UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Control de la Ecuación de Ondas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A:

Iván Antonio Hernández Lizárraga

DIRECTORA DE TESIS:
Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2017

Agradezco a mis padres el apoyo durante la carrera

Con apoyo del proyecto de DGAPA-UNAM-PAPIIT-IN102116

Índice general

Prefacio

En este trabajo presentaremos resultados de controlabilidad para la ecuación de ondas. Esta ecuación es una ecuación es derivadas parciales de segundo orden y describe la propagación de una amplia variedad de ondas. Es importante en los campos de la acústica, el electromagnetismo, la mecánica cuántica y la dinámica de fluidos.

Los primeros trabajos en torno a esta ecuación son de finales del siglo XVIII cuando d'Alambert, Euler, Bernoulli y Lagrange trabajaron de manera independiente el estudio de la cuerda vibrante. En una dimensión la ecuación de ondas se obtiene a partir de la Ley de Hooke.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular y acotado. Dado $T > 0$ definimos $Q = \Omega \times (0, T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Además $\omega \subset \Omega$ denotará un abierto no vacío (que determinaremos más adelante) y $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$ (con $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ también a especificar más tarde).

A lo largo de esta tesis estaremos trabajando con la ecuación de ondas, ya sea con lo que se conoce como control frontera,

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0 \text{ en } Q \\ y = \begin{cases} f \text{ sobre } \Sigma_0 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) = y^0 \quad y_t(0) = y^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

o bien con el control interno

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = f\chi_\omega \text{ en } Q \\ y = 0 \text{ en } \Sigma \\ y(0) = y^0 \quad y_t(0) = y^1 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

En ambas situaciones el par dado (y^0, y^1) está en un espacio de Hilbert H adecuado que será dado a conocer de manera detallada más adelante.

Buscamos caracterizar H, T, ω y Γ_0 de manera que dados $(y^0, y^1), (z^0, z^1) \in H$ exista $f \in L^2(\Sigma_0)$ (resp. $f \in L^2(\omega \times (0,T))$) tal que la solución correspondiente de (1) (resp. (2)) satisfaga

$$y(T) = z^0, \quad y_t(T) = z^1.$$

La ecuación de ondas es una ecuación de tipo hiperbólica y los resultados de control que presentaremos están estrechamente relacionados con este hecho.Veremos que hay un tiempo mínimo de control T_0 y daremos condiciones suficienes sobre la región de control que también provienen de esta caracterización de la ecuación.

Hay que resaltar que las regiones de control obtenidas en este trabajo son las que se pueden obtener cuando el *método de multiplicadores*. Existen otras posibles regiones de control para la ecuación de ondas pero las técnicas utilizadas son muy especializadas y fuera del alcance de un trabajo de licenciatura. Las personas interesadas pueden consultar [1].

Los primeros resultados de controlabilidad para la ecuación de ondas son para el caso unidimensional y actuando sobre un control en la frontera (ver [4],[7],[10]).

El trabajo está basado en notas de Micu y Zuazua [8], Zuazua [11, 12] y en el libro de J.L. Lions [5].

La técnica utilizada para obtener la "*desigualdad de observabilidad*" es conocida como método de multiplicadores y que fue introducido por Ho [6] en 1986.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 recordamos la definición de espacio de Hilbert e introducimos los espacios de Sobolev necesarios para plantear los resultados de existencia y unicidad de soluciones requeridos para plantear nuestros problemas de control (1) y (2). En el capítulo 2 demostraremos los resultados de existencia y unicidad para la ecuación de ondas. El capítulo 3 se dedica al control frontera de la ecuación de ondas y finalmente concluimos este trabajo en el capítulo 4 con resultados de control interno.

1

Espacios de Hilbert y Espacios de Sobolev

1.1. Espacios de Hilbert. Definición y propiedades

A lo largo de este trabajo usaremos espacios vectoriales sobre los reales. De acuerdo a esto definimos un espacio de Hilbert como un espacio completo con la norma inducida por un producto interior el cual satisface las siguientes propiedades

- $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \quad \forall \quad x,y,z \in X,$
- $(x,y) = (y,x) \quad \forall x,y \in X,$
- $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \quad \forall \quad x,y \in X \quad y \quad \alpha \in \mathbb{R},$
- $(x,x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in X,$
- $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Se define una norma asociada al producto interior $|x| = \sqrt{(x,x)}$ y la métrica asociada $d(x,y) = |x-y|$.

En lo que sigue, denotamos por H los espacios de Hilbert abstractos.

Veamos algunos ejemplos:
Ejemplo 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. El espacio $L^2(\Omega)$ equipado con el producto interior*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

es un espacio de Hilbert.
Ejemplo 2. *El espacio de sucesiones*

$$l^2 = \left\{ x = (a_n)_{n=1}^\infty \mid \sum a_n^2 < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con el producto interior dado por $(x,y)_{l^2} = ((a_n),(b_n)) = \sum a_n b_n$.

Algunos de los espacios de Sobolev que construiremos más adelante son también espacios de Hilbert.

Se denota H^* por el espacio dual de un espacio de Hilbert H, es decir, el espacio de todos los funcionales lineales y continuos definidos sobre H y con valores en $\mathbb{R}$; la norma sobre H^* se define por

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Dada cualquier $f \in H^*$ y $x \in H$ se escribirá $< f, x >$ en vez de $f(x)$. Se dirá que $< \cdot, \cdot >$ es el producto para la dualidad H^*, H. El siguiente resultado conocido como el teorema de representación de Riesz permite identificar a un espacio de Hilbert con su dual.

TEOREMA 1. *Dado cualquier $\phi \in H^*$ existe un único $f \in H$ tal que*

$$< \phi, u >= (f, u) \quad \forall\ u \in H.$$

Más aún,

$$|f| = \|\phi\|_{H^*}.$$

Para esta prueba ver [2] página 135.

DEFINICIÓN 1. *Se dice que $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es un funcional*

- *Bilineal si, para todo $u, v, w \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$$
$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

- *Continuo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H.$$

- *Coercitivo si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$$

- *Simétrico si*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H.$$

TEOREMA 2 (Teorema de Lax-Milgram). *Sea $a(u, v)$ un funcional bilineal, continuo y coercitivo sobre H. Entonces, dado $\phi \in H^*$, existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) =< \phi, v > \ \forall v \in H.$$

Además, si a es simétrico, entonces u está caracterizado por la propiedad

$$u \in H \ y \quad \frac{1}{2}a(u, u)- < \phi, u >= \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v)- < \phi, v > \right\}.$$

Para esta prueba ver [2] página 140.

1.2. Espacios de Sobolev. Definición y propiedades

Los espacios de Sobolev son los espacios naturales donde viven las soluciones a las ecuaciones diferenciales parciales. Para definir estos espacios se comenzará por reformular la noción de derivada.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω. Suele llamarse a una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ una función de prueba.

Dada una función $u \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dado que φ tiene soporte compacto contenido en el abierto Ω se puede aplicar la fórmula de Green (utilizando una curva suficientemente regular Γ frontera de un conjunto abierto Ω' tal que sop$\varphi \subset \Omega'$ y $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) obteniendo que

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi.$$

Claramente no hay términos de frontera.

En general, decimos que $u_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ es derivada débil de u con respecto a x_i, si para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega u_i\varphi dx.$$

Cuando esto sucede usamos la notación $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Dado un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ decimos que $D^\alpha u \in L^1_{loc}$ es la derivada débil de orden $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ de u si para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\varphi dx.$$

1.2.1. Espacios de Sobolev

Sea $1 \le p \le \infty$ y sea k un entero no negativo. El espacio de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ tal que para cada multiíndice α con $|\alpha| \le k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$. Para $1 \le p < \infty$, dotamos al espacio $W^{k,p}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$,

$$\|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_\infty.$$

En el caso particular de $p = 2$, escribimos

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad k = 0, 1, \cdots .$$

En particular tenemos que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Como es habitual, diremos que una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$ converge a u en $W^{k,p}(\Omega)$, si

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$$

Para los objetivos de este trabajo será muy importante también el subespacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ formado por el límite de funciones de clase $C_c^\infty(\Omega)$ con la norma de $W^{k,p}$. Es decir,

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Así, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y sólo si existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tales que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Para $p = 2$ escribimos

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega).$$

1.2.2. El espacio $H^1(\Omega)$

Para trabajar con la ecuación de ondas trabajaremos en espacios de Sobolev con $p = 2$. Es decir, estaremos trabajando en espacios de Hilbert. Si $u, v \in H^1(\Omega)$, se define el producto escalar en $H^1(\Omega)$ como

$$< u, v >_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, + \int_\Omega uv$$

donde $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, ..., \partial_{x_n} u)$.

La norma inducida por el producto escalar es

$$\|u\|_{1,2} = (\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Tenemos el siguiente resultado:
Teorema 3. *$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Mostraremos primero que $< u, v >_1$ es, en efecto, un producto interno. Sean $u, v, w \in H^1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} < u + w, v >_1 &= \int_\Omega \nabla(u + w) \cdot \nabla v \, + \int_\Omega (u + w)v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, + \int_\Omega uv \, + \int_\Omega wv \, =< u, v >_1 + < w, v >_1 \end{aligned}$$

Además,

$$< \alpha u, v >_1 = \int_\Omega \nabla(\alpha u)\cdot\nabla v + \int_\Omega \alpha uv = \alpha(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega uv) = \alpha < u, v >_1$$

Por otro lado,

$$< u, u >_1 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2$$

es no negativo dado que cada uno de los sumandos es no negativo.

Restaría probar que el espacio es completo.

Consideremos una sucesión de Cauchy $(u_n) \subset H^1(\Omega)$. Entonces, (u_n) y $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Dado que $L^2(\Omega)$ es completo se tiene que $u_n \to u$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to v_i$ en $L^2(\Omega)$.

Ahora sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitrario. Por definición de derivada débil se tiene que

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \quad \forall \quad n \geq 1$$

Pasando al límite de ambos lados tenemos que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i \varphi$$

con lo que $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en el sentido débil.

Por lo tanto $u \in H^1(\Omega)$. Esto indica que el espacio es completo y por tanto $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. □

1.2.3. Trazas

Ahora se discutirá el significado del valor de una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sobre $\partial\Omega$.

Definimos $\mathbf{Q} := \{x = (x', x_n); |x'| < 1 \text{ y } |x_n| < 1\}$, $\mathbf{Q}_+ = \mathbf{Q} \cap \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{Q}_0 = \{x \in \mathbf{Q}, x_n = 0\}$. Recordemos que un abierto Ω es de clase C^m, m entero ≥ 1 si para todo $x \in \partial\Omega$ existe una vecindad U de $x \in \mathbb{R}^n$ y una aplicación biyectiva, $H : \mathbf{Q} \to U$ tal que

$$H \in C^m(\overline{\mathbf{Q}}), \quad H^{-1} \in C^m(\overline{U}), \quad H(\mathbf{Q}_+) = U \cap \Omega, \quad H(\mathbf{Q}_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Si Ω es de clase C^1 y $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, entonces u toma valores en $\partial\Omega$ en el sentido usual. El problema es que una función típica en $W^{1,p}(\Omega)$ no es en general continua y está definida casi en todo punto y $\partial\Omega$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero en $\mathbb{R}^n$. La noción de operador traza resuelve ese problema.

Teorema 4. *Sea Ω un abierto acotado de clase de C^1 en $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces existe un operador lineal y acotado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

2. Existe una constante $C > 0$, que sólo depende de p y de Ω, tal que

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\Omega)$$

3.

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y sólo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

1.2.4. La construcción del dual de $H_0^1(\Omega)$

Para resolver ecuaciones diferenciales parciales es importante tener una caracterización explícita del espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$.

En otras palabras f pertenece a $H^{-1}(\Omega)$ si es un funcional lineal y continuo

$$f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Se debe ser muy cuidadoso ya que no identificaremos a $H_0^1(\Omega)$ con su dual pues queremos mantener a $L^2(\Omega)$ como espacio pivote, es decir, veremos la cadena de espacios,

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Se escribirá $< \cdot, \cdot >$ para denotar la dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$

1.2.5. Desigualdades importantes

TEOREMA 5. *Sea $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface la siguiente relación*

$$\frac{1}{2}x^2(t) \leq \frac{1}{2}x_0^2 + \int_a^t \psi(s)x(s)ds, t \in [a, b] \tag{1.1}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y x, ψ son funciones no negativas en $[a, b]$. Entonces,

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_a^t \psi(s)ds \quad t \in [a, b]. \tag{1.2}$$

Demostración. Definimos:

$$w(t) = x_0^2 + 2\int_a^t \psi(s)ds \tag{1.3}$$

Por el teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$w_t = 2\psi(t)x(t)$$

y por tanto, w es no decreciente. Si $w(t) = 0$ para alguna $t \in [a, b]$, se tiene que $x_0 = 0$ y por (1.1), $x(s) = 0, \forall s \in [a, t]$ y se verifica (1.2). Como w es no decreciente si $w(t_0) \neq 0$ entonces $w(t) \neq 0$ para toda $t \in [t_0, b]$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $w(a) \neq 0$

Por (1.1) se tiene que

$$x^2(t)\psi^2(t) \leq \psi^2(t) \left(x_0^2 + 2 \int_a^t \psi(s)x(s)ds \right).$$

En consecuencia:

$$(w_t(t))^2 \leq 4\psi^2(t)w(t)$$

Por ser ambos términos no negativos podemos extraer raíz de ambos lados. Además estamos en el caso en que $w(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$. Por tanto,

$$\frac{w_t}{\sqrt{w}} \leq 2\psi(t),$$
$$\frac{d}{dt}(w(t))^{1/2} \leq \psi(t).$$

Por la monotonía de la integral e integrando ambos lados de la desigualdad se sigue que

$$\sqrt{w(t)} - \sqrt{w(a)} = \int_a^t \frac{d}{ds}(w(s))^{\frac{1}{2}} ds \leq \int_a^t \psi(s)ds.$$

Usando la definición de w obtenemos

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_a^t \psi(s)ds \quad t \in [a, b].$$

□

Para enunciar el siguiente resultado es necesario introducir la siguiente definición:
Definición 2. *Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado en una dirección si existe $M > 0$ tal que $|x_i| \leq M$ para al menos un $1 \leq i \leq n$ fijo y para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$.*
Teorema 6 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado en una dirección, entonces existe una constante $C(\Omega) > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{1.4}$$

En particular si definimos $|u|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ obtenemos una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma $\|u\|_{1,2}$.

Demostración. Por la densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ basta suponer para $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Asumimos que Ω es acotado en la dirección x_n i.e. $x \in \Omega$ implica $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $a \leq x_n \leq b$. Tenemos para $a \leq s \leq b$

$$\begin{aligned} |u(x', s)| &= \left| \int_a^s \partial_{x_n} u(x', t)dt \right| \leq \int_a^s |\partial_{x_n} u(x', t)|dt \\ &\leq (s-a)^{1/2} \left(\int_a^s |\partial_{x_n} u(x', t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq (s-a)^{1/2} \left(\int_a^b |\partial_{x_n} u(x', t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|u(x',s)|^2 \leq (s-a)\int_a^b |\partial_{x_n} u(x',t)|^2 dt$$

y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_a^b |u(x',s)|^2 ds dx' \leq \int_a^b (s-a)ds \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_a^b |\partial_{x_n} u(x',t)|^2 dt dx$$

con lo que se tiene

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Para ver la equivalencia de normas, observemos que siempre se cumple

$$|\nabla w|_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

donde en este caso $\tilde{C} = 1$.

Para probar la otra desigualdad, tómese

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 + |w|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por la desigualdad de Poincaré

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 + C(\Omega)|\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1+C(\Omega))^{1/2}|\nabla w|_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

donde $C(\Omega)$ es la constante de la desigualdad de Poincaré.

Tomando $C = \frac{1}{(1+C(\Omega))^{1/2}}$ se sigue que

$$C\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq |\nabla w|_{L^2(\Omega}$$

Por lo tanto las normas son equivalentes.

$\square$

Corolario 1. *Cuando Ω es acotado, la desigualdad de Poincaré implica que $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$.*

Demostración. Si Ω es un conjunto acotado $u(x) \equiv 1$ pertenece a $H^1(\Omega)$. Sin embargo, $u \notin H_0^1(\Omega)$ ya que $\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega)|u|_1$implicaría $1 \leq 0$, lo que es falso. $\square$

Observación 1. *En general, como trabajaremos con Ω acotado, usaremos la norma $|\nabla w|_{L^2(\Omega)}$ para $w \in H_0^1(\Omega)$.*

1.2.6. Formulación variacional del problema de Dirichlet homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

donde f es una función dada en Ω. La condición de frontera es llamada la condición de Dirichlet homogénea.

Una solución clásica del sistema anterior es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface la ecuación en el sentido usual.

Una solución débil del sistema anterior es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ la cual satisface que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Para que el lado derecho tenga sentido basta que $f \in L^2(\Omega)$. Para resolver (1.5) en sentido débil se apelará al teorema de Lax-Milgram en el espacio $H = H_0^1(\Omega)$.

Definimos

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

y

$$G(v) = \int_\Omega fv.$$

Ahora mostraremos que a y G satisfacen las hipótesis el Teorema de Lax-Milgram.

Lema 1. *$G(v)$ es lineal y continuo*

Demostración. Linealidad de $G(v)$

$$G(\alpha u + \beta v) = \int_\Omega f(\alpha u + \beta v) = \int_\Omega (\alpha fu + \beta fv) = \alpha \int_\Omega fu + \beta \int_\Omega fv = \alpha G(u) + \beta G(v).$$

Sabemos que un operador es continuo si y sólo si es acotado. Se tiene que

$$|G(v)| = \left| \int_\Omega fv \right| \leq |f|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \leq C|f|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

Se concluye que $G(v)$ es continuo. □

Lema 2. *$a(u,v)$ es bilineal, continuo y coercitivo*

Demostración. Sean $u, v, p \in H_0^1(\Omega)$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(\lambda u + \beta p, v) = \int_\Omega \nabla(\lambda u + \beta p) \cdot \nabla v &= \int_\Omega \lambda \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega \beta \nabla p \cdot \nabla v \\
&= \lambda \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \beta \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v \\
&= \lambda(u, v) + \beta(p, v).
\end{aligned}
$$

Como el operador a es simétrico se sigue que el operador es bilineal.

La prueba para la continuidad se obtiene por medio de la desigualdad de Hölder,

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq |\nabla u|_{L^2(\Omega)} |\nabla v|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por esta razón la coercitividad es inmediata ya que

$$a(v,v) = \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

□

A partir de lo anterior, gracias al Teorema de Lax-Milgram obtenemos el siguiente resultado

Teorema 7. *Dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de* (1.5).

A continuación se dará una serie de desigualdades que serán de gran utilidad más adelante

Corolario 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase C^2. Existen $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$C_1 \|w\|_{H^2(\Omega)} \leq |\Delta w|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|w\|_{H^2(\Omega)} \tag{1.7}$$

Demostración de la desigualdad de la derecha. Es claro que:

$$|\Delta w|^2 \leq n \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w|^2,$$

por lo que

$$\left(\int_\Omega |\Delta w|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 + |w|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces se tiene que

$$|\Delta w|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|w\|_{H^2(\Omega)}$$

con lo que en (1.7) se puede tomar $C_2 = n^{1/2}$. □

La prueba de la desigualdad por la izquierda es muy técnica y requiere de varios resultados adicionales. La demostración requiere de una prueba para la parte interior y una demostración para la parte de la frontera. Para la parte de la frontera sólo enunciaremos el resultado.

Asúmase que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y $V \subset\subset \Omega$. Denotamos $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in V \quad y \quad h \in \mathbb{R}, \quad 0 < |h| < dist(V, \partial\Omega)$, denotamos el i-ésimo cociente incremental de tamaño h

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

$$D^h u = (D_1^h u, \cdots, D_n^h u) \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 8. *(Cocientes incrementales y derivadas débiles)*

1) Supóngase $1 \leq p < \infty$ *y* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Entonces para cada* $V \subset\subset \Omega$

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para alguna constante C *y para todo* $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial\Omega)$

2) Para $1 < p < \infty, u \in L^p(\Omega)$, *supóngase que existe una constante* C *tal que*

$$\|D^h u\| \leq C,$$

para todo $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial\Omega)$. *Entonces,*

$$u \in W^{1,p}(V), \text{ con } \|\nabla u\|_{L^p(V)} \leq C.$$

La demostración de este Teorema es clásica y puede encontrarse en [3] página 277.

Teorema 9. *(Regularidad del interior) Sea* $f \in L^2(\Omega)$. *Supóngase que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una solución débil del problema elíptico* (1.5). *Entonces*

$$u \in H_{loc}^2(\Omega),$$

y para cada subconjunto abierto $V \subset\subset \Omega$, *se tiene la siguiente desigualdad*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}),$$

donde la constante C *depende solamente de* V *y de* Ω.

Demostración. Sea $|h| > 0$ suficientemente pequeño y $k \in \{1, ..., n\}$, tomamos el k-ésimo cociente incremental de u de tamaño h, i.e.

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}.$$

Es fácil probar que

$$D_k^h(fg) = f_k^h D_k^h g + g D_k^h f \tag{1.8}$$

donde $f_k^h(x) = f(x + he_k)$. Además se tiene que

$$\int_\Omega f D_k^{-h} g dx = -\int_\Omega g D_k^h f dx \tag{1.9}$$

cuando ambas integrales tienen sentido.

Para comenzar esta prueba se comienza por tomar un subconjunto abierto $V \subset\subset \Omega$ y elegimos un subconjunto W tal que

$$V \subset\subset W \subset\subset \Omega.$$

Teniendo lo anterior se elige una función $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ que satisface

$$\begin{cases} \psi = 1 \quad \text{en} \quad V, \\ \psi = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \setminus W, \\ 0 \leq \psi \leq 1 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Para fines prácticos de la prueba llamaremos a ψ la función localizadora la cual nos permitirá de una manera suave estudiar localmente la solución del problema. Defínase ahora

$$v = -D_k^{-h}(\psi^2 D_k^h u) \tag{1.11}$$

con h fija. Utilizando (1.8) se ve que

$$v(x) = -\frac{\psi^2(x - he_k)}{h} D_k^{-h} u + \frac{\psi^2(x)}{h} D_k^h u.$$

Como $u \in L^2(\Omega)$ y sop$\psi \subset\subset \Omega$, se sigue que para h fija, suficientemente pequeña

$$\left(\frac{\psi^2(x - he_k)}{h^2}\right)(u(x) - u(x - he_k)) \in L^2(\Omega),$$

que es equivalente a

$$\frac{\psi^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]}{h^2} \in L^2(\Omega).$$

De la misma manera se comprueba que

$$\nabla v \in L^2(\Omega).$$

Como $\psi = 0$ en $\Omega \backslash W$ se tiene que $v \in H_0^1(\Omega)$. En consecuencia

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(-D_k^{-h}(\psi^2 D_k^h u)) = \int_\Omega f(-D_k^{-h} \psi^2 D_k^h u). \tag{1.12}$$

Por (1.9) se sigue que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(-D_k^{-h}(\psi^2(D_k^h u)))dx = \int_\Omega \nabla D_k^h u \cdot \nabla(\psi^2(D_k^h u))$$
$$= \int_\Omega \psi^2 |\nabla D_k^h u|^2 + (2\psi \nabla\psi \cdot \nabla D_k^h u) D_k^h u = A_1 + A_2.$$

Tenemos que existe $C > 0$, $C = C(\nabla\psi)$ tal que

$$|A_2| \leq C \int_\Omega \psi |\nabla D_k^h u||D_k^h u|.$$

Por la desigualdad de Young

$$|A_2| \leq \varepsilon \int_\Omega \psi^2 |\nabla D_k^h u|^2 + C \int_\Omega |D_k^h u|^2.$$

Además, como $u \in H_0^1$ por el Teorema 8 se tiene que

$$\int_\Omega |D_k^h u|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2$$

de lo cual

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(-D_k^{-h}(\psi^2 D_k^h u)) \geq (1-\varepsilon) \int_\Omega \psi^2 |\nabla D_k^h u(x)|^2 - C \int_\Omega |\nabla u|^2. \tag{1.13}$$

Ahora vamos a acotar

$$B = \int_\Omega f(-D_k^{-h} \psi^2 D_k^h u).$$

Por la desigualdad de Young, para todo $\delta > 0$, se tiene

$$\int_\Omega f(-D_k^{-h} \psi^2 D_k^h u) \leq \frac{1}{2\delta} \int_\Omega |f|^2 + \frac{\delta}{2} \int_\Omega |D_k^{-h}(\psi^2 D_k^h u)|^2.$$

Además por el Teorema 8, se sigue que

$$\int_\Omega |D_k^{-h}(\psi^2 D_k^h u)|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla(\psi^2 D_k^h u)|^2.$$

De lo cual

$$\int_\Omega f(-D_k^{-h} \psi^2 D_k^h u) \leq \frac{1}{2\delta} \int_\Omega |f|^2 + \frac{C\delta}{2} \int_\Omega |\nabla(\psi^2 D_k^h u)|^2. \tag{1.14}$$

Ahora por (1.12), (1.13) (con ε suficientemente pequeño) y (1.14) se sigue que

$$(1-\varepsilon) \int_\Omega \psi^2 |D_k^h \nabla u|^2 - C \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2\delta} \int_\Omega |f|^2 + \frac{C\delta}{2} \int_\Omega |\nabla(\psi^2 D_k^h u)|^2$$

Como $\nabla(\psi^2 D_k^h u) = (\nabla \psi^2) D_k^h u + \psi^2 \nabla D_k^h u$, eligiendo δ suficientemente pequeña y utilizando el Teorema 8 se concluye que para $k = \{1, ..., n\}$ y con $h \neq 0$ suficientemente pequeña

$$\int_\Omega \psi^2 |D_k^h \nabla u|^2 \leq C \left(\int_\Omega |f|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right)$$

por lo tanto

$$\int_V |D_k^h \nabla u|^2 \leq C$$

por lo cual por el Teorema 8, $u \in H_{loc}^2(\Omega)$.

$\square$

El teorema anterior es válido para un conjunto V contenido en el interior de Ω. Demostrar el resultado cerca de la frontera es mucho más complicado y queda fuera de los fines de esta tesis. Únicamente enunuciaremos el teorema correspondiente. La demostración puede verse en [3], piágina 323.

TEOREMA 10. *(Regularidad en la frontera). Sea*

$$f \in L^2(\Omega)$$

y $u \in H_0^1(\Omega)$ *es una solución débil del problema elíptico con valor en la frontera* (1.5). *Supóngase que* $\partial\Omega$ *es de clase* C^2.

Entonces,

$$u \in H^2(\Omega)$$

y se tiene la siguiente desigualdad

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(|f|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}),$$

donde la constante C *depende solamente de* Ω.

Desigualdad izquierda del corolario 2. Obsérvese que si $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces w es solución débil del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ en } \Omega \\ w = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f = -\Delta w$. Podemos aplicar entonces los Teoremas 9 y 10 obteniendo (1.7). □

Ya con este resumen de espacios de Sobolev se está listo para hablar sobre los objetivos principales de la tesis. La equivalencia de las normas serán utilizadas en el capítulo 3 y capítulo 4.

2

Existencia y unicidad de la ecuación de ondas

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de ondas

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = f \text{ en } Q \\ u = 0 \text{ en } \Sigma \\ u(0) = u^0, u_t(0) = u^1 \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

donde $f \in L^2(Q), u^0 \in H_0^1(\Omega), u^1 \in L^2(\Omega)$.

Una solución débil de (2.1) es una función $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ tal que, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ la función

$$t \mapsto \int_\Omega u_t(t,x)v(x)dx := (u_t(t), v)_{L^2(\Omega)}$$

es absolutamente continua y satisface:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u(t), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \text{ casi en toda } t \in (0,T) \\ u(0) = u^0, u_t(0) = u^1 \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

2.1. Teorema de existencia y unicidad para la ecuación de ondas

Para demostrar la existencia de soluciones utilizaremos la base de $L^2(\Omega)$ dada por (ϕ_k) las autofunciones del Laplaciano Dirichlet, es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k \text{ en } \Omega \\ \phi_k = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.3}$$

con $\|\phi_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Es Se dice que un conjunto es regular si su dominio es $C^2(\Omega)$

Teorema 11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado de clase C^2 y $0 \leq T \leq \infty$. Para $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u^1 \in L^2(\Omega)$, el problema de Cauchy para la ecuación de ondas tiene una única solución. Además la solución admite la representación*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\phi_k, \tag{2.4}$$

donde

$$u_k(t) = u_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k^1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}(t-s)\right) ds \tag{2.5}$$

y $(\lambda_k)_{k\geq 1}$, $(\phi_k)_{k\geq 1}$ están dados por (2.3) y

$$u_k^0 = (u^0, \phi_k)_{L^2(\Omega)}, \quad u_k^1 = (u^1, \phi_k)_{L^2(\Omega)}, \quad f_k(t) = (f(t), \phi_k)_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. La prueba se hará en dos partes. Primero se probará la existencia de la solución a la ecuación de ondas y posteriormente se probará la unicidad de la solución.

Existencia: Para probar la existencia se utilizará el método de Fourier utilizando series cuya forma es la dada por (2.4). Debido a la ortonormalidad de las autofunciones, se tiene una familia infinita de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} u_{k,tt} + \lambda_k u_k = f_k \text{ en } (0,T) \\ u_k(0) = u_k^0, u_{k,t} = u_k^1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Es fácil comprobar que la solución de (2.6) está dado por (2.5).

Ahora se demostrará que las series dadas por (2.4), (2.5) definen una función en

$$u \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.7}$$

la cual es solución débil del problema. Haremos esta demostración en tres etapas.

Primera etapa

Se probará que $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$. Para esto es suficiente probar que la serie dada por (2.4) con $u_k(t)$ dada en (2.5) converge uniformemente en $[0,T]$.

Sea $t \in [0,T]$. Se escribe la serie de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} u_k(t) \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}. \tag{2.8}$$

Se sabe por [2] página 99 que $\frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ es una base ortonormal y además es completa en $H_0^1(\Omega)$, por la identidad de Parseval.

$$\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2(t)$$

Además se tiene que

$$\|u^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k^0|^2,$$

$$\|u^1\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u^1_k|^2,$$

$$\|f\|^2_{L^2(Q)} = \int_0^T \|f\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T |f_k(t)|^2.$$

Definimos

$$U_m(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k^2(t)$$

donde

$$u_k^2(t) = \left[u_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k^1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}(t-s)\right) ds \right]^2 \tag{2.9}$$

$$\leq 3 \left[|u_k^0|^2 + \frac{|u_k^1|^2}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \left(\int_0^t f_k(s) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}(t-s)\right) ds \right)^2 \right] \tag{2.10}$$

$$\leq 3 \left[|u_k^0|^2 + \frac{|u_k^1|^2}{\lambda_k} + \frac{T}{\lambda_k} \int_0^T |f_k(s)|^2 ds \right]. \tag{2.11}$$

A partir de lo anterior se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k |u_k(t)|^2 \leq 3 \sum_{k=1}^{m} \left[\lambda_k |u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 + T \int_0^T |f_k(s)|^2 ds \right].$$

Tomando $p > m$ se sigue que

$$\sum_{k=m+1}^{p} \lambda_k |u_k(t)|^2 \leq 3 \sum_{k=m+1}^{p} \left[\lambda_k |u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 + T \int_0^T |f_k(s)|^2 ds \right].$$

Es decir, $U_m(t)$ converge uniformemente en $[0,T]$ lo cual nos dice que $U(t)$ es continua y que además

$$U_m(t) \to U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k(t)|^2.$$

De lo anterior se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2(t) \leq 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_k |u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 + T \int_0^T |f_k(s)|^2 ds \right].$$

Esto implica que

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq C(T)(\|u^0\|_{H^1_0} + |u^1|_{L^2} + \|f\|_{L^2(Q)}). \tag{2.12}$$

En particular, para cada $t \in [0,T]$ se tiene

$$\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq C(T) \left(|u^0|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u^1|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |f(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \right). \tag{2.13}$$

Segunda etapa

Probaremos ahora que
$$u \in C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$
Para esto, se probará la convergencia en $L^2(\Omega)$ de la derivada
$$u_t(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,t}(t)\phi_k$$
lo cual es equivalente a la convergencia de la serie
$$\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k,t}(t)|^2.$$
Se procede a derivar término a término (2.5).
$$u_{k,t}(t) = -\sqrt{\lambda_k}u_k^0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}t) + u_k^1 \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \int_0^t f_k(s)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}(t-s)\right)ds$$
de lo cual
$$|u_{k,t}(t)|^2 \leq 3\left(\lambda_k|u_k^0|^2 + |u_k^1|^2 + T\int_0^T f_k^2(s)ds\right). \tag{2.14}$$
Procediendo como en el caso anterior se obtiene la convergencia. Se tiene en particular que
$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \left(\|u^0\|_{H_0^1} + |u^1|_{L^2} + \|f\|_{(L^2(Q))}\right). \tag{2.15}$$

Tercera etapa

Probaremos que para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, la función $t \mapsto (u_t, v)_{L^2(\Omega)}$ es absolutamente continua en $[0,T]$ y que satisface (2.2).

Como $u_{k,tt} + \lambda_k u_k = f_k$, se obtiene que
$$u_{k,t}(t) = u_{k,t}(0) + \int_0^t (f_k(\tau) - \lambda_k u_k(\tau))d\tau.$$
Entonces,
$$\begin{aligned}(u_{k,t}\phi_k, v)_{L^2(\Omega)} = & \quad (u_{k,t}(0)\phi_k, v)_{L^2(\Omega)} + \int_0^t [([f_k(\tau) - \lambda_k u_k(\tau)]\,\phi_k, v)_{L^2(\Omega)}]d\tau \\ = & \quad (u_{k,t}(0)\phi_k, v)_{L^2(\Omega)} + \int_0^t [(f_k(\tau)\phi_k, v)_{L^2(\Omega)} - (u_k(\tau)\phi_k, v)_{H_0^1(\Omega)}]d\tau \end{aligned} \tag{2.16}$$
lo anterior debido a que
$$(\phi_k, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla\phi_k, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (-\Delta\phi_k, v)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_k\phi_k, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Se denota por $s_m(t)$ y $S_m(t)$ las m-ésimas sumas parciales correspondientes a las siguientes series:

$$\lim_{m\to\infty} s_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\phi_k, \quad \lim_{m\to\infty} S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t)\phi_k. \tag{2.17}$$

Tomando sumas parciales en (2.16) se sigue que

$$(S_{m,t}(t), v)_{L^2(\Omega)} = (S_{m,t}(0), v)_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \Big[(s_m(\tau), v)_{L^2(\Omega)} - (S_m(\tau), v)_{H_0^1(\Omega)}\Big]\, d\tau$$

Dado que

$$S_m(\tau) \to u(\tau) \quad en \quad H_0^1(\Omega)$$

uniformemente con respecto a $\tau \in [0, T]$ se sigue que

$$\int_0^t (S_m(\tau), v)_{H_0^1(\Omega)} d\tau \to \int_0^t (u(\tau), v)_{H_0^1(\Omega)} d\tau.$$

Como

$$S_{m,t}(t) \to u_t(t) \quad en \quad L^2(\Omega).$$

Por la desigualdad de Schwartz tenemos

$$(S_{m,t}, v)_{L^2(\Omega)} \to (u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \quad v \in L^2(\Omega)$$

Ahora se probará que

$$\int_0^t (s_m(\tau), v)_{L^2(\Omega)} d\tau \to \int_0^t (f(\tau), v)_{L^2(\Omega)} d\tau$$

utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. Obsérvese que $s_m(\tau) - f(\tau) \to 0$ en $L^2(\Omega)$ para toda $\tau \in [0, T]$. En consecuencia $(s_m(\tau) - f(\tau), v)_{L^2} \to 0$ puntualmente.

Restaría probar que $|(s_m(\tau) - f(\tau), v)_{L^2}|$ está acotada por una función $g(\tau) \in L^2(0, T)$. Aplicando la desigualdad de Hölder (en $L^2(\Omega)$) se sigue que

$$|(s_m(\tau) - f(\tau), v)_{L^2(\Omega)}| \leq |s_m(\tau) - f(\tau)|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \leq 2|f(\tau)|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)}$$

Como $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$ tenemos para todo $0 < T < \infty$, $g(\tau) = |f(\tau)|_{L^2(\Omega)} \in L^1(0, T)$ y utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que para todo $t < T$

$$\int_0^t (s_m(\tau), v)_{L^2(\Omega)} d\tau \to \int_0^t (f(\tau), v)_{L^2(\Omega)} d\tau.$$

Pasando al límite se sigue que

$$(u_t, v)_{L^2} = (u_t(0), v)_{L^2} + \int_0^t \Big[(f(\tau), v)_{L^2(\Omega)} - (u(\tau), v)_{H_0^1}\Big]\, d\tau$$

lo cual nos dice que la función $(u_t(t), v)_{L^2}$ es absolutamente continua en $[0, T]$ y se satisface (2.2).

Unicidad:

Dado que

$$\frac{d}{dt}(u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u(t), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}$$

se sigue que

$$\frac{d}{dt}(u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} = (f(t), v)_{L^2(\Omega)} - (\nabla u(t), \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

De lo cual

$$(u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} \le (u^1, v)_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} ds. \tag{2.18}$$

Por (2.13) se tiene que

$$\begin{aligned} (u_t(t), v)_{L^2(\Omega)} \le (u^1, v)_{L^2(\Omega)} &+ \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ C \int_0^t \left(\|u^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u^1|^2 + \int_0^T |f|^2 ds \right)^{1/2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} ds. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Si v_1, v_2 son dos soluciones entonces se define $u = v_1 - v_2$ es la solución correspondiente a los datos $u^0 = u^1 = 0$, $f = 0$. De (2.19) se tiene que $u_t(t) = 0$ para cualquier $t \in [0, T]$, es decir $u(t) = \text{cte}$. Como $u(0) = 0$ se tiene que $v_1(t) = v_2(t)$ para toda $t \in [0, T]$.

$\square$

En este contexto si $f = 0$ tenemos también un resultado de conservación de energía. Sea $(u^0, u^1) \in H_0^1 \times L^2$. Definimos

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + |u_t(t)|^2 \right).$$

Teorema 12. *Sea $(u^0, u^1) \in H_0^1 \times L^2$ y $f = 0$ entonces la solución correspondiente a (2.1) satisface*

$$E(t) = E(0) \quad \textit{para todo } t \in [0, T]. \tag{2.20}$$

Demostración. Dado $(u^0, u^1) \in H_0^1 \times L^2$ consideramos la solución correspondiente. Multiplicamos (al menos formalmente) (2.1) por u_t e integramos por partes: Obtenemos

$$\int_\Omega u_{tt} u_t + \nabla u \cdot \nabla u_t = 0$$

es decir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega |u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) = 0.$$

Integrando en $(0, t)$ esta última ecuación, se obtiene que

$$E(t) = E(0) \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Obsérvese que E está bien definida para u solución de (2.1) con datos iniciales $(u^0, u^1) \in H_0^1 \times L^2$. Sin embargo, para poder multiplicar la ecuación original por u_t es necesario tener mas regularidad. Esto se consigue trabajando con una sucesión de datos iniciales más regulares (por ejemplo $(u_n^0, u_n^1) \in C_c^2(\Omega) \times C^1(\Omega)$ obteniendo la conservación de la energía y pasando al límite). $\square$

Cuando $f \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$ también es posible dar sentido a las soluciones de (2.1). Tenemos el siguiente teorema.
TEOREMA 13. *Sean* $(u^0, u^1) \in H_0^1 \times L^2$ *y* $f \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$ *entonces la solución correspondiente a* (2.1) *satisface*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)} + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C(\|u^0\| + |u^1| + \|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))}). \tag{2.21}$$

Demostración. La prueba se realiza por densidad. Es decir probaremos que el resultado es válido si $f \in C_c(Q)$ (y por tanto $f \in L^2(Q)$) y para dado $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Se puede ver que procediendo como en las pruebas del teorema que $u \in C^2(0, T; L^2(\Omega) \cap C^1([0, T; H_0^1(\Omega) \cap C([0, T]; H^2('\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ habría que construir una sucesión en $C_c(Q)$ y pasar al límite. Multiplicando la ecuación por u_t se obtiene que

$$\int_0^T \int_\Omega u_{tt} u_t - \Delta u u_t \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f u_t$$

y usando la fórmula de Green se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f u_t \, dx.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder al último término se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega |u_t|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right) = \int_\Omega f u_t \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0$$

se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega |u_t|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right) = \int_\Omega f u_t \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^2 + \int_\Omega |\nabla u\,|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Integrando de 0 a t de ambos lados se tiene que

$$\int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega |u_t|)^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right) \leq \int_0^t \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^2 + \int_\Omega |\nabla u\,|^2| \right)^{\frac{1}{2}} ds$$

de lo cual se sigue que

$$\frac{1}{2} \left(\int_\Omega |u_t(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |u_t(0)|^2 + |\nabla u(0)|^2 \right) + \int_0^t \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_t|^2 + \int_\Omega |\nabla u| \right)^{\frac{1}{2}})ds.$$

Ahora utilizando el Teorema 5 del capítulo 1 se sigue que

$$\left(\int_\Omega |u_t(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega |u_t(0)|^2 + |\nabla u(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Dado que $u(0) = u^0, u_t(0) = u^1$ se sigue que

$$\left(\int_\Omega |u_t(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_\Omega |u^1|^2 + |\nabla u^0|^2\right)^{1/2} + \int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Obsérvese que

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |f|_{L^1(0,T,L^2(\Omega))}.$$

Por lo cual se tiene que

$$\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u_t(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u^1|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T,H^1_0(\Omega))}$$

Esta desigualdad es válida para todo $T \geq t \geq 0$. Se sigue que,

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|u^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u^1|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T,H^1_0(\Omega))}$$

□

En el próximo capítulo se demostrará la *regularidad escondida* de esta solución, es decir, se demostraráel siguiente resultado

TEOREMA 14. *Sean $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $u^0 \in H^1_0(\Omega)$ y $u^1 \in L^2(\Omega)$, entonces la solución correspondiente u de (2.1) satisface*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$$

y existe $C > 0$ tal que para todo solución u se satisface

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \leq C\left[\|u^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right]. \tag{2.22}$$

Utilizaremos este resultado (sin prueba) en la próxima sección. En el capítulo 4, daremos su demostración.

2.2. Solución con datos en la frontera

En esta sección consideraremos una ecuación de ondas homogénea con datos en la frontera, es decir, la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = 0 \text{ en } Q, \\ \theta = g \text{ en } \Sigma, \\ \theta(0) = \theta^0, \theta_t(0) = \theta^1 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

Supóngase que los datos iniciales y la función g están dados en

$$(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

y

$$g \in L^2(\partial\Omega \times (0,T)).$$

Cuando $g \equiv 0$ se puede demostrar, como en la sección anterior, que existe una solución $\theta \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ con

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(t)\phi_k, \tag{2.24}$$

$$\theta_k(t) = \theta_k^0 \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\theta_k^1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_k}t \tag{2.25}$$

y $(\lambda_k)_{k\geq 1}$, $(\phi_k)_{k\geq 1}$ están dados por (2.3) y

$$\theta_k^0 = (\theta^0, \phi_k)_{L^2(\Omega)}, \quad \theta_k^1 =< \theta^1, \phi_k >_{-1,1},$$

con

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\theta_k^0|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}|\theta_k^1|^2 < \infty$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\theta_k(t)|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}|\theta_{k,t}(t)|^2 < \infty$$

La convergencia de estas últimas series prueba en particular que $\theta \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$.

Para definir solución de (2.23) cuando $g \not\equiv 0$ tendremos que utilizar el concepto de solución por transposición. De hecho, debido a la linealidad de la ecuación (2.23) necesitamos demostrar la existencia de soluciones cuando $(\theta^0, \theta^1) = (0,0)$. Consideremos pues la ecuación

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = 0 \text{ en } Q, \\ \theta = g \text{ en } \Sigma, \\ \theta(0) = \theta_t(0) = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Cuando $g = 0$, es bien sabido, que la ecuación anterior tiene una única solución, de hecho la solución es cero. Si $(\theta(0), \theta_t(0)) = (\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, y $g = 0$ se tiene que

$$\theta \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$$

Para motivar la idea de solución por transposición se considera $u(x,t)$ solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f \text{ en } Q, \\ u = 0 \text{ en } \Sigma, \\ u(T) = u_t(T) = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

con $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Si θ y u son suficientemente regulares, multiplicando el problema con valor en la frontera (2.23) por u y usando la fórmula de Green se obtiene lo siguiente

$$\int_Q u\theta_{tt} - \int_Q u\Delta\theta = \int_Q u_{tt}\theta - \int_Q \Delta u\theta - \int_\Sigma \frac{\partial\theta}{\partial\nu}u + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial\nu}\theta = 0.$$

No aparecen términos en $t = 0$ y $t = T$ ya que ambas ecuaciones tienen datos iniciales o finales cero. De lo anterior se sigue que

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial\nu}g = -\int_Q \theta f. \tag{2.28}$$

Diremos que $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ es solución por transposición de (2.26) si para todo $f \in L^2(Q)$ y u la correspondiente solución de (2.27) se verifica (2.28).

Se puede probar el siguiente resultado.

TEOREMA 15. *Para cualquier $g \in L^2(\Sigma)$ existe una única solución por transposición θ de (2.26). Además se verifica que*

$$\theta \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Demostración. La ecuación de ondas planteada en (2.27) es reversible en tiempo y aplicando el Teorema 14 a (2.27) se sigue que

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.29}$$

Ahora defínase el siguiente funcional:

$$f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \to \int_\Sigma g\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma$$

con $g \in L^2(\Sigma)$ una función fija

Se probará que el operador anterior es lineal y continuo.

La linealidad se sigue de que para un dato $\alpha f + \beta h$ la correspondiente solución de (2.27) está dada por $\alpha u + \beta v$ con u solución de (2.27) con lado derecho f y v solución de (2.27) con lado derecho h. En consecuencia

$$\int_\Sigma g\left(\frac{\partial(\alpha u)}{\partial\nu} + \frac{\partial(\beta v)}{\partial\nu}\right)d\sigma = \alpha\int_\Sigma g\frac{\partial u}{\partial\nu} + \beta\int_\Sigma g\frac{\partial v}{\partial\nu}\,d\sigma.$$

Por (2.29) tenemos que

$$\int_\Sigma g\frac{\partial u}{\partial\nu} \leq \|g\|_{L^2(\Sigma)}\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

por lo cual el operador es acotado

Dado que $\left(L^1(0,T;L^2(\Omega))\right)^* = L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ se sigue que existe $\theta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$-\int_\Sigma g\frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_Q \theta f$$

A continuación se probará que de hecho

$$\theta \in C([0,T];L^2(\Omega))$$

Dado que $g \in L^2(\Sigma)$ este puede ser aproximado por una sucesión $\{g_n\} \subset C_c^\infty((0,T);C^2(\partial\Omega))$ tal que

$$g_n \to g \in L^2(\Sigma) \tag{2.30}$$

La solución θ_n de (2.26) asociada a los datos g_n es regular. En particular,

$$\theta_n \in C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Se define

$$\omega_n = \theta - \theta_n$$

la cual es solución por transposición de

$$\begin{cases} \omega_{n,tt} - \Delta\omega_n = 0 \text{ en } Q \\ \omega_n = g - g_n \text{ en } \Sigma \\ \omega_n(0) = \omega_{n,t}(0) = 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

Por lo tanto, $\int_\Sigma \omega_n f \leq C\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\|g-g_n\|_{L^2(\Sigma)}$ para todo $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$

Por la dualidad se sigue que

$$\|\omega_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\|g-g_n\|_{L^2(\Sigma)}$$

y por (2.30) se sigue que $\|\omega_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ de manera uniforme (en t).

Por lo anterior, como $\omega_n = \theta - \theta_n$ y por la convergencia uniforme, se tiene que

$$\theta_n \to \theta \quad \in \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

Como θ_n es una sucesión de funciones continuas las cuales convergen uniformemente a θ, se sigue que

$$\theta \in C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.32}$$

Para completar la prueba, ahora se demostrará que

$$\theta_t \in C([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Utilizando (2.28) con $f = F_t$, $F \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)$ y para $g \in C_c^\infty(Q)$ se sigue que

$$\int_\Sigma \frac{\partial u_t}{\partial \nu} g = \int_Q \theta F_t$$

con u solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = F \text{ en } Q \\ u = 0 \text{ en } \Sigma \\ u(T) = u_t(T) = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Supongamos que se tiene la siguiente estimación para u solución de (2.33)

$$\|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|F\|_{L^1((0,T);H_0^1(\Omega))} \tag{2.34}$$

Procediendo se tiene que

$$\theta_t \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

y además

$$\|\theta_t\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\|g\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Un argumento de densidad prueba que

$$\theta \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

La demostración de (2.34) se hará en el próximo capítulo, ver Lema 5. $\square$

3

Control en la frontera de la ecuación de ondas

3.1. Formulación y descripción del problema de control

Sea $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ consideramos la siguiente ecuación de ondas con control frontera

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = 0 \text{ en } Q \\ \theta = \begin{cases} f \text{ en } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ 0 \text{ en } \Sigma \backslash \Sigma_0 \end{cases} \\ \theta(0) = \theta^0, \theta_t(0) = \theta^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Para $(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, se define el conjunto de estados alcanzables:

$$R(T; \theta^0, \theta^1) = \left\{ (\theta(T), \theta_t(T) : f \in L^2(\Sigma) \right\}$$

donde θ es solución de (3.1) con $f \in L^2(\Sigma)$

Definición 3. *El sistema (3.1) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$ si para cualquier dato inicial (θ^0, θ^1) en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ el conjunto de datos alcanzables $R(T; \theta^0, \theta^1)$ coincide con $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, es decir, para todo $(z^0, z^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe f tal que la solución de (3.1) satisface $(\theta(T), \theta_t(T)) = (z^0, z^1)$.*

Definición 4. *El sistema (3.1) es controlable a cero al tiempo $T > 0$ si para cualquier par de datos iniciales (θ^0, θ^1) en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $(0,0) \in R(T; \theta^0, \theta^1)$, es decir, si existe f tal que la solución de (3.1) satisface $(\theta(T), \theta_t(T)) = (0,0)$.*

Sea $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, consideramos ϕ la solución correspondiente al sistema adjunto,

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = 0 \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \phi(T) = \phi^0, \phi_t(T) = \phi^1 \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

Tomando ϕ solución de (3.2) y θ solución de (3.1) se obtiene que

$$\int_\Omega \theta\phi_t dx \Big|_0^T - \quad < \theta_t, \phi >_{-1,1} \Big|_0^T = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\theta. \tag{3.3}$$

Recordemos que el Teorema 14 garantiza que $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$.

A continuación se enunciará un lema el cual nos dirá cuando la ecuación de ondas es controlable a cero

Lema 3. *La ecuación (3.1) con datos iniciales $(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ es controlable a cero si y sólo si existe $f \in L^2((0,T) \times \Gamma_0))$ tal que*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} f \; - \int_\Omega \theta^0 \phi_t(0) + < \theta^1, \phi(0) >_{1,-1} = 0$$

$\forall(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y donde ϕ es solución de (3.2)

Demostración. Supóngase que $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, respectivamente donde θ es solución del sistema (3.1) y ϕ es solución del sistema adjunto (3.2).

De (3.3) se obtiene que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} f \; = \int_\Omega \theta(T)\phi^1(T) + < \theta_t(T), \phi^0 >_{1,-1} + \int_\Omega \theta^0 \phi_t(0) - < \theta^1, \phi(0) >_{1,-1}$$

por lo que $(\theta(T), \theta_t(T)) = 0$ si y sólo si

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} f \; = \int_\Omega \theta^0 \phi_t(0) - < \theta^1, \phi(0) >_{1,-1} .$$

para toda $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y ϕ la correspondiente solución de (3.2). $\square$

Encontrar el control resulta un problema bastante complicado. De hecho, hay dos técnicas:

1. HUM (Hilbert Uniqueness Method)
2. Minimización de funcionales.

La primera técnica se sale de los objetivos de la tesis por lo cual aquí será considerada la segunda.

A continuación se dará una condición general la cual asegura la existencia de un minimizador para el siguiente funcional:

$$J : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido de la siguiente manera

$$J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 - < \theta^1, \phi(0) >_{1,-1} + \int_\Omega \phi_t(0) \theta^0 \tag{3.4}$$

donde $(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ son los datos de la ecuación (3.1) que queremos controlar y por tanto están fijos. ϕ es la solución de (3.2) correspondiente a (ϕ^0, ϕ^1). Veremos mas adelante que este funcional tiene un minimizador. Suponiendo esto válido tenemos el siguiente resultado:

Teorema 16. *Sea* $(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *y supóngase que* $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *es un minimizador de* J. *Si* $\hat{\phi}$ *es la solución correspondiente del sistema con datos iniciales* $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$ *entonces* $f = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n}|_{\Gamma_0}$ *es un control que lleva* (θ^0, θ^1) *a cero en tiempo* T.

Demostración. Dado que J tiene un mínimo en $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$ se sigue que la derivada de Gâteaux de J debe anularse, es decir, se debe cumplir la siguiente relación

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big(J((\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1) + h(\phi^0, \phi^1)) - J(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1) \Big) = 0$$

para toda $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. A partir de lo anterior, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial(\hat{\phi} + h\phi)}{\partial \nu} \right|^2 - < \theta^1, (\hat{\phi}(0) + h\phi(0)) >_{-1,1} \right.$$
$$\left. + \int_\Omega (\theta^0 (\hat{\phi}_t(0) + h\phi_t(0)) - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}|^2 + < \theta^1, \hat{\phi}(0) >_{1,-1} - \int_\Omega \hat{\phi}_t(0)\theta^0 = 0 \right).$$

Desarrollando y calculando el límite cuando h tiende a cero se obtiene que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - < \theta^1, \phi(0) >_{-1,1} + \int_\Omega \theta^0 \phi_t(0) = 0$$

para cualquier $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donde ϕ es solución correspondiente del sistema (3.2). Del Lema 3 se sigue que $f = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n}|_{\Gamma_0}$ es un control que lleva los datos iniciales (θ^0, θ^1) a cero en tiempo T.

$\square$

Para encontrar el mínimo de este funcional se debe probar que es un funcional continuo, convexo y coercitivo en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Esto, está justificado por el siguiente teorema

Teorema 17. *Sea* H *un espacio de Hilbert y* K *un subconjunto cerrado convexo y no vacío de* H. *Sea* $\Phi : K \to \mathbb{R}$ *un funcional con las siguientes propiedades:*

1. Φ *es convexo.*
2. Φ *es semicontinuo inferiormente.*
3. *Si* K *no es acotado,* Φ *es coercitivo, i.e.* $\lim_{\|x\|\to\infty} \Phi(x) = \infty$

entonces Φ *tiene un mínimo en* K, *es decir, existe* x_0 *en* K *tal que*

$$\Phi(x_0) = \min_K \Phi(x)$$

Este teorema y su demostración puede ser encontrado en [2] (Corolario III 20, p. 46).

Antes de continuar, se dará una definición.

DEFINICIÓN 5. *Decimos que la ecuación* (3.2) *es observable desde* Γ_0 *al tiempo* $T > 0$ *si existe una constante positiva* $C > 0$ *tal que para toda* $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *se satisface*

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 . \tag{3.5}$$

Ya con esta definición y el teorema anterior se puede dar un teorema el cual nos permitirá encontrar un control de la ecuación de ondas dada en (3.1).

Ahora se demostrará una condición suficiente para la propiedad de controlabilidad exacta
TEOREMA 18. *Supóngase que el sistema* (3.2) *es observable al tiempo* T *y sea* $(\theta^0, \theta^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. *El funcional* J *definido en* (3.4) *tiene un único minimizador* $(\hat{\phi^0}, \hat{\phi^1}) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Demostración. Veremos que J satisface las propiedades enunciadas en el Teorema 17. Para probar continuidad se procederá a acotar el funcional en téminos de la norma de (ϕ^0, ϕ^1). Recordemos que (θ^0, θ^1) están fijos. En lo que sigue C es una constate que puede variar a lo largo de la línea.

Sea (ϕ_n^0, ϕ_n^1) una sucesión tal que

$$(\phi_n^0, \phi_n^1) \to (\phi^0, \phi^1) \tag{3.6}$$

Obérvese que, por la linealidad de (4.2), $h_n = \phi - \phi_n$, es solución de (4.2), con datos $h_n(T) = \phi^0 - \phi_n^0$, $h_{n,t}(T) = \phi^1 - \phi_n^1$ donde ϕ_n es la solución de (4.2) con datos (ϕ_n^0, ϕ_n^1) y ϕ la solución con datos (ϕ^0, ϕ^1).

Procediendo a probar la continuidad se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left|J(\phi^0, \phi^1) - J(\phi_n^0, \phi_n^1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 + \int_\Omega \theta^0\phi^1 - < \theta^1, \phi^0 > - \frac{1}{2}\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}\right|^2 + \int_\Omega \theta^0\phi_n^1 - < \theta^1, \phi_n^0 >\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}\right|^2 + \int_\Omega \theta^0(\phi^1 - \phi_n^1) - < \theta^1, \phi^0 - \phi_t^0 >\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\quad + \|\theta^0\|_{L^2(\Omega)}\|\phi^1 - \phi_n^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta^1\|_{H_0^1(\Omega)}\|\phi^0 - \phi_n^0\|_{H^{-1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que por la desigualdad del triángulo

$$\left|\left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leq \left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial h_n}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Además

$$\left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|(\phi^0, \phi^1)\|$$

$$\left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial \phi_n}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|(\phi_n^0,\phi_n^1)\|$$

y además

$$\left(\int\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial h_n}{\partial \nu}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|(h_n(T),h_{n,t}(T))\|$$

Por (3.6) se sigue que existe M tal que $\|(\phi_n^0,\phi_n^1\| \leq M$ para toda n , es decir

$$|J(\phi^0,\phi^1)-J(\phi_n^0,\phi_n^1)| \leq C\|(h_n(T),h_{n,t}(T))\|$$

lo cual nos dice que J es continua

Ahora para la convexidad se consideran datos iniciales para (3.2) de la siguiente manera

$$V(T)=V^0=\lambda\phi^0+(1-\lambda)\hat{\phi}^0 \quad V_t(T)=V^1=\lambda\phi^1+(1-\lambda)\hat{\phi}^1$$

con $\lambda \in [0,1]$. Por la linealidad de (3.2), V la solución correspondiente, se puede escribir cómo $V(t)=\lambda\phi(t)+(1-\lambda)\hat{\phi}(t)$ donde ϕ es la solución de (3.2) con datos (ϕ^0,ϕ^1) y $\hat{\phi}$ con datos $(\hat{\phi}^0,\hat{\phi}^1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} J(V^0,V^1) &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega}\left|\lambda\frac{\partial \phi}{\partial \nu}+(1-\lambda)\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}\right|^2 dx\,dt \\ &\quad - <\theta^1,\lambda\phi(0)+(1-\lambda)\hat{\phi}(0)>_{1,-1}+\int_{\Omega}(\lambda\phi_t(0)+(1-\lambda)\hat{\phi}_t(0))\theta^0. \end{aligned}$$

Dado que la función $f(x)=x^2$ es una función convexa se sigue que

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega}(\lambda)\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2+(1-\lambda)\left|\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}\right|^2)+\lambda\int_{\Omega}\theta^0\phi_t(0)+(1-\lambda)\int_{\Omega}\hat{\phi}_t(0)\theta^0- <\theta^1,\lambda\phi(0)+(1-\lambda)\hat{\phi}(0)>_{1,-1}=$$

$$\frac{\lambda}{2}\left(\int_0^T\int_{\Omega}\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2+\int_{\Omega}\theta^0\phi_t(0)- <\theta^1,\phi_t(0)>\right)+(1-\lambda)\left(\int_0^T\int_{\Omega}\left|\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}\right|^2+\int_{\Omega}\theta^0\hat{\phi}_t(0)- <\theta^1,\phi_t(0)>_{1,-1}\right)$$

Coercitividad: Para probar la coercitividad la funcional anterior, se utilizará la desigualdad de observabilidad (3.5) (que suponemos válida).

$$\begin{aligned} J(\phi^0,\phi^1) &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega}|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}|^2+\int_{\Omega}\theta^0\phi_t(0)\,dx- <\theta^1,\phi(0)>_{1,-1} \\ &\geq C_1\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}-\|\theta^0\|_{L^2}\|\phi_t(0)\|_{L^2}-\|\theta^1\|_{H^{-1}}\|\phi(0)\|_{H_0^1} \\ &\geq C_1\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}-C_2\|(\phi^0,\phi^1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\ &\geq C\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}(\|(\phi^0,\phi^1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}-1) \end{aligned}$$

Claramente si $\|(\phi^0,\phi^1)\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \to \infty$ el lado derecho de la desigualdad anterior, también tiende a infinito.

Del Teorema 17 se sigue que J tiene un minimizador $(\phi^0,\phi^1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$

$\square$

Los teoremas anteriores garantizan el control a cero siempre y cuando la desigualdad de observabilidad sea cierta. En el próximo capítulo veremos condiciones para tener esta desigualdad y probaremos además la regularidad escondida enunciada en el capítulo anterior.

3.2. Dos desigualdades importantes

Se comenzará por probar la siguiente igualdad

LEMA 4. *Supongamos que $q = q(x,t) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$. Entonces, para cualquier solución de*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f \ \ en\ Q \\ u = 0 \ \ en\ \Sigma \\ u(0) = u^0, u_t(0) = u^1 \ \ en\ \Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

con datos $(u^0,u^1,f) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(0,T;L^2(\Omega))$ se sigue la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma = \int_\Omega u_t q\cdot\nabla u\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega div\ q(|u_t|^2 - |\nabla u|^2)dxdt \\ + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \int_Q u_t q_t\cdot\nabla u - \int_Q fq\cdot\nabla u \end{aligned} \tag{3.8}$$

Demostración. En la identidad anterior y en la que sigue estamos usando la notación de Einstein para índices repetidos. Multiplicando la ecuación (3.7) por $q\cdot\nabla u$ e integrando sobre Q se sigue que

$$\int_0^T\int_\Omega u_{tt} q\cdot\nabla u - \Delta u q\cdot\nabla u\, dx\, dt = \int_0^T\int_\Omega fq\cdot\nabla u$$

Integrando por partes respecto a t, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega u_{tt}q\cdot\nabla u\, dx\, dt &= -\int_0^T\int_\Omega u_t(q\cdot\nabla u)_t\, dx\, dt + \int_\Omega u_t q\cdot\nabla u\, dx\Big|_0^T \\ &= -\int_0^T\int_\Omega u_t q_t\cdot\nabla u\, dx\, dt - \int_0^T\int_\Omega u_t q\cdot\nabla u_t\, dx\, dt + \int_\Omega u_t q\cdot\nabla u\, dx\Big|_0^T \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\int_0^T\int_\Omega u_t q\cdot\nabla u_t = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega q\cdot\nabla|u_t|^2 = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \operatorname{div} q|u_t|^2$$

Aplicando la fómula de Green para el término

$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta u q\cdot\nabla u\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}(q_k\frac{\partial u}{\partial x_k})\,dx\,dt - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\sigma \tag{3.10}$$

$$= -\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}(\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + q_k\frac{\partial^2 lu}{\partial x_j\partial x_k})\,dx\,dt - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\sigma \tag{3.11}$$

$$= +\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}q_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\,dx\,dt \tag{3.12}$$
$$-\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\sigma$$

Como $u=0$ en $\partial\Omega$ para $x\in\partial\Omega$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \nu_k\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \quad \forall k\in 1,\dots,n$$

y

$$|\nabla u(x)|^2 = \left|\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|^2 \quad x\in\partial\Omega.$$

Por tanto,

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\sigma = \int_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma$$

Por otro lado, se tiene que

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}q_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_k}\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} q|\nabla u|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_\Sigma q\cdot\nu\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \tag{3.13}$$

En combinación con (3.10) y (3.13) se sigue que

$$\int_Q u_{tt}q\cdot\nabla u - \Delta u q\cdot\nabla u\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} q\cdot|u_t|^2 - \int_Q u_t q_t\cdot\nabla u\,dx\,dt + \int_\Omega u_t q\cdot\nabla u\,dx\Big|_0^T$$
$$+\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} q|\nabla u|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_\Sigma (q\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \tag{3.14}$$

En combinación con (3.9), (3.10) y por (3.14) se sigue que

$$\frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} q\cdot|u_t|^2 - \int_Q u_t q_t\cdot\nabla u\,dx\,dt + \int_\Omega u_t q\cdot\nabla u dx\Big|_0^T + \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt \tag{3.15}$$

$$-\frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} q|\nabla u|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_\Sigma (q\cdot v)|\nabla u|^2\,d\sigma = \int_0^T\int_\Omega fq\cdot\nabla u \tag{3.16}$$

Por lo cual se obtiene la igualdad deseada.

□

A continuación se dará una desigualdad que es consecuencia del resultado anterior. Para esta desigualdad será necesario utilizar las desigualdades de Young y de Hölder.
TEOREMA 19. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \leq C(1+T)(\|u^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u^1|^2_{L^2(\Omega)} + |f|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))})$$

para cualquier solución de (3.7) *y para cualquier $T > 0$*

Demostración. Sea $h = h(x) \in (C^1\overline{\Omega})^n$ un campo vectorial tal que

$$h|_{\partial\Omega} = \nu$$

donde ν es el vector normal unitario exterior. Ver [5] p. 28 para la construcción.

Utilizando la igualdad dada en el lema 4 con $q(x,t) = h(x)$ y dado que $|\nu|^2 = 1$ se sigue

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q\cdot\nu\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dx = \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2$$

Por otro lado, a partir de la igualdad probada en el lema 4, se acotará cada término.

Dado que $q = h(x)$ se tiene que $q_t = 0$ y en consecuencia

$$-\int_0^T\int_\Omega u_t q_t\cdot\nabla u\,dxdt = 0$$

Sólo se acotarán los términos restantes dados en la igualdad del lema 4.

Se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_Q(\operatorname{div} q)(|u|^2 - |\nabla u|^2) \leq \frac{1}{2}\int_Q\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\right|\right)\left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right).$$

Dado que $h \in (C^1(\overline{\Omega}))^n$ se tiene que $\frac{\partial h_i}{\partial x_i} \in C^0(\overline{\Omega})$. Por ser $\overline{\Omega}$ un dominio compacto, entonces $\frac{\partial h_i}{\partial x_i}$ alcanza su máximo. Tomando $M = \sum_{i=1}^n max|\frac{\partial h_i}{\partial x_i}|$ sigue la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\int_Q\left(\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\right|\right)(|u|^2 + |\nabla u|^2) \leq \frac{M}{2}\int_Q(|u|^2 + |\nabla u|^2) \tag{3.17}$$

y entonces

$$\int_Q(\operatorname{div} q)(|u|^2 - |\nabla u|^2) \leq \frac{M}{2}\left(|u|^2_{L^2(Q)} + |\nabla u|^2_{L^2(Q)}\right). \tag{3.18}$$

Ahora acotaremos el siguiente término

$$\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Como $\frac{\partial h_k}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$ entonces se sigue que

$$\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \leq C \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|.$$

Aplicando la desigualdad de Young al último término se tiene que

$$C \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq \frac{C}{2} \left(\int_Q |\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2 + \int_Q |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 \right)$$

de lo cual se sigue que

$$\frac{C}{2} \left(\int_Q |\frac{\partial u}{\partial x_k}|^2 + \int_Q |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 \right) \leq C \int_Q |\nabla u|^2, \tag{3.19}$$

en conclusión,

$$\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \leq C \int_Q |\nabla u|^2$$

Ahora para acotar el término

$$\int_Q fq \cdot \nabla u = \int_Q fh \cdot \nabla u\,,$$

y como $h \in L^\infty(\Omega)$ se sigue que

$$\int_Q fh \cdot \nabla u \leq K \int_Q |f|\,|\nabla u|\,.$$

Además como $f \in L^1(0,T;\Omega)$ y utilizando desigualdad de Hölder se sigue que

$$K \int_Q |f|\,|\nabla u| \leq K \int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

Ahora utilizando la desigualdad de Young se sigue que

$$K \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \frac{K}{2} \left(\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \right) \tag{3.20}$$

Procedemos a acotar el término

$$\int_\Omega u_t q \cdot \nabla u \Big|_0^T = \int_\Omega u_t h \cdot \nabla u \Big|_0^T,$$

se sabe que

$$\int_\Omega u_t h \cdot \nabla u \Big|_0^T = \int_\Omega u_t(x,T) h(x) \cdot \nabla u(x,T) dx - \int_\Omega u^1(x) h(x) \cdot \nabla u^0(x) dx$$

Dado que $h \in L^\infty(\Omega)$ se sigue que

$$\int_\Omega u_t(x,T) h(x) \cdot \nabla u(x,T) dx \leq \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_t(x,T)|\,|\nabla u(x,T)|\,dx$$

y ahora utilizando las desigualdades de Hölder y Young se obtiene

$$\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_t(x,T)|\,|\nabla u(x,T)|\,dx \leq \frac{C}{2}\left(\int_\Omega |u_t(x,T)|^2 + \int_\Omega |\nabla u(x,T)|^2 dx\right)$$

Por lo tanto, por (2.12) y (2.15)

$$\int_\Omega |u_t(x,T)h(x)|\,|\nabla u(x,T)|\,dx \leq \frac{C}{2}\left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right)$$

La acotación del término

$$\int_\Omega u^1(x)h(x)\cdot\nabla u^0(x)dx,$$

es similar a la anterior.

Por lo cual

$$\int_\Omega u_t h\cdot\nabla u\Big|_0^T \leq C\left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right) \tag{3.21}$$

En lo anterior y en lo que sigue, $C > 0$ es una constante genérica que puede cambiar de línea a línea.

Ahora, por las desigualdades (3.17),(3.18),(3.19),(3.20), y (3.21) se sigue que

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 dx \leq C\left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |u|^2_{L^2(Q)} + |\nabla u|^2_{L^2(Q)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right).$$

Ahora se procederá a acotar los siguientes términos

$$\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))}.$$

Ahora por la desigualdad anterior se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 dx \leq C\left(\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |u|^2_{L^2(Q)} + |\nabla u|^2_{L^2(Q)} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right)$$

$$\leq C\left(\|u^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u^1|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_1\|_{L^1,(0,T,H^1_0(\Omega))} + |u|^2_{L^2(Q)} + |\nabla u|^2_{L^2(Q)}\right)$$

lo cual nos da la desigualdad buscada.

□

La importancia de la desigualdad anterior es que nos dice que

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$$

para cualquier solución de (3.7) con datos

$$(u^0, u^1, f) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T; L^2(\Omega))$$

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$ fijo, hacemos una partición de la frontera de Ω de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Gamma(x^0) = \left\{x \in \partial\Omega : (x - x^0) \cdot \nu(x) > 0\right\} \\ \Gamma_*(x^0) = \left\{x \in \partial\Omega : (x - x^0) \cdot \nu(x) \leq 0\right\} = \partial\Omega \backslash \Gamma(x^0) \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0,T) \\ \Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times (0,T) \end{cases} \tag{3.23}$$

Definimos ahora

$$R(x^0) = \|x - x^0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ahora demostraremos la desigualdad de observabilidad para $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ y un tiempo suficientemente grande. En otras palabras,

TEOREMA 20. *Supongamos que $T > 2R(x^0)$. Entonces la siguiente desigualdad se sigue para cualquier solución de* (3.2)

$$E(T) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2 dx \leq \frac{R(x^0)}{2(T - 2R(x^0))} \int_{\Sigma(x^0)} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \tag{3.24}$$

Demostración. Para verificar la desigualdad anterior, se usa la igualdad demostrada en el lema 4 con $f = 0$, $u(T-t) = \phi(t)$ y con $q(x) = x - x^0$. Obsérvese que div $q = n$ y que $\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = \int_Q |\nabla\phi|^2$ de esto se sigue que

$$\int_\Omega \phi_t(x - x_0) \cdot \nabla\phi\Big|_0^T + \frac{n}{2}\int_Q |\phi_t|^2 + (1 - \frac{n}{2})\int_Q |\nabla\phi|^2 = \frac{1}{2}\int_\Sigma [(x - x_0)\cdot\nu(x)] \left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \tag{3.25}$$

Dado que $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ se sigue que

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (x - x_0)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \leq \frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} (x - x_0)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma$$

Como $R(x_0) = \max_{x\in\Omega}|x - x_0|$ se sigue que

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} (x - x_0)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \leq \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Sigma(x^0)}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \tag{3.26}$$

Obsérvese que

$$\frac{n}{2}\int_Q |\phi_t|^2 + (1 - \frac{n}{2})\int_Q |\nabla\phi|^2 = \frac{1}{2}\int_Q (|\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) + \frac{n-1}{2}\int_Q \left[|\phi_t|^2 - |\nabla\phi|^2\right]$$

Combinando esto con la ley de la conservación de la energía (2.20)

$$E(t) = E(T),\ \forall t \geq 0$$

con lo que

$$\frac{1}{2}\int_Q (|\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) = TE(T) = TE(t), \forall t \in [0,T]$$

y se tiene que

$$\frac{n}{2}\int_Q |\phi_t|^2 + (1-\frac{n}{2})\int_Q |\nabla\phi|^2 = TE(t) + \frac{n-1}{2}\int_Q \left[|\phi_t|^2 - |\nabla\phi|^2\right] \tag{3.27}$$

Por otra parte multiplicando por (3.2) por ϕ (su solución) y utilizando la fórmula de Green se sigue que

$$0 = \int_Q (\phi_{tt} - \Delta\phi)\phi = -\int_\Omega |\phi_t|^2 + \int_\Omega \phi_t\phi\Big|_0^T - \int_\Sigma \phi\frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \int_Q |\nabla\phi|^2$$

Así

$$\int_Q |\phi_t|^2 - \int_Q |\nabla\phi^2| = \int_\Omega \phi_t\phi\Big|_0^T \tag{3.28}$$

Sustituyendo en (3.27) y (3.25) se sigue que

$$\int_\Omega \phi_t(x-x_0)\cdot\nabla\phi\Big|_0^T + \frac{n}{2}\int_Q |\phi_t|^2 + (1-\frac{n}{2})\int_Q |\nabla\phi|^2 = TE(t) + \int_\Omega \phi_t((x-x_0)\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi)\Big|_0^T$$

Se define

$$X(t) = \int_\Omega \phi_t\left[(x-x_0)\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right]$$

Por (3.25) y (3.26) hemos probado que

$$TE(t) + X(t)|_0^T \leq \frac{R(x^0)}{2}\int_{\Sigma(x^0)} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma.$$

Buscamos acotar

$$X(t)|_0^T = X(T) - X(0) \leq |X(T)| + |X(0)| \tag{3.29}$$

Para ello se utiliza la desigualdad de Young con δ, es decir,

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2 \tag{3.30}$$

Aplicando (3.30) a (3.29) se sigue que

$$\begin{aligned}|X(t)| &\leq \left|\int_\Omega \phi_t\left((x-x_0)\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)\right| \\ &\leq \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\phi_t|^2 + \frac{1}{2\delta}\int_\Omega \left((x-x_0)\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2\end{aligned}$$

para todo $\delta > 0$. Por otro lado, desarrollando el cuadrado se sigue que

$$\int_\Omega \left((x-x_0)\cdot\nabla\phi + \frac{n-1}{2}\phi\right)^2 = \int_\Omega |x-x_0|^2|\nabla\phi|^2 + (\frac{n-1}{2})^2\int_\Omega |\phi|^2 + (n-1)\int_\Omega \phi(x-x_0)\cdot\nabla\phi \tag{3.31}$$

Y además como

$$\int_\Omega \phi(x-x_0)\cdot\nabla\phi = \frac{1}{2}\int_\Omega (x-x_0)\nabla(\phi^2) = -\frac{n}{2}\int_\Omega |\phi|^2 \tag{3.32}$$

Sustituyendo (3.32) en (3.31) se sigue que

$$\int_\Omega |x-x_0|^2|\nabla\phi|^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\int_\Omega \phi^2 - \frac{n(n-1)}{2}\int_\Omega \phi^2 = \int_\Omega |x-x_0|^2|\nabla\phi|^2 + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right]\int_\Omega \phi^2$$

Obsérvese que

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{n(n-1)}{2} \leq 0.$$

Por otro lado, por definición de $R(x^0)$ se sigue que

$$\int_\Omega |x-x_0|^2|\nabla\phi|^2 \leq R(x^0)^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2.$$

Deducimos de lo anterior que

$$|X(t)| \leq \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\phi_t|^2 + \frac{1}{2\delta}R(x^0)^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2$$

Tomando $\delta = R(X^0)$ se sigue que

$$\frac{\delta}{2}\int_\Omega |\phi_t|^2 + \frac{1}{2\delta}R(x^0)^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2 = \frac{R(x^0)}{2}\left[\int_\Omega |\phi_t^2| + |\nabla\phi|^2\right] = R(x^0)E(T)$$

concluyendo la demostración de (3.24). □

3.3. Segunda regularidad escondida

Para finalizar este capítulo, demostraremos la desigualdad (2.34).

Consideraremos en esta sección ω solución de

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \Delta\omega = f_1 \text{ en } Q \\ \omega = 0 \text{ en } \Sigma(x^0) \\ \omega(0) = \omega_t(0) = 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

con $f_1 \in L^1(0,T,H_0^1(\Omega))$ tenemos el siguiente resultado:

Lema 5. *Sea $T > 0$ entonces existe $C = C(T) > 0$ tal que para todo $f_1 \in L^1(0, T, H_0^1(\Omega))$ y ω la solución correspondiente de (3.33) se tiene*

$$\|\omega(T)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} + \|\omega_t(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \omega_t}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Demostración. Para probar la desigualdad anterior será necesario probar la siguiente desigualdad

$$\|\omega(T)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} + \|\omega_t(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f_1\|_{L^1,(0,T,H_0^1(\Omega)}$$

Multiplicando la ecuación (2.31) por $-\Delta\omega_t$ e integrado en Ω, se sigue que

$$-\int_\Omega \Delta\omega_t\omega_{tt} + \int_\Omega \Delta\omega\Delta\omega_t = -\int_\Omega f_1\Delta\omega_t$$

Usando la fórmula de Green se tiene

$$\int_\Omega \nabla\omega_t\nabla\omega_{tt} - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\omega_t}{\partial\nu}\omega_{tt} + \int_\Omega \Delta\omega\Delta\omega_t = \int_0^T\int_\Omega \nabla f_1\nabla\omega_t + \int_\Omega \frac{\partial\omega_t}{\partial\nu}f_1$$

Como $\omega = 0$ en Σ y $f_1 \in H_0^1(\Omega)$ se sigue entonces que

$$\int_\Omega \nabla\omega_t\nabla\omega_{tt} + \int_\Omega \Delta\omega\Delta\omega_t = \int_{\partial\Omega}\nabla f_1\nabla\omega_t.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\nabla\omega_t|^2 + \int_\Omega |\Delta\omega|^2\right) = \int_\Omega \nabla f_1\nabla\omega_t$$

Aplicando la desigualdad de Hölder al término de la derecha se sigue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\nabla\omega_t|^2 + \int_\Omega |\Delta\omega|^2\right) = \int_\Omega \nabla f_1\nabla\omega_t \leq \left(\int_\Omega |\nabla f_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla w_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como

$$\int_\Omega |\Delta\omega|^2 \geq 0$$

se sigue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_\Omega |\nabla\omega_t|)^2 + \int_\Omega |\Delta\omega|^2) \leq \left[\int_\Omega |\nabla f_1|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega |\nabla w_t|^2| + \int_\Omega |\Delta\omega|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Integrando de 0 a t se tiene que

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|\nabla\omega_t|^2 + |\nabla\omega|^2\right) \leq \int_0^t \left[\int_\Omega |\nabla f_1|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega |\nabla w_t|^2| + \int_\Omega |\Delta\omega|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

de lo cual, por las condiciones iniciales, se sigue que

$$\frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla\omega_t(t)|^2 + |\Delta\omega(t)|^2) \leq \int_0^t \left[\int_\Omega |\nabla f_1|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |\nabla w_t|^2| + \int_\Omega |\Delta\omega|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ahora utilizando la desigualdad probada en el Teorema 5 se sigue que

$$(\int_\Omega |\nabla\omega_t(t)|^2 + |\Delta\omega(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^t (\int_\Omega |\nabla f_1|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Recordemos que

$$\int_0^T (\int_\Omega |\nabla f_1|^2)^{\frac{1}{2}} = \|f_1\|_{L^1,(0,T,H_0^1(\Omega))}$$

por equivalencia de normas en H_0^1.

De igual manera

$$\left(\int_\Omega |\nabla\omega_t(t)|^2 + |\Delta\omega(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \left(\int_\Omega |\nabla\omega_t(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\Delta\omega(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

son normas equivalentes y se sigue que

$$\|\omega(t)\|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)} + \|\omega_t(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f_1\|_{L^1(0,T,H_0^1(\Omega))} \quad \forall t \in [0,T]$$

Es decir,

$$\|\omega\|^2_{L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1(\Omega))} + \|\omega_t\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\|f_1\|_{L^1(0,T,H_0^1(\Omega))} \tag{3.34}$$

Tomaremos ahora $f_1 \in C_c^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Si el resultado es válido para estas funciones, el resultado se obtiene por densidad. Ahora, tomando $\psi = \omega_t$, ψ es solución del sistema

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta\psi = \frac{df_1}{dt} \text{ en } Q \\ \psi = 0 \text{ en } \Sigma \\ \psi(0) = \psi_t(0) = 0, \end{cases} \tag{3.35}$$

Observemos que las condiciones iniciales se satisfacen pues $\psi_t = \omega_{tt} = \Delta\omega + f_1$ como el $f_1(0) = 0$ se verifica que $\psi_t(0) = 0$.

Procedemos como en la prueba del Teorema 19. Tomamos $q = h(x)$ con $h_k = \nu_k$ en $\partial\Omega$. Multiplicamos (3.35) por $h \cdot \nabla\psi$ se sigue, como en la prueba del lema 4, que

$$\frac{1}{2}\int_Q \text{div } h(|\psi_t|^2 - |\nabla\psi|^2) + \int_\Omega \psi_t(T) h\cdot\nabla\psi(T) + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma = \int_Q f_{1,t} h\cdot\nabla\psi \, dx\, dt \tag{3.36}$$

Observemos que, integrando por partes en tiempo el término $\int_Q f_{1,t} h \cdot \nabla\psi \, dx\, dt$ y como $f_1(T) = f_1(0) = 0$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_Q \text{div } h(|\psi_t|^2 - |\nabla\psi|^2) + \int_\Omega \psi_t(T) h\cdot\nabla\psi(T) + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma = -\int_Q f_1 h\cdot\nabla\psi_t \, dx\, dt \tag{3.37}$$

Proponiendo como

$$X = -\int_Q f_1 h \cdot \nabla \psi_t \, dx \, dt$$

Por la fórmula de Green,

$$X = \int_Q \text{div } (hf_1)\psi_t \, dx \, dt \tag{3.38}$$

Pero sabemos que

$$\psi_t = \omega_{tt} = \Delta\omega + f_1$$

y sustituyendo en (3.38) se sigue que

$$X = \int_Q \text{div } (hf_1)(\Delta\omega + f_1) dxdt \tag{3.39}$$

Es decir, distribuyendo y por la fómula de Green,

$$X = \int_Q (\text{div } (hf_1)\Delta\omega + \frac{1}{2}\text{div } h|f_1|^2) dxdt$$

Sustituyendo X y $\psi_t = \Delta\omega + f_1$ en (3.37) se sigue que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \psi_t(T) h \cdot \nabla\psi(T) + \frac{1}{2}\int_Q \text{div } h(|\Delta\omega|^2 + 2\Delta\omega f_1 + |f_1|^2 - |\nabla\psi|^2) + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \\ &- \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma = \int_Q (\text{div } (hf_1)\Delta\omega + \frac{1}{2}\text{div } h|f_1|^2) dxdt \end{aligned} \tag{3.40}$$

Simplificando (3.40) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma &= \int_Q \psi_t(T) h \cdot \nabla\psi(T) + \frac{1}{2}\int_Q \text{div } h(|\Delta\omega|^2 - |\nabla\psi|^2) \, dx \, dt \\ &+ \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \int_Q h \cdot \nabla f_1(\Delta\omega) \, dx \, dt \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ahora se procede a acotar la expresión (3.41). Muchos términos anteriores han sido acotados en teoremas pasados por lo que sólo acotaremos los que son distintos. Tenemos que

$$\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \le C\int_Q |\nabla\psi|^2. \tag{3.42}$$

Tenemos que:

$$\int_Q \psi_t(T) h \cdot \nabla\psi(T) = \int_Q (\Delta\omega(T) h \cdot \nabla\omega_t(T)) \le C\left(\|\omega_t(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|\omega(T)\|^2_{H^2 \cap H^1_0(\Omega)}\right) \tag{3.43}$$

El otro término se puede acotar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_Q \text{div } h(|\Delta\omega|^2 - |\nabla\omega_t|^2)\,dx\,dt &\leq C\int_Q (|\Delta\omega|^2\,dx\,dt + |\nabla\omega_t|^2) \\ &= C\left(\|\omega\|^2_{L^2(0,T;H^2\cap H_0^1(\Omega))} + \|\omega_t\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Finalmente el último término se acota de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_Q |h\cdot\nabla f_1\Delta\omega| &\leq \frac{1}{2}\int_Q |h\nabla f_1|^2 + \frac{1}{2}\int_Q |\Delta\omega|^2 \\ &\leq C\left(\|f_1\|^2_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\Delta\omega\|^2_{L^2(0,T;H^2\cap H_0^1(\Omega))}\right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Entonces por (3.42), (3.43), (3.44) , (3.45) y (3.34) se sigue que

$$\left|\frac{\partial\omega_t}{\partial\nu}\right|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|f_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

para cualquier $f_1 \in C_c^1(0,T,H_0^1(\Omega))$. El resultado se obtiene por densidad de de $C_c^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ en $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$.

□

4

Control interno de la ecuación de ondas

Ahora se tratará el problema de control interno de la ecuación de ondas. Como en el capítulo anterior donde se comenzó por dar la formalización de la teoría a partir de la minimalización de funcionales aquí se trabajará con una idea muy similar. Muchos teoremas enunciados son muy similares además de las técnicas utilizadas. Al final se dará un resultado que nos dará una cota la cual nos permitirá determinar la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas y para esta prueba se usarán los resultados más fuertes de análisis funcional los cuales incluyen resultados de topología débiles.

Para comenzar, se darán algunas definiciones relacionadas con el control exacto.

4.1. Formulación del problema y descripción

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2. Sea $T > 0$ y sea ω un subconjunto abierto no vacío de Ω.

Ahora bien, considérese la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = f\chi_\omega \text{ en } Q, \\ \theta = 0 \text{ en } \Sigma, \\ \theta(0) = \theta^0, \theta_t(0) = \theta^1 \text{ en } \Sigma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Para encontrar condiciones necesarias y suficientes para probar si el sistema anterior es controlable se usarán ideas muy análogas como se hizo en el problema de controlabilidad en la frontera.

El sistema adjunto de la ecuación de ondas es

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = 0 \text{ en } \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,T), \\ \phi(T) = \phi^0, \phi_t(T) = \phi^1 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Tomando ϕ la cual es solución del sistema adjunto y multiplicando (4.1) se tiene que

$$\int_0^T \int_\Omega \phi(\theta_{tt} - \Delta\theta) = \int_0^T \int_\omega \phi f dxdt$$

Integrando por partes en tiempo, y usando la fórmula de Green en espacio, se tiene que

$$\int_\Omega (\phi(T)\theta_t(T) - \phi_t(T)\theta(T))\, dx - \int_\Omega (\phi(0)\theta_t(0) - \phi_t(0)\theta(0))\, dx = \int_0^T \int_\omega \phi f dxdt \tag{4.3}$$

siempre y cuando las integrales tengan sentido. Cómo vimos en los capítulos anteriores podemos trabajar con datos en $H^{-1}(\Omega)$. En este problema, trabajamos con control en $L^2(Q)$ por lo que la solución de (4.1) tiene sentido para datos $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Tomaremos entonces la solución de (4.2) para datos iniciales $(\phi^0, \phi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Por esta razón modificamos (4.3) como sigue:

$$- < \theta, \phi_t >|_0^T + \int_\Omega \theta_t \phi \Big|_0^T = \int_0^T \int_\omega \phi f dxdt \tag{4.4}$$

Definición 6. *El sistema (4.1) es exactamente controlable en $T > 0$ si para los datos iniciales (θ^0, θ^1) en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ el conjunto de datos alcanzables $R(T; (\theta^0, \theta^1)$ con $f \in L^2(\Omega)$ coincide con $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*
Definición 7. *El sistema (4.1) es controlable a cero en $T > 0$ si para cualquier par de datos iniciales (θ^0, θ^1) en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ el conjunto de datos $R(T; (\theta^0, \theta^1))$ con $f \in L^2(\Omega)$ contiene al elemento cero.*

A continuación se enunciará un lema el cual nos dirá cuando la ecuación de ondas es controlable a cero
Lema 6. *La pareja de datos iniciales $(\theta^0, \theta^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de (4.1) es controlable a cero si y sólo si existe $f \in L^2((0,T) \times \omega))$ tal que*

$$\int_0^T \int_\omega \phi f dxdt =< \theta^0, \phi_t(0) >_{1-1} - \int_\Omega \phi(0)\theta^1 dx \tag{4.5}$$

Demostración. Basta sustituir $\theta(T) = 0$ y $\theta_t(T) = 0$ en (4.4).

□

Se propone, para (θ^0, θ^1) fijos en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, el siguiente funcional $J : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$J(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\phi|^2\, dx\, dt + \int_\Omega \theta^1 \phi^0\, dx - < \theta^0, \phi^1 >_{1,-1} \tag{4.6}$$

Por el Teorema 17 hay probar que J es un funcional continuo, convexo y coercitivo en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Como en el capítulo anterior, la coercividad se reduce a probar una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto. Damos la siguiente definición.

Definición 8. *La ecuación* (4.2) *es observable al tiempo* $T>0$ *si existe una constante positiva* $C>0$ *tal que para cualquier* $(\phi^0,\phi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ *se verifica la siguiente desigualdad:*

$$C\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \int_0^T\int_\omega |\phi|^2. \tag{4.7}$$

donde ϕ es solución de (4.2)

Ya con esta definición y el teorema anterior se puede dar un teorema el cual nos permitirá encontrar un control de la ecuación de ondas dado en (4.1)
Teorema 21. *Sea* $(\theta^0,\theta^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ *y supóngase que* $(\hat\phi^0,\hat\phi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ *es un minimizador de* J*. Si* $\hat\phi$ *es la correspondiente solución del sistema con datos iniciales* $(\hat\phi^0,\hat\phi^1)$ *entonces* $f=\hat\phi$ *es un control que lleva* (θ^0,θ^1) *a cero en tiempo* T*.*

Demostración. Dado que, por hipótesis, J tiene un mínimo en $(\hat\phi^0,\hat\phi^1)$ se sigue que el mínimo debe cumplir la siguiente relación

$$\lim_{h\to 0}\frac{J((\hat\phi^0,\hat\phi^1)+h(\phi^0,\phi^1))-J(\hat\phi^0,\hat\phi^1)}{h}=0$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{J((\hat\phi^0,\hat\phi^1)+h(\phi^0,\phi^1))-J(\hat\phi^0,\hat\phi^1)}{h}\\&=\int_0^T\int_\omega \hat\phi\phi dxdt+\int_\Omega \theta^1\phi^0dx-<\phi^1,\theta^0>_{1,-1}\end{aligned}$$

para cualquier $(\phi^0,\phi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ donde ϕ es la solución correspondiente de (4.2). Por el Lema 6 se sigue que $f=\hat\phi|_\omega$ es un control el cual lleva los datos iniciales (θ^0,θ^1) a cero al tiempo T.

□

Ahora se demostrará una condición suficiente para la propiedad de controlabilidad exacta
Teorema 22. *Supóngase que el sistema* (4.2) *es observable al tiempo* T *y sea* $(\theta^0,\theta^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$*. El funcional* J *definido anteriormente tiene un único minimizador* $(\hat\phi^0,\hat\phi^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$*.*

Demostración. A continuación se probará cada una de las propiedades del funcional dado anteriormente

Continuidad: En lo que sigue C es una constate que puede variar a lo largo de la línea.

Sea (ϕ_n^0,ϕ_n^1) una sucesión tal que

$$(\phi_n^0, \phi_n^1) \to (\phi^0 \phi^1)$$

Obérvese que, por la linealidad de (4.2), $h_n = \phi - \phi_n$, es solución de (4.2), con datos $h_n(T) = \phi^0 - \phi_n^0$, $h_{nt}(T) = \phi_t - \phi_{nt}$ donde ϕ_n es la soluciión de (4.2) con datos $(\phi_n^0 \phi_{nt}^1)$ (respectivamente (ϕ^0, ϕ^1)).

Procediendo a probar la continuidad se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left|J(\phi^0, \phi^1) - J(\phi_n^0, \phi_n^1)\right| \\
&\qquad = \left|\frac{1}{2}\int\int_w |\phi|^2 + \int_\Omega \theta^1\phi^0 - <\theta^0, \phi^1> - \frac{1}{2}\int\int_w |\phi_n|^2 + \int_\Omega \theta^1\phi_n^0 - <\theta^0, \phi_n^1>\right| \\
&\qquad = \left|\frac{1}{2}\int\int_\omega |\phi|^2 - |\phi_n|^2 + \int_\Omega \theta^1(\phi^0 - \phi_n^0) - <\phi^0, \phi^1 - \phi_t^1>\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\left(\left[\int\int_\omega |\phi|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int\int_\omega |\phi_n|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left[\int\int_\omega |\phi|^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int\int_\omega |\phi_n|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\qquad + \|\theta^1\|_{L^2(\Omega)}\|\phi^0 - \phi_n^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta^0\|_{H_0^1(\Omega)}\|\phi^1 - \phi_n^1\|_{H^{-1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Obsérvese que por la desigualdad del triángulo

$$\left|\left(\int\int_\omega |\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int\int_\omega |\phi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \le \left(\int\int_\omega |\phi - \phi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Además

$$\left(\int\int_\omega |\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|(\phi^0, \phi^1)\|$$

$$\left(\int\int_\omega |\phi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|(\phi_n^0, \phi_n^1)\|$$

y además

$$\left(\int\int_\omega |\phi - \phi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|(\phi^0 - \phi_n^0, \phi^1 - \phi_n^1)\|$$

Como ϕ_n^0, ϕ_n^1 se sigue que existe M tal que $\|\phi^0, \phi_n^1\| \le M$, es decir

$$|J(\phi^0, \phi^1) - J(\phi_n^0, \phi_n^1)| \le C\|(\phi^0 - \phi_n^0, \phi^1 - \phi_n^1)\|$$

lo cual nos dice que J es continua

Convexidad: Para probar la convexidad se toman datos de la siguiente manera

$$V(T) = V^0 = \lambda\phi^0 + (1 - \lambda)\tilde{\phi}^0$$

y

$$V_t(T) = V^1 = \lambda\phi^1 + (1 - \lambda)\tilde{\phi}^1$$

Por la linealidad de la ecuación se tiene que

$$J(V^0,V^1)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega|\lambda\phi+(1-\lambda)\tilde{\phi}|^2+\int_\Omega\theta^1\left(\lambda\phi^0+(1-\lambda)\tilde{\phi}^0\right)+<\theta^0,\lambda\phi^1+(1-\lambda)\tilde{\phi}^1>=$$

Dado que la función $f(x)=x^2$ es una función convexa se sigue que

$$\begin{aligned}J(V^0,V^1)&\leq\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega\lambda|\phi|^2+(1-\lambda)|\tilde{\phi}|^2)+\lambda\int_\Omega\theta^1\phi^0+(1-\lambda)\int_\Omega\theta^1\tilde{\phi}^0-\lambda<\theta^0,\phi^1>+(1-\lambda)<\theta^0,\tilde{\phi}^1>\\&=\lambda J(\phi^0,\phi^1)+(1-\lambda)J(\tilde{\phi}^0,\tilde{\phi}^1)\end{aligned}$$

Coercitividad:

Por la desigualdad de observabilidad (4.7), la desigualdad de Hölder y la dualidad H^{-1},H_0^1, se tiene que para $C>0$ una constante que puede cambiar de línea a línea,

$$\begin{aligned}J(\phi^0,\phi^1)&\geq C\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}-\|\theta^1\|_{L^2}\|\phi^0\|_{L^2}-\|\theta^0\|_{H_0^1}\|\phi^1\|_{H^{-1}}\\&\geq C\|(\phi^0,\phi^1)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}-C\|(\phi^0,\phi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\\&\geq C\|(\phi^0,\phi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}(\|(\phi^0,\phi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}-1)\end{aligned}$$

Claramente si $\|(\phi^0,\phi^1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\to\infty$ el lado derecho de la desigualdad anterior, también tiende a infinito.

Del Teorema 17, se sigue que J tiene un minimizador $(\hat{\phi}^0,\hat{\phi}^1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ $\square$

Como en el capítulo anterior, hemos reducido el problema de controlabilidad a demostrar la desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto. Esta desigualdad es el tema que trataremos en el próximo capítulo.

4.2. La desigualdad de observabilidad

TEOREMA 23. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^2. Sea $x^0\in\mathbb{R}^n,\omega\subset\mathbb{R}^n$ una vecindad de $\Gamma(x^0)$ y $T>2R(x^0)$. Entonces existe una constante $C>0$ tal que para toda solución de (4.2) se tiene:*

$$|\phi^0|^2_{L^2(\Omega)}+\|\phi^1\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\leq C\int_0^T\int_\omega|\phi|^2dxdt \tag{4.8}$$

Demostración. La demostración se realizará en 4 pasos.

Paso 1:

Probaremos que (4.8) es válida si se tiene la siguiente desigualdad para datos iniciales de (4.2) $(\tilde{\phi}^0,\tilde{\phi}^1)\in H_0^1\times L^2$,

$$\|\tilde{\phi}^0\|_{H_0^1(\Omega)}+|\tilde{\phi}^1|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\int_0^T\int_\omega|\tilde{\phi}_t|^2dxdt \tag{4.9}$$

En efecto. Para $(\phi^0, \phi^1) \in L^2 \times H^{-1}$ definimos

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\chi = \phi^1 \text{ en } \Omega \\ \chi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Por el teorema de Lax-Milgram, este problema tiene una única solución $\chi \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\|\chi\|_{H_0^1} = \|\phi^1\|_{H^{-1}}. \tag{4.11}$$

Definimos $\psi(x,t) = \chi(x) - \int_t^T \phi(x,s)ds$. Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que ψ es solución de (4.2) con datos $\psi(T) = \chi \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi_t(T) = \phi^0 \in L^2(\Omega)$. Como suponemos válida la desigualdad (4.9) y que $\psi_t = \phi$, se tiene que

$$\|\chi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi^0|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\tilde{\phi}|^2 dxdt \tag{4.12}$$

Por (4.11) se obtiene la desigualdad buscada.

Paso 2: En esta etapa demostraremos una desigualdad intermedia. Para datos iniciales $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, y $T > 2R(x^0)$ existe $C > 0$ tal que toda solución de (4.2) satisface

$$E(T) \leq C \left(\int_0^T \int_\omega |\phi_t|^2 + \int_0^T \int_\omega |\nabla\phi|^2 \right) \tag{4.13}$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $T - 2\epsilon > 2R(x^0)$. Se sabe por la ley de la conservación de la energía puede ser vista como

$$E(T) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla\phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2$$

y aplicando el Teorema 20 se sigue que

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla\phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2 \leq C \int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \right|^2$$

Ahora se construirá un campo vectorial el cual nos dará una idea del comportamiento de la función de la frontera hacia el interior, por lo cual, tómese $q = q(x,t) \in W^{1,\infty}(Q)^n$ de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x,t) = \nu(x) \quad \forall (x,t) \in \Gamma(x^0) \times (\epsilon, T-\epsilon) \\ q(x,t) \cdot \nu(x) \geq 0 \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ q(x,0) = q(x,T) = 0, \forall x \in \Omega \\ q(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (\Omega \setminus \omega) \times (0,T) \end{array} \right. \tag{4.14}$$

En efecto, se elige el campo vectorial como $q(x,t) = h(x)\eta(t)$ con $\eta \in C^1([0,T])$ tal que

$$\eta(0) = \eta(T) = 0; \quad \eta(t) = 1 \quad \forall t \in (\epsilon, T-\epsilon)$$

y $h \in (C^1(\Omega)^n)$ tal que

$$h \cdot \nu \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma; \quad h = \nu \text{ en } \Gamma(x^0); \quad h = 0 \text{ en } \Omega \setminus \omega$$

De acuerdo como se construyó el campo vectorial $q(x,t)$ se sigue que

$$\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} q\cdot\nu\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 \tag{4.15}$$

Por construcción de q, utilizando el Lema 4 (identidad (3.8)) y acotando cada término, se sigue que para alguna $C > 0$

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega} q\cdot\nu|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}|^2 \leq C\left(\int_0^T\int_\omega|\phi_t|^2 + \int_0^T\int_\omega|\nabla\phi|^2\right)$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma(x^0)}|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}|^2 \leq C\left(\int_0^T\int_\omega|\phi_t|^2 + \int_0^T\int_\omega|\nabla\phi|^2\right)$$

Aplicando el Teorema 20, y la ley de la conservación de la energía se sigue

$$E(T) \leq C\left(\int_0^T\int_\omega|\phi_t|^2 + \int_0^T\int_\omega|\nabla\phi|^2\right)$$

Obsérvese que esta estimación es válida para toda $T > 2R(x^0)$ esto significa que para toda $\epsilon > 0$ tal que $T - 2\epsilon > 2R(x^0)$ se tiene que

$$E(T) \leq C\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_\omega(|\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) \tag{4.16}$$

Paso 3: En este paso, veremos que por las condiciones que dimos sobre T y ω se tiene de hecho que

$$E(T) \leq C\left(\int_0^T\int_\omega|\phi_t|^2 + \int_0^T\int_\omega|\phi|^2\right) \tag{4.17}$$

Sea $\tilde{\omega} \subset \Omega$ una vecindad de $\Gamma(x^0)$ tal que

$$\Omega \cap \overline{\tilde{\omega}} \subset \omega$$

Dado que la desigualdad(4.16) es válida en $\tilde{\omega}$ se sigue que

$$E(T) \leq C\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\tilde{\omega}}\left(|\phi_t(x,t)|^2 + |\nabla\phi(x,t)|^2\right) \tag{4.18}$$

Ahora construyendo $p = p(x,t) \in W^{1,\infty}(Q)$ de la siguiente manera

$$p(x,t) = 1 \text{ en } \forall (x,t) \in \tilde{\omega} \times (\epsilon, T-\epsilon) \tag{4.19}$$
$$p(x,t) = 0 \text{ en } \forall (x,t) \in (\Omega \setminus \omega) \times (0,T) \tag{4.20}$$
$$p(x,0) = p(x,T) = 0, \text{ en } \forall x \in \Omega \tag{4.21}$$
$$\frac{|\nabla p|^2}{p} \in L^\infty(Q) \tag{4.22}$$

Obsérvese que (4.22) se satisface definiendo

$$p = \tilde{p}^4.$$

donde $\tilde{p}$ es una función que verifica (4.19),(4.20),(4.21).

Multiplicando (4.2) por $p\phi$ y utilizando la fórmula de Green se tiene que

$$\int_0^T \int_\Omega p\phi(\phi_{tt} - \Delta\phi) = \int_0^T \int_\Omega (p|\nabla\phi|^2 + \nabla p \cdot \nabla\phi\phi) + \int_\Omega p\phi\phi_t \Big|_0^T - \int_0^T \int_\Omega (p_t\phi_t\phi + p|\phi_t|^2)$$

De lo cual, por (4.21),

$$\int_0^T \int_\Omega p|\nabla\phi|^2 = \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\phi\phi - \int_0^T \int_\Omega (p_t\phi_t\phi + p|\phi_t|^2)$$

Aplicando la desigualda de Young se sigue que

$$\left|\int_Q \nabla p \cdot \nabla\phi\phi\right| \le \int_Q \left|\left(p\frac{\nabla p}{p}\right) \cdot (\phi\nabla\phi)\right| \le \frac{1}{2}\int_Q p|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\int_Q \frac{1}{p}|\nabla p|^2|\phi|^2 \tag{4.23}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega p|\nabla\phi|^2 \le \frac{1}{2}\int_Q \frac{1}{p}|\nabla p|^2|\phi|^2 - \int_0^T \int_\Omega (p_t\phi_t\phi + p|\phi_t|^2)$$

Por la construcción de $p(x,t)$ se sigue que

$$\int_0^T \int_\Omega p|\nabla\phi|^2 \ge \int_0^T \int_{\tilde{\omega}} |\nabla\phi|^2$$

Es decir,

$$\int_0^T \int_{\tilde{\omega}} |\nabla\phi|^2 \le C(\int_0^T \int_\omega |\phi_t|^2 + \int_0^T \int_\omega |\phi|^2) \tag{4.24}$$

Combinando (4.24) y (4.18) se sigue que

$$E(T) \le C\left(\int_0^T \int_\omega |\phi_t|^2 + \int_0^T \int_\omega |\phi|^2\right)$$

Paso 4: Vamos a mostrar que si $T > 2R(x^0)$ existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_\Omega |\phi|^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi_t|^2. \tag{4.25}$$

Para la demostración, se hará el argumento por contradicción. Es decir, suponemos que existe una sucesión de datos (ϕ_n^0, ϕ_n^1) tal que la sucesión de soluciones de (4.2) satisfacen

$$\int_Q |\phi_n|^2 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.26}$$

y

$$\int_0^T \int_\omega |\phi_{n,t}|^2 \to 0 \tag{4.27}$$

Por (4.17) y (4.26) se sigue que

$$\|(\phi_n^0, \phi_n^1)\|_{H_0^1(Q)\times L^2(Q)} \leq C \tag{4.28}$$

Por (2.12) y (2.15) se tiene

$$\|\phi_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C$$

y

$$\|\phi_{n,t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$$

implica que existe $\phi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\phi_n \rightharpoonup \phi \quad en \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

y

$$\phi_n t \rightharpoonup \phi_t \quad en \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

Por la compacidad del encaje de $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y (4.28) se sigue que existe $\phi \in C([0,T];L^2(\Omega))$ tal que

$$\phi_n \to \phi \quad \text{converge fuertemente en} \quad C([0,T];L^2(\Omega))$$

Ver Terorema 3, página 80, [9].

Se tiene que ϕ_n satisface

$$(\phi_{n,t}(T), v) - (\phi_{n,t}(t), v) + \int_t^T (\nabla\phi_n, \nabla v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Pasando al límite (débil) se tiene que

$$(\phi_t(T), v) - (\phi_{n,t}(t), v) + \int_t^T (\nabla\phi_t(t), \nabla v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

es decir, $\phi = \phi(x,t)$ es solución de (4.2) y además

$$\|\phi\|_{L^2(Q)} = 1 \tag{4.29}$$

$$\phi_t = 0 \quad c.t.p \quad en \quad \omega \times (0,T)$$

La función $\psi = \phi_t$ es también solución de (4.2) la cual satisface que

$$\psi = 0 \quad c.t.p. \quad en \quad \omega \times (0,T)$$

y por el Teorema de Unicidad de Holmgren (ver [5] pág. 88), se sigue que $\psi = 0$, es decir $\phi_t = 0$. Así $\phi(x,t) \in H_0^1(\Omega)$ es una solución de

$$-\Delta\phi = 0 \text{ en } \Omega$$

De lo cual $\phi(x,t) = 0$ y esto contradice (4.29), por lo cual se sigue la desigualdad deseada.

$\square$

OBSERVACIÓN 2. *El teorema de unicidad de Holmgren básicamente dice que si una solución de la ecuación (en este caso de ondas) se anula en una zona por la que cruzan las características de la ecuación, la solución debe ser cero. En particular es necesario que el tiempo sea suficientemente grande. En $\mathbb{R}$, si la ecuación se verifica en un intervalo $(0,L)$ necesitamos que $T > 2L$.*

5

Algunos comentarios y conclusiones

Para concluir la tesis quisiera comentar que las regiones de control que vimos en este trabajo son las que se obtienen por "multiplicadores", es decir, $q(x,t) = x - x^0$. Se puede trabajar en otras regiones de control que satisfagan la "óptica geométrica" pero esto requiere técnicas mucho más avanzadas de análisis microlocal. Ver [1].

Todos los resultado son válidos si en vez de control a cero, probamos control exacto para (4.1). Dados $(z^0, z^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, buscamos f tal que la solución de (4.1) satisfaga

$$\theta(T) = z^0 \quad \theta_t(T) = z^1$$

Esto se debe a que la ecuación de ondas es reversible en el tiempo y estamos trabajando para el caso lineal.

De hecho sea z solución de

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0, \text{ en } Q \\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ z(T) = z^0, z_t(T) = z^1 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Se calcula $z(0)$ y $z_t(0)$ y buscamos controlar a cero la solución $\hat{\theta}$ con datos iniciales

$$\hat{\theta} = \theta^0 - z(0) \quad \hat{\theta}_t = \theta^1 - z_t(0)$$

Si encontramos f tal que

$$\hat{\theta}(T) = 0, \quad \hat{\theta}_t(T) = 0$$

esto quiere decir que $\theta = \hat{\theta} + z$ satisface

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = f\chi_\omega \text{ en } Q \\ \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \theta(0) = \theta^0, \theta_t(0) = \theta^1; \theta(T) = z^0, \theta_t(T) = z^1 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Bibliografía

[1] Bardos, C.; Lebeau, G.; Rauch, J. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* 30 (1992), no. 5, 1024–1065.

[2] Brézis, H. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones* Volumen 88 de Alianza Universidad Textos, 1984.

[3] Evans, L.C. *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[4] Fattorini, H. O. Local controllability of a nonlinear wave equation. Math. Systems Theory 9 (1975), no. 1, 30-45.

[5] Lions, J.L. Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Tome 1-2), Masson Ed. (1988).

[6] Ho, L. F. Observabilité frontière de l'équation des ondes. (French summary) [Boundary observability of the wave equation] C. R. Acad. Sci. Paris Math. 302 (1986), no. 12, 443–446.

[7] Russell, David L. Exact boundary value controllability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions. Differential games and control theory (Proc. NSF–CBMS Regional Res. Conf., Univ. Rhode Island, Kingston, R.I., 1973), pp. 291–319. Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 10, Dekker, New York, 1974.

[8] Micu S., Zuazua E. *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations in "Quelques questions de théorie du contrôle"* Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, (2004), pp. 69–157.

[9] Simon, J. Compact Sets in $L^p(0,T;B)$ Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987), 65–96.

[10] Werner, K.-D. Boundary value controllability and observability problems for the wave and heat equation. J. Austral. Math. Soc. Ser. B 29 (1988), no. 4, 461–ï£¡ï£¡479.

[11] Zuazua, E. Controllability of Partial Differential Equations. Notas. 3er Ciclo, Castro Urdiales 2006. HAL Id: cel-00392196 https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00392196

[12] Zuazua, E. *An Introduction to the exact controllability for distributed systems.* Textos e notas, Universidad de Lisboa 1990.