



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**DISEÑO DE OBSERVADORES PARA LA TELEOPERACIÓN BILATERAL  
DE ROBOTS CON RETARDOS VARIANTES EN EL TIEMPO**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRA EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

PRESENTA:  
**LAURA MIRIAM LÓPEZ RECILLAS**

TUTOR  
**DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

MÉXICO, CDMX, 2017  
**CD. MX. SEPTIEMBRE 2017**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Maya Ortiz Paul Ronaldo  
Secretario: Dr. Tan Xu Yu  
1er. Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez  
2do. Vocal: Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A.  
3er. Vocal: Dr. Rodríguez Angeles Alejandro

La tesis se realizó en el Laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

---



*Ser escéptico no es una posición social. Ser escéptico es saber que lo que cualquier persona diga es lo que ella cree que es verdad, pero no necesariamente es la verdad. Es saber que ellos crearon esta historia y los aprendemos a escuchar. Al escuchar lo que dicen, podemos tomar lo que nos ayude a hacer nuestra historia mejor y rechazar todo lo que la haga peor.*

*Carl Sagan*



# Reconocimientos

---

*A mi familia que ha estado a mi lado durante esta etapa de mi vida.*

*A mis amigos por alentarme a seguir luchando.*

*Al Doctor Arteaga por los conocimientos adquiridos.*

*A mi Alma Mater por todo lo que me brindo.*

*A mis colegas del Laboratorio por apoyarme.*

*Finalmente agradezco a CONACYT y al proyecto: Ref. IN114617 DGAPA-UNAM por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.*



# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Laura Miriam López Recillas. México, CDMX, 2017



# Resumen

---

Hoy en día el ser humano ha desarrollado sistemas que le permiten aumentar su capacidad de manipulación para explorar ambientes remotos que pueden ser complejos, peligrosos o incluso inaccesibles con la finalidad de asegurar su integridad física. Dentro de estos sistemas se encuentra la teleoperación bilateral (local-remoto) que combina las habilidades humanas tales como el razonamiento y la toma de decisiones con las ventajas de la precisión, repetitividad y costo-beneficio de un manipulador. Estos sistemas, idealmente deben proveer la sensación de presencia en el ambiente remoto y la transparencia, mientras, la robustez y el desempeño son requeridas para realizar una tarea dada.

El intercambio de mediciones de posición, velocidad y fuerza, es una capacidad de los sistemas de teleoperación bilateral bajo un canal de comunicación. Sin embargo, dicho canal puede inducir retardos sustanciales entre el comando dado por el operador humano y el momento en que éste es recibido por el robot remoto. Debido a la naturaleza del retardo, la transparencia no se puede lograr ni se garantiza el seguimiento de posición. Por ésta razón, la mayoría de los esquemas de control sólo garantizan regulación de la posición, consenso con líder o sin líder, o la sincronización de un conjunto de robots induciendo trayectorias periódicas de posición.

La mayoría de los enfoques de control se diseñan asumiendo conocida la medición de la velocidad a través de sensores; sin embargo, dicha señal puede estar contaminada con ruido provocando que el desempeño del sistema no sea el deseado. En el presente trabajo, se propone un esquema controlador-observador bajo retardos variantes en el tiempo sin disponer de la medición de las velocidades y sin utilizar el modelo del sistema. Dicho esquema es posible aplicarlo para movimiento libre y restringido. Para el primero, el operador humano mueve el manipulador local y después de un tiempo lo suelta, logrando que ambos manipuladores tiendan a una posición particular resolviendo el problema de consenso. Mientras que, en el segundo, el robot remoto interactúa con una superficie y el operador, que actúa en el robot local, tendrá la sensación de telepresencia. La demostración del esquema propuesto se valida con diferentes experimentos.



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.2. Estado del arte . . . . .	3
1.2.1. Control de posición/fuerza en sistemas teleoperados . . . . .	3
1.3. Contribución . . . . .	5
1.4. Estructura del trabajo . . . . .	5
<b>2. Preliminares matemáticos</b>	<b>7</b>
2.1. Modelo cinemático . . . . .	7
2.1.1. Cinemática directa . . . . .	7
2.1.2. Cinemática inversa . . . . .	9
2.1.3. Cinemática diferencial . . . . .	9
2.2. Modelo dinámico . . . . .	10
2.2.1. Modelo dinámico en movimiento restringido . . . . .	10
2.2.2. Modelo dinámico de un sistema teleoperado . . . . .	11
2.2.3. Propiedades del modelo dinámico . . . . .	11
2.3. Principio de ortogonalización . . . . .	12
<b>3. Diseño del observador y del controlador</b>	<b>15</b>
3.1. Diseño del observador . . . . .	15
3.2. Diseño del controlador . . . . .	16
3.3. Dinámica propuesta del humano . . . . .	17
3.4. Resultado principal . . . . .	17
<b>4. Resultados experimentales</b>	<b>33</b>
4.1. Experimento 1 . . . . .	34
4.1.1. Movimiento libre . . . . .	35
4.1.2. Movimiento restringido . . . . .	41
4.2. Experimento 2. Retardo inducido . . . . .	47

## ÍNDICE GENERAL

---

4.2.1. Movimiento libre . . . . .	48
4.2.2. Movimiento restringido . . . . .	54
4.3. Error cuadrático medio . . . . .	60
<b>5. Conclusiones</b>	<b>65</b>
5.1. Trabajo futuro . . . . .	66
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Sistema de teleoperación bilateral . . . . .	2
2.1. Asignación de marcos de referencia Denavit-Hartenberg . . . . .	8
2.2. Principio de ortogonalización [Pliego Jiménez, 2013] . . . . .	13
4.1. Sistema de teleoperación bilateral con dos <i>Geomagic Touch</i> . . . . .	33
4.2. Retardo variante en el tiempo [s] (—) . . . . .	35
4.3. Movimiento libre. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - - -) [°]. . . . .	36
4.4. Movimiento libre. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - - -) [°]. . . . .	37
4.5. Movimiento libre. Errores de posición [°]. . . . .	38
4.6. Movimiento libre. Errores de observación [°]. . . . .	39
4.7. Movimiento libre. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - - -) [°/s]. . . . .	40
4.8. Movimiento restringido. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - - -) [°]. . . . .	41
4.9. Movimiento restringido. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - - -) [°]. . . . .	42
4.10. Movimiento restringido. Errores de posición [°]. . . . .	43
4.11. Movimiento restringido. Errores de observación [°]. . . . .	44
4.12. Movimiento restringido. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - - -)[°/s]. . . . .	45
4.13. Ambiente virtual (local)(—) vs Ambiente actual (remoto)(- - - -) [m]. . . . .	46
4.14. Retardo variante en el tiempo [s] (—) . . . . .	47
4.15. Movimiento libre. Retardo inducido. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - - -) [°]. . . . .	49
4.16. Movimiento libre. Retardo inducido. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - - -) [°]. . . . .	50
4.17. Movimiento libre. Retardo inducido. Errores de posición [°]. . . . .	51
4.18. Movimiento libre. Retardo inducido. Errores de observación [°]. . . . .	52
4.19. Movimiento libre. Retardo inducido. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - - -) [°/s]. . . . .	53

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.20. Movimiento restringido. Retardo inducido. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - - -) [°]. . . . .	54
4.21. Movimiento restringido. Retardo inducido. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - - -) [°]. . . . .	55
4.22. Movimiento restringido. Retardo inducido. Errores de posición [°]. . . . .	56
4.23. Movimiento restringido. Retardo inducido. Errores de observación [°]. . . . .	57
4.24. Movimiento restringido. Retardo inducido. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - - -) [°/s]. . . . .	58
4.25. Ambiente virtual (local)(—) vs Ambiente actual (remoto)(- - - -) [m]. . . . .	59

## Índice de tablas

---

4.1. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto . . . . .	60
4.2. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local . . . . .	60
4.3. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto después de t = 15s . . . . .	61
4.4. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local después de t = 15s . . . . .	61
4.5. Error cuadrático medio de los errores de observación del robot remoto . . . . .	61
4.6. Error cuadrático medio de los errores de observación del robot local . . . . .	61
4.7. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto con retardo inducido . . . . .	62
4.8. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local con retardo inducido . . . . .	62
4.9. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto con retardo inducido después de t = 11s . . . . .	62
4.10. Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local con retardo inducido después de t = 11s . . . . .	63
4.11. Error cuadrático medio de los errores de observación del robot remoto con retardo inducido . . . . .	63
4.12. Error cuadrático medio de los errores de observación del robot local con retardo inducido . . . . .	63



# Introducción

---

El ser humano, a lo largo de la historia, ha desarrollado herramientas que le permiten aumentar su capacidad de manipulación en diferentes ambientes con el objetivo de preservar su bienestar o facilitar una tarea en específico. Dichas herramientas han ido evolucionando conforme se desarrollan e investigan nuevas tecnologías, logrando el diseño de robots que pueden realizar tareas repetidas, complejas y precisas a un bajo costo.

En sus inicios, los robots solo se encontraban en algunas fábricas, principalmente en la industria automotriz, realizando trabajos simples pero repetitivos con una alta precisión y uniformidad superior al operador humano. Hoy en día es posible encontrar robots que imitan la figura y movimiento del ser humano que tienen como finalidad en su mayoría ayudar al hombre con sus labores, siendo estos robots autónomos. Sin embargo, hay otros que dependen de un operador humano para realizar una tarea en particular. El operador es necesario debido a que el ambiente donde trabaja el robot es desconocido y/o variable. En este punto es donde se concibe la *Teleoperación*, la cual tiene como objetivo operar un robot de forma remota para realizar tareas complejas o peligrosas como una cirugía o la manipulación de materiales radioactivos. El término teleoperación proviene del prefijo *tele* proveniente del griego y significa *a distancia*, por lo tanto *teleoperación* indica operación a distancia.

Un sistema de teleoperación está conformando por cinco elementos esenciales: *operador humano, manipulador local, canal de comunicación, manipulador remoto y un entorno* [Nuño *et al.*, 2011; Shokri-Ghaleh y Alfi, 2014], como se observa en la Figura 1.1. El funcionamiento general de un sistema de teleoperación opera de la siguiente manera: el manipulador denominado remoto reproduce fielmente los movimientos del manipulador local, en el cual está presente un operador humano.

Los objetivos de un sistema de teleoperación bilateral son:

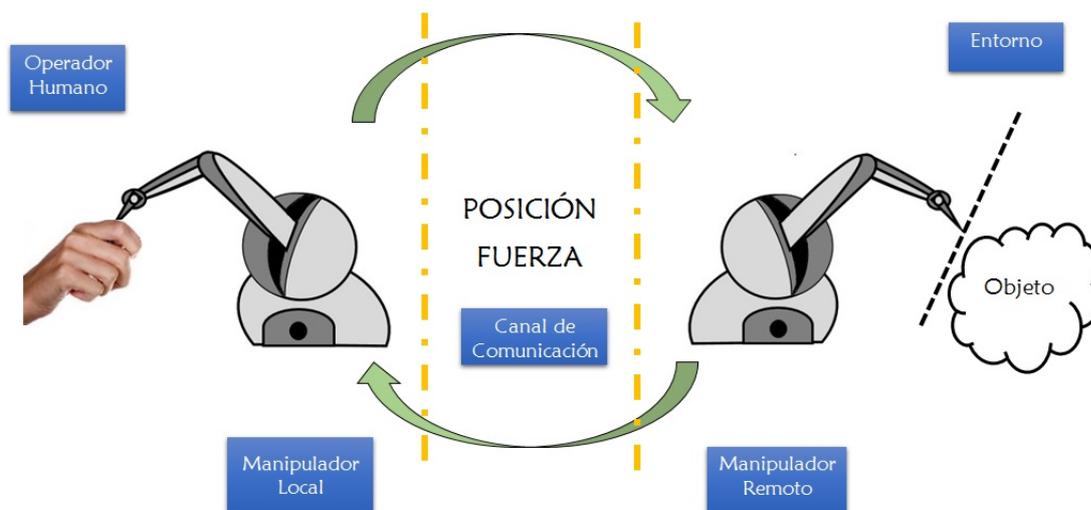
- *Estabilidad*: Mantener la estabilidad del sistema en lazo cerrado independientemente del comportamiento del operador humano o el ambiente [Hokayem y Spong, 2006].
- *Telepresencia*: Proporcionar al humano la sensación de encontrarse físicamente en el

## 1. INTRODUCCIÓN

---

lugar remoto.

La teleoperación puede ser unilateral o bilateral dependiendo de la tarea a realizar. En la teleoperación unilateral, la información viaja en una sola dirección, es decir, por el canal de comunicación se envían señales de posición o fuerza del manipulador local al remoto. En cambio, en la teleoperación bilateral el flujo de información se da en ambos sentidos, es decir, el robot local conoce la posición y/o fuerza del robot remoto y viceversa.



**Figura 1.1:** Sistema de teleoperación bilateral

En los últimos años, los sistemas de teleoperación bilateral local-remoto han tomado gran importancia en diferentes campos como medicina, exploración espacial y ambientes peligrosos. En algunos casos, estos sistemas utilizan sensores de velocidad y fuerza pero esto implica altos costos y la adquisición de señales con ruido. Por ello, surge el interés de utilizar un observador de estados y fuerza que permita reconstruir la velocidad y la fuerza del efector final.

Por otra parte, debido a que las señales son transmitidas a largas distancias se presentan retardos que pueden afectar la estabilidad del sistema y la transparencia, es decir, el manipulador local no experimenta la fuerza que está aplicando el manipulador remoto. El presente trabajo trata sobre esto último e intenta resolver el problema de la estabilidad en sistemas teleoperados en presencia de retardos variables utilizando un control-observador sin modelo dinámico.

### 1.1. Planteamiento del problema

Las leyes de control que se han desarrollado para sistemas teleoperados tienen como objetivo que el efector final del manipulador remoto siga la trayectoria deseada del manipulador local impuesta por un operador humano. Sin embargo, los trabajos que están reportados en la

literatura consideran conocida la dinámica de los manipuladores y suponen que la medición de las velocidad está disponible. El problema a resolver en este trabajo es controlar un sistema de teleoperación bilateral local-remoto con retardos variantes en el tiempo sin utilizar el modelo dinámico del manipulador. El esquema de control propuesto asume que las velocidades no están disponibles por lo cual se diseña un observador de velocidad. La estabilidad del sistema en lazo cerrado debe garantizarse por medio de un análisis matemático.

Existe una variedad de aplicaciones relacionados con este problema. Como ejemplos se mencionan:

- Exploración espacial
- Construcción de instalaciones submarinas
- Aplicaciones militares
- Cirugía medica

## **1.2. Estado del arte**

Para comprender el problema a realizar, es importante mencionar algunas contribuciones relevantes que se han realizado en el control de posición/fuerza en los sistemas de teleoperación bilateral.

### **1.2.1. Control de posición/fuerza en sistemas teleoperados**

El control de un robot tiene tres objetivos fundamentales: control de movimiento (seguimiento o regulación), control de la fuerza ejercida en un entorno, o el control en conjunto de movimiento y fuerza [Suárez, 2000]. En Vukobratovic [2009] y Suárez [2000] es posible encontrar una diversidad de esquemas de control de posición/fuerza que se han aplicado en los robots. A pesar de la amplia gama de esquema de control de posición/fuerza estos se pueden clasificar en dos categorías: el control de fuerza directo y el control de fuerza indirecto [Siciliano y Villani, 1999]. En el primer caso se establece una retroalimentación de fuerza que permite llevar a ésta a un valor deseado y en el segundo la interacción con el medio es generada mediante el control de movimiento del manipulador [Gutiérrez Giles *et al.*, 2016]. El control de posición/fuerza normalmente, requiere de un sensor que se coloca en el efector final, sin embargo, esto implica un costo. Por lo cual, en los últimos años, se ha buscado la eliminación de sensores de fuerza y velocidad como se reporta en el trabajo de Gámez García *et al.* [2007] y Arteaga-Pérez *et al.* [2006].

El problema de control de posición/fuerza en sistemas teleoperados resulta de extrema importancia cuando estos entran en contacto con un entorno ya que las fuerzas que se ejercen deben ser controladas adecuadamente [Gámez García *et al.*, 2007]. El inicio de los sistemas

## 1. INTRODUCCIÓN

---

teleoperados surge en la industria nuclear, debido al alto riesgo de entrar en contacto con elementos radioactivos. En 1947, Raymond Goertz comienza con las primeras investigaciones del desarrollo de un robot a distancia para manipular sustancias radioactivas [Nuño Ortega y Basañez Villaluenga, 2004], y no es hasta 1954 cuando presenta el primer manipulador maestro-esclavo [Goertz y Bevilacqua, 1952] con tecnología electrónica el cual utiliza un control de fuerza retroalimentado que refleja la fuerza de un manipulador teleoperado.

Por otra parte, cuando los sistemas de teleoperación son conectados a través de un canal de comunicación puede haber retardos substanciales en la transmisión de datos ocasionando que el sistema se vuelva inestable y el desempeño sea pobre [Hokayem y Spong, 2006; Shokri-Ghaleh y Alfi, 2014]. Se han propuesto diversos esquemas de control para solucionar dicho problema. Una recopilación de los esquemas de control que se implementaron se encuentran en Sheridan [1993] donde el objetivo es el control supervisado, la interacción humano-máquina y la teleoperación basada en software. En el 2006, Hokayem y Spong [2006] mencionan los algoritmos de control que predominaron a principios de los 90's y analizan la estabilidad de los esquemas de control basados en pasividad en presencia de retardos para sistemas teleoperados. En el 2008, Chopra *et al.* [2008] proponen una ley de control basada en pasividad que garantiza la sincronización de los estados de los manipuladores local/remoto en movimiento libre independientemente del retardo constante. Por otra parte, Nuño *et al.* [2011] organizan once tipos de controladores basados en pasividad para sistemas bilaterales no lineales dentro de tres categorías: 1) *scattering-based*, 2) inyección de amortiguamiento y 3) esquemas adaptables los cuales aseguran la estabilidad asintótica en múltiples situaciones con retardos constantes o variantes. El segundo y tercer grupo aseguran seguimiento de posición mientras el primero solo provee estabilidad independiente del retardo.

Byeong-Yeon y Hyo-Sung [2013] utilizan un control adaptable compuesto para garantizar la convergencia de los estados y los parámetros de los robots local y remoto en presencia de incertidumbres paramétricas tanto en movimiento libre como en movimiento restringido considerando retardos constantes. Sin embargo, los retardos presentes en el canal de comunicación son variantes y hay poca literatura sobre dicho tema. Por ejemplo, Yen-Chen y Seng-Ming [2013] proponen un control adaptable que asegura la estabilidad y la convergencia del error de posición entre el robot local y el remoto considerando retardos variables e incertidumbres dinámicas. Nuño Ortega *et al.* [2014] proponen un control adaptable que asegura la convergencia de los errores y la velocidad a cero en presencia de retardos variables. Además, la mayoría de estos esquemas de control consideran que las velocidades están disponibles y el modelo del sistema es conocido. Pocos trabajos que están reportados en la literatura no consideran lo antes mencionado. Por ejemplo, Arteaga-Pérez *et al.* [2015] diseñan un esquema Controlador-Observador que no requiere del modelo del sistema y estima la velocidad con un observador, dicho esquema garantiza seguimiento de posición y errores de observación acotados. En Sarras *et al.* [2016] utilizan un observador *I&I* para estimar la velocidad pero requiere conocer el modelo del sistema y es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

### **1.3. Contribución**

Se propone un algoritmo controlador-observador para un sistema de teleoperación bilateral local-remoto con la finalidad de resolver el problema de seguimiento de posición en presencia de retardos variantes en el tiempo. Una de las ventajas del algoritmo es que no requiere del conocimiento del modelo dinámico de los manipuladores y dado que solo se tiene disponible la medición de la posición se utiliza un observador para estimar la velocidad. Además se presenta la validación experimental del esquema propuesto.

### **1.4. Estructura del trabajo**

El presente trabajo está compuesto por cinco capítulos. En el Capítulo 1 se presenta un resumen de los esquemas de control que se han aplicado a los sistemas teleoperados. De igual forma se presenta el planteamiento del problema y la aportación del presente trabajo.

En el Capítulo 2 se presentan algunas herramientas matemáticas básicas que se utilizan para el análisis de la estabilidad. También se describe el modelo cinemático y dinámico de un robot manipulador, así como el modelo matemático de un sistema de teleoperación con algunas propiedades importantes.

En el Capítulo 3 se presenta el algoritmo de control-observador en conjunto con el análisis de estabilidad.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados experimentales que validan la teoría del Capítulo 3 y se presenta un análisis del desempeño del algoritmo propuesto.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro.



# Preliminares matemáticos

---

Conocer el modelo matemático de un sistema permite desarrollar, analizar y proponer esquemas de control que puedan resolver un problema en particular. Dicho modelo matemático es una representación aproximada del comportamiento del sistema real.

En este trabajo se considera un sistema de teleoperación bilateral local-remoto de robots rígidos por lo que se explica la obtención del modelo matemático y algunas propiedades importantes que serán de utilidad para el diseño del esquema controlador-observador.

## 2.1. Modelo cinemático

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las fuerzas que lo originan. En esta sección se desarrollan modelos cinemáticos para el movimiento de robots rígidos. La cinemática presentada a continuación, se divide en: *cinemática directa*, *cinemática inversa* y *cinemática diferencial*. La cinemática directa determina la posición y orientación del efector final del robot conociendo los valores de las coordenadas articulares del mismo. La cinemática inversa permite obtener los valores de las articulaciones dada una posición y orientación deseadas. Por último, la cinemática diferencial es la relación entre las velocidades articulares, velocidades lineales y velocidad angular del efector final.

### 2.1.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación final del robot respecto a su base, en función de las coordenadas articulares

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T. \quad (2.1)$$

Un robot de  $n$  grados de libertad tiene  $n + 1$  sistemas coordenados, comenzando con la base (sistema 0). Dichos sistemas coordenados se pueden obtener aplicando el algoritmo de

## 2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

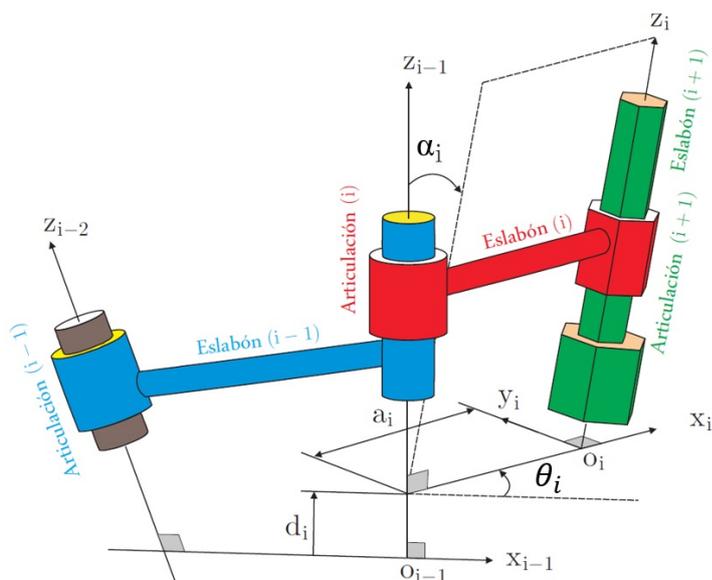
Denavit-Hartenberg [Spong *et al.*, 2006]. En este algoritmo se define una matriz de transformación homogénea  $A_i$  que depende de la variable articular  $q_i$ , la cual es obtenida de cuatro transformaciones básicas, dos de rotación y dos de traslación:

$$A_i(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  $\theta_i$  representa el ángulo entre los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  con respecto a  $z_{i-1}$ , el cual es constante si la articulación es prismática o variable si la articulación es de revolución;  $\alpha_i$  es el ángulo entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  tomando  $x_i$  como eje de giro;  $d_i$  es la distancia entre la intersección del eje  $x_{i-1}$  y  $z_{i-1}$  al sistema  $O_i$  medida sobre  $z_{i-1}$  y  $a_i$  es la distancia entre la intersección del eje  $x_i$  y  $z_{i-1}$  al sistema  $O_i$  medida sobre  $x_i$ , como se muestra en la Figura 2.1. Finalmente, la posición y orientación del efector final puede ser obtenida a partir del cálculo de las  $n$  matrices definidas por (2.2) formando la matriz de transformación homogénea  ${}^0T_n$ .

$${}^0T_n = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \begin{bmatrix} {}^0R_n & {}^0o_n \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde  ${}^0R_n$  y  ${}^0o_n$  expresan la rotación y posición del efector final con respecto a la base, respectivamente.



**Figura 2.1:** Asignación de marcos de referencia Denavit-Hartenberg

### 2.1.2. Cinemática inversa

La cinemática inversa permite calcular las posiciones articulares  $\mathbf{q}$  en términos de la posición y orientación del efector final. Existen diferentes métodos tanto analíticos como numéricos que calculan los ángulos de las articulaciones. No obstante, el problema de la cinemática inversa es más complejo que el de la cinemática directa porque las ecuaciones resultantes son usualmente no lineales y pueden existir múltiples soluciones que dependen de la configuración geométrica del manipulador. Uno de los métodos más empleados para resolver la cinemática inversa es el método geométrico, debido a su relativa sencillez.

### 2.1.3. Cinemática diferencial

La cinemática diferencial relaciona las velocidades lineales  $\dot{\mathbf{p}}_n$  y angulares  $\boldsymbol{\omega}_n$  del efector final (o de cualquier punto sobre el robot) con la velocidad de las articulaciones  $\dot{\mathbf{q}}$  del robot a través de un mapeo descrito por una matriz Jacobiana. Por lo tanto, la cinemática diferencial se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{p}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.4)$$

donde  ${}^0\dot{\mathbf{p}}_n \in \mathbb{R}^3$  y  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$  son las velocidades lineal y angular del efector final, respectivamente, y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es el *Jacobiano geométrico* el cual depende de la configuración del robot y se utiliza cuando cantidades físicas son de interés.

Otra forma de representar la cinemática diferencial es derivando la posición cartesiana

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.5)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  es la velocidad del efector final en coordenadas cartesianas y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es el *Jacobiano analítico*, donde en vez de la velocidad angular del efector final se tiene la velocidad de una representación de la orientación del efector final (ejemplo los ángulos de Euler).

El Jacobiano puede perder uno o más grados de libertad. Cuando esto sucede se dice que existe una singularidad cinemática y es importante conocerla por las siguientes razones:

- Existen configuraciones donde los movimientos del efector final no pueden ser arbitrarios.
- Las ecuaciones de la cinemática inversa pueden tener infinitas soluciones.
- Velocidades acotadas en el espacio cartesiano pueden ocasionar velocidades no acotadas en el espacio articular.

## 2.2. Modelo dinámico

Un modelo dinámico representa la relación que existe entre las fuerzas y el movimiento de un cuerpo. En el caso de un manipulador, su modelo dinámico está dado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que depende del número de articulaciones.

Generalmente, el modelo dinámico de un robot manipulador se obtiene mediante el método de Euler-Lagrange. Éste consiste en obtener el Lagrangiano, el cual está dado por la diferencia de la energía cinética ( $\mathcal{K}$ ) y la energía potencial ( $\mathcal{U}$ ) del robot

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (2.6)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un robot manipulador son

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = \tau, \quad (2.7)$$

donde  $\mathcal{D}$  es la función de disipación de Rayleigh. La ecuación (2.7) se puede escribir de manera compacta como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas;  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y positiva definida;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de Coriolis y pares debido a las fuerzas centrífugas;  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal positiva semidefinida de fricción viscosa;  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales y  $\boldsymbol{\tau}$  es la señal de control aplicada en cada articulación.

### 2.2.1. Modelo dinámico en movimiento restringido

Supóngase que el efector final del manipulador está en contacto con una superficie, la cual está descrita por una función escalar dada por

$$\varphi(\mathbf{q}) = 0, \quad (2.9)$$

donde  $\varphi(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  y  $l$  es el número de restricciones. Éstas se reflejan en la dinámica del sistema como fuerzas que no efectúan trabajo y es posible incluirlas en el modelo dinámico utilizando los multiplicadores de Lagrange, de tal forma que la ecuación (2.7) se convierte en [Murray *et al.*, 1994]

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = \tau + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.10)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ , es el vector de multiplicadores de Lagrange y físicamente representa la fuerza que se aplica en la superficie. Utilizando las ecuaciones (2.9) y (2.10) se obtiene el modelo dinámico del manipulador en movimiento restringido como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})$  es la matriz Jacobiana de la restricción, es decir, es el vector gradiente  $\nabla\varphi(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times l}$  el cual es ortogonal a cualquier superficie, dicho de otra manera, este permite mapear cualquier vector sobre un plano perpendicular a la superficie en el punto de contacto.

### 2.2.2. Modelo dinámico de un sistema teleoperado

Considere un sistema formado por dos manipuladores, local (l) y remoto (r), con  $n$  grados de libertad completamente actuados y en serie, pero no necesariamente la misma configuración cinemática. El modelo dinámico no lineal del robot local está dado por [Nuño Ortega *et al.*, 2014]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{g}(\mathbf{q}_l) = \boldsymbol{\tau}_l - \boldsymbol{\tau}_h, \quad (2.12)$$

mientras el modelo dinámico no lineal del robot remoto está dado por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}_r) = \boldsymbol{\tau}_e - \boldsymbol{\tau}_r, \quad (2.13)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas que actúa en las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^n$  representa la fuerza aplicada por el humano,  $\boldsymbol{\tau}_e \in \mathbb{R}^n$  representa la interacción con el ambiente. El subíndice  $i = l, r$  hace referencia al robot local y remoto, respectivamente.

### 2.2.3. Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico de la ecuación (2.8) presenta algunas propiedades útiles para el análisis y diseño de controladores [Arteaga-Pérez, 1998]. Las propiedades más importantes son:

**Propiedad 2.2.1** *La matriz de inercia  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  es simétrica positiva definida y cumple*

$$\lambda_{hi}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{x} \leq \lambda_{Hi}\|\mathbf{x}\|^2 \forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

además

$0 \leq \lambda_{Hi} \leq \infty$ , con  $\lambda_{hi} \triangleq \min_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$ ,  $\lambda_{Hi} \triangleq \max_{\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$ , donde  $\lambda_{hi}$

y  $\lambda_{H_i}$  representan los valores propios mínimo y máximo de  $\mathbf{H}_i(q_i)$ , respectivamente.  $\triangle$

**Propiedad 2.2.2** Con una definición adecuada de la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , la matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica, es decir, se satisface

$$\mathbf{x}^T \left( \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

$\triangle$

**Propiedad 2.2.3** El vector del par gravitacional es calculado como  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \frac{\partial U_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}$  donde  $U_i(\mathbf{q}_i)$  es la energía potencial del manipulador.  $\triangle$

### 2.3. Principio de ortogonalización

El principio de ortogonalización es una extensión del control híbrido de posición/fuerza para manipuladores bajo restricciones geométricas propuesto por Arimoto *et al.* [1993]. Este principio permite descomponer la tarea de control en dos subespacios ortogonales lo que facilita el diseño de la ley de control y el análisis de estabilidad. Entonces, cuando el efector final del manipulador entra en contacto con una superficie y se mueve a lo largo de ésta aplicando una fuerza, la velocidad será tangente en el punto de contacto, mientras que la fuerza aplicada es normal a la superficie.

La derivada de (2.9) respecto al tiempo es

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.16)$$

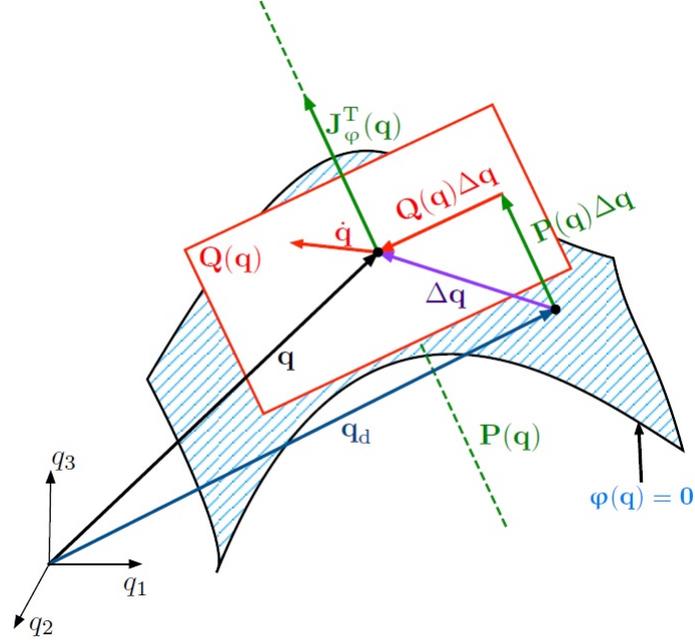
donde el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  pertenece al espacio nulo de la matriz  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  ( $\mathcal{N} \{ \mathbf{J}_\varphi \}(\mathbf{q})$ ), y como se observa en la Figura 2.2,  $\dot{\mathbf{q}}$  está contenida en un plano tangente al punto de contacto, mientras la fuerza es normal al plano tangente por lo que está contenida en el espacio rango de la matriz  $\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})$  ( $\mathcal{R} \{ \mathbf{J}_\varphi^T \}(\mathbf{q})$ ).

Sea la matriz de proyección  $\mathbf{P}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{v} = \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{R} \{ \mathbf{J}_\varphi^T \}$ . Esta matriz puede mapear un vector al plano perpendicular en el punto de contacto y está dada por

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}), \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})$  es la matriz Pseudoinversa de Moore Penrose dada por

$$\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})[\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})]^{-1}. \quad (2.18)$$



**Figura 2.2:** Principio de ortogonalización [Pliego Jiménez, 2013]

Definiendo una nueva matriz de proyección  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{y} = \mathbf{y} \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N}\{\mathbf{J}_\varphi\}$ , la cual mapea un vector del espacio articular al plano tangente a la superficie en el punto de contacto

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}(\mathbf{q}). \quad (2.19)$$

El Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  está contenido en el plano generado por  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ , con lo cual se satisface  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})$ ; además debido a la ortogonalidad de las matrices se tiene  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) = 0$  y  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = 0$ . Con las definiciones anteriores, el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.20)$$

Dado que la velocidad está contenida en el plano tangente  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ , el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  no tiene componente en  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ .



## Diseño del observador y del controlador

---

Este capítulo contiene el diseño y análisis de estabilidad del controlador - observador para el problema de seguimiento de posición de manipuladores rígidos en movimiento libre y restringido bajo retardos variantes en el tiempo a través del canal de comunicación. El diseño propuesto no utiliza el modelo dinámico del manipulador y la velocidad se obtiene utilizando un observador. Los objetivos ideales de un sistema de teleoperación bilateral son: la telepresencia y transparencia; sin embargo, cuando existe un retardo en el canal de comunicación dichos objetivos no se logran. Por otro lado, la robustez y el buen desempeño son características requeridas.

### 3.1. Diseño del observador

Se desea diseñar una ley de control para seguimiento de posición utilizando únicamente la medición de la posición, por lo cual se implementa un observador de velocidad. Además, supóngase que existen retardos en el tiempo impuestos por el canal de comunicación dados por  $T_l \geq 0$  y  $T_r \geq 0$  y que satisfacen lo siguiente.

**Suposición 3.1.1** *Los retardos de tiempo  $T_i(t)$  son variables con cota superior  $\bar{T}_i$ , es decir,  $0 \leq T_i(t) \leq \bar{T}_i < \infty$ , para  $i = l, r$ . Además,  $\dot{T}_i(t)$  está acotada.* △

Se define la trayectoria deseada como

$$\mathbf{q}_{di} \triangleq \mathbf{q}_j(t - T_j(t)), \quad (3.1)$$

donde si  $i = l$ , entonces  $j = r$  y viceversa. Dado que la velocidad no está disponible, considérese la siguiente definición

$$\dot{\mathbf{q}}_{vi} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j(t)), \quad (3.2)$$

donde  $(\hat{\cdot})$  es el valor estimado de  $(\cdot)$ . Por lo tanto, el correspondiente error de observación y seguimiento están definidos como

$$\mathbf{z}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (3.3)$$

y

$$\Delta \mathbf{q}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}. \quad (3.4)$$

Con las definiciones anteriores y basándose en Arteaga-Pérez *et al.* [2006], se propone el siguiente observador de velocidad

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = \mathbf{z}_i \quad (3.5)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \dot{\mathbf{q}}_{vi} - \boldsymbol{\Lambda}_{xi} \Delta \mathbf{q}_i + \mathbf{K}_{di} \boldsymbol{\Lambda}_{zi} \boldsymbol{\xi}_i \quad (3.6)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + \boldsymbol{\Lambda}_{zi} \mathbf{z}_i + \mathbf{K}_{di} \mathbf{z}_i \quad (3.7)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}_{zi}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_{xi}$ ,  $\mathbf{K}_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas.

## 3.2. Diseño del controlador

El esquema de control está basado en Arteaga-Pérez *et al.* [2006], el cual utiliza la velocidad obtenida por el observador dado en la ecuaciones (3.5)-(3.7) con la finalidad de garantizar el seguimiento de posición. Se define

$$\mathbf{s}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{vi} + \boldsymbol{\Lambda}_{xi} \Delta \mathbf{q}_i \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mathbf{K}_{\beta i} \mathbf{s}_i + \text{signo}(\mathbf{s}_i), \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{K}_{\beta i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida y la función signo se define como  $\text{sign}(\mathbf{s}_i) = [\text{sign}(s_{i1}), \dots, \text{sign}(s_{in})]$  con  $s_{ij}$  elementos de  $\mathbf{s}_i$  para  $j = 1, \dots, n$ . Considérense las siguientes variables

$$\dot{\mathbf{q}}_{oi} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \boldsymbol{\Lambda}_{zi} \mathbf{z}_i \quad (3.10)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} = \dot{\mathbf{q}}_{vi} - \boldsymbol{\Lambda}_{xi} \Delta \mathbf{q}_i - \mathbf{K}_{\gamma i} \boldsymbol{\sigma}_i \quad (3.11)$$

$$\mathbf{s}_{oi} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}, \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{K}_{\gamma i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida. La ley de control propuesta para el manipulador local es

$$\boldsymbol{\tau}_1 = -\mathbf{K}_{al} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_1 - \mathbf{K}_{pl} \mathbf{s}_{o1}, \quad (3.13)$$

y para el remoto se tiene

$$\boldsymbol{\tau}_r = \mathbf{K}_{ar} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{K}_{pr} \mathbf{s}_{or} \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{K}_{al}, \mathbf{K}_{ar}, \mathbf{K}_{pl}, \mathbf{K}_{pr} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas.

### 3.3. Dinámica propuesta del humano

**Suposición 3.3.1** *El par inducido por el humano está modelado por una ley de control PD de la forma*

$$\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{K}_{ph}(\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_{hd}) + \mathbf{K}_{vh}(\dot{\mathbf{q}}_l - \dot{\mathbf{q}}_{hd}), \quad (3.15)$$

donde  $\mathbf{K}_{vh}, \mathbf{K}_{ph} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas y  $\mathbf{q}_{hd} \in \mathbb{R}^n$  representa la trayectoria deseada que la persona quiere seguir.  $\triangle$

**Observación 3.3.1** *La Suposición 3.3.1 es una combinación del comportamiento dinámico del humano propuesto en Nuño et al. [2008] y Rodríguez-Ángeles et al. [2015], donde en el primer trabajo se asume que la persona es un sistema pasivo, mientras que en el segundo se asume que la persona se comporta como un PID. Nótese, sin embargo, que debido a la inclusión de  $\dot{\mathbf{q}}_{hd}$  en la ecuación (3.15),  $\boldsymbol{\tau}_h$  no representa un comportamiento pasivo del humano.  $\triangle$*

### 3.4. Resultado principal

El siguiente teorema es el resultado principal del presente trabajo

**Teorema 3.4.1** *Considérese el sistema de teleoperación bilateral (2.12)-(2.13) en lazo cerrado con el observador (3.5)-(3.7). Sea  $i, j = 1, r$ , si, además de la Suposición 3.1.1, el operador humano mueve las articulaciones del robot local lentamente, entonces se cumple lo siguiente:*

- a) *Las ganancias del controlador y del observador siempre pueden ser sintonizadas de tal forma que*
  - i. *Los errores de observación tiendan a cero i. e.,  $\mathbf{z}_i, \dot{\mathbf{z}}_i \rightarrow 0$*
  - ii. *Todos los errores de seguimiento permanecen acotados.*

iii. Cuando  $\tau_h = 0$ , las trayectorias del sistema satisfacen

$$\mathbf{q}_i(t) \approx \mathbf{q}_j(t - T_j(t)) \quad (3.16)$$

iv. Si la posición articular tiende a un valor constante, entonces todos los errores de seguimiento tienden a cero.

v. Para retardos de tiempo constante, se satisface

$$\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{q}_j(t - T_j)$$

b) Si  $\tau_h \neq 0$  y está acotado bajo la Suposición 3.3.1 entonces en lugar de iii., se tiene

vi. Las trayectorias del robot remoto satisfacen

$$\mathbf{q}_r(t) \approx \mathbf{q}_l(t - T_l(t)),$$

mientras los errores de seguimiento en el manipulador local se mantienen sólo acotados.

c) Si  $\tau_h$  no es lo suficientemente grande para sobrepasar el par de entrada  $\tau_l$  en (3.13) cuando el robot local tiende a moverse en la dirección de la restricción impuesta por el ambiente del robot remoto, y

d) Si la fuerza externa  $\tau_e$  es debida al contacto con una superficie rígida y está acotada, entonces

vii. Además de vi., el movimiento del robot local tiende a ser posible únicamente en la dirección permitida por la restricción del lado remoto, es decir, el operador humano tendrá la sensación de telepresencia, pero no de transparencia.

**Observación 3.4.1** Teniendo en iii. que  $\mathbf{q}_i(t) \approx \mathbf{q}_j(t - T_j(t))$  y  $\mathbf{q}_j(t) \approx \mathbf{q}_i(t - T_i(t)) \Rightarrow \mathbf{q}_i(t) \approx \mathbf{q}_i(t - T_j(t) - T_i(t))$  significa que las trayectorias tienden a una señal periódica con periodo  $T_r(t) + T_l(t)$  o a un valor constante, donde se puede garantizar exactamente que

$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_1$ , i. e. el problema de consenso es resuelto. Este objetivo puede ser garantizado con la inyección de amortiguamiento dado por el control.  $\triangle$

**Observación 3.4.2** La Condición c) del Teorema 3.4.1 solo se incluyen para realizar el análisis de estabilidad, pero desde un punto de vista práctico no se utiliza en la implementación del esquema controlador - observador. Realmente, se puede dar por hecho que la fuerza del humano está acotada, y la condición sobre mover lentamente el manipulador es natural para una persona que trata con sistemas que presentan un retardo [Sheridan y Ferrell, 1963].  $\triangle$

**Observación 3.4.3** Nótese que no se emplean mediciones de fuerza en el esquema de control por lo tanto NO se puede garantizar que la fuerza que siente el operador humano cuando trata de mover el manipulador local en la dirección restringida es proporcional a la fuerza aplicada por el robot remoto sobre el entorno real. Además, la Condición d) en el Teorema 3.4.1 significa que la persona no violará la restricción impuesta cuando empuja demasiado fuerte.  $\triangle$

Para demostrar la validez del Teorema 3.4.1, considérese el siguiente teorema auxiliar [Khalil, 2002].

**Teorema 3.4.2** Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contenga el origen y  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0, \quad (3.18)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua positiva definida y  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (3.19)$$

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

---

Entonces, existe una función  $\beta$  de la clase  $\mathcal{KL}$  y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisface

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (3.20)$$

existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisface

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (3.21)$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (3.22)$$

Además, si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (3.21)–(3.22) son válidas para algún estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , sin ninguna restricción sobre cuan grande pueda ser  $\mu$ .  $\triangle$

Defina las siguientes variables

$$\mathbf{s}_{qi} \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{r}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{oi} = \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{\Lambda}_{zi} \mathbf{z}_i. \quad (3.24)$$

Ahora, considere el sistema (2.12) en lazo cerrado con la ley de control (3.13)

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) = -\mathbf{K}_{al} \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{K}_{pl} \mathbf{s}_{ol} - \boldsymbol{\tau}_h. \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.23) y (3.24) en (3.12) se obtiene  $\mathbf{s}_{ol} = \dot{\mathbf{q}}_{ol} - \dot{\mathbf{q}}_{rl} = \mathbf{s}_{ql} - \mathbf{r}_1$  por lo que (3.25) se convierte en

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) = -\mathbf{K}_{al} \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{K}_{pl} (\mathbf{s}_{qi} - \mathbf{r}_1) - \boldsymbol{\tau}_h. \quad (3.26)$$

Despejando  $\dot{\mathbf{q}}_i$  de (3.23) con  $i = 1$  y sustituyendo en (3.26)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{s}}_{ql} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \mathbf{s}_{ql} + \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_{ql} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_1) &= -\mathbf{K}_{al} \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{K}_{pl} (\mathbf{s}_{ql} - \mathbf{r}_1) - \boldsymbol{\tau}_h \\ &\quad - \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_{rl} - \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \dot{\mathbf{q}}_{rl} - \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}_{rl}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Despejando  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1$  de (3.3), (3.23) y sustituyendo en (3.27) se obtiene la dinámica del manipulador en términos de  $\mathbf{s}_{q1}$  y su derivada

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{s}}_{q1} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{s}_{q1} + \mathbf{D}_1\mathbf{s}_{q1} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) &= -\mathbf{K}_{al}(\mathbf{s}_{q1} + \dot{\mathbf{q}}_{r1} - \dot{\mathbf{z}}_1) - \mathbf{K}_{pl}\mathbf{s}_{q1} \\ &+ \mathbf{K}_{pl}\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_{r1} \\ &- \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_{r1} - \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}}_{r1}. \end{aligned}$$

Reagrupando se obtiene

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{s}}_{q1} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{s}_{q1} + \mathbf{K}_{v1}\mathbf{s}_{q1} = \mathbf{K}_{al}\dot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{K}_{pl}\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\tau}_h + \mathbf{y}_{al}, \quad (3.28)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{v1} &\triangleq (\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_{al} + \mathbf{K}_{pl}) \\ \mathbf{y}_{al} &\triangleq -(\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) + \mathbf{K}_{al}\dot{\mathbf{q}}_{r1}). \end{aligned}$$

La dinámica en lazo cerrado del robot remoto se obtiene utilizando las ecuaciones (2.13), (3.14), (3.23) y (3.24), siendo

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\dot{\mathbf{s}}_{qr} + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}_{qr} + \mathbf{K}_{vr}\mathbf{s}_{qr} = \mathbf{K}_{ar}\dot{\mathbf{z}}_r + \mathbf{K}_{pr}\mathbf{r}_r + \boldsymbol{\tau}_e + \mathbf{y}_{ar}. \quad (3.29)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{vr} &\triangleq (\mathbf{D}_r + \mathbf{K}_{ar} + \mathbf{K}_{pr}) \\ \mathbf{y}_{ar} &\triangleq -(\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_{rr} + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_{rr} + \mathbf{D}_r\dot{\mathbf{q}}_{rr} + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) + \mathbf{K}_{ar}\dot{\mathbf{q}}_{rr}). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3.11), el análisis para el observador (3.5)-(3.7) es

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j) - \boldsymbol{\Lambda}_{xi}\Delta\mathbf{q}_i + \mathbf{K}_{di}\boldsymbol{\Lambda}_{zi}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_{zi}\mathbf{z}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{z}_i. \quad (3.30)$$

Derivando la ecuación (3.30), se obtiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i = (1 - \dot{T}_j)\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j) - \boldsymbol{\Lambda}_{xi}\Delta\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}_{di}\boldsymbol{\Lambda}_{zi}\dot{\mathbf{z}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_{zi}\dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{K}_{di}\dot{\mathbf{z}}_i.$$

Sumando y restando  $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i$  se tiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{r}_i + (1 - \dot{T}_j)\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j) - \boldsymbol{\Lambda}_{xi}\Delta\dot{\mathbf{q}}_i \quad (3.31)$$

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

---

Derivando la ecuación (3.23), despejando  $\ddot{\mathbf{q}}_i$  de ésta y sustituyendo en (3.31), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{r}_i + (1 - \dot{T}_j)\ddot{\mathbf{q}}_j(t - T_j) - \mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{s}}_{qi} + (1 - \dot{T}_j)\ddot{\mathbf{q}}_j(t - T_j) \\ - \mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{K}_{\gamma i}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i \end{aligned}$$

Reagrupando términos se llega a la siguiente dinámica del observador en lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{s}}_{qi} - \mathbf{K}_{\gamma i}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i. \quad (3.32)$$

Con lo anterior, el teorema 3.4.1 se demuestra en varios pasos.

1. Asumiendo que  $\tau_h$  está acotada y  $\tau_e = 0$  se define el siguiente estado de error para la dinámica en lazo cerrado dada por (3.28), (3.29) y (3.32).

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ql} \\ \mathbf{s}_{qr} \\ \mathbf{r}_l \\ \mathbf{r}_r \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Además, considérese la siguiente región de trabajo

$$\mathcal{D} \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid \|\mathbf{x}\| \leq x_{max} \}, \quad (3.34)$$

para  $0 < x_{max} < \infty$ . Es posible mostrar que cuando  $\|\mathbf{x}\|$  está acotada por  $x_{max}$ , es decir,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , entonces cualquier señal relacionada con el sistema en lazo cerrado estará acotada, con la posible excepción de la posición angular de  $\mathbf{q}_l$  y  $\mathbf{q}_r$ .

De acuerdo a la definición de la ecuación (3.24),  $\mathbf{z}_l$ ,  $\mathbf{z}_r$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_l$  y  $\dot{\mathbf{z}}_r$  están acotadas en  $\mathcal{D}$ . Ahora, teniendo en cuenta (3.11) y (3.23) se consigue

$$\mathbf{s}_{qi} = \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{vi} + \mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\mathbf{q}_i + \mathbf{K}_{\gamma i}\boldsymbol{\sigma}_i. \quad (3.35)$$

Considerando (3.3) y (3.8), sumando y restando  $\dot{\mathbf{q}}_i$ , (3.35) se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathbf{s}_{qi} - \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{s}_i + \mathbf{K}_{\gamma i}\boldsymbol{\sigma}_i. \quad (3.36)$$

La diferencia entre  $\mathbf{s}_{qi}$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$  está acotada por lo tanto, para demostrar que  $\mathbf{s}_i$  y  $\boldsymbol{\sigma}_i$  están acotadas se emplea el Lema 1 de Arteaga-Pérez *et al.* [2006]. Además por definición  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i$  también lo está.

Por otra parte, para demostrar que  $\boldsymbol{\xi}_i$  está acotada, se toma en cuenta (3.6)-(3.7) junto con (3.8), obteniendo

$$\mathbf{s}_i = (\mathbf{\Lambda}_{zi} + \mathbf{K}_{di})\mathbf{z}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{\Lambda}_{zi}\boldsymbol{\xi}_i. \quad (3.37)$$

Dado que  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{z}_i$  están acotadas, entonces  $\boldsymbol{\xi}_i$  también está acotada.

Lo siguiente es mostrar que las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}_i$  están acotadas. Considérese (2.12) en lazo cerrado con la ley de control (3.13) o (2.13) con (3.14), se tiene

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}_{DVi}\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_{gi}, \quad (3.38)$$

donde  $\mathbf{K}_{DVi} = \mathbf{D}_i + \mathbf{K}_{ai}$  y  $\boldsymbol{\tau}_{gi}$  puede verse como una fuerza de entrada generalizada dada por  $\boldsymbol{\tau}_{gl} = \mathbf{K}_{al}\dot{\mathbf{z}}_l - \mathbf{K}_{pl}(\mathbf{s}_{ql} - \mathbf{r}_l) - \boldsymbol{\tau}_h$  y  $\boldsymbol{\tau}_{gr} = \mathbf{K}_{ar}\dot{\mathbf{z}}_r - \mathbf{K}_{pr}(\mathbf{s}_{qr} - \mathbf{r}_r) + \boldsymbol{\tau}_e$ .

Se define una función positiva definida

$$V_{ai} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + U(\mathbf{q}_i), \quad (3.39)$$

donde por simplicidad se asume que el valor mínimo de  $U(\mathbf{q}_i)$  es cero. Derivando (3.39) a lo largo de (3.38) y utilizando la Propiedad 2, resulta en

$$\dot{V}_{ai} \leq -\dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{K}_{DV}\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{q}}_i^T \boldsymbol{\tau}_{gi}, \quad (3.40)$$

Para garantizar que (3.40) sea negativa, se reagrupa de tal forma que

$$\dot{V}_{ai} \leq -\|\dot{\mathbf{q}}_i\|(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{DV})\|\dot{\mathbf{q}}_i\| - \|\boldsymbol{\tau}_{gi}\|).$$

Como solo nos interesa el comportamiento del sistema en la región  $\mathcal{D}$  y asumiendo que  $\boldsymbol{\tau}_h$  está acotada entonces,  $\boldsymbol{\tau}_{gi}$  también está acotado en  $\mathcal{D}$  ya que se demostró que las variables asociadas a la fuerza de entrada generalizada están acotadas. Por lo tanto se tiene que  $\dot{V}_{ai} \leq 0$  cuando

$$\|\dot{\mathbf{q}}_i\| \geq \frac{\boldsymbol{\tau}_{\max gi}}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{DV})}.$$

donde  $\|\boldsymbol{\tau}_{gi}\| \leq \boldsymbol{\tau}_{\max gi} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ . Esto implica que  $\dot{\mathbf{q}}_i$  está acotada y a su vez  $\ddot{\mathbf{q}}_i$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{vi}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_{oi}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_{oi}$  también están acotadas.

Considérese la derivada de (3.1)

$$\dot{\mathbf{q}}_{di} = (1 - \dot{T}_j(t))\dot{\mathbf{q}}_j(t - T_j(t)). \quad (3.41)$$

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

---

Ahora, tomando en cuenta (3.2), (3.8), restando y sumando  $\dot{\mathbf{q}}_i$  se tiene

$$\mathbf{s}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - (\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i) - \dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j(t)) + \mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\mathbf{q}_i. \quad (3.42)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas (3.42) se puede expresar como

$$\mathbf{s}_i = -\dot{\mathbf{z}}_i + \Delta\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\mathbf{q}_i + \dot{\mathbf{z}}_j(t - T_j(t)) - \dot{T}_j(t)\dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j(t)).$$

o

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\mathbf{q}_i = \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{z}}_i - \dot{\mathbf{z}}_j(t - T_j(t)) + \dot{T}_j(t)\dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j(t)). \quad (3.43)$$

La ecuación (3.43) representa un filtro estable de primer orden para  $\Delta\mathbf{q}_i$  y  $\Delta\dot{\mathbf{q}}_i$  cuya entrada está acotada debido a que  $\dot{T}_j(t)$  está acotado bajo la Suposición 3.1.1. Además, los retardos no afectan la cota de  $\dot{\mathbf{z}}_j(t - T_j(t))$  y  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j(t))$ . Como consecuencia,  $\Delta\mathbf{q}_i$  y  $\Delta\dot{\mathbf{q}}_i$  también están acotadas.

Tomando en cuenta (3.2)-(3.6) se tiene

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t) = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t - T_j(t)) + \mathbf{s}_{ci}(t), \quad (3.44)$$

donde

$$\mathbf{s}_{ci}(t) = -\mathbf{\Lambda}_{xi}\Delta\mathbf{q}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{\Lambda}_{zi}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{\Lambda}_{zi}\mathbf{z}_i + \mathbf{K}_{di}\mathbf{z}_i \quad (3.45)$$

y su derivada está acotada. Al mismo tiempo se tiene

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_j(t) = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t - T_i(t)) + \mathbf{s}_{cj}(t). \quad (3.46)$$

Combinando (3.44) y (3.46) se obtiene

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t) = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t - T_j(t) - T_i(t)) + \mathbf{s}_{cj}(t - T_j(t)) + \mathbf{s}_{ci}(t). \quad (3.47)$$

Derivando (3.47), se llega a

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t) = & (1 - \dot{T}_i(t) - \dot{T}_j(t))\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t - T_i(t) - T_j(t)) \\ & + (1 - \dot{T}_j(t))\dot{\mathbf{s}}_{cj}(t - T_j(t)) + \dot{\mathbf{s}}_{ci}(t). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dado que  $\dot{\mathbf{s}}_{cj}(t - T_j(t))$  y  $\dot{\mathbf{s}}_{ci}(t)$  están acotadas y tomando en cuenta la Suposición 3.1.1, es posible concluir que  $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t)$  está acotada ya que el retardo no afecta a la cota. Además, considerando (3.2) y (3.11) se sabe que  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}(t)$  está acotada. Por consiguiente, esto implica que  $\mathbf{y}_{ai}$  está acotada, y por lo tanto  $\dot{\mathbf{s}}_{qi}$  en (3.23) también lo está. Por otra parte,  $\dot{\mathbf{r}}_i$  en (3.32) debe estar acotada, así como  $\dot{\mathbf{z}}_i$ .

2. Lo siguiente es mostrar que se pueden sintonizar las ganancias de tal forma que el estado  $\mathbf{x}$  esté acotado para todo tiempo, es decir,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \forall t$ , siempre que la condición inicial  $\mathbf{x}(0)$  sea suficientemente pequeña. Para realizar esto, considérese una función cuadrática positiva

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (3.49)$$

con  $\mathbf{M} \triangleq \text{block diag} \{ \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1), \mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r), \mathbf{I}, \mathbf{I} \}$ , la cual satisface la Propiedad 2.2.1

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (3.50)$$

con  $\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{M})$  y  $\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{M})$ . Derivando  $V(\mathbf{x})$  a lo largo de (3.28), (3.29) y (3.32) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = & \mathbf{s}_{\text{ql}}^T [\mathbf{K}_{\text{al}} \dot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{K}_{\text{pl}} \mathbf{r}_1 + \mathbf{y}_{\text{al}} - \boldsymbol{\tau}_{\text{h}} - \mathbf{C}_1 \mathbf{s}_{\text{ql}} - \mathbf{K}_{\text{vl}} \mathbf{s}_{\text{ql}}] \\ & + \mathbf{s}_{\text{qr}}^T [\mathbf{K}_{\text{ar}} \dot{\mathbf{z}}_r + \mathbf{K}_{\text{pr}} \mathbf{r}_r + \mathbf{y}_{\text{ar}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{e}} - \mathbf{C}_r \mathbf{s}_{\text{qr}} - \mathbf{K}_{\text{vr}} \mathbf{s}_{\text{qr}}] \\ & + \mathbf{r}_1^T [\dot{\mathbf{s}}_{\text{ql}} - \mathbf{K}_{\gamma_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \mathbf{K}_{\text{dl}} \mathbf{r}_1] + \mathbf{r}_r^T [\dot{\mathbf{s}}_{\text{qr}} - \mathbf{K}_{\gamma_r} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r - \mathbf{K}_{\text{dr}} \mathbf{r}_r] \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{\text{ql}}^T \dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{s}_{\text{ql}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{\text{qr}}^T \dot{\mathbf{H}}_r(\mathbf{q}_r) \mathbf{s}_{\text{qr}}. \end{aligned}$$

Desarrollando y empleando la Propiedad 2.2.2,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = & \mathbf{s}_{\text{ql}}^T \mathbf{K}_{\text{al}} \dot{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{s}_{\text{ql}}^T \mathbf{K}_{\text{pl}} \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_{\text{ql}}^T \mathbf{y}_{\text{al}} - \mathbf{s}_{\text{ql}}^T \boldsymbol{\tau}_{\text{h}} - \mathbf{s}_{\text{ql}}^T \mathbf{K}_{\text{vl}} \mathbf{s}_{\text{ql}} \\ & + \mathbf{s}_{\text{qr}}^T \mathbf{K}_{\text{ar}} \dot{\mathbf{z}}_r + \mathbf{s}_{\text{qr}} \mathbf{K}_{\text{pr}} \mathbf{r}_r + \mathbf{s}_{\text{qr}}^T \mathbf{y}_{\text{ar}} + \mathbf{s}_{\text{qr}}^T \boldsymbol{\tau}_{\text{e}} - \mathbf{s}_{\text{qr}} \mathbf{K}_{\text{vr}} \mathbf{s}_{\text{qr}} \\ & + \mathbf{r}_1^T \dot{\mathbf{s}}_{\text{ql}} - \mathbf{r}_1^T \mathbf{K}_{\gamma_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \mathbf{r}_1^T \mathbf{K}_{\text{dl}} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_r^T \dot{\mathbf{s}}_{\text{qr}} - \mathbf{r}_r^T \mathbf{K}_{\gamma_r} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r - \mathbf{r}_r^T \mathbf{K}_{\text{dr}} \mathbf{r}_r. \end{aligned}$$

Obteniendo las normas de todas las variables que forman parte del estado, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{vl}}) \|\mathbf{s}_{\text{ql}}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{vr}}) \|\mathbf{s}_{\text{qr}}\|^2 \\ & + \|\mathbf{s}_{\text{ql}}\| (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{al}}) \|\dot{\mathbf{z}}_1\| + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{pl}}) \|\mathbf{r}_1\|) \\ & + \|\mathbf{s}_{\text{ql}}\| \|\mathbf{y}_{\text{al}} - \boldsymbol{\tau}_{\text{h}}\| \\ & + \|\mathbf{s}_{\text{qr}}\| (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{ar}}) \|\dot{\mathbf{z}}_r\| + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\text{pr}}) \|\mathbf{r}_r\|) \\ & + \|\mathbf{s}_{\text{qr}}\| \|\mathbf{y}_{\text{ar}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{e}}\| \\ & - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{dl}}) \|\mathbf{r}_1\|^2 + \|\mathbf{r}_1\| \|\dot{\mathbf{s}}_{\text{ql}} - \mathbf{K}_{\gamma_1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1\| \\ & - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{dr}}) \|\mathbf{r}_r\|^2 + \|\mathbf{r}_r\| \|\dot{\mathbf{s}}_{\text{qr}} - \mathbf{K}_{\gamma_r} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r\|. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dado que el comportamiento de las trayectorias del sistema se analiza exclusivamente cuando  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  entonces, de acuerdo con el Paso 1 de la demostración existen constantes

positivas tales que

$$\alpha_l \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{y}_{al} - \boldsymbol{\tau}_h\| \quad (3.52)$$

$$\alpha_r \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{y}_{ar} + \boldsymbol{\tau}_e\| \quad (3.53)$$

$$a_l \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\dot{\mathbf{s}}_{ql} - \mathbf{K}_{\gamma_l} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_l\| \quad (3.54)$$

$$a_r \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\dot{\mathbf{s}}_{qr} - \mathbf{K}_{\gamma_r} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r\|. \quad (3.55)$$

Además, utilizando la definición (3.24) es posible obtener

$$\|\mathbf{z}_i\| \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_{zi})} \|\mathbf{r}_i\| \quad (3.56)$$

y

$$\|\dot{\mathbf{z}}_i\| \leq \left( \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_{zi})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_{zi})} + 1 \right) \|\mathbf{r}_i\|. \quad (3.57)$$

Ahora, tomando en cuenta (3.52)-(3.57), es posible reescribir  $\dot{V}(\mathbf{x})$  en (3.51) como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vl}) \|\mathbf{s}_{ql}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr}) \|\mathbf{s}_{qr}\|^2 \\ & - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dl}) \|\mathbf{r}_l\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr}) \|\mathbf{r}_r\|^2 \\ & + \beta_l \|\mathbf{s}_{ql}\| \|\mathbf{r}_l\| + \beta_r \|\mathbf{s}_{qr}\| \|\mathbf{r}_r\| \\ & + \beta \|\mathbf{x}\|, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde  $\beta_l$ ,  $\beta_r$  y  $\beta$  están definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \beta_l & \triangleq \left( \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{al}) \left( \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_{zl})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_{zl})} + 1 \right) + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pl}) \right) \\ \beta_r & \triangleq \left( \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{ar}) \left( \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_{zr})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_{zr})} + 1 \right) + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pr}) \right) \\ \beta & \triangleq \alpha_l + \alpha_r + a_l + a_r. \end{aligned}$$

Supóngase que las ganancias son seleccionadas de tal manera que se satisfice

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vl}) \geq 1 + 2\delta \quad (3.59)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr}) \geq 1 + 2\delta \quad (3.60)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dl}) \geq \frac{\beta_l^2}{4} + 2\delta \quad (3.61)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr}) \geq \frac{\beta_r^2}{4} + 2\delta, \quad (3.62)$$

donde  $\delta$  es una constante positiva. Sustituyendo (3.59)-(3.62) en (3.58), es fácil obtener

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2\delta\|\mathbf{x}\|^2 + \beta\|\mathbf{x}\|. \quad (3.63)$$

Definiendo

$$\mu \triangleq \frac{\beta}{\delta}. \quad (3.64)$$

Entonces, cuando  $\|\mathbf{x}\| \geq \mu$  se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta\|\mathbf{x}\|^2 \triangleq -\mathbf{W}_3(\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

Eligiendo  $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_1\|\mathbf{x}\|^2$  y  $\alpha_2(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_2\|\mathbf{x}\|^2$  en (3.50) se puede observar que las condiciones (3.17)-(3.18) pueden cumplirse en  $\mathcal{D}$  mediante la elección apropiada de las ganancias, es decir (3.59)-(3.62). La condición inicial, de acuerdo con (3.21) debe cumplir con

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\max}, \quad (3.66)$$

y de acuerdo a (3.22) el estado final estará acotado por

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \mu \triangleq b_f. \quad (3.67)$$

Observando (3.52)-(3.53) y (3.64) se puede concluir que la cota última  $b_f$  puede ser arbitrariamente pequeña si y solo si  $\tau_h = \tau_e = 0$ . Además, nótese que se debe forzar que  $\mu < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\max}$ .

3. Hasta el momento se ha demostrado que el estado  $\mathbf{x}$  está acotado. Lo subsecuente es mostrar que los errores de observación tienden a cero. Derivando (3.36) y utilizando (3.9) se consigue

$$\dot{\mathbf{s}}_i = -\mathbf{K}_{\gamma_i} (\mathbf{K}_{\beta_i} \mathbf{s}_i + \text{signo}(\mathbf{s}_i)) + \dot{\mathbf{s}}_{qi} - \ddot{\mathbf{z}}_i. \quad (3.68)$$

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

---

Usando (3.68) y el hecho de que  $\dot{s}_{qi} - \ddot{z}_i$  está acotada en  $\mathcal{D}$ , es posible mostrar que  $s_i \equiv 0$  en tiempo finito como se indica en Arteaga-Pérez *et al.* [2006]. Entonces, de (3.37) y considerando que  $s_i \equiv 0$  se obtiene

$$(\mathbf{\Lambda}_{zi} + \mathbf{K}_{di}) \dot{z}_i + \mathbf{K}_{di} \mathbf{\Lambda}_{zi} z_i = 0, \quad (3.69)$$

que representa un filtro lineal estable para  $z_i$  con entrada cero, de modo que  $z_i, \dot{z}_i \rightarrow 0$ .

Por otra parte, tomando en cuenta (3.2), (3.8), restando y sumando  $\dot{q}_i$  y  $\dot{q}_j(t - T_j(t))$  se tiene para  $s_i = 0$

$$\dot{z}_i - \dot{z}_j(t - T_j(t)) = \dot{q}_i - \dot{q}_j(t - T_j(t)) + \mathbf{\Lambda}_{xi} \Delta q_i. \quad (3.70)$$

Ahora, considérese (3.41). Sumando y restando  $\dot{T}_j(t) \dot{q}_j(t - T_j(t))$  se puede obtener

$$\Delta \dot{q}_i + \mathbf{\Lambda}_{xi} \Delta q_i = \dot{z}_i - \dot{z}_j(t - T_j(t)) + \dot{T}_j(t) \dot{q}_j(t - T_j(t)). \quad (3.71)$$

Como se ha mostrado que  $\dot{z}_i, \dot{z}_j(t - T_j(t)) \rightarrow 0$ , entonces cuando el retardo es constante se cumple que  $\Delta \dot{q}_i, \Delta q_i \rightarrow 0$ . Sin embargo, si el retardo es variante en el tiempo, es decir,  $\dot{T}_j \neq 0$  solo se puede garantizar que los errores permanecerán acotados pero  $\Delta q_i$  se puede hacer arbitrariamente pequeño incrementando el valor de  $\mathbf{\Lambda}_{xi}$  lo suficiente. Sin embargo, en la práctica ganancias demasiado altas provocan un mal desempeño.

4. Supóngase que  $\tau_h = \tau_e = 0$ . Dado que los errores de observación son cero y los dos manipuladores están en movimiento libre, cuando el retardo es constante se tiene de (3.71) que  $\Delta q_i \rightarrow 0$  y es fácil mostrar de (3.1) y (3.4) que

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_{dr} = \mathbf{q}_1(t - T_1) = \mathbf{q}_r(t - T_r - T_1) \quad (3.72)$$

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_{dl} = \mathbf{q}_r(t - T_r) = \mathbf{q}_l(t - T_r - T_1), \quad (3.73)$$

lo anterior implica que se ha logrado un ciclo límite. Sin embargo, si la posición tiende a un valor constante  $\mathbf{q}_c$ , entonces se satisface que  $\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{q}_l(t) \equiv \mathbf{q}_c$  y se resuelve el problema de consenso. Por otra parte, si el retardo es variante en el tiempo no es posible llegar a un ciclo límite, pero se cumple todavía (3.16) y siempre es posible lograr el consenso si se introduce suficiente amortiguamiento porque todas las velocidades tienden a cero como se muestra en el Paso 3, lo que garantiza que de acuerdo con (3.71)  $\Delta q_i = 0$  y se puede recuperar (3.72)-(3.73).

5. Supóngase que la dinámica del operador humano puede ser descrita por (3.15), y definiendo el error de seguimiento del humano como  $\Delta \mathbf{q}_h \triangleq \mathbf{q}_l - \mathbf{q}_{hd}$ . Además, definiendo como antes, una variable de deslizamiento dada por  $\mathbf{s}_h \triangleq \Delta \dot{\mathbf{q}}_h + \mathbf{\Lambda}_h \Delta \mathbf{q}_h$ , donde

$\Lambda_h \triangleq K_{vh}^{-1} K_{ph}$ . Considerando las definiciones anteriores, (3.15) se puede reescribir como

$$\tau_h = K_{vh} s_h. \quad (3.74)$$

Uno puede considerar a  $s_h$  como un estado más del sistema en lazo cerrado, cuya dinámica puede ser considerada y dada por

$$H_1(q_1) \dot{s}_h + C_1(\dot{q}_1, q_1) s_h + K_{Dvh} s_h = \tau_1 - y_{ah}, \quad (3.75)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{Dvh} &= K_{vh} + D_1 \\ y_{ah} &= - (H_1(q_1) \ddot{q}_{rh} + C_1(q_1, \dot{q}_1) \dot{q}_{rh} + D_1 \dot{q}_{rh} + g_1(q_1)). \end{aligned}$$

y  $\dot{q}_{rh} = \dot{q}_{hd} - \Lambda_h \Delta \dot{q}_h$ . Además, nótese que  $s_h = \dot{q}_1 - \dot{q}_{rh}$ . Por lo tanto, el nuevo estado en lazo cerrado está dado por

$$y \triangleq \begin{bmatrix} s_{ql} \\ s_{qr} \\ s_h \\ r_l \\ r_r \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

En lugar de la región (3.34) considérese ahora

$$\mathcal{D}_h \triangleq \{ y \in \mathbb{R}^{5n} \mid \|y\| \leq y_{max} \}, \quad (3.77)$$

donde  $y_{max} > 0$ . Entonces, como se ha hecho antes en el Paso 1., es sencillo demostrar que todas las variables de interés están acotadas si  $y \in \mathcal{D}_h$  siempre y cuando se asuma que las velocidades y aceleraciones están acotadas. Es importante notar, que en este caso se puede garantizar que  $q_l$  y  $q_r$  están acotadas ya que  $q_{hd}$  se considera acotada.

6. Para mostrar el acotamiento final de las trayectorias  $y \in \mathcal{D}_h \forall t$ , considérese

$$V_h(y) = \frac{1}{2} y^T N y, \quad (3.78)$$

con  $N \triangleq \text{block diag} \{ H_1(q_1), H_r(q_r), H_1(q_1), I, I \}$ , la cual satisface la Propiedad 2.2.1

$$\lambda_{h1} \|y\|^2 \leq V_h(y) \leq \lambda_{h1} \|y\|^2, \quad (3.79)$$

con  $\lambda_{h1} \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(N)$  y  $\lambda_{h2} \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(N)$ . Recalcando que  $\|s_h\| \leq y_{max}$  y  $\tau_e$  está acotado porque el retardo no afecta la cota de la señal. Entonces, derivando  $V(y)$  a lo largo

### 3. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y DEL CONTROLADOR

---

de (3.28), (3.29), (3.32), (3.75) y empleando la Propiedad 2.2.2 se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_h(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{v1})\|\mathbf{s}_{q1}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr})\|\mathbf{s}_{qr}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{Dvh})\|\mathbf{s}_h\|^2 \\
& - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{d1})\|\mathbf{r}_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr})\|\mathbf{r}_r\|^2 + \beta_1\|\mathbf{s}_{q1}\|\|\mathbf{r}_1\| \\
& + \beta_r\|\mathbf{s}_{qr}\|\|\mathbf{r}_r\| + \|\mathbf{s}_h\|\|\boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{y}_{ah}\| + \|\mathbf{s}_{q1}\|\|\mathbf{y}_{a1} - \boldsymbol{\tau}_h\| \\
& + \|\mathbf{s}_{qr}\|\|\mathbf{y}_{ar} + \boldsymbol{\tau}_e\| + \|\mathbf{r}_1\|\|\dot{\mathbf{s}}_{q1} - \mathbf{K}_{\gamma 1}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1\| \\
& + \|\mathbf{r}_r\|\|\dot{\mathbf{s}}_{qr} - \mathbf{K}_{\gamma r}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_r\|,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

donde  $\beta_1$ ,  $\beta_r$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_r$ ,  $a_1$  y  $a_r$  están definidas como antes pero ahora para la región  $\mathcal{D}_h$ . Además, considérese que existen las siguientes constantes positivas

$$\begin{aligned}
\beta_h & \triangleq \alpha_1 + \alpha_r + \alpha_h + a_1 + a_r \\
\alpha_h & \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_h} \|\boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{y}_{ah}\|,
\end{aligned}$$

por lo tanto  $\dot{V}_h$  se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\dot{V}_h(\mathbf{x}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{v1})\|\mathbf{s}_{q1}\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr})\|\mathbf{s}_{qr}\|^2 \\
& - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{d1})\|\mathbf{r}_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{dr})\|\mathbf{r}_r\|^2 \\
& + \beta_1\|\mathbf{s}_{q1}\|\|\mathbf{r}_1\| + \beta_r\|\mathbf{s}_{qr}\|\|\mathbf{r}_r\| \\
& - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{Dvh})\|\mathbf{s}_h\|^2 + \beta_h\|\mathbf{y}\|.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Supóngase que adicionalmente de (3.59)-(3.62) se tiene

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vh}) \geq 2\delta \tag{3.82}$$

Entonces, es fácil obtener

$$\dot{V}_h(\mathbf{y}) \leq -2\delta\|\mathbf{y}\|^2 + \beta_h\|\mathbf{y}\|. \tag{3.83}$$

Definiendo

$$\mu_h \triangleq \frac{\beta_h}{\delta}, \tag{3.84}$$

entonces, siempre que  $\|\mathbf{y}\| \geq \mu_h$  se tiene

$$\dot{V}_h(\mathbf{y}) \leq -\delta\|\mathbf{y}\|^2 \triangleq -\mathbf{W}_3(\mathbf{y}). \tag{3.85}$$

Eligiendo  $\alpha_1(\|\mathbf{y}\|) = \lambda_{h1}\|\mathbf{y}\|^2$  y  $\alpha_2(\|\mathbf{y}\|) = \lambda_{h2}\|\mathbf{y}\|^2$  en (3.79) se puede observar que las condiciones (3.17)-(3.18) pueden ser cumplidas en  $\mathcal{D}$  mediante la elección apropiada

de las ganancias. La condición inicial, de acuerdo con (3.21) debe cumplir con

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{h1}}{\lambda_{h2}}} y_{\max} \quad (3.86)$$

y de acuerdo a (3.22) el estado final estará finalmente acotado por

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{h2}}{\lambda_{h1}}} \mu_h \triangleq b_{fh} \quad (3.87)$$

Como antes, es posible forzar que  $\mu_h < \sqrt{\frac{\lambda_{h1}}{\lambda_{h2}}} y_{\max}$  si las ganancias son suficientemente grandes. Sin embargo, la cota última  $b_{fh}$  no puede ser arbitrariamente pequeña porque  $\tau_h \neq 0$ . Sin embargo, se sigue cumpliendo  $z_i, \dot{z}_i \rightarrow 0$ .

7. Supóngase que  $\tau_h \neq \mathbf{0}$  y  $\tau_e = \mathbf{0}$  y recuérdese que se ha demostrado que cuando  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_h$  entonces las variables de interés están acotadas con una adecuada selección de ganancias. Sin embargo, haciendo las ganancias arbitrariamente grandes se presenta un conflicto entre las restricciones impuestas, ya sea por el humano o por ambiente, y el movimiento del manipulador. Dado que la cota final ha sido garantizada para el sistema completo en lazo cerrado, un análisis más fino puede ser llevado a cabo de manera separada para el manipulador remoto y el local. Por lo tanto, considérese la dinámica en lazo cerrado dada por (3.28) y defina una función positiva definida

$$V_r(\mathbf{s}_{qr}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_{qr}^T \mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r) \mathbf{s}_{qr}, \quad (3.88)$$

cuya derivada puede ser calculada fácilmente como

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= -\mathbf{s}_{qr}^T \mathbf{K}_{vr} \mathbf{s}_{qr} + \mathbf{s}_{qr}^T \mathbf{K}_{pr} \mathbf{r}_r + \mathbf{s}_{qr}^T \mathbf{y}_{ar} + \mathbf{s}_{qr}^T \mathbf{K}_{ar} \dot{\mathbf{z}}_r \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{vr}) \|\mathbf{s}_{qr}\|^2 + (\beta_r \|\mathbf{r}_r\| + \alpha_r) \|\mathbf{s}_{qr}\|, \end{aligned} \quad (3.89)$$

con  $\alpha_r$  y  $\beta_r$ , definidas anteriormente, para  $\tau_e = 0$ . Nótese que para garantizar el acotamiento final, las condiciones (3.61)-(3.60) y (3.82) deben satisfacerse y  $\|\mathbf{r}_r\|$  tiende a cero como se demostró. De este modo, haciendo uso una vez más del Teorema 3.4.2,  $\|\mathbf{s}_{qr}\|$  puede ser hecha arbitrariamente pequeña sin violar ninguna restricción. Esto permite utilizar la parte de la prueba dada en el Paso 4. con respecto a  $\mathbf{s}_{qr}$ , lo que conduce a la siguiente conclusión

$$\mathbf{q}_r(t) \approx \mathbf{q}_1(t - T_1(t)),$$

Ésto prueba el inciso *vi.* de la Proposición 3.4.1 pero no se puede garantizar que

$$\mathbf{q}_l(t) \approx \mathbf{q}_r(t - T_r(t)),$$

debido a la fuerza aplicada por el operador humano. De hecho, lo único que se puede decir es que los errores de seguimiento para el manipulador local están acotados. Por lo tanto, no se puede afirmar otra cosa sin hacer suposiciones adicionales, como se realiza en el siguiente paso de la demostración.

8. Supóngase que  $\tau_e \neq 0$  y representa la fuerza debido al contacto con una superficie rígida. Esto implica que las coordenadas del remoto están contenidas en un subconjunto  $\mathcal{Q}_r$  de  $\mathbb{R}^n$ , es decir  $\mathbf{q}_r \in \mathcal{Q}_r \subset \mathbb{R}^n$  que representa al ambiente remoto.

El último paso de la demostración depende en gran parte de la suposición sobre el comportamiento que tiene el operador humano, el cual le permite tener cierto grado de sensación de telepresencia. Por esta razón, se debe entender que la ley de control  $\tau_1$  en (3.13) está pensada para lograr que el manipulador local siga al remoto, como se puede apreciar en movimiento libre dado en los Pasos 1-4. Sin embargo, cuando una persona aplica fuerza, el correspondiente par de entrada  $\tau_h$  impide que  $\tau_1$  alcance este objetivo, dependiendo de la magnitud de la fuerza aplicada por el operador. A su vez, es más complicado predecir la trayectoria que el robot local seguirá.

Por otro lado, estableciendo  $\mathbf{K}_{al}$  y  $\mathbf{K}_{pl}$  muy grandes significaría, al mismo tiempo, hacer  $\mathbf{K}_{vl}$  en (3.59) muy grande. Entonces, si el par generado por el operador es demasiado pequeño, este se podría considerar como una perturbación que puede ser compensada. Por el contrario, si las ganancias en  $\tau_1$  son relativamente pequeñas y el operador aplica una fuerza grande, esto provocaría que el manipulador local no tienda a seguir la posición del robot remoto retardada ya que  $\tau_h$  se sobrepondría al efecto de  $\tau_1$ .

Además, si la persona mueve el efector final del manipulador local lentamente como se asume en la Teorema 3.4.1, entonces el robot remoto seguirá la posición retardada local y a su vez el manipulador local seguirá suavemente el movimiento en aquella dirección porque la ley de control tratará de alcanzar dicho objetivo manteniendo los errores de seguimiento pequeños. Por otra parte, cuando el robot remoto toca una superficie rígida, su movimiento está restringido haciendo que los errores de seguimiento sobre el lado del robot local se incrementen en la misma dirección y la acción de  $\tau_1$  incrementará para tratar de disminuir el error. Esto será evidente para el operador humano, y si no empuja lo suficientemente fuerte cuando el robot remoto toca la superficie, entonces el operador será capaz de reconocer ésta, surgiendo la sensación de telepresencia, como se menciona en el inciso *vii.* Sin embargo, el humano no será capaz de sentir que tan fuerte el robot remoto está empujando, por lo cual la transparencia no puede ser alcanzada. Esto concluye la demostración.

## Resultados experimentales

---

En este capítulo se muestran los resultados experimentales del esquema Controlador - Observador propuesto en el Capítulo 3 tanto para movimiento libre como movimiento restringido. El objetivo del primer caso es lograr consenso, es decir, que ambos robots tiendan a la misma posición cuando el operador humano suelta el efector final del robot local. Para el segundo caso, el operador humano mueve el efector final local mientras que el robot remoto entra en contacto con una superficie rígida de tal forma que el operador humano tendrá la sensación de tocar dicha superficie.



**Figura 4.1:** Sistema de teleoperación bilateral con dos *Geomagic Touch*

## 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

Los experimentos se realizaron con dos manipuladores *Geomagic Touch* conectados vía Internet como se muestra en la Figura 4.1. El robot local (L) y el remoto (R) están completamente actuados cada uno con 3 grados de libertad. El algoritmo se implemento en *Matlab/Simulink*. Además, para el envío y recepción de datos entre las computadoras se utilizó el protocolo de comunicación *User Datagram Protocol* (UDP por sus siglas en ingles).

Los robots comienza desde una posición inicial

$$\mathbf{q}_i(0) = \begin{bmatrix} 0 & [^\circ] \\ 90 & [^\circ] \\ 90 & [^\circ] \end{bmatrix},$$

y los resultados experimentales se presentan en dos secciones. La primera parte contiene el comportamiento de movimiento libre y restringido bajo el retardo que genera el canal de comunicación. Mientras que en la última se incrementa el retardo generado por el canal de comunicación para probar la eficiencia del esquema propuesto.

### 4.1. Experimento 1

El valor de las ganancias del esquema controlador - observador se determinaron de manera empírica y se utilizan para movimiento libre y restringido. Considérese  $i = l, r$  las ganancias son

■ Observador

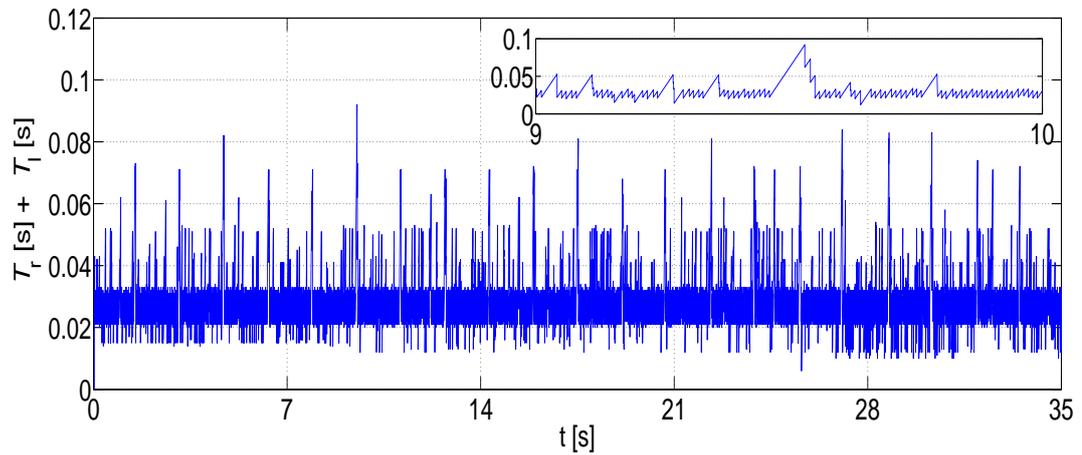
$$\Lambda_{zi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{di} = \begin{bmatrix} 220 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 \\ 0 & 0 & 220 \end{bmatrix} \quad \Lambda_{xi} = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

■ Controlador

$$\mathbf{K}_{pi} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ai} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{\beta i} = \begin{bmatrix} 0.000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000001 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\gamma i} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{bmatrix}$$

El comportamiento y magnitud del retardo variante en el tiempo se obtiene mediante una señal auxiliar que se envía de una computadora a otra y de regreso, como resultado se consigue

la suma del retardo como se muestra en la Figura 4.2. Dicho retardo es similar para movimiento libre y restringido.

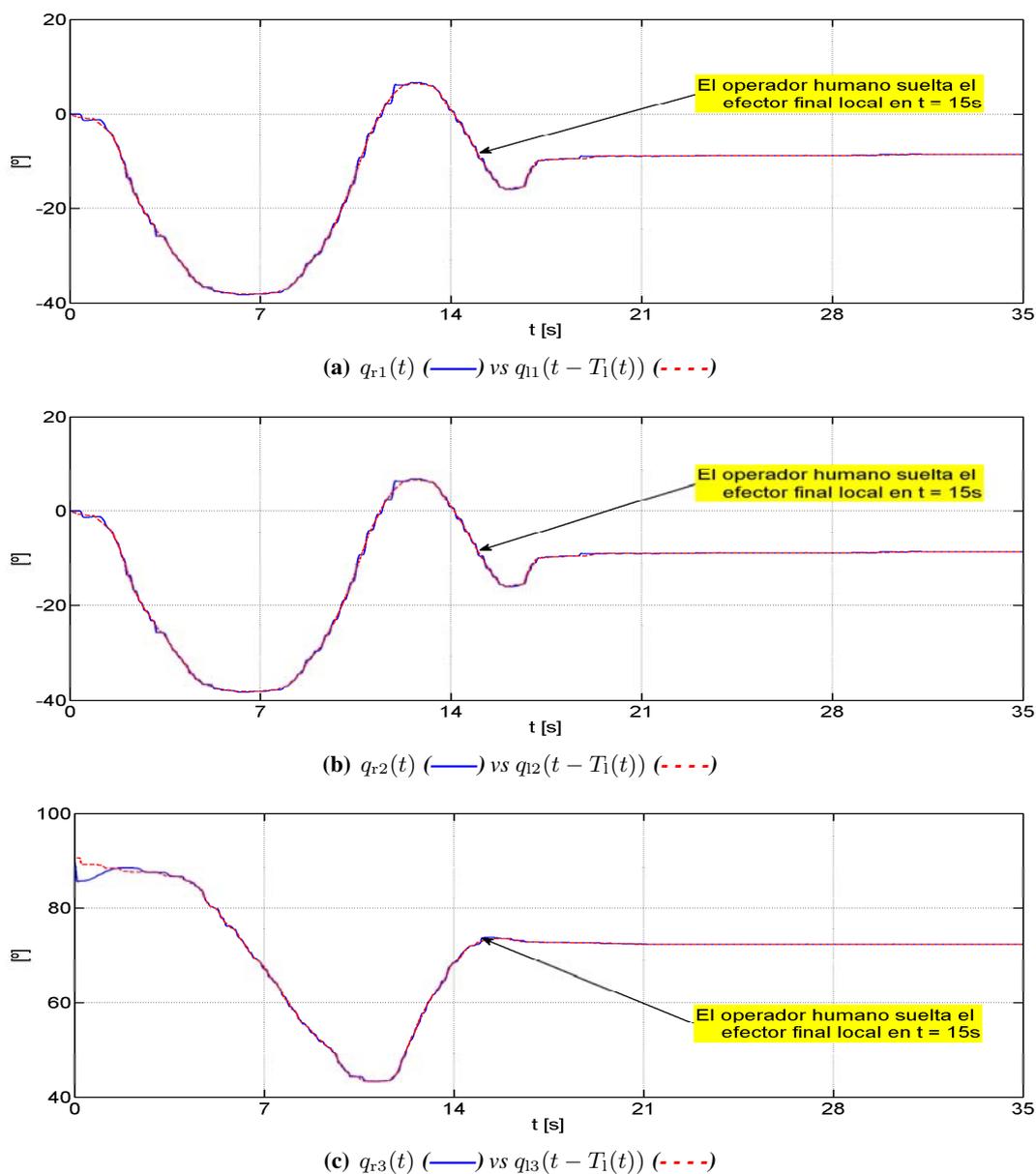


**Figura 4.2:** Retardo variante en el tiempo [s] (—)

#### 4.1.1. Movimiento libre

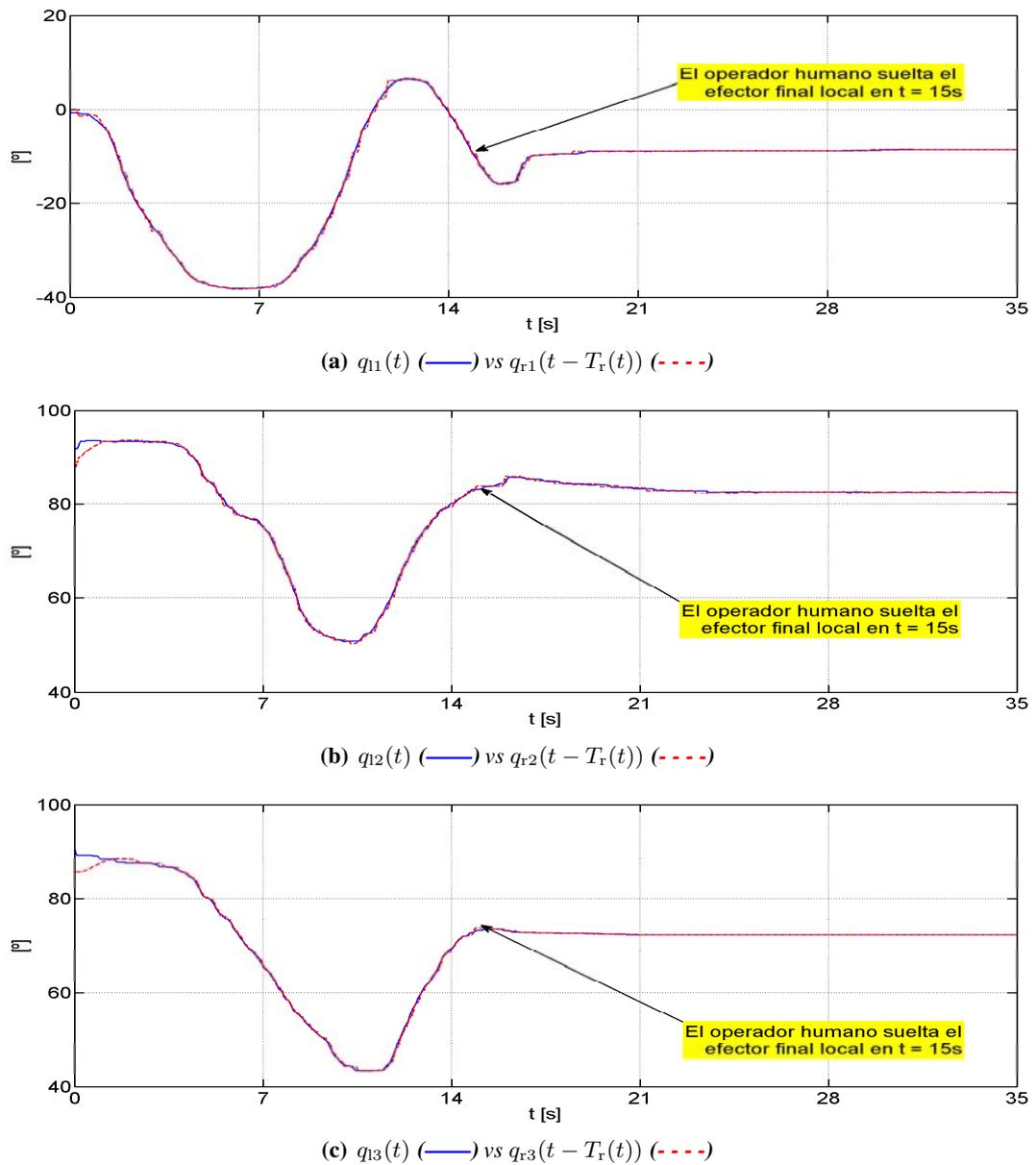
En movimiento libre, el operador humano mueve el efector final del manipulador local y aproximadamente en  $t = 15s$  suelta este; por lo tanto el sistema se vuelve autónomo y los robots tienden a la misma posición.

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



**Figura 4.3:** Movimiento libre. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - -) [°].

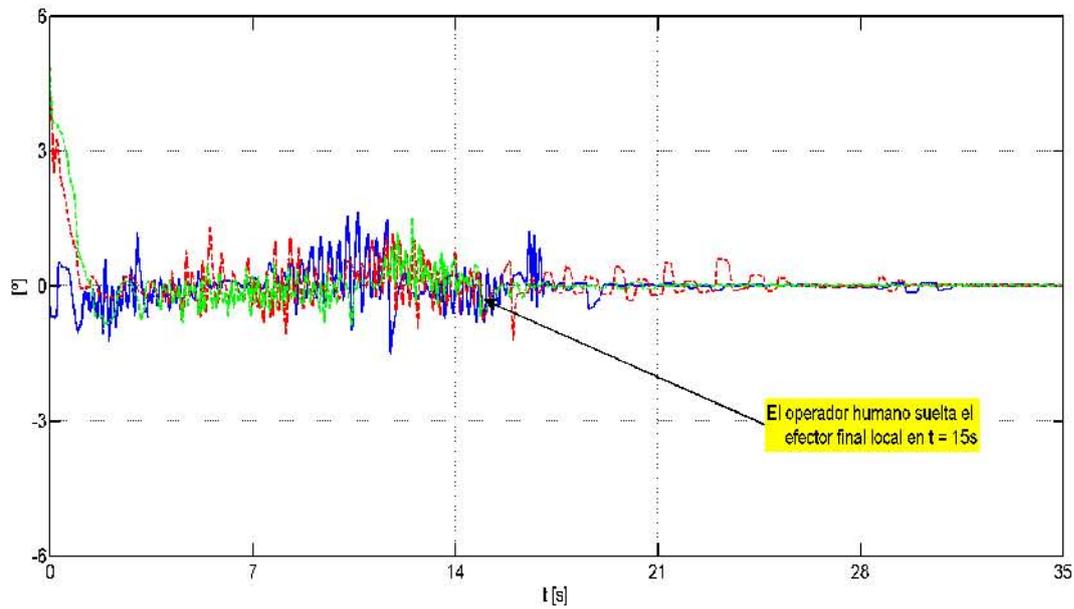
En la Figura 4.3 se muestra la posición del robot remoto vs la posición retardada del robot local, mientras que en la Figura 4.4 se aprecia la posición del manipulador local vs la posición retardada del manipulador remoto. En dichas figuras se puede observar que ambos robots se siguen casi desde un inicio y una vez que el operador humano suelta el efector final local, se llega al consenso de manera casi inmediata.



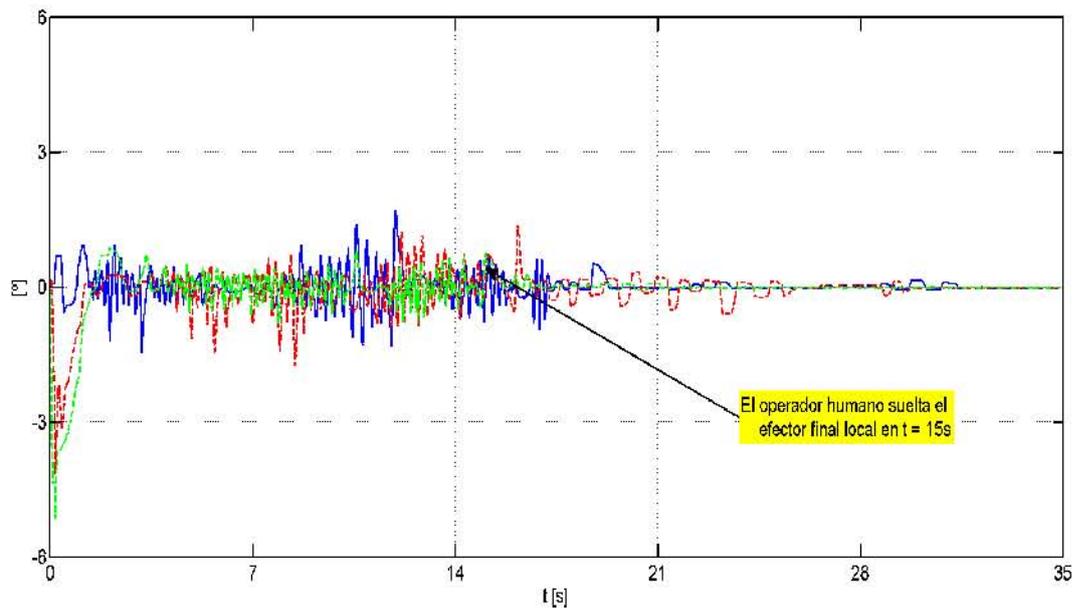
**Figura 4.4:** Movimiento libre. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - -) [°].

Lo anterior se puede apreciar en la Figuras 4.5 y 4.6, donde se muestra que los errores de posición están acotados y al final tienden a cero, mientras los errores de observación son cercanos a cero para todo tiempo.

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

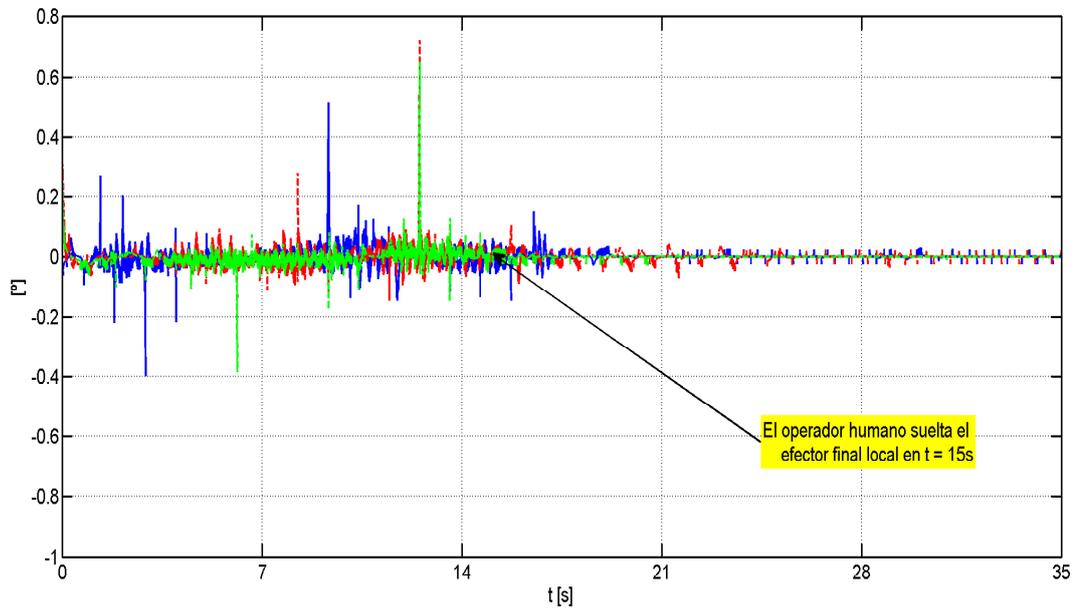
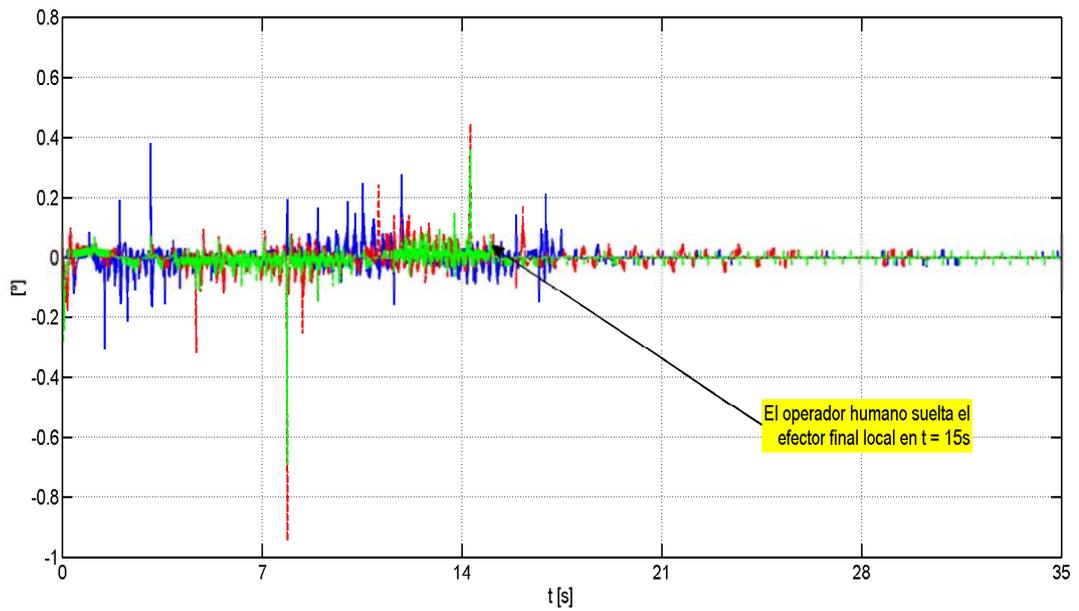


(a)  $\Delta q_{11}$  (—),  $\Delta q_{12}$  (- - -),  $\Delta q_{13}$  (- · - ·)



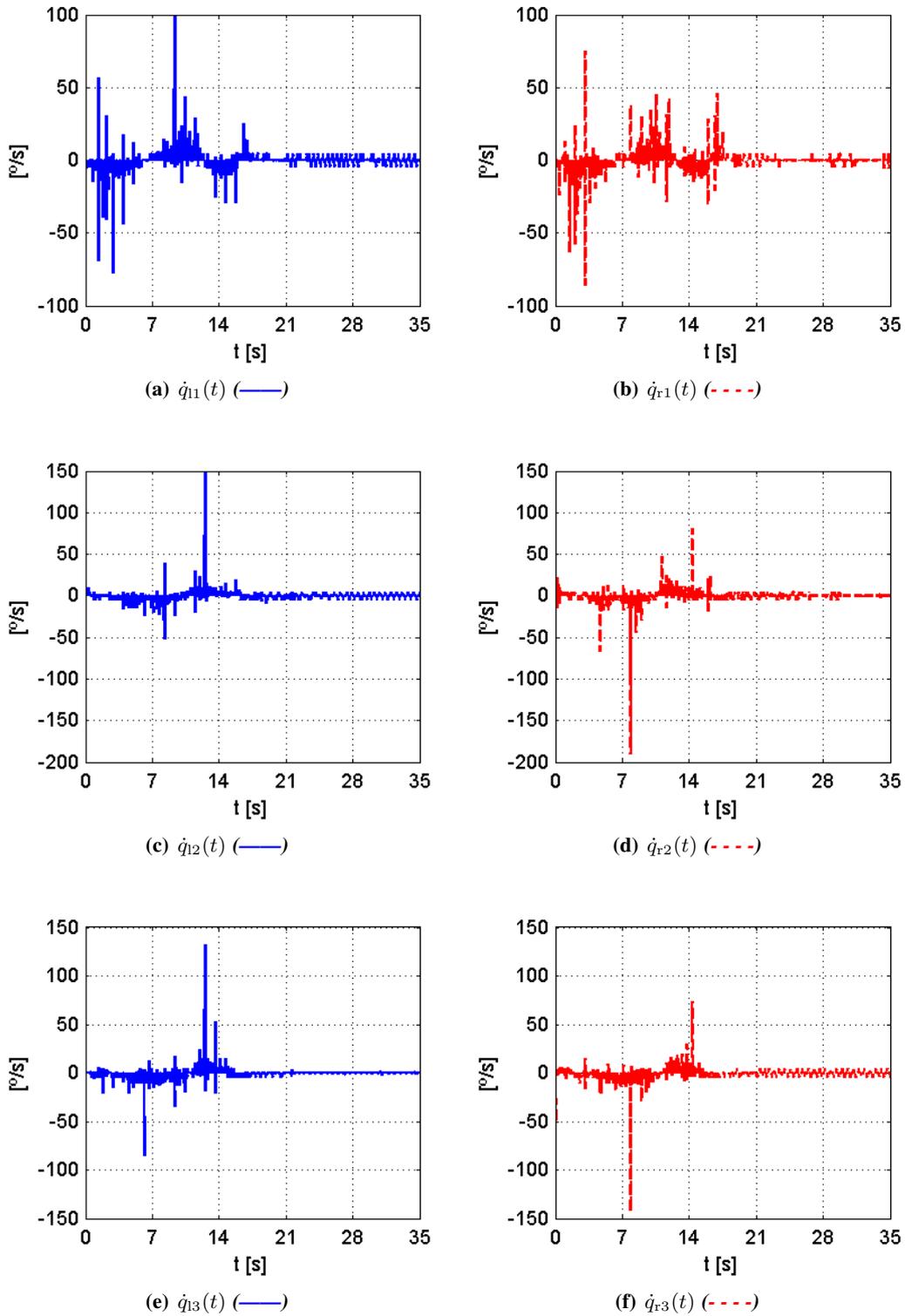
(b)  $\Delta q_{r1}$  (—),  $\Delta q_{r2}$  (- - -),  $\Delta q_{r3}$  (- · - ·)

**Figura 4.5:** Movimiento libre. Errores de posición [°].

(a)  $z_{11}$  (—),  $z_{12}$  (- - -),  $z_{13}$  (- · - ·)(b)  $z_{r1}$  (—),  $z_{r2}$  (- - -),  $z_{r3}$  (- · - ·)**Figura 4.6:** Movimiento libre. Errores de observación [°].

Las velocidades obtenidas por el observador propuesto para cada articulación se muestran en la Figura 4.7 donde también es posible observar que se da el consenso ya que las velocidades son cero, es decir, ambos robots llegan a la misma posición.

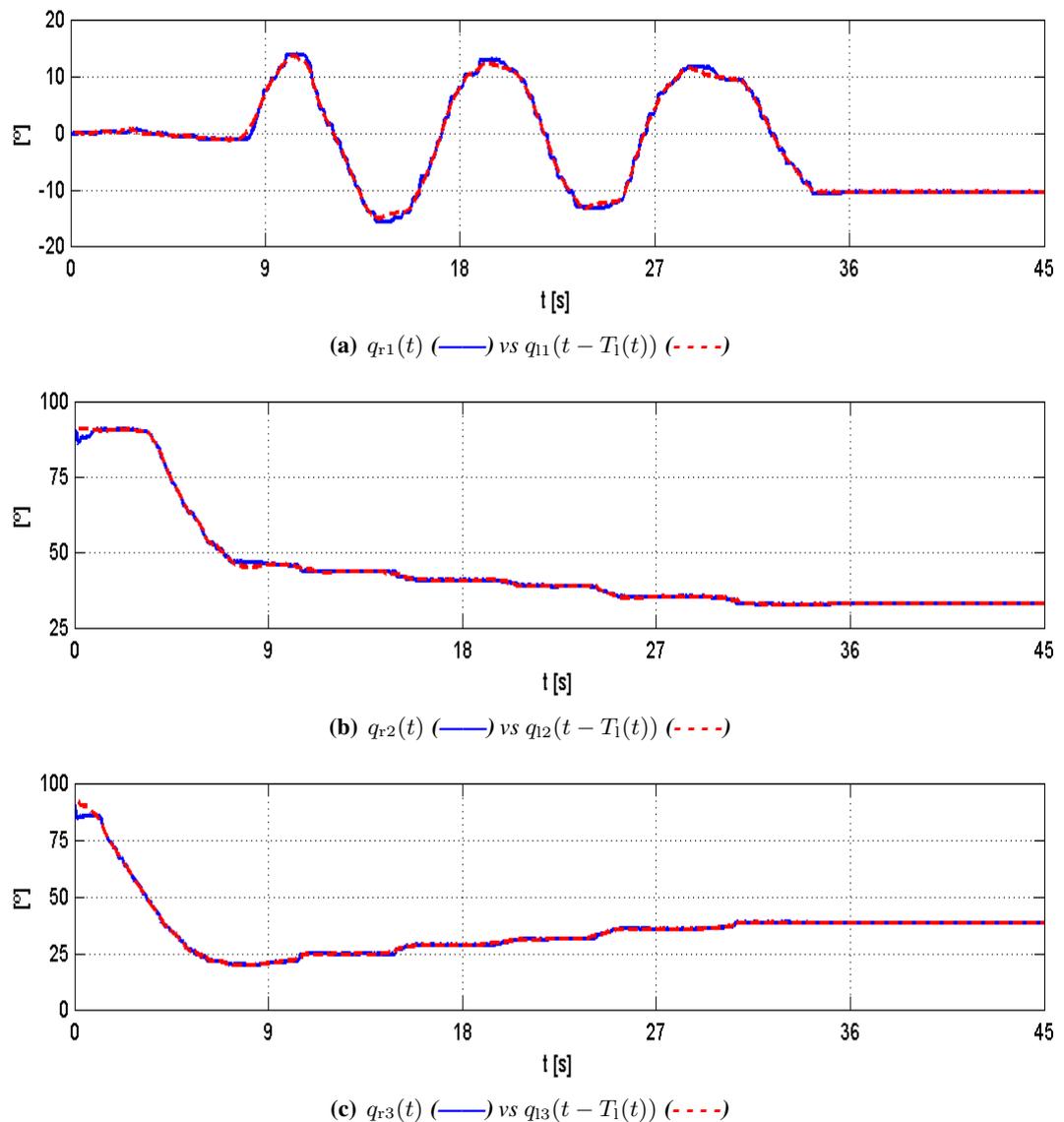
#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



**Figura 4.7:** Movimiento libre. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - -) [ $^{\circ}/s$ ].

### 4.1.2. Movimiento restringido

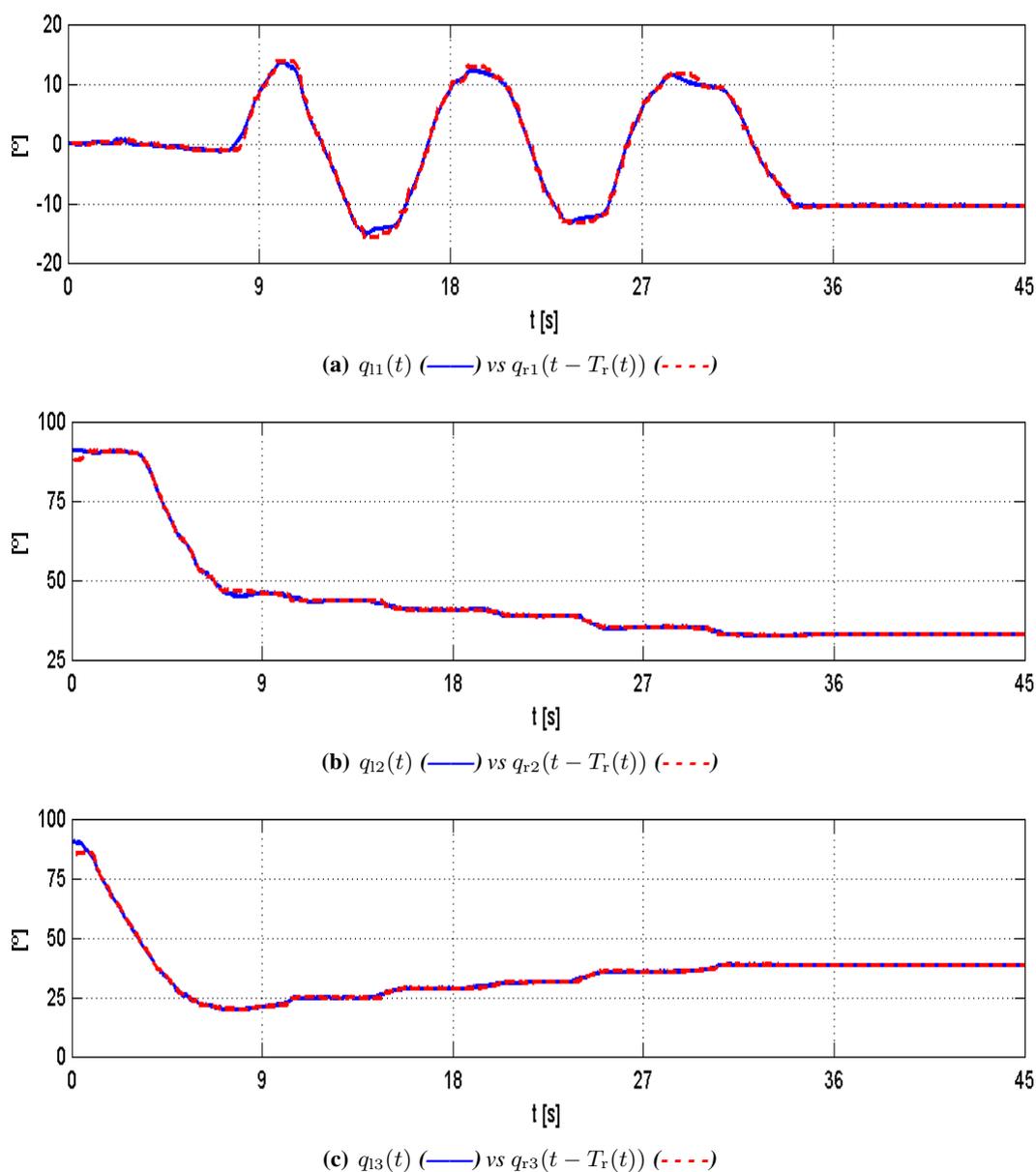
El esquema Controlador-Observador propuesto es válido también para movimiento restringido. En este caso el operador humano mueve el manipulador local hacia abajo hasta que el manipulador remoto entra en contacto con la superficie mostrada en la Figura 4.1. Por lo tanto, el movimiento del manipulador local solo será en aquellas direcciones permitidas y el humano tendrá la sensación de sentir dicha superficie.



**Figura 4.8:** Movimiento restringido. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - -) [°].

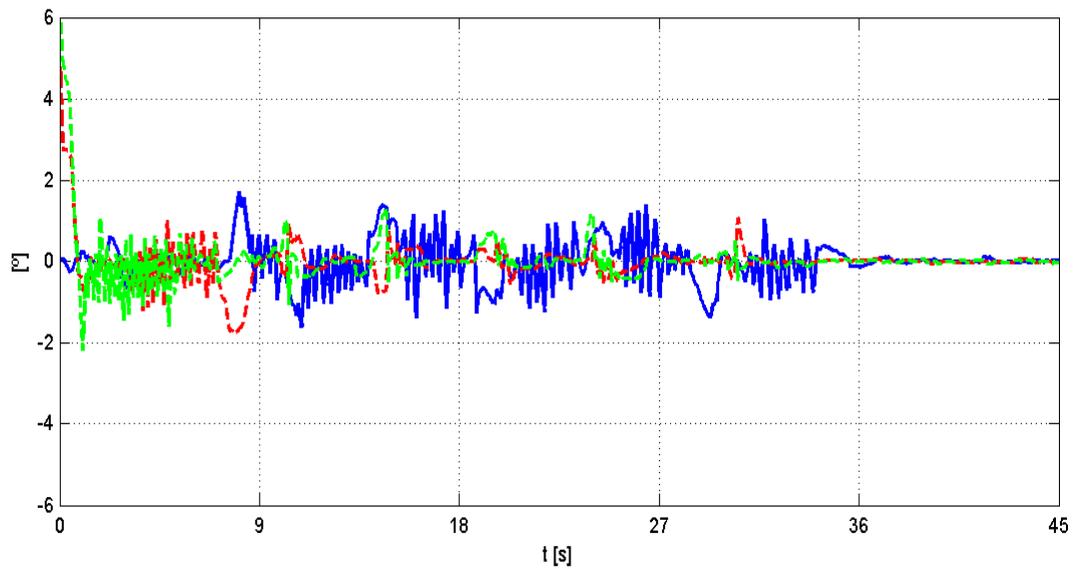
#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En las Figuras 4.8 y 4.9 se pueden observar los perfiles de posición de ambos robots los cuales muestran que se siguen como sucede en movimiento libre. Esto se puede apreciar mejor en la Figura 4.10 donde los errores de posición tienden a cero si el operador humano se queda fijo en un punto sobre la superficie en caso contrario los errores de posición permanecen acotados.

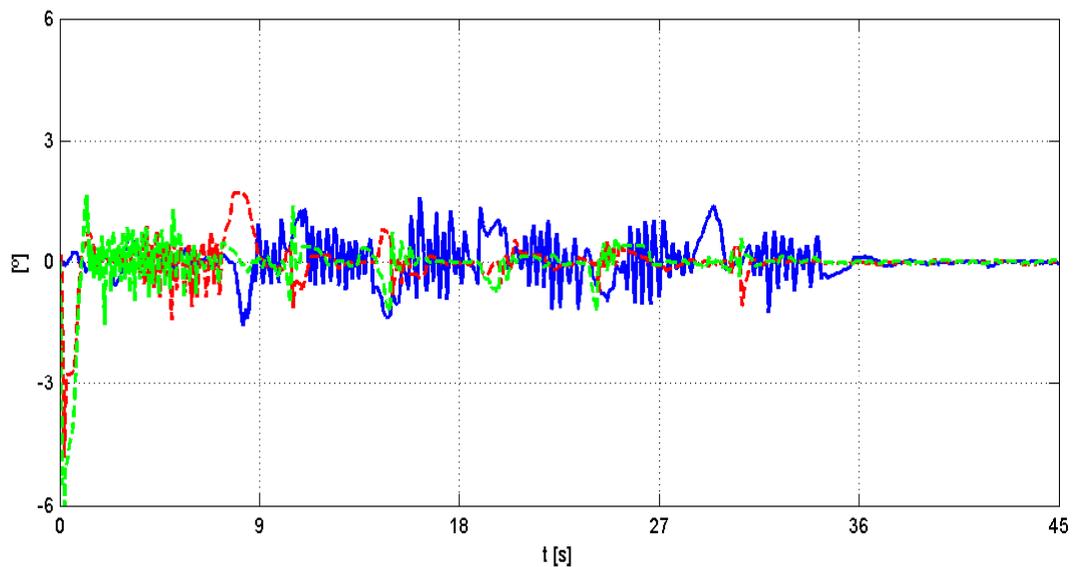


**Figura 4.9:** Movimiento restringido. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - -) [°]

Por otra parte, la Figura 4.11 muestra que los errores de observación son cero para todo tiempo a excepción de algunos picos. Esto muestra que el desempeño del observador es eficiente. El comportamiento del retardo variante en el tiempo es similar al que se muestra en la Figura 4.2.



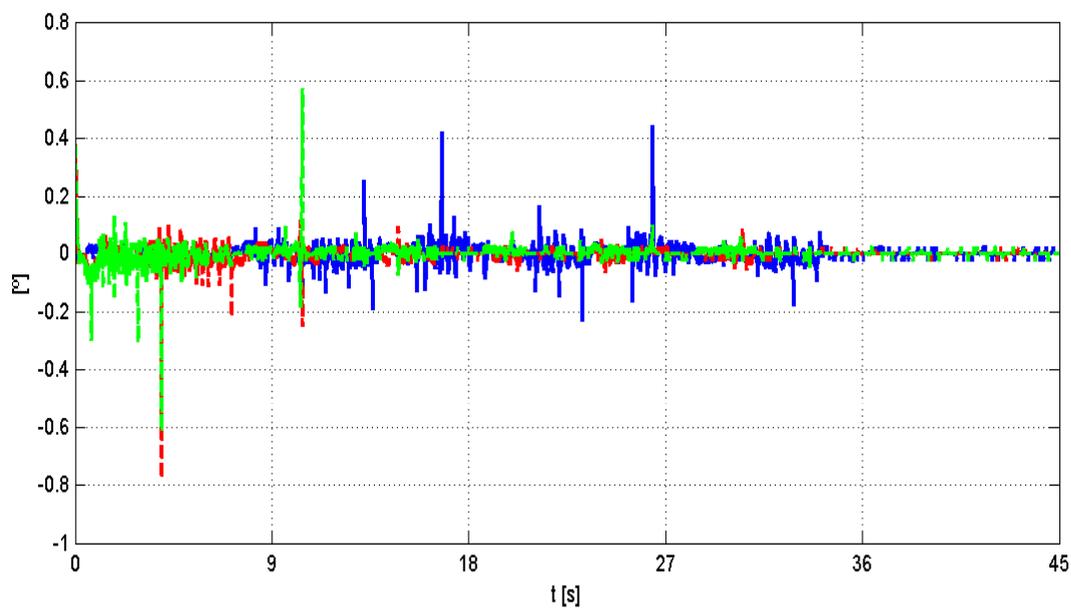
(a)  $\Delta q_{11}$  (—),  $\Delta q_{12}$  (- - -),  $\Delta q_{13}$  (- · - ·)



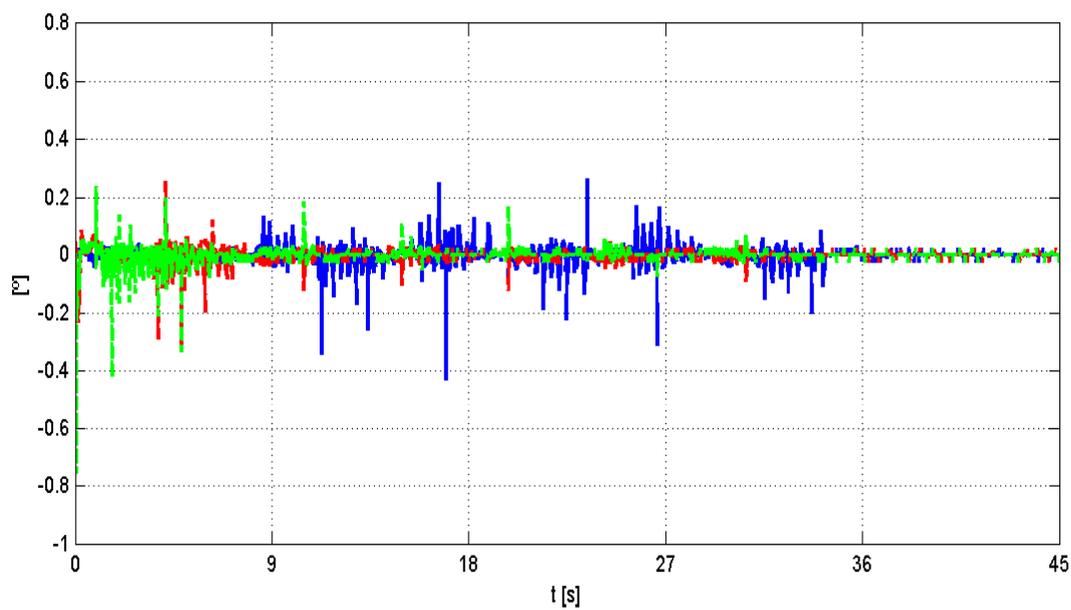
(b)  $\Delta q_{r1}$  (—),  $\Delta q_{r2}$  (- - -),  $\Delta q_{r3}$  (- · - ·)

**Figura 4.10:** Movimiento restringido. Errores de posición [°].

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



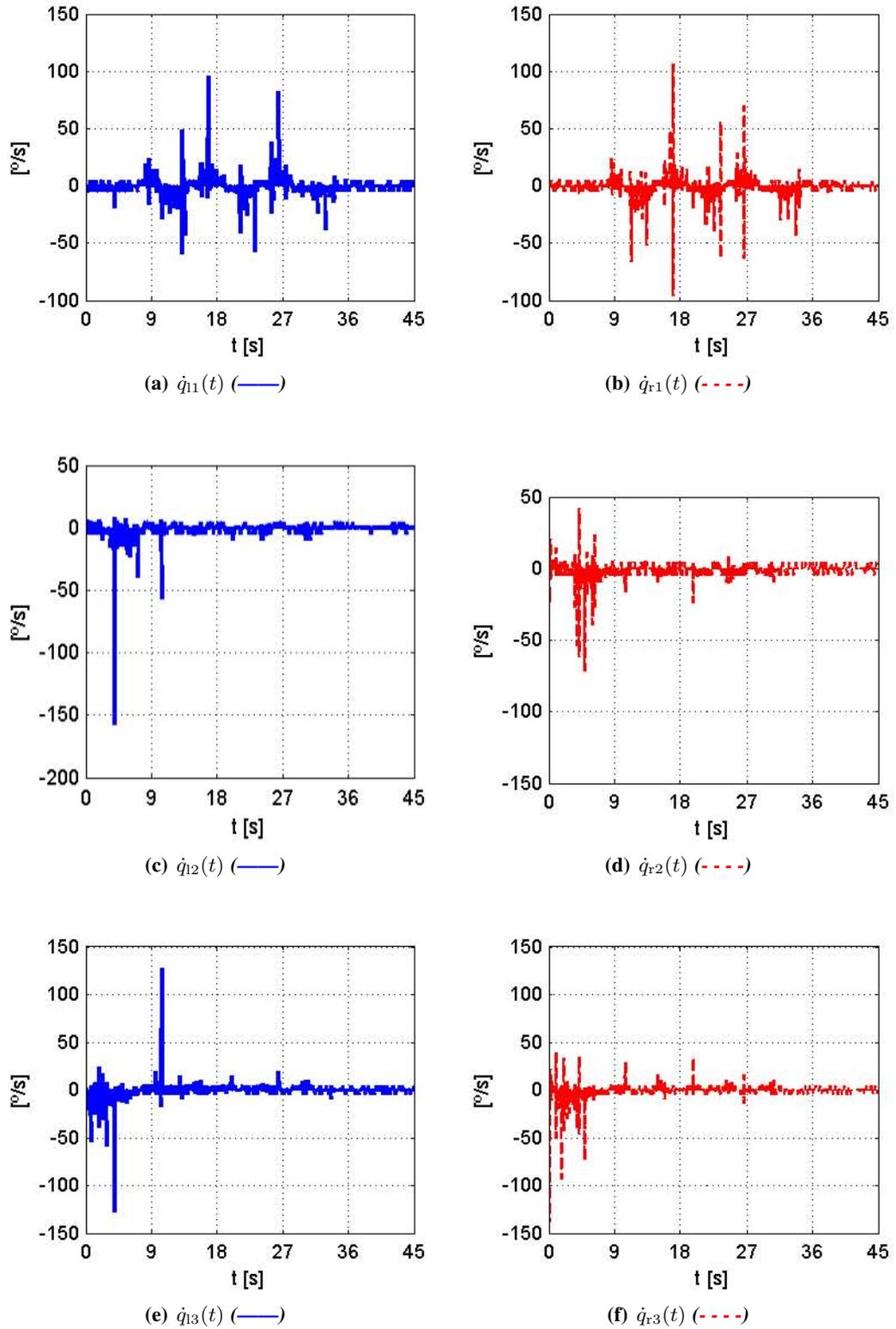
(a)  $z_{11}$  (—),  $z_{12}$  (- - -),  $z_{13}$  (- · -)



(b)  $z_{r1}$  (—),  $z_{r2}$  (- - -),  $z_{r3}$  (- · -)

**Figura 4.11:** Movimiento restringido. Errores de observación [ $^{\circ}$ ].

La Figura 4.12 muestra las velocidades obtenidas por el observador propuesto para movimiento restringido

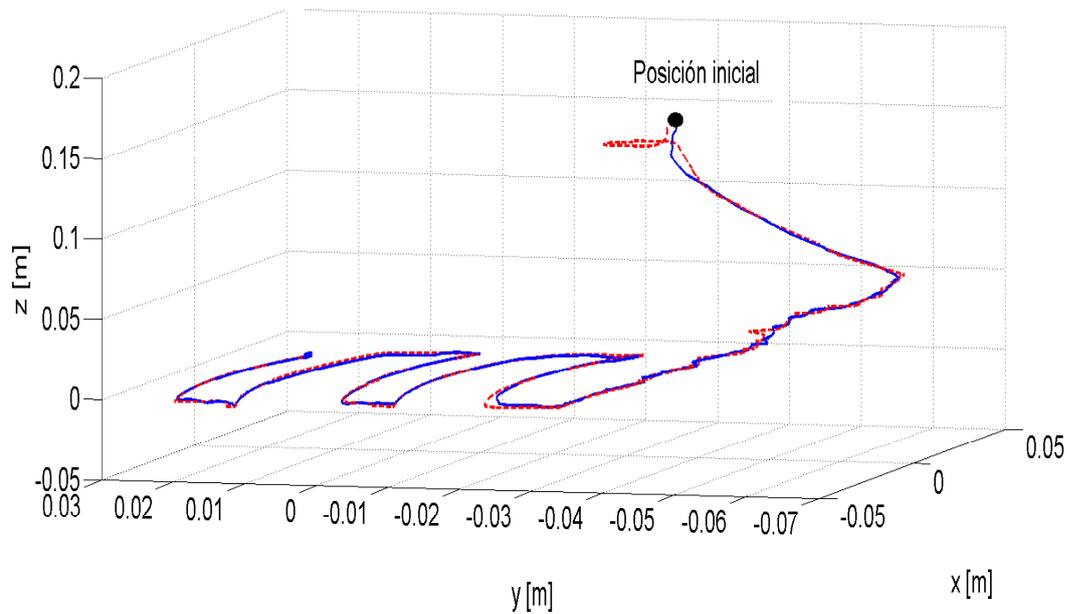


**Figura 4.12:** Movimiento restringido. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - -) [ $^{\circ}/s$ ].

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

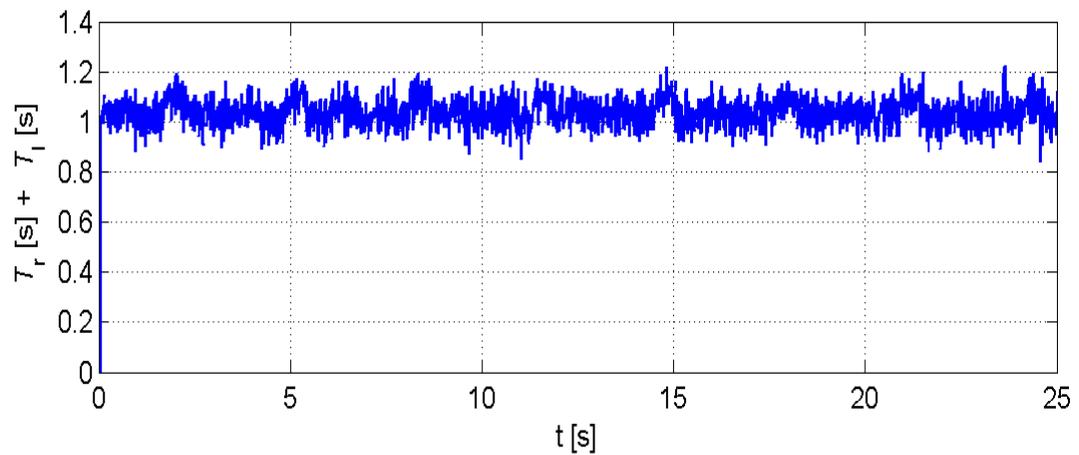
Por último, la Figura 4.13 muestra la superficie que recrea el manipulador local la cual es similar a la restricción física a la que está sujeto el manipulador remoto, con lo cual se demuestra que el humano tiene la sensación de tocar la superficie remota, lográndose la telepresencia pero no transparencia.



**Figura 4.13:** Ambiente virtual (local)(—) vs Ambiente actual (remoto)(- - -) [m].

## 4.2. Experimento 2. Retardo inducido

Como se observa en la Figura 4.2, la suma de los retardo es prácticamente despreciable, por lo que no se puede apreciar correctamente el desempeño del esquema propuesto. Por ello se decidió incrementar de manera artificial los retardos en el canal de comunicación. A continuación se analiza nuevamente el movimiento libre y restringido incrementando el retardo de manera artificial mediante el uso de una distribución normal Gaussiana. La Figura 4.14 muestra la nueva suma del retardo variante en el tiempo, que en comparación con la Figura 4.2 se puede observar que el retardo presenta un incremento considerable.



**Figura 4.14:** Retardo variante en el tiempo [s] (—)

Debido al incremento del retardo el valor de las ganancias se modificó. Por lo tanto, considerando  $i = l, r$  las nuevas ganancias son:

- Observador

$$\Lambda_{zi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K_{di} = \begin{bmatrix} 220 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 \\ 0 & 0 & 220 \end{bmatrix} \quad \Lambda_{xi} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

- Controlador

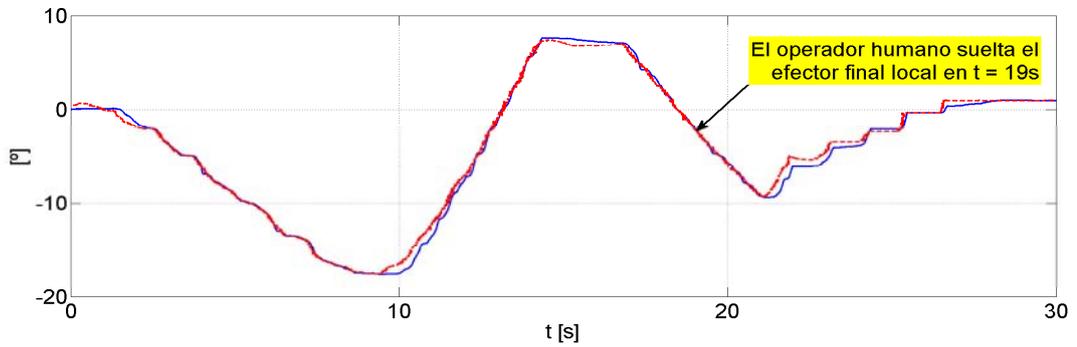
$$\mathbf{K}_{pi} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ai} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\beta i} = \begin{bmatrix} 0.000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000001 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\gamma i} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

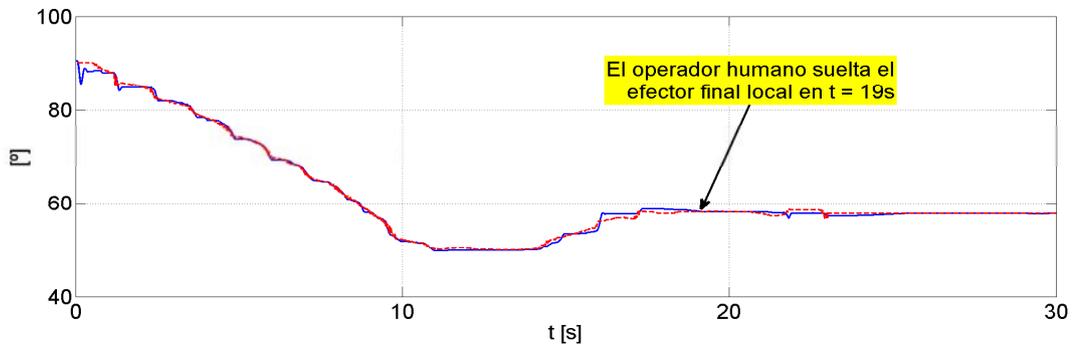
#### 4.2.1. Movimiento libre

En este experimento, el operador humano traza una trayectoria y suelta el efector final aproximadamente en  $t = 11$ s. A pesar del incremento del retardo, se puede observar, en la Figura 4.15, que el manipulador remoto sigue la posición retardada del manipulador local y cuando el operador humano suelta el efector final local se llega a una posición final constante, es decir, se llega a consenso.

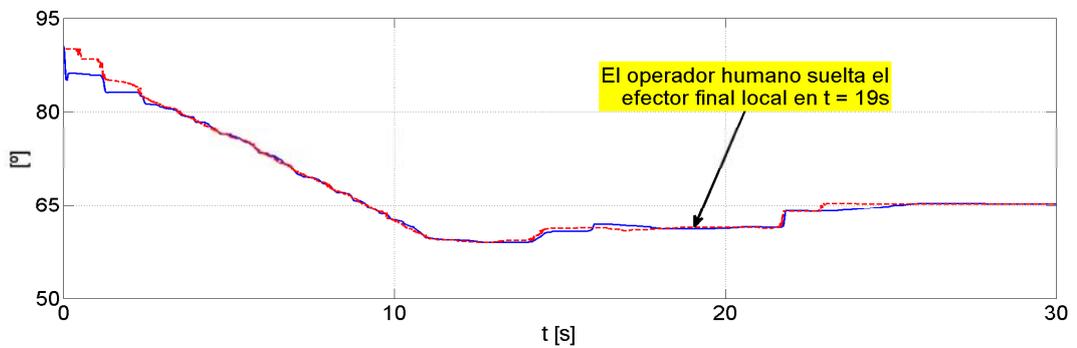
Por otra parte, la Figura 4.16 muestra claramente el efecto del retardo en comparación con la Figura 4.4, y se aprecia que el manipulador local no sigue la posición retardada remota como se menciona en el Teorema 3.4.1. Sin embargo, cuando el operador humano suelta el efector final local, el manipulador local tiende a seguir la posición retardada del remoto y, al final ambos convergen a la misma posición.



(a)  $q_{r1}(t)$  (—) vs  $q_{l1}(t - T_l)$  (- - -)



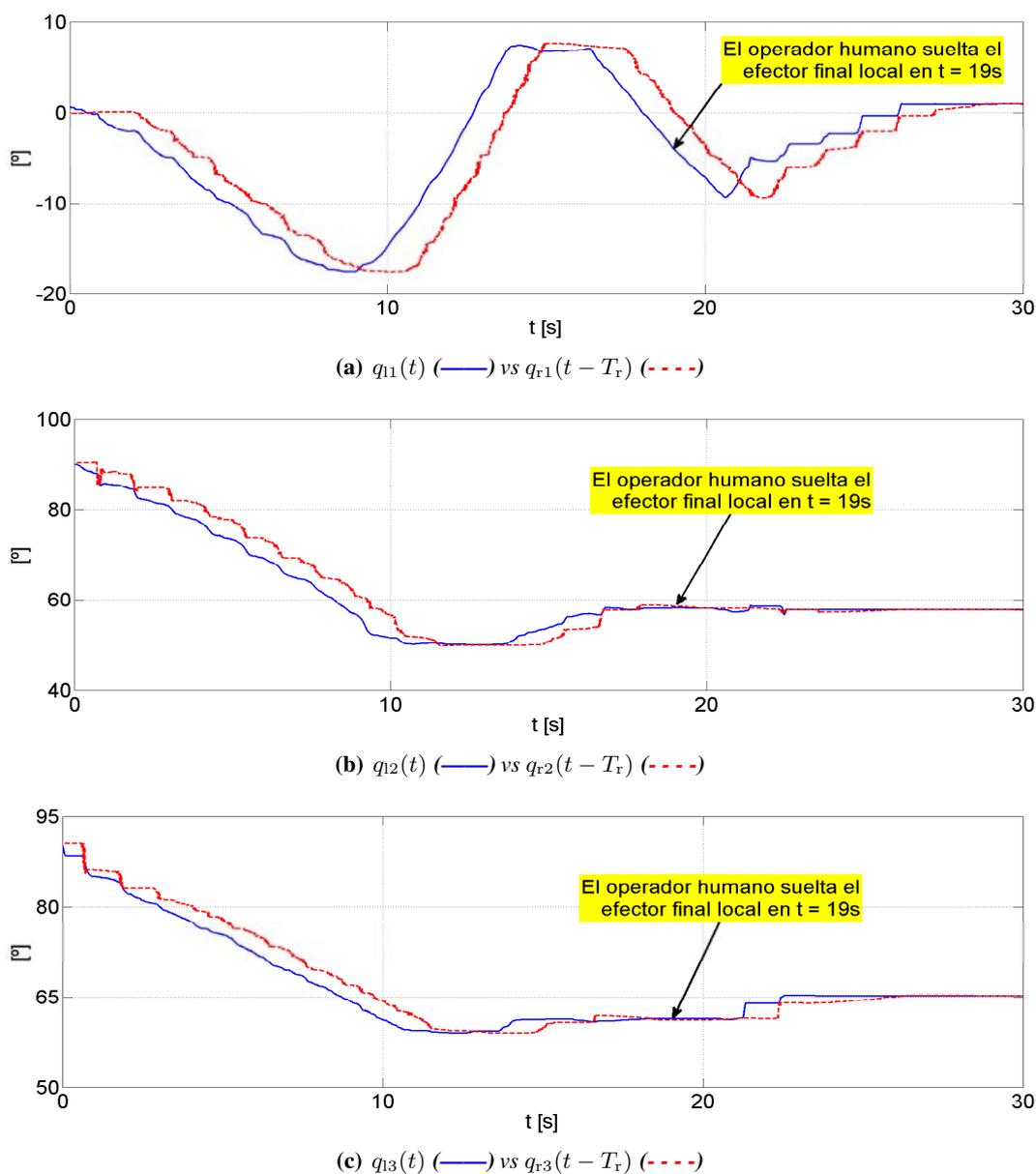
(b)  $q_{r2}(t - T_r)$  (—) vs  $q_{l2}(t)$  (- - -)



(c)  $q_{r3}(t - T_r)$  (—) vs  $q_{l3}(t)$  (- - -)

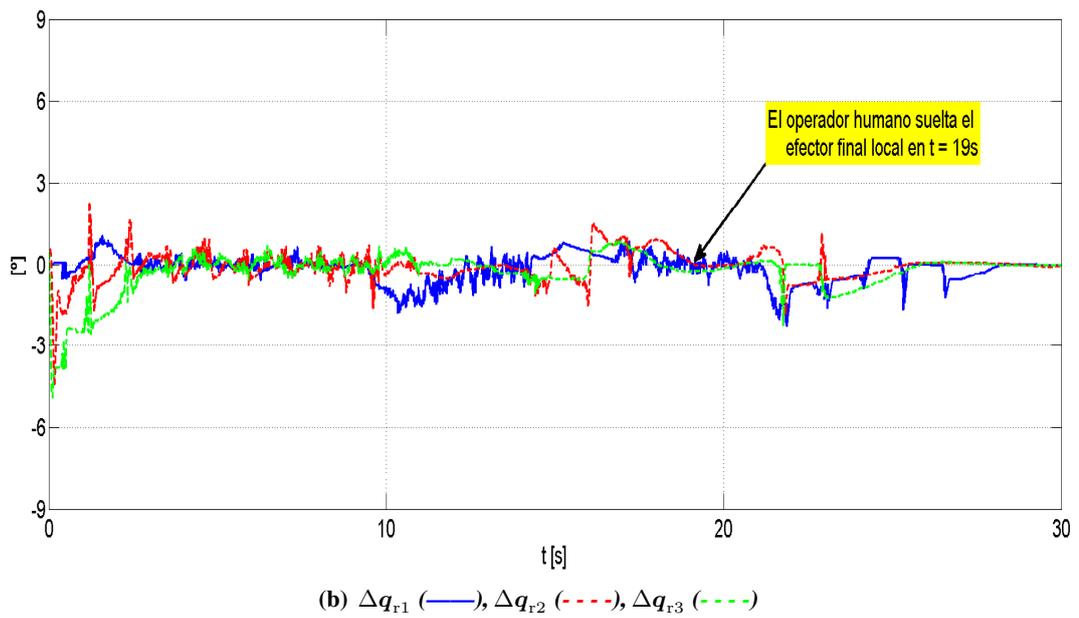
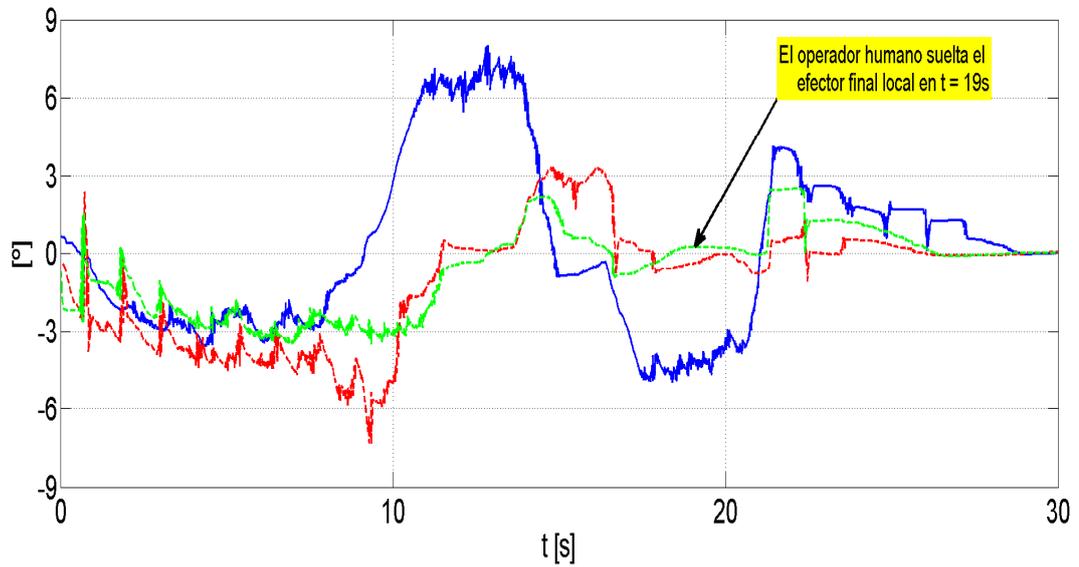
**Figura 4.15:** Movimiento libre. Retardo inducido. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - -) [°].

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



**Figura 4.16:** Movimiento libre. Retardo inducido. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - -) [ $^{\circ}$ ].

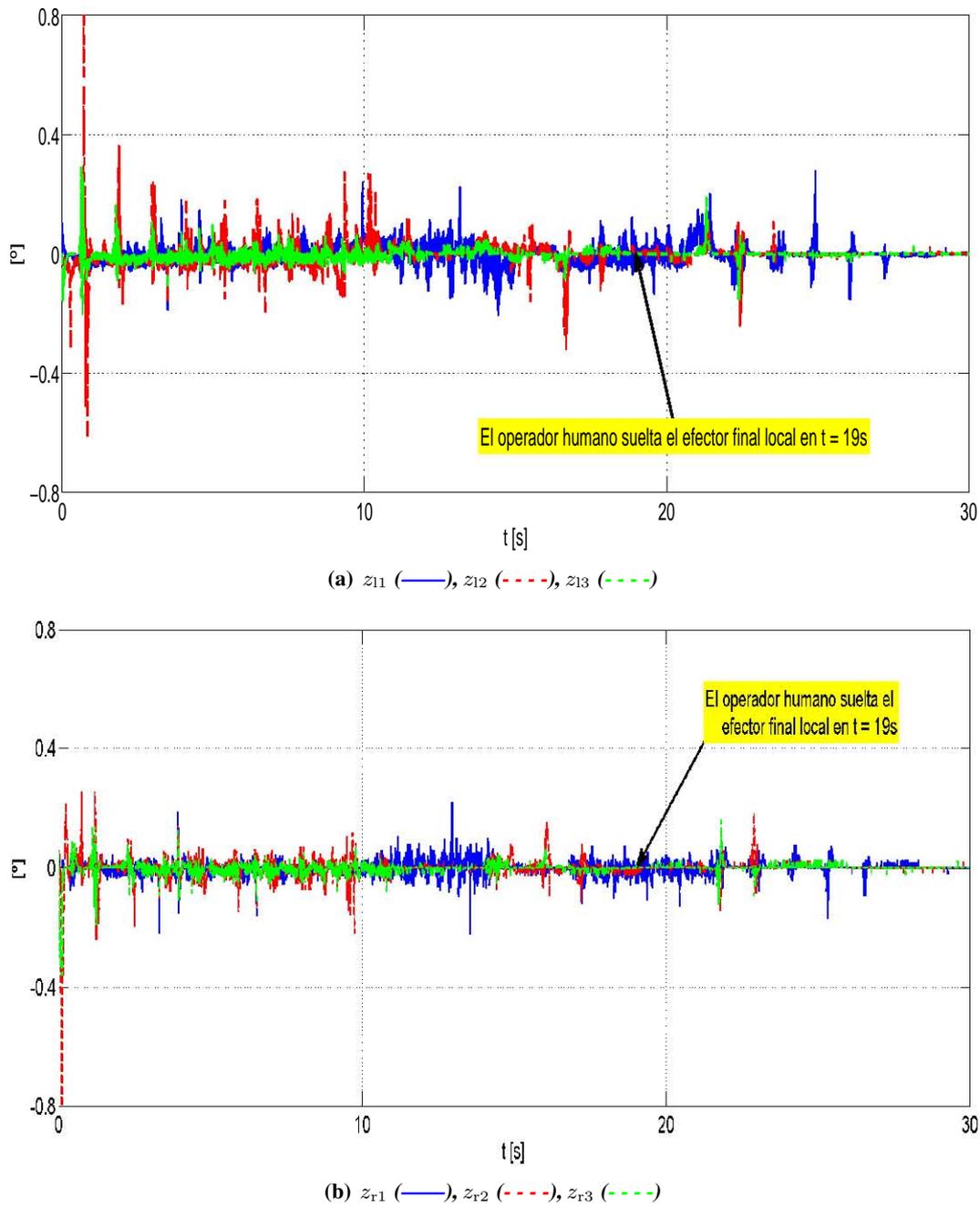
Debido a que el retardo incremento, los errores de posición mostrados en la Figura 4.17 crecen en comparación con los errores de la Figura 4.5 pero éstos permanecen acotados mientras el operador humano mueve el efector final local, y tienden a cero cuando  $\tau_h = 0$ .



**Figura 4.17:** Movimiento libre. Retardo inducido. Errores de posición [°].

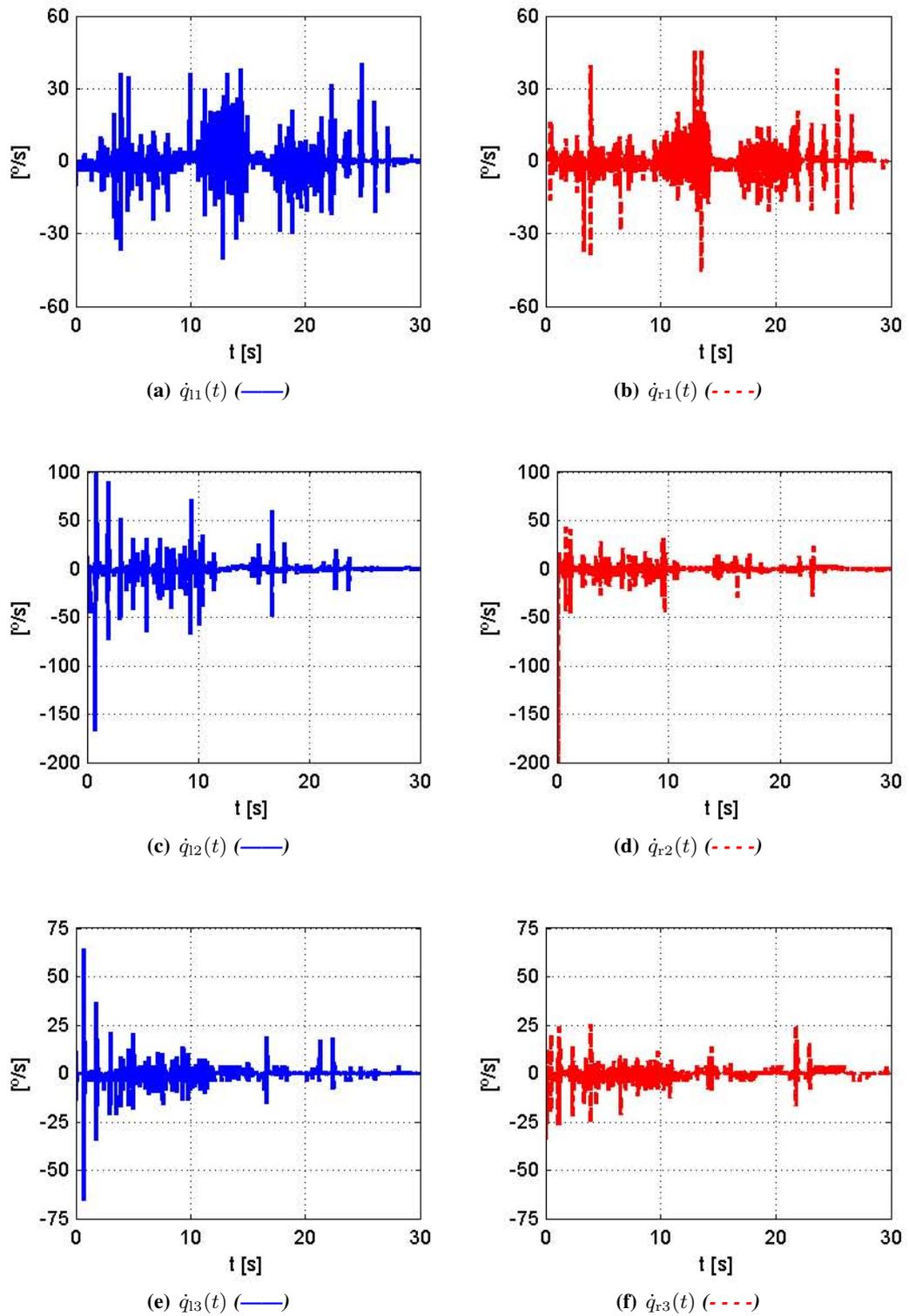
Además, la Figura 4.18 muestra que los errores de observación prácticamente no se ven afectados por el incremento del retardo y estos tienden a cero desde del inicio, con la excepción de algunos picos.

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



**Figura 4.18:** Movimiento libre. Retardo inducido. Errores de observación [°].

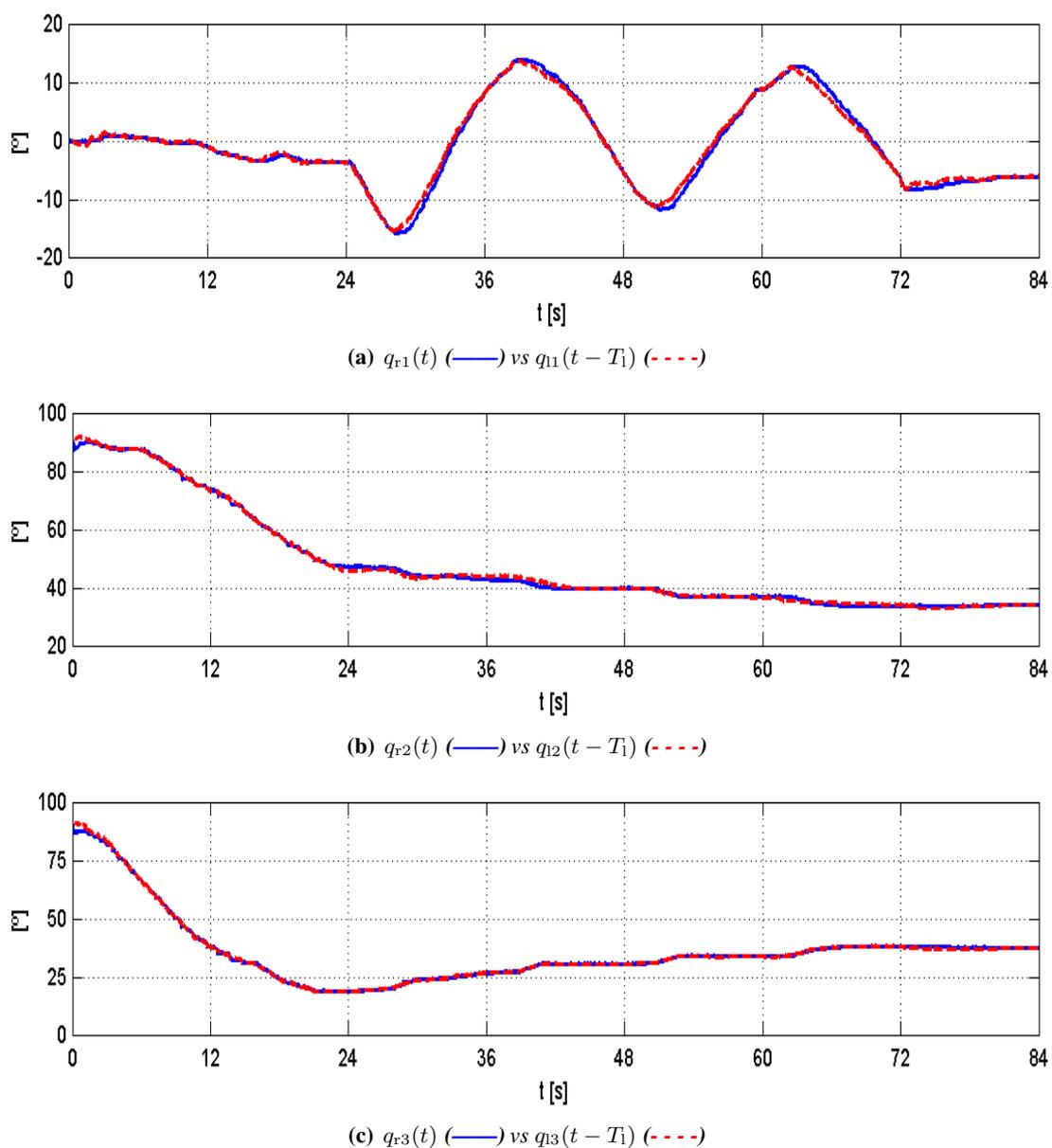
La Figura 4.19 muestra las velocidades obtenidas por el observador propuesto para movimiento libre con retardo inducido



**Figura 4.19:** Movimiento libre. Retardo inducido. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - -) [ $^{\circ}/s$ ].

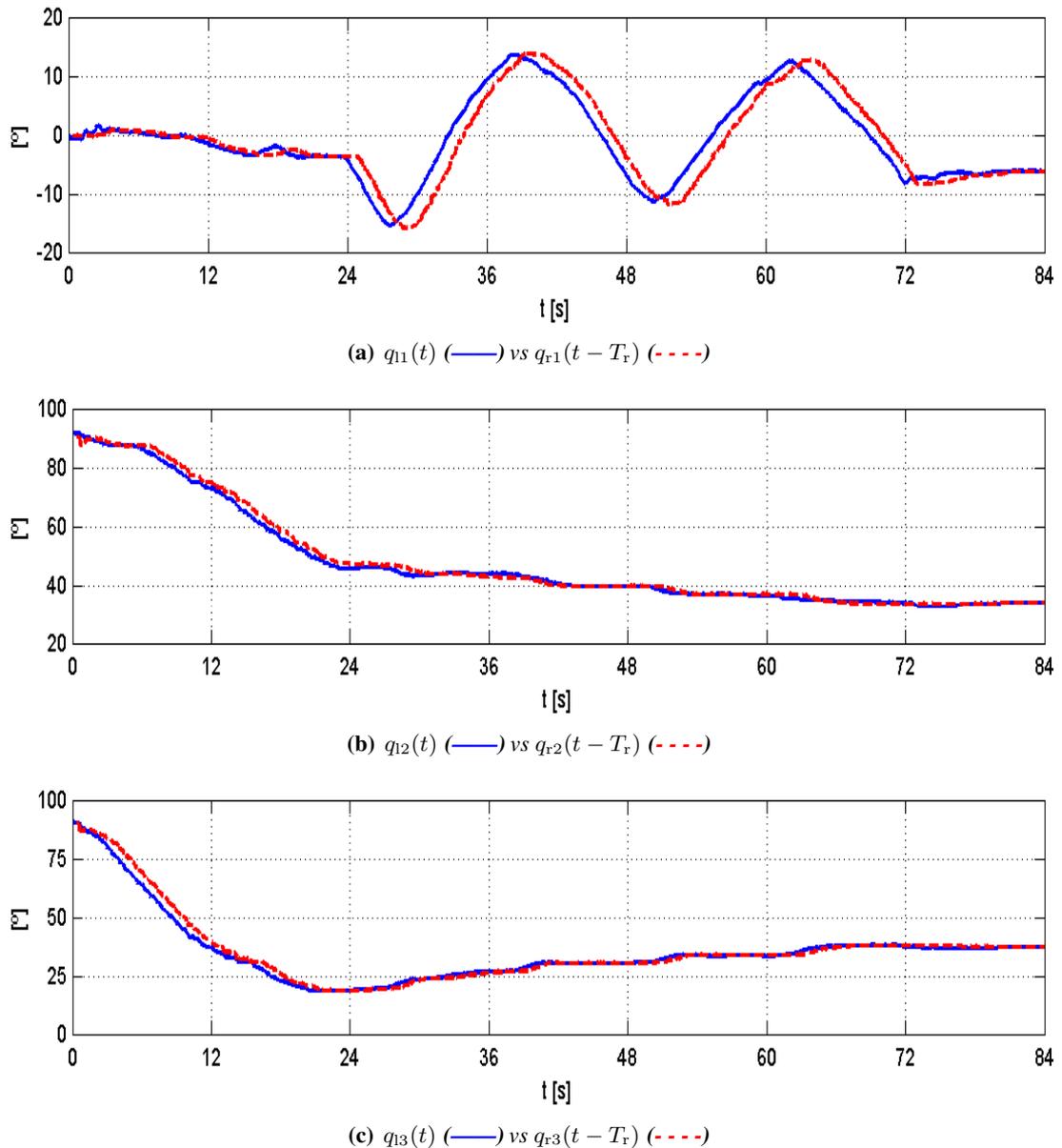
### 4.2.2. Movimiento restringido

Como en la sección anterior, la persona mueve el efector final del manipulador local hacia abajo hasta que el manipulador remoto entra en contacto con una superficie sin embargo, ahora se considera el incremento del retardo mostrado en la Figura 4.14.



**Figura 4.20:** Movimiento restringido. Retardo inducido. Posición remota (—) vs posición local retardada (- - -) [°].

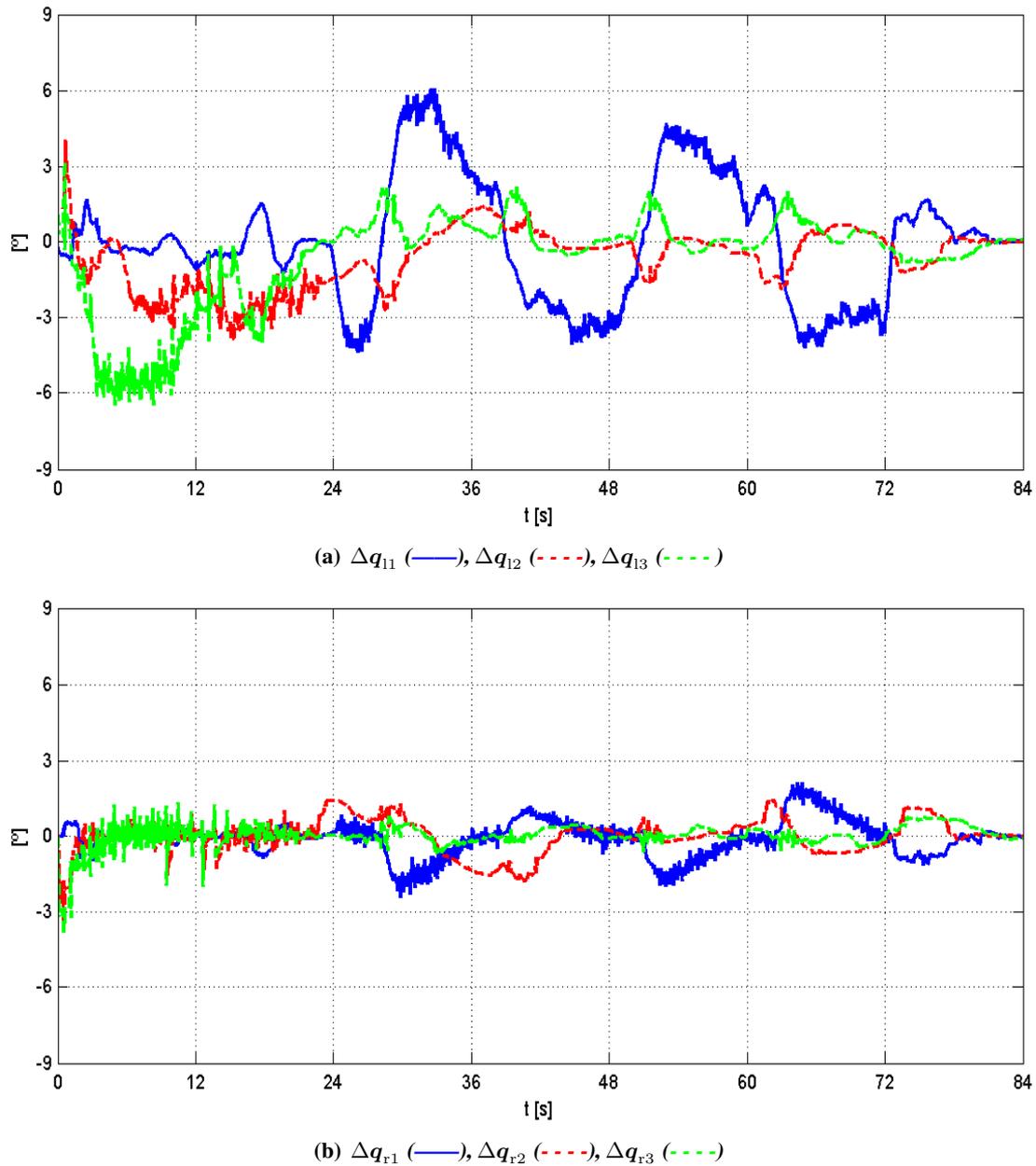
La Figura 4.20 muestra la posición del manipulador remoto vs la posición local retardada. Se aprecia como el robot remoto sigue la posición local retardada y si el operador humano deja de mover el robot local los errores de seguimiento son finalmente acotados. La Figura 4.21 muestra la posición del manipulador local vs la posición remota retardada, donde en la Figura 4.21 a) es más claro ver el efecto del retardo.



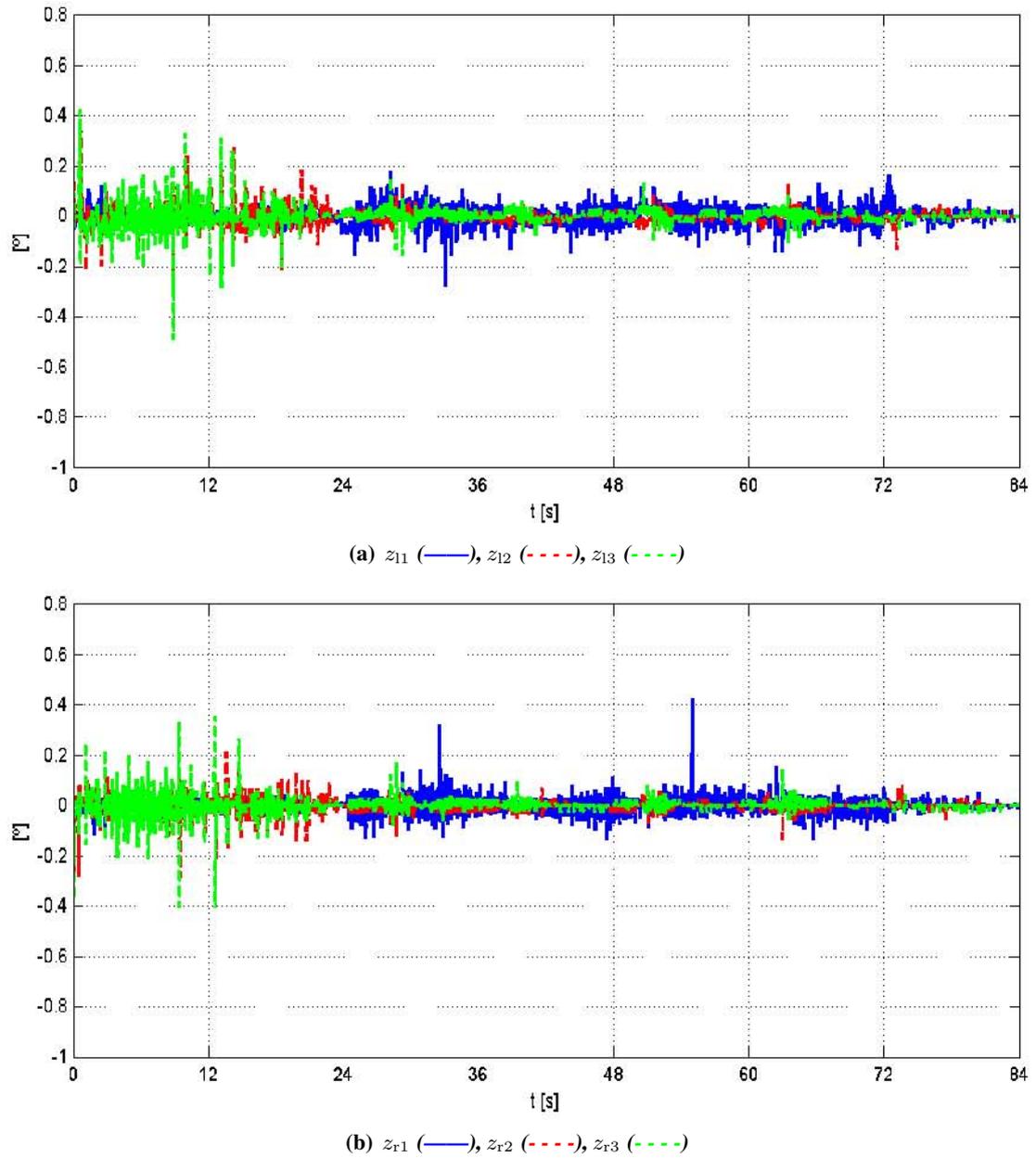
**Figura 4.21:** Movimiento restringido. Retardo inducido. Posición local (—) vs posición remota retardada (- - -) [°] .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la Figura 4.22 se pueden observar los errores de posición los cuales, como se mencionó anteriormente, están acotados. Los errores de observación tienden a cero en todo tiempo a excepción de algunos picos, como se puede apreciar en la Figura 4.23.



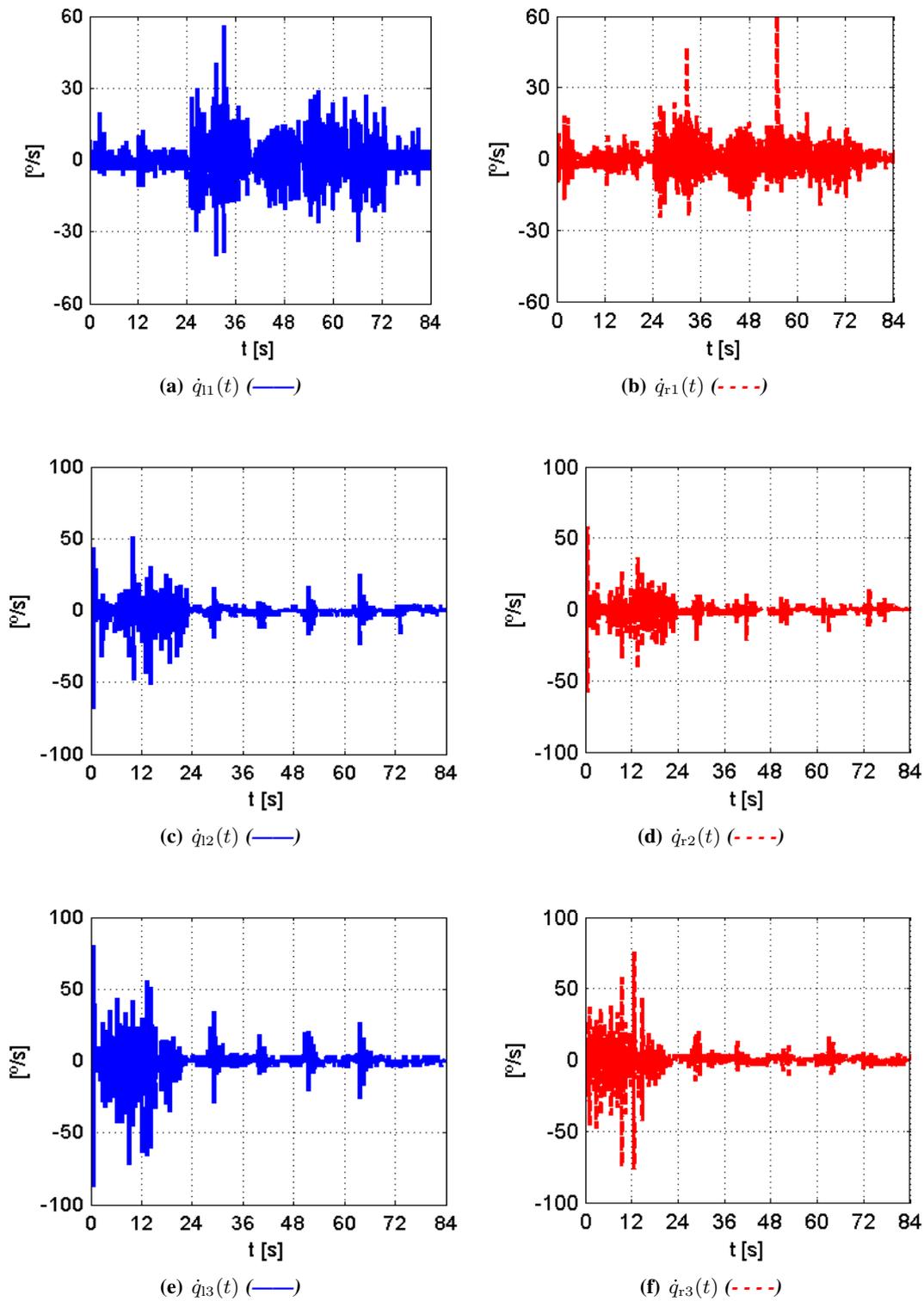
**Figura 4.22:** Movimiento restringido. Retardo inducido. Errores de posición [°].



**Figura 4.23:** Movimiento restringido. Retardo inducido. Errores de observación [°].

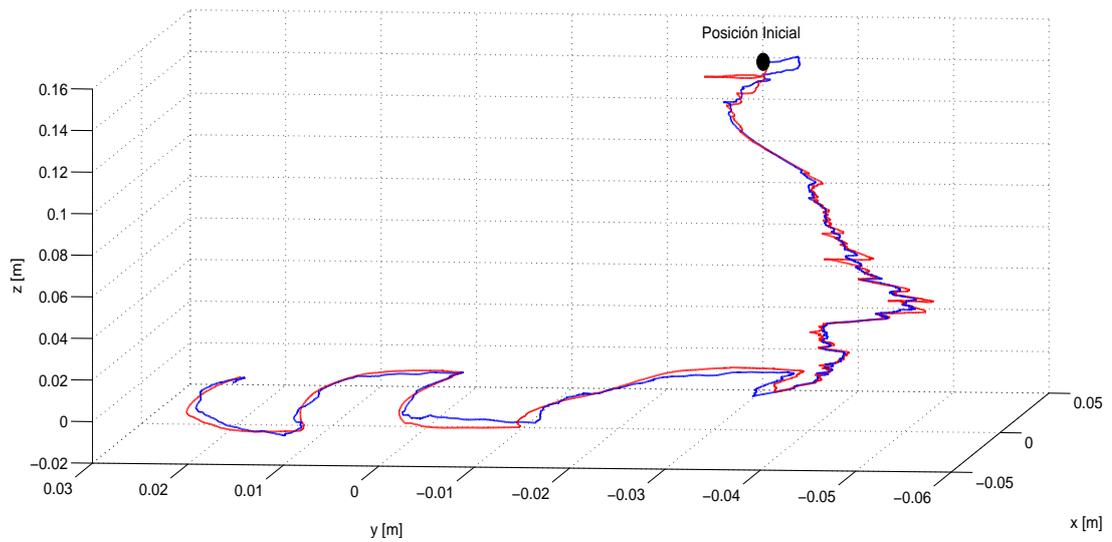
La Figura 4.24 muestra las velocidades obtenidas por el observador propuesto para movimiento restringido con retardo inducido

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



**Figura 4.24:** Movimiento restringido. Retardo inducido. Velocidad estimada local (—), velocidad estimada remota (- - -) [ $^{\circ}/s$ ].

Por último, la superficie reconstruida por el humano se puede observar en la Figura 4.25, y a pesar de que el humano intenta atravesar la superficie el controlador corrige el exceso de fuerza que ejerce el humano teniendo la sensación de telepresencia como se afirma en el Teorema 3.4.1.



**Figura 4.25:** Ambiente virtual (local)(—) vs Ambiente actual (remoto)(- - -) [m].

### 4.3. Error cuadrático medio

Esta sección muestra la raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en ingles) de los experimentos realizados. Esto se realizó con la finalidad de observar el incremento del error de posición y observación al aumentar el retardo.

Las Tablas 4.1 y 4.2 muestran el RMSE de los errores de posición del manipulador remoto y local, respectivamente, para movimiento libre y restringido. En dichas tablas es posible apreciar que el RMSE es casi igual para ambos robots indicando que estos se siguen a pesar de la interacción con el humano. Mientras, las Tablas 4.3 y 4.4 muestran el RMSE de los errores de posición después de que el operador humano suelta el efector final local. Como se puede observar el RMSE disminuye porque en ese momento los robots se vuelven autónomos, es decir, ya no hay interacción con el humano.

	<b>Retardo :</b> $T_l(t) + T_r(t) \approx 0.09$	
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
RMSE( $\Delta q_{r1}$ )	0.2460	0.4620
RMSE( $\Delta q_{r2}$ )	0.4074	0.4965
RMSE( $\Delta q_{r3}$ )	0.5204	0.6524

**Tabla 4.1:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto

	<b>Retardo :</b> $T_l(t) + T_r(t) \approx 0.09$	
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
RMSE( $\Delta q_{l1}$ )	0.2737	0.4597
RMSE( $\Delta q_{l2}$ )	0.4105	0.4816
RMSE( $\Delta q_{l3}$ )	0.4886	0.5624

**Tabla 4.2:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local

Por otro lado, el RMSE de los errores de observación se puede observar en las Tablas 4.5 y 4.6. Es posible apreciar el excelente desempeño del observador para ambos movimientos con una desviación estándar en el peor de los casos de 0.0175. El retardo considerado se muestra en la Figura 4.2.

<b>Retardo :</b>	
$T_l(t) + T_r(t) \approx 0.09$	
<i>Movimiento Libre</i>	
RMSE( $\Delta q_{r1}$ )	0.1137
RMSE( $\Delta q_{r2}$ )	0.1632
RMSE( $\Delta q_{r3}$ )	0.0697

**Tabla 4.3:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto después de  $t = 15s$

<b>Retardo :</b>	
$T_l(t) + T_r(t) \approx 0.09$	
<i>Movimiento Libre</i>	
RMSE( $\Delta q_{l1}$ )	0.1223
RMSE( $\Delta q_{l2}$ )	0.1512
RMSE( $\Delta q_{l3}$ )	0.0541

**Tabla 4.4:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local después de  $t = 15s$

<b>Retardo :</b>		
$T_l(t) + T_r(t) \approx 0.09$		
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
RMSE( $z_{r1}$ )	0.0151	0.0168
RMSE( $z_{r2}$ )	0.0150	0.0135
RMSE( $z_{r3}$ )	0.0086	0.0126

**Tabla 4.5:** Error cuadrático medio de los errores de observación del robot remoto

<b>Retardo :</b>		
$T_l(t) + T_r(t) \approx 0.09$		
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
RMSE( $z_{l1}$ )	0.0149	0.0175
RMSE( $q_{l2}$ )	0.0174	0.0150
RMSE( $q_{l3}$ )	0.0103	0.0134

**Tabla 4.6:** Error cuadrático medio de los errores de observación del robot local

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

El RMSE de los errores de posición y observación considerando el retardo mostrado en la Figura 4.14 se pueden apreciar en las Tablas 4.7-4.12. Como se puede observar el RMSE de los errores de posición tiene un incremento considerable con respecto al RMSE de los errores de posición mostrados en las Tablas 4.1 y 4.2, esto se debe a que el humano, para movimiento libre, sostiene el efector final un 70 % del tiempo que dura la prueba y el 30 % restante se llega al consenso, por lo cual los errores máximos persisten. Las Tablas 4.9 y 4.10 muestran el RMSE de los errores de posición después de que el operador humano suelta el efector final local, haciendo que el RMSE disminuya debido a que ambos robots llegan a una misma posición.

	<b>Retardo :</b> $T_l(t) + T_r(t) \approx 1.1$	
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
RMSE( $\Delta q_{r1}$ )	0.7739	0.6824
RMSE( $\Delta q_{r2}$ )	0.8530	0.6754
RMSE( $\Delta q_{r3}$ )	0.9507	0.4575

**Tabla 4.7:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto con retardo inducido

	<b>Retardo :</b> $T_l(t) + T_r(t) \approx 1.1$	
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
RMSE( $\Delta q_{l1}$ )	3.8852	2.3672
RMSE( $\Delta q_{l2}$ )	2.9526	1.3015
RMSE( $\Delta q_{l3}$ )	2.8109	2.9143

**Tabla 4.8:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local con retardo inducido

	<b>Retardo :</b> $T_l(t) + T_r(t) \approx 1.1$	
	<i>Movimiento Libre</i>	
RMSE( $\Delta q_{r1}$ )	0.2114	
RMSE( $\Delta q_{r2}$ )	0.2553	
RMSE( $\Delta q_{r3}$ )	0.4176	

**Tabla 4.9:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot remoto con retardo inducido después de  $t = 11s$

<b>Retardo :</b>	
$T_l(t) + T_r(t) \approx 1.1$	
<i>Movimiento Libre</i>	
<b>RMSE(<math>\Delta q_{11}</math>)</b>	0.2126
<b>RMSE(<math>\Delta q_{12}</math>)</b>	0.8328
<b>RMSE(<math>\Delta q_{13}</math>)</b>	0.8676

**Tabla 4.10:** Error cuadrático medio de los errores de posición del robot local con retardo inducido después de  $t = 11s$

Por otra parte, el RMSE de los errores de observación tienden a cero para ambos movimientos y la desviación estándar en el peor de los casos es de 0.0414. Con lo que se puede concluir que el desempeño del observador es excelente a pesar del incremento del retardo.

<b>Retardo :</b>		
$T_l(t) + T_r(t) \approx 1.1$		
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
<b>RMSE(<math>z_{r1}</math>)</b>	0.0226	0.0172
<b>RMSE(<math>z_{r2}</math>)</b>	0.0255	0.0177
<b>RMSE(<math>z_{r3}</math>)</b>	0.0160	0.0196

**Tabla 4.11:** Error cuadrático medio de los errores de observación del robot remoto con retardo inducido

<b>Retardo :</b>		
$T_l(t) + T_r(t) \approx 1.1$		
	<i>Movimiento Libre</i>	<i>Movimiento Restringido</i>
<b>RMSE(<math>z_{l1}</math>)</b>	0.0414	0.0240
<b>RMSE(<math>z_{l2}</math>)</b>	0.0383	0.0182
<b>RMSE(<math>z_{l3}</math>)</b>	0.0231	0.0202

**Tabla 4.12:** Error cuadrático medio de los errores de observación del robot local con retardo inducido



## Conclusiones

---

Este trabajo presenta un nuevo esquema controlador - observador para un sistema de teleoperación bilateral con retardos variantes en el tiempo presentes en el canal de comunicación. El esquema propuesto no utiliza el modelo dinámico del sistema por lo cual es robusto ante incertidumbres paramétricas. Además, no requiere el uso de sensores para conocer la velocidad debido a que se diseña un observador que utiliza las posiciones articulares para calcular ésta.

El algoritmo propuesto se implementó para movimiento libre y restringido. En el primer caso, el operador humano traza una trayectoria con el manipulador local y después de un tiempo lo suelta provocando que los robots oscilen y tiendan a una posición constante, resolviendo el problema de consenso bajo retardos variantes en el tiempo. Para el segundo caso, el operador humano siempre interactúa con el manipulador local mientras que el manipulador remoto puede entrar en contacto con una superficie rígida, entonces cuando esto sucede el operador humano tiene la sensación de sentir la superficie, logrando la telepresencia a pesar de la presencia del retardo.

La prueba de estabilidad abarca ambos casos y se realizó utilizando rediseño de Lyapunov para garantizar que todas las señales están acotadas. Además, éstas presentan las propiedades de acotamiento final y uniforme como se demostró en el Capítulo 3. Lo anterior se validó con resultados experimentales, los cuales muestran que los errores de observación tienden a cero para todo tiempo, mientras los errores de posición permanecen acotados. Sin embargo, en movimiento libre se muestra que ambos robots se siguen hasta llegar a un valor constante haciendo que los errores de posición tienda a cero. Por otra parte, en movimiento restringido los errores de posición solo están acotados.

Una desventaja del algoritmo propuesto es que lograr una adecuada sintonización de las ganancias para realizar el seguimiento de posición es demandante ya que éstas están en función del retardo.

### **5.1. Trabajo futuro**

Diseñar un filtro para la velocidad estimada con la finalidad de mejorar el desempeño del esquema propuesto. Por otro lado, para movimiento restringido, se contempla la posibilidad de usar un sensor u observador de fuerza con el objetivo de conocer una aproximación de la fuerza que aplica el operador humano sobre la superficie, a través del manipulador remoto.

Implementar el algoritmo control-observador en otros protocolos de comunicación, específicamente sobre el protocolo TCP/IP.

## Bibliografía

---

- Arimoto, S., Y. H. Liu y T. Naniwa (1993). Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms. In: *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*. Vol. 1. Sidney, Australia. pp. 507–512. 12
- Arteaga-Pérez, M. A. (1998). On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **120**, 8–14. 11
- Arteaga-Pérez, M. A., A. M. Castillo-Sánchez y V. Parra-Vega (2006). Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica* **42**, 473–480. 3, 16, 22, 28
- Arteaga-Pérez, M. A., Marisol Morales, Mauro López y Emmanuel Nuño (2015). Observer design for the synchronization of bilateral delayed teleoperators. *International Journal of Robotics Research* pp. 1–13. 4
- Byeong-Yeon, Kim y Ahn Hyo-Sung (2013). A design of bilateral teleoperation systems using composite adaptive controller. *Control Engineering Practice* (21), 1641–1652. 4
- Chopra, N., M. W. Spong y R. Lozano (2008). Synchronization of bilateral teleoperators with time delay. *Automatica* **44**, 2142–2148. 4
- Gámez García, Javier, Anders Robertsson, Juan Gómez Ortega y Rolf Johansson (2007). Estimación de la fuerza de contacto para el control de robots manipuladores con movimiento restringidos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* **4**(1), 70–82. 3
- Goertz, R. C. y F. Bevilacqua (1952). A force-reflecting positional servomechanism. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 4
- Gutiérrez Giles, Alejandro, M. A. Arteaga Pérez y Hebertt Sira Ramírez (2016). Control de fuerza de robot manipuladores basado en observadores proporcionales integrales generalizados. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*. 3
- Hokayem, P. y M. Spong (2006). Bilateral teleoperation: an historical survey. *Automatica* **42**(12), 2035–2057. 1, 4
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems, 3rd ed.* Prentice-Hall. Upper Saddle River, New Jersey. U.S.A. 19

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Murray, R. M., Z. Li y S. S. Sastry (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press. Boca Raton, Florida, USA. 10
- Nuño, E., R. Ortega, N. Barabanov y L. Basañez (2008). A globally stable PD controller for bilateral teleoperators. *IEEE Transactions on Robotics* **24**(3), 753–758. 17
- Nuño, Emmanuel, Luis Basañez y Romeo Ortega (2011). Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*. 1, 4
- Nuño Ortega, Emmanuel, Ioannis Sarras y Luis Basañez (2014). An adaptive controller for nonlinear teleoperators with variable time-delays. *Journal of the Franklin Institute*. 4, 11
- Nuño Ortega, Emmanuel y Luis Basañez Villaluenga (2004). Teleoperación: técnicas, aplicaciones, entorno sensorial y teleoperación inteligente. Technical report. Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials. 4
- Pliego Jiménez, Javier (2013). Control de posición y fuerza para un sistema de teleoperación maestro-esclavo con superficies de contacto desconocidas. Master's thesis. Universidad Nacional Autónoma de México. México. XI, 13
- Rodríguez-Ángeles, A., M. A. Arteaga-Pérez, R. Portillo-Vélez y C. Cruz-Villar (2015). Transparent bilateral master-slave control based on virtual surfaces: Stability analysis and experimental results. *International Journal of Robotics and Automation* **30**(2), 128–139. 17
- Sarras, I., E. Nuño, L. Basañez y M. Kinnaert (2016). Position tracking in delayed bilateral teleoperators without velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **26**(7), 1437–1455. 4
- Sheridan, T. B. (1993). Space teleoperation through time delay: Review and prognosis. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 4
- Sheridan, T. B. y W. R. Ferrell (1963). Remote manipulative control with transmission delay. *IEEE Transactions on Human Factors in Electronics*. 19
- Shokri-Ghaleh, Hamid y Alireza Alfi (2014). A comparison between optimization algorithms applied to synchronization of bilateral teleoperation systems against time delay and modeling uncertainties. *Applied Soft Computing*. 1, 4
- Siciliano, B. y L. Villani (1999). *Robot Force Control*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands. 3
- Spong, M. W., S. Hutchinson y M Vidyasagar (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons. U .S. A. 8
- Suárez, Raúl (2000). Programación, planificación y control en robótica. *Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (UPC)*. 3
- Vukobratovic, Miomir (2009). *Dynamics and Robust Control of Robot-Environment Interaction*. World Scientific. 3

Yen-Chen, Liu y Pua Seng-Ming (2013). Adaptive control for bilateral teleoperators under time-varying communication delays. *International Conference on Advanced Robotics and Intelligent Systems*. 4