DE LAS MATEMATICAS APLICADAS

La aplicación de las Matemáticas es enorme y creciente. Y ésta es posible tanto en aquellas disciplinas en las cuales se pueda introducir el empleo de números, como en aquellas donde se hace uso del "pensamiento matemático", o bien del razonamiento deductivo.

Tomando en cuenta además de que las Matemáticas evolucionan y otras ramas de conocimiento también lo hacen, ésto hace que el campo de aplicación aumente.

En este capítulo se incluyen una serie de aplicaciones de las Matemáticas en otras áreas de conocimiento, mostrando una ínfima parte tan sólo de los alcances de las Matemáticas.

8.1. LAS MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS FISICAS

8.1.1. G.G.Hall escribe

Hace 50 años se pensaba que las Matemáticas Aplicadas actuaban solamente en la Mecánica Newtoniana de partículas y cuerpos rígidos. La Teoría de Ecuaciones Simultáneas Diferenciales Ordinarias fue entonces la principal herramienta y las aplicaciones a problemas específicos fueron severamente limitadas por el deseo de soluciones en términos de funciones conocidas.

El advenimiento de la Teoría de la Relatividad y de la Teoría Cuántica llevaron a pensar a las Matemáticas Aplicadas no justámente como técnicas matemáticas para resolver Ecuaciones Diferenciales. En estas teorías las categorías físicas fundamentales del espacio, tiempo y materia fueron reexaminadas junto con el proceso de observación. De modo que las teorías físicas modernas ya no pueden ser indicadas en la manera tradicional de conceptos intuitivos, sino que tienen que conformar nuevos discernimientos fundamentales. El Análisis Funcional aún es escencial para cuando estas teorías están relacionadas con situaciones particulares aunque ya no es la mejor herramienta. La Teoría del Grupo de Lorntz y de sus representaciones, es una parte escencial de la Teoría de la Relatividad. La Teoría del Algebra de Von Newman, surgida de relaciones de conmutación entre observables es importante en Teoría Cuántica. El descubrimiento de la Ω - maison para citar uno de los sucesos de la Teoría de Grupos siguió de una discución teórica de las representaciones de SU(3), el grupo de las transformaciones propias unitarias de 3 dimensiones. Por lo tanto, el Físico teórico moderno es mucho más que un especialista, que ya tiene que trabajar con teorías altamente sofisticadas, y que previamente demanda habilidades matemáticas considerables. (1)

8.1.2. Dorothy Bernstein dice

Cuando Cayley inventó las matrices en el siglo XIX, él mismo se jacto de su inutilidad; pero en 1925 Heisenberg encontró en ellas la herramienta necesaria para describir su concepción de la estructura atómica, también llamada Mecánica

Matricial. Shrōedinger alrededor del mismo tiempo. usó la Teoría Sturm-Liouville de Ecuaciones Diferenciales para describir su concepto de la estructura atómica. también llamada Mecánica de Onda. Las dos teorías rápidamente fueron reconocidas como equivalentes. En verdad. en 1927 Von Newman unificó las teorías en términos de operadores lineales en un Espacio de Hilbert. La Teoría de Grupos que se originó en los estudios de Lagrange y de Galois de la Simetría y las transformaciones simétricas de las raíces de una ecuación, se volvió una idea central en Algebra y en todas las Matemáticas durante el siglo XIX. La noción de Grupo se hizo un concepto fundamental en la descripción matemática del mundo físico. Por ejemplo. la Cristalografía empieza con la descripción de todos los grupos espaciales posibles, 230 de ellos. Mas recientemente. la Teoría de Grupos ha sido usada en la descripción de partículas elementales. Esto proporciona una llave para la clasificación de partículas recientemente descubiertas llamadas de 8-formas, que permitió a Gell-Mahn y Nehdman predecir la existencia de un cierto baryon antes de que fuera descubierto experimentalmente en 1964. A su vez. el estudio matemático de los Grupos de Lie contínuos y sus resultantes Algebras de Lie. han sido estimulados por esas aplicaciónes físicas.

La Teoría de Funciones Analíticas de una variable compleja ha sido llamado el mayor logro de las Matemáticas del siglo XIX. Y claro sus aplicaciones a la Física han sido numerosas.

Aunque la Teoría de Funciones de varias variables complejas parece pertenecer al dominio de las Matemáticas Puras. Existieron algunos resultados al principio de Weierstrass. Poincaré y Hartogs, pero luego el interés languideció hasta despues de la 2a. Guerra Mundial. Ya que entonces el trabajo se daba mayormente a causa de los requerimientos de la Teoría Cuántica del Campo. Esto hizo que la distribución de probabilidad y colisión de partículas elementales fueran mejor descritas por funciones analíticas por partes, de funciones de varias variables complejas. La Teoría de los Residuos ha sido extendida a integrales sobre hipersuperficies en n-dimensiones, las así llamadas integrales de Feynman que fueron inventadas por un Físico. (2)

8.2. LAS MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS BIOLOGICAS

8.2.1. G.G.Hall

Los problemas de aplicar Matematicas a situaciones complejas, se hacen cada vez más aparentes en la Biología Matemática. Ya que a través del avance de la Biología Molecular, un proceso biológico significativo puede ser descrito en términos de posiciones de los átomos. Por lo que ha sido posible hacer algunos progresos usando métodos de la Química Cuántica. En particular se ha mostrado que muchos carcinogenes poseen caracteristicas distintivas y comunes en la distribución de sus electrones. La mayor parte de las aplicaciones matemáticas sacan partido en algún rasgo simple de una situación y tratan de usarlo para entender y organizar aspectos muy limitados de lo que sucede.

Así, el mecanismo por el cual un nervio transmite pulsos es descrito por ecuaciones diferenciales tomadas de un comportamiento análogo de pulsos a lo largo de un cable eléctrico.

Similarmente, un entendimiento general de cómo en un proceso contínuo su crecimiento puede progresar a través de estados discontinuos, ha sido logrado por medio de la Teoría de Catástrofes, que provee un análisis topológico de un comportamiento análogo de sistemas dinámicos.

En el campo de la Genética han sido hechos progresos considerables sobre las bases de modelos simples de probabilidad. Aún cuando muchos Matemáticos están siendo enterados de los problemas biológicos, es claro, que esta área de las Matemáticas Aplicadas no está aún desarrollada.

8.2.2. D.B.Hernandez e I.Mendez escriben

Se puede argumentar que el uso de modelos matemáticos constituye la escencia del enfoque sistémico al estudio del mundo real. Por medio de dichas construcciones se realizan funciones que de otra manera resultarían muy difíciles, si no imposibles, y que en términos generales podemos agrupar bajo los siguientes rubros:

a. Análisis

b. Sensibilidad Paramétrica

c. Diseño

d. Entrenamiento Simulado

Por Analisis queremos decir, exámen de un sistema ya existente para estudiar su comportamiento. Ello a menudo puede lograrse mediante experimentos, pero hay situaciones en que estos son irrealizables. Un caso típico sería la prueba de un nuevo tipo de droga para los humanos; o la prueba de nuevas condiciones de operación de una planta industrial. En el primer caso se utilizan modelos físicos (animales de laboratorio), con los que se experimenta; y lo mismo ocurre en el segundo (plantas piloto), pero en ambos se puede recurrir al uso de modelos matemáticos, a menudo con gran economía de tiempo y recursos materiales.

A la forma de extraer información de dichos modelos se le conoce como Simulación.

El segundo camino requiere una gran cantidad de trabajo experimental. Cada valor del parámetro que se investiga necesita de un nuevo modelo físico, lo cual puede resultar costoso. En cambio, si ya se cuenta con un modelo matemático y el co-

rrespondiente programa de simulación, basta alterar algunos datos y repetir la simulación tantas veces como sea necesario para obtener la información deseada. La economía que así se logra es evidente, si se considera que una buena parte del costo de la simulación se aplica en la realización del programa y correrlo varias veces no aumenta significativamente dicha inversión.

En cuanto al tercer rubro, se requiere elegir uno de entre varios posibles disenos, tomando en cuenta alguna cifra de mérito como costo, eficiencia, etc. Cualquiera que sea el mecanismo de decisión debe basarse en estudios de sensibilidad paramétrica, por lo que el modelado y la simulación son de gran importancia para esta actividad.

Finalmente, son aún más evidentes las ventajas de usar modelos con propósitos de entrenamiento, sobre todo cuando el sistema real se destruye con facilidad si se deja en manos inexpertas. En reiteradas ocasiones, la Medicina y la práctica industrial ofrecen claros ejemplos de lo anterior; en la fabricacion de aviones y automóviles es muy útil ya que sus pruebas resultan de alto riesgo. Por otra parte, el Grupo de Simulación del Instituto de Investigaciones Eléc-

tricas en Palmira Morelos. ha construido recientemente un Simulador de Plantas Termoeléctricas para entrenamiento, que está operando ya.

El hombre desde sus orígenes tuvo necesidad de estudiar a los seres vivos que le rodean, a fin de resolver de una manera primordial sus necesidades de alimentación. refugio, abrigo y para obtener materiales útiles en sus actividades cotideanas. Esta necesidad debió tomar en cuenta dos aspectos fundamentales:

La variación o variabilidad de los seres vivos, y la aplicación de los conocimientos obtenidos de un grupo de seres o futuros seres (extrapolación o inferencia).

Ambos aspectos son los que tradicionalmente se han considerado básicos en la Estadística, ya que ésta se ha definido como el estudio de la variabilidad de poblaciones y de objetos, para efectuar inferencias a partir de la información sobre una parte de la población.

Vemos así, que los rudimentos de la Biología y de la Estadística deben haber surgido muy ligados entre sí. Este hecho se ve confirmado al estudiar la evolución de ambas ramas, ya que sus *interacciones se han ampliado y enriquecido considerablemente con el avance general de conocimientos y metodologías científicas.*

Es inconcebible que un Biólogo pueda desempeñar bien su profesión si no conoce las ideas y métodos fundamentales de la Estadística. Ahora bien, para la investigación en el campo de la Biología es muy importante el conocimiento de la Estadística, tanto en la planeación, como para el análisis e interpretación de las investigaciones.

Los estudios acerca de los seres vivos se vieron enriquecidos con el avance de modelos y conceptos teóricos como las Matemáticas. Como dice Pearce, los conceptos matemáticos son precisos, pero deben ser aplicados y "vestidos" de acuerdo con la realidad para que sean útiles; los conceptos biológicos son mas sutiles y algunas veces demasiado vagos para una verificación experimental. Una amalgama de los dos puede tener cualidades que no poseen cada una por separado. Es así, como a mediados del siglo pasado surge como una nueva rama de la ciencia la Biometría, que es la aplicación de las Matematicas, la Estadística y la Computación, al estudio de los conceptos cuantitativos de las Ciencias de la Vida. (3)

8.3. LAS MATEMATICAS APLICADAS A LA MEDICINA

8.3.1. William Sacco y Clifford W. Sloyer en su artículo "An Application of the Distance Formula to Medical Science", nos presentan una clara aplicación de las Matemáticas a la Medicina :

Cuando un paciente llega a una unidad de cuidados intensivos o a un Centro de Traumatología, numerosas pruebas y evaluaciones aportan una gran cantidad de datos.¿Cómo puede uno transformar estos datos en información que pueda ser útil en la acción médica?.

Equipos de Médicos y Matemáticos dedican tiempo y esfuerzos considerables para destilar de aproximadamente 6 variables fisiológicas y bioquímicas diferentes, aquellas que contengan la informacion más útil.

Veamos las siguientes variables:

1. Suero Creatinine (C) - una medida de las funciones renales. Un alto nivel de Creatinina indica una disfunción renal.(la unidad es el porcentaje en mlg. el rango

aprox. es 0-25)

2. Hematocrit (H) - El porcentaje de la sangre que se compone de glóbulos rojos. Los glóbulos rojos traen oxígeno y una baja lectura de hematocrit se asocia usualmente con problemas respiratorios o circulatorios. (la unidad es el porcentaje, el rango aprox. es 0-65)

3. Suero Osmolality (O) - Una medida del número de partículas en la sangre. Altos niveles de Osmolality causa que las células del cuerpo pierdan fluídos y se deshidraten, con efectos malos para varios órganos corporales. (la unidad es milliosmolis por Kg. de agua, el rango parox. es 260-400)

4. Presión Sistólica de sangre (P) - La presión ejercida por el corazón y las arterias mantiene a la sangre circulando por las venas a través del cuerpo. (la unidad es miligramos de mercurio, el rango aprox. es 0-280)

Este artículo demostrará cómo la Fórmula de la Distancia puede ser usada para dar un sentido cuantitativo a CHOP como un indicador médico, y que tiene el propósito de hacer ver además de que no se trata de reemplazar los preceptos tradicionales de la historia y la examinación física, sino más bien de proporcionar información *adicional que el médico pueda usar en el manejo del paciente.*

Para ver cómo estas variables son manejadas, primero se consideraran las variables P y C. Para adultos sanos, el valor promedio de P es de 127 mmHg (milímetros de mercurio):

$$\bar{P} \doteq 127$$

La siguiente fórmula es usada para denotar la "diferencia de lo normal" :

$$P_D = |P - \bar{P}| = |P - 127|$$

Así por ejemplo, si la presión de la sangre de un individuo es medida como $P = 135$, entonces:

$$P_D = |135 - 127| = 8$$

En forma similar, para la viariable C, $\bar{C}=1$, y :

$$C_D = |C - \bar{C}| = |C - 1|$$

Considerando un paciente con $P=130$ y $C=5$. Para este paciente $P_D = 3$ y $C_D = 4$. Si uno se ubica en el plano $P_D C_D$, se localiza el punto (3,4):

Uno ve fácilmente que la distancia de este punto al orígen es :

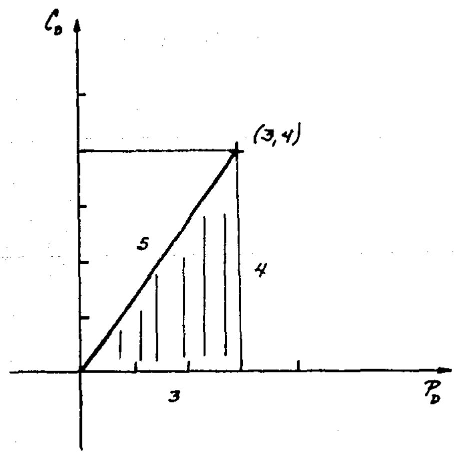
$$5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

El orígen, claro, correponde a un individuo perfectamente normal. Aumentando la distancia entre el punto (P_D, C_D) *y el orígen, el paciente está más lejos de lo normal.*

Uno podría usar la fórmula:

$$N = \sqrt{P_D^2 + C_D^2}$$

como una medida de como acercar a un paciente a lo normal.



Por ejemplo, consideremos a dos pacientes con los siguientes datos:

PACIENTE	*P*	*C*
1	120	2
2	143	3

Para el primer paciente:

$$P_D = 7 \ , \ C_D = 1 \ , \ asi \quad N = \sqrt{50} \doteq 7.07$$

Mientras que para el segundo:

$$P_D = 16 \ , \ C_D = 2 \ , \ asi \quad N = \sqrt{260} \doteq 16.12$$

Por lo tanto, el segundo paciente está más lejos de lo normal que el primero.
Como otro ejemplo, consideremos un paciente al que se le está haciendo un seguimiento por dos días consecutivos (un médico está viendo el efecto de un cierto tratamiento médico):

DIA	*P*	*C*
1	149	3
2	138	2

En el primer día: N≐32.09 , y en el segundo día: N≐11.05. De modo que el paciente se está acercando a lo normal en el segundo día comparando con el primero.

Como el lector puede suponer que usar N como una medida de "distancia de lo normal" puede presentar un problema, esto es, que se pudieran encontrar problemas usando N como una fuente de información médica, ya que la variable P es un numero "grande" y C es un numero "pequeño", N está mas influenciado por P.

Por ejemplo, consideremos las siguientes dos personas:

PACIENTE	P	C
1	140	4
2	147	2

Para el primer paciente: N≐13.34, mientras que para el segundo: N≐20.02 . Sin embargo, el nivel de Creatinina de 4 en el primer paciente es un síntoma mucho más serio que el nivel de la presión de sangre de 147 en el segundo paciente.

En el sentido médico el primer paciente está más lejos de lo normal que el segundo.

Uno puede mitigar este problema "normalizando" las variables. Si X es una variable con una media $\bar{X}$, entonces el valor normalizado de X, denotado por X_N esta dado por:

$$X_N = \frac{X - \bar{X}}{S(X)}$$

donde $S(X)$ denota la desviación stándar.

Para las variables P y C se encuentra que $S(P)=21$ mientras que $S(C)=0.5$, por lo que:

$$P_N = \frac{P - \bar{P}}{S(P)} = \frac{P - 127}{21}$$

$$C_N = \frac{C - \bar{C}}{S(C)} = \frac{C - 1}{0.5}$$

Para el primer paciente, $P_N = 0.62$ y $C_N = 6$. Si uno ubica el punto $(0.62,6)$ en el plano $P_N C_N$, entonces la distancia N_N entre este punto y el orígen es:

$$N_N = \sqrt{(0.62)^2 + 6^2} \doteq 6.03$$

para el segundo paciente:

$$N_N = \sqrt{(0.95)^2 + 2^2} \doteq 2.21$$

Así, en este nuevo sentido, el primer paciente está más lejos de lo normal que el segundo.

El índice CHOP es ahora usado en la Ciencia Médica. y es una extensión de N_N en un espacio 4-dimensional, incluyendo a las variables C,H,O y P

Así:

$$\text{Indice CHOP} = \sqrt{C_N^2 + H_N^2 + O_N^2 + P_N^2}$$

que es la distancia entre el punto (C_N, H_N, O_N, P_N) y el orígen en un espacio CHOP.

El material de este artículo indica una aplicación importante de la fórmula de la distancia, también como un sumario de parte del módulo de aplicaciones de las Matemáticas a la Medicina. (3)

8.4. LAS MATEMATICAS APLICADAS EN LA LITERATURA

8.4.1. D.O.Koehler describe cómo utiliza Borges en dos de sus cuentos conceptos matemáticos como la Simetría y el Infinito.

a) SIMETRIA como imágen central en "La Muerte y la Brújula" de Jorge Luis Borges .

Como la Geometría ha sido parte importante de nuestra experiencia humana hace mucho tiempo, es natural que juegue una variedad de papeles en la Literatura. Una ilustración importante ocurre en "La Muerte y la Brújula". En su inusual historia detectivesca Borges crea un personaje que urde un laberinto para que él no pueda escapar .La principal imágen gira sobre una simetría de espejo, y el factor geométrico de que un objeto y su imágen reflejada están en orientación opuesta. El protagonista es el detective Lönnrot, a quien le gusta verse como un Auguste Dupin, el famoso detective creado por Edgar Allan Poe. La historia empieza cuando Lönnrot está discutiendo el caso con el Inspector Treviranus:

-. No hay que buscarle tres pies al gato - decía Treviranus. blandiendo un imperioso cigarro -.Todos sabemos que el Tetrarca de Galilea posee los mejores zafiros del mundo. Alguien para robarlos. habrá penetrado aquí por error. Yamalinsky se ha levantado: el ladrón ha tenido que matarlo.¿Qué le parece?.
- Posible. pero no interesante - respondió Lönnrot- Usted replicará que la realidad no tiene la menor obligación de ser interesante. Yo le replicaré que la realidad puede prescindir de esa obligación. pero no las hipótesis. en las que usted ha improvisado. interviene copiosamente el azar. He aquí un rabino muerto: yo preferiría una explicación puramente rabínica. no los imaginarios percances de un imaginario ladrón.
Treviranus repuso con mal humor:
- No me interesan las explicaciones rabínicas: me interesa la captura del hombre que apuñaló a este desconocido. (p. 500)

Curiosamente en la "Carta Robada" de Poe. hay una discusión similar entre el Detective Dupin y el Jefe de Policía. Sin embargo. en esta historia. los papeles están invertidos con Dupin sugiriendo una solución simple que debe existir. mientras que el Jefe de Policia mantiene que el problema es más complejo para tener una solución simple. Esta curiosa inversión es amplificada a través de la historia tal como. Lönnrot procede a descubrir un crimen digno de sus poderes de discernimiento. La simetría obvia es rechazada en favor de una simetría mas compleja.

Por ejemplo, tres asesinatos ocurren en las tardes del tercer día de tres meses consecutivos, y los lugares forman los vértices de un triangulo equilátero.

Una carta anónima sugiere que la simetría está completa y el episodio acabado. Pero, Lönnrot rápidamente deshecha esta sugerencia. El hace notar que el sitio de cada uno de los tres asesinatos ha hecho referencia al Tetragramaton, que es el inefable Nombre de Dios que contiene 4 letras.

Además aprendió que los hebreos calculaban el día del ocaso a ocaso y por lo tanto los asesinatos ocurrieron el 4 de cada mes. Consecuentemente Lönnrot concluye que habrá un cuarto asesinato en la Ville Triste-le-Roy cuya localización forma un rombo con los otros tres.

Es en este punto en que Lönnrot aparece en la Villa Triste-le-Roy que Borges hace un excelente uso de la imágen geométrica para retratar sentimientos misteriosos y surreales de desesperanza y desconcierto.

Lönnrot avanzó entre los eucaliptos, pisando confundidas generaciones de hojas rotas rígidas.

Vista de cerca la casa de la Quinta Triste-le-Roy abundaba en inútiles simetrías y en repeticiones maniáticas: a una Diana glacial en un nicho lóbrego correspondía un segundo nicho otra Diana; un balcón se reflejaba en otro balcón; dobles escalinatas se habrían en doble balaustrada. Un Hermes de dos caras proyectaba una sombra monstruosa. Lönnrot rodeó la casa como había rodeado la quinta. Todo lo examinó; bajó el nivel de la terraza vió una estrecha ventana.

La empujó: unos pocos escalones de marmol descendían a un sótano. Lönnrot, que ya intuía las preferencias del Arquitecto adivinó que en el muro opuesto del sótano había otros escalones.

Los encontró, subió, alzó las manos y abrió la trampa de salida.

Un resplandor lo guió a una ventana. La abrió: una luna amarilla y circular definía en el triste jardín dos fuentes cegandas. Lönnrot exploró la casa por antecomedores y galerías, salió a patios iguales y repetidas veces al mismo patio. Subió por escaleras polvorientas a antecámaras circulares: infinitamente se multiplicó en espejos opuestos; se cansó de abrir o entreabrir ventanas que le revelaban afuera, el mismo desolado jardín desde varias alturas y varios ángulos; adentro, muebles con fundas amarillas y arañas embaladas en tarlatán.

Un dormitorio lo detuvo; en ese dormitorio, una sola flor en una copa de porcelana; al primer roce los pétalos antigüos se deshicieron. En el segundo piso, en el último, la casa le pareció infinita y creciente. "La casa no es tan grande" pensó "La agrandan la penumbra, la simetría, los espejos, los muchos años, mi desconocimiento, mi soledad". (p.505)

Justo cuando Lönnrot el discernidor ha seguido los eventos a su conclusión lógica, empieza a volverse desesperanzadamente perdido en un laberinto que él agudamente ha ayudado a crear. Viéndose él mismo "multiplicado infinitamente en espejos opuestos", lo vemos cayendo como en un remolino, incapaz de comprender que el cuarto asesinato sera sobre él.

Ahora sabemos que Lönnrot ha sido atraído a la Villa por un criminal, Red Scharlach, viendo revancha sobre Lönnrot de la muerte de su hermano tres años antes. Scharlach planeó el segundo y tercer asesinato despues de que supo que Lönnrot estaba insatisfecho con las hipótesis de que el primer asesinato fue debido a una casualidad. Ahora Lönnrot está situado frente a Scharlach.

> *Lönnrot evitó los ojos de Scharlach. Miró los árboles y el cielo subdivididos en rombos turbiamente amarillos, verdes y rojos. Sintió un poco de frío y una tristeza impersonal, casi anónima. Ya era de noche, desde el polvoriento jardín subió el grito inútil de un pájaro. Lönnrot consideró por ultima vez el problema de las muertes simétricas y periódicas.*
> *- En su laberinto sobran tres líneas- dijo por fin-. Yo sé de un laberinto griego que es una línea única, recta. En esa línea se han perdido tantos filósofos que bien puede perderse un*

mero "detective". Scharlach, cuando en otro avatar usted me dé caza, finja (o cometa) un crímen en A, luego un segundo crímen en B, a 8 km de A, luego un tercer crímen en C, a 4 km de A y de B, a mitad de camino entre los dos. Aguárdeme despues en D, a 2 km de A y de C, de nuevo a mitad de camino. Máteme en D, como ahora va a matarme en Triste-le-Roy.
- Para otra vez que lo mate- replicó Scharlach- le prometo ese laberinto, que consta de una sola línea recta y que es invisible, incesante.
Retrocedió unos pasos. Después muy cuidadosamente, hizo fuego. (p.507)
avatar:galicismo de transformar

En un escrito posterior Borges sugiere que Lönnrot y Scharlach pueden ser la misma persona. Si es así, la curiosa imágen inversa del espejo en el comienzo de la historia se vuelve acerca del suicidio de Lönnrot. La sugerencia del laberinto de una línea recta al final de la historia (que es la paradoja de Zenón) le hace a Lönnrot un reconocimiento de que él finalmente entiende lo que sucede y se percata de que sus razones para el suicidio no son tan complicadas como él queria esperar.

Estas interpretaciones no son del todo claras ya que el proceso que presenta Borges es finito, y el de la Paradoja de Zenón es infinito.Se requiere de un análisis más profundo y cuidadoso para determinar qué uso de ideas o sugerencias Matemáticas hace Borges en sus textos.

b. El INFINITO en el mismo cuento anterior.

Borges está particularmente fascinado con el infinito y continuamente prueba estos interminables misterios buscando algun discernimiento en nuestra existencia.

Una representación del infinito como un camino interminable ocurre cuando Borges describe el odio de Scharlach para Lönnrot.

El lleva a cabo ésto a tr vés de patrones simples circulares, capaz de repeticiones inacabables, así formando un laberinto del que el escape es imposible.

Scharlach cuenta a Lönnrot de una época cuando él fué críticamente herido y su hermano estaba en la cárcel a causa de Lönnrot. Lönnrot nota en la voz de Scharlach:

> *una fatigada victoria, un odio del tamaño del universo, una tristeza no menor que aquel odio.*
> *"Nueve dias y nueve noches agonicé en esta desolada Quinta simétrica; me arrasaba la fiebre, el odioso Jano Bifronte que mira los ocasos y las auroras daba horror a mi ensueño y a vigilia. Llegué a abominar de mi cuerpo. llegué a sentir que dos ojos, dos pulmones, son tan monstruosos como dos caras. Un irlandes trató de convertirme a la fé de Jesus; me repetía la sentencia de los "Goim": Todos los caminos llevan a Roma. De noche, mi delirio se alimentaba de esa metáfora: yo sentía*

> que el mundo es un laberinto, del cual era imposible huir, pues todos los caminos, aunque fingieran ir al Norte o al Sur, iban realmente a Roma, que era también la cárcel cuadrangular donde agonizaba mi hermano y la Quinta Triste-le-Roy. En esas noches yo juré por el Dios que ve con dos caras y por todos los dioses de la fiebre y de los espejos, tejer un laberinto en torno del hombre que había encarcelado a mi hermano. (p.506)

Quizás el uso metafórico más fascinante de Borges del infinito ocurre en "La Biblioteca de Babel". Borges, él mismo bibliotecario, crea una Biblioteca que contiene todo libro posible, el cual puede ser obtenido permutando las letras y los símbolos de puntuación. Tal como una Biblioteca, es el infinito, está lleno de misterio y paradoja para lo que debe contener.

> Todo: la historia minuciosa del porvenir, las autobiografías de los arcángeles, el catálogo fiel de la Biblioteca, miles y miles de catálogos falsos, la demostración de la falacia de esos catálogos, la demostración de la falacia del catálogo verdadero, el evangelio gnóstico de Basílides, el comentario de ese evangelio, el comentario del comentario de ese evangelio, la relación verídica de su muerte...(p.468)

Un lector familiarizado con Matemáticas facilmente puede ver que esta Biblioteca está literalmente tan bien como figurativamente llena de Matemáticas. Por ejemplo, una diagonalización de Cantor podría usarse para mostrar que ningún catálogo discreto podría enlistar todos los libros. Además la paradoja de Epiménides debe existir en la forma de un libro de referencia que sólo enliste libros de referencia que no son auto-referenciales. (Claro que la Biblioteca debe contener versiones que son auto-referenciales también como algunos que no son auto-referenciales).

En adición, existen todos los problemas matemáticos asociados con la magnitud de la Bibiloteca - uno podría- fácilmente consumir toda su vida buscando un libro que contenga una oración significativa. Y considerando el problema de un censurador deseoso de eliminar un libro en particular, sólo para descubrir que está duplicado por una inacabable lista de sustitutos de copias casi perfectas diferentes sólo por una letra. O consideremos la frustación de aquellos quienes buscaron un libro A exponiendo los significados y secretos del Universo. Sabían que en la Biblioteca debería haber un libro B *describiendo cómo encontrar A, también como un libro C describiendo cómo encontrar B, y así...Algunos dandose cuenta de que tal búsqueda para tal libro era infructuosa, incluso intentaron reproducir esto probabilísticamente por un lanzamiento de dados.*

Es a propósito que Borges escribió esta historia para describir los horrores del trabajo en una Biblioteca.Por otro lado, uno puede leer en su relato fuertes metáforas matemáticas. (4)

A P E N D I C E

EL ARTE APLICADO A LAS MATEMATICAS

En contrapartida a todo lo anterior, de que las Matemáticas se aplican a una gran variedad de actividades, esta el siguiente ejemplo, donde la pintura se aplica a las Matemáticas para dar idea de la más alta abstracción.

Se trata de una entrevista al Matemático soviético A.T.Fomenko efectuada por Neal y Ann Koblitz titulada:"Mathematics and the External World", publicada en la revista The Mathematical Intelligenser en el V6(1986)#2,p.p.8-17,25. Transcribiré solamente una parte, que considero la más importante para el tema, de tal entrevista:

> *-Su trabajo artístico ha contribuido al buen éxito y popularidad de varios libros de texto matemáticos publicados en la Union Soviética, y más recientemente algunos de ellos han sido publicados en el Occidente. ¿Cuándo es cuando empieza usted a pintar? y ¿Cómo sus inclinaciones artísticas se desarrollaron?*

-Heredé mi habilidad de pintar de mi madre Valentina Plikarpovna Fomenko, aunque ella no fue del todo una artista entrenada. Mis primeros experimentos serios en esta dirección surgieron con la publicación por la Universidad de Moscú en 1967 del libro Topología Homológica de Fuck, Gutenmaker y yo mismo. Yo tuve la idea de ilustrar este libro de texto de Topología no simplemente con bosquejos y diagramas formales, como usualmente se hace, sino más bien con "diagramas libres", mostrando los objetos topológicos complicados que no fácilmente se prestan para una representación visual.

Este experimento fue muy útil y marcó el comienzo de un área en mi actividad que yo podría llamar "gráficas matemáticas". Hasta el momento he completado alrededor de 280 trabajos (papel, lapiz, tinta, oleo, acuarela), una gran parte de los cuales están dedicados a ilustrar varios objetos y conceptos matemáticos.

Muchos Matemáticos me han dicho que han hecho uso de mi trabajo para ayudarse a visualizar lo que ellos sólo entendían en el lenguaje de las fórmulas y que tenían que imaginarse en una forma puramente intuitiva.

Yo siempre he estado intrigado con la posibilidad de mostrar a los no-Matemáticos la *intrínseca riqueza del mundo matemático, cuyo encanto sólo puede realmente ser apreciado despues de emplear muchos años de travesía a lo largo de estos fantásticos paisajes.*

Debo añadir que muchas de mis gráficas están dedicadas a áreas fuera de las Matemáticas: viejas leyendas, mitos, símbolos, emociones, etc.

¿Considera sus intereses artísticos como un descanso del trabajo matemático o una recreación?, ¿O algo más?.

- De ninguna manera considero mis hobies artísticos como un descanso de las Matemáticas. Simplemente éstos (para mí) son algo distinto del pensamiento matemático. Mis gráficas, que no tienen una conección formal con las Matemáticas, no obstante muestran la marca indeleble de mi profesión. En mi opinión, las Matemáticas no son simplemente una profesión, sino más bien un modo de pensar, una forma de vida. Uno no puede ponerlas a un lado.

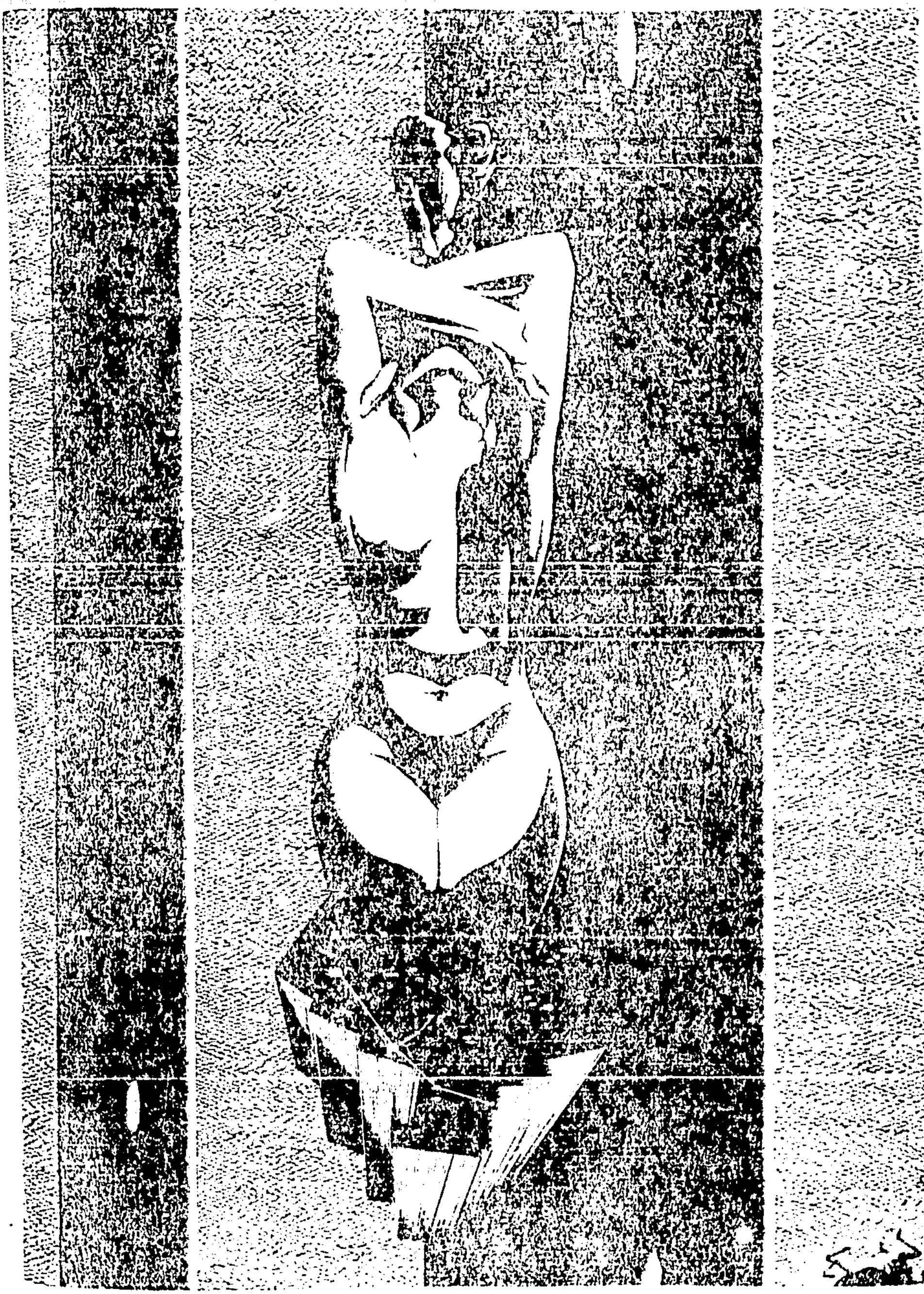
Pero es necesario hacer notar que los estilos específicos del trabajo de un

Matemático y el de un artista son muy disimilares. Personalmente, necesito varios días para cambiar de un estilo a otro.

¿Qué influencias hay en su estilo de dibujo?

Primero que nadie los notables artistas escolar-enciclopedista del Renacimiento, especialmente Leonardo da Vinci. Luego, Bruegel y Bosch. Tengo una serie especial de gráficas que titulé "<u>Conversaciones con los artistas de los siglos XV-XVI</u>". Mezclados con los artistas modernos como Dalí, Escher, Ciurlionis, Vasiliev. He tratado de nunca imitarlos, sino más bien de entender lo que ellos sentían cuando creaban sus composiciones. Mi método propio es una suerte de reproducción fotográfica de mundos reales matemáticos. Así, mis gráficas siempre tienen muy diferentes y distintivos rasgos.

Veamos las siguientes ilustraciones que aparecen en los libros de texto de Topología antes mencionados.



N O T A S

1. G.G.Hall *Mathematical Education*
LIBRO editado por G.T.Wain. 1978 CAP.II.p.p.25-28

2. Dorothy Bernstein *The role of applications in Pure Mathematics*
The Amer.Math.Monthly V86(1979),p.p.245-253

3. William Sacco y Clifford W.Sloyer
An application of the Distance Formula to Medical Science
The Math.Teacher v77(1984)#1,p.p.27-29

4. D.O.Koehler *Mathematics and the Literature*
Math. Magazine v55(1982)#2,p.p.81-95

5. Neal y Ann Koblitz
Mathematics and the External World:An interview with Prof. A.T.Fomenko
The Math.Intelligenser V8(1986)#2.p.p.8-11,25

C O N C L U S I O N E S

Para concluir este trabajo señalaré algunos de los puntos y opiniones principales o bien que se destacan por alguna otra razón.

El primer punto es la división de las Matemáticas en Aplicadas y en Puras, en donde los Matemáticos argumentan que desde los inicios de las Matemáticas, con la Geometría Euclideana, las definiciones que prologan muchos de los libros de los Elementos sirven para dar idea de los objetos de que se está hablando (Robinson 1.1); o bien que tal división es artificial pues la Matemática es una sola, si bien el método que se usa por un Matemático escogiendo axiomas de un mundo natural o de uno abstracto lo hará Aplicado o Puro. (Adam 1.2)

En segundo lugar está la distinción de las Matemáticas Aplicables, que no son ni Matemáticas, ni Matemáticas Aplicadas, ni Matemáticas Puras, sino métodos matemáticos utilizables por Físicos, Ingenieros, Químicos, Biólogos, Ecónomos, etc., gente no dedicada a las Matemáticas. (Moiseiwitch 1.3)

En tercer lugar la <u>definición</u> de las Matemáticas Aplicadas, aunque en estos artículos (no sé de la existencia de otros en que sí lo hagan) no fundamentan los autores el porqué sí se pueden dividir a las Matemáticas.

Una de tales definiciones es la de que las Matemáticas Aplicadas son el estudio matemático de conceptos, principios, y fenómenos científicos generales, donde el objetivo principal es el conocimiento del mundo real; los resultados están sujetos a pruebas experimentales y de verificación.

La elegancia y rigor del análisis son subordinados, como los, resultados a la verdad y validez del conocimiento obtenido. (H.P.Greenspan 2.3)

Algunos otros Matemáticos definen a las Matemáticas Aplicadas por medio de su método, especificando todo el proceso de la <u>Modelación</u>.

En cuarto lugar está la existencia de los <u>Matemáticos</u> <u>Aplicados</u>; tal existencia se considera tanto en opiniones donde la Matemática es una sola (Adam 1.2) como en las que si se divide a las Matemáticas en Matemáticas Aplicadas y Matemáticas Puras.

Una opinión de la definición del trabajo de un Matemático Aplicado es la de que es un anfibio . que habita en el mundo de las Matemáticas Puras y el mundo de la Ciencia. En Matemáticas es un generalizador y en Matemáticas Aplicadas debe entender el lenguaje técnico científico y el lenguaje de las Matemáticas. (G.G.Hall 3.1)

Aunque hay que considerar que además de que ya sea participando interdisciplinariamente, o bien en Matemáticas Aplicadas y Matemáticas Puras, existen Matemáticos que a veces se comportan como Puros y otras como Aplicados; por otro lado están los que exclusivamente se dedican a ser Matemáticos Aplicados trabajando en alguna empresa particular o del gobierno, o en algun Instituto de Matemáticas Aplicadas, ya sea en Computación, Ingeniería, etc.

En quinto lugar esta la <u>distinción entre Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas</u>, la cual radica según Moiseiwtich (4.4), en la variable tiempo,y que en Matemáticas Aplicadas se discuten la velocidad, aceleración, momento, fuerza y energía, y en Matemáticas Puras se trata con puntos, curvas, gradientes, superficies y volúmenes.

En sexto lugar esta la <u>educación de las Matemáticas Aplicadas</u>, en donde se destacan las *siguientes ideas:*

1. Estableçer a las Matemáticas Aplicadas como una disciplina nueva, con un carácter profesional. (Murray 7.3)

2. La importancia del saber aplicar Matemáticas formulando problemas en términos matemáticos. (Hinselwood 7.4. y Peter Hilton 7.7)

3. La utilidad de las Matemáticas Aplicadas, enseñanza de Matemáticas que sean útiles. Enseñar a sistematizar sin llegar a extremos. (Freudenthal 7.2)

4. Creación de programas adecuados a nivel Licenciatura y Potsgrado, tanto en las carreras de Matemático, enseñando un poco de otras áreas para fomentar la interdisciplinaridad, tendiendo a la formación de Matemáticos Aplicados, como en otras carreras incluyendo cursos de Matemáticas con conceptos necesarios y modelos científicos que permitan ver al estudiante cómo se pueden aplicar las Matemáticas. (Peter Hilton 7.7 y Steen 7.6)

En sí éstos son algunos de los puntos relevantes de este trabajo, sin menospreciar a otros que también son importantes en otro sentido.

Por último quiero terminar diciendo que nosotros estamos en un mundo y me parece imposible la total abstracción de él, ya que en nuestra mente siempre habrá referencias de situaciones que vivimos.

El conocimiento debe ser integral, y tarde o temprano, por más que se les clasifique a los distintos temas entre las Matemáticas, así como entre las distintas áreas, éstos se tocarán.

Sin duda que es importante aplicar las Matemáticas, de pensar en una educación para aplicarlas, de saber qué son las Matemáticas Aplicadas y cómo se enseñan, como lo es saber qué son las Matemáticas, su procedimiento, el pensamiento matemático abstracto, y lo útil que es en la vida.

Un ejemplo de este uso del pensar matemático es el de Borges cuando en sus relatos, sus personajes detectivescos deducen de una serie de hipótesis la solución de una serie de crímenes, además de que usa nociones matemáticas como la simetría y el infinito.

Por otro lado, en los artículos analizados aquí y en los artículos que doy como complemento, distingo que destacan la importancia de las Matemáticas Aplicadas en la vida de un país, por sus repercuciones en su economía, en su cultura científica, su tecnología, etc.Cosa que en el caso de México, el apoyo en general que se le da a la Ciencia es muy limitado, y aún más específicamente para la Matemática. Mientras que en países "desarrollados" le dan una gran importancia a las Matemáticas y a su educación, aquí prácticamente no se la dan en absoluto.

Al ir elaborando la tesis, me dí cuenta realmente de la importancia del conocimiento de las Matemáticas Aplicadas, para así poder influir en el concepto que tiene la gente en general, y más en los estudiantes, de las Matemáticas, para modificarlo en beneficio de éstas y de ellos mismos.

Aunque este trabajo es una mera presentación, es indudable la importancia de una discución sobre la educación de las Matemáticas Aplicadas tomando en cuenta lo que se ha hecho en otros países (en la hemerobobliografía hay alguna información que ayudaría), para quizás proponer una modificación o cambio de programas de Matemáticas actuales, a nivel Secundaria, Preparatoria y Licenciatura, la cual debería de enfocarse en cuanto a Matemáticas Aplicadas *y al cómo aplicar Matemáticas.*

Por eso considero que este trabajo es el inicio de una serie de trabajos posteriores.

I N D I C E

P O R T E M A S

GENERALES :

1.J.A. Adam *Some thoughts on the Nature of Mathematical Statements*

Bull.The Inst.of Math.and its Applic.

V17(1981)#1,p.p.21-25

2.J.Barkley Rosser *Mathematics and Mathematicians in World War II*

Notices of the Amer.Math.Soc. V29(1982)#6.p.p.509-515

3. M.A.Biot *Applied Mathematics, an art and science*

J.Aerospace Sci V23(1956),p.p.406-489

4. Alan Bishop *Visualising and Mathematics in a Pre-technological culture*

Ed. Studies in Math. V10(1979), p.p.135-146

5. R.P.Boas *Are Mathematicians Unnecesary ?*
The Math.Intelligenser V2(1981)#4,p.p.172-173

6. F.F.Bonsall *A down-to-Earth view of Mathematics*
The Amer. Math.Monthly V89(1982)#1, p.p.8-15

7. H.J.M.Bos, Ultrcht, H.Merthins
The interactions of Mathematics and Society in History some exploratory remarks
Historia Mathematica V4(1977),p.p.7-30

8. N.Bourbaky *The Architecture of Mathematics*
The Amer. Math.Monthly V57(1950), p.p.221-232

9. Hugh Burkhardt Blackie *The Real World and Mathematics*
LIBRO Birkhauser, Boston 1981; 189 p.p.

10. M.L.Cartwright *Mathematics and thinking Mathematically*
The Amer.Math.Monthly V77(1970),p.p.20-28

11. James C.Frauenthel *Change in Applied Mathematics is Revolutionary*
The Math.Intelligenser V3(1980)#1,p.19

12. Gardiner *HUman Activity: The Soft Underbelly of Mathematics*
The Math.Intelligenser V6(1984)#3,p.p.22-27

13. Tony Gardiner *Mathematical Method: does exist?*

The Math.Gazette V71(1987).p.p.265-271

14. R.E.Gaskell.M.SKlamkin

The Industrial Mathematician

views his profession

The Amer.Math.Monthly V81(1974)#7.p.p.699-716

15. H.P.Greenspan *Applied Mathematics at MIT*

tHE aMER. mATH.mONTHLY v80(1973).P.P.67-72

16. P.R.Halmos *Mathematics as a creative art*

American Scientist 1968.p.p.509-516

17. P.R.Halmos *Pure thought es Better yet*

Two Years College Math.Journal v16(1985)#1.p.p.14-16

18. P.S.Hammer *The Role and Nature of Mathematics*

Math.Teacher 1964. p.p.514-521

19. R.W.Hamming *The Role of Applications in Pure Mathematics*

The Amer. Math.Monthly V87(1980)#2. p.81

20. Robert Hermann *Mathematics and Technology*

Not.of the Amer.Math.Soc. V31(1984)#7.p.p.772-773

21. Neal and Ann Koblitz
Mathematics and the External World: An Interview with Prof. A.T.Fomenko
The Math.Intelligenser V8(1986)#2,p.p.8-11.25

22. B.L.Moiseiwitch *What is Applied Mathematics?*
Bull.The Inst.of Math.and its Applic.V17(1981)#7130-132

23. J.Mordell *Hardy's "A Mathematician Apology"*
The Amer.Math.Monthly V77(1970)#8,p.p.831-836

24. L.J.Paige *Public Understanding of Science and its implications for Mathematics*
The Amer. Math.Monthly V78(1971),p.130

25.H.O.Pollak *What industry wants a Mathematician to know and how we want them to know it*
Ed. Studies in Math. V7(1976),p.p.109-112

26. Mina Rees *The Mathematical Sciences and World War II*
The Amer.Math.Monthly V87(1980)#8,p.p.607-621

27. L.Richarsdon *A sociologist's view of Pure Mathematics 1939-1957*
The Math.Intelligenser V6(1984)#1,p.p.77-78

28. Mc Lne Saunders *The Future Role of the Federal Gobernement in Mathematics*

The Amer.Math.Monthly V74(1967)#2.p.92

29. J.L.Synge <u>Potscards on Applied Mathematics</u> .
The Amer.Math.Monthly V46(1939)

30. J.W.Tukey <u>What can Mathematician do for the Federal Government</u>
e Amer.Math.Monthly V74(1967)#2.p.101

31. S.M.Oppol <u>The Applicability of Mathematics</u>
Inter.Journal of Math.Ed.in Science and Tech.
V15(1984)#2.p.p.149-152

32. A.Weil <u>The Future of Mathematics</u>
The Amer.Math.Monthly V57(1950),p.p.295-306

33. <u>Students's Viewpoints on Applied Mathematics</u>
Bull.The Inst.of Math.and its Applic.
V19(1983)#8.p.p.167-168

34. <u>New Journal: Applied Mathematics Notes."The Canadian Math. Society</u>
The UMAP Journal V2(1981)#3

35. <u>Math. Applications:"A Case Study of the Societ American Arms Race</u>
The UMAP Journal V3(1982)#1

APLICACIONES :

La revista SIAM Journal on Applied Mathematics trae una gran variedad de Aplicaciones de las Matemáticas, y de Matemáticas aplicadas también. Aquí presento solamente algunas aplicaciones menos comunes.

1. Gerald D. Brazier <u>Calculus and Capitalism</u>
Math. Teacher V71(1978)#1, p.p.65-67

2. D.O. Koehler <u>Mathematics and Literature</u>
Math. Magazine V55(1982)#2, p.p.81-95

3. David Kullman <u>Mathematics is where you find it</u>
Scool Science and Math. V(LXXXI)#1, 1981, p.p.42-50

4. Norman Levinson <u>Coding Theory: A counterexample to G.H. Hardy's Conception of Applied Mathematics</u>
The Amer. Math. Monthly V77(1970)#3, p.p.249-258

5. Masor <u>What is there so Mathematical about Music?</u>
Mat. Teacher V72(1979)35, p.p.414-422

6. Thomas O'Shea Geometric transformations and Musical Composition

Math.Teacher V72(1979)#7.p.p.523-528

7. Nola J>Reed One Musician's Use of Combinations and Permutations

The UMAP Journal V4(1983)#4

8. William Sacco, Clifford W. Sloyer

An Application of the Distance Formula to Medical Science

Math.Teacher V77(1984)#1.p.p.27-29

9. Mathematics and Theology : Game theoretics Implications of God Emminence

Math.Magazine C53 #5

EDUCACION :

1. Ronald F.Barnes Applied Mathematics: An introduction via Models

The Amer. Math.Monthly V84(1977).p.p.207-210

2. R.Bischler *The Role of Applications of Mathematics in the theory and practice of Mathematics Education in The Federal Rp. of Germany-a report on literature, projetcs and ideas*
Int.Journal of Math.Educ. in Science and Tech. V13(1982)#2,p.p.199-216

3. E.A.Bender *Teaching Applicable Mathematics*
The Amer. Math.Monthly V80(1973),p.p.302-307

4. David N.Burges *Mathematical Modelling: A positive direction for the teaching of Applications at scholl*
Educ. Studies in Math. V11(1980),p.p.113-131

5. Cristopher J.Dede *Future Chalenges for Science and Mathematics Education*
Scholl Science and Math. V(LXXXIII)#5,1983,P.P.363-374

6. Friedmann, Goldstein *What can be done about teaching the applications of Mathematics in Colleges and Univer sities*
The Amer.Math.Monthly V72(1965)#1,p.p.113-117

7. Jack Hachigian *Applied Mathematics in a libera arts context*
The Amer.Math.Monthly V85(1978),p.p.585-588

8. C.A.Hall *Industrial Mathematics:A course in Realism*

The Amer.Math.Monthly V82(1975).p.p.651-659

9. Shirley A.Hill *National Assement of educational progress*

The Amer.Math.Monthly V87(1980)#6,p.p.427-428

10. Peter Hilton *Cryptanalisys in World War II- and Mathematics Education*

Math.Teacher V77(1984)#7.p.p.548-552

11. Murray S.Klamkin *On the ideal role of an industrial mathematician and its educational implications*

The Amer.Math.Monthly V78(1971),p.p.53-76

12. Morris Kline *Mathematics and the Dilemma of University Education*

LIBRO New York Springer 1981; critica en The Math.Intelligenser V1(1980)#1,p.p.

13. Richard Lesh *Applied Mathematical problem solving*

Educ.Studies in Math. V12(1981),p.p.235-264

14. E,Montroll *Education in Applied Math.*

SIAM (1967),p.p.289-415

15. F.J.Murray *Education for Applied Mathematics*

The Amer.Math.Monthly V69(1962),p.p.347-357

16. Ervin and Rodin *Modular Applied Mathematics for Beggining students*

The Amer.Math.Monthly V84(1977),p.p.555-560

17. C.A.Rogers *The teaching of Pure Mathematics Attitude of Mind*

Bull.The Inst.of MAth.and its Applic.

V19(1983)#4,p.p.71-72

18. Jerome Spanier *The Education of an Applied Mathematician*

Bull.The Inst. of Math.and its Applic.

V19(1983)#3,p.p.430-447

19. Steen *Mathematics Tomorrow*

LIBRO New York Springer 1981

critica en The Mat. Intelligenser V4(1982)#3,p.156

20. Frank Swetz *A Mathematical Sciences program at an upper-division campus*

The Amer. Math.Monthly V85(1978),p.p.819-822

21. Rene Thom *The Virtues and Dangers of Interdisciplinary Research*

The Math.Intelligenser V7(1985)#3,p.p.31-34

22. G.Trelinsky *Spontaneus Mathematization of situations Outside Mathematics*
Ed. Studies in Math. V14(1983),p.p.275-284

23. Alan Tucker *Toward a Mathematics Mayor for the 1980's*
The Amer.Math.Monthyl V81(1974)#8.p.p.891-899

24. P.Whitte *Applicable Mathematics- Old and New Wines*
Bull.The Inst.Of Math.and its Applic.
V19(1983)#4,p.p.92-93

EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS

Proccedings of the Coloquium: *How to teach Mathematics so as to be Useful*

1. V1(1968),p.p.1-243

a. H.Freudenthal *Why to teach Mathematics so as to be Useful* , p.p.3-8
b. H.B.Griffiths *Pure Mathematicians as teachers of Applied Mathematics* , p.p.18-23
c. H.O.Pollak *On some of the Problems to teching Applications of Mathematics*, p.p.24-30
d. J.Tavernier *The thinking of a Phipicist about Mathematics*, p.p.55-60

e. M.S.Klamkin *On the teching of Mathematics so as to be Useful* ,p.p.126-160

f. Arthur Engel *Systematic Use of Applications in Mathematics teaching* . p.p. 202-221

g. Lausanne *Final Recomendations of the participants about the Cordination of the teching Mathematics and Physics*.p.p.245-246

Continuación del tema del coloquio:

2. V2(1969)

a. J.V.Armitage *The relation between Abstract and Concrete Mathematics at Scholl*. p.p.180-188

b. Arthur Engel *The relevance of modern fields of Applied Mathematics for Mathematical Education* . p.p.257-269

c. E.Fischbein *Einsegnement Mathematique et developpement intellectuel* .p.p.290-306

d. H.O.Pollak *How can we teach applications of Mathematics* , p.p. 393-404

I N D I C E P O R
A U T O R

ADAM, J.A. Some Thoughts on the Nature of Mathematical Statements
Bull. The Inst. of Math. and its Applic. V17(1981)#1, p.p. 21-25

ARMITAGE, J.V. The relation between Abstract and Concrete
Educ. Studies in Math. V2(1969), p.p. 180-188

BARKLEY Rosser Mathematics and Mathematicians in World War II
Not. of the Amer. Math. Soc. V29(1982)#6, p.p. 509-515

BARNES Ronald Applied Mathematics: An introduction via Models
The Amer. Math. Monthly V84(1977), p.p. 207-210

BENDER E.A. Teaching Applicable Mathematics
The Amer. Math. Monthly V80(1973), p.p. 302-307

BICHLER R. *The Role of Applications of Mathematics in the Theory and practice of Mathematics Education in the Federal Rep.of Germany- a report on literaure, projects and ideas.*
Int .Journal of Math.Educ. in Science and Tech.
V13(1982)#2,p.p.199-216

BIOT,M.A. *Applied Mathematics, an art and science*
J>Aerospace, Sci V23(1956),p.p.406-411,489

BISHOP Alan *Visualising and Mathematics in a Pre-technological culture*
Educ.Studies in Math. V10(1979).p.p.135-146

BOAS R.P. *Are Mathematicians Unnecesary?*
The Math.Intelligenser V2(1981)#4,p.p.172-173

BONSALL.F.F. *A down-to-Earth view of Mathematics*
The Amer.MAth.Monthly V89(1982)#1,p.p.8-15

BOS H.J.M. *The interaction of Mathematics and Society in History some exploratory remarks*
Historia Matematica V4(1977).p.p.7-30

BOURBAKY N. *The Architecture of Mathematics*
The Amer.Math.Monthly V57(1950),p.p.221-232

BRAZIER Gerald <u>Calculus and Capitalism</u>

MAth.Teacher V71(1978)#1.p.p.65-67

BURGES David <u>Mathematical Modelling: A positive direction for the teaching of Applications of Mathematics at School</u>

Educ.Studies in Math. V11(1980).p.p.113-131

BURKHARDT Hugh <u>The Real World and Mathematics</u>

LIBRO Birkhauser. Boston 1981. 189 p.p.

CARTWRIGHT. M.L. <u>Mathematics and Thinking Mathematically</u>

The Amer.Math.Monthly V77(1970).p.p.20-28

DEDE Cristopher <u>Future Chalenges for Science and Mathematics Education</u>

School Science and Math. V(LXXXIII)1983.#5.p.p.363-374

ENGEL Arthur <u>Systematic use of Applications in Mathematics teaching</u>

Educ. studies in Math. V2(1969).p.p.257-269

FISCHBEIN E. <u>Einsegnement Mathematique et developpement intellectuel</u>

Educ.Studies in MAth. V2(1969).p.p.290-306

FRAUENTHEL James _Change in Applied Mathematics is Revolutionary_

The Math.Intelligenser V3(1980)#1.p.19

FREUDENTHAL H. _Why to teach Mathematics so as to be Useful_

Educ.Studies in Math. V1(1968).p.p.3-8

GARDINER _Human Activity: The Soft Underbelly of Mathematics_

The Math.Intelligenser V6(1984)#3.p.p.22-27

GARDINDER Tony _Mathematical Method: does it exist?_

The Math. Gazette V71(1987),p.p.265-271

GASKELL R.E. _The Industrial Mathematician views his Profession_

The Amer.Math.Monthly V81(1974)#7.p.p.699-715

GOLDSTEIN Friedmann _What can be done about teaching the Applications of Mathematics in Colleges and Universities_

The Amer. Math.Monthly V72(1965)#1.p.p.113-117

GREENSPAN H.P. _Applied Mathematics at MIT_

The Amer.Math.Monthly V80(1973).p.p.67-72

GRIFFITS B. *Pure Mathematicicians as techers of Applied Mathematics*

Educ.Studies in Math. V1(1968).p.p.18-23

HACHIGIAN Jack *Applied Mathematics in a liberal context arts*

The Amer.Math.Monthly V85(1978).p.p.585-588

HALL.C.A. *Industrial Mathematics: A course in Realism*

The Amer.Math.Monthly V82(1975).p.p.651-659

HALMOS.P.R. *Mathematics as a creative art*

Amer.Scientist 1968. p.p.509-516

Pure thought is Better yet

Two Years College Math.Journal V16(1985(#1.p.p.14-16

HAMMER P.S. *Role and Nature of Mathematics*

Math. Teacher 1964. p.p.514-521

HAMMING R.W. *The Role of Applications in Pure Mathematics*

The Amer. Math.Monthly V87(1980)#2.p.81

HERMANN Robert *Mathematics and Technology*

Not.of the Amer.Math.Soc. V31(1984)#7.p.p.772-773

HILL Shirley *National Assement of educational progress*
The Amer. Math.Monthly V87(1980)#6.p.p.427-428

HILTON Peter *Cryptanalisys in World War II - and Mathematics Education*
Math.Teacher V77(1984)#7.p.p.548-552

KLAMKIN M.S. *On the teaching of Mathematics so as to be Useful*
Educ.Studies in Math. V1(1968).p.p.126-160

On the ideal Role of an Industrial Mathematician and its educational implications
The Amer.Math.Monthly V78(1971).p.p.53-76

The Industrial Mathematician views his Profession
The Amer.Math.Monhly V81(1974)#7.p.p.699-716

KLINE Morris *Mathematics and the Dilemma of University Education*
LIBRO New York Springer 1981: critica en
The Math.Intelligenser V1(1980)#1.p.p.5-14

KOBLITZ Neal, Ann *Mathematics and the External World: An Interview with Porf.A.T.Fomenko*
The Math.Intelligenser V8(1982)#2.p.p.81-95

KOEHLER D.O. Mathematics and Literature
Math. Magazine V55(1982)#2.p.p

KULMANN David Mathematics is where you find it
School Science and Math. V(LXXXI)#1.1981.p.p.42-50

LAUSANNE Final Recomendations of the participants about the cordination of the teaching Mathematics and Physics
Educ.Studies in Math. V1(1968).p.p.245-246

LESH Richard Applied Mathematical Problem Solving
Educ.Studies in MAth. V12(1981).p.p.235-264

LEVINSON Norman Coding Theory : A counterexample to G.H.Hrdy's Conception of Applied Mathematics
The Amer.Math.Monthly V77(1970)#3.p.p.249-258

MASOR What is there so Mathematical about Musical?
Math.Teacher V72(1979)#6.p.p.414-422

MOISEIWITCH B.L. What is Applied Mathematics?
Bull.The Inst.of Math. and its Applic
V17(1981)#7.p.p.130-132

MONTROLL E. Education in Applied Math.
SIAM 1967 .p.p.289-415

MORDELL J. <u>Hardy's "A Mathematician Apology"</u>

The Amer.Math.Monthly V77(1970)#8,p.p.831-836

MURRAY F.J. <u>Education for Applied Mathematics</u>

The Amer.Math.Monthly V69(1962).p.p.347-357

OPPOL S.M. <u>The Applicability of Mathematics</u>

Int.Journal of Math.Educ. in Science and Tech.
V15(1984)#2.p.p.149-152

O'SHEA Thomas <u>Geometric transformations and Musical Compotition</u>

Math.Teacher V72(1979)#7.p.p.523-528

PAIGE L.J. <u>Public Understanding of Science and its implications for Mathematics</u>

The Amer.Math.Monthly V78(1971).p.130

POLLAK H.O. <u>On some of the problems of teaching Applications of Mathematics</u>

Educ.Studies in Math. V1(1968).p.p.24-30

<u>How can we teach applications of Mathematics</u>

Educ.Studies in Math. V2(1969).p.p.393-404

<u>What industry wants a Mathematician to know and how we want them to know it</u>

Educ.Studies in Math. V7(1976).p.p.109-112

REED Nola *One Musician's Use of Combinations and Permutations*
The UMAP Journal V4(1983)#4

REES Mina *The Mathematical Sciences and World War II*
The Amer.Math.Monthly V87(1980)#8,p.p.607-621

RICHARSDON L. *A sociologist's view of Pure Mathematics*
The Math.Intelligenser V6(1984)#1,p.p.77-78

RODIN Y ERVIN *Modular Applied Mathematics for Beginning students*
The Amer.Math.Monthly V84(1977),p.p.555-560

ROGERS C.A. *The teaching of Pure Mathematics Attitude of Mind*
Bull.The INst.of Math.and its Applic.
V19(1983)#4,p.p.71-72

SACCO William, SLOYER Clifford
An Application of the Distance Formula to Medical Science
Math.Teacher V77(1984)#1,p.p.27-29

SAUNDERS Mc.Lane *The Future Role of the Federal Gobernment in Mathematics*

The Amer.Math.,Monthly V74(1967)#2.p.92

SPANIER Jerome *The Education of an Applied Mathematician*

Bull.The Inst.of Math.and its Applic.

V19(1983)#3.p.p.430-447

STEEN *Mathematics tomorrow*

LIBRO New York Springer 1981; critica en:

The Math.Intelligenser V4(1982)#3.p.156

SWETZ Frank *A Mathematical Sciences program ata an upper divition campus*

The Amer.Math.Monthly V85(1978).p.p.819-822

SYNGE J.L. *Potscards on Applied Mathematics*

The Amer. Math.Monthly V46(1939)

THOM Rene *The Virtues and Dangers of Interdisciplinary Research*

The Math.Intelligenser V7(1985)#3,p.p.31-34

TRELINSKY G. *Spontaneus Mathematization of the situations outside Mathematics*

Educ.Studies in Math. V14(1983).p.p.275-284

TUCKER Alan *Toward a Mathematics Mayor for the 1980's*

The Amer.Math.Monthly V81(1974)#8,p.p.891-899

TUCKEY J.W. *What can Mathematician do for the Federal Gobernement*

The Amer.Math.Monthly V74(1967)#2,p.101

WEIL A. *The Future of Mathematics*

The Amer.Math.Monthly V57(1950),p.p.295-306

WHITTE P. *Applicable Mathematics- Old and News Wines*

Bull.The INst.of Math.and its Applic.

V19(1983)#4,p.p.92-93