UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN PARA LAS LÓGICAS INTUICIONISTA Y MODAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

CECILIA CHÁVEZ AGUILERA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSVALDO ALFONSO TÉLLEZ NIETO

2017

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.- Datos del alumno
Chávez
Aguilera
Cecilia
5537047212
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
097503952

2.- Datos del tutor
Dr.
Osvaldo Alfonso
Téllez
Nieto

3.-Datos del sinodal 1
Dr.
David
Meza
Alcántara

4.- Datos del sinodal 2
Dra.
Lourdes del Carmen
González
Huesca

5.- Datos del sinodal 3
Dr.
Favio Ezequiel
Miranda
Perea

6.- Datos del sinodal 4
Dr.
Carlos
Torres
Alcaraz

7.-Datos del trabajo escrito
Teoremas de representación para las lógicas intuicionista y modal
71 páginas
2017

Índice general

Introducción

Comencemos contextualizando el tema de esta tesis. Cuando se aprende lógica proposicional clásica, una vez que se ha presentado el lenguaje formal, este se interpreta mediante una función que a cada variable proposicional le asigna un valor de verdad: 0 o 1. Es decir, siempre hemos aprendido lógica proposicional interpretándola sobre el álgebra booleana de dos elementos.

Explotar este hecho y ver qué resultados acerca de las álgebras booleanas (u otras estructuras) pueden traducirse en resultados para problemas planteados desde la lógica y viceversa es lo que constituye en gran medida el llamado estudio algebraico de una lógica. Esto llegará a ser una técnica de estudio sistematizada con autores como Heyting (Heyting [1930]) y comenzó precisamente con los lenguajes proposicionales. Después, algunos autores como Mostowski (Mostowski [1948]) dieron una interpretación algebraica de los cuantificadores.

Una vez desarrollados ciertos resultados para la semántica algebraica de una lógica, teoremas como el de representación de Stone (Stone [1936]), dieron lugar a una gran cantidad de nuevos resultados que “traducen”los resultados obtenidos para ciertas álgebras en sus correspondientes propiedades en la estructura representante.

En el caso de las lógicas no clásicas como la intuicionista, en la que el principio del tercero excluso no se considera, o bien lógicas que incorporan nuevos operadores al lenguaje, como la lógica modal que incorpora el operador de necesidad, las álgebras sobre las cuales se pueden interpretar difieren naturalmente de las álgebras booleanas y dan pie a un nuevo campo de estudio. Por ejemplo, Heyting [1930] ofrece una semántica algebraica para la lógica intuicionista, en tanto que McKinsey and Tarski [1948] da una semántica algebraica y topológica a la lógica modal.

Rasiowa y Sikorski (Rasiowa and Sikorski [1963]) es el primer trabajo que sistematiza y generaliza este panorama de resultados. Por ello se ha convertido en un referente común en este campo de investigación que ha florecido en muy diversas formas en nuestros días (Harding and Bezhanishvili [2004], Gehrke [2005], Kremer [2014, 2013], Celani and Montangie [2015]). En particular, Kremer [2014, 2013] trabaja el fortalecimiento de los resultados de Rasiowa and Sikorski [1963], de completud[1] de la lógica modal a completud fuerte con respecto a diversos espacios topológicos.

En Kremer [2014] se plantea como pregunta abierta la completud fuerte de la lógica intuicionista de primer orden sin igualdad con respecto al espacio de Cantor. La principal aportación del presente trabajo es ofrecer una prueba de la completud fuerte de la lógica intuicionista cuantificacional sin igualdad con respecto al espacio de Cantor. Esto se hace en el teorema 2.2.2. También en Kremer [2014] se menciona que la completud fuerte de la lógica intuicionista proposicional con respecto al espacio de Cantor es un resultado conocido. No obstante no conocemos una prueba de ello y ofrecemos una prueba propia. Esto se hace en el teorema 2.1.3.

También se ofrece un panorama de los resultados necesarios involucrados en los teoremas de correctud y completud correspondientes a la lógica modal proposicional y de primer orden. Todos los detalles son propios. En los preliminares ofrecemos una presentación de las estructuras algebráicas que interesan para las lógicas intuicionista y modal: las álgebras pseudobooleanas y las álgebras booleanas topológicas. Se establece la notación usada y se prueban algunos resultados necesarios para los posteriores capítulos. Se mencionan los teoremas de representación correspondientes a lasálgebras mencionadas que forman parte de los resultados centrales de Rasiowa and Sikorski [1963].

En el capítulo 2 se trabaja la lógica intuicionista tanto proposicional como de primer orden. Aquí se dan los principales resultados de este trabajo. En el tercer capítulo se trabaja la lógica modal, tanto proposicional como de primer orden. Se verá que en este caso se puede echar mano de lo trabajado en al capítulo 2. Con esto se da una visión sintética y sistemática de los resultados trabajados en Rasiowa and Sikorski [1963] que se requieren para conocer la semántica de estas lógicas con respecto a sus estructuras algebraicas y topológicas.

[1] Algunos autores prefieren usar la palabra “completitud”. Ambas palabras están formadas correctamente. No obstante, si se opta por el uso de “completitud”, siguiendo la misma regla de formación, se debería entonces hablar de “correctitud”de una lógica, uso que no es común. Por ello preferimos el uso de “completud”.

Capítulo 1

Preliminares

La finalidad de este capítulo es presentar las estructuras algebráicas que se usan en este trabajo junto con los teoremas de representación asociados a ellas, así como la teoría y notación involucrada. Las estructuras de interés son las álgebras pseudobooleanas y las álgebras booleanas topológicas. En analogía al teorema de representación de Stone para las álgebras booleanas, se asocia a las anteriores estructuras una representación topológica.

Es necesario notar que en ocasiones se hablará de álgebras sin más a pesar de que interesen estructuras muy específicas. Entonces, de manera general dado un conjunto $A \neq \varnothing$ y un conjunto de operaciones o_i sobre A, se dirá que el par $\langle A, o_i \rangle_{i \in I}$ es un álgebra. Cuando dos álgebras tienen el mismo número de operaciones de la misma aridad, se dice que son *álgebras similares*. Dado un subconjunto $A_0 \subseteq A$, el álgebra generada por A_0, denotada $\langle A_0 \rangle$ es el conjunto más pequeño que contenga a A_0 cerrado bajo las operaciones o_i. Equivalentemente, sea $\mathbb{A} = \{\langle A, o_i \rangle_{i \in I} : A_0 \subseteq A\}$ el conjunto de todas las álgebras que tengan a $\{o_i : i \in I\}$ como conjunto de operaciones, y tales que $A_0 \subseteq A$, entonces $\langle A_0 \rangle = \langle \bigcap_{A \in \mathbb{A}} A, o_i \rangle_{i \in I}$.

En particular, interesa definir de manera general la siguiente noción:

Definición 1.1. *Sea $\langle A, o_i \rangle_{i \in I}$ álgebra generada por $B \subseteq A$. Se dice que $\langle A, o_i \rangle_{i \in I}$ es libre para su clase de álgebras similares con conjunto de generadores B si cualquier función $f : B \to A_2$, con $\langle A_2, o_j \rangle_{j \in J}$ álgebra similar, puede extenderse de manera única a un homomorfismo $\overline{f} : A \to A_2$.*

1.1. Álgebras pseudobooleanas (de Heyting)

Este tipo de estructuras son de interés para la semántica de la lógica intuicionista.

Definición 1.2. *Un par $\mathscr{A} = \langle A, \leqslant \rangle$, donde $\leqslant$ es un orden parcial*[1] *(reflexivo, antisimétrico y transitivo), es una red*[2] *si para cada $a, b \in A$ se tiene que $a \wedge b$ y $a \vee b$ existen, donde $a \wedge b$ es el ínfimo de $\{a, b\}$ y $a \vee b$ es el supremo de $\{a, b\}$.*

Si las operaciones distribuyen:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

entonces, se dice que la red es distributiva. Se observa que una red no necesariamente tiene elemento máximo o mínimo. Si existen, tales elementos distinguidos serán denotados por 1 y 0 respectivamente.

Definición 1.3. *Sea $a \in \mathscr{A}$, con $\mathscr{A}$ red,*

- *Si $0 \in \mathscr{A}$ entonces, un elemento $c \in \mathscr{A}$ se denomina el $\wedge-$complemento de a si $a \wedge c = 0$, y para todo $x \in \mathscr{A}$ tal que $a \wedge x = 0$, se tiene que $x \leqslant c$.*
- *Si $1 \in \mathscr{A}$ entonces, un elemento $c \in \mathscr{A}$ se denomina el $\vee-$complemento de a si $a \vee c = 1$ y para todo $x \in \mathscr{A}$ tal que $a \vee x = 1$, se tiene que $c \leqslant x$.*

Dado $a \in \mathscr{A}$ con $\mathscr{A}$ red, si a tiene $\wedge-$ complemento, a este se le denota por a^{+}, y también suele llamársele el *pseudocomplemento* de a.

Definición 1.4. *Sean $a, b \in \mathscr{A}$ red. Un elemento $c \in \mathscr{A}$ tal que $a \wedge c \leqslant b$ y para todo $x \in \mathscr{A}$ si $a \wedge x \leqslant b$ entonces $x \leqslant c$, se denomina el* pseudocomplemento de *a* relativo a *b, o* pseudocomplemento relativo *de a* y *b. Si existe, será denotado mediante $a \to b$*

Definición 1.5. *Una red $\mathscr{A}$ en la que para cualesquiera $a, b \in \mathscr{A}$, se tiene que $a \to b$ existe se llama una* red relativamente pseudocomplementada. *Para los fines de este trabajo abreviaremos este nombre mediante* red pseudocomplementada.

[1] Para las nociones de orden y conceptos no definidos en este trabajo remitimos al lector a los libros Hernández [2011] y Miranda et al. [2000]

[2] La palabra *lattice*, se ha convertido en un anglicismo en nuestro idioma. El uso de "latiz"y el plural "latices"se ha vuelto común. Sin embargo, todavía no es una palabra aceptada ni por la Academia Mexicana de la Lengua ni por la Real Academia de la Lengua Española. Se le ha llamado también retículo o celosías. Nosotros, siguiendo los usos y costumbres del grupo de Lógica y Conjuntos, le llamaremos *red*.

Esta operación tiene propiedades interesantes. Por ejemplo, si una red es pseudocomplementada, entonces es distributiva. Se tiene una operación dual del pseudocomplemento relativo

Definición 1.6. *Dados $\mathscr{A}$ red, y $a, b \in \mathscr{A}$; un elemento $c \in \mathscr{A}$ será la* pseudodiferencia *de b y a si cumple que $a \vee c \geqslant b$ y para todo $x \in \mathscr{A}$ tal que $a \vee x \geqslant b$ se tiene que $c \leqslant x$, y se denota $b - a$.*

Si la red tiene elemento máximo, entonces $1 - a$ es el $\vee-$complemento de a. No obstante tales operaciones no serán usadas en el presente trabajo, salvo en el lema 1.2.

Observación 1.1. *En toda red pseudocomplementada se tiene que $a \leqslant b$ si y sólo si $a \to b = 1$. Esto ya que si $a \leqslant b$, claramente $a = a \wedge 1 \leqslant b$ y será el elemento más grande que cumpla tal propiedad. Por otro lado, si $a \to b = 1$, entonces $a = a \wedge 1 \leqslant b$.*

Afirmación 1.1. *Sean $a, b \in \mathscr{A}$ red pseudocomplementada, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. c *es el pseudocomplemento de* a *relativo a* b
2. *Para toda $x \in \mathscr{A}$, $x \leqslant c$ si y sólo si $a \wedge x \leqslant b$.*
3. *Se tiene que c cumple que $a \wedge b \leqslant c$ y cumple que $a \wedge b = a \wedge c$, y para toda $x \in \mathscr{A}$ si $a \wedge b \leqslant x$ y $a \wedge b = a \wedge x$; entonces $x \leqslant c$.*

Demostración. 1. $\to$ 2. Sea $x \in \mathscr{A}$ tal que $a \wedge x \leqslant b$, por ser c el más grande que cumple esto, se tiene que $x \leqslant c$. Y para $x \in \mathscr{A}$, si $x \leqslant c$, entonces $a \wedge x \leqslant a \wedge c \leqslant b$, es decir $a \wedge x \leqslant b$. 2. $\to$ 3. En tanto que $a \wedge b \leqslant b$, se tiene que $b \leqslant c$, y por transitividad, $a \wedge b \leqslant c$. Ahora, como $c \leqslant c$ entonces $a \wedge c \leqslant b$; de aquí se tiene que $a \wedge (a \wedge c) = a \wedge c \leqslant a \wedge b$. Por otro lado, notando nuevamente que $b \leqslant c$ se tiene que $a \wedge b \leqslant a \wedge c$; así se obtiene que $a \wedge c = a \wedge b$. Sea $x \in \mathscr{A}$ tal que $a \wedge b \leqslant x$, con $a \wedge x = a \wedge b$, entonces $a \wedge x = a \wedge b \leqslant b$, de donde $x \leqslant c$. 3. $\to$ 1. Como $a \wedge c = a \wedge b \leqslant b$, se tiene que $a \wedge c \leqslant b$. Sea $x \in \mathscr{A}$ tal que $a \wedge x \leqslant b$, entonces $(a \wedge x) \to b = 1 = x \to (a \to b)$, de donde $x \leqslant (a \to b)$. Ahora, $a \wedge b \leqslant (a \to b)$ y por esto mismo $a \wedge b \leqslant a \wedge (a \to b)$. Además, $a \wedge (a \to b) \leqslant b$ por definición; de donde $a \wedge (a \to b) \leqslant a \wedge b$, se tiene entonces que $a \wedge b = a \wedge (a \to b)$. Entonces $(a \to b) \leqslant c$ por hipoótesis y $x \leqslant c$ por transitividad.

□

Definición 1.7. *Si una red pseudocomplementada contiene un elemento mínimo, entonces diremos que es un* álgebra pseudobooleana *o de Heyting, y se abreviará* **apb**.

Definición 1.8. *Sea $\mathscr{A}$ red y $\nabla \subseteq \mathscr{A}$ con $\nabla \neq \emptyset$ tal que para $a, b \in \mathscr{A}$ se tiene que*

- *Si $a, b \in \nabla$ entonces $a \wedge b \in \nabla$.*
- *Si $a \in \nabla$ y $a \leqslant b$ entonces $b \in \nabla$*

Afirmación 1.2. *Dada $\mathscr{A}$ apb, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *∇ es un filtro*[3] *en $\mathscr{A}$*
2. *$\emptyset \neq \nabla \subseteq \mathscr{A}$ y cumple que para todo $a, b \in \mathscr{A}$ $a, b \in \nabla$ si y sólo si $a \wedge b \in \nabla$*
3. *$\nabla \subseteq \mathscr{A}$ con $1 \in \mathscr{A}$ y siempre que $a, a \to b \in \nabla$, entonces $b \in \nabla$.*

Demostración. 1. → 2. Sea ∇ filtro en $\mathscr{A}$, entonces $\emptyset \neq \nabla$. Dados $a, b \in \nabla$ se tiene que $a \wedge b \in \nabla$. Ahora, si $a \wedge b \in \nabla$, en tanto que $a \wedge b \leqslant a$ y $a \wedge b \leqslant b$, se tiene que $a, b \in \nabla$. 2. → 1. Por hipótesis, $\nabla \neq \emptyset$. Sean $a, b \in \nabla$, entonces $a \wedge b \in \nabla$, y si $a \in \nabla$, y $a \leqslant b$ con $b \in \mathscr{A}$, entonces $a = a \wedge b \in \nabla$, de donde $b \in \nabla$. 1. → 3. Sea $a \in \nabla$, como $a \leqslant 1$, se tiene que $1 \in \nabla$. Sean $a,\ a \to b \in \nabla$, entonces $a \cap (a \to b) \in \nabla$ y en tanto $a \wedge (a \to b) \leqslant b$, entonces $b \in \nabla$. 3 → 1 Como $1 \in \nabla$, se tiene que $\nabla \neq \emptyset$. Sean $a, b \in \nabla$ entonces, en tanto que $a \leqslant b \to (a \wedge b)$ por la observación 1.1 $a \to (b \to (a \wedge b)) = 1 \in \nabla$, de donde $a \wedge b \in \nabla$. Si $a \in \nabla$ y $a \leqslant b$ para $b \in \mathscr{A}$, entonces nuevamente por la observación 1.1, se tiene que $a \to b = 1 \in \nabla$, de donde $b \in \nabla$. □

Notación 1.1. *Sea $g \in \mathscr{A}$apb, se denota por $\nabla_g = \langle g \rangle$, el filtro principal generado por g en $\mathscr{A}$. Es decir $\nabla_g = \{a \in \mathscr{A} : g \leqslant a\}$. Dado un subconjunto $\Gamma \subseteq \mathscr{A}$, se denota por ∇_Γ al filtro generado por Γ, es decir al conjunto $\{a \in \mathscr{A} : \exists a_1, \ldots a_n \in \Gamma con\ a \geqslant \wedge_{i=1}^n a_i\}$.*

Definición 1.9. *Dada $\mathscr{A}$ apb y $\nabla \subseteq \mathscr{A}$ filtro en $\mathscr{A}$; la relación $a \sim b$ si y sólo si $a \to b \in \nabla$ y $b \to a \in \nabla$, es de equivalencia. Entonces la* red cociente *$\mathscr{A}/\nabla$, tiene por universo las clases de equivalencia inducidas por $\sim$, y el orden $|a| \leqslant |b|$ si y sólo si $a \to b \in \nabla$.*

Es rutina verificar que las clases de equivalencia no dependen del representante.

Lema 1.1. *Dada $\mathscr{A}$ apb y $\nabla \subseteq \mathscr{A}$ filtro en $\mathscr{A}$, se considera su red cociente $\mathscr{A}/\nabla$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$|1|$ es el elemento máximo en $\mathscr{A}/\nabla$, $|0|$ es su elemento mínimo.*

[3] Se observa que también se suele denotar a los filtros mediante $\mathcal{F}$ en algunos textos contemporáneos.

2. *Un elemento* $|b|$ *es máximo en* $\mathscr{A}/\nabla$ *si y sólo si* $b \in \nabla$.

3. $\mathscr{A}/\nabla$ *con su orden es apb.*

Demostración. 1. Por ser $\mathscr{A}$ apb se tiene que $a \to a = 1 \in \mathscr{A}$. Ahora, se observa que $a \leqslant 1$ para todo $a \in \mathscr{A}$, de donde $a \to 1 = 1 \in \nabla$, es decir $|a| \leqslant |1|$ para toda $|a| \in \mathscr{A}/\nabla$. De aquí que $|1|$ es el elemento máximo de $\mathscr{A}/\nabla$. Así mismo, en tanto que $0 \leqslant a$ para toda $a \in \mathscr{A}$, $0 \to a = 1 \in \nabla$, es decir $|0| \leqslant |a|$ para toda $|a| \in \mathscr{A}/\nabla$, con lo que $|0|$ es el elemento mínimo en $\mathscr{A}/\nabla$.

2. Sea $b \in \mathscr{A}$ tal que $|b| = |1|$, entonces $|b \to b| \leqslant |b|$, es decir $(b \to b) \to b \in \nabla$. Como $b \to b = 1 \in \nabla$, por la caracterización de filtro para apb, se tiene que $b \in \nabla$. Ahora, sea $b \in \nabla$, entonces, $1 \to b = b \in \nabla$, de donde $|1| \leqslant |b|$. Por 1. se tiene que $|b| \leqslant |1|$, así $|b| = |1|$.

3. En tanto que $a \to a = 1 \in \nabla$, se tiene que $|a| \leqslant |a|$ para todo $a \in \mathscr{A}$. La antisimetría es inmediata pues si $|a| \leqslant |b|$ y $|b| \leqslant |a|$, entonces $a \to b \in \nabla$, y $b \to a \in \nabla$. De aquí que $a \sim b$, entonces $|a| = |b|$. Finalmente, si $|a| \leqslant |b|$ y $|b| \leqslant |c|$, se tiene que $a \to b$ y $b \to c \in \nabla$. Entonces, como $a \wedge (a \to b) \leqslant b$ y $b \wedge (b \to c) \leqslant c$, se tiene que $(a \wedge b) \wedge [(a \to b) \wedge (b \to c)] \leqslant b \wedge c$. Por la afirmación 1.1 se sabe que, $a \wedge b = a \wedge (a \to b)$. Sustituyendo en el lado izquierdo de la desigualdad anterior se tiene que $(a \wedge (a \to b)) \wedge [(a \to b) \wedge (b \to c)] = a \wedge [(a \to b) \wedge (b \to c)] \leqslant b \wedge c \leqslant c$. Esto implica por definición de pseudocomplemento que $(a \to b) \wedge (b \to c) \leqslant a \to c$, con lo que $a \to c \in \nabla$, y con esto $|a| \leqslant |c|$. Así, este es un orden parcial.

Ahora, sean $a, b \in \mathscr{A}$, considerando sus clases $|a|,\ |b| \in \mathscr{A}/\nabla$, se tiene que $(a \wedge b) \leqslant a$ y $(a \wedge b) \leqslant b$. Por la observación 1.1 $(a \wedge b) \to a = 1 = (a \wedge b) \to b \in \nabla$. Esto implica que $|(a \wedge b)| \leqslant |a|$ y $|(a \wedge b)| \leqslant |b|$. Sea $c \in \mathscr{A}$ tal que $|c| \leqslant |a|$ y $|c| \leqslant |b|$, entonces $c \to a,\ c \to b \in \nabla$, de donde $(c \to a) \wedge (c \to b) \in \nabla$. Como $(c \to a) \wedge (c \to b) \leqslant c \to (a \wedge b)$, se tiene que $c \to (a \wedge b) \in \nabla$. Con esto $|c| \leqslant |a \wedge b|$, y $|a \wedge b| = |a| \wedge |b|$. De manera análoga se observa que $|a \vee b| = |a| \vee |b|$.

Para considerar el pseudocomplemento relativo de $|a|, |b|$ se observa que en tanto $a \wedge (a \to b) \leqslant b$, se tiene que $(a \wedge (a \to b)) \to b = 1 \in \nabla$, con lo que $|a| \wedge |a \to b| \leqslant |b|$. Sea $c \in \mathscr{A}$ con $|a| \wedge |c| \leqslant |b|$, entonces $(a \wedge c) \to b \in \nabla$. Como $(c \wedge a) \to b = c \to (a \to b)$, entonces $|c| \leqslant |a \to b|$, de donde $|a| \to |b| = |a \to b|$.

Finalmente, para considerar el pseudocomplemento de $|a|$ se observa que en tanto $a^+ = a \to 0$, se tiene que $|a^+| = |a \to 0| = |a| \to |0| = |a|^+$

□

Definición 1.10. *Sea* $f : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ *función con* $\mathscr{A}_i$ *apb. Se dice que* f *es homomorfismo pseudobooleano si* *preserva las operaciones $+$, $\wedge$, $\vee$, y $\rightarrow$.*

Si la función es inyectiva, entonces se dice que es un *isomorfismo pseudobooleano.* Se debe notar que no se está pidiendo que la función sea biyectiva como suele ser el caso para la noción de isomorfismo. Además se observa que todo homomorfismo pseudobooleano lleva el elemento máximo de $\mathscr{A}_1$, que se puede denotar $1_{\mathscr{A}_1}$ en el elemento máximo de $\mathscr{A}_2$, denotado análogamente $1_{\mathscr{A}_2}$, pues $f(1_{\mathscr{A}_1}) = f(a \rightarrow a) = f(a) \rightarrow f(a) = 1_{\mathscr{A}_2}$. Cuando sea necesario distinguir entre elementos máximos de diferentes apb se utilizarán este tipo de subíndices. Antes de dar algunos ejemplos, debemos notar que las nociones topológicas se manejarán mediante un operador interior.

Definición 1.11. *Un espacio topológico es un par (X, I) en el que para todo $A \in \wp(X)$ existe un conjunto asociado $IA \subseteq X$ de forma que se cumple:*

1. $I(A \cap B) = IA \cap IB$
2. $IA \subseteq A$
3. $IIA = IA$
4. $IX = X$

El conjunto de los abiertos en (X, I) está dado por los conjuntos tales que $A = IA$. De esta forma, podemos denotar por comodidad también a un espacio topológico como (X, τ), entendiendo a τ como la topología inducida por el operador interior, esto es $\tau_I = \{A \subseteq X : A = IA\}$.

Definición 1.12. *Sea (X, τ) espacio topológico. Una familia $\mathbf{B} \subseteq \tau$ es* base para τ *si para todo $U \in \tau$ se tiene que $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ con $B_j \in \mathbf{B}$. Una familia $B_0 \subseteq \tau$ es una* subbase para τ *si $\mathcal{B} = \{\bigcap F : F \in [B_0]^{<\omega}\} \cup \{\varnothing, X, \}$ es*[4] *base para τ.*

Afirmación 1.3. *Para cada familia $B_0 \subseteq \wp(X)$, con X conjunto, existe un único operador interior I en X tal que B_0 es subbase de (X, τ_I), con $\tau_I = \{A \in \wp(X) : A = IA\}$. Para $B_0 \subseteq \wp(X)$ se toma $\mathcal{B} = \{\bigcap F : F \in [B_0]^{<\omega}\} \cup \{\varnothing, X, \}$, y se define $IA = \bigcup_{j \in J} B_j$ con $B_j \subseteq A$, y $B_j \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Se observa que IA es operador interior.

1. Sea $x \in I(A \cap B) = \bigcup_{j \in J} B_j$ con $B_j \in \mathcal{B}$, y $B_j \subseteq A \cap B$. Entonces, existe $B_{j0} \subseteq A \cap B$ tal que $x \in B_{j0}$, de donde $x \in B_{j0} \subseteq A$ y $x \in B_{j0} \subseteq B$. De aquí que $x \in \bigcup_{i \in I} B_i = IA$ y $x \in \bigcup_{y \in Y} B_y = IB$, es decir $x \in IA \cap IB$. Si $x \in IA \cap IB = \bigcup_{j \in J} B_j \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{j \in J, i \in I} B_j \cap B_i$, existen $B_{j0}, B_{i0} \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_{j0} \cap B_{i0}$, con $x \in B_{j0} \subseteq A$ y $x \in B_{i0} \subseteq B$, de donde $x \in B_{j0} \cap B_{i0} \subseteq A \cap B$. Con ello $x \in \bigcup_{y \in Y} B_y = I(A \cap B)$, con $B_y \subseteq A \cap B$.

[4] Se recuerda que $[B_0]^{<\omega}$ denota la familia de subconjuntos finitos de elementos de B_0. Consúltese Hernández [2011]

2. Sea $x \in IA$, entonces, existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_i \subseteq A$, es decir $x \in A$.

3. Por la propiedad anterior, la contención $\subseteq$ ya se tiene. Sea $x \in IA$ entonces existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_i \subseteq A$, de donde $x \in B_i \subseteq IA$, es decir $x \in IIA$

4. Sea $x \in X$, como $X \in \mathcal{B}$, $x \in IX$

Claramente $\mathcal{B}$ es base para (X, τ_I). Sea I' operador interior tal que B_0 es subbase de (X, τ'_I). Como $\mathcal{B} = \{\bigcap F : F \in [B_0]^{<\omega}\} \cup \{\varnothing, X, \}$ es base, $I'A = \bigcup_{i \in J} B_j$ con $B_j \in \mathcal{B}$. Entonces $x \in I'A = \bigcup_{i \in J} B_j$ si y sólo si existe B_{j0} tal que $x \in B_{j0} \subseteq A$ si y sólo si $x \in \bigcup_{j \in J} B_j = IA$. De aquí que $I'A = IA$. □

Para cerrar esta sección consideramos el siguiente ejemplo de apb que será ilustrativo para la siguiente sección.

Ejemplo 1.1. *Sea (X, τ) espacio topológico, entonces, τ es un apb*

Claramente es red bajo la contención. Dados $U, V \in \tau$, la unión conjuntista es su mínima cota superior, y la intersección es su máxima cota inferior. Por último, el pseudocomplemento de U relativo a V está dado por $I(U^c \cup V)$, con I operador interior. Observamos que para todo $Y \in \tau$ se tiene que $Y \subseteq I(U^c \cup V)$ si y sólo si $U \cap Y \subseteq V$.

Sea $Y \in \tau$ tal que $Y \subseteq I(U^c \cup V)$. Sea $y \in U \cap Y$, y supongamos que $y \notin V$. Como $Y \subseteq I(U^c \cup V) \subseteq U^c \cup V$, entonces $y \in U^c$, pero $y \in U$, por lo que debe ser el caso que $y \in V$, es decir $U \cap Y \subseteq V$. Sea $Y \in \tau$ tal que $U \cap Y \subseteq V$, y supongamos que existe $y \in Y$ tal que para todo $W \in \tau$ con $y \in W$, se tiene que $W \cap (U^c \cup V)^c \neq \varnothing$, esto es $W \cap (U \cap V^c) \neq \varnothing$. Sea $x \in W \cap (U \cap V^c) \neq \varnothing$, y supongamos que $x \in Y$, entonces, como $x \in U$, se debe tener que $x \in V$, pero eso contradice que está en $W \cap (U \cap V^c)$. Entonces para toda vecindad de y, se tiene que $W \nsubseteq Y$, contradiciendo que $Y \in \tau$. Debe ser el caso entonces que $Y \subseteq I(U^c \cup V)$.

Definición 1.13. *Dado un espacio topológico (X, τ), el* apb de subconjuntos abiertos de *X se define sobre τ con $U \wedge V = U \cap V$, $U \vee V = U \cup V$ y para $U, V \in \tau$ su pseudocomplemento relativo $U \to V = I(U^c \cup V)$. Se denota $\mathcal{G}(X)$.*

1.2. Álgebras booleanas

Este tipo de estructura es la más conocida de las tratadas aquí. No obstante, para los fines del presente trabajo no interesa en sí misma, sino como base para la definición de álgebra booleana topológica que es la estructura que será relevante para la semántica de la lógica modal.

Definición 1.14. *Una red distributiva $\mathscr{A}$ tal que para todo $a \in \mathscr{A}$, se tiene un elemento $a^* \in \mathscr{A}$ con $a \wedge a^* = 0$, y $a \vee a^* = 1$ será llamada álgebra booleana.*[5] *Tal elemento es único y es llamado el* complemento *de a.*

Se observa que tal elemento es el $\wedge-$complemento y el $\vee-$complemento de a. Además, se debe notar que toda álgebra booleana $\mathscr{A}$ es un apb. Para cada par de elementos $a, b \in \mathscr{A}$ su pseudocomplemento relativo está dado por $a \to b = a^* \vee b$, y $a^+ = a \to 0$. Sucederá que el pseudocomplemento de un elemento $a \in \mathscr{A}$ será también su complemento.

El álgebra booleana $\{0, 1\}$ será denotada $\mathscr{A}_0$. Si se tiene un operador I tal que, para todo $a, b \in \mathscr{A}$

1. $I(a \wedge b) = Ia \wedge Ib$	3. $IIa = Ia$
2. $Ia \leqslant a$	4. $I1 = 1$

entonces se tiene un álgebra booleana topológica, y **será abreviado como abt**.

Definición 1.15. *Una función $f : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ con $\mathscr{A}_i$ álgebras booleanas que preserve las operaciones $*, \wedge, \vee$, es llamada* homomorfismo booleano. *Si $f : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ con $\mathscr{A}_i$ abt cumple con ser homomorfismo booleano y además cumple que $f(Ia) = If(a)$, entonces f es un* homomorfismo booleano topológico.

Nuevamente, si la función f es inyectiva, en el primer caso, se dirá que tal función es un *isomorfismo booleano*, en el segundo caso que es un *isomorfismo booleano topológico*. Si la función es biyectiva en el caso de las abt, se dirá que son homeomorfas.

Definición 1.16. *Por un* campo de subconjuntos *se entiende una red de subconjuntos de X con (X, τ) espacio topológico que es cerrada bajo las operaciones conjuntistas. Si se equipa con un operador interior I, definido en cada conjunto como su interior, entonces se dice que es* campo de conjuntos topológico*, que será denotado $\mathcal{B}(X)$.*

Definición 1.17. *Sean $(X.\tau_X)$, (Y, τ_Y) espacios topológicos, y $\varphi : X \to Y$ función, entonces*

- *φ es* homeomorfismo *si es biyectiva y cumple que $\varphi[IA] = I\varphi[A]$ para todo $A \subseteq X$.*
- *φ es* continua *si $\varphi^{-1}[IB] \subseteq I\varphi^{-1}[B]$ para todo $B \subseteq Y$.*

[5] Se debe mencionar que en el presente trabajo, siguiendo a Rasiowa and Sikorski [1963], se considera al álgebra booleana de un solo elemento, y se considera un álgebra booleana degenerada.

- φ *es* abierta *si* $\varphi[IA] \subseteq I\varphi[A]$ *para todo* $A \subseteq X$.

Es rutina verificar las definiciones equivalentes de los conceptos dados, entre las cuales enfatizamos que $\varphi : X \to Y$ es *continua* si y sólo si para todo $U \in \tau_Y$, cumple que $\varphi^{-1}[U] \in \tau_X$. También se observa que $\varphi : X \to Y$ es *abierta* si y sólo si $I\varphi^{-1}[B] \subseteq \varphi^{-1}[IB]$ para todo $B \subseteq Y$. Demostramos las equivalencias para la definición de homeomorfismo.

Afirmación 1.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes: 1. $\varphi : X \to Y$ es homeomorfismo. 2. φ es biyectiva y $\varphi^{-1}[IB] = I\varphi^{-1}[B]$ para todo $B \subseteq Y$. 3. φ es continua de inversa continua.*

Demostración. 1. $\to$ 2. Dado $B \subseteq Y$, para $A = \varphi^{-1}[B]$ se tiene que $IA = I\varphi^{-1}[B]$, de donde $\varphi[IA] = \varphi[I\varphi^{-1}[B]] = I(\varphi[\varphi^{-1}[B]]) = IB$. De aquí que $\varphi^{-1}[IB] = \varphi^{-1}[\varphi[IA]] = IA = I\varphi^{-1}[B]$. 2. $\to$ 3. Por hipótesis se tiene directamente que φ es continua. Sea $A \subseteq X$, entonces para $\varphi[A] \subseteq Y$ se tiene por hipótesis que $\varphi^{-1}[I\varphi[A]] = I\varphi^{-1}[\varphi[A]] = IA$, de donde $\varphi[IA] = \varphi[\varphi^{-1}[I\varphi[A]] = I\varphi[A]$. 3. $\to$ 1. En tanto que φ tiene inversa, φ es biyectiva. Dado $A \subseteq X$, se tiene que $(\varphi^{-1})^{-1}[IA] = \varphi[IA] \subseteq I\varphi[A]$ por tener inversa continua. Además $\varphi^{-1}[I\varphi[A]] \subseteq I(\varphi^{-1}[\varphi[A]]) = IA$, de donde $I\varphi[A] = \varphi[\varphi^{-1}[I\varphi[A]] \subseteq \varphi[IA]$

□

Los siguientes lemas, nos dan un poco más de información acerca de los conceptos presentados y serán usados en los siguientes capítulos.

Lema 1.2. *Sea $\mathscr{A}$ álgebra booleana y $A \subseteq \mathscr{A}$, con $|A| = r$, entonces $\mathscr{A}_0 = \langle A \rangle$ la subálgebra booleana generada por A tiene cardinalidad menor o igual a 2^{2^r}.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ álgebra booleana, y $A \subseteq \mathscr{A}$, con $|A| = r$. Se observa que el conjunto: $B = \{\vee_{j=1}^{m}(\wedge_{i=1}^{n_j} a_i)_j : a_i \in A \text{ o } a_i^* \in \mathscr{A}\}$ es igual a $\langle A \rangle$. Para esto, se nota que si $a \in B$ se tiene directamente que $a \in \langle A \rangle$, y para $j = 1 = i$, se tiene que $A \subseteq B$. Luego se observa que B es álgebra, pues si $a, b \in B$, $a \vee b$ y $a \wedge b$ vuelven a ser elementos de B, y para a^* se tiene que si $a = \vee_{j=1}^{m}(\wedge_{i=1}^{n_j} a_i)_j$, entonces $a^* = \vee_{j=1}^{n^m}(\wedge_{i=1}^{m_j} a_i^*)_j$. Se observa que esto es claro para $n = 1 = m$. Suponiendo que se cumple la proposición para $m = s$ y $n = 1$, la prueba para $m = s+1$ y $n = 1$ es evidente pues si $a = \vee_{j=1}^{s+1}(\wedge_{i=1}^{1_j} a_i)_j = \vee_{j=1}^{s+1} a_j$, entonces $a^* = \wedge_{i=1}^{s+1} a_i^*$. Suponiendo válido para $m = s$ y $n = r$, entonces para $m = s$ y $n = r+1$ se tiene que si $a = \vee_{j=1}^{s}(\wedge_{i=1}^{(r+1)_j} a_i)$, entonces para $a^* = \wedge_{j=1}^{s}(\vee_{i=1}^{(r+1)_j} a*_i)$ por cada elemento de esta intersección que se distribuya, se tendrán $r+1$ uniendos, $r+1$ veces, en el primer paso de dos elementos, y se tienen s elementos que distribuir, de donde al final se tendrán $(r+1)^{s-1}$ uniendos, $r+1$ veces, es decir $(r+1)^{s-1}(r+1)$

uniendos, de s elementos, de aquí que $a^* = \vee_{j=1}^{(r+1)^s}(\wedge_{i=1}^{(s)_j} a*_i)$. Finalmente, como $\langle A \rangle$ es la subálgebra más pequeña que contiene a A, entonces $B = \langle A \rangle$.

Ahora, si se considera el conjunto $R = \{\wedge_{i=1}^r a_i : a_i \in A \text{ o } a_i^* \in A\}$, entonces, se observa que $f : R \to 2^r$, con $f(\wedge_{i=1}^r a_i) = f_{\wedge_{i=1}^r a_i}$ y

$$f_{\wedge_{i=1}^r a_i}(i) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{si } a_i \in A \\ 0 & \text{si } a_i^* \in A \end{array} \right\}$$

es inyectiva pues si $f(\wedge_{i=1}^r a_i) = f(\wedge_{i=1}^r b_i)$, entonces $f_{\wedge_{i=1}^r a_i} = f_{\wedge_{i=1}^r b_i}$. Esto es para todo elemento en $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ se tiene que $a_i = b_i$ o $a_i^* = b_i*$ para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$, de donde las expresiones $\wedge_{i=1}^r a_i = \wedge_{i=1}^r b_i$. Ahora, se observa que el conjunto $C = \{\bigcup \mathrm{R} : \mathrm{R} \in [R]^{<\omega}\} = B$. Es claro que todo elemento $a \in C$ es tal que $a \in B$. Dado $a \in B$, con $a = \vee_{j=1}^m(\wedge_{i=1}^{n_j} a_i)$, para cada uniendo, $u = \wedge_i^n a_i$, si $a_j \in A$ falta en esta expresión, entonces si $a_j \geqslant u$, se agrega $a_j \wedge u$ a dicho uniendo, si a_j es incomparable con u, entonces, $u \wedge a_j = 0$, de donde $a_j^* \vee (u \wedge a_j) = a_j^* = u \vee a_j^*$, de donde $u \leqslant a_j^*$, y se agrega entonces $u \wedge a_j^*$. Finalmente si $a_j \leqslant u$, entonces se agrega $a_j \wedge u = a_j$, y se agrega un nuevo uniendo expresando $u - a$ la pseudodiferencia relativa de u y a con $u - a = u \wedge a*$, que se deberá completar de acuerdo a los dos pasos previos.

De aquí que $B = R$. Entonces, la cardinalidad de subconjuntos que se pueden formar con elementos de R es 2^{2^r}, de donde la cardinalidad de $|B| \leqslant 2^{2^r}$, y por lo anterior $|\langle A \rangle| \leqslant 2^{2^r}$. □

Como se verá más adelante en el lema 1.9, toda apb puede ser vista como la subálgebra de los elementos abiertos de un abt. Esto permite tener el siguiente corolario.

Corolario 1.1. *Sea $\mathscr{A}$ apb y $A_0 \subseteq \mathscr{A}$, con $|A_0| = r$ entonces existe $\mathscr{A}_0$ apb finita con $|\mathscr{A}_0| \leqslant 2^{2^r}$, con $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}_0$, $A_0 \subseteq \mathscr{A}_0$, y tal que toda operación pseudobooleana en $\mathscr{A}$, es preservada en $\mathscr{A}_0$*

Lema 1.3. *Sea $h : \mathscr{A}_1 \longrightarrow \mathscr{A}_2$ homomorfismo booleano topológico, con $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, abt; entonces, su restricción al apb $\mathcal{G}(\mathscr{A}_1)$ de los elementos abiertos de $\mathscr{A}_1$ es un homomorfismo pseudobooleano de $\mathcal{G}(\mathscr{A}_1)$ en $\mathcal{G}(\mathscr{A}_2)$.*

Demostración. Se denota por τ_{A_1} y τ_{A_2} a los elementos abiertos de $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ respectivamente. Se recuerda que el pseudocomplemento relativo de $a, b \in \mathcal{G}(\mathscr{A}_1)$, se define $a \Rightarrow b := I(a \to b)$, con $a \to b$ el pseudocomplemento relativo de a y b en $\mathscr{A}_1$, y $a^+ := Ia^*$. Entonces $h(a^+) = h(Ia^*) = Ih(a^*) = Ih(a)^* = h(a)^+ \in \tau_{A_2}$. También, se nota que $h(Ia_1 \wedge Ia_2) = Ih(a_1) \wedge Ih(a_2) = h(a_1) \wedge h(a_2) \in \tau_{A_2}$ por ser a_1, a_2 abiertos. Análogamente para $h(Ia_1 \vee Ia_2) = Ih(a_1) \vee Ih(a_2) = h(a_1) \vee h(a_2) \in \tau_{A_2}$. Finalmente, $h(a \Rightarrow b) = h(I(a \to b)) = I(h(a \to b)) = I(h(a) \to h(b)) = h(a) \Rightarrow h(b) \in \tau_{A_2}$

□

Lema 1.4. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, y $f : X \longrightarrow Y$ función abierta y continua. Entonces $h : \mathcal{G}(Y) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$, con $h(U) = f^{-1}[U]$ es homomorfismo pseudobooleano.*

Demostración. Para $+$ tenemos que $h(U^+) = h(IU^*) = f^{-1}[I(U^*)] \subseteq I(f^{-1}[U^*]) = I(f^{-1}[U]^*) = h(U)^+$ por ser continua. Por otro lado $(h(U))^+ = I(f^{-1}[U]^*) = I(f^{-1}[U^*]) \subseteq f^{-1}[I(U^*)] = h(U^+)$, por ser f abierta. Para $h(U \vee V) = f^{-1}[U \vee V] = f^{-1}[U] \vee f^{-1}[V] = h(U) \vee h(V)$ abierto en τ_X por ser f continua, con $U, V \in \tau_Y$. Análogamente para $\wedge$. Finalmente $h(U \Rightarrow V) = h(I(U^* \vee V)) = f^{-1}[I(U^* \vee V)] \subseteq If^{-1}[(U^* \vee V)]$ por ser f continua, e $If^{-1}[(U^* \vee V)] = I(f^{-1}[U^*] \vee f^{-1}[V]) = h(U) \Rightarrow h(V)$. Por otro lado, $h(U) \Rightarrow h(V) = I(h(U)^* \vee h(V)) = I(f^{-1}[U]^* \vee f^{-1}[V]) = I(f^{-1}[U^* \vee V]) \subseteq f^{-1}[I(U^* \vee V)]$ por ser f abierta, y $f^{-1}[I(U^* \vee V)] = h(U \Rightarrow V)$. □

Definición 1.18. *Dada $\mathscr{A}$ red, se definen el conjunto $\mathcal{S}(A) = \{\nabla \subseteq \mathscr{A} | \nabla$ es filtro primo$\}$, y la función $h : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{S}(A)$, con $h(a) = \{\nabla \in \mathcal{S}(A) | a \in \nabla\}$. Por conveniencia, la imagen de h se denota $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, y se denota τ_h la topología generada tomando a $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$ como subbase. Entonces, al par $(\mathcal{S}(A), \tau_h)$ se le conoce como el* espacio de Stone *de $\mathscr{A}$, h es llamado el* isomorfismo de Stone, *y $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$ es la* red de Stone *de $\mathscr{A}$.*

Se recuerda que si $\mathscr{A}$ es un 'algebra booleana, entonces $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$ es un álgebra booleana de conjuntos, h es un isomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, y el espacio $(\mathcal{S}(A), \tau_h)$ es compacto, T2, totalmente disconexo. Además se observa que la cardinalidad de $|\mathcal{S}(A)| \leqslant 2^{|\mathscr{A}|}$. Para el caso de las álgebras booleanas, tenemos la siguiente propiedad relacionada con su espacio de Stone $\mathcal{S}(A)$ asociado:

Lema 1.5. *Todo homomorfismo $g : \boldsymbol{\mathcal{S}(A)} \longrightarrow B$, con B, campo de subconjuntos de un espacio (X, τ), es inducido por una función $\psi : X \longrightarrow \mathcal{S}(A)$, tal que $g(h(a)) = \psi^{-1}[h(a)]$ para toda $h(a) \in \boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, con h, $\mathcal{S}(A)$, y $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, como en la definición 1.18.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ álgebra booleana, $\mathcal{S}(A)$ y h su espacio e isomorfismo de Stone asociados; $g : \boldsymbol{\mathcal{S}(A)} \longrightarrow B$, con B campo de subconjuntos de un espacio (X, τ). Se observa que para $x \in X$, el conjunto $\nabla_x = \{a \in \mathscr{A} : x \in g(h(a))\}$ es filtro pues dados $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ se tiene que $a_1, a_2 \in \nabla_x$ si y sólo si $x \in g(h(a_1 \wedge a_2)) = g(h(a_1)) \wedge g(h(a_2))$, por ser $g \circ h$ homomorfismo, si y sólo si $a_1 \wedge a_2 \in \nabla_x$. Es propio pues si $0 \in \nabla_x$ entonces, $x \in g(h(0))$, y $h(0) = \varnothing$, de donde $g(h(0)) = \varnothing$, esto es $x \in \varnothing$, que es una contradicción. Por ello $0 \notin \nabla_x$. Finalmente, si $a_1 \vee a_2 \in \nabla_x$, $x \in g(h(a_1 \vee a_2)) = g(h(a_1)) \vee g(h(a_2))$, de donde $a_1 \in \nabla_x$ o $a_2 \in \nabla_x$, es decir $\nabla_x \in \mathcal{S}(A)$. De modo que $\psi : X \longrightarrow \mathcal{S}(A)$, con $\psi(x) = \nabla_x$ está bien definida. Claramente $x \in \psi^{-1}[h(a)]$ si y sólo si $\psi(x) = \nabla_x \in h(a)$ si y sólo si $a \in \nabla_x$ si y sólo si $x \in g(h(a))$. □

Como se mencionó en la introducción, interesa ver el espacio de Cantor en relación con los teoremas y estructuras mencionados. Se verá bajo la siguiente definición:

Definición 1.19. *Sea A conjunto, distinto del vacío. A cada $a \in A$, se asocia el conjunto $D_a = \{f \in 2^A : f(a) = 1\}$. Sea $\mathrm{D} = \{D_a : a \in A\}$, y $\mathcal{D} = \langle \mathrm{D} \rangle$, el campo de subconjuntos generado por D. Entonces se considera $\tau_{\mathcal{D}}$, la topología generada tomando a $\mathcal{D}$ como base con 2^A como universo. Al par $(2^A, \tau_{\mathcal{D}})$ se le llama el discontinuo de Cantor sobre A*

Lema 1.6. *Toda función $g : \mathrm{D} \longrightarrow \mathscr{A}$, con $\mathscr{A}$ álgebra booleana, puede ser extendida a $\overline{g} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ homomorfismo booleano.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ álgebra booleana; en tanto que $\mathscr{A}$ es isomorfa a su imagen $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$ bajo h el isomorfismo de Stone, sin pérdida de generalidad se considera $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$, en lugar de $\mathscr{A}$. Sea $g : \mathrm{D} \longrightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$. Se define $\varphi : \mathcal{S}(A) \longrightarrow 2^{\mathscr{A}}$ con $\varphi(\nabla) = f_\nabla$ y

$$f_\nabla(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \nabla \in g(D_a) \\ 0 & \text{si } \nabla \notin g(D_a) \end{array} \right\}$$

entonces $\overline{g} : \mathcal{D} \longrightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$ con $\overline{g}(X) = \varphi^{-1}[X]$ es homomorfismo que extiende a g pues $\overline{g}(D_a) = \varphi^{-1}[D_a] = \{\nabla : \varphi(\nabla) \in D_a\} = \{\nabla : f_\nabla(a) = 1\} = \{\nabla : \nabla \in g(D_a)\} = g(D_a)$.

Es homomorfismo booleano, pues claramente, para $g(X \wedge Y) = \varphi^{-1}[X \wedge Y] = \varphi^{-1}[X] \wedge \varphi^{-1}[Y] = g(X) \wedge g(Y)$. Análogamente para $\vee$. Finalmente $g(X^*) = \varphi^{-1}[X^*] = \varphi^{-1}[X]^*$.

□

Lema 1.7. *Sean $\mathscr{A}$ álgebra booleana y $\mathcal{D} = \langle \mathrm{D} \rangle$ el álgebra booleana generada por $\mathrm{D} = \{D_a : a \in \mathscr{A}\}$ con $D_a = \{f \in 2^{\mathscr{A}} : f(a) = 1\}$, como en la definición 1.19. Entonces $(\mathcal{S}(A), \tau_h)$ el espacio de Stone de $\mathscr{A}$ es homeomorfo a $(2^{\mathscr{A}}, \tau_{\mathcal{D}})$ el discontinuo de Cantor sobre $\mathscr{A}$*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ álegbra booleana, y $\mathrm{D} = \{D_a : a \in \mathscr{A}\}$ con $D_a = \{f \in 2^{\mathscr{A}} : f(a) = 1\}$, como en la definición 1.19. Entonces, por el lema 1.6, $g_1 : \mathrm{D} \to \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$, con $g_1(D_a) = h(a)$ extiende a un homomorfismo booleano mediante $\varphi : \mathcal{S}(A) \to 2^{\mathscr{A}}$, con $\varphi(\nabla) = f_\nabla$ donde

$$f_\nabla(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \nabla \in g(D_a) \\ 0 & \text{si } \nabla \notin g(D_a) \end{array} \right\}$$

y $\overline{g_1} : \mathcal{D} \longrightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$ con $\overline{g_1}(X) = \varphi^{-1}[X]$. Dicha función será denotada mediante g_1 simplemente.

Ahora considérese $g_2 : \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A}) \to \mathcal{D}$, con $g_2(h(a)) = D_a$, función del conjunto de generadores de $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$ en el conjunto de generadores de $\mathcal{D}$, extiende de manera natural a un homomorfismo booleano, es decir: $g_2(h(a)*) = g_2(h(a))^*$, $g_2(h(a_1) \cap h(a_2)) = g_2(a_2) \cap g_2(h(a_2))$, y análogamente para $\cup$. Entonces, por el lema 1.5, g_2 es inducido por $\psi : 2^{\mathscr{A}} \to \mathcal{S}(A)$, con $\psi(f) = \nabla_f$ donde $\nabla_f = \{a \in \mathscr{A} : f \in g_2(h(a))\}$.

Para $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $g_2 \circ g_1(D) = D$. Si $D = D_a$, entonces $f_0 \in g_2 \circ g_1(D_a) = \psi^{-1}[\varphi^{-1}[D_a]]$ si y sólo si $\psi(f_0) \in \varphi^{-1}[D_a]$ si y sólo si $\nabla_{f_0} \in \varphi^{-1}[D_a]$ si y sólo si $\varphi(\nabla_{f_0}) \in D_a$ si y sólo si $f_{\nabla_{f_0}}(a) = 1$ si y sólo si $\nabla_{f_0} \in g_1(D_a) = h(a)$ si y sólo si $a \in \nabla_{f_0}$ si y sólo si $f_0 \in g_2(h(a))$ si y sólo si $f_0 \in D_a$.

Si $D = D_a^*$, entonces $f_0 \in g_2 \circ g_1(D_a^*) = \psi^{-1}[\varphi^{-1}[D_a^*]]$ si y sólo si $\psi(f_0) \in \varphi^{-1}[D_a^*]$ si y sólo si $\nabla_{f_0} \in \varphi^{-1}[D_a^*]$ si y sólo si $\varphi(\nabla_{f_0}) \in D_a^*$ si y sólo si $f_{\nabla_{f_0}}(a) = 0$ si y sólo si $\nabla_{f_0} \notin g_1(D_a) = h(a)$ si y sólo si $a \notin \nabla_{f_0}$ si y sólo si $f_0 \notin g_2(h(a))$ si y sólo si $f_0 \notin D_a$ si y sólo si $f_0 \in D_a^*$.

Si $D = D_{a1} \cap D_{a2}$, entonces $f_0 \in g_2 \circ g_1(D_{a1} \cap D_{a2}) = \psi^{-1}[\varphi^{-1}[D_a \cap D_{a2}]]$ si y sólo si $\psi(f_0) \in \varphi^{-1}[D_a \cap D_{a2}]$ si y sólo si $\nabla_{f_0} \in \varphi^{-1}[D_a \cap D_{a2}]$ si y sólo si $\varphi(\nabla_{f_0}) \in D_{a1} \cap D_{a2}$ si y sólo si $f_{\nabla_{f_0}}(a1) = 1$ y $f_{\nabla_{f_0}}(a2) = 1$ si y sólo si $\nabla_{f_0} \in g_1(D_{a1}) = h(a1)$ y $\nabla_{f_0} \in g_1(D_{a2}) = h(a2)$ si y sólo si $a1 \in \nabla_{f_0}$ y $a2 \in \nabla_{f_0}$ si y sólo si $f_0 \in g_2(h(a1))$ y $f_0 \in g_2(h(a2))$ si y sólo si $f_0 \in D_{a1} \cap D_{a2}$. Análogo para $D = D_{a1} \cup D_{a2}$. Se concluye que $\psi^{-1}[\varphi^{-1}[D]] = D$

Por otro lado, para $h(a) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$ se tiene que $g_1 \circ g_2(h(a)) = h(a)$. $\nabla_0 \in g_1 \circ g_2(h(a)) = \varphi^{-1}[\psi^{-1}[h(a)]]$ si y sólo si $\varphi(\nabla_0) \in \psi^{-1}[h(a)]$ si y sólo si $\psi(f_{\nabla_0}) \in h(a)$ si y sólo si $\nabla_{f_{\nabla_0}} \in h(a)$ si y sólo si $a \in \nabla_{f_{\nabla_0}}$ si y sólo si $f_{\nabla_0} \in g_2(h(a))$ si y sólo si $f_{\nabla_0} \in D_a$ si y sólo si $f_{\nabla_0}(a) = 1$ si y sólo si $\nabla_0 \in h(a)$.

Se observa que $\varphi^{-1} = \psi$. Primero $\varphi \circ \psi$ es la identidad en $2^{\mathscr{A}}$. Supongamos que existen $f_1 \neq f_2 \in 2^{\mathscr{A}}$ con $\varphi \circ \psi(f_1) = f_2$. Entonces, existen $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tales que $f_1 \in D_1$, $f_2 \in D_2$ con $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, Entonces $f_2 \in \varphi[\psi[D_1]] = \varphi[\psi[\psi^{-1}[\varphi^{-1}[D_1]]]] \subseteq D_1$ contradiciendo que $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Ahora se observa que $\psi \circ \varphi$ es la identidad en $\mathcal{S}(A)$. Supongamos que existen $\nabla_1 \neq \nabla_2$ tales que $\psi \circ \varphi(\nabla_1) = \nabla_2$. Nuevamente existen $h(a1), h(a2) \in \mathcal{S}(A)$ con $\nabla_1 \in h(a1)$, y $\nabla_2 \in h(a2)$ y $h(a1) \cap h(a2) = \varnothing$. Entonces $\nabla_2 \in \psi[\varphi[h(a1)]] = \psi[\varphi[\varphi^{-1}[\psi^{-1}[h(a1)]]]] \subseteq h(a1)$, contradiciendo que $h(a1) \cap h(a2) = \varnothing$. Por lo tanto φ es biyectiva y $\varphi^{-1} = \psi$.

Se tiene también que φ es continua. Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces D es combinación booleana de elementos en D. Si $D = D_a$ entonces $\nabla \in \varphi^{-1}[D_a]$ si y sólo si $f_\nabla(a) = 1$ si y sólo si $\nabla \in h(a)$. Si $D = D_a^*$ entonces $\nabla \in \varphi^{-1}[D_a^*]$ si y sólo si $f_\nabla(a) = 0$ si y sólo si $\nabla \notin h(a)$ Análogamente se verifican los casos para intersecciones y uniones. Finalmente, se observa que la inversa de φ es continua. Dado $h(a) \in \mathcal{S}(A)$, $\psi^{-1}[h(a)] = g_2(h(a)) = D_a$. Por lo tanto, φ es homeomorfismo. $\square$

Dada un apb o un abt, cuando sus operaciones $\wedge$ y $\vee$ están definidas para conjuntos infinitos, se habla de un apb o un abt generalizada (con operaciones generalizadas definidas). Si el ínfimo y el supremo de un conjunto arbitrario existe, entonces el apb o abt generalizada es completa. Cuando se tiene este tipo de operaciones definidas, un homomorfismo no necesariamente las preserva. No obstante, cualquier isomorfismo biyectivo preserva las operaciones generalizadas. Esto se sigue del siguiente lema:

Lema 1.8. *Sea $h : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$, función biyectiva con $\mathscr{A}_i$ redes, entonces h es isomorfismo si y sólo si se tiene que $h(a) \leqslant h(b)$ si y sólo si $a \leqslant b$.*

Demostración. Si h es isomorfismo, entonces, dados $a, b \in \mathscr{A}_1$ tales que $a \leqslant b$, se tiene que $a = a \wedge b$, de donde $h(a) = h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$, es decir, $h(a) \leqslant h(b)$. Ahora, dados $y_1, y_2 \in \mathscr{A}_2$ tales que $y_1 \leqslant y_2$, existen $a, b \in \mathscr{A}_1$ tales que $y_1 = h(a),\ y_2 = h(b)$, y $h(a) \leqslant h(b)$, entonces $h(a) = h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$. Por lo anterior $a = h^{-1}[h(a)] = h^{-1}[h(a \wedge b)] = a \wedge b$, es decir $a = a \wedge b$, de donde $a \leqslant b$.

Ahora, sea $h : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ biyectiva tal que $h(a) \leqslant h(b)$ si y sólo si $a \leqslant b$. Entonces, como $a \wedge b \leqslant a$ y $a \wedge b \leqslant b$, se tiene que $h(a \wedge b) \leqslant h(a)$ y $h(a \wedge b) \leqslant h(b)$. Sea $y \in \mathscr{A}_2$ tal que $y \leqslant h(a)$ y $y \leqslant h(b)$, entonces existe $c \in \mathscr{A}_1$ con $y = h(c)$, de donde $h(c) \leqslant h(a)$ y $h(c) \leqslant h(b)$. Por hipótesis esto implica que $c \leqslant a$ y $c \leqslant b$, entonces $c \leqslant a \wedge b$, de donde $h(c) \leqslant h(a \wedge b)$. Con esto se obtiene que $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$. De manera análoga se observa que $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$. Finalmente, sean $a, b \in \mathscr{A}_1$ tales que $h(a) = h(b)$, entonces $h(a) \leqslant h(b)$ y $h(b) \leqslant h(a)$, esto implica que $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, es decir $a = b$. $\square$

Corolario 1.2. *Sean $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ álgebras booleanas generalizadas, y $h : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ isomorfismo biyectivo, entonces para $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ tales que $a_1 = \bigwedge_{t \in T_1} a_t$, y $a_2 = \bigvee_{t \in T_2} a_t$, con T_1, T_2 conjuntos infinitos, se tiene que $h(a_1) = \bigwedge_{t \in T_1} h(a_t)$, y $h(a_2) = \bigvee_{t \in T_2} h(a_t)$*

Demostración. Sean $a_1, a_2 \in \mathscr{A}_1$ tales que $a_1 = \bigwedge_{t \in T_1} a_t$, y $a_2 = \bigvee_{t \in T_2} a_t$, con T_1, T_2 conjuntos infinitos. En tanto $\bigwedge_{t \in T_1} a_t \leqslant a_t$, y $a_t \leqslant \bigvee_{t \in T} a_t$ para toda a_t, entonces $h(a_1) = h\left(\bigwedge_{t \in T_1} a_t\right) \leqslant h(a_t)$, y $h(a_t) \leqslant h\left(\bigvee_{t \in T} a_t\right) = h(a_2)$, por ser h homomorfismo. De aquí $h(a_1) \leqslant \bigwedge_{t \in T1} h(a_t)$ y $\bigvee_{t \in T2} h(a_t) \leqslant h(a_2)$. Esta parte siempre se tiene. Dado $y_1 \in \mathscr{A}_2$, $y_1 = h(b)$ con $b \in \mathscr{A}_1$ tal que $h(b) \leqslant h(a_t)$ para toda $t \in T_1$ se tiene que $b \leqslant a_t$, de donde $b \leqslant a_1$, y por ello $h(b) \leqslant h(a_1)$, entonces se tiene que $h(a_1) = \bigwedge_{t \in T_1} h(a_t)$. Análogamente si $y_2 \in \mathscr{A}_2$, $y_2 = h(c)$, con $c \in \mathscr{A}_1$ cumple que $h(a_t) \leqslant h(c)$ para toda $t \in T_2$ se tiene que $a_t \leqslant c$, y por ello $a_2 \leqslant c$, entonces $h(a_2) \leqslant h(c)$, de donde $h(a_2) = \bigvee_{t \in T_2} h(a_t)$. $\square$

Definición 1.20. *Sea $h : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ función con $\mathscr{A}_i$ apb o ab generalizadas entonces, se dice que h es un $Q-$homomorfismo pseudobooleano (booleano) si para cualesquier elementos $a_1, a_2 \in \mathscr{A}_1$ tales que*

$a_1 = \bigwedge_{t\in T_1} a_t$, *y* $a_2 = \bigvee_{t\in T_2} a_t$, *con* T_1, T_2 *conjuntos infinitos, se tiene que* $h(a_1) = \bigwedge_{t\in T_1} h(a_t)$ *y* $h(a_2) = \bigvee_{t\in T_2} h(a_t)$

Definición 1.21. *Sea* $h : \mathscr{A}_1 \to \mathcal{B}(X)$ *función con* $\mathscr{A}_1$ *apb generalizada y* $\mathcal{B}(X)$ *el abt de subconjuntos de* (X, τ) *espacio topológico entonces, se dice que* h *es un* $Q-$*homomorfismo pseudo booleano si para cualesquier elementos* $a_1, a_2 \in \mathscr{A}_1$ *tales que* $a_1 = \bigwedge_{t\in T_1} a_t$, *y* $a_2 = \bigvee_{t\in T_2} a_t$, *con* T_1, T_2 *conjuntos infinitos, se tiene que* $h(a_1) = I \bigwedge_{t\in T_1} h(a_t)$ *y* $h(a_2) = \bigvee_{t\in T_2} h(a_t)$

En McKinsey and Tarski [1948] se da una condición para que el isomorfismo de Stone preserve operaciones generalizadas cuando se considera como una función inyectiva $\mathscr{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{S}(A))$ de un apb o abt en el campo de subconjuntos de su espacio de Stone. Consiste en restringir su dominio a un tipo especial de filtros, denominados $Q-$filtros. Se definen de la siguiente manera:

Definición 1.22. *Dada* $\mathscr{A}$ *apb o abt, y* Q *conjunto de elementos expresables como el ínfimo o supremo de un conjunto infinito* $S = \{s_t\}_{t\in T}$, *un filtro* $\nabla \subseteq \mathscr{A}$ *es un* $Q-$*filtro si para todo* $q \in Q$, *se tiene que:*

- *Si* $q = \bigvee_{t\in T} s_t$, *y* $q \in \nabla$, *entonces existe un índice* t_0 *tal que* $s_{t_0} \in \nabla$.
- *Si* $q = \bigwedge_{t\in T} s_t$, *y* $q \notin \nabla$, *entonces existe un índice* t_0 *tal que* $s_{t_0} \notin \nabla$.

En Rasiowa and Sikorski [1963] se da una condición topológica para la existencia de tal tipo de homomorfismo. Con esto se tienen todos los elementos para enunciar los teoremas de representación correspondientes a las estructuras presentadas. Estos teoremas constituyen parte de los teoremas centrales y clásicos de Rasiowa and Sikorski [1963]. Por esto se remite al lector a las demostraciones originales. Para referencia y consulta de tales, se da el capítulo, parágrafo y sección correspondientes a la edición dada en la bibliografía.

Teorema 1.2.1. *(III, 4.3) Toda álgebra booleana topológica* $\mathscr{A}$ *es isomorfa a un campo de conjuntos topológico de un espacio* X *con* $|X| \leqslant 2^{|\mathscr{A}|}$. *La familia* $\{h(a) : a = Ia, a \in \mathscr{A}\}$ *con* $h : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(X)$ *isomorfismo, es una base para* (X, τ). *Si se tiene un conjunto numerable de elementos expresables como el supremo e ínfimo de conjuntos infinitos, se puede asumir que* h*, el isomorfismo de Stone preserva las operaciones generalizadas*

Este teorema es el análogo más directo al teorema de representación de Stone, pues el espacio asociado a $\mathscr{A}$ abt tendrá como universo $\mathcal{S}(A)$, en tanto que para dotarlo de topología, se toma como base precisamente a la clase $\{h(a) : a = Ia, a \in \mathscr{A}\}$. Como tal h se puede tomar el isomorfismo de Stone restringido a $Q-$filtros. No obstante, Rasiowa and Sikorski [1963] da también otro tipo de representaciones especiales bajo las cuales se garantiza la existencia de $Q-$homomorfismos, dadas en los siguientes teoremas.

Teorema 1.2.2. *(III, 10.1) Sea $\mathscr{A}$ abt generalizada, para cada conjunto numerable de elementos representables como el supremo o ínfimo de un conjunto infinito, existe X_0 conjunto de irracionales, y $h : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(X_0)$, $Q-$ isomorfismo topológico.*

En el caso de las abt finitas se opta por una representación especial dada en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.3. *(III, 8.3) Toda álgebra booleana topológica finita es isomorfa a un campo de subconjuntos de un subespacio abierto denso de un espacio topológico métrico denso en sí mismo.*

Las propiedades que restan por presentar para las apb dependen de la relación que existe entre estas estructuras y las abt, y se presentan en los siguientes lemas

Lema 1.9. *Para toda álgebra pseudobooleana $\mathscr{A}$, existe un álgebra booleana topológica $\mathscr{B}$, tal que $\mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{B})$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ apb y considérese $B = \{\nabla \subseteq \mathscr{A} : \nabla \text{ es filtro primo}\}$. Se tiene entonces que mediante $h : \mathscr{A} \to B$, con $h(a) = \{\nabla \in B : a \in \nabla\}$, $\mathscr{A}$ es isomorfa a $h[\mathscr{A}]$. Si pérdida de generalidad se considera entonces que $h[\mathscr{A}]$ es una subálgebra del álgebra booleana $\wp(B)$.

Entonces, se considera $\mathscr{B} = \langle \mathscr{A} \rangle$ el álgebra booleana generada por $\mathscr{A}$, que es una subálgebra booleana de $\wp(B)$. Sólo en esta demostración se denotará mediante $\Rightarrow$ al pseudocomplemento relativo en $\mathscr{B}$. Se observa que todo elemento $b \in \mathscr{B}$ es de la forma:

$$a_1 \Rightarrow a_1' \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a_n' \qquad \text{con } a_i, a_i' \in \mathscr{A} \quad \text{y} \quad a_i \Rightarrow a_i' = a_i^* \vee a_i'. \tag{1.1}$$

Para verlo, se nota que por lo mostrado en el lema 1.2, todo elemento en $\mathscr{B}$ es también de la forma $\wedge_{i=1}^{n}(\vee_{j=1}^{m_i} a_{i,j})$. En virtud de esto, sólo se debe mostrar que cada elemento $\vee_{j=1}^{m} a_{ij}$ puede ser visto de la forma $a^* \vee b$ con $a, b \in \mathscr{A}$. Entonces, dados $a_1, \ldots a_n,\ b_1, \ldots b_m \in \mathscr{A}$, con $n, m \geqslant 0$, no ambos cero, se tiene que si se toma

$$a = \left\{ \begin{array}{rl} a_1 \wedge \ldots \wedge a_n & \text{si } 0 < n \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right\}$$

$$b = \left\{ \begin{array}{rl} b_1 \vee \ldots \vee b_n & \text{si } 0 < m \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{array} \right\}$$

entonces se puede expresar cada elemento en $\mathscr{B}$ en la forma dada en la ecuación 1.1 Por otro lado, todo elemento de la forma 1.1 está en $\mathscr{B}$. Ahora, se define un operador interior en $\mathscr{B}$ por casos. Para $b \in \mathscr{B}$, con

$b = a_1 \Rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a'_n$, se toma $Ib = a_1 \to a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \to a'_n$ con $\to$ el pseudocomplemento relativo en $\mathscr{A}$, en tanto que para $a \in \mathscr{A}\, Ia = a$. Se observa que tal definición no depende del representante. Primero, $a \to a' \leqslant a \Rightarrow a'$, pues por definición de pseudocomplemento relativo se tiene que $a \wedge (a \to a') \leqslant a'$, lo que significa que $a \to a' \leqslant a \Rightarrow a'$, nuevamente por definción de pseudocomplemento. Entonces, si se tiene que

$$a_1 \Rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a'_n \leqslant a \Rightarrow a'$$

en tanto que $a_i \to a'_i \leqslant a_i \Rightarrow a'_i$, implica que

$$a_1 \to a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \to a'_n \leqslant a_1 \Rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a'_n$$

entonces

$$(a_1 \to a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \to a'_n) \wedge a \leqslant (a_1 \Rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a'_n) \wedge a \leqslant a'$$

por definición de pseudocomplemento. Se concluye que

$$a_1 \to a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \to a'_n \leqslant a \to a'$$

nuevamente por definición de pseudocomplemento. De aquí que si

$$b = a_{1,1} \Rightarrow a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \Rightarrow a'_{1,n} = a_{2,1} \Rightarrow a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \Rightarrow a'_{2,n}$$

entonces la siguiente condición:

$$a_{1,1} \Rightarrow a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \Rightarrow a'_{1,n} \leqslant a_{2,1} \Rightarrow a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \Rightarrow a'_{2,n}$$

implica que

$$a_{1,1} \to a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \to a'_{1,n} \leqslant a_{2,1} \to a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \to a'_{2,n}$$

y por medio de la otra desigualdad se tiene que

$$Ib = a_{1,1} \to a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \to a'_{1,n} = a_{2,1} \to a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \to a'_{2,n}$$

Se observa que es operador interior. 1. Para $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$, en tanto que $Ia_1 = a_1$ e $Ia_2 = a_2$, se tiene que $I(a_1 \wedge a_2) = a_1 \wedge a_2$, pues $a_1 \wedge a_2 \in \mathscr{A}$ es un elemento abierto, y $a_1 \wedge a_2 = Ia_1 \wedge Ia_2$ Para $b_1 =$

$a_{1,1} \Rightarrow a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \Rightarrow a'_{1,n}$ y $b_2 = a_{2,1} \Rightarrow a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \Rightarrow a'_{2,n}$ se tiene que $I(b_1 \wedge b_2) = I((a_{1,1} \Rightarrow a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \Rightarrow a'_{1,n}) \wedge (a_{2,1} \Rightarrow a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \Rightarrow a'_{2,n}))$ que por definición y asociatividad es $(a_{1,1} \rightarrow a'_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n} \rightarrow a'_{1,n}) \wedge (a_{2,1} \rightarrow a'_{2,1} \wedge \ldots \wedge a_{2,n} \rightarrow a'_{2,n}) = Ib_1 \wedge Ib_2$. 2. Para $b = a_1 \Rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a'_n$ se tiene que $Ib = a_1 \rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow a'_n \leqslant a_1 \Rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow a'_n = b$. Para $a \in \mathscr{A}$, esta propiedad es inmediata.

3.$IIb = I(a_1 \rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow a'_n) = a_1 \rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow a'_n$ por ser elementos de $\mathscr{A}$, y $a_1 \rightarrow a'_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow a'_n = Ib$. Nuevamente para $a \in \mathscr{A}$ se observa esta propiedad inmediatamente. Finalmente $I1 = I(a \Rightarrow a) = a \Rightarrow a = 1$.

□

Observación 1.2. *Para toda $\mathscr{B}$ abt, y $\mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{B})$ el apb de sus abiertos, se tiene que para $a_t \in \mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{B})$ con T conjunto infinito, $\bigvee_{t \in T} a_t$ existe en $\mathscr{A}$ si y sólo si $\bigvee_{t \in T} a_t$ existe en $\mathscr{B}$. La condición suficiente es inmediata pues $\bigvee_{t \in T} a_t$ es un elemento abierto, en tanto que para la condición necesaria se observa que si $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{A}$, entonces siempre se tendrá que $a \geqslant \bigvee_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{B}$, de forma que si $b \in \mathscr{B}$ es tal que $b \geqslant a_t$ para toda $t \in T$, entonces $a_t = Ia_t \leqslant Ib \leqslant b$ como $Ib \in \mathscr{A}$, se tiene que $a \leqslant Ib \leqslant b$, entonces $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{B}$. Ahora, se observa que si $\bigwedge_{t \in T} a_t$ existe en $\mathscr{B}$, entonces también existe en $\mathscr{A}$ y $\bigwedge_{t \in T} a_t = I \bigwedge_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{A}$. Dado $b = \bigwedge_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{B}$, se tiene que $b \leqslant a_t$ para toda $t \in T$, de donde $Ib \leqslant Ia_t = a_t$ para toda $t \in T$. Dado $a \in \mathscr{A}$ tal que $a \leqslant a_t$ para toda $t \in T$, entonces $a \leqslant b$ por definición e $Ia = a \leqslant Ib \leqslant b$, de donde $Ib = I \bigwedge_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{A}$. Entonces, si $\mathscr{B}$ es un abt completa, $\mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{B})$ también lo es.*

Lema 1.10. *Sea $\mathscr{A}$ apb, entonces, existe $h : \mathscr{A} \rightarrow \mathcal{G}(X)$ $Q-$isomorfismo pseudobooleano en una subálgebra de $\mathcal{G}(X)$ con $\mathcal{G}(X)$ completa.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ apb, por lema 1.9 $\mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{B})$ con $\mathscr{B} = \langle \mathscr{A} \rangle$ el abt generada por $\mathscr{A}$. Por el teorema 1.2.1 se tiene que $h : \mathscr{B} \rightarrow \mathcal{S}(\mathscr{B})$ el isomorfismo de Stone en $\mathcal{S}(B)$ el espacio de Stone asociado a $\mathscr{B}$ es isomorfismo booleano, y $\mathscr{B}$ es isomorfa a $\boldsymbol{\mathcal{S}(B)}$. Por corolario 1.2 $h : \mathscr{B} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}(B)}$ preserva las operaciones generalizadas, y por el lema 1.3 h restringida a $\mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{B})$ es isomorfismo pseudobooleano en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$. Entonces, como $\mathcal{B}(\mathcal{S}(B))$ el campo topológico de subconjuntos de $\mathcal{S}(B)$ es un álgebra booleana topológica completa, por la observación 1.2, $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$ es un apb completa.

Sean $a_t \in \mathscr{A}$ con $t \in T$ conjunto infinito, y $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{A}$, entonces por la observación 1.2, se tiene que $a = \bigvee_{t \in T} a_t$ en $\mathscr{B}$, de donde $h(a) = \bigvee_{t \in T} h(a_t)$ en $\boldsymbol{\mathcal{S}(B)}$. Como $a_t \in \mathscr{A}$, $h(a_t)$ son básicos en $\mathcal{S}(B)$ de donde $\bigvee_{t\in T} h(a_t) \in \mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$. Por otro lado a también es abierto por lo que $h(a)$ también está en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$. Entonces, $h(a) = \bigvee_{t\in T} h(a_t)$ en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$.

Ahora sea $a = \bigwedge_{t\in T} a_t$ en $\mathscr{A}$, y $c = \bigwedge_{t\in T} a_t$ en $\mathscr{B}$. Entonces $h(c) = \bigwedge_{t\in T} h(a_t)$ en $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{B})$. En tanto que $h(a_t) \in \mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$, por la observación 1.2, $\bigwedge_{t\in T} h(a_t) = I \bigwedge_{t\in T} h(a_t)$ en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$. Por otro lado $a \leqslant a_t$ implica que $h(a) \leqslant h(a_t)$ para toda $t \in T$, siendo estos elementos abiertos en $\mathcal{S}(B)$ se tiene que $h(a) \leqslant \bigwedge_{t\in T} h(a_t)$ de donde $h(a) = Ih(a) \leqslant I \bigwedge_{t\in T} h(a_t)$ en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$. Sea $b = I \bigwedge_{t\in T} h(a_t)$ en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$. Por ser un elemento abierto, se tiene que $b = \bigvee_{i\in I} h(b_i)$ con $b_i \in \mathscr{A}$, de donde $h(b_i) \leqslant h(a_t)$ para toda $i \in I$ y para toda $t \in T$. Por corolario 1.2 se tiene que $b_i \leqslant a_t$ para toda $i \in I$ y para toda $t \in T$ en $\mathscr{A}$, de donde $b_i \leqslant a$ y $h(b_i) \leqslant h(a)$ para toda $i \in I$, de donde $b \leqslant h(a)$, entonces $b = h(a)$ que es abierto de donde $h(a) = I \bigwedge_{t\in T} h(a_t)$ en $\mathcal{G}(\mathcal{S}(B))$ □

Esto nos garantiza la siguiente observación

Observación 1.3. *Dada $\mathscr{A}$ apb o abt, existe $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}^*$ $Q-$isomorfismo, con $\mathscr{A}^*$ apb o abt completa.*

Rasiowa and Sikorski [1963] da otro tipo de ab completas que se pueden asociar a un ab cualquiera mediante un isomorfismo diferente al de Stone en II, 10.

Como consecuencia de esta representación, se tiene un teorema de representación para apb finitas análogo al teorema de representación para abt finitas. Es decir si el apb es finita, el espacio asociado a esta apb también lo será, así que en este caso, nuevamente se elige una representación fija dada en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.4. *(IV, 4.1) Sea (X, τ) espacio métrico denso en sí mismo, $X \neq \emptyset$, y $\mathscr{A}$, apb finita; entonces existe un denso $G \in \tau$, y $h : \mathscr{A} \to \mathcal{G}(G)$, isomorfismo (en una subálgebra).*

Para cerrar este capítulo, comentamos que los problemas concernientes a la completud o completud fuerte relacionados con los teoremas de representación 1.2.2, 1.2.3 y 1.2.4 han sido ya atacados como señala Kremer [2014]. Las propiedades y relaciones entre abt y apb señaladas hasta ahora son las necesarias para el desarrollo de los siguientes capítulos. No obstante, la teoría desarrollada en Rasiowa and Sikorski [1963] alrededor de estos teoremas es basta y de interés en sí misma.

Capítulo 2

Lógica intuicionista

Como es el caso con cualquier lógica existen varios cálculos de pruebas a elegir. Por ejemplo, van Dalen [2008] dedica su capítulo 5 a la lógica intuicionista proposicional y cuantificacional mediante un cálculo de pruebas basado en deducción natural. Puede también verse como una introducción a las motivaciones de esta lógica. En el presente trabajo se sigue el sistema de pruebas tipo Hilbert dado en Rasiowa and Sikorski [1963] para todas las lógicas presentadas.

2.1. Lógica intuicionista proposicional

El conjunto de símbolos lógicos para el lenguaje de esta lógica es el siguiente: $S = \{(,), [,], \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. El conjunto de símbolos de parámetros está dado por un conjunto de variables proposicionales $V = \{p_i : i \in I\}$ con I conjunto numerable de índices. Las fórmulas bien formadas están dadas por la siguiente gramática:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi$$

con $p \in V$ conjunto de variables proposicionales. Cuando se quiera referir el conjunto de fórmulas bien formadas de manera especial, este se denotará por F. Se debe comentar que aquí se presentan todos los conectivos pues no son interdefinibles como es el caso con la lógica clásica, y como se verá más adelante una vez dada la semántica. No está por demás comentar que esta forma de definir el conjunto de fórmulas bien formadas es equivalente a la definición por recursión usual en diversos textos de lógica.[1] Como conjunto

[1]Es decir, la definición dada mediante los siguientes casos: Si $p \in V$, p es fórmula, y dadas φ, ψ fórmulas, entonces $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee$

de axiomas se tiene:

A1 $(\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)]$

A2 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

A3 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

A4 $(\alpha \to \gamma) \to [(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)]$

A5 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

A6 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

A7 $(\gamma \to \alpha) \to [(\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta))]$

A8 $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \wedge \beta) \to \gamma]$

A9 $[(\alpha \wedge \beta) \to \gamma] \to [\alpha \to (\beta \to \gamma)]$

A10 $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$

A11 $[\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)] \to \neg\alpha$

La única regla de deducción es Modus Ponens. $\dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ R1$

Esta es la lógica intuicionista proposicional que se denota $\mathcal{L}_{0,I}$. Se observa que añadiendo el axioma $\alpha \vee \neg\alpha$, se tiene el cálculo de pruebas de la lógica clásica proposicional.

Una secuencia finita $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas en $\mathcal{L}_{0,I}$ es una *prueba formal* de α en $\mathcal{L}_{0,I}$ a partir de Γ conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{0,I}$, si $\alpha_n = \alpha$ y para cada α_i, $i \leqslant n$ se tiene que o α_i es una instancia de los axiomas de $\mathcal{L}_{0,I}$ o es una fórmula en Γ, o se obtiene inmediatamente como consecuencia de $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$ con $i_1, i_2 < i$ por la regla $R1$. Se dice que α es derivable en $\mathcal{L}_{0,I}$ a partir de Γ si existe una prueba formal de α a partir de Γ y se denota $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$. Se dice que α es derivable si $\Gamma = \emptyset$, y se denota $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$.

Dado Γ conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{0,I}$ se denota por $\mathcal{T}(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas más pequeño que contenga a Γ, cualquier instancia de axiomas de $\mathcal{L}_{0,I}$ y sea cerrado bajo $R1$. Tal conjunto se denomina la teoría de Γ basada en $\mathcal{L}_{0,I}$. Si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ se dice que α es teorema de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Si $\Gamma = \emptyset$ se obtiene al conjunto de fórmulas derivables en $\mathcal{L}_{0,I}$. Se dice que una teoría es *consistente* si existe $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Equivalentemente, si no existe fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\neg\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$

$\psi, \varphi \to \psi$ son fórmulas. Y nada más es fórmula.

Dada $\mathcal{T}(\Gamma)$ se considera su álgebra de Tarski-Lindenbaum $\mathfrak{A}(\mathcal{T}) := \langle F/\sim, \leqslant\rangle$ con $F/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia dadas por la relación:

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y sólo si } \alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma) \text{ y } \beta \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$$

y $|\alpha| \leqslant |\beta|$ si y sólo si $\alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$.

Es rutina verificar que la relación $\sim$ es congruencia sobre el álgebra de fórmulas .

Lema 2.1. *El álgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{T}) := \langle F/\sim, \leqslant\rangle$ es un apb*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{0,I}$, y $|\alpha|$, $|\beta| \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ sus clases. En tanto $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha \to \alpha$, el orden es reflexivo. Que es antisimétrico es evidente. Finalmente si $|\alpha| \leqslant |\beta|$ y $|\beta| \leqslant |\gamma|$, por las siguientes instancias del axioma A1: $(\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)]$ y $(\gamma \to \beta) \to [(\beta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha)]$ y MP obtenemos que $\alpha \to \gamma \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\gamma \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Por lo tanto $\mathscr{A}$ es red. Ahora, en tanto $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $(\alpha \wedge \beta) \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por ser instancias de axioma, se tiene que $|\alpha \wedge \beta| \leqslant |\alpha|$ y $|\alpha \wedge \beta| \leqslant |\beta|$. Sea $\gamma \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $|\gamma| \leqslant |\alpha|$ y $|\gamma| \leqslant |\beta|$, entonces $(\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta))) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por ser instancia de axioma. Por la regla $R1$ tenemos entonces que $|\gamma| \leqslant |\alpha \wedge \beta|$. Con esto $|\alpha| \curlywedge |\beta| = |\alpha \wedge \beta|$. De manera análoga se verifica que $|\alpha \vee \beta| = |\alpha| \curlyvee |\beta|$. Para verificar que el pseudocomplemento relativo de $|\alpha|$ y $|\beta|$ existe, se observa que para cualquier $\gamma \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $|\gamma| \curlywedge |\alpha| \leqslant |\beta|$, se tiene que $(\gamma \wedge \alpha) \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$; y $[(\gamma \wedge \alpha) \to \beta] \to [\gamma \to (\alpha \to \beta)] \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por ser instancia de axioma. Así $|\gamma| \leqslant |\alpha \to \beta|$. Dado $\gamma \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $|\gamma| \leqslant |\alpha \to \beta|$, en tanto que $[\gamma \to (\alpha \to \beta)] \to [(\gamma \wedge \alpha) \to \beta] \in \mathcal{T}(\Gamma)$, se tiene $|\alpha| \curlywedge |\gamma| \leqslant |\beta|$. Se concluye que $|\alpha| \to |\beta| = |\alpha \to \beta|$ Entonces, $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ es distributiva.[2]. Se observa que por A11 $|\alpha \wedge \neg\alpha| \leqslant |\beta|$ para toda $\beta \in \mathcal{L}_{0,I}$, de donde $|\alpha \wedge \neg\alpha| = 0$, con lo que $0 \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})$. De lo anterior se tiene que $|\neg\alpha| = |\alpha \to 0| = |\alpha| \to |0| = |\alpha|^+$ □

Cuando se hable de $\mathcal{T}(\varnothing)$, entonces su álgebra se denota $\mathfrak{A}(\varnothing)$.

Definición 2.1. *Una valuación es una función $v : V \to \mathscr{A}$, con $\mathscr{A}$ un álgebra pseudobooleana no degenerada, es decir $|\mathscr{A}| \geqslant 2$*

En tanto que el álgebra de fórmulas es generada por V, y es libre para la clase de álgebras similares, una valuación v extiende a un homomorfismo $\overline{v} : F \longrightarrow \mathscr{A}$ como sigue:

[2] Se recuerda que toda red pseudocomplementada es distributiva

$$\begin{aligned} \overline{v}(\neg\varphi) = (\overline{v}(\varphi))^{+} \quad & \overline{v}(\varphi \to \psi) = \overline{v}(\varphi) \to \overline{v}(\psi) \\ \overline{v}(\varphi \wedge \psi) = \overline{v}(\varphi) \wedge \overline{v}(\psi) \quad & \overline{v}(\varphi \vee \psi) = \overline{v}(\varphi) \vee \overline{v}(\psi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Cuando $\mathscr{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, la valuación dada por $v(p) = |p|$ es llamada la valuación canónica. Alternativamente, dada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ y $\mathscr{A}$ álgebra pseudobooleana fija, entonces α es una función $\alpha_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{V} \to \mathscr{A}$ que, definida en el conjunto V generador del álgebra de fórmulas, extiende de manera única al álgebra de fórmulas. Esto es si $\alpha = p$ la función $\alpha_{\mathscr{A}}(v) := p_{\mathscr{A}}(v) = v(p)$ extiende de manera natural a fórmulas. Es decir, para $\alpha = \neg\beta$, $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$ y $\beta \to \gamma$ se define $\alpha_{\mathscr{A}}$ con $(\neg\beta)_{\mathscr{A}}$, $(\beta \wedge \gamma)_{\mathscr{A}}$, $(\beta \vee \gamma)_{\mathscr{A}}$ y $(\beta \to \gamma)_{\mathscr{A}}$ respectivamente; mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\neg\beta)_{\mathscr{A}}(v) = \beta_{\mathscr{A}}(v)^{+} \quad & (\beta \wedge \gamma)_{\mathscr{A}}(v) = \beta_{\mathscr{A}}(v) \wedge \gamma_{\mathscr{A}}(v) \\ (\beta \vee \gamma)_{\mathscr{A}}(v) = \beta_{\mathscr{A}}(v) \vee \gamma_{\mathscr{A}}(v) \quad & (\beta \to \gamma)_{\mathscr{A}}(v) = \beta_{\mathscr{A}}(v) \to \gamma_{\mathscr{A}}(v) \end{aligned} \tag{2.2}$$

por practicidad, cuando así se requiera, se denotará la función $\alpha_{\mathscr{A}}$ mediante su caso definido usando la fórmula en cuestión.

Definición 2.2. *Una valuación $v : V \to \mathscr{A}$ es un* modelo *para un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{0,I}$ si $\alpha_{\mathscr{A}}(v) = 1_{\mathscr{A}}$ para toda $\alpha \in \Gamma$. Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ es* válida *en un apb $\mathscr{A}$ si para toda $v \in \mathscr{A}^{V}$ se tiene que $\alpha_{\mathscr{A}}(v) = 1_{\mathscr{A}}$. Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ es una* tautología proposicional intuicionista *si es válida en toda apb, y se denota $\models_{\mathscr{A}} \alpha$*

Dada una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$, se dice que $v \in \mathscr{A}^{V}$ es *modelo* para $\mathcal{T}(\Gamma)$ si v es modelo para Γ. Se dice que es modelo adecuado si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ si y sólo si $\alpha_{\mathscr{A}}(v) = 1$. Dada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$, se dice que es *refutable* en $\mathcal{T}(\Gamma)$ si $\neg\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, en otro caso α es *irrefutable* en $\mathcal{T}(\Gamma)$. En adelante en este apartado cuando se habla de validez se habla solamente de validez proposicional intuicionista, y cuando se mencione una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$, será una teoría basada en $\mathcal{L}_{0,I}$.

Afirmación 2.1. *Dada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$, si $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$ entonces $\models_{\mathscr{A}} \alpha$*

Demostración. Para los fines de esta prueba, dada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ y $v :\to \mathscr{A}$ valuación en un apb, el elemento $\alpha_{\mathscr{A}}(v)$ será denotado mediante $\boldsymbol{\alpha}$. También, se recuerda que por la observación 1.1 en un apb, $a \to b = 1$ si y sólo si $a \leqslant b$. Entonces, sean $\alpha,\ \beta, \gamma \in \mathcal{L}_{0,I}$ y $v : V \to \mathscr{A}$ valuación; se observa que los axiomas son válidos.

Para $A1$, se tiene que $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))_{\mathscr{A}}(v) = 1$, pues $(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}) \leqslant ((\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) \to (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}))$, ya que por lo observado en el lema 1.1 punto 3., $(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) \leqslant (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma})$, y por definición de pseudocomplemento, esto implica que $(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}) \leqslant ((\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) \to (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}))$, de donde $(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}) \to ((\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) \to (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma})) = 1$.

En los casos de $A5$ y $A6$ se tiene directamente que los elementos $((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)_{\mathscr{A}}(v)$ y $((\alpha \wedge \beta) \to \beta)_{\mathscr{A}}(v)$ son el máximo en $\mathscr{A}$, pues $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}$ y $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \leqslant \boldsymbol{\beta}$ de donde $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} = 1 = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\beta}$. Análogamente para $A2$ y $A3$ se observa que $(\alpha \to (\alpha \vee \beta))_{\mathscr{A}}(v) = 1 = (\beta \to (\alpha \vee \beta))_{\mathscr{A}}(v)$.

Para $A4$, se demuestra que $(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}) \leqslant ((\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) \to ((\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\gamma}))$. Para ello basta ver que $(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) \leqslant ((\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\gamma})$, y para ello basta ver que $(\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta}) \wedge [(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})] \leqslant \boldsymbol{\gamma}$, que es igual a $[\boldsymbol{\alpha} \wedge [(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})]] \vee [\boldsymbol{\beta} \wedge [(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})]] = [(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\gamma}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})] \vee [(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\gamma}) \wedge (\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma})] \leqslant \boldsymbol{\gamma}$. Con esto $((\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))_{\mathscr{A}}(v) = 1$.

Análogamente, para $A7$ se observa que $\boldsymbol{\gamma} \wedge [(\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\beta}) \wedge (\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\alpha})] \leqslant (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})$, pues el lado izquierdo de esta desigualdad es igual a $\boldsymbol{\gamma} \wedge (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})$ ya que, por la afirmación 1.1, se tiene que $\boldsymbol{\gamma} \wedge (\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\beta}$. Análogamente se tiene que $\boldsymbol{\gamma} \wedge (\boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\alpha}$. Se concluye que $((\gamma \to \alpha) \to [(\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta))])_{\mathscr{A}}(v) = 1$.

También, para $A8$, se tiene que $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \wedge (\boldsymbol{\alpha} \to (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})) \leqslant \boldsymbol{\gamma}$, pues nuevamente $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \wedge (\boldsymbol{\alpha} \to (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})) = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \wedge \boldsymbol{\gamma}$ en tanto que por la afirmación 1.1, se tiene que $\boldsymbol{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\alpha} \to (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})) = \boldsymbol{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma})$, y se tiene que $\boldsymbol{\beta} \wedge (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma}$, de donde $(((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \wedge \beta) \to \gamma])_{\mathscr{A}}(v) = 1$.

Nuevamente, para $A9$ se observa que $((\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\gamma}) \leqslant (\boldsymbol{\alpha} \to (\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\gamma}))$, pues $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \wedge ((\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\gamma}) \leqslant \boldsymbol{\gamma}$ por definición de pseudocomplemento. Así $([(\alpha \wedge \beta) \to \gamma] \to [\alpha \to (\beta \to \gamma)])_{\mathscr{A}}(v) = 1$.

Para $A10$ se tiene que $(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}^{+}) \leqslant \boldsymbol{\beta}$ para toda $\beta \in \mathcal{L}_{0,I}$, con lo que directamente se ve que $((\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta)_{\mathscr{A}}(v) = 1$ Finalmente, para $A11$, en tanto que $\boldsymbol{\alpha} \to (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}^{+}) = \boldsymbol{\alpha} \to 0 = \boldsymbol{\alpha}^{+} \leqslant a^{+}$ también se tiene que $([\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)] \to \neg\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = 1$.

Para concluir, se observa que si $(\alpha \to \beta)_{\mathscr{A}}(v) = 1 = \boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}$, y $(\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = 1 = \boldsymbol{\alpha}$, entonces se tiene que $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta}$, y por lo anterior $1 \leqslant \boldsymbol{\beta}$, de donde $\boldsymbol{\beta} = 1$.

$\square$

Afirmación 2.2. *Dadas $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ y $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría basada en $\mathcal{L}_{0,I}$, se denota por $|\alpha|$ la clase de α en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, y se tiene:*

1. *$|\alpha| = 1$ si y sólo si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$*
2. *α es irrefutable si y sólo si $|\alpha| \neq 0$*
3. *$\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente si y sólo si $|\mathfrak{A}(\mathcal{T})| \geqslant 2$*

Demostración. 1. Sea $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $|\alpha| = 1$, entonces $|(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta| \leqslant |\alpha|$, es decir $[(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta] \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Como $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por ser instancia de A10, $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, en tanto que $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha \to [(\alpha \to \alpha) \to \alpha]$, se tiene $\alpha \to [(\alpha \to \alpha) \to \alpha] \in \mathcal{T}(\Gamma)$ de donde $(\alpha \to \alpha) \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, es decir $|(\alpha \to \alpha)| \leqslant |\alpha|$, pero $|(\alpha \to \alpha)| = 1$ de donde $|\alpha| = 1$.

2. Si α es irrefutable, entonces $\neg\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$ y por 1., $|\alpha| \neq 0$, pues si $|\alpha| = 0$ entonces $|\alpha|^+ = 1 = |\neg\alpha|$, de donde $\neg\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, contradiciendo $\neg\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Por otro lado si $|\alpha| \neq 0$, tenemos que $|\neg\alpha| \neq 1$, y por 1, $\neg\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$.

3. Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ tal que $|\mathfrak{A}(\mathcal{T})| = 1$. Sea $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, por 1, $|\beta| = 1$, de donde $|\neg\beta| = |\beta|^+ = 1^+$, en tanto que $|\mathfrak{A}(\mathcal{T})| = 1$, $1^+ = 1$, y por 1. $\neg\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, de donde $\mathcal{T}(\Gamma)$ es inconsistente. Por otro lado, si existe α tal que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, y $\neg\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $|\alpha| = 1$, y $|\neg\alpha| = 1$, y por ser red $|\alpha| \wedge |\neg\alpha| \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, y por lo anterior $|\alpha| \wedge |\neg\alpha| = 1$. Como para toda $\beta \in \mathcal{L}_{0,I}$, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, $1 = |\alpha| \wedge |\neg\alpha| \leqslant |\beta| = 1$, entonces $|\mathfrak{A}(\mathcal{T})| = 1$. ◻

Afirmación 2.3. *Sean $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{0,I}$ y $\mathcal{T}(\Gamma)$ su teoría basada en $\mathcal{L}_{0,I}$; entonces, el conjunto $\Gamma_{|\alpha|} = \{|\alpha| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \alpha \in \Gamma\}$ y el conjunto $\nabla_\Gamma = \{|\alpha| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)\}$ cumplen lo siguiente:*

1. $\nabla_\Gamma = \langle \Gamma_{|\alpha|} \rangle$
2. *$\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente si y sólo si ∇_Γ es propio*

Demostración. 1. Primero, se observa que ∇_Γ es filtro. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ con $|\alpha|$, $|\beta| \in \nabla_\Gamma$, entonces en tanto que $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha \to (\beta \to \alpha)$, $\alpha \to (\beta \to \alpha) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y de ahí $\alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$. También $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} a \to \alpha$ implica que $\alpha \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Por la siguiente instancia del axioma 7: $(\alpha \to \alpha) \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta))]$ y MP $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, de donde $|\alpha \wedge \beta| \in \nabla_\Gamma$.

Ahora sea $|\alpha| \wedge |\beta| = |\alpha \wedge \beta| \in \nabla_\Gamma$, entonces $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, y en tanto $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $(\alpha \wedge \beta) \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, se tiene que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, es decir $|\alpha|$, $|\beta| \in \nabla_\Gamma$. Se concluye que ∇_Γ es filtro.

Sea $G = \{|\alpha| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \exists |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n| \in \Gamma_{|\alpha|}, |\alpha_1| \wedge, \ldots \wedge |\alpha_n| \leqslant |\alpha|\}$. Dada $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, prueba de α en $\mathcal{L}_{0,I}$ a partir de Γ. Si $n = 1$, entonces, o α es instancia de axioma o $\alpha \in \Gamma$.

Si α es instancia de axioma, entonces $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$, y por la afirmación 2.1, $|\alpha| = 1 \in \mathfrak{A}(\varnothing)$. Entonces, para cualquier conjunto finito de clases en $\Gamma_{|\alpha|}$, se cumple que $|\alpha_1| \wedge, \ldots, \wedge |\alpha_n| \leqslant |\alpha|$. Si $\alpha \in \Gamma$, entonces cumple la propiedad anterior para el ínfimo de $|\alpha|$ misma. En ambos casos $|\alpha| \in G$. Si $n = 3$ y $\alpha_1 = \beta \to \gamma$, $\alpha_2 = \beta$, y $\alpha_3 = \gamma = \alpha$; por hipótesis existen $|\alpha_i|$, $|\beta_j| \in \Gamma_{|\alpha|}$, con $1 \leqslant i \leqslant r$ y $1 \leqslant j \leqslant s$, para algún $s, r \in \omega$, tales que $\wedge_i|\alpha_i| \leqslant |\beta \to \gamma|$, y $\wedge_j|\beta_j| \leqslant |\beta|$, de donde $\wedge_i|\alpha_i| \wedge \wedge_j|\beta_j| \leqslant (|\beta| \wedge (|\beta| \to |\gamma|)) = |\beta| \wedge |\gamma| \leqslant |\gamma|$, y con ello $|\gamma| \in G$. Si suponemos válido para una prueba de longitud m, entonces para una prueba de longitud $m+1$ el resultado se sigue de los casos aquí señalados.

Dada $|\alpha| \in G$, existen $|\alpha|_1, \ldots |\alpha|_n \in \Gamma_{|\alpha|}$ tales que $\wedge_{i=1}^{n}|\alpha|_i \leqslant |\alpha|$. Como $|\alpha|_i \in \bigtriangledown_\Gamma$, para toda i, y $\bigtriangledown_\Gamma$ es filtro, $|\alpha| \in \bigtriangledown_\Gamma$. Por lo tanto $\bigtriangledown_\Gamma = \langle \Gamma_{|\alpha|} \rangle$

2. Finalmente, si $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente, existe α tal que $\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, y $|\alpha| \notin \bigtriangledown_\Gamma$; también es directo el regreso pues si existe $|\alpha| \notin \bigtriangledown_\Gamma$; entonces $\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. □

De lo anterior podemos obtener los teoremas de finititud y de la deducción para $\mathcal{L}_{0,I}$:

Teorema 2.1.1. *(de finitud)*

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \beta$ *si y sólo si existen* $\alpha_i \in \Gamma, 1 \leqslant i \leqslant r$ *tales que* $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} (\alpha_1 \wedge, \ldots \wedge \alpha_r) \to \beta$

Demostración. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \beta$, entonces $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Considerando $\bigtriangledown_\Gamma$, se tiene que $|\beta| \in \mathfrak{A}(\varnothing)$ es tal que $|\beta| \in \bigtriangledown_\Gamma$. Por el lema anterior, existen $\alpha_i \in \Gamma$ con $1 \leqslant i \leqslant r$ tales que $(|\alpha|_1 \wedge, \ldots, \wedge|\alpha|_r) \leqslant |\beta|$, con $|\alpha|_i \in \mathfrak{A}(\varnothing)$. Entonces $|(\alpha_1 \wedge, \ldots, \wedge\alpha_r) \to \beta| = 1$ en $\mathfrak{A}(\varnothing)$ y por la afirmación 2.2 $(\alpha_1 \wedge, \ldots, \wedge\alpha_r) \to \beta \in \mathcal{T}(\varnothing)$, de donde $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} (\alpha_1 \wedge, \ldots, \wedge\alpha_r) \to \beta$

Si $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} (\alpha_1 \wedge, \ldots, \wedge\alpha_r) \to \beta$, con $\alpha_i \in \Gamma$, y $1 \leqslant i \leqslant r$, entonces $|(\alpha_1 \wedge, \ldots, \wedge\alpha_r) \to \beta| = 1$, es decir $|\alpha_1 \wedge, \ldots, \wedge\alpha_r| \leqslant |\beta|$, de donde $|\beta| \in \bigtriangledown_\Gamma$, y con ello $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$, de donde $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \beta$. □

Corolario 2.1. *(Teorema de la deducción)* $\alpha \vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \beta$ *si y sólo si* $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha \to \beta$.

Teorema 2.1.2. *Para toda fórmula* $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ *las siguientes son equivalentes:*

1. $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$
2. $\models_{\mathscr{A}} \alpha$
3. *α es válida en toda apb de conjuntos abiertos de un espacio topológico X.*
4. $\alpha_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v_0) = 1$ *con* v_0 *la valuación canónica*
5. *α es válida en toda apb finita.*
6. *α es válida en toda apb finita con a lo más* 2^{2^r} *elementos con r el número de subfórmulas de* α
7. *α es válida en el apb de todos los subconjuntos abiertos de un espacio métrico denso en sí mismo distinto del vacío*

Demostración. 1. → 2. Por la afirmación 2.1. 2. → 3. Directamente. 3. → 4. Sea $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ que cumple 3. Por lema 1.10, existe $h : \mathfrak{A}(\emptyset) \to \mathcal{G}(X)$ isomorfismo. Se define $v_1 : V \to \mathcal{G}(X)$, con $v_1(p) = h(p_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0))$, valuación. Vistas como una función de $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$, $v_1(\alpha)$ y $h(\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0))$ son funciones del álgebra de fórmulas en $\mathcal{G}(X)$, que coinciden en el conjunto generador del álgebra de fórmulas, por lo que su extensión a fórmulas es un homomorfismo que preserva la igualdad entre las funciones, pues la extensión es única. Entonces $\alpha_{\mathcal{G}(X)}(v_1) = X$, por hipótesis, esto es $h(\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0)) = X$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0) = 1$; por ser h isomorfismo.

También 3. → 5. Sea $v : V \to \mathscr{A}$ con $\mathscr{A}$ apb finita tal que $\alpha_{\mathscr{A}}(v) \neq 1$, por el lema 1.9 $\mathscr{A} = \mathcal{G}(\mathscr{A}_1)$, con $\mathscr{A}_1$ álgebra booleana topológica, entonces α no es válida en esa álgebra pseudobooleana de conjuntos abiertos de $\mathscr{A}_1$. De la misma forma 3. → 6. y 3. → 7. directamente.

4. → 1. Si $\nvdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$, entonces $\alpha \notin \mathcal{T}(\emptyset)$, y $|\alpha| \neq 1$ por la afirmación 2.2, por ello $\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0) \neq 1$ 4. → 5. Sea $v : V \to \mathscr{A}$ con $\mathscr{A}$ apb finita, tal que $\alpha_{\mathscr{A}}(v) \neq 1$, entonces $\nvdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha$ por la afirmación 2.1, es decir $\alpha \notin \mathcal{T}(\emptyset)$, por 1 $|\alpha| \neq 1$, es decir $\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0) \neq 1$.

5. → 4. Sea $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0) \neq 1$. Considérese entonces el conjunto $A_0 = \{|\beta| \in \mathfrak{A}(\emptyset) : \beta \text{ es subfórmula de } \alpha\}$ y sea $r = |A_0|$. Entonces, por corolario 1.1 existe $\mathscr{A}_0$ apb, que es subálgebra de $\mathfrak{A}(\emptyset)$, tal que $A_0 \subseteq \mathscr{A}_0$, $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}_0$, con cardinalidad es menor igual a 2^{2^r}, y respeta las operaciones de $\mathfrak{A}(\emptyset)$. Como la valuación de α depende sólo de la valuación asignada a sus variables proposicionales, para $v : V \to \mathfrak{A}(\emptyset)$, con $v(p) = v_0(p)$ si p es subfórmula de α, $v(p) = 1$ en otro caso, se tiene que $\alpha_{\mathfrak{A}(\emptyset)}(v_0) = \alpha_{\mathscr{A}_0}(v)$. Finalmente, se observa que $|\beta| \in \mathscr{A}_0$ para β subfórmula de α, lo que se verifica directamente en el caso de las variables proposicionales, y se da por hipótesis de inducción para cualquier otra subfórmula. Por ser subálgebra, tenemos que $\alpha_{\mathscr{A}_0}(v) \neq 1$. De la misma forma 6. → 4. y 5. → 6. directamente.

7. → 5. Sea $v : V \to \mathscr{A}$ con $\mathscr{A}$ finita, tal que $\alpha_{\mathscr{A}}(v) \neq 1$. Por teorema 1.2.4, existe $h_0 : \mathscr{A} \to \mathcal{G}(G)$ isomorfismo con $G \in \tau$, denso y (X, τ), espacio métrico denso en sí mismo. Entonces $h \circ v : V \to \mathcal{G}(G)$ es valuación, y $\alpha_{\mathcal{G}(G)}(h_0 \circ v) = h(\alpha_{\mathscr{A}}(v)) \neq G$, pues $\alpha_{\mathscr{A}}(v) \neq 1_{\mathscr{A}}$, y h_0 es isomorfismo. Se considera $h_1 \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(G)$, con $h_1(U) = U \cap G$, homomorfismo sobre. Para $p \in V$ existe $U_p \in \mathcal{G}(X)$ tal que $h(v(p)) = h_1(U_p)$.

Sea $v_1 : V \to \mathcal{G}(X)$, con $v_1(p) = U_p$. Entonces, nuevamente $h_1 \circ v_1 : V \to \mathcal{G}(G)$ es valuación que coincide con $h_0 \circ v$, y $\alpha_{\mathcal{G}(G)}(h_1 \circ v_1) = h_1(\alpha_{\mathcal{G}(X)}(v_1)) = \alpha_{\mathcal{G}(G)}(h_0 \circ v) \neq G$, de donde $\alpha_{\mathcal{G}(X)}(v_1) \neq X$, pues h_1 es homomorfismo.

□

De lo anterior se puede ver entonces, como se comentó al inicio de esta sección, que por ejemplo, aquí se cumple que $\alpha^{+} \vee \beta \leqslant \alpha \to \beta$, pero no se da la igualdad. También se tiene que $\alpha^{+} \vee \beta^{+} \leqslant (\alpha \wedge \beta)^{+}$, sin que se cumpla la igualdad. Por ello es necesario incluir todos los conectivos, como será también el caso en el lenguaje de primer orden.

Lema 2.2. *Las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{T}(\Gamma)$ *es consistente*
2. *Existe* $v : V \to \mathscr{A}$*, modelo para* $\mathcal{T}(\Gamma)$.
3. *Existe un modelo adecuado.*
4. *Existe un modelo adecuado en* $\mathcal{G}(X)$

Demostración. 1. $\to$ 2. Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ consistente, entonces por la afirmación 2.2 $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ con la valuación canónica es modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$. 2. $\to$ 3. Si existe $v : V \to \mathscr{A}$, modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente y por la afirmación 2.2 $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ con la valuación canónica es además modelo adecuado. 3. $\to$ 4. Si existe $v : V \to \mathscr{A}$ modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $\mathscr{A}$ apb, entonces por lema 1.10, existe $h : \mathscr{A} \to \mathcal{G}(X)$ isomorfismo, entonces $h \circ v : V \to \mathcal{G}(X)$ es modelo adecuado, pues si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\alpha_{\mathscr{A}}(v) = 1$, y $h(\alpha_{\mathscr{A}}(v)) = 1 = X$ por ser h homomorfismo pseudobooleano. Y si $h(\alpha_{\mathscr{A}}(v)) = 1 = X$ entonces $\alpha_{\mathscr{A}}(v) = 1$ pues h es isomorfismo. 4. $\to$ 1. Sea $v : V \to \mathcal{G}(X)$ modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$, y sea $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\alpha_{\mathcal{G}(X)}(v) = 1$, de donde $(\alpha_{\mathcal{G}(X)})^{+}(v) = 0$, es decir $\neg\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, de donde $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente. □

Para la prueba de completud fuerte en este caso se recuerda que la lógica proposicional clásica tiene el mismo conjunto de fórmulas bien formadas que $\mathcal{L}_{0,I}$. Su cálculo de pruebas contiene todos los axiomas de $\mathcal{L}_{0,I}$ añadiendo el axioma $\alpha \vee \neg\alpha$, y la misma regla de derivación. Es conocido que es correcta y completa con respecto a la clase de álgebras booleanas. Entonces ser hará uso de las siguientes nociones:

Definición 2.3. *Para cada* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{0,I}$*, se determinan dos teorías:* $\mathcal{T}(\Gamma)$ *la teoría de* Γ *basada en* $\mathcal{L}_{0,I}$*, y se considera* $\mathcal{T}(\Gamma)_c$*, teoría de* Γ *basada en la lógica clásica proposicional, con el mismo lenguaje*

Entonces dado $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{0,I}$, para $\mathcal{T}(\Gamma)$, su álgebra de Tarski-Lindendaum será denotada como se ha hecho hasta ahora $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, en tanto que para su teoría clásica asociada $\mathcal{T}(\Gamma)_c$, dicha álgebra será denotada $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c$.

Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{0,I}$, $\mathcal{T}(\Gamma)_c$ y $\mathcal{T}(\Gamma)$ su teoría clásica y su teoría intuicionista asociada, con $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c$, y $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ sus respectivas álgebras de Tarski-Lindenbaum. Para cada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ se denota con $|\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$ su clase en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, y por $|\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c}$ su clase en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c$, Se define la función $h_1 : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})_c$, con $h_1(|\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = |\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c}$. Se observa que está bien definida pues si $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)_c$ y es un homomorfismo pseudobooleano (considerando a $\mathcal{T}(\Gamma)_c$ como apb).

Por otro lado dada una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{0,I}$ (o basada en la lógica proposicional clásica), se considera $\nabla_{\Gamma_{|\alpha|}}$ el filtro determinado por la teoría en $\mathfrak{A}(\varnothing)$ ($\mathfrak{A}(\varnothing)_c$) definido en el lema 2.3. Entonces dada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$, se denota por $|\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$ la clase de α en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ y por $|\alpha|_{\mathfrak{A}(\varnothing)}$, su clase en $\mathfrak{A}(\varnothing)$. La función h_2 : $\mathfrak{A}(\varnothing) \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, con $h_2(|\alpha|_{\mathfrak{A}(\varnothing)}) = |\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$, es un homorfismo pseudobooleano (booleano) sobre.

Además se observa que $h_2(|\alpha|_{\mathfrak{A}(\varnothing)}) = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$ si y sólo si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, si y sólo si $\alpha \in \nabla_{\Gamma_{|\alpha|}}$. Dada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$ tal que $h_2(|\alpha|_{\mathfrak{A}(\varnothing)}) = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$, se tiene que $|\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})} = 1$ y por la afirmación 2.2, se tiene entonces que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Si $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, por la misma afirmación $|\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})} = 1 = h_2(|\alpha|_{\mathfrak{A}(\varnothing)})$.

Se tiene que el conjunto $\nabla = \{|\alpha| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : h_2(|\alpha|) = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}\}$ es un filtro. Entonces $h_3 : \mathfrak{A}(\varnothing)/\nabla \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, con $h_3(||\alpha||) = h_2(|\alpha|)$ es un isomorfismo pseudobooleano (booleano) biyectivo. Así, dada $\mathcal{T}(\Gamma)$, se tiene que $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ es isomorfa a $\mathfrak{A}(\varnothing)/\nabla$.

Ahora, sea $\mathfrak{A}(\varnothing)_c$ el álgebra booleana de fórmulas derivables en la lógica clásica proposicional, sobre V conjunto de variables proposicionales, entonces se considera su discontinuo de Cantor, sobre V, (recordar definición 1.19) Es decir, como conjunto base tenemos a las funciones 2^V, con V el conjunto de variables proposicionales, y a cada $p \in V$ se asocia $D_p = \{f \in 2^V : f(p) = 1\}$. Se denota con $\mathrm{D} = \{D_p : p \in V\}$, y con $\mathcal{D} = \langle \mathrm{D} \rangle$, el álgebra booleana generada por D. Entonces la topología generada tomando a $\mathcal{D}$ como base, será denotada $\tau_{\mathcal{D}}$, y es la topología del discontinuo de Cantor sobre V. Ahora, sea $\mathcal{P} = \{|p| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : p \in V\}$ Entonces $h_4 : \mathcal{P} \to \mathrm{D}$, con $h(|p|) = D_p$, es una función biyectiva del conjunto de generadores de $\mathfrak{A}(\varnothing)_c$ en el conjunto de generadores de $\mathcal{D}$, por lo que extiende a un isomorfismo $h_4 : \mathfrak{A}(\varnothing)_c \to \mathcal{D}$.

Con base en lo anterior damos una prueba de completud fuerte de la lógica $\mathcal{L}_{0,I}$ con respecto al discontinuo de Cantor, que se menciona como conocida en Kremer [2014].

Teorema 2.1.3. *Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente basada en $\mathcal{L}_{0,I}$, entonces existe $v : V \to \mathcal{G}(X)$, con (X, τ) el discontinuo de Cantor, modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$.*

Demostración. Dada $\mathcal{T}(\Gamma)$ consistente, por lema 2.2, existe $v : V \to \mathscr{A}$ modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$, como tal modelo podemos tomar $v_0 : V \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la valuación canónica sobre su álgebra de Tarski Lindenbaum. Entonces, como se comentó arriba $h_1 : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})_c$, con $h_1(|\alpha|) = |\alpha|_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c}$ es homomorfismo pseudobooleano. En tanto que $\mathfrak{A}(\mathcal{T})_c$ es isomorfa a $\mathfrak{A}(\varnothing)_c/\nabla$, el filtro determinado por $\mathcal{T}(\Gamma)_c$, sin pérdida de generalidad h_1 se considera entonces como una función $h_1\mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathfrak{A}(\varnothing)_c/\nabla$. Entonces, se denota por H la composición $h_4 \circ h_1 : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \tau_{\mathcal{D}}$, con h_4 restringida a $\mathfrak{A}(\varnothing)_c/\nabla$, que es homomorfismo pseudobooleano.

La composición $H \circ v_0 : V \to \tau_h$ es una valuación en una subálgebra de los abiertos cerrados del discontinuo de Cantor, y es modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$, pues dada $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, se tiene que $\alpha_{\mathcal{G}(2^V)}(H \circ v_0) = H(\alpha_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}(v_0)) = H(1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = 2^V$, por ser H homorfismo pseudobooleano.

□

2.2. Lógica intuicionista de primer orden

El lenguaje de la lógica intuicionista de primer orden, estará dado sobre el lenguaje de la lógica de primer orden numerable. Es decir su conjunto de símbolos es numerable. El conjunto de símbolos lógicos consta de los símbolos de conectivos de la lógica $\mathcal{L}_{0,I}$, más los siguientes elementos: 1.- V un conjunto numerable de variables individuales, 2.- Ξ un conjunto numerable de variables para cuantificar y 3.- $\exists$ $\forall$ símbolos de cuantificadores. Los símbolos de parámetros están dados por $\{f_m : m \in \omega\}$ un conjunto de símbolos de función, y $\{\rho_m : m \in \omega\}$ un conjunto de símbolos de predicados. El conjunto de símbolos de función unión el conjunto de predicados es denotado por Θ. El conjunto de símbolos del lenguaje es denotado por S. Se observa que el lenguaje no contendrá igualdad. El conjunto de términos denotado por T se define recursivamente:

- Si $x \in V$, entonces $x \in T$
- Si $f_m \in \Theta$ de aridad m y $t_1 \dots t_m \in T$, entonces $f(t_1 \dots t_m) \in T$

Las funciones de aridad cero son consideradas constantes. Se observa que se puede tomar a los términos como un álgebra generada por el conjunto de variables libres tomando como operaciones, precisamente los símbolos de función $\{f_m : m \in \omega\}$. Dado $\rho_n \in \{\rho_m : m \in \omega\}$ se considera a $\rho(x_1, \dots, x_n)$ como una fórmula primitiva. Las fórmulas bien formadas están dadas por la siguiente gramática:

$$\varphi ::= \rho(t) | \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \forall\xi\varphi(x_0/\xi) \mid \exists\xi\varphi(x_0/\xi)$$

con $t \in T$ el conjunto de términos y ξ variable para cuantificar que no aparece en $\varphi(x_0)$. El conjunto de fórmulas bien formadas de esta lógica, se denotará mediante F. Dada $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ se denota al conjunto de variables individuales de α mediante $V - var(\alpha)$, y al conjunto de variables para cuantificar mediante $\Xi - var(\alpha)$. Se dice que α es una fórmula cerrada si $V - var(\alpha) = \emptyset$, de otra forma se dice que α es abierta. Dada $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ fórmula abierta, su cerradura es toda fórmula de la forma $\forall\xi\alpha(\xi)$, y se denota $\overline{\alpha}$. El conjunto de axiomas está dado por todas las instancias de sustitución dadas por las fórmulas bien formadas de este lenguaje de los axiomas A1-A11 de la sección anterior. Su cálculo de pruebas está dado por la regla R1, unión las siguientes:

$$\frac{\alpha(x_1,\ldots x_m)}{\alpha(t_1,\ldots t_m)}\ R2$$

$$\frac{\alpha(x)\to\beta}{\exists\xi\alpha(x/\xi)\to\beta}\ R3 \text{ con } x\notin V-var(\beta) \text{ y } \xi\notin\Xi-var(\alpha(x))$$

$$\frac{\alpha\to\beta(x)}{\alpha\to\forall\xi\beta(x/\xi)}\ R4 \text{ con } x\notin V-var(\alpha) \text{ y } \xi\notin\Xi-var(\beta(x))$$

$$\frac{\exists\xi\alpha(\xi)\to\beta}{\alpha(x)\to\beta}\ R5 \text{ con } \xi\notin\Xi-var(\alpha(x))$$

$$\frac{\alpha\to\forall\xi\beta(\xi)}{\alpha\to\beta(x)}\ R6 \text{ con } \xi\notin\Xi-var(\beta(x))$$

Esta es la lógica intuicionista de primer orden que denotaremos por $\mathcal{L}_{1,I}$. Para denotar que una fórmula α pertenece al conjunto de fórmulas bien formadas así definido se dirá que $\alpha\in\mathcal{L}_{1,I}$.

De manera análoga a la sección anterior se dice que una sucesión $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$ es *prueba formal de* α en $\mathcal{L}_{1,I}$ a partir de Γ conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$ si $\alpha_n=\alpha$, y para α_i se tiene que α_i es una instancia de axioma, o $\alpha_i\in\Gamma$, o α_i es inferencia inmediata de α_{i1},α_{i2} con $i1,i2<i$ mediante alguna de las reglas $R1-R6$. Una fórmula α es derivable en $\mathcal{L}_{1,I}$, a partir de un conjunto de fórmulas Γ denotado $\Gamma\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}}\alpha$ si existe una prueba formal de α a partir de Γ. Se dice que una fórmula α es derivable en $\mathcal{L}_{1,I}$ si existe una prueba de α a partir de $\Gamma=\varnothing$, y se denota $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}}\alpha$.

Dado Γ conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$ la teoría de Γ basada en $\mathcal{L}_{1,I}$, denotada $\mathcal{T}(\Gamma)$ es el conjunto de fórmulas más pequeño que contenga a Γ unión cualquier instancia de axioma de $\mathcal{L}_{1,I}$, y cerrado bajo las reglas $R1-R6$. De igual manera que en la sección anterior si $\Gamma=\varnothing$, $\mathcal{T}(\varnothing)$ es el conjunto de fórmulas derivables en $\mathcal{L}_{1,I}$, y consideramos las nociones de teoría consistente, teorema y fórmula refutable e irrefutable en analogía a la definición dada en la sección anterior.

Se considera ahora la $Q-$álgebra de $\mathcal{T}(\Gamma)$, teoría basada en $\mathcal{L}_{1,I}$, denotada $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$. Su universo está dado por las clases de equivalencia $\|\alpha\|$ determinadas por la relación: $\alpha\approx\beta$ si y sólo si $\alpha\to\beta\in\mathcal{T}(\Gamma)$ y $\beta\to\alpha\in\mathcal{T}(\Gamma)$. bajo el orden $\|\alpha\|\leqslant\|\beta\|$ si y sólo si $\alpha\to\beta\in\mathcal{T}(\Gamma)$, con operaciones generalizadas $\curlyvee$, $\curlywedge$ definidas sobre un dominio común $\mathscr{D}\subseteq\wp(F/\approx)\backslash\{\varnothing\}$. Tal dominio se define de la siguiente manera: $D\in\mathscr{D}$ si y sólo si existe $\alpha(x)\in F$ tal que $\|\alpha(t)\|\in F/\approx$ para todo $t\in T_0$, con $T_0\subseteq T$, conjunto de términos con una cantidad numerable de variables individuales y $D = \{\|\alpha(t)\|\}_{t\in T_0}$. Entonces, las operaciones generalizadas se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|\exists\xi\beta(x_0/\xi)\| &= \bigvee\nolimits_{t\in T_0}\|\beta(t)\| \\ \|\forall\xi\beta(x_0/\xi)\| &= \bigwedge\nolimits_{t\in T_0}\|\beta(t)\| \end{aligned} \tag{2.3}$$

en el orden dado en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, con $\|\beta(t)\| \in D$, para $D \in \mathscr{D}$. Por lo hecho en la sección precedente, se tiene que el álgebra $\langle F/\approx, \leqslant\rangle = \langle F/\approx, +, \wedge, \vee, \rightarrow\rangle$ es un apb, pues los mismos agumentos esgrimidos para esa prueba, se aplican en el caso en que las fórmulas estén dadas en $\mathcal{L}_{1,I}$. Entonces, sólo resta observar que las operaciones generalizadas se corresponden a lo que dicta el orden dado. Se observa que, $\forall\xi\beta(\xi) \rightarrow \forall\xi\beta(\xi) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, por ser derivable en $\mathcal{L}_{1,I}$ y por $R6$ $\forall\xi\beta(\xi) \rightarrow \beta x \in \mathcal{T}(\Gamma)$, con $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$. Por $R2$, tenemos que $\forall\xi\beta(\xi) \rightarrow \beta(t) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ para todo $t \in T_0$, de donde $\|\forall\xi\beta(\xi)\| \leqslant \|\beta(t)\|$ para todo $t \in T_0$, de donde $\|\forall\xi\beta(\xi)\| \leqslant \bigwedge_{t\in T_0}\|\beta(t)\|$. Por otro lado, si existe $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ tal que $\|\alpha\| \leqslant \|\beta(t)\|$ para todo $t \in T_0$, entonces, se toma $x \in T_0$, tal que x no aparezca en α, que existe ya que T_0 contiene un número infinito de variables libres, entonces $\alpha \rightarrow \beta(x) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y por $R4$, se tiene que $\alpha \rightarrow \forall\xi\beta(\xi) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, con $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$ de donde $\|\alpha\| \leqslant \|\forall\xi\beta(\xi)\|$. Se conluye que $\|\forall\xi\beta(\xi)\| = \bigwedge_{t\in T_0}\|\beta(t)\|$

Análogamente se ve el caso para el existencial. Como las operaciones generalizadas sólo están definidas en su dominio $\mathscr{D}$, se puede entonces concluir que $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ es una apb generalizada. Se denotará a la clase de álgebras booleanas generalizadas mediante $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$

Se denotará $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la $Q-$álgebra de la teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$. Si se considera $\mathcal{T}(\varnothing)$, entonces su $Q-$álgebra se denota $\mathfrak{A}(\varnothing)$.

Definición 2.4. *Una* realización de términos *de un lenguaje $\mathcal{L}_{1,I}$ en un conjunto $J \neq \varnothing$ es un mapeo R definido sobre el conjunto de símbolos de función de $\mathcal{L}_{1,I}$ tal que a cada f_m le asigna una función $f_R : J^m \rightarrow J$.*

Si $J = T$, y $f_R(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces, R se denomina la *realización canónica de los términos de $\mathcal{L}$*

Definición 2.5. *Una* interpretación o realización *de $\mathcal{L}_{1,I}$ en un conjunto $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ apb completa no degenerada es un mapeo R definido en Θ tal que a $f_m \in \Theta$, le asocia $f_R : J^m \longrightarrow J$, una función en J; m la aridad de f_m y a cada $\rho_m \in \Theta$ le asigna $\rho_R : J^m \longrightarrow \mathscr{A}$.*

Cuando $\mathscr{A}$ es $\mathscr{A}_0$, entonces se dice que es la *realización semántica*, cuando $\mathscr{A}$ es $\mathcal{G}(X)$ con (X, τ) espacio topológico, se dice que es una *realización topológica*. Si $\mathscr{A}$ no es un apb completa, pero todas las operaciones generalizadas están definidas en su dominio, entonces, también se considera una realización. Alternativamente, si $\mathscr{A}$ no es completa, en tanto que por el lema 1.10, existe $h : \mathscr{A} \to \mathcal{G}(X)$, con $\mathcal{G}(X)$ completa, entonces, se puede considerar cualquier apb no degenerada como álgebra para definir una realización. De forma *auxiliar*, se consideran también realizaciones sobre $\mathscr{A} = \mathscr{A}_I$ o $\mathscr{A}_Q$, definidas adelante en 2.11 y 2.13, respectivamente.

Definición 2.6. *Dada una realización R de $\mathcal{L}_{1,I}$, en $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$, una* valuación *de $\mathcal{L}_{1,I}$, en J es una función $v : V \longrightarrow J$ con V conjunto de variables individuales de $\mathcal{L}_{1,I}$.*

Dada una realización de términos R en un conjunto $J \neq \varnothing$ $t \in T$, con T el conjunto de términos de $\mathcal{L}_{1,I}$, determina una función que toma una valuación $v : V \to J$ y regresa un elemento en J, t_R de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_R(v) &= v(x) \\ f(t_i \dots t_m)_R(v) &= f_R(t_{1R}(v), \dots t_{mR}(v)) \end{aligned}$$

Dada una realización R en un conjunto $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ apb completa, $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ determina una función que toma una valuación $v : V \to J$ y regresa un elemento α_R en $\mathscr{A}$, definido por recursión como sigue:

$$\begin{aligned} \rho(\tau_1 \dots \tau_n)_R(v) &= \rho_R(\tau_{1R}(v) \dots \tau_{nR}(v)) \\ (\beta \vee \gamma)_R(v) &= \beta_R(v) \curlyvee \gamma_R(v) \\ (\beta \wedge \gamma)_R(v) &= \beta_R(v) \curlywedge \gamma_R(v) \\ (\beta \to \gamma)_R(v) &= \beta_R(v) \to \gamma_R(v) \\ (\neg\beta)_R(v) &= (\beta_R(v))^+ \\ (\forall\xi\beta(x_0/\xi))_R(v) &= \bigwedge\nolimits_{j\in J} \beta_R(x_0)(w_j) \\ (\exists\xi\beta(x_0/\xi))_R(v) &= \bigvee\nolimits_{j\in J} \beta_R(x_0)(w_j) \end{aligned} \tag{2.4}$$

con $w_j : V \to J$ valuación tal que $w_j(x) = v(x)$ si $x \neq x_0$, $w_j(x) = j$ en otro caso.

Definición 2.7. *Dada una realización R de $\mathcal{L}_{1,I}$ en $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ apb completa, se dice que: 1. Una valuación $v \in J^V$ de $\mathcal{L}_{1,I}$ en R* satisface *$\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ si $\alpha_R(v) = 1_{\mathscr{A}}$. 2. α es* satisfacible *en R si existe $v \in J^V$ que satisface α. 3. R* es modelo *para $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ si $\alpha_R(v) = 1_{\mathscr{A}}$ para toda valuación $v : V \to J$ en R. En este caso se dice que α es válida en R. 4. Dado $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{1,I}$, conjunto de fórmulas, R* es modelo *para Γ si R* es modelo *para toda $\alpha \in \Gamma$. 5. Dada $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$, se dice que es una* tautología de la lógica intuicionista de predicados *si α es válida en cualquier realización R en toda apb, denotado $\models_{\mathfrak{AG}} \alpha$. Siempre que todo modelo de Γ sea modelo de una fórmula α, se denotará $\Gamma \models_{\mathfrak{AG}} \alpha$.*

Afirmación 2.4. *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \alpha_0$, *entonces* $\Gamma \models_{\mathfrak{AG}} \alpha_0$.

Demostración. Sea R realización de $\mathcal{L}_{1,I}$ en $J \neq \emptyset$ y $\mathscr{A}$, modelo de Γ; y sea $v : V \to J$ valuación en R, primero se observa que cualquier instancia de axioma es válida en R. Sea $s : \mathcal{L}_{0,I} \to \mathcal{L}_{1,I}$, tal que para cada $\alpha(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{L}_{0,I}$, con $p_i \in V_0$ el conjunto de variables proposicionales de α, $s\alpha(p_1, \dots, p_n) = \alpha(sp_1, \dots, sp_n)$, con $sp_1, \dots sp_n = \beta_1, \dots, \beta_n$, con $\beta_i \in \mathcal{L}_{1,I}$. Entonces para toda $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$, se tiene que $s\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$. Si $\alpha = p$ se tiene directamente que $sp = \beta \in \mathcal{L}_{1,I}$, y si $\alpha = \neg\varphi(p_1, \dots, p_n)$, entonces $s\alpha = \neg(s\varphi(p_1, \dots, p_n)) \in \mathcal{L}_{1,I}$ por HI, claramente se tiene para los conectivos binarios pues $\alpha = \varphi(p_1, \dots, p_n) \wedge \psi(q_1, \dots, q_m)$, entonces $s\alpha = s\varphi(p_1, \dots, p_n) \wedge \psi(q_1, \dots, q_m) \in \mathcal{L}_{1,I}$ pues $s\varphi(p_1, \dots, p_n)$ y $s\psi(q_1, \dots, q_m) \in \mathcal{L}_{1,I}$ por HI. Análogamente para las conectivas restantes.

Entonces $s\alpha_R(v) = \alpha_{\mathscr{A}}(sv)$ donde $sv : V_0 \to \mathscr{A}$, con $sv(p) = s(p)_R(v)$ y V_0 el conjunto de variables proposicionales de $\mathcal{L}_{0,I}$. Se observa ambos lados de la igualdad son funciones de $\alpha \in \mathcal{L}_{0,I}$, en $\mathscr{A}$de forma que para $\alpha = p$, se tiene $s\alpha_R(v) = sp_R(v) = p_{\mathscr{A}}(sv) = \alpha_{\mathscr{A}}(sv)$. Como ambas coinciden en el conjunto de generadores de las fórmulas F de $\mathcal{L}_{0,I}$, su extensión al conjunto de fórmulas es única y es homomorfismo.

Sea $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ instancia de axioma de $\mathcal{L}_{1,I}$, entonces $\alpha = s\beta$ para alguna $\beta \in \mathcal{L}_{0,I}$ y se tiene que para v, $\alpha_R(v) = s\beta_R(v) = \beta_{\mathscr{A}}(sv) = 1$. Se concluye que cualquier instancia de axioma es válida en R.

Se verifica que R sea modelo de cualquier fórmula α_0 obtenida mediante las reglas $R1 - R6$.

Si se usó R1 para obtener α_0, dadas $\beta \to \alpha_0$, y β, con $\beta \to \alpha_0$, β válidas en R, es decir $(\beta \to \alpha_0)_R(v) = 1$ y $\beta_R(v) = 1$; entonces, como $\mathscr{A}$ es apb, $\beta_R(v) \to \alpha_{0R}(v) = 1$, si y sólo si $\beta_R(v) \leqslant \alpha_{0R}(v)$, de donde $1 \leqslant \alpha_{0R}(v)$, y $\alpha_{0R}(v) = 1$.

Si se usó R2, para obtener $\alpha_0 = \alpha(t_1, \dots, t_n)$ de $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ válida en R mediante $s : V \to T$; entonces para cualquier valuación $v : V \to J$ en R, la valuación $v_s : V \to J$, $v(x) = s(x)_R(v)$ satisface a $\alpha(x_1, \dots, x_n)$, es decir $1 = \alpha(x_1, \dots, x_n)_R(v_s) = \alpha_R(s(x_1)_R(v), \dots, s(x_n)_R(v)) = (\alpha_R(t1_R, \dots, tn_R))(v) = (\alpha_0)_R(v)$.

Si $\alpha_0 = \alpha \to \forall\xi\beta(\xi)$ se obtuvo mediante R4 de $(\alpha \to \beta(x))$, válida en R, con $x \notin V = var(\alpha)$ y $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$, entonces $1 = (\alpha \to \beta(x))_R(v) = \alpha_R(v) \leqslant \beta_R(x)(v)$. En tanto que $x \notin V - var(\alpha)$, $\alpha_R(w_j) \leqslant \beta_R(x)(w_j)$ para toda $j \in J$, con w_j definida en la ecuación 2.4. Entonces $\alpha_R(v) \leqslant \beta_R(x)(w_j)$, de donde $\alpha_R(v) \leqslant \bigwedge_{j\in J} \beta_R(x)(w_j)$, es decir $(\alpha \to \forall\xi\beta(x/\xi))_R(v) = 1$. De igual manera se verifica que R3 preserva validez.

Si $\alpha_0 = \alpha \to \beta(x)$ se obtuvo por R6 de $\alpha \to \forall\xi\beta(\xi)$ valida en R, con $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$ entonces $1 = (\alpha \to \forall\xi\beta(x_0/\xi))_R(v)$ implica que $\alpha_R(v) \leqslant \bigwedge_{j\in J} \beta(x)_R(w_j)$ para toda $j \in J$, en particular para $j_o = v(x)$, de donde $\alpha_R(v) \to \beta_R(v) = 1$. De forma análoga se verifica que la regla R5 preserva validez. □

Se nota que la afirmación 2.2 se sigue cumpliendo para fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$ y teorías basadas en $\mathcal{L}_{1,I}$, por lo que será referida como justificación en los siguientes resultados. Para el siguiente lema se recuerda que $\overline{\alpha(x)}$ denota cualquier fórmula de la forma $\forall\xi\alpha(\xi)$.

Definición 2.8. *Sean $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría basada en $\mathcal{L}_{1,I}$, $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ su álgebra generalizada y para $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$, sea $\|\alpha\| \in \mathfrak{A}(\varnothing)$. Entonces, un filtro $\bigtriangledown \subseteq \mathfrak{A}(\varnothing)$ es un $\forall-$filtro si $\|\alpha\| \in \bigtriangledown$ implica que $\|\forall\xi\alpha(\xi)\| \in \bigtriangledown$ Se dice que $\bigtriangledown$ es $\forall$-generado por Γ si es el $\forall-$filtro más chico que contiene a Γ.*

Lema 2.3. *Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{1,I}$, se denota por $\overline{\mathfrak{A}(\varnothing)} = \{\|\alpha\| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \alpha$ es cerrada$\}$. Se definen los siguientes conjuntos: $\Gamma_{\|\alpha\|} = \{\|\alpha\| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \alpha \in \Gamma\}$, $\Gamma_{\overline{\|\alpha\|}} = \{\|\overline{\alpha}\| \in \overline{\mathfrak{A}(\varnothing)} : \alpha \in \Gamma\}$ $\bigtriangledown_\Gamma = \{\|\alpha\| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)\}$ $\overline{\bigtriangledown_\Gamma} = \bigtriangledown_\Gamma \cap \overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$. Entonces, se tiene lo siguiente:*

1. *$\bigtriangledown_\Gamma$ es un $\forall-$filtro en $\mathfrak{A}(\varnothing)$*
2. *$\bigtriangledown_\Gamma$ es $\forall-$generado por $\Gamma_{\|\alpha\|}$*
3. *$\bigtriangledown_\Gamma = \langle\Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}\rangle$ en $\mathfrak{A}(\varnothing)$.*
4. *$\overline{\bigtriangledown_\Gamma}$ es filtro en $\overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$*
5. *$\overline{\bigtriangledown_\Gamma} = \langle\Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}\rangle$ en $\overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$*

Demostración. 1.- $\bigtriangledown_\Gamma$ es filtro pues el argumento hecho en afirmación 1.1 vale también para fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$. y si $\|\alpha(x)\| \in \bigtriangledown_\Gamma$, entonces para $x_0 \notin V - var(\alpha(x))$, tenemos que $\alpha(x) \to (\alpha(x_0) \to \alpha(x)) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, y por MP $\alpha(x_0) \to \alpha(x) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, y para $\xi \notin \Xi - var(\alpha(x))$por R4 $\alpha(x_0) \to \forall\xi\alpha(\xi) \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Como $\alpha(x_0) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por R2, $\forall\xi\alpha(\xi) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, por MP, y $\|\forall\xi\alpha(\xi)\| \in \bigtriangledown_\Gamma$.

2.- Es claro que $\Gamma_{\|\alpha\|} \subseteq \bigtriangledown_\Gamma$. Sea $\bigtriangledown \subseteq \mathfrak{A}(\varnothing)$ $\forall-$filtro tal que $\Gamma_{\|\alpha\|} \subseteq \bigtriangledown$. Demostramos que $\bigtriangledown_\Gamma \subseteq \bigtriangledown$. Sea $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\|\alpha\| \in \bigtriangledown_\Gamma$ su clase. Por definición existe $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ prueba de α en $\mathcal{L}_{1,I}$ a partir de Γ. Si n=1, entonces o $\alpha \in \Gamma$, y $\|\alpha\| \in \bigtriangledown$, o bien α es instancia de axioma en cuyo caso $\|\alpha\| = 1$ en $\mathfrak{A}(\varnothing)$ por la afirmación 2.4, entonces $\|\alpha\| \in \bigtriangledown$. Si $n = 2$ y α se obtuvo por sustitución de $\beta(x)$, con $\|\beta(x)\| \in \bigtriangledown$ por HI, entonces, sea t_0 tal que $\alpha := \beta(t_0)$. Tenemos que $\|\forall\xi\beta(\xi)\| \in \bigtriangledown$ por ser $\forall-$filtro. Sea T_0 conjunto de términos con una cantidad numerable de variables individuales tal que $t_0 \in T_0$, entonces, $\bigwedge_{t\in T_0}\|\beta(t)\| \in \bigtriangledown$. Como $\bigwedge_{t\in T_0}\|\beta(t)\| \leqslant \|\beta(t_0)\|$, tenemos $\|\beta(t_0)\| \in \bigtriangledown$.

Si α se obtuvo por R3 de $\gamma(x) \to \beta$, con $x \notin V - var(\beta)$ y $\xi \notin \Xi - var(\gamma(x))$, con $\|\gamma(x) \to \beta\| \in \bigtriangledown$ por HI, y $\alpha := \exists\xi\gamma(\xi) \to \beta$, entonces $\|\forall\xi(\gamma(x/\xi) \to \beta)\| \in \bigtriangledown$ por ser $\forall-$filtro, y en toda apb $\bigwedge_{t\in T}(\gamma(t) \to \beta) = (\bigvee_{t\in T}\gamma(t)) \to \beta$, entonces $\|\exists\xi(\gamma(x/\xi) \to \beta)\| \in \bigtriangledown$

Si α se obtuvo por R4 de $\gamma \to \beta(x)$, con $x \notin V - var(\gamma)$, y $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$; $\|\gamma \to \beta(x)\| \in \nabla$, con $\alpha := \gamma \to \forall\xi\beta(\xi)$, entonces $\|\gamma \to \forall\xi\beta(\xi)\| \in \nabla$ por ser $\forall-$filtro.

Si $\alpha := \gamma(x) \to \beta$ se obtuvo de $\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta$, por R5 con $\xi \notin \Xi - var(\gamma(x))$, con $\|\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta\| \in \nabla$, entonces como $\|\gamma(x)\| \leqslant \bigvee_{t\in T_0}\|\gamma(t)\|$, tenemos $1 = \|\gamma(x) \to \exists\xi\gamma(\xi)\| \in \nabla$, de donde $\|\gamma(x) \to \exists\xi\gamma(\xi)\| \wedge \|\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta\| \in \nabla$ por ser filtro, y $\|\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta\| \wedge \|\gamma(x) \to \exists\xi\gamma(\xi)\| \leqslant \|\gamma(x) \to \beta\|$, de donde $\|\gamma(x) \to \beta\| \in \nabla$.

Si $\alpha := \beta \to \gamma(x)$ se obtuvo por R6 de $\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)$, con $\xi \notin \Xi - var(\gamma(x))$, $\|\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)\| \in \nabla$, entonces $\bigwedge_{t\in T_0}\|\gamma(t)\| \leqslant \|\gamma(x)\|$, de donde $1 = \|\forall\xi\gamma(\xi) \to \gamma(x)\| \in \nabla$, y $\|\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)\| \wedge \|\forall\xi\gamma(\xi) \to \gamma(x)\| \in \nabla$ por ser filtro, y $\|\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)\| \wedge \|\forall\xi\gamma(\xi) \to \gamma(x)\| \leqslant \|\beta \to \gamma(x)\|$ de donde $\|\beta \to \gamma(x)\| \in \nabla$.

Si $\alpha := \gamma$ se obtuvo de $\beta \to \gamma$, y β, con $\|\beta \to \gamma\|, \|\beta\| \in \nabla$, entonces $\|\gamma\| \in \nabla$ por ser filtro en un álgebra pseudobooleana. Con lo que $\nabla_{\Gamma_{\|\alpha\|}}$ es el $\forall-$filtro más chico que contiene a $\Gamma_{\|\alpha\|}$.

3.- Es claro que cualquier elemento $\overline{\|\alpha\|} \in \langle\Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}\rangle$ es también un elemento de ∇_Γ. Sea $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\|\alpha\| \in \nabla_\Gamma$ su clase. Entonces, nuevamente que existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ prueba de α a partir de Γ. Si $n = 1$, se tienen los siguientes dos casos. *Caso 1.* $\alpha \in \Gamma$, y $\|\overline{\alpha}\| \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$. Aquí $\overline{\|\alpha\|} \leqslant \|\alpha\|$ pues si α es cerrada, entonces $\alpha = \overline{\alpha}$. Si $\alpha := \gamma(x)$, entonces para $\xi \notin \Xi - var(\gamma(x))$ $\|\forall\xi\gamma(\xi) \to \forall\xi\gamma(\xi)\| = 1$, y por $R6$ $\|\forall\xi\gamma(\xi) \to \gamma(t)\| = 1$, de donde $\|\forall\xi\gamma(\xi)\| \leqslant \|\gamma(x)\|$. *Caso 2.* α es instancia de axioma, entonces para cualquier $\alpha_i \in \Gamma$, $\overline{\|\alpha_i\|} \leqslant \|\alpha\|$.

Si $n = 2$, se tienen los siguientes 5 casos. *Caso 1.* α es obtenida por R2 de $\beta(x)$ por sustitución, con $\alpha := \beta(t)$, y existen $\overline{\|\alpha\|}_i \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$ con $\wedge_{i=1}^n\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\beta(x)\|$. Entonces $\|\beta(x)\| = \|\beta(t)\|$, pues por un lado $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \exists\xi\beta(\xi) \to \beta(x_0)$ con $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$, y $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \beta(x) \to \beta(x_0)$ por $R6$, de donde $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \beta(x) \to \beta(t)$ por $R2$.

Por otro lado, $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \beta(x_0) \to \forall\xi\beta(\xi)$ para $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$ y $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \beta(x_0) \to \beta(x)$ por $R6$, de donde $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \beta(t) \to \beta(x)$ por $R2$. Así $\beta(x) \approx \beta(t)$, y $\|\beta(x)\| = \|\beta(t)\|$.

Caso 2. α es obtenida por R3 de $\gamma(x) \to \beta$, con $x \notin V - var(\beta)$, $\xi \notin \Xi - var - (\gamma(x))$, $\alpha := \exists\xi\gamma(\xi) \to \beta$ y existen $\overline{\|\alpha\|}_i \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$ con $\wedge_{i=1}^n\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\gamma(x) \to \beta\|$.

En tanto $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \to (\gamma(x) \to \beta)$ y $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \to (\gamma(x) \to \beta)) \to (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \wedge \gamma(x)) \to \beta)$ por $R1$ se tiene $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \wedge \gamma(x)) \to \beta$, de aquí $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \wedge \exists\xi\gamma(\xi)) \to \beta$ por $R3$ con $\xi \notin \Xi - var(\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \wedge \gamma(x))$. Además $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} ((\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \wedge \exists\xi\gamma(\xi)) \to \beta) \to (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \to [\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta])$, de donde $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \to [\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta])$, por $R1$. Se concluye que $\wedge_{i=1}^n\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta\|$.

Caso 3. α es obtenida por R4 de $\gamma \to \beta(x)$, con $x \notin V - var(\gamma)$, $\xi \notin \Xi - var(\beta(x))$, $\alpha := \gamma \to \forall\xi\beta(\xi)$ y existen $\overline{\|\alpha\|}_i \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$ con $\wedge_{i=1}^n\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\gamma \to \beta(x)\|$

Entonces $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \to (\gamma \to \beta(x))$ y $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \to (\gamma \to \beta(x))) \to [(\wedge_{i=1}^n\overline{\alpha}_i \wedge \gamma) \to \beta(x)]$

de donde $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i \wedge \gamma) \to \beta(x)$ por $R1$, $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\wedge_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i \wedge \gamma) \to \forall\xi\beta(\xi)$ por $R5$. En tanto que $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}}$ $(\wedge_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i \wedge \gamma) \to \forall\xi\beta(\xi) \to (\wedge_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i \to [\gamma \to \forall\xi\beta(\xi)])$, por $R1$ se tiene $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \wedge_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i \to [\gamma \to \forall\xi\beta(\xi)]$, de donde $\wedge_{i=1}^{n}\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\gamma \to \forall\xi\beta(\xi)\|$.

Caso 4. α es obtenida por R5 de $\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta$, con $\xi \notin \Xi - var(\gamma(x))$, $\alpha := \gamma(x) \to \beta$, y existen $\overline{\|\alpha\|}_i \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$ con $\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta\|$. Entonces como $\|\gamma(x)\| \leqslant \bigvee_{t\in T}\|\gamma(t)\|$, en un apb generalizada se tiene $\bigvee_{t\in T}\|\gamma(t)\| \to \|\beta\| \leqslant \|\gamma(x)\| \to \|\beta\|$, en particular en $\mathfrak{A}(\varnothing)$ se tiene $\|(\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta) \to (\gamma(x) \to \beta)\| = 1$ lo que implica que $\|\exists\xi\gamma(\xi) \to \beta\| \leqslant \|(\gamma(x) \to \beta)\|$, y $\wedge_{i=1}^{n}\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|(\gamma(x) \to \beta)\|$.

Caso 5. α se obtuvo por R6 de $\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)$, con $\xi \notin \Xi - var(\gamma(x))$, $\alpha := \beta \to \gamma(x)$ y existen $\overline{\|\alpha\|}_i \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$ con $\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)\|$. En tanto $\bigwedge_{t\in T}\|\gamma(t)\| \leqslant \|\gamma(x)\|$, se tiene que $\|\beta \to \forall\xi\gamma(\xi)\| \leqslant \|\beta \to \gamma(x)\|$; de donde $\wedge_{i=1}^{n}\overline{\|\alpha\|}_i \leqslant \|\beta \to \gamma(x)\|$.

Si $n = 3$ se tiene el siguiente caso: α se obtuvo por $R1$ de $\beta \to \gamma$ y β, $\alpha := \gamma$ y existen $\overline{\|\alpha\|}_i$, $\overline{\|\alpha\|}_j \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$ con $\wedge_{i=1}^{n}\overline{\|\alpha_i\|} \leqslant \|\beta \to \gamma\|$ y $\wedge_{j=1}^{n}\overline{\|\alpha_j\|} \leqslant \|\beta\|$. Entonces $\wedge_{i=1}^{n}\overline{\|\alpha_i\|} \wedge \wedge_{j=1}^{n}\overline{\|\alpha_j\|} \leqslant \|\beta\| \wedge \|\beta \to \gamma\|$, y $\|\beta\| \wedge \|\beta \to \gamma\| = \|\beta\| \wedge \|\gamma\| \leqslant \|\gamma\|$, de donde $\wedge_{i=1}^{n}\overline{\|\alpha_i\|} \wedge \wedge_{j=1}^{n}\overline{\|\alpha_j\|} \leqslant \|\gamma\|$. Suponiendo válido para una prueba de longitud m, la demostración para una prueba de longitud $m + 1$ se sigue de los casos aquí mencionados.

4.- Es claro que $\overline{\nabla_\Gamma}$ es filtro en $\overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$, pues dados $\overline{\|\alpha\|}, \overline{\|\beta\|} \in \overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$, $\overline{\|\alpha\|}, \overline{\|\beta\|} \in \overline{\nabla_\Gamma}$ si y sólo si $\overline{\|\alpha\|} \wedge \overline{\|\beta\|} \in \overline{\nabla_\Gamma}$ pues en particular están en ∇_Γ que es filtro, y por ser fórmulas en $\overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$, $\overline{\|\alpha\|} \wedge \overline{\|\beta\|} \in \overline{\mathfrak{A}(\varnothing)}$.

5.- El hecho de que $\overline{\nabla_\Gamma} = \langle \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}} \rangle$ se sigue de forma análoga al inciso 3. □

De aquí obtenemos los teoremas de finitud y de la deducción para $\mathcal{L}_{1,I}$

Teorema 2.2.1. *(Finitud)* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \alpha$, *si y sólo si existen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ *tales que* $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \overline{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\alpha_n} \to \alpha$

Demostración. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \alpha$, entonces $\|\alpha\| \in \mathfrak{A}(\varnothing)$ es tal que $\|\alpha\| \in \nabla_\Gamma$. Por lo anterior existen $\overline{\|\alpha\|}_1, \ldots \overline{\|\alpha\|}_n \in \Gamma_{\overline{\|\alpha\|}}$, tales que $\overline{\|\alpha_1\|} \wedge, \ldots \wedge \overline{\|\alpha_n\|} \leqslant \|\alpha\|$, de donde $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} (\overline{\alpha_1} \wedge, \ldots \wedge \overline{\alpha_n}) \to \alpha$.

Si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \overline{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\alpha_n} \to \alpha$, entonces en $\mathfrak{A}(\varnothing)$ $\overline{\|\alpha_1\|} \wedge, \ldots \wedge \overline{\|\alpha_n\|} \leqslant \|\alpha\|$, de donde $\|\alpha\| \in \nabla_\Gamma$, es decir $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, esto es $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \alpha$.

□

Corolario 2.2. *Sea* $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ *fórmula cerrada, entonces* $\alpha \vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \beta$ *si y sólo si* $\vdash_{\mathcal{L}_{1,I}} \alpha \to \beta$

Definición 2.9. *Una sustitución es una función* $s : V \longrightarrow T$

Se observa que su extensión: $\overline{s} : T \longrightarrow T$ mediante $\overline{s}(f(t_1 \ldots t_n) = f(\overline{s}(t_1) \ldots \overline{s}(t_n))$, es única. De manera que se denota también por s. Dada una fórmula $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_{1,I}$ con $x_1, \ldots, x_n$ variables individuales, se denota por $s\alpha$ a la fórmula que resulte de reemplazar las variables libres de α por su valor bajo s. Dado el conjunto de fórmulas primitivas, su cerradura bajo sustituciones se denomina el conjunto de *fórmulas elementales*, que es el conjunto generador del álgebra de fórmulas. De esta forma una sustitución da lugar a una función del conjunto de fórmulas en sí mismo que es un homomorfismo.

Es el turno de definir la realización canónica para una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{1,I}$. Cuando el lenguaje tiene igualdad, se define primero una relación de equivalencia módulo equivalencia sintáctica. A pesar de que en este caso el lenguaje no tiene igualdad, mencionamos aquí esta relación y los detalles pertinentes para mostrar que la realización canónica adoptada es la más general.

Definición 2.10. *Sea F el conjunto de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_{1,I}$, se define la relación $\alpha \simeq \beta$ si y sólo si existen $\gamma \in \mathcal{L}_{1,I}$ y η_i, ν_i y ξ_i variables para cuantificar tales que $\alpha = \gamma(\eta_1/\nu_1, \ldots \eta_n/\nu_n)$ y $\beta = \gamma(\eta_1/\xi_1, \ldots \eta_n/\xi_n)$ y el símbolo de cuantificador para cada η_i y ξ_i es igual en α y β; o bien, si existen x_i, y_i, z_i variables individuales tales que $\alpha = \gamma(x_1/y_1, \ldots x_n/y_n)$ y $\beta = \gamma(x_1/z_1, \ldots x_n/z_n)$. La relación $\simeq$ es congruencia sobre el álgebra de fórmulas y el álgebra resultante se referirá mediante $\langle F/\simeq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$.*

Definición 2.11. *Sea $\langle F/\simeq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle$, el álgebra descrita en la definición 2.10. Las operaciones generalizadas $\bigwedge$ y $\bigvee$ tendrán dominio $\mathscr{D} \subseteq \wp(F/\simeq)\backslash\{\varnothing\}$ definido como sigue: $D \in \mathscr{D}$ si y sólo si existe $\alpha(x) \in F$ tal que $|\alpha(t)| \in F/\simeq$ para todo $t \in T_0$ y $D = \{|\alpha(t)|\}_{t \in T_0}$, con $T_0 \subseteq T$ conjunto de términos con una cantidad numerable de variables libres. Se definen de la siguiente manera:*

$$\bigvee D = \bigvee_{t \in T} |\alpha(t)| = |\exists \xi \alpha(\xi)| \qquad \bigwedge D = \bigwedge_{t \in T} |\alpha(t)| = |\forall \xi \alpha(\xi)|$$

donde ξ es una variable para cuantificar que no aparece en $\alpha(x)$. Entonces, a esta álgebra se le denomina la $Q-$álgebra de $\mathcal{L}_{1,I}$, y será denotada por $\mathscr{A}_Q$.

Observación 2.1. *Una $Q-$álgebra es libre para la clase $\mathfrak{Q}$ de las álgebras similares, teniendo a $\{|\alpha(x)| :$ $\alpha(x)$es fórmula elemental$\}$ como conjunto de generadores.*

Definición 2.12. *Sea $\mathcal{L}$ lenguaje de primer orden, se dice que $\overline{\mathcal{L}}$ es una* extensión *de $\mathcal{L}$ si $S \subseteq \overline{S}$ con S el conjunto de símbolos de $\mathcal{L}$ y $\overline{S}$ el conjunto de símbolos de $\overline{\mathcal{L}}$.*

Dada una sustitución $s : V \rightarrow T$, se busca que la función $s_s : F/\simeq \rightarrow F/\simeq$ con $s_s(|\alpha|) = |s\alpha|$ y $s\alpha$ la extensión de s a fórmulas sea un homomorfismo de $F/\simeq$ en sí misma, pero tal función no preserva las operaciones generalizadas.

Para evitar esto se extiende el lenguaje original mediante un conjunto I de constantes individuales tal que existe $g : I \rightarrow T$ suprayectiva, con T el conjunto de términos de $\mathcal{L}_{1,I}$ e $I \cap S = \varnothing$, con S el conjunto de símbolos del lenguaje. Al conjunto de fórmulas bien formadas de este lenguaje extendido se le denota por F_I.

Definición 2.13. *Sea $\langle F_I/\simeq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\rangle$ el álgebra descrita en la definición 2.10 para el conjunto de fórmulas F_I. Las operaciones generalizadas $\bigwedge$ y $\bigvee$ son dadas como en la definición 2.11 cambiando el dominio $\mathscr{D}$ por $\mathscr{D}_I$, con $D \in \mathscr{D}_I$ si y sólo si existe $\alpha(x) \in F_I$ tal que $|\alpha(i)| \in F_I/\simeq$ para toda $i \in I$ y $D = \{|\alpha(i)| : i \in I\}$. Tal álgebra se denomina la $I-$álgebra de fórmulas.*

Se observa que la $I-$álgebra generalizada es libre para la clase $\mathfrak{Q}$ de álgebras similares con conjunto de generadores $\{|\alpha(x)| \in F/\simeq: \alpha(x)$es fórmula elemental$\}$ Para cada sustitución $s : V \to T_I$, la función $s_s : F_I/\simeq \to F_I/\simeq$ dada por $s_s(|\alpha(x)|) = |s(\alpha(x))|$ es homomorfismo.

Sea $g : I \to T$ sobreyectiva, la función $v_g : V_I \to T$ dada por $v_g(x) = x$ y $v_g(f(\iota_1, \ldots, \iota_n)) = f(g(\iota_1)\ldots g(\iota_n))$, con $\iota_1, \ldots, \iota_n$ todas las constantes individuales de I que aparecen en f, es homomorfismo del álgebra de términos T_I en el álgebra de términos T, pues $v_g(f_I(\iota_1, \ldots, \iota_n)) = f_I(g(\iota_1)\ldots g(\iota_n)) = f(g(\iota_1)\ldots g(\iota_n))$. Tal función se denomina el *homomorfismo natural* de T_I en T determinado por g. Así mismo, g determina una función $v_g : F_I \to F$ con $v_g(\alpha(\iota_1, \ldots \iota_n)) = \alpha(g(\iota_1), \ldots g(\iota_n))$. Como $v_g(\rho_I(\iota_1, \ldots \iota_n)) = \rho_I(g(\iota_1), \ldots g(\iota_n)) = \rho(g(\iota_1), \ldots g(\iota_n))$, su extensión a fórmulas es homomorfismo. Además si $\alpha \simeq \beta$, entonces $v_g(\alpha) \simeq v_g(\beta)$ en tanto que $\simeq$ depende sólo de las variables presentes en cada fórmula. Esto permite definir una función $v_g' : F_I/\simeq \to F/\simeq$, con $v_g'(|\alpha|) = |v_g(\alpha)|$ denominada el *homomorfismo natural de la $I-$álgebra en la $Q-$álgebra* determinado por g. Por la observación 2.1, v'_g es homomorfismo y sólo se debe notar que para las clases de la $I-$álgebra $|\exists\xi\beta(x_0/\xi)| = \bigvee_{i\in I} |\beta(\iota)|$, el conjunto $D = \{v_g'(|\beta(\iota)|) = |\beta(g(\iota))| : \iota \in I\} \in \mathscr{D}$. Esto se da pues $\aleph_0 = |V|$, $V \subseteq T$ y $g : I \to T$ es sobre. Así $v_g'(|\exists\xi\beta(x_0/\xi)|) = \bigvee_{i\in I} v_g(|\beta(\iota)|) = \bigvee_{i\in I}(|g(\beta(\iota))|$ es una operación definida en la $Q-$álgebra y lo mismo aplica para las clases $|\forall\xi\beta(\xi)|$.

Definición 2.14. *Sea $\mathcal{L}$ lenguaje de primer orden y $\overline{\mathcal{L}}$ extensión. R realización de $\mathcal{L}$ en J y $\mathscr{A}$, entonces R' realización de $\overline{\mathcal{L}}$ en J y $\mathscr{A}$ es llamada* extensión de *R si $f_{R'} = f_R$ para todo $f \in \Theta$ y $\rho_{R'} = \rho_R$ para todo $\rho \in \Theta$, con Θ el conjunto de símbolos de función y predicados de $\mathcal{L}$.*

Afirmación 2.5. *Sean R realización de $\mathcal{L}_{1,I}$ en J y $\mathscr{A}$ y $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ extensión de $\mathcal{L}_{1,I}$ mediante I conjunto de constantes individuales tal que existe $g : I \to J$ sobreyectiva. Entonces, R' realización de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ tal que $t_{R'} = t_R$ para todo $t \in T$, con $\iota_{R'} = g(\iota) \in J$ es extensión de R tal que para toda $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$: 1. α es satisfacible en R si y sólo si es satisfacible en R' 2. α es válida en R si y sólo si es válida en R'.*

Demostración. Es extensión por definición y dada $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$, se tiene que $\alpha_R(v) = \alpha_{R'}(v)$, pues para R y $v \in J^V$ fijas, ambas expresiones son función del álgebra de fórmulas en $\mathscr{A}$ que coinciden en el conjunto de fórmulas elementales de $\mathcal{L}_{1,I}$, pues para $\rho(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{L}_{1,I}$, se tiene que $\rho(t_1,\ldots,t_n)_{R'}(v) = \rho_{R'}(t_{1R'}(v),\ldots,t_{nR'}(v)) = \rho_R(t_{1R}(v),\ldots,t_{nR}(v)) = \rho(t_1,\ldots,t_n)_R(v)$ con lo que su extensión a fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$ es única. Así para $v \in J^V$ se tiene $\alpha_R(v) = 1$ si y sólo si $\alpha_{R'}(v) = 1$ y con esto es directo que 1. y 2. se cumplen. □

Definición 2.15. *Sean $\mathscr{A}_Q$ la $Q-$álgebra generalizada de fórmulas de $\mathcal{L}_{1,I}$, $\mathscr{A}_I$ la $Q-$álgebra de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$, la extensión de $\mathcal{L}_{1,I}$ mediante I y $G : \mathscr{A}_I \to \mathscr{A}_Q$ homomorfismo. Sea R mapeo definido sobre Θ de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ tal que:*

1. *R es la realización canónica de los términos del lenguaje $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$.*

2. *Dado $\rho_m \in \overline{\mathcal{L}_{1,I}}$, se tiene que $\rho_R(t_1\ldots,t_m) = G(|\rho(t_1\ldots,t_m)|) \in \mathscr{A}_Q$*

Entonces R es realización de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ en $J = T_I$ y $\mathscr{A}_Q$.

Observación 2.2. *Sea R la realización dada en la definición 2.15, entonces para toda $\alpha \in \overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ y para $v : V_I \to T_I$ se tiene que $\alpha_R(v) = G(|v(\alpha)|)$, ya que para $\alpha = \rho(t_1,\ldots,t_n)$ se tiene que $G(|v(\rho(t_1,\ldots t_m))|) = G(|\rho(v(t_1),\ldots,v(t_m))|) = \rho_R(t_1,\ldots t_m)(v)$.*

Definición 2.16. *Sea R_0 mapeo definido en Θ de $\mathcal{L}_{1,I}$ tal que*

1. *Existe $\approx$ relación de equivalencia sobre F las fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_{1,I}$, tal que para toda fórmula $\alpha,\beta \in \mathcal{L}_{1,I}$, si $\alpha \simeq \beta$ entonces $\alpha \approx \beta$.*

2. *$h_1 : F/\simeq \to F/\approx$, con $h_1(|\alpha|) = \|\alpha\|$ es homomorfismo.*

3. *R_0 es la realización canónica de términos en $\mathcal{L}_{1,I}$.*

4. *Dado $h : F/\approx \to \mathscr{A}$ homomorfismo, con $\mathscr{A}$ apb generalizada, $\rho_{R_0}(t_1,\ldots,t_m) = h(||\rho(t_1,\ldots,t_m)||)$*

entonces, R_0 es una realización de $\mathcal{L}_{1,I}$ en $J = T$ los términos de $\mathcal{L}_{1,I}$ y en $\mathscr{A}$. A esta realización se le llamará la realización canónica de $\mathcal{L}_{1,I}$ determinada por h.

Observación 2.3. *Para R_0, la realización dada en la definición 2.16 se tiene que para toda valuación $v : V \to T$, $\alpha_{R_0}(v) = h(\|v(\alpha)\|)$.*

Se observa que para toda $\alpha \in \overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ y $v : V \to T_I$ se tiene que $H : \mathscr{A}_I \to \mathscr{A}$, dada por $H(|\alpha|) = h(h_1(v_g'(|\alpha|)))$ es homomorfismo. Entonces se define R realización de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ en $J = T_I$ el conjunto de términos de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ y $\mathscr{A}$, tal que R es la realización canónica de términos de $\overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ y para $\rho(t_1,\ldots,t_n) \in T_i$ se tiene que $\rho_R(t_1\ldots,t_m) = H(|\rho(t_1\ldots,t_m)|) \in \mathscr{A}$. Entonces, para toda $\alpha \in \overline{\mathcal{L}_{1,I}}$ y $v : V \to T_I$ se tiene que $\alpha_R(v) = H(|v(\alpha)|)$. Sin embargo, para $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ y $v \in T^V$ se tiene que $v'_g(|v(\alpha)|) = |v_g(v\alpha)| = |g(v(\alpha))| = |v(\alpha)|$ pues $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$. Entonces $H(|v(\alpha)|) = h(h_1(v'_g(|v(\alpha)|))) = h(h_1(|v(\alpha)|)) = h(\|v(\alpha)\|)$, es decir para $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ y $v \in T^V$ $\alpha_R(v) = \alpha_{R_0}(v)$.

Se observa que para cada α, $\beta \in \mathcal{L}_{1,I}$, si $\alpha \simeq \beta$ entonces $\alpha \approx \beta$ pues si $\alpha := \rho(t_1,\ldots,t_2)$, entonces $\beta = \alpha$, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología y dada cualquier teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{1,I}$ $\alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\beta \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Si $\alpha \wedge \beta \sim \alpha' \wedge \beta'$, entonces $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha \wedge \beta \to \alpha' \wedge \beta'$ y $\vdash_{\mathcal{L}_{0,I}} \alpha' \wedge \beta' \to \alpha \wedge \beta$, es decir $\alpha \wedge \beta \approx \alpha' \wedge \beta'$ para cualquier $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{1,I}$. Análogamente para los demás conectivos. Entonces, se puede definir $h : F/\simeq \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, con $h(|\alpha|) \to \|\alpha\|$ homomorfismo sobreyectivo.

Lema 2.4. *Sean $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente, $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ su $Q-$álgebra generalizada y $g : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathscr{A}$ $Q-$homomorfismo sobre $\mathscr{A}$ apb no degenerada. Sea R_0 la realización canónica inducida por g sobre $J = T$, el conjunto de términos de $\mathcal{L}_{1,I}$ y $\mathscr{A}$, con $f_{R_0}(t_1,\ldots,t_m) = f(t_1,\ldots,t_m)$, y $\rho_{R_0}(t_1,\ldots,t_m) = g(\|\rho(t_1,\ldots,t_m)\|)$ Entonces R_0 es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$, si g es inyectiva, entonces R_0 es modelo adecuado.*

Demostración. Para $v : V \to T$ valuación en R_0 fija $\alpha_{R_0}(v) = g(\|v(\alpha)\|)$ por definición y por lo arriba mencionado. Ahora, para $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, se tiene que $v(\alpha) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por ser v una sustitución y ser $\mathcal{T}(\Gamma)$ cerrado bajo $R2$. Entonces $\|v(\alpha)\| = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$ de donde $g(\|v(\alpha)\|) = h(1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = 1_{\mathscr{A}}$. De aquí se observa que si g es isomorfismo y $g(\|\alpha\|) = 1_{\mathscr{A}}$, entonces $\|\alpha\| = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$, es decir, $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. □

Corolario 2.3. *Para $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente, existe un modelo topológico enumerable adecuado en $J = T$ y $\mathcal{G}(X_0)$ el apb de todos los abiertos de un conjunto X_0 de irracionales.*

Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente, por lema 2.4 R_0 la realización canónica en $J = T$ y $\mathscr{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ y es numerable. Por el teorema 1.2.2, para toda $\mathscr{A}$ apb numerable existe $h : \mathscr{A} \to \mathcal{G}(X_0)$ isomorfismo con X_0 conjunto de irracionales. Entonces la realización canónica en $J = T$ inducida por h es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$, nuevamente por lema 2.4.

Corolario 2.4. *Si α es irrefutable en $\mathcal{T}(\Gamma)$, entonces existe un modelo topológico enumerable R que satisface α*

Por teorema 1.2.2, existe $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathcal{G}(X_0)$ $Q-$isomorfismo. Si α es irrefutable en $\mathcal{T}(\Gamma)$, por la afirmación 2.2 para fórmulas en $\mathcal{L}_{1,I}$ se tiene que $\|\alpha\| \neq 0$, es decir $h(\|\alpha\|) \neq \emptyset$. Tomando $V = h(\|\alpha\|)$, se define $h_1 : \mathcal{G}(X_0) \to \mathcal{G}(V)$, con $h_1(U) = U \cap V$, que es $Q-$ homomorfismo sobreyectivo, y R_0 la realización inducida por $h_1 \circ h$ satisface α.

Lema 2.5. *Para $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente, las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente*

2. *Existe un modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$*

3. *Existe un modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en un apb completa*

4. *Existe un modelo topológico para $\mathcal{T}(\Gamma)$*

5. *Existe un modelo topológico adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $\mathcal{G}(X_0)$ con X_0 conjunto de irracionales.*

Demostración. 1. → 2. por lema 2.4, su realización canónica R_0 inducida por $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la función identidad, sobre $J = T$ es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ 2. → 3. Sea R realización de $\mathcal{L}_{1,I}$ en $J \neq \emptyset$ y $\mathscr{A}$ apb, modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por la observación 1.3 existe $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}^*$ $Q-$isomorfismo en $\mathscr{A}^*$ apb completa. Sea R' realización de $\mathcal{L}_{1,I}$ en $J \neq \emptyset$ y $\mathscr{A}^*$ dada por $f_{R'} = f_R$, y $\rho_{R'} = h(\rho_R)$. Entonces para $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ y $v \in J^V$se tiene $\alpha_{R'}(v) = h(\alpha_R(v))$, ya que para R y v fijas, $\alpha_{R'}(v)$ y $h(\alpha_R(v))$ son funciones del álgebra de fórmulas en $\mathscr{A}^*$ y para $\alpha := \rho(t_1, \ldots, t_m)$ tenemos que $\alpha_{R'}(v) = \rho_{R'}(t_{1R'}(v), \ldots, t_{mR'}(v)) = \rho_{R'}(t_{1R}(v), \ldots, t_{mR}(v))$ por la definición de R' en términos, y $\rho_{R'}(t_{1R}(v), \ldots, t_{mR}(v)) = h(\rho_R(t_{1R}(v), \ldots, t_{mR}(v)))$ por la definición de R' en fórmulas elementales y finalmente $h(\rho_R(t_{1R}(v), \ldots, t_{mR}(v))) = h(\alpha_R(v))$ por lo que la extensión a fórmulas de ambas funciones es la misma. Entonces para $\alpha \in \Gamma$, $\alpha_R(v) = 1_{\mathscr{A}}$ y por ser h homomorfismo entre apb, $h(\alpha_R(v)) = h(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{A}*} = \alpha_{R'}(v)$

3. → 4. Sea R en $J \neq \emptyset$ y $\mathscr{A}$ apb completa modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por lema 1.10, existe $h : \mathscr{A} \to \mathcal{G}(X)$ $Q-$isomorfismo. Entonces la realización R' en J y $\mathcal{G}(X)$ dada por $f_{R'} = f_R$ y $\rho_{R'} = h(\rho_R)$, es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ por el mismo argumento que se dió en la implicación anterior.

5. → 4. Directamente. 1. → 5. Es el corolario 2.3. 4. → 1. Sea R en $J \neq \emptyset$ y $\mathcal{G}(X)$ modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ y sea $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Por la afirmación 2.4, $\alpha_R(v) = X$ para toda $v \in J^V$, entonces $(\neg\alpha)_R(v) = \emptyset$, y por la misma afirmación se tiene entonces que $\neg\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$.

□

Lema 2.6. *Para cualquier $\alpha \in \mathcal{L}_{1,I}$ y teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ consistente, las siguientes son equivalentes:*

1. *α es teorema de $\mathcal{T}(\Gamma)$*

2. *α es válida en todo modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$*

3. *α es válida en todo modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en cualquier apb completa*

4. *α es válida en cualquier modelo topológico para $\mathcal{T}(\Gamma)$*

5. *α es válida en todo modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ numerable sobre $\mathcal{G}(X_0)$ con X_0 conjunto de irracionales.*

6. *$\alpha_{R_0}(i) = 1$ para el modelo canónico de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ con i la valuación identidad.*

Demostración. 1. $\rightarrow$ 2. Se sigue de la afirmación 2.4. 2. $\rightarrow$ 3. Directamente. 3. $\rightarrow$ 4. Sea R modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $J \neq \varnothing$ y $\mathcal{G}(X)$, apb de abiertos de X. Por el lema 1.10 existe $h : \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathscr{A}^*$ $Q-$isomorfismo en $\mathscr{A}^*$ apb completa. Entonces R' realización en J y $\mathscr{A}^*$ dada por $f_{R'} = f_R$ y $\rho_{R'} = h(\rho_R)$ cumple que $\alpha_{R'}(v) = h(\alpha_R(v))$ por un argumento análgo al del lema 2.5, por 3. se tiene que $\alpha_{R'}(v) = 1_{\mathscr{A}*} = h(\alpha_R(v))$ y por ser h isomorfismo, se tiene que $\alpha_R(v) = X$. 4. $\rightarrow$ 5. Directamente.

5. $\rightarrow$ 6.. Sea R_0 el modelo canónico de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ y $J = T$. Por teorema 1.2.2, existe $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{G}(X_0)$ $Q-$isomorfismo. Entonces R'_0 la realización canónica inducida por h, es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Para $v_0 : V \rightarrow T$, la valuación identidad, se tiene que $\alpha_{R'_0}(v_0) = h(\alpha_{R_0}(v_0)) = X_0$ y por ser h isomorfismo, se tiene que $\alpha_{R_0}(v_0) = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$.

6. $\rightarrow$ 1. Sea $\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Por el lema 2.4, R_0, la realización canónica de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $J = T$, inducida por $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la función identidad, es modelo adecuado, entonces $\alpha_{R_0}(i) \neq 1$

□

Aquí presentamos completud fuerte para $\mathcal{L}_{1,I}$ con respecto al discontinuo de Cantor. Si bien se está tomando un lenguaje numerable, en caso de tener un lenguaje no numerable, siempre se puede reducir a este caso.

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente basada en $\mathcal{L}_{1,I}$, entonces, existe R modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $\mathcal{G}(2^{\mathscr{A}})$ para el espacio $(2^{\mathscr{A}}, \tau_{\mathcal{D}})$, el discontinuo de Cantor.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente, por el lema 2.4 la realización canónica de $\mathcal{L}_{1,I}$ en $J = T$ y $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ su álgebra de fórmulas, es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por lema 1.9 existe $\mathscr{A}_1$ álgebra booleana topológica tal que $\mathfrak{A}(\mathcal{T})= \mathcal{G}(\mathscr{A}_1)$. Por teorema 1.2.1 $h : \mathscr{A}_1 \rightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$ es isomorfismo topológico. Por lema 1.3 $h_1 := h \restriction_{\mathcal{G}(\mathscr{A}_1)}$: $\mathfrak{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{G}(\mathscr{A}_1) \rightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$ es homomorfismo pseudobooleano. Por lema 1.10 h_1 es $Q-$homomorfismo pseudobooleano, es decir preserva las operaciones generalizadas.

Ahora para $\mathscr{A}_1$ se considera que por el lema 1.7 $(\mathcal{S}(A), \tau_h)$ y $(2^{\mathscr{A}}, \tau_{\mathcal{D}})$ el discontinuo de Cantor sobre $\mathscr{A}$ son homeomorfos con $\psi : 2^{\mathscr{A}} \to \mathcal{S}(A)$ homeomorfismo. Entonces por lema 1.4 $h_2 : \mathcal{G}(\mathcal{S}(A)) \to \mathcal{G}(2^{\mathscr{A}})$ con $h_2(h(a)) = \psi^{-1}[h(a)]$ es homomorfismo pseudobooleano. Como ψ es biyectiva, h_2 también lo es. Por cololario 1.2, h_2 preserva las operaciones generalizadas.

Entonces $H := h_2 \circ h_1 : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{G}(\mathscr{A}_1) \xrightarrow{h_1} \boldsymbol{\mathcal{S}(A)} \xrightarrow{h_2} \mathcal{G}(2^A)$ es $Q-$homomorfismo pseudobooleano, que induce la realización canónica R_0 en $J = T$ y $\mathcal{G}(2^A)$ que es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Recordamos que R_0 es la realización canónica en términos, en $\mathcal{L}_{1,I}$, y para $\rho_{R_0}(t_1 \ldots, t_n) = H(\|\rho(t_1, \ldots, t_n)\|)$, y cumple que para toda valuación $v : V \to T$ $\alpha_{R_0}(v) = H(\|v(\alpha)\|)$.

Entonces, sea $v : V \to T$ valuación en R_0, en $J = T$ el conjunto de términos, y sea $\alpha \in \Gamma$. Por hipótesis $\|v(\alpha)\| = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$ el uno de $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, entonces $H(\|v(\alpha)\|) = h_2(h_1(1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})})) = h_2(1_{\mathcal{S}(A)})$ por ser h_1 homomorfismo pseudobooleano, y $h_2(1_{\mathcal{S}(A)}) = 1_{\mathcal{G}(2^{\mathscr{A}})}$, nuevamente por ser homomorfismo pseudobooleano. Con ello concluimos que R_0 es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. $\square$

Para cerrar este capítulo mencionamos es interesante ver las relaciones que existen entre la lógica intuicionista y la lógica clásica que dan pie a la traducción estándar a nivel del lenguaje formal, y en en lo que respecta a las propiedades de los modelos aquí vistos, dan pie a propiedades topológicas de interés.

Capítulo 3

Lógica modal

A pesar de que no exista un acuerdo último acerca de todas las características que determinan a la lógica clásica, sí hay un consenso en incluir siempre tres principios que cumple esta lógica: el principio de identidad, el de no contradicción y el principio del tercero excluso. En este capítulo regresamos entonces al terreno de la lógica clásica pues el principio del tercero excluso $\alpha \vee \neg\alpha$ vuelve a ser parte de los axiomas que se consideran para esta lógica. No obstante, esta lógica es considerada en ocasiones como no clásica pues al añadir el operador de necesidad $\Box$ a su lenguaje, se puede hablar no sólo de lo que las cosas son, como es el caso de la lógica clásica cuando decimos que es el caso que p, sino que además se puede hablar de los *modos* en los que son las cosas, es decir se puede verificar si es *necesario que p*, o si es *posible que p*. En este sentido se dice que la lógica clásica es *extensional*, por contraposición a la lógica modal que sería *intencional*. Quienes hacen esta distinción agregarían la característica de *extensionalidad* a las características que cumple la lógica clásica. Existen varias fuentes en las que se puede consultar acerca de las lógicas modales por ejemplo Blackburn et al. [2010] y Chagrov and Zakharyaschev [1977]

3.1. Lógica modal proposicional

El conjunto de símbolos lógicos para el lenguaje de esta lógica está dado por $\{(,), [,], \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$. Los parámetros están dados por un conjunto de variables proposicionales V numerable. Las fórmulas bien formadas están construidas por la siguiente gramática:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \ \Box\,\varphi$$

En este caso nuevamente podemos definir los conectivos: $\alpha \vee \beta := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta), \alpha \to \beta := \neg\alpha \vee \beta$ y $\Diamond\varphi := \neg \Box \neg\varphi$. Su cálculo de pruebas está dado por el conjunto de esquemas de axiomas dados para la lógica intuicionista proposicional más el siguiente axioma:

A12 $\neg\alpha \vee \alpha$

y los axiomas propios del sistema modal

M1 $\Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$

M2 $\Box\alpha \to \alpha$

M3 $\Box\alpha \to \Box\,\Box\,\alpha$

M4 $\Box(\alpha \vee \neg\alpha)$

con las siguientes reglas de inferencia:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ R1$$

$$\frac{\alpha \to \beta}{\Box\alpha \to \Box\beta}\ RM1$$

Esta es la lógica modal proposicional que se denotará $\mathcal{L}_{0,\Box}$. Nuevamente se denotará por F a su conjunto de fórmulas bien formadas. Se dice que $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ es una prueba formal de α a partir de Γ en $\mathcal{L}_{0,\Box}$, si $\alpha_n = \alpha$ y para cada α_i con $0 \leqslant i \leqslant n$ se tiene que α_i es instancia de axioma, o $\alpha_i \in \Gamma$, o se sigue inmediatamente como consecuencia de α_{i1}, α_{i2} con $i1, i2 < i$ mediante las reglas $R1$ o $RM1$. Se dice que α es derivable a partir de Γ en $\mathcal{L}_{0,\Box}$ si existe una prueba formal de α a partir de Γ en $\mathcal{L}_{0,\Box}$, y se denota $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{0,\Box}} \alpha$. Si $\Gamma = \emptyset$, se dice que α es derivable en $\mathcal{L}_{0,\Box}$, y se denota $\vdash_{\mathcal{L}_{0,\Box}} \alpha$.

Nuevamente aquí, dado Γ conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{0,\Box}$ se considera al conjunto más pequeño de fórmulas en $\mathcal{L}_{0,\Box}$ que contenga a Γ y cualquier instancia de axioma, que sea cerrado bajo las reglas de derivación de $\mathcal{L}_{0,\Box}$ como el conjunto de teoremas de Γ, y se denota $\mathcal{T}(\Gamma)$. Se denomina entonces a $\mathcal{T}(\Gamma)$ la teoría de Γ basada en $\mathcal{L}_{0,\Box}$. Análogamente, se dice que $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente si existe $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ tal que $\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. En lo que resta de esta sección cualquier teoría considerada será basada en $\mathcal{L}_{0,\Box}$.

Dada una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ se considera nuevamente su álgebra de Tarski-Lindenbaum, con universo las clases de equivalencia sobre F inducidas por por la relación:

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y sólo si } \alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma) \text{ y } \beta \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$$

y con el orden $|\alpha| \leqslant |\beta|$ si y sólo si $\alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Tal álgebra se denotará $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$.

Lema 3.1. *Sean $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{0,\Box}$ y $\mathcal{T}(\Gamma)$ su teoría, entonces $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ operador interior $I|\alpha| = |\Box\alpha|$, es un álgebra booleana topológica.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ y $|\alpha|, |\beta| \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ sus clases. Entonces, se observa que las instancias de axioma relevantes para determinar que el orden dado es red son las mismas usadas en el lema 2.1. También los axiomas relevantes para definir $|\alpha| \wedge |\beta|$, $|\alpha| \vee |\beta|$, $|\alpha| \to |\beta|$ y $|\alpha|^+$ en tal lema son compartidos con esta lógica. Así, se tiene que es un apb, y $|\alpha| \wedge |\neg\alpha| = 0_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$ es su elemento mínimo. Para ver que es un álgebra booleana se nota que todo elemento tiene complemento. En tanto que es un apb, se tiene también que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ si y sólo si $|\alpha| = 1$ como se vió en la afirmación 2.2. En tanto que $\alpha \vee \neg\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, se tiene entonces que $|\alpha| \vee |\alpha|^+ = 1$, con lo que aquí $|\alpha|^+ = |\alpha|^*$ es decir, es su complemento.

Resta ver que el operador I definido cumple con las propiedades 1. – 4. dadas en la definición 1.11. Para 1., en tanto $(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $I|\alpha| \wedge I|\beta| \leqslant I|\alpha \wedge \beta|$. Por otro lado, $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, de donde $I(\alpha \wedge \beta) \to I\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ e $I(\alpha \wedge \beta) \to I\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por $RM1$, lo que implica que $I\,|\alpha \wedge \beta| \leqslant I|\alpha|$ e $I\,|\alpha \wedge \beta| \leqslant I|\beta|$, es decir $I|\alpha| \wedge |\beta| = I|\alpha \wedge \beta|$. Para 2. se tiene que dada $\alpha \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ con $|\alpha| \in \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, $\Box\alpha \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ de donde $I|\alpha| \leqslant |\alpha|$.

Para 3. Se tiene por 2. que $II|\alpha| \leqslant I|\alpha|$. Como $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $I|\alpha| \leqslant II|\alpha|$. Así $II|\alpha| = I|\alpha|$ Finalmente, como $\Box(\alpha \vee \neg\alpha) \in \mathcal{T}(\Gamma)$, observando aquí lo visto en la afirmación 2.2, que hemos mencionado arriba, se tiene que $1 = |\Box(\alpha \vee \neg\alpha)| = I|\alpha \vee \neg\alpha| = I1$.

$\square$

Cuando se considere $\Gamma = \varnothing$, entonces para la teoría $\mathcal{T}(\varnothing)$, su álgebra de Tarski-Lindenbaum será denotada $\mathfrak{A}(\varnothing)$.

Definición 3.1. *Una valuación es una función $v : V \to \mathscr{A}$ con V el conjunto de variables proposicionales y $\mathscr{A}$ abt no degenerada, es decir $|\mathscr{A}| \geqslant 2$*

En tanto que el álgebra de fórmulas es generada por V, una valuación $v : V \to \mathscr{A}$ es un homomorfismo del álgebra de fórmulas en $\mathscr{A}$ que extiende de forma única a fórmulas de la siguiente manera:

$$\overline{v}(\neg\varphi) = (\overline{v}(\varphi))^* \quad \overline{v}(\Box\varphi) = I(\overline{v}(\varphi)) \quad \overline{v}(\varphi \to \psi) = \overline{v}(\varphi) \to \overline{v}(\psi)$$
$$\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = \overline{v}(\varphi) \cap \overline{v}(\psi) \quad \overline{v}(\varphi \vee \psi) = \overline{v}(\varphi) \vee \overline{v}(\psi)$$

por lo que se denota v a la valuación extendida también. Cuando $\mathscr{A}$ sea $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, se toma a $v(p) = |p|$ para toda $p \in V$ como la valuación canónica.

Alernativamente se puede considerar $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ fórmula fija como una función que toma una valuación $v : V \to \mathscr{A}$ y regresa un elemento $\alpha_{\mathscr{A}}(v)$ en $\mathscr{A}$ abt definido como en la ecuación 2.2, sustituyendo el caso para la negación y añadiendo el caso para el operador $\Box$, es decir mediante los siguientes dos nuevos casos:

$$(\neg\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = (\alpha_{\mathscr{A}})^* \quad (\Box\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = I(\alpha_{\mathscr{A}}(v)) \tag{3.1}$$

Definición 3.2. *Se dice que $v : V \to \mathscr{A}$ es modelo de Γ conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{0,\Box}$ si $v(\alpha) = 1$, para toda $\alpha \in \Gamma$. Se dice que $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ es modalmente válida en $\mathscr{A}$, si para toda $v : V \longrightarrow \mathscr{A}$, se tiene que $v(\alpha) = 1$. Se dice que α es modalmente válida, si α es válida en toda $\mathscr{A}$ abt, y se denota $\models_{\mathscr{A}} \alpha$. Si todo modelo de Γ conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{0,\Box}$ es modelo de α entonces esto se denota $\Gamma \models_{\mathscr{A}} \alpha$.*

Dada una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$, se dice que $v : V \to \mathscr{A}$ es modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$ si para toda $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$, se tiene que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ si y sólo si $v(\alpha) = 1_{\mathscr{A}}$. Si $v : V \to \mathcal{B}(X)$, con $\mathcal{B}(X)$ campo de conjuntos topológico de (X, τ), espacio topológico, entonces se dice que v es un modelo topológico.

Afirmación 3.1. *Para α fórmula de $\mathcal{L}_{0,\Box}$ se tiene que: si $\vdash \alpha$, entonces $\models_{\mathscr{A}} \alpha$.*

Demostración. Para esta prueba el elemento $\alpha_{\mathscr{A}}(v)$ se denotará $\boldsymbol{\alpha}$. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}_{0,\Box}$, y $v : V \to \mathscr{A}$, valuación, entonces se observa que los axiomas son modalmente válidos. Para los esquemas de axiomas que se comparten con la lógica $\mathcal{L}_{0,I}$, esto se sigue de la observación 2.1, pues toda abt en particular es un apb. Sólo se debe considerar que la negación corresponde al complemento booleano. Entonces, alternativamente se puede ver que

$((\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)])_{\mathscr{A}}(v) = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}^*) \vee [(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma}^*) \vee (\boldsymbol{\alpha}^* \vee \boldsymbol{\gamma})] = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}^*) \vee [(\boldsymbol{\beta} \vee (\boldsymbol{\alpha}^* \vee \boldsymbol{\gamma})) \wedge (\boldsymbol{\gamma}^* \vee (\boldsymbol{\alpha}^* \vee \boldsymbol{\gamma}))] = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}^*) \vee [(\boldsymbol{\beta} \vee (\boldsymbol{\alpha}^* \vee \boldsymbol{\gamma}))] = (\boldsymbol{\alpha} \vee (\boldsymbol{\beta} \vee (\boldsymbol{\alpha}^* \vee \boldsymbol{\gamma})) \wedge (\boldsymbol{\beta}^* \vee (\boldsymbol{\beta} \vee (\boldsymbol{\alpha}^* \vee \boldsymbol{\gamma}))) = 1 \wedge 1 = 1$

o bien para A9 también se puede ver que

$(((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)))_{\mathscr{A}}(v) = [(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \wedge \boldsymbol{\gamma}^*] \vee [\boldsymbol{\alpha}^* \vee (\boldsymbol{\beta}^* \vee \boldsymbol{\gamma})] = [(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \vee [\boldsymbol{\alpha}^* \vee (\boldsymbol{\beta}^* \vee \boldsymbol{\gamma})]] \wedge [\boldsymbol{\gamma}^* \vee [\boldsymbol{\alpha}^* \vee (\boldsymbol{\beta}^* \vee \boldsymbol{\gamma})]] = 1 \wedge 1 = 1$

En el caso del axioma proposicional añadido es inmediato que $(\alpha \vee \neg\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = \boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\alpha}^* = 1$ y sólo falta ver que los axiomas propios del sistema modal son válidos:

Para $M1$ $((\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta))_{\mathscr{A}}(v) = ((\boldsymbol{I\alpha})^* \vee (\boldsymbol{I\beta})^*) \vee \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = ((\boldsymbol{I\alpha})^* \vee (\boldsymbol{I\beta})^*) \vee (\boldsymbol{I\alpha} \wedge \boldsymbol{I\beta}) = [((\boldsymbol{I\alpha})^* \vee (\boldsymbol{I\beta})^*) \vee \boldsymbol{I\alpha}] \wedge [((\boldsymbol{I\alpha})^* \vee (\boldsymbol{I\beta})^*) \vee \boldsymbol{I\beta}] = 1_{\mathscr{A}} \wedge 1_{\mathscr{A}}$

Para $M2 = (\Box\alpha \to \alpha)_{\mathscr{A}}(v) = \boldsymbol{I\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}$, en tanto que $\boldsymbol{I\alpha} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{I\alpha} \to \boldsymbol{\alpha} = 1_{\mathscr{A}}$. Para $M3 = (\Box\alpha \to \Box\,\Box\,\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = \boldsymbol{I\alpha} \to \boldsymbol{II\alpha}$, y recordando que $\boldsymbol{I\alpha} = \boldsymbol{II\alpha}$, se tiene que $\boldsymbol{I\alpha} \to \boldsymbol{II\alpha} = 1_{\mathscr{A}}$. Finalmente, $M4 = (\Box(\alpha \vee \neg\alpha))_{\mathscr{A}}(v) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\alpha}^*) = \boldsymbol{I}(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{A}}$.

Para cerrar, se observa que las reglas de inferencia preservan validez modal. En este caso, nuevamente para $(\alpha \to \beta)_{\mathscr{A}}(v) = 1$, y $(\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = 1$, se tiene que $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta}$, de donde $1 \leqslant \boldsymbol{\beta}$, es decir $\boldsymbol{\beta} = 1$. Se concluye que R1 preserva validez modal. Ahora, para $(\alpha \to \beta)_{\mathscr{A}}(v) = 1$, se tiene que $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta}$, de donde $\boldsymbol{I\alpha} \leqslant \boldsymbol{I\beta}$, es decir $(I\alpha \to I\beta)_{\mathscr{A}}(v) = 1$. Se concluye que $RM1$ preserva validez modal. □

Lema 3.2. *Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría basada en $\mathcal{L}_{0,\Box}$, entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente*

2. *Existe un modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$*

3. *Existe un modelo topológico adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$*

4. *Existe un modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$*

Demostración. 1. → 2. Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ consistente, y considérese $v : V \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, la valuación canónica sobre $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ su álgebra de Tarski-Lindenbaum. Entonces, como se mencionó en el lema 3.1, se tiene que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ si y sólo si $|\alpha| = 1 = (\alpha)_{\mathscr{A}}(v)$. Es decir, $v : V \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ es modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$. 2. → 3. Sea $v : V \to \mathscr{A}$ modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$, entonces por por el teorema 1.2.1, existe $h : \mathscr{A} \to \mathcal{S}(A)$ isomorfismo topológico, con $\mathscr{A}$ isomorfa a $\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, campo de subconjuntos de $(\mathcal{S}(A), \tau_h)$. Considérese $h \circ v : V \to \boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, valuación, y sea $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\alpha_{\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}}(h \circ v) = h(\alpha_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}(v)) = h(1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = \boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, por ser h homomorfismo booleano topológico. Ahora sea $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ tal que $\alpha_{\boldsymbol{\mathcal{S}(A)}}(h \circ v) = \boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, entonces se tiene que $h(\alpha_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}(v)) = \boldsymbol{\mathcal{S}(A)}$, y por ser h isomorfismo topológico, se tiene que $\alpha_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}(v) = 1$, lo que implica que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ por ser v modelo adecuado. 3. → 4. Directamente 4. → 1. Sea $v : V \to \mathscr{A}$ modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ y supongamos que existe $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ tal que $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\neg\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\alpha_{\mathscr{A}}(v) = 1 = (\neg\alpha)_{\mathscr{A}}(v) = \alpha_{\mathscr{A}}(v)^* = 1^* = 0$, contradiciendo que $\mathscr{A}$ es no degenerada. Por lo tanto $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente.

□

Lema 3.3. *Sean $\beta \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ y $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente; entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$*

2. *Todo modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ es modelo para β.*

3. *Todo modelo topológico para $\mathcal{T}(\Gamma)$ es modelo para β*

4. *Para $v : V \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$, la valuación canónica, se tiene que $v(\beta) = 1$*

Demostración. 1. $\to$ 2. Sea $v : V \to \mathscr{A}$ modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$, y $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Por la afirmación 3.1, la clase de los axiomas es modalmente válida, de donde v es modelo de cualquier instancia de axioma, y si β se obtuvo de α_1, α_2, mediante $R1$ o de α_3 mediante $RM1$ con $(\alpha_i)_{\mathscr{A}}(v) = 1$, se tiene que $(\beta)_{\mathscr{A}}(v) = 1$, por la afirmación 3.1. 2. $\to$ 3. Directamente. 3. $\to$ 4. Sea $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ el abt de $\mathcal{T}(\Gamma)$, que es no degenerada por ser $\mathcal{T}(\Gamma)$ consistente, entonces por el lema 3.2 $v : V \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la valuación canónica es un modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por teorema 1.2.1 se tiene que $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathcal{S}(\mathfrak{A}(\mathcal{T}))$ el isomorfismo de Stone para $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$, es topológico. Se observa que $h \circ v : V \to \mathcal{S}(\boldsymbol{A})$ es modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$. Sea $\alpha \in \Gamma$, por lema 3.2 se tiene que $\alpha_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}(v) = 1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}$, entonces $\alpha_{\mathcal{S}(\boldsymbol{A})}(h \circ v) = h(\alpha_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = 1_{\mathcal{S}(\boldsymbol{A})}$ por ser h homomorfismo booleano topológico. Por hipótesis implica que $(\beta)_{\mathcal{S}(\boldsymbol{A})}(h \circ v) = 1_{\mathcal{S}(\boldsymbol{A})}$, y esto implica que $(\beta)_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}(v) = 1_{\mathscr{A}}$ por ser h inyectiva. 4. $\to$ 1. Se tiene por lema 3.2, ya que la valuación canónica es un modelo adecuado para $\mathcal{T}(\Gamma)$. $\square$

Teorema 3.1.1. *Para toda fórmula $\beta \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ las siguientes son equivalentes:*

1. $\vdash_{\mathcal{L}_{0,\Box}} \beta$

2. $\models_{\mathscr{A}} \beta$

3. $\models_{\mathcal{B}(X)} \beta$

4. *$\beta_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)$, con v la valuación canónica en $\mathfrak{A}(\varnothing)$.*

5. *β es válida en toda álgebra booleana topológica finita*

6. *β es válida en toda álgebra booleana topológica $\mathscr{A}$, con $|\mathscr{A}| \leqslant 2^{2^r}$, con r el cardinal del conjunto de subfórmulas de β.*

7. *β es válida en un campo topológico de subconjuntos de un espacio métrico denso en sí mismo diferente del vacío.*

Demostración. 1. $\leftrightarrow$ 2. $\leftrightarrow$ 3. $\leftrightarrow$ 4. Por el lema 3.3 cuando $\Gamma = \varnothing$. 2. $\to$ 5. $\to$ 6 Directamente. Ahora se verifica que 6. $\to$ 4. Sea $\beta \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ tal que $(\beta)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v) \neq 1$, con v la valuación canónica. Considérese $|S = \{|\alpha| \in \mathfrak{A}(\varnothing) : \alpha \text{ subfórmula de } \beta\}| = r$, con r cardinalidad de S. Entonces $\langle S \rangle$ el álgebra booleana generada por S, es subálgebra de $\mathfrak{A}(\varnothing)$, y por el lema 1.2, se tiene que $|\langle S \rangle| = 2^{2^r}$. Sea $S_I = \{|\alpha| \in S : I|\alpha| = |\alpha|\}$, con I operador interior de $\mathfrak{A}(\varnothing)$, y $\mathcal{B} = \{\bigcap F : F \in [S_I]^{<\omega}\} \cup \{1_{\mathfrak{A}(\varnothing)}, 0_{\mathfrak{A}(\varnothing)}\}$. Entonces, I' el operador interior en $\langle S \rangle$ generado al tomar a $\mathcal{B}$ como base, y definido en la afirmación 1.3. es único y cumple con las propiedades requeridas en la definición 1.11.

Además se tiene que para toda α subfórmula de β, si $I|\alpha| \in S$, entonces $I|\alpha| = I'|\alpha|$. Dada α subfórmula de β, tal que $I|\alpha| \in S$, se tiene que $I'|\alpha| \leqslant I|\alpha|$ por definición de I. Por otro lado, en tanto $I|\alpha| \leqslant |\alpha|$ e $I|\alpha| \in \mathcal{B}$,se tiene que $I|\alpha| \leqslant I'|\alpha|$, de donde $I|\alpha| = I'|\alpha|$.

Sea $v' : V \to \langle S \rangle$, con $v'(p) = |p|$ si p es variable proposicional de β, y $v'(p) = 0_{\langle S \rangle}$ en otro caso. Entonces, se tiene que $(\beta)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v) = (\beta)_{\langle S \rangle}(v')$. Si $\beta = p$, es directo que $(\beta)_{\langle S \rangle}(v') = v'(p) = |p| = v(p) = (\beta)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)$. Si $\beta = \neg\alpha$, entonces $(\beta)_{\langle S \rangle}(v') = (\neg\alpha)_{\langle S \rangle}(v') = (\alpha)_{\langle S \rangle}(v')^*$; y en tanto que $(\alpha)_{\langle S \rangle}(v') = (\alpha)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)$ por hipótesis de inducción, se tiene que $(\alpha)_{\langle S \rangle}(v')^* = (\alpha)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)^* = (\beta)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)$. Si $\beta = \alpha \wedge \gamma$, se tiene que $(\beta)_{\langle S \rangle}(v') = (\alpha)_{\langle S \rangle}(v') \wedge (\gamma)_{\langle S \rangle}(v') = (\alpha)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v) \wedge (\gamma)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v) = (\beta)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)$. Si $\beta = \Box\alpha$, entonces, $\Box\alpha \in S$, y $(\beta)_{\langle S \rangle}(v') = (\Box\alpha)_{\langle S \rangle}(v') = I'|\alpha| = I|\alpha| = (\Box\alpha)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v) = (\beta)_{\mathfrak{A}(\varnothing)}(v)$. Por lo anterior, se concluye que $(\beta)_{\langle S \rangle}(v') \neq 1_{\langle S \rangle}$.

$3 \to 7$. Directamente $7. \to 5$. Sea $\mathscr{A}$ algebra booleana topológica finita, y $v : V \to \mathscr{A}$ tal que $v(\beta) \neq 1_{\mathscr{A}}$. Por el teorema 1.2.3 existen (X, τ), espacio métrico denso en sí mismo y $G \in \tau$ denso tal que $h : \mathscr{A} \to \mathcal{B}(G)$ isomorfismo topológico. Así, $h \circ v : V \to \mathcal{B}(G)$, es una valuación tal que $(\beta)_{\mathcal{B}(G)}(h \circ v) = h(\beta_{\mathscr{A}}(v)) \neq G$ pues $(\beta)_{\mathscr{A}}(v) \neq 1_{\mathscr{A}}$ y h es isomorfismo. Se define $h_2 : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(G)$, con $h_2(A) = A \cap G$, que es homomorfismo booleano topológico suprayectivo. Entonces para cada $p \in V$, en tanto que $h(v(p)) \in \mathcal{B}(G)$, se tiene que existe $A_p \in \mathcal{B}(X)$ tal que $h_2(A_p) = h(v(p))$. Sea $v_2 : V \to \mathcal{B}(X)$ valuación con $v_2(p) = A_p$. Entonces $h_2 \circ v_2 : V \to \mathcal{B}(G)$ es valuación, y es claro que $h_2 \circ v_2(p) = h_2(A_p) = h(|p|) = h \circ v(p)$, de aquí que coincidiendo en el conjunto de variables proposicionales, que es el conjunto generador del álgebra de fórmulas, extienden de manera única a fórmulas, siendo homomorfismo del álgebra de fórmulas en $\mathcal{B}(G)$. Por ello, $(\beta)_{\mathcal{B}(G)}(h_2 \circ v_2) = h_2(\beta_{\mathcal{B}(X)}(v_2)) = h(\beta_{\mathscr{A}}(v)) \neq G$, y esto implica que $\beta_{\mathcal{B}(X)}(v_2) \neq X$, pues h_2 es homomorfismo booleano. □

3.2. Lógica modal de primer orden

El lenguaje de la lógica modal de primer orden estará dado sobre el lenguaje de la lógica de primer orden numerable. Se recuerda que el conjunto de símbolos lógicos añade al conjunto de conectivos de la lógica $\mathcal{L}_{0,\Box}$ los siguientes elementos: 1.- V un conjunto numerable de variables individuales, 2.- Ξ un conjunto numerable de variables para cuantificar 3.- $\exists$ $\forall$ símbolos de cuantificadores. Los símbolos de parámetros están dados por $\{f_m : m \in \omega\}$ un conjunto de símbolos de función, y $\{\rho_m : m \in \omega\}$ un conjunto de símbolos de predicados. El conjunto de símbolos de función unión el conjunto de predicados es denotado por Θ. El conjunto de símbolos del lenguaje es denotado por S. Se observa que el lenguaje no contendrá igualdad. El conjunto de términos denotado por T se define recursivamente:

- Si $x \in V$, entonces $x \in T$
- Si $f_m \in \Theta$ de aridad m y $t_1 \dots t_m \in T$, entonces $f(t_1 \dots t_m) \in T$

También se recuerda que las funciones de aridad cero son consideradas constantes. Se considera a $\rho(x_1, \dots, x_n) \in \{\rho_m : m \in \omega\}$ como una fórmula primitiva. Las fórmulas bien formadas están dadas por la siguiente gramática:

$$\varphi ::= \alpha(t) | \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \forall\xi\alpha(x_0/\xi) | \ \Box\varphi$$

con $t \in T$ y ξ variable para cuantificar que no aparece en $\alpha(x_0)$. Su cálculo de pruebas está dado por los esquemas de axioma de la lógica $\mathcal{L}_{0,\Box}$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}_{1,\Box}$. Las reglas de inferencia son las reglas de $\mathcal{L}_{0,\Box}$ más las reglas $R1$- $R6$, de la lógica $\mathcal{L}_{1,I}$, nuevamente con fórmulas en $\mathcal{L}_{1,\Box}$.

Una sucesión $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, con $\alpha_i \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ es una prueba formal de α a partir de Γ en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ si $\alpha_n = \alpha$ y para cada α_i se tiene que o α_i es instancia de axioma en $\mathcal{L}_{1,\Box}$, o $\alpha_i \in \Gamma$, o bien α_i es inferencia inmediata de α_{i1}, α_{i2} con $i1, i2 \leqslant i$ mediante las reglas de inferencia de $\mathcal{L}_{1,\Box}$. Se dice que una fórmula α es derivable a partir de Γ en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ si existe una prueba formal de α a partir de Γ en $\mathcal{L}_{1,\Box}$, denotado $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,\Box}} \alpha$. Si $\Gamma = \varnothing$ entonces se dice que α es derivable en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ y se denota $\vdash_{\mathcal{L}_{1,\Box}} \alpha$. Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{1,\Box}$ la teoría de Γ basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ se denota mediante $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Dada una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ se recuerda que su Q-álgebra de Tarski-Lindenbaum es dada por las clases de equivalencia determinadas por la relación $\alpha \approx \beta$ si y sólo si $\alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y $\beta \to \alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, y con el orden $\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|$ si y sólo si $\alpha \to \beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Se añaden las operaciones generalizadas de la misma forma que en la ecuación 2.3. Esta álgebra se denotará nuevamente mediante $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$.

Observación 3.1. *Dada $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$, su $Q-$álgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ es un álgebra booleana topológica generalizada.*

Las definiciones de *realización de términos* y de *interpretación o realización de un lenguaje* basado en $\mathcal{L}_{1,\Box}$, son análogas a las definciones 2.4 y 2.5 respectivamente, tomando en este caso como estructura algebraica un abt generalizada no degenerada respectivamente.

Así también, dada una realización R de un lenguaje basado en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ en un conjunto $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ abt generalizada, una *valuación* es una función $v : V \to J$ con V el conjunto de variables individuales de $\mathcal{L}_{1,\Box}$.

Dada una realización R de $\mathcal{L}_{1,\Box}$ en $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ abt generalizada, y dada $\alpha \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ fija, esta determina una función $\alpha_{\mathscr{A}} : J^V \to \mathscr{A}$, con $\alpha_{\mathscr{A}}(v)$ definida recursivamente de manera análoga a la ecuación 2.4, cambiando nuevamente el caso de la negación por $(\neg\alpha)_R(v) = (\alpha_R(v))^*$, y añadiendo $(\Box\alpha)_R(v) = I(\alpha_R(v))$.

Una realización R en un conjunto $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ abt generalizada es *modelo de* Γ conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{1,\Box}$ si $\alpha_R(v) = 1$ para toda $v \in J^V$ y para toda $\alpha \in \Gamma$. Si $\Gamma = \{\alpha\}$, se dice que α es *válida en* R. Una fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ es una tautología modal de primer orden si es válida en toda R realización de $\mathcal{L}_{1,\Box}$.

Afirmación 3.2. *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,\Box}} \alpha$*, entonces* $\Gamma \models \alpha$

Demostración. La prueba de esta afirmación es análoga a la prueba dada en la afirmación 2.4. Sea R realización de $\mathcal{L}_{1,\Box}$ en $J \neq \varnothing$ y $\mathscr{A}$ abt no degenerada modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Considérese $s : V_0 \to F$, sustitución, donde V_0 es el conjunto de variables proposicionales de $\mathcal{L}_{0,\Box}$ y F es el conjunto de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_{1,\Box}$; con $s(p) = \beta_i \in F$. Entonces, s extiende a un homomorfismo en el álgebra de fórmulas de $\mathcal{L}_{0,\Box}$. Así para cada $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$, se tiene que $s\alpha \in \mathcal{L}_{1,\Box}$. Sea $v : V \to J$ valuación en R, entonces para $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$ se tiene que $s\alpha_R(v) = \alpha_{\mathscr{A}}(sv)$, donde $sv : V_0 \to \mathscr{A}$ es una valuación para la lógica $\mathcal{L}_{0,\Box}$, con $sv(p) = sp_R(v)$.

Esto es así pues $s\alpha_R(v)$ y $\alpha_{\mathscr{A}}(sv)$ son funciones de $\alpha \in \mathcal{L}_{0,\Box}$, de forma que para $\alpha = p$ se tiene que: $s\alpha_R(v) = s(p)_R(v) = p_{\mathscr{A}}(sv) = \alpha_{\mathscr{A}}(sv)$, de donde su extensión a fórmulas en $\mathcal{L}_{0,\Box}$ es homomorfismo del álgebra de fórmulas en $\mathscr{A}$. Entonces, para $\alpha \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ instancia de axioma, se tiene que $\alpha = s\beta$ para alguna fórmula $\beta \in \mathcal{L}_{0,\Box}$. Entonces $\alpha_R(v) = s\beta_R(v) = \beta_{\mathscr{A}}(sv) = 1$ por la afirmación 3.1. Se concluye que cualquier instancia de axioma es válida en R.

Sea α tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}_{1,\Box}} \alpha$. Si α es instancia de axioma o $\alpha \in \Gamma$, se tiene que $\alpha_R(v) = 1$ por lo anterior y por hipótesis. Si $\alpha := \gamma$ se obtuvo mediante $R1$ de $\beta \to \gamma$ y γ con $(\beta \to \gamma)_R(v) = 1 = (\beta)_R(v)$, se tiene que $\gamma_R(v) = 1 = \alpha_R(v)$, pues $\beta_R(v) \leqslant \gamma_R(v)$, y análogamente se tiene que si $\alpha := \Box\beta \to \Box\gamma$ se obtuvo de $\beta \to \gamma$ mediante $RM1$ con $(\beta \to \gamma)_R(v) = 1$, entonces $(\Box\beta \to \Box\gamma)_R(v) = 1$. Si α se obtuvo mediante las reglas $R2 - R6$, entonces se tiene que $\alpha_R(v) = 1$ por los mismos argumentos dados en la afirmación 2.4.

$\Box$

Dada una teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ y $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathscr{A}$, $Q-$homorfismo topológico, con $\mathscr{A}$ abt generalizada, se define la realización canónica de $\mathcal{L}_{1,\Box}$ inducida por h de la misma forma que se ha hecho en el lema 2.4 y se observa el siguiente lema:

Lema 3.4. *Sean $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente, $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ su $Q-$álgebra y $g : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathscr{A}$ $Q-$homomorfismo topológico sobre $\mathscr{A}$ abt no degenerada. Sea R_0 realización sobre $J = T$, el conjunto de términos de $\mathcal{L}_{1,\Box}$ y $\mathscr{A}$, con $f_{R_0}(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$, y $\rho_{R_0}(t_1, \ldots, t_m) = g(\|\rho(t_1, \ldots, t_m)\|)$ Entonces R_0 es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$, si g es inyectiva, entonces R_0 es modelo adecuado.*

Este lema se sigue de forma análoga al mencionado lema 2.4. Sólo falta observar que si $\alpha := \Box\beta$, para $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$ entonces $\alpha_{R_0}(v) = g(\|v(\Box\beta)\|) = g(I1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = Ig(1_{\mathfrak{A}(\mathcal{T})}) = I1_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}$.

Teorema 3.2.1. *Para toda teoría $\mathcal{T}(\Gamma)$ basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$, las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente*
2. *Existe un modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$*
3. *Existe un modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en un abt completa*
4. *Existe un modelo topológico para $\mathcal{T}(\Gamma)$*
5. *Existe un modelo topológico adecuado numerable para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en el campo topológico de subconjuntos $\mathcal{B}(X_0)$ de todos los conjuntos de un conjunto X_0 de irracionales.*

Las implicaciones 5. $\to$ 4. $\to$ 3. $\to$ 2. Son inmediatas 2. $\to$ 1. Sea R realización en $J \neq \emptyset$ y $\mathscr{A}$ abt completa. Sea $\alpha \in \mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\alpha_R(v) = 1$, y $(\neg\alpha)_R(v) = \alpha_R(v)^* = 0$, de donde $\neg\alpha \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Se concluye que $\mathcal{T}(\Gamma)$ es consistente. 1. $\to$ 5. Sea $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$ consistente. Por el lema 3.4, el modelo canónico de $\mathcal{T}(\Gamma)$ R_0 inducido por $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la identidad en su $Q-$álgebra de Tarski-Lindenbaum es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por el teorema 1.2.2 existe $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathcal{B}(X_0)$, $Q-$isomorfismo topológico. Por lema 3.4, R_0 la realización canónica inducida por h, es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Teorema 3.2.2. *Sea $\beta \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ y $\mathcal{T}(\Gamma)$ teoría consistente basada en $\mathcal{L}_{1,\Box}$, entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *$\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$.*
2. *β es válida en todo modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$.*
3. *β es válida en todo modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $\mathscr{A}$ abt completa.*
4. *β es válida en todo modelo topológico para $\mathcal{T}(\Gamma)$.*

5. *β es válida en todo modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en J conjunto numerable y $\mathcal{B}(X_0)$ campo de subconjuntos topológico con X_0 conjunto de irracionales.*

6. *Existe un conjunto infinito J tal que β es válida en todo modelo para $\mathcal{T}(\Gamma)$ en J y en todo campo de conjuntos topológico $\mathcal{B}(X_0)$, con X_0 conjunto de irracionales.*

7. *$\beta_{R^0}(i) = 1$ para el modelo canónico R^0 para $\mathcal{T}$ en $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ para la valuación identidad.*

Demostración. 1. $\to$ 2. Sea $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$ y sea R modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ en $J \neq \emptyset$ y $\mathscr{A}$ abt no degenerada, por afirmación 3.2, β es válida en R. 2. $\to$ 3. Directamente. 3. $\to$ 4. También se tiene directamente pues todo campo de conjuntos topológico es un abt completa. 4. $\to$ 5. $\to$ 6. Directamente. 5. $\to$ 7. Sea $\mathfrak{A}(\mathcal{T})$ la $Q-$ abt de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por el teorema 1.2.2, existe $h : \mathfrak{A}(\mathcal{T}) \to \mathcal{B}(X_0)$ $Q-$isomorfismo topológico con X_0 conjunto de irracionales. Por teorema 3.2.1, R_0 la realización canónica inducida por h es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Por hipótesis β es válida en R_0, y para $i : V \to V$ la valuación identidad se tiene que $h(\beta_{R_0}(i)) = X_0$, y por ser h isomorfismo se tiene que $\beta_{R_0}(i) = 1$. 7. $\to$ 1. Sea $\beta \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ tal que $\beta_{R_0}(i) = 1$, con R_0 el modelo canónico para $\mathcal{T}(\Gamma)$, entonces $\beta_{R_0}(i) = \|\beta\| = 1$, y por lo observado en el lema 3.1 se tiene entonces que $\beta \in \mathcal{T}(\Gamma)$.

6. $\to$ 5. Sea $\beta \in \mathcal{L}_{1,\Box}$ tal que existe R realización de $\mathcal{L}_{1,\Box}$ en $|J_0| = \aleph_0$ y $\mathcal{B}(X_0)$ tal que R es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$ y β no es válida en R. Es decir existe $v' : V \to J_0$ valuación, tal que $\beta_R(v') \neq X_0$. Sea $g : J \to J_0$ función suprayectiva con J conjunto. Sea $R1$ realización en J y $\mathcal{B}(X_0)$ tal que para cada símbolo de función $f_m \in \Theta$, se tiene $g(f_{R1}(j_1, \ldots, j_m)) = f_R(g(j_1), \ldots, g(j_m))$, y para cada símbolo de predicado $\rho(t_1, \ldots t_n)$ se tiene que $\rho_{R1}(j_1, \ldots, j_m) = \rho_R(g(j_1), \ldots, g(j_m))$. Entonces para toda valuación $v : V \to J$ se tiene que

1. $t_R(g \circ v) = g(t_{R1})(v)$, con $g \circ v : V \to J_0$ valuación en R tal que $g \circ v(x) = g(v(x))$,

2. $\rho(t_1 \ldots, t_n)_R(g \circ v) = \rho_{R1}(t_1 \ldots, t_n)(v)$.

Para 1., se observa que para $t = x$, $x_R(g \circ v) = g(v(x)) = g(x_{R1}(v))$, de forma que $t_R(g \circ v)$ y $g(t_{R1})(v)$ coinciden en el conjunto generador del álgebra de términos. Por ello su extensión a términos es homomorfismo único, y se prueba 1. Para 2., se observa que $\rho(t_1, \ldots t_n)_R(g \circ v) = \rho_R(t1_R(g \circ v), \ldots tn_R(g \circ v)) = \rho_R(g(t1_{R1}(v)), \ldots, g(tn_{R1})(v)) = \rho_R(g(j_1), \ldots, g(j_n)) = \rho_{R1}(j_1, \ldots, j_n) = \rho(t_1, \ldots t_n)_{R1}(v)$ Por lo anterior se tiene que para toda $\alpha \in \mathcal{L}_{1,\Box}$, $\alpha_R(g \circ v) = \alpha_{R1}(v)$ para toda $v \in J^V$, pues ambas funciones de α coinciden en el conjunto generador de fórmulas. Esto implica que α es válida en $R1$ si y sólo si α es válida en R, pues toda valuación $v \in J_0^V$ puede se vista de la forma $g \circ v$, por ser g sobre. Entonces, $R1$ es modelo de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Ahora considerando v', para cada $x \in V$, existe $j_x \in J$ tal que $g(j_x) = v'(x)$. Así, sea $v : V \to J$, con $v(x) = j_x$, entonces $\beta_{R1}(v) = \beta_R(g \circ v) = \beta_R(v') \neq X_0$, entonces β no es válida en $R1$. $\Box$

Para cerrar este capítulo, se recuerda que para esta lógica Kremer [2014] plantea como problema abierto su completud fuerte con respecto al espacio de Cantor. La lógica modal tal como se ha presentado en este capítulo es una de las tantas formas en que puede aplicarse una “modalidad”en un lenguaje lógico. Esto es, se pueden dar diversos significados a los operadores $\Box$ y $\Diamond$, que han dado pie a una gran cantidad de lógicas. En los libros recomendados al inicio de este capítulo, se pueden encontrar algunas de estas lógicas.

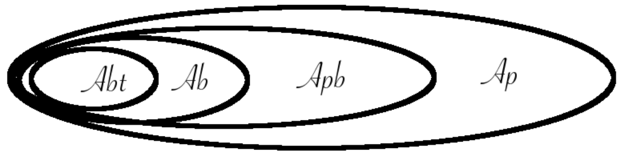
Conclusiones

Para cerrar este trabajo, queremos comentar algunas ventajas de la semántica presentada. En particular, en el caso de la lógica intuicionista, se pueden tener diversas ideas de la motivación detrás de su operador de negación. No obstante, no es transparente el reflejo de esta motivación en las diversas semánticas que se han propuesto para esta lógica. En este caso, el hecho de tener una semántica que nos diga que podemos hablar del comportamiento de los subconjuntos abiertos de un espacio topológico mediante la lógica intuicionista, nos da un ejemplo concreto de su comportamiento, y constituye un reflejo intuitivo de la negación intuicionista. Este tipo de semántica, hasta donde sabemos, no había sido trabajada antes de Rasiowa and Sikorski [1963]. En el caso de la lógica modal, una de las semánticas más conocidas es la basada en marcos de Kripke. En Kremer [2014] se pueden ver algunos aspectos comparativos.

Por otro lado, la semántica aquí trabajada es de utilidad para otras lógicas. Por ejemplo, Rasiowa and Sikorski [1963] presenta también este tipo de semántica para la lógica positiva y la lógica clásica, tanto proposicional como de primer orden. Esta elección de lógicas brinda un panorama ilustrativo de la relación que existe entre estas lógicas y las estructuras algebraicas que constituyen sus semánticas. Sin presentar formalmente la lógica positiva, podemos dar una idea de este comportamiento de manera informal.

Si denotamos por $\mathcal{L}_+$ a la lógica positiva proposicional, y por $\mathcal{L}$ a la lógica clásica proposicional, se tiene que como conjunto de fórmulas, $\mathcal{L}_+ \subseteq \mathcal{L}_{0,I} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{0,\Box}$. Esto nos permite ver que el conjunto de fórmulas derivables, denotado en cada caso $\mathcal{T}(\varnothing)_+$, $\mathcal{T}(\varnothing)_i$, $\mathcal{T}(\varnothing)_c$, $\mathcal{T}(\varnothing)_m$ respectivamente, cumple que $\mathcal{T}(\varnothing)_+ \subseteq \mathcal{T}(\varnothing)_i \subseteq \mathcal{T}(\varnothing)_c \subseteq \mathcal{T}(\varnothing)_m$. Otro tanto tenemos para sus respectivos lenguajes de primer orden.

La lógica positiva es correcta y completa con respecto a la clase de álgebras pseudocomplementadas, que abreviamos ap. Esta es la únca ocasión en esta tesis en que usamos este término propiamente, y no para referir a las álgebras relativamente pseudocomplementadas. Se recuerda además que la lógica clásica es correcta y completa con respecto a la clase de álgebras booleanas, que abreviamos ab. Entonces, se tiene que las clases de estas estructuras algebraicas cumplen la contención inversa, es decir:



Finalmente, se debe mencionar que el tipo de métodos empleados para trabajar estas lógicas ha sido empleado para estudiar otro tipo de lógicas dentro de las que se incluyen por ejemplo la lógica modal intuicionista, que se obtiene al agregar los operadores modales a la lógica intuicionsta. Un ejemplo de esto se da en Celani and Montangie [2015]. En este sentido, la metodología usada por Rasiowa y Sikorski brinda una buena herramienta para el estudio de diversas lógicas, que permanece intuitiva frente a herramientas más generales.

Bibliografía

P. Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge, 2010.

S.A. Celani and D. Montangie. Hilbert algebras with a modal operator $\diamond$. *Studia Logica*, pages 639–662, 2015.

A. Chagrov and M. Zakharyaschev. *Modal Logic*. Oxford Science Publications, Oxford, 1977.

M. Gehrke. Completeness of S4 with respect to real line: revisited. *Annals of pure and applied logic*, 131: 287–301, 2005.

J. Harding and G. Bezhanishvili. MacNeille completitions of Heyting algebras. *Houston journal of mathematics*, 4(30):937–952, 2004.

F. Hernández. *Teoría de Conjuntos*. Sociedad Mateática Mexicana, México, 2011.

A. Heyting. Die formalen regeln der intuitionisticchen logik. *Sitzungsberichte der Preussischen akademie der wissenschaften*, 1930.

Ph. Kremer. Strong completeness of S4 for any dense-in-itsefl metric space. *The review of symbolic logic*, 6 (13):545–570, 2013.

Ph. Kremer. Quantified modal logic on the rational line. *The review of symbolic logic*, 7(2):545–570, 2014.

J.C.C. McKinsey and A. Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The journal of symbolic logic*, (13):1–15, 1948.

F.E. Miranda, L.M. Villegas, and D. Rojas. *Conjuntos y Modelos. Un curso avanzado*. UAM, 2000.

Mostowski. Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus. *The journal of symbolic logic*, (13):204–207, 1948.

H. Rasiowa and R. Sikorski. *The mathematics of metamathematics*. Pantswowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1963.

M.H. Stone. The theory of representations of boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40:37–111, 1936.

D. van Dalen. *Logic and Structure*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

Anexo A

Las siguientes propiedades se pueden encontrar en Rasiowa and Sikorski [1963], y se cumplen para cualquier red pseudo-complementada $\mathscr{A}$, en particular para cualquier álgebra pseudo-booleana.

1. $c \leqslant a \to b$ si y sólo si $a \cap c \leqslant b$
2. Si $\mathscr{A}$ es álgebra pseudo-booleana, entonces $a^{+} = a \to 0$
3. Si $\mathscr{A} = \mathcal{G}(X)$, entonces para $U, V \in \mathcal{G}(X)$, se tiene que $U \to V = I(U^c \cap V)$
4. $a \to b = 1$ si y sólo si $a \leqslant b$.
5. $a = b$ si y sólo si $a \to b = 1 = b \to a$
6. $a \to a = 1$.
7. $a \to 1 = 1$
8. $1 \to b = b$
9. $(a \to a) \cap b = b$
10. $a \cap (a \to b) \leqslant b$
11. si $a_1 \leqslant a_2$, entonces $a_2 \to b \leqslant a_1 \to b$
12. si $b_1 \leqslant b_2$, entonces $a \to b_1 \leqslant a \to b_2$
13. $b \leqslant a \to b$
14. $a \cap (a \to b) = a \cap b$

15. $(a \to b) \cap b = b$

16. $(a \to b) \cap (a \to c) = a \to (b \cap c)$

17. $(a \to c) \cap (b \to c) = (a \cup b) \to c$

18. $a \to (b \to c) = (a \cap b) \to c = b \to (a \to c)$

19. $c \to a \leqslant (c \to (a \to b)) \to (c \to b)$

20. $(a \to b) \cap (b \to c) \leqslant a \to c$

21. $(a \to b) \leqslant (b \to c) \to (a \to c)$

22. $a \leqslant b \to (a \cap b)$

23. $a \to (b \to c) \leqslant (a \to b) \to (a \to c)$

24. $c \cap ((c \cap a) \to (c \cap b)) = c \cap (a \to b)$

Anexo B

Algunas propiedades que se cumplen para cualquier álgebra booleana, y que pueden encontrar en Rasiowa and Sikorski [1963], son las siguientes propiedades:

1. $a^{+} = a \to 0$ (el pseudocomplemento definido en el álgebra booleana.)
2. Para todos los elementos $a, b \in \mathscr{A}$ la diferencia $b - a$ existe y es $b - a = b \cap a^{*}$
3. $a \leqslant b$ si y sólo si $b^{*} \leqslant a^{*}$
4. $a \cup a^{*} = 1$
5. $(a^{*})^{*} = a$
6. $a \to b = b^{*} \to a^{*}$
7. $a^{*} \to b = b^{*} \to a$
8. $(a \cap b)^{*} = a^{*} \cup b^{*}$
9. $a \cap b = (a^{*} \cup b^{*})^{*}$
10. $a \cap b = (a^{*} \cup b^{*})^{*}$
11. $(a \to b)^{*} = a \cap b^{*}$
12. $(a \to b) \to a = a$