



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Cooperación estable en el Dilema del Prisionero: el
impacto de la topología de la red**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Física

P R E S E N T A:

Adolfo Aarón Alcántara Hernández



**DIRECTOR DE TESIS:
Doctor José Matías Alvarado Mentado
COTUTOR DE TESIS:
Doctor Adonis Germinal Cocho Gil**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Planteamiento del Problema	5
1.2. Objetivos	5
1.2.1. Propuesta de solución	6
1.2.2. Metodología	7
2. Antecedentes	10
2.1. Teoría de Juegos	10
2.2. Redes complejas	15
2.3. Redes homogéneas(Erdős-Renyi)	18
2.4. Red libre de escala(Barabási-Albert)	19
3. Juegos en redes	20
3.1. Cooperación en redes	21
3.2. Dilema del Prisionero aplicado a una red compleja	23
3.3. Impacto de la topología	24
3.4. Interdependencia entre Redes	25
3.5. Método	27
4. Simulaciones y Resultados	29
4.1. Experimentos	29
4.2. Resultados	29
5. Conclusiones	34

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años el estudio de sistemas complejos ha venido en aumento. Uno de los modelos más estudiados en las últimas dos décadas ha sido la teoría de redes complejas, en especial las redes que se conocen como libres de escala, debido a que los resultados que predicen estas redes coinciden con los datos experimentales que se han obtenido.

Muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza no podrían ser explicados si se analizaran los elementos por separado sin la interacción que éstos pudieran tener con el conjunto que los conforma, ya que muchos fenómenos emergen sólo cuando todos los elementos se encuentran juntos, como por ejemplo en los procesos que llevan a cabo la neuronas en nuestro cerebro para dar paso a nuestra conciencia, los cambios climáticos que pueden ocasionar desastres naturales, el vuelo de las aves o la organización de nuestra misma sociedad con sus instituciones.

Uno de los campos que se ha beneficiado por la teoría de redes es la teoría evolutiva de juegos la cual surge de la teoría de juegos al intentar explicar algunos fenómenos biológicos como la existencia promedio de la misma cantidad de hembras y machos en la misma especie[8], siendo que muchos machos no se aparearán por lo que se les podría considerar innecesarios. La respuesta es la capacidad que tiene cada individuo para procrearse, donde por capacidad se podría introducir la idea de estrategia que el individuo posea. La teoría evolutiva de juegos ha tenido aplicaciones en otras áreas como es el caso de las ciencias sociales donde podría estudiarse cómo ciertos aspectos culturales pueden prevalecer o cambiar dentro de una sociedad, o en economía al estudiarse de qué manera las empresas podrían compartir recursos y la interacción que se da entre ellas por lo mismo.

Uno de los fenómenos que permite estudiar la teoría evolutiva de juegos es cómo surge la cooperación dentro de las comunidades, donde se han obtenido resultados que muestran que la sobrevivencia de los cooperadores depende de la estructura espacial que presenten los individuos[6], debido a que los cooperadores pueden resistir la invasión de los no-cooperadores. Con esta idea se ve que la estructura en el arreglo de los jugadores puede ser un detonante para la cooperación entre individuos F.C. Santos et al.[10], analizaron la sobrevivencia de los cooperadores en Redes Complejas con topología homogénea y libre escala, donde encontraron que las redes libre escala generadas con el modelo propuesto por Albert-László Barabási y Réka Albert[1] ofrece mejores condiciones para la sobrevivencia de los cooperadores debido al enlace preferencial y la manera en cómo crece la red.

En su artículo J.Gómez-Gardeñes et al.[4] estudiaron cómo se organizan los cooperadores al analizar la dinámica evolutiva del juego del prisionero en tres comunidades: cooperadores, desertores e individuos que cambiaban constantemente sus estrategias. Al hacer un análisis microscópico de estas topologías encontraron que en redes libre de escala los cooperadores permanecen todos en un mismo núcleo, por lo cual resisten más la invasión de individuos desertores al contrario de las redes homogéneas donde los cooperadores se agrupan en varios núcleos por lo que resisten menos la invasión de individuos desertores.

Los estudios que se han hecho con redes complejas han arrojado varios resultados interesantes. La sociedad moderna es uno de estos sistemas el cual tiende a agruparse en varias comunidades que interactúan; el sistema económico depende mucho de cómo diferentes mercados intercambian recursos entre ellos, o en el estudio de los ecosistemas donde la erradicación de una especie puede tener consecuencias catastróficas. Esto demuestra que no se pueden estudiar a los sistemas de forma aislada sin tomar en cuenta de qué manera se ven afectados al interactuar con otros sistemas. Como ya se ha mostrado[3] al acoplar redes complejas, las cuales tienen cierta interdependencia, si se genera una falla en algún nodo dentro de una de las redes puede tener consecuencias catastróficas en otras redes.

En este trabajo se muestra un modelo en el cual se acoplan dos redes complejas, las cuales pueden compartir recursos, mismos que estarán representados por su función de utilidad con la finalidad de observar los beneficios que se pueden obtener por la topología de la red.

1.1. Planteamiento del Problema

En este trabajo se estudiará la evolución de la cooperación al aplicar el dilema del prisionero en dos sistemas distintos pero interdependientes.

Los sistemas estarán representados por dos redes con arquitectura distinta, una con topología libre escala y la otra con topología homogénea donde cierto porcentaje de individuos en ambas redes compartirán sus funciones de paga.

Se observará cómo afecta la topología de las redes en la sobrevivencia de la cooperación tomando en cuenta que ambas redes comparten sus pagos, dado un factor de acoplamiento.

1.2. Objetivos

General: Se aplicará el dilema del prisionero en dos redes, una con topología libre de escala y otra con topología homogénea, las cuales compartirán sus funciones de pago y se buscará saber de qué forma afecta la arquitectura de las redes a la sobrevivencia de los individuos dentro las mismas.

Específicos: Se buscará saber cuál de las dos topologías ofrece una topología más robusta y se ve menos afectada por los cambios que pueda haber en la otra red.

- **Diseño del juego:** Se aplicará el dilema del prisionero el cual es un modelo que se utiliza para analizar las decisiones que dos individuos pueden tomar. El dilema consiste en dos individuos que buscan defender sus intereses propios con tal de sacar la mayor ventaja de la situación a expensas de su compañero. El dilema lo que establece es que si los dos individuos deciden actuar basándose en acciones egoístas, obtendrán un peor resultado a comparación de si decidieran basar sus acciones pensando en la decisión tomada por su compañero.
- **Diseño de la red:** Se diseñarán dos redes, una red homogénea y otra de libre escala. Ambas redes contarán con setecientos nodos con un promedio de cuatro enlaces por nodo.
- **Diseño de algoritmos** Para el diseño de los algoritmos se usaron los modelos propuestos por Gómez Gardeñes et al. quienes aplicaron el dilema del prisionero de forma iterada en redes complejas y el modelo de

Chen-Yi Xia et al.[15], quienes aplicaron el Dilema del Prisionero a dos autómatas celulares acoplados, donde el acoplamiento estaba dado por una una función de utilidad que era compartida por los jugadores en cada autómata.

- **Implementación de juego-red:** Se aplicará el dilema del prisionero iterativamente en ambas redes, en cada ronda cada jugador o nodo jugará sólo con cada uno de los vecinos más cercanos y acumulará sus pagas. Los jugadores en ambas redes compartirán sus pagas los cuales se eligieron que fueran 350.
- **Experimentos y Resultados:** La simulaciones se programaron en Python, donde se dejó evolucionar cada simulación hasta 900 pasos, y cada simulación se repitió 20 veces para obtener un promedio de cada una. En los resultados obtenidos se observó que las redes de libre escala muestran tener una topología más robusta y la proliferación de la cooperación no se ve afectada por los cambios mostrados en la otra red.
- **Discusión:** Los resultados obtenidos en este trabajo coinciden con otras investigaciones, al mostrarse que las redes libre de escala permiten la proliferación de individuos cooperadores al resistir los cambios que podrían deberse a alteraciones externas, en este caso, debido al acoplamiento existente con la otra red la cual podía tener una topología diferente.

1.2.1. Propuesta de solución

Para la solución de este problema se diseñaron tres pares de redes, donde en cada par se acoplaron 350 jugadores mediante su función de paga, los jugadores comparten su función de paga dado un factor de acoplamiento. Los pares de redes son:

- Una red libre de escala acoplada con otra libre de escala.
- Una red libre de escala acoplada con una red homogénea.
- Una red homogénea acoplada con otra red homogénea.

En cada par de redes se aplicará el Dilema del Prisionero de forma iterada dejando evolucionar el juego en ambas redes para observar la sobrevivencia de los cooperadores en cada caso de cada red.

Se compararán los resultados obtenidos para los tres pares de redes y se observará cuál arreglo es el más adecuado para la proliferación de los cooperadores al analizar por separado cada red dentro de su arreglo.

1.2.2. Metodología

Para el desarrollo de la solución se hará uso de los siguientes modelos matemáticos:

Teoría de juegos: Rama de las matemáticas que analiza la toma de decisiones en situaciones competitivas, donde el resultado de uno de los competidores o jugadores depende de las acciones tomadas por los demás participantes.

Redes complejas: Las redes complejas son aquellas que presentan patrones de conexión que no son puramente regulares ni totalmente aleatorias.

Cada una de las redes generadas contará con 700 nodos y un promedio de cuatro enlaces para cada nodo.

Una vez generadas las redes, se analizará qué ventajas o desventajas podrían ofrecer las distintas topologías en las redes al utilizar sólo dos tipos de estructuras: homogénea y libre de escala.

La forma de entender estas posibles ventajas debido a las estructuras se hará mediante el análisis del dilema del prisionero al ser aplicado a cada una de las redes, donde los jugadores serán considerados como los nodos dentro de cada red.

Considerando que en la naturaleza por lo general los sistemas no se encuentran aislados, sino que hay una interdependencia entre ellos ya sea de una forma directa o indirecta, se formarán tres pares de redes con diferentes arquitecturas: a) dos redes libre de escala acopladas, b) red libre de escala acoplada con red homogénea, c) dos redes homogéneas acopladas.

La interdependencia entre las redes se dará mediante la función de paga de los jugadores, según lo hecho por Chen-Yi Xia et al, donde se elegirán al azar 350 jugadores que estarán relacionados con la misma cantidad de jugadores dentro de la otra red, también elegidos al azar en cada simulación.

Se modificará la interdependencia entre las redes al ir variando la fuerza de acoplamiento α dada por la función de paga $U_x = \pi_x + \alpha \times \pi_{x'}$, donde π_x , $\pi_{x'}$ son las pagas acumuladas por el jugador x dentro de una red y $\pi_{x'}$ es la paga

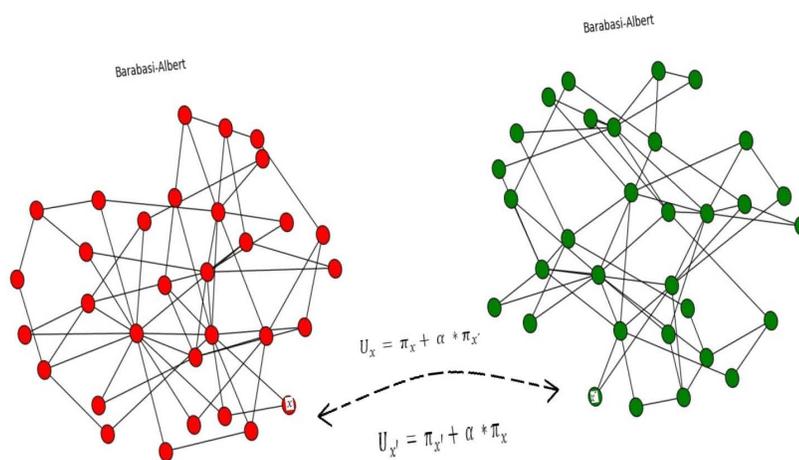
acumulada por el jugador x' en la otra red. A su vez la fuerza de acoplamiento dependerá de una amplitud A y su relación estará dada por $\alpha = A * \chi$ donde χ es una variable uniformemente distribuida en el intervalo $[-1, 1]$ y la amplitud de A irá variando con los valores $A = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$; donde $A = 0$ representará dos redes totalmente desacopladas y $A = 1$ representará dos redes totalmente acopladas. Se muestra un esquema en la figura 1.1.

Una vez formada los distintos pares de redes y la interdependencia que habrá entre ellas, dada por la función de utilidad que comparten se procederá a aplicar el dilema del prisionero a cada red en los distintos pares de redes según el modelo realizado por Gómez Gardeñes et al, el cual establece que:

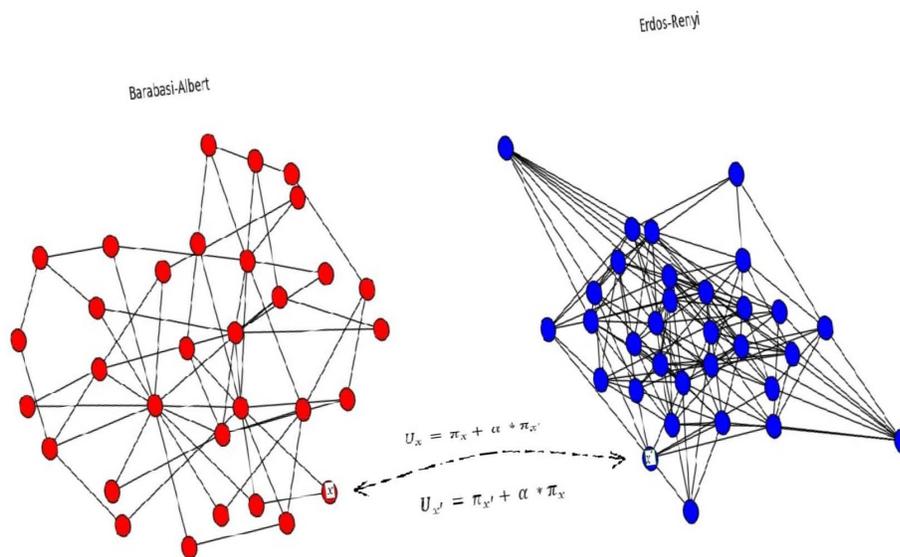
- a) En cada ronda cada nodo acumulará sus pagos con sus vecinos más cercanos.
- b) Al terminar de acumular sus pagos cada nodo elegirá al azar a alguno de sus vecinos y decidirá cambiar su estrategia a la de su vecino con cierta probabilidad si la paga del vecino elegido es mayor a la de él, en caso contrario conservará su estrategia.
- c) Se reiniciarán los pagos y comenzará otra ronda repitiendo los pasos a) y b).

Cada simulación se dejará evolucionar hasta 900 pasos después de lo cual se observará la cantidad de cooperadores que sobrevivieron en cada red.

En cada simulación hecha se aumentará el estímulo para desertar y por cada valor de este estímulo se realizarán veinte simulaciones las cuales servirán para promediar el valor de cooperadores que sobrevivan.



(a)



(b)

Figura 1.1: En a) red libre escala acoplada con otra libre de escala. En b) red libre de escala (color rojo) acoplada con red homogénea (color azul).

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Teoría de Juegos

Suponer que un jugador es *Homo economicus* es suponer que éste es un jugador “racional” y esto significa que éste selecciona todas sus opciones de tal forma que maximicen su bienestar, es decir, buscará aquellas acciones que maximicen su función de utilidad para cada acción tomada.

Un jugador es *racional* cuando cumple con estas tres características:

1. Conoce todas sus posibles acciones.
2. Conoce todos sus pagos.
3. Para cada acción que él escoja sabrá qué pago esperar.
4. Conoce sus funciones de utilidad sobre sus pagos.

Juegos con informacion completa

Un *juego estático* es aquel en el cual los jugadores eligen sus jugadas de forma simultánea e independientemente de lo que los demás jugadores escojan. En este tipo de juego los jugadores son conscientes de qué pago recibirá cada una de sus acciones, es decir, tienen conocimiento previo de los resultados de sus acciones.

Un *juego con información completa* es aquel en el cual cada jugador comparte la siguiente información en común con los demás jugadores:

1. Todos conocen las acciones de los demás jugadores.

2. El jugador conoce sus pagos y el pago de los demás jugadores correspondientes a cada una de sus acciones.
3. El jugador conoce el pago que recibirá debido a la combinación de acciones entre los demás jugadores y la suya.
4. Conoce las preferencias de los demás jugadores debido al pago que recibirá por sus acciones.

Toma de Decisiones

Cuando un jugador se enfrenta a una elección de alguna decisión teniendo varias alternativas entre las cuales elegir, este jugador se encuentra frente a un *problema de decisiones*. Éste tiene tres características:

1. *Acciones* son todas las alternativas que un jugador tiene para escoger.
2. *Pago* son los resultados o consecuencias que los jugadores obtienen por sus acciones.
3. *Preferencias*, éstas tienen que ver en la manera en cómo el jugador cataloga sus pagos de acuerdo al más conveniente y al menos conveniente. La relación de preferencia \succeq describe la preferencia de los jugadores, y la expresión $x \succeq y$ quiere decir que “*x puede ser a lo mucho igual de preferible que y*”.

La relación de preferencia \succeq será completa, es decir, para cualquiera de los dos pagos $x, y \in X$, donde X es el conjunto de todos los pagos, podrá decirse que $x \succeq y$ ó $y \succeq x$ sin ambigüedades.

Modelo formal

La teoría de juegos estudia situaciones en las cuales intervienen tomas de decisiones entre varios individuos o jugadores y en el que el beneficio de cada participante está relacionado con la recompensa que pueda obtener al momento de elegir diferentes estrategias.

Elementos que componen un juego

Las siguientes definiciones se obtuvieron de *Teoría de juegos: una introducción*[13].

Definición 1 *Un jugador en teoría de juegos será un agente capaz de tomar decisiones de forma racional.*

Un jugador puede ser desde un individuo, una empresa, una computadora hasta una especie biológica.

Definición 2 *Una función de utilidad, $u : X \rightarrow \mathbf{R}$ representa la relación de preferencia para cualquier par de elementos $x, y \in X$ tal que si $u(x) \geq u(y)$ implica que $x \succeq y$.*

Definición 3 *Una estrategia pura para el jugador i será aquel plan determinado sobre sus acciones. El conjunto de todas las estrategias puras para cada jugador i se denota como S_i .*

Definición 4 *Un perfil de estrategias puras será aquel que describa una combinación particular de estrategias puras tomadas por los n jugadores y se denotará como $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ donde $s_i \in S_i$.*

Definición 5 *Se dice que un juego está representado en su forma normal si consta de lo siguiente:*

1. *Un conjunto de n jugadores donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$.*
2. *Una colección $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ donde S_i es el conjunto de estrategias puras correspondiente al jugador i .*
3. *Un conjunto que consta de todas las posibles funciones de utilidad $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ donde cada v_i asigna un valor distinto para cada combinación de las diferentes estrategias escogidas. Esto es, un conjunto de funciones dado por $v_i : S_1 \times S_2 \times S_3 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbf{R}$ para cada $i \in \mathbf{N}$.*

Definición 6 Se dice que una estrategia s'_i se encuentra estrictamente dominada si para dos estrategias del jugador i , s'_i y s''_i dentro de un juego en forma normal, se cumple que dada cualquier combinación de estrategias de los demás jugadores, la utilidad que reciba el jugador i al escoger s'_i siempre sea menor que si hubiera escogido s''_i , es decir:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

donde $s'_i, s''_i \in S_i$.

Un jugador nunca escogerá aquellas estrategias que estén estrictamente dominadas.

La *eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas* es un método para encontrar el conjunto de estrategias que un jugador nunca llevará a cabo con los supuestos de que los jugadores son racionales, por lo cual nunca jugarán sus estrategias estrictamente dominadas y el conocimiento en común de la racionalidad de los otros jugadores, es decir, todos los jugadores saben que los demás jugadores son racionales.

Definición 7 Una creencia, s_{-i} de un jugador i es una de los posibles perfiles de estrategias S_{-i} que sus oponentes podrían seleccionar es decir:

$$s_{-i} = \{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n\} \quad \text{donde } s_{-i} \in S_{-i}$$

Definición 8 Se dice que una estrategia $s_i \in S_i$ es la mejor apuesta del jugador i contra las estrategias de sus oponentes $s_{-i} \in S_{-i}$ si se cumple que:

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall s'_i \in S_i$$

En un **Equilibrio de Nash** cada jugador está jugando su *mejor apuesta* con respecto a sus *creencias* y las creencias que los jugadores tienen sobre el perfil de estrategias son correctas, esto es, ellos saben que ellos escogerán esas estrategias.

Definición 9 Un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias puras $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) \in S$ donde s_i^* cumple con ser la mejor apuesta para s_{-i}^* , $\forall i \in \mathbf{N}$, esto es:

$$v_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq v_i(s'_i, s_{-i}^*) \quad \forall s'_i \in S_i \text{ y para toda } i \in \mathbf{N}$$

Dilema del prisionero

Un ejemplo muy famoso en teoría de juegos es el *Dilema del Prisionero*, el cual es un juego estático de información completa que consta de dos jugadores que han cometido un crimen en común.

La manera en cómo la policía decide hacerlos confesar su crimen es separando a los criminales en dos cuartos distintos. A cada criminal se le ofrece un trato en el que puede delatar (D) o no, en cuyo caso mentiría (M) a la policía. Si uno de los criminales decide delatar el crimen realizado por su compañero se le absolverá y a su compañero se le darán 5 años. En el caso en que los dos mientan, ambos serán absueltos y en el caso en el que los dos se delaten la pena se verá reducida por sólo un año, es decir, cada uno pasaría 4 años en prisión. La función de utilidad para cada prisionero tendrá un valor de -1 por cada año que permanezca en la cárcel. La representación de este juego en su forma normal estará dada por:

- Jugadores: $N = \{1, 2\}$.
- Conjunto de estrategias $S_i = \{M, D\}$ donde $i = 1, 2$, los dos jugadores tienen las mismas estrategias a elegir.
- La función de paga $v_i(s_1, s_2)$ será la utilidad que reciba el jugador i cuando el jugador 1 escoja s_1 y el jugador 2 escoja s_2 . Así podemos escribir las utilidades de ambos jugadores como:

$$\begin{aligned} v_1(M, M) &= v_2(M, M) = 0 \\ v_1(D, D) &= v_2(D, D) = -4 \\ v_1(M, D) &= v_2(D, M) = -5 \\ v_1(D, M) &= v_2(M, D) = 0 \end{aligned}$$

Otra manera de representar este juego es en su forma matricial, donde los renglones de esta matriz corresponden a las estrategias del jugador 1 y las columnas a las del jugador 2, es decir:

		J2	
		M	D
J1	M	0,0	-5,0
	D	0,-5	-4,-4

Haciendo un análisis de la tabla anterior se puede observar que este juego sólo cuenta con un equilibrio de Nash correspondiente a $v_1(D, D) = v_2(D, D) = -4$

2.2. Redes complejas

Las redes complejas han tenido muchas aplicaciones en la actualidad, por ejemplo, para describir la estructura de redes reales como el Internet, la WWW o redes que se presentan en sistemas biológicos como las neuronales o la interacción entre proteínas.

Las definiciones usadas en esta sección se obtuvieron de [2] y [16].

Formalidades

Las redes complejas se describen matemáticamente con gráficas. Una red está compuesta por una colección de nodos, los cuales pueden relacionarse entre ellos por medio de enlaces. Así, una red se define como una gráfica $g(N, \mathcal{L})$ donde $N \neq \emptyset$ es el conjunto que contiene al número de nodos $N = \{1, 2, \dots, n\}$ y \mathcal{L} es un conjunto de pares ordenados de los elementos de N donde el par $(i, j) \in \mathcal{L}$ representará un enlace entre el nodo i y el nodo j en caso de haberlo en la gráfica.

Se dice que una *gráfica es no dirigida* cuando no importa el orden de los pares ordenados del conjunto de enlaces, es decir, $l_{ij} = (i, j) = (j, i) = l_{ji}$ de lo contrario se dice que la *gráfica es dirigida*. Dos nodos son *adyacentes* o *vecinos* cuando éstos se relacionan por medio de un enlace y el conjunto de vecinos del nodo i estará dado por $N_i(g) = \{j \in N \mid (i, j) = (j, i) \in \mathcal{L}\}$ en caso de que la gráfica sea no dirigida y $|N_i(g)| = k_i$.

El número total de elementos en N y en \mathcal{L} se denota por n y L .

Para una gráfica g de tamaño n , el número de enlaces L mínimo que puede tener sería de 0 y el número máximo estaría dado por todos los pares ordenados que se puedan formar del conjunto total de nodos N , es decir $L_{max} = \binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ a esta gráfica se le conoce como *gráfica completa*.

Una *subgráfica* $g' = (N', \mathcal{L}')$ es una gráfica tal que $N' \subseteq N$ y $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Se dice que la *gráfica es inducida*, si g' contiene todos los enlaces de g que unen dos nodos en N' y se denota como $g' = g'[N']$.

Caminos y distancias

En redes el concepto de distancia es diferente al concepto que se tiene sobre ella en la física, debido a que la distancia física entre dos servidores podría ser de miles de kilómetros y la distancia que tienen entre ellos en una red podría ser sólo de unos cuantos nodos. En redes la distancia física es sustituida por el *camino* entre dos nodos.

Primero definamos lo que se entiende por una *caminata* en redes. Una *caminata* del nodo i al nodo j es una secuencia alternada de nodos y enlaces en la red.

Un *trayecto* es una caminata en la cual no se repite ningún enlace. Un *camino* es una caminata en la cual ningún nodo se repite.

Se conoce como *camino más corto* o *geodésica* al camino de mínima longitud entre dos nodos y se representa por d_{ij} . Hay que tomar en cuenta que si la gráfica es dirigida no necesariamente se cumple la relación $d_{ij} = d_{ji}$. La distancia más corta comúnmente se le conoce como la distancia dada entre dos nodos. El *diámetro* de una red, d_{max} , es la máxima distancia más larga que se registra entre cualquier par de nodos dentro de la gráfica.

Un *ciclo* es una caminata con el mismo nodo inicial y final en donde ningún enlace se repite. Un ciclo de longitud k se le conoce como *k-ciclo* y se denota como C_k . Una gráfica es *conexa* cuando se puede encontrar un camino que una cualesquiera dos nodos i, j dentro de la gráfica en caso que esto no fuera posible la gráfica es *disconexa* o *inconexa*.

Matriz de Adyacencia. Distribución de grado. Longitud de camino promedio. Coeficiente de Agrupamiento

Una gráfica puede ser completamente descrita por una matriz A a la cual se le conoce como *matriz de adyacencia*. La matriz de adyacencia es una matriz cuadrada de $n \times n$ donde $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$. En caso de que exista el enlace l_{ij} ocurre que $a_{ij} = 1$ en caso contrario $a_{ij} = 0$. Si la gráfica fuera una gráfica dirigida, sucede que $a_{ij} \neq a_{ji}$ y podría ocurrir $a_{ij} = 1$ $a_{ji} = 0$ ó al revés, o ambas podrían ser igual a uno.

El *grado* de un nodo i se representa por k_i y corresponde al número de enlaces que el nodo forma con los demás nodos, en términos de la matriz de adyacencia puede ser representado como:

$$k_i = \sum_{j \in} a_{ij} \quad (2.1)$$

En caso de que la gráfica sea dirigida el grado de un nodo tiene dos componentes, el número de enlaces que salen del nodo, es decir, $k_i^{out} = \sum_{j \in N} a_{ij}$ y $k_i^{in} = \sum_{j \in N} a_{ji}$, así siendo el grado total del nodo $k_i = k_i^{out} + k_i^{in}$.

La *Distribución del grado* $P(k)$ nos dice la probabilidad de que un nodo elegido al azar tenga grado k . Según sea la distribución de grado la topología de la red será distinta.

La *longitud de camino promedio* se denota como $\langle d \rangle$ y es la distancia promedio que existe entre todos los pares de nodos dentro de la gráfica. Para una gráfica dirigida de N nodos se tiene que:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1,n \\ i \neq j}} d_{ij} \quad (2.2)$$

Si una gráfica es desconexa, existen al menos dos nodos para los cuales no es posible encontrar un camino que los una, en este caso la distancia se define como $d_{ij} = \infty$ por lo cual es conveniente considerar la media armónica de las geodésicas entre todos los pares de nodos, la cual se conoce como la *eficiencia de g* y se expresa como:

$$E = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1,n \\ i \neq j}} \frac{1}{d_{ij}} \quad (2.3)$$

La cantidad anterior es una cantidad que indica la capacidad de tráfico dentro de la red, por lo cual se observa que $0 \leq E$. Es cero en caso que toda la red sea desconexa, y mientras mayor sea E significa que la red es más conexas.

El *coeficiente de agrupamiento* indica qué tan relacionados están los vecinos de un determinado nodo. El coeficiente de agrupamiento se representa como:

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.4)$$

donde L_i representa los enlaces que hay entre los k_i vecinos del nodo i . Se observa que $C_i = 0$ si ninguno de los vecinos del nodo i se relacionan o forman algún enlace y $C_i = 1$ si todos los vecinos del nodo i se relacionan entre ellos o forman una gráfica completa por lo tanto se puede observar que $0 \leq C_i \leq 1$.

El coeficiente de agrupamiento para toda la gráfica es representado por el *coeficiente promedio de agrupamiento*:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1, n} C_i \quad (2.5)$$

También se observa que $0 \leq \langle C \rangle \leq 1$, siendo cero el caso donde los nodos se encuentran muy incomunicados entre ellos y 1 en el caso contrario.

2.3. Redes homogéneas(Erdős-Renyi)

Estas redes se generan comenzando con un conjunto de nodos inconexos los cuales forman enlaces entre ellos con probabilidad uniforme $p \in (0, 1)$. Esta red tiene una esperanza de enlaces dada por $pn(n-1)/2$ debido a que la probabilidad de formación de enlaces corresponde a una distribución binomial. Las redes Erdős-Renyi(ER) muestran ciertas estructuras cuando el número de nodos es muy grande.

Es importante mencionar que muchas propiedades importantes en este tipo de redes *emergen* para ciertos valores de p , es decir, cuando $p_c \sim \frac{\ln(n)}{\ln\langle k \rangle}$ se observa que todas las redes generadas con estos valores de $p \geq p_c$, son redes conexas.

Teorema 2.3.1 *En una gráfica ER se cumple que el grado promedio de los nodos está dado por*

$$\langle k \rangle = p(n-1) \approx n$$

el camino promedio está dado por

$$\langle d_{ER} \rangle \approx \ln(n)/\ln\langle k \rangle$$

y el coeficiente de agrupamiento promedio

$$\langle C_{ER} \rangle \approx \langle k \rangle/n = p$$

Este tipo de gráficas presentan un camino promedio pequeño así como un coeficiente de agrupamiento pequeño, el cual cumple que $\langle C_{ER} \rangle < 1$. Es importante tomar en cuenta que la distribución de probabilidad del grado de los nodos está dada por una distribución Poisson.

Teorema 2.3.2 *La distribución de grados en una gráfica Erdős-Renyi o aleatoria viene dada por una distribución Poisson:*

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle}$$

2.4. Red libre de escala(Barabási-Albert)

Algo que caracteriza a una red ER es que casi no presenta nodos con un grado $k \gg \langle k \rangle$, es decir, el grado de sus nodos es *homogéneo*, sin embargo se ha mostrado que en la naturaleza la mayoría de las redes, como por ejemplo el Internet, WWW; redes metabólicas, la distribución del grado de nodos no es homogéneo sino que su distribución sigue una *ley de potencia* dada por $f(x) = Cx^{-\gamma}$ y esta distribución es independiente de la escala de la red, mientras en una red ER se cumplía lo contrario. Cuando se considera una red ER, se considera que esta red es estática sin tomar en cuenta la inclusión de nuevos nodos, en el caso de una red Barabási-Albert(BA) se toma en cuenta este caso con la propiedad de que el nodo que se integrará a la red preferirá los nodos que tengan un grado alto. Esta propiedad se conoce como *enlace preferencial*. Con lo anteriormente dicho, podemos formar una red BA siguiendo estos pasos:

1. Se comienza con una red completamente conexas con $m_0 \geq 1$ nodos, se introduce un nuevo nodo el cual generará de forma simultánea m enlaces con m nodos ya existentes en la red donde $1 \leq m \leq m_0$
2. El nodo mencionado arriba generará m *enlaces de forma preferencial* con los nodos ya existentes de acuerdo a la siguiente probabilidad:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^n k_j} \quad (2.6)$$

Una red BA sigue una ley de potencia para la distribución de sus grados.

Teorema 2.4.1 *El grado promedio de los nodos en una red BA es aproximadamente $2m$, y la distribución de grado de los nodos está dada por*

$$P(k) \sim 2m^2 k^{-3} \quad (2.7)$$

Capítulo 3

Juegos en redes

En teoría de juegos aplicada a redes hay que considerar tres aspectos:

- El conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$ estarán representados por los nodos en la red.
- El conjunto de estrategias a elegir por los jugadores dentro de la red, $s_i \in S$, donde s_i es la estrategia escogida por el jugador i .
- El tercer aspecto será la estructura de la red g junto con la relación que guardan cada uno de los jugadores entre ellos, representada por los enlaces entre los nodos. Se representará por G a la colección de todas las redes g que se pueden formar con n nodos de tal forma que $g \in G$.

La paga o función de utilidad del jugador i estará dada por $\Pi_i : S^n \times G \rightarrow \mathbb{R}$. Las acciones elegidas por todos los jugadores estarán representadas por $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ al cual se denotará como *perfil de estrategias*, donde $s \in S^n$.

Existen dos modelos que representan la manera en cómo pueden afectar la paga de un jugador los demás jugadores dentro de una misma red. El primer modelo se puede pensar como el hecho que normalmente nuestras acciones se ven más influidas por las personas cercanas a nosotros, las cuales en una red se representan como los *vecinos*.

Las definiciones y conceptos que se usarán en esta sección fueron tomados del libro *Conexiones: una Introducción a la Economía de Redes* [9] en especial el Capítulo 3.

Definición 1 Se conocen como efectos puramente locales cuando la interacción sólo sucede entre los vecinos del nodo i afectando su paga Π_i .

Se representa como $s_{N_i(g)} = (s_j)_{j \in N_i(g)}$ el perfil de estrategias de los vecinos del nodo i , con $N_i(g)$ siendo el conjunto de vecinos de i .

Se define la función $\Phi_{k_i} : S^{k_i+1} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $s \in S^{k_i+1}$ es el perfil de estrategias del jugador i y sus vecinos. La paga del jugador i estará dada por:

$$\Pi_i(s|g) = \Phi_{k_i}(s_i, s_{N_i(g)}) \quad (3.1)$$

Definición 2 Se conoce como interacciones globales cuando las acciones de todos los jugadores de la red afectan por igual la paga del jugador i , en este caso la paga del jugador i en una red g con un perfil de estrategias $s \in S^n$, estará dada por:

$$\Pi_i(s|g) = \Phi_{n-1}(s_i, s_{-i}) \quad (3.2)$$

Definición 3 Se define un **equilibrio de Nash** en una red g , como el perfil de estrategias s^* que cumple con:

$$\Pi_i(s_i^*, s_{-i}^*|g) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*|g), \quad \forall s_i \in S, \forall i \in N \quad (3.3)$$

3.1. Cooperación en redes

Cooperar es un fenómeno que se puede observar en muchos ámbitos de la naturaleza, desde el nivel molecular hasta en las sociedades. Por cooperar se entiende trabajar conjuntamente con otros individuos con un fin en común. En un proceso de cooperación existen dos individuos: los cooperadores(C) y los desertores(D).

En la teoría clásica de juegos un modelo muy estudiado es el dilema del prisionero el cual se mencionó en la sección 2.1. Recordando que la matriz de paga de dos jugadores muestra las estrategias a elegir y sus correspondientes pagos por sus elecciones hechas en el caso que los jugadores decidan cooperar o desertar:

En la figura 3.1 se muestra la matriz de pagos del jugador 1 donde se observa que si ambos jugadores cooperan, el jugador 1 recibe una paga R, en el caso que él decida cooperar pero jugador 2 deserte, recibirá una paga de S, pero si decide desertar cuando el jugador 2 coopera, él jugador 1 recibe una paga T y en caso que ambos decidan desertar obtendrán una paga P.

$$\begin{array}{c}
 \text{J2} \\
 \left. \begin{array}{cc} C & D \\ C & \left[\begin{array}{cc} R & S \\ D & T \end{array} \right] P \end{array} \right\} \\
 \text{J1}
 \end{array}$$

Figura 3.1: En la figura se muestra la matriz de pagos del jugador 1.

Cuando los pagos siguen la siguiente secuencia $T > R > P > S$ se obtiene el dilema del prisionero.

La teoría clásica de juegos analiza la interacción entre dos jugadores los cuales supone son racionales, donde se observa que la mejor estrategia para ambos es desertar(D) dando así un equilibrio de Nash.

En caso que se les permita a los jugadores jugar varias veces el dilema del prisionero y éstos se encuentren inmersos en una población más amplia la cual esté dividida en una fracción x de cooperadores y en una fracción y de desertores y los jugadores puedan interactuar entre todos ellos de manera azarosa se encuentra que la paga para los cooperadores y desertores está dada por:

$$\begin{aligned}
 \Pi_C &= Rx + Sy \\
 \Pi_D &= Tx + Py
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

La selección de estrategias[7] a través del tiempo viene dada por la ecuación replicadora donde la frecuencia de cambios en una estrategia depende tanto de la estrategia como de su paga:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= x(\Pi_C - \phi) \\
 \frac{dy}{dt} &= y(\Pi_D - \phi)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde la paga promedio en la población es $\phi = x\Pi_C + y\Pi_D$.

Considerando que $x + y = 1$ la ecuación replicadora para el número de cooperadores viene dado por:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)[(R-S-T+P)x + S-P] \tag{3.6}$$

donde se cumple que $\Pi_C - \phi < 0$ por lo que el número de cooperadores

disminuye con el tiempo donde $x^* = 0$ es un punto fijo en el caso del dilema del prisionero[16].

El dilema del prisionero es un modelo que ayuda a entender cómo podría surgir la cooperación. Lo paradigmático de este modelo en la teoría clásica de juegos es que la cooperación desaparece, pero si la comunidad tiene cierta estructura espacial lo que se ha descubierto[6] es que la cooperación tiende a sobrevivir. Los estudios hechos por Gómez Gardeñes et al. [4] muestran que la cooperación tiende a sobrevivir tanto para redes homogéneas como para redes libres de escala.

3.2. Dilema del Prisionero aplicado a una red compleja

Para estudiar el dilema del prisionero aplicado a una red g se analizarán los efectos puramente locales de los jugadores.

Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$ que estarán representados por los nodos en una red no dirigida se asumirá que cada jugador i jugará el dilema del prisionero sólo con sus vecinos.

Las estrategias s_i entre las cuales podrá elegir el jugador i son $S = \{C, D\}$ donde C corresponde a cooperar y D corresponde a desertar. Se representará por s el perfil de estrategias de los jugadores en la red tal que $s = (s_i, s_{-i})$ donde s_{-i} es el perfil de estrategias de todos los nodos distintos a i y $s \in S^n$. En un juego entre dos jugadores se denotará la paga del jugador i como $\pi(x, y)$ cuando él escoja la estrategia x y su contrincante la estrategia y . La paga total del jugador i estará dada por:

$$\Pi_i(s_i, s_{-i}|g) = \sum_{j \in N_i(g)} \pi(s_i, s_j) \quad (3.7)$$

El dilema se aplicará en forma repetida donde el tiempo de aplicación corresponderá a una variable discreta $t = 1, 2, \dots$. En cada periodo los jugadores tendrán la oportunidad de cambiar sus estrategias con cierta probabilidad $p \in (0, 1)$, el jugador siempre buscará la estrategia que maximice su paga. La estrategia en el tiempo t del jugador i estará dada por s_i^t y el perfil de estrategias será $s^t = (s_i^t, s_{-i}^t)$.

Se usará a lo largo de este trabajo el artículo realizado por J. Gómez Gardeñes et. al. el cual intenta responder a la pregunta de por qué sobreviven

los cooperadores en una comunidad cuando las acciones egoístas tienen una mayor remuneración. Ellos aplican el dilema del prisionero con las siguientes pagas $T > R > P > S$ donde T es la paga que recibe un jugador que decide desertar al enfrentarse a otro que decide cooperar el cual recibirá una paga S . En caso de que ambos jugadores decidan cooperar ambos recibirán R y en caso contrario, cuando los dos deciden desertar, ambos recibirán P . Las pagas en este caso están normalizadas y tienen los valores $R = 1$, $P = S = 0$ y $T = b > 1$, donde b es un parámetro del cual dependerá el número de cooperadores que sobrevivan. El dilema del prisionero se aplicó a dos topologías distintas, una homogénea y la otra de libre escala e hicieron uso del siguiente algoritmo para realizar sus simulaciones:

1. Al inicio $t = 0$ cada nodo o jugador de la red tiene la misma probabilidad de adoptar una de las dos jugadas, cooperar ($s_i^0 = 1$) o desertar ($s_i^0 = 0$).
2. A cada paso t , cada jugador dentro de la red juega con todos sus vecinos y acumula las ganancias obtenidas al interactuar con cada uno de sus vecinos.
3. Después de acumular sus ganancias, cada jugador i actualizará en el mismo paso t de forma sincrónica sus estrategias al seleccionar de forma aleatoria a un vecino j y comparará su ganancia Π_i con la de él Π_j de la siguiente forma:
 - a) Si $\Pi_i > \Pi_j$ el jugador i conservará su jugada o estrategia para el siguiente paso $t + 1$.
 - b) En caso de que $\Pi_j > \Pi_i$ el jugador i con cierta probabilidad $p_{i \rightarrow j} = (\Pi_j - \Pi_i) / \max\{k_i, k_j\}b$ cambiará en el siguiente paso $t + 1$ su jugada o estrategia a la de su vecino j , $s_i^{t+1} = s_j^t$.

3.3. Impacto de la topología

Se ha encontrado que la sobrevivencia de la cooperación en una comunidad es dependiente de la topología que ésta presente.

Al aplicar el dilema del prisionero en una red, se ha encontrado que una topología libre escala siguiendo el modelo propuesto por Barábasi y Albert, favorece la evolución de la cooperación en comparación con una red homogénea

[10], siendo las principales causas de esto el *enlace preferencial* y su mecánica de crecimiento.

En el modelo propuesto por Gardeñes et al. la cooperación tarda más en desaparecer a mayores estímulos para desertar en redes con topología libre escala, en comparación con una red con topología homogénea. Esto es debido a que en una red libre escala se forma un solo núcleo de cooperadores los cuales resisten más las invasiones de los desertores, lo cual no sucede con una red homogénea donde se forman varios núcleos de cooperadores los cuales son mas susceptibles a ser invadidos por desertores.

Se han propuesto otros modelos[5] donde se permiten mezclar dos redes con distinta topología, donde se le permitirse a una red reestructurar sus enlaces internos al eliminar varios de ellos y enlazarlos con los nodos de la otra red, así forman una sola red a la cual se aplica el dilema del prisionero de forma repetida, donde se observa que la cooperación aumenta en una red homogénea al ser ésta enlazada con una red libre escala y la cooperación permanece igual al enlazar dos redes libre escala entre sí con lo que también se observa que las redes libre escala parecen ser idóneas para la proliferación de los cooperadores.

3.4. Interdependencia entre Redes

Aunque varios sistemas pueden representarse como redes complejas de forma independiente en realidad muchos de estos sistemas muestran cierta relación entre ellos debido que a su vez pueden estar inmersos en un sistema más amplio donde éstos pueden interactuar entre ellos como podría ser el caso de una pandemia, la cual tiene origen en una comunidad y puede esparcirse entre varias comunidades o hasta entre diferentes especies.

Con lo anterior podría pensarse en una teoría de redes de redes, aunque pudiera pensarse en estas redes como una sola red, en realidad no es así, ya que al aislar a cada red, éstas tendrán un comportamiento completamente distinto a si se analizaran en conjunto.

Como se ha mencionado[14] la *interdependencia* que presenten las redes puede tener resultados catastróficos en caso de algún desperfecto en alguna de las redes, como por ejemplo en las redes eléctricas donde el fallo en una red puede dejar sin flujo eléctrico a varias zonas de algún país.

Se ha mostrado[3] que la interdependencia entre dos redes puede debilitar su robustez en caso de que éstas se trataran en forma aislada, de tal forma

que se puede pensar que al ir agregando más componentes a la infraestructura podría suscitarse algún desperfecto en alguno de sus elementos generándose un efecto dominó sin control alguno.

Se ha estudiado la evolución de la cooperación en redes interdependientes como en el caso del modelo propuesto por Chen-Yi Xia et al.[15] donde se estudió la evolución de la cooperación entre dos sistemas al aplicar el dilema del prisionero a cada uno de ellos en forma separada, pero los individuos entre ambas redes comparten sus funciones de paga. Al suponer la fuerza de acomplamiento de las pagas heterogéneas encontraron que la cooperación entre los individuos tarda más en desaparecer al ir aumentando la fuerza de enlace.

El modelo por ellos propuesto es el siguiente:

Se consideró el dilema del prisionero con el incentivo $T = b$, $S = 0$ cuando un cooperador se enfrenta a un desertor, $R = 1$ cuando ambos cooperan y $P = 0$ en caso que ambos deserten. Para el valor de b se consideró $1 < b \leq 2$ donde se cumple $T > R > P \geq S$. Después se siguen los siguientes pasos:

1. Los jugadores estarán distribuidos en dos retículas, ambas de un tamaño $L \times L$ donde cada jugador x tiene la misma probabilidad de cooperar ($s_x = C$) o de desertar ($s_x = D$). El jugador x comparará su jugada con sus vecinos y acumulará su pago π_x . Debido a la relación que existe entre las dos redes, la utilidad U_x del jugador x se verá afectada por la paga de su compañero x' ubicado en la otra retícula, dada por la relación:

$$U_x = \pi_x + \alpha \times \pi_{x'} \quad (3.8)$$

Donde $\alpha = A * \chi$ y χ es un número uniformemente distribuido en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Después de que los jugadores han acumulado sus pagos, se elegirá un jugador x al azar y adquirirá su utilidad U_x al jugar con sus vecinos y tomando en cuenta el aumento en su utilidad debida a su compañero. Después, dentro de la misma retícula, el jugador x escogerá uno de sus vecinos y al azar el cual adquirirá su utilidad U_y de la misma manera. Al final, el jugador x decidirá cambiar su estrategia a la de y ($s_x \rightarrow s_y$), con una probabilidad dada por la distribución de Fermi:

$$W(s_x \rightarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp[(U_x - U_y)/K]} \quad (3.9)$$

donde $K = 0.1$ cuantifica la incertidumbre relacionada con el proceso de adopción de estrategias.

3.5. Método

El modelo desarrollado en este trabajo se basará en los modelos de Gardñes et al. y Chen-Yi Xia et al. sólo que en este caso en lugar de considerar dos retículas se considerarán dos redes. Los parámetros considerados para desarrollar el modelo fueron:

- Las redes estaban compuestas por $N = 700$ nodos y en todas las redes el promedio de grado fue $\langle k \rangle = 4$. Se tomaron en cuenta estas cantidades ya que las simulaciones tardaban demasiado tiempo al pasar de estos valores, y no se eligieron que fueran menores porque lo importante era observar los fenómenos que se presentaban al formarse comunidades o *hubs* en las redes.
 - Se formaron tres pares de redes para observar la interacción entre ellas:
 1. Una red Erdős-Renyi interactuando con otra red Erdős-Renyi(ER-ER).
 2. Una red Erdős-Renyi interactuando con una red Barabási-Albert(ER-BA).
 3. Una red Barabási-Albert interactuando con una red Barabási-Albert(BA-BA).
 - La interacción dentro de las redes estará mediada por el dilema del prisionero donde los jugadores (los cuales están representados por los nodos) podrán cooperar(C) o desertar(D) y dependiendo de su acción recibirán los pagos ya mencionados: R si ambos cooperan, P si ambos desertan, S si un cooperador se enfrenta a un desertor el cual recibirá T donde los pagos seguirán el siguiente orden $T > R > P > S$. Los pagos estarán normalizados, es decir, $R = 1, P = S = 0, T = b > 1$.
- Las pagas dentro de las redes se obtendrán de la siguiente forma:

1. Al inicio ($t = 0$) la población estará distribuida en la misma cantidad de cooperadores ($s_i = 0$) y desertores ($s_j = 1$) en ambas redes, es decir, habrá un 50% de probabilidad que un jugador pueda cooperar o desertar.
 2. A cada paso t , cada jugador x en una red, sólo interactuará con sus vecinos, comparando sus jugadas con las de ellos y acumulando una paga π_x . Lo mismo hará su compañero x' en la otra red, acumulando su correspondiente paga $\pi_{x'}$.
- Las interacción entre las redes estará dada por la función de utilidad, la cual estará compuesta por los pagos acumulados por el jugador x en alguna de las redes mas la paga acumulada por su compañero x' en la otra red. La paga del jugador x' ubicado en la otra red, estará multiplicada por un factor α que indicará el grado de relación que guardan ambos jugadores:

$$U_x = \pi_x + \alpha \times \pi_{x'}$$

El factor α se expresará como $\alpha = A * \chi$ donde χ será un número uniformemente distribuido en el intervalo $[-1, 1]$. El parámetro A será la amplitud de acomplamiento entre ambas redes y tendrá los valores de 0, para el caso de dos redes totalmente desacopladas, de 0.25, 0.5, 0.75 y 1 para el caso en que ambas redes estén completamente acopladas.

Es importante recalcar que la relación que se mantiene entre los jugadores x y x' en las redes, no es una relación física, sino que es una relación a través de sus funciones de pago U_x y $U_{x'}$, las redes no sufrirán ningún reacomodo en su estructura.

- Cada jugador x , en el tiempo t , escogerá al azar a alguno de sus vecinos y y decidirá cambiar su jugada a la de su vecino con una probabilidad

$$W(s_x \rightarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp[(U_x - U_y)/K]}$$

donde U_x y U_y son las utilidades del jugador y su vecino.

Capítulo 4

Simulaciones y Resultados

4.1. Experimentos

Para las simulación se dejó evolucionar al sistema hasta 900 generaciones, es decir hasta $t = 900$, después de lo cual se obtuvo la densidad de cooperadores en ambas redes. Las simulaciones se repitieron 20 veces para cada valor de b y se obtuvo el promedio.

La cantidad de jugadores que compartieron sus funciones de utilidad fue de 350 en ambas redes, los cuales se eligieron de manera aleatoria.

4.2. Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas para las diferentes parejas de redes.

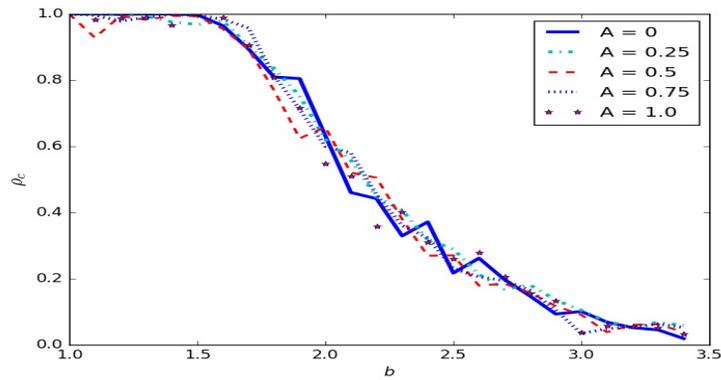
Barabási-Albert acoplada con red Barabási-Albert

Como se ha mencionado en otros artículos [10] se ha observado que la cooperación se vuelve el rasgo predominante en redes libre de escala la cual se debe a la dinámica de crecimiento de este tipo de redes y al enlace preferencial.

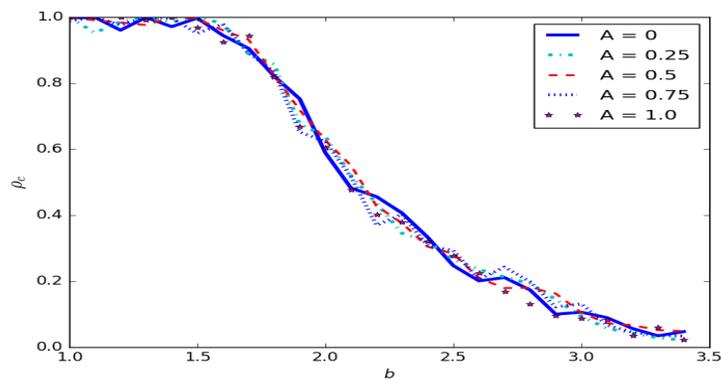
Se muestran en las siguientes dos figuras los promedios que se obtuvieron al enlazar dos redes de libre escala al ir variando el valor de la amplitud de acoplamiento A .

En la figura 4.1a se muestra el promedio en densidad de cooperadores que sobreviven al final de las simulaciones en la primera red.

Como se observa en la figura, la cantidad de cooperadores que sobreviven al final para cada uno de los valores de A no presentan ningún cambio, por lo cual se puede pensar que el número de cooperadores no se ven afectados por el acoplamiento con la otra red.



(a)



(b)

Figura 4.1: En a) y b) se muestran la densidad de cooperadores ($\rho_c(b)$) que sobreviven al final de las simulaciones en dos redes BA acopladas.

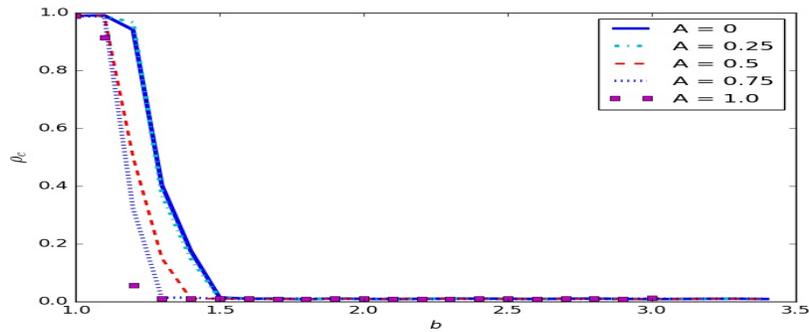
En la figura 4.1b se muestra la gráfica del promedio de cooperadores que sobrevivieron en la otra red. Se puede observar que ambas gráficas se com-

portan parecido en relación con la densidad de cooperadores que sobreviven.

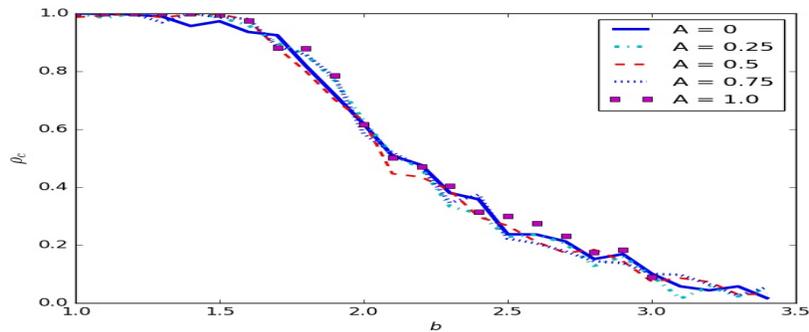
En las gráficas anteriores se puede observar que la cooperación entre los individuos en ambas redes se mantiene constante.

Barabási-Albert acoplada con red Erdős-Renyi

En la figura 4.2a se observa el promedio en la densidad de cooperadores que sobreviven al final en una red Erdős-Renyi al ir variando la amplitud A de acoplamiento entre las dos redes. Se puede observar en la gráfica que al ir aumentando A de 0 a 1, la densidad disminuye de forma drástica.



(a)



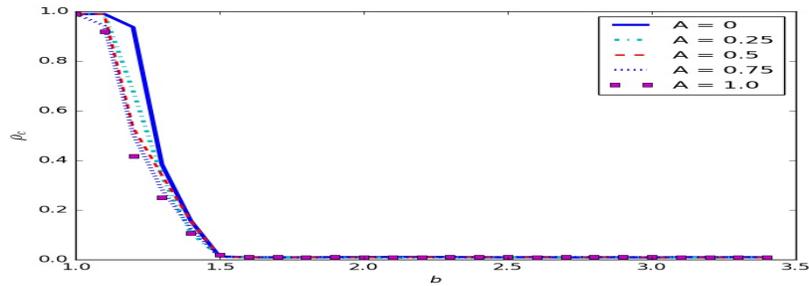
(b)

Figura 4.2: En a) se muestra la densidad de cooperadores (ρ_c) que sobreviven en la red ER. En b) se muestra la densidad de cooperadores que sobreviven en la red BA.

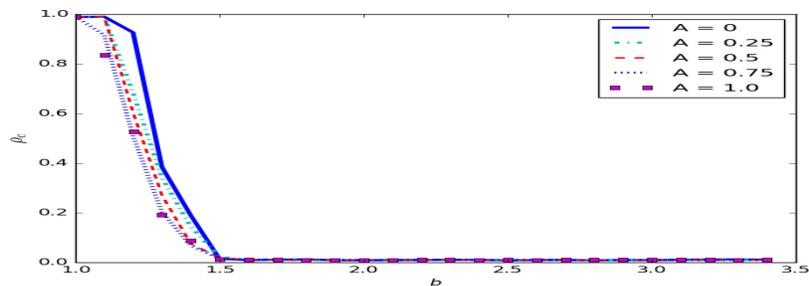
Se observa que el valor de b donde el número de cooperadores desaparece por completo disminuye conforme el valor de A aumenta.

En la figura 4.2b se muestra la otra red con topología libre escala. En esta gráfica lo que se puede observar es que la densidad de cooperadores se mantiene sin variaciones al ir aumentando la amplitud de acomplamiento A con la red Erös-Renyi. El resultado anterior parece ir de acuerdo a resultados previos donde se muestra que las redes de libre escala ofrecen mejores condiciones para el esparcimiento de la cooperación entre los individuos de la misma red.

Red Erdös-Renyi acoplada con otra red Erdös-Renyi



(a)



(b)

Figura 4.3: En a) se muestra la densidad de cooperadores (ρ_c) que sobreviven en la primera red ER. En b) se muestra la densidad de cooperadores que sobreviven en la segunda red ER.

El último par de redes acopladas corresponde a dos redes Erdös-Renyi.

Lo que se puede observar en la figura 4.3a y en la figura 4.3b es que conforme el grado de enlazamiento entre ambas aumentan disminuye el número de cooperadores que sobreviven en cada una de las redes para algún valor b , el cual es el incentivo para desertar.

Se puede notar que en ambas gráficas existe un umbral para A ($0 < A \leq 0.25$), donde el número de cooperadores que sobreviven se estabiliza al ir aumentando el valor de A mas allá de este valor. También se nota que el valor de b en el cual desaparecen los cooperadores por completo es el mismo en ambas redes, en este caso b no disminuye como sucede en el acomplamiento de las redes ER-BA.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo sobre evolución de la cooperación / no cooperación, en jugadores (nodos) que juegan el dilema del prisionero sobre redes de libre escala y homogéneas, interdependientes, se observa que las primeras mantienen la densidad de cooperadores conforme mayor acoplamiento. Mientras que, en las redes homogéneas la densidad de cooperadores siempre disminuye, no importando con qué tipo de red se acople. La red libre escala mantiene la densidad de cooperadores gracias a los nodos con gran número de enlaces (*hubs*) presentes en la red, los cuales compensan los cambios que hay en los pagos entre sus integrantes.

Como se puede observar en el capítulo 4 donde se muestran los resultados en las simulaciones, en la primera parte, al observar los resultados de acoplar dos redes Barabási-Albert al ir aumentando el factor de acoplamiento de 0 a 1, la población de cooperadores es más resistente a la invasión de la población de desertores aun cuando hay un aumento en el incentivo para desertar. Lo anterior podría ser debido a que, como se menciona en los resultados obtenidos por Gardeñes et. al., los cooperadores forman un solo grupo por lo cual si uno de sus integrantes llegara a ver su paga afectada debido al jugador de otra red con el cual se encuentra acoplado, al final la gran cantidad de cooperadores que rodean a ese integrante reforzarían su decisión de cooperar al compensar su paga. En el segundo caso, al acoplar una red Barabási-Albert con una red Erdős-Renyi lo que se puede observar es que al ir aumentando el factor de acoplamiento la red Erdős-Renyi se ve muy afectada ya que la población de cooperadores disminuye más rápido al ir aumentando el incentivo para desertar. También se observa que a mayor acoplamiento entre estas dos redes, se necesita un incentivo menor para que la población de coopera-

dores se vea afectada, es decir, estos son invandios con mayor rapidez por la población de desertores. Como se ha mencionado en resultados anteriores las poblaciones que son más homogéneas son más vulnerables a los grupos de desertores y esto podría deberse a que en las redes Erdős-Renyi la población de cooperadores está dividida en varios grupos, por lo cual, si alguno de los integrantes de ese grupo ve afectada su paga por el integrate de otra red, le será mas difícil recuperarse y de esta manera afectará al grupo entero. En el tercer caso, al acoplar dos redes Erdős-Renyi podemos ver que la población de cooperadores también desaparece con mayor rapidez al ir aumentando el incentivo para desertar y la explicación podría ser semejante al segundo caso pero la diferencia con aquél en esta situación es que se puede ver que una red Erdős-Renyi se ve mucho más afectada al acoplarse con una red libre de escala y esto también podría deberse a que los individuos que se hallan dentro de la red libre de escala podrían tener una gran cantidad de enlaces y la paga que reciba afectaría al integrante de la red Erdős-Renyi en su paga causándole una gran pérdida la cual no le permitiría recuperarse con lo cual deberá cambiar su estrategia y de esta manera afectaría al grupo que pertenece. Con lo anteriormente dicho se puede observar que si se tuviera un acoplamiento entre una red libre de escala y una homogénea, la segunda saldría muy perjudicada en comparación con los demás casos, por lo cual este arreglo entre redes sería el menos conveniente.

Por tanto, es relevante considerar la robustez o estabilidad respecto a la cooperación que presentan las distintas topologías de red y estudiar su capacidad de resitencia al cambio. En las redes humanas se intercambian recursos diversos, sociales, comerciales o financieros, entre otros, y, la topología de red nos puede dar evidencias sobre qué tan robusta o confiable es cualquier interdependencia que se establezca, en la red internamente o con respecto a otras redes.

Aunque los resultados que se obtuvieron en este trabajo muestran cierta similitud con resultados obtenidos en investigaciones previas, considero que es necesario realizar las simulaciones con un número mayor de nodos, cercanos a los 4000, y dejar evolucionar el sistema de redes acopladas hasta hasta un orden de 10^4 generaciones, ya que con esto se podría observar más el impacto de los *hubs* en las redes de libre escala debido a su mayor tamaño y que se les da un mayor tiempo de evolución.

También es importante recalcar que para hacer simulaciones cuando la cantidad de datos no es suficientemente grande Python es un lenguaje de programación adecuado, pero en caso de querer realizar alguna tarea de ma-

por tamaño, es recomendable usar lenguajes de programación como *C* debido a que este compilador es más estricto o también un lenguaje como Julia ya que se comporta como un lenguaje interpretado, parecido a Python, pero alcanzando velocidades de ejecución semejantes a *C*.

Considero que es necesario generar modelos haciendo uso de varias ramas de la ciencia para dar explicaciones a diferentes fenómenos que debido a su complejidad no sería posible analizar de forma aislada. En este trabajo se utilizó teoría de juegos, redes complejas y física estadística, en específico la ley de distribución de Fermi que describe las partículas que cumplen el principio de exclusión de Pauli para de esta forma representar a los individuos en dos posibles estados, cooperar o desertar, y describir el fenómeno de la cooperación que podría estar presente en dos comunidades interdependientes con una topología establecida.

También es importante resaltar que estos modelos teóricos nos deberían inducir a compararlos con sistemas reales y ver sus similitudes y diferencias para así, de esta manera con base en las diferencias buscar generar nuevos modelos que se acerquen más a la descripción del fenómeno o sistema estudiado.

Bibliografía

- [1] Réka Albert and Albert-Lászlo Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(47):47–94, Enero 2002.
- [2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5):175–308, Febrero 2006.
- [3] Sergey V. Buldyrev, Roni Parshani, Gerald Paul, H.Eugene Stanley, and Shlomo Havlin. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, (464):1025–1028, April 2010.
- [4] Jesús Gómez-Gardenes, M Campillo, LM Floría, and Yamir Moreno. Dynamical organization of cooperation in complex topologies. *Physical Review Letters*, 98(10):108103, Marzo 07 2007.
- [5] Luo-Luo Jiang and Matjaž Perc. Spreading of cooperative behaviour across interdependent groups. *Scientific Reports*, 3(2483), Agosto 21 2013.
- [6] M.A. Nowak and R. M. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, (359):826–829, October 1992.
- [7] Taylor, P.D. and Jonker, L. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, (40):145–56, 1978.
- [8] Fisher, R.A. *The Genetical Theory of Natural Selection*. Oxford, 1930.
- [9] Goyal Sanjeev. *Connections: An Introduction to the Economics of Networks*. Princeton University Press, 2007.

- [10] F. Santos and J. Pacheco. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Physical Review Letters*, 95(9):98104, Agosto 26 2005.
- [11] Francisco C. Santos, Flávio L. Pinheiro, Tom Lenaerts, and Jorge M. Pacheco. The role of diversity in the evolution of cooperation. *Journal of Theoretical Biology*, 299:88–96, Septiembre 12 2011.
- [12] J. Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246:15–18, Noviembre 1973.
- [13] Tadelis, Steven. *Game Theory: an introduction*. Princeton University Press, 2013.
- [14] Alessandro Vespignani. Complex networks: The fragility of interdependency. *Nature*, 464:984–985, Abril 2010.
- [15] Cheng-Yi Xia, Xiao-Kun Meng, and Zhen Wang. Heterogeneous coupling between interdependent lattices promotes the cooperation in the prisoner’s dilemma game. *PLoS ONE*, 10(6), Junio 23 2015.
- [16] Chen Guanrong, Wang Xiaofan, Li Xiang. *Fundamentals of Complex Networks: models, structures and dynamics*. Wiley, 2015.