UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÉTRICAS PROPIAS E INVARIANTES
EN COCIENTES DE GRUPOS TOPOLÓGICOS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

MANUEL EDUARDO CHACÓN OCHOA

DIRECTOR DE LA TESIS:

DR. SERGEY ANTONYAN
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2017

Índice general

Introducción

Un tema de interés en la topología general es la metrizabilidad de espacios topológicos. Al respecto existen resultados generales que dan condiciones necesarias y suficientes para resolver este problema. Al pasar al área de grupos topológicos de transformaciones este problema encuentra su análogo en el problema de la existencia de métricas compatibles e invariantes en G-espacios, esto es, la existencia de métricas con la propiedad $d(gx, gy) = d(x, y)$ para cualesquier elementos g del grupo actuante y x y y del G-espacio.

En el caso de grupos topológicos un resultado clásico debido a Birkhoff y Kakutani, de manera independiente, establece como condición necesaria y suficiente para la metrizabilidad de un grupo topológico que este sea primero numerable. Dicho teorema además afirma que todo grupo metrizable admite una métrica invariante. Para el caso general de G-espacios es sabido que no es posible garantizar la existencia de métricas invariantes en todos los casos. Sin embargo, dos de los preguntas importantes siguen abiertas: ¿Todo G-espacio propio, con G localmente compacto, admite una métrica invariante? ¿Bajo qué condiciones un G-espacio de la forma G/H admite una métrica invariante?

Este trabajo estudiará un caso particular de la segunda pregunta. Específicamente se estudiarán condiciones para la existencia de métricas *propias* e invariantes en cocientes de grupos topológicos. Una métrica propia es aquella para la cual el concepto de compacidad es equivalente a las propiedad de ser cerrado y acotado.

Este trabajo se encuentra estructurado como sigue. En el primer capítulo se introducen brevemente los conceptos y resultados elementales que serán usados en el texto. Se cubren particularmente las nociones de métrica propia, grupos topológicos, G-espacios y grupos de isometrías. El segundo capítulo tiene como propósito demostrar un teorema que brinde condiciones para la existencia de métricas propias e invariantes en grupos topológicos. Por último, el tercer capítulo es la parte principal de esta tesis y será en el que se estudien métricas con las propiedades dichas para el caso de cocientes de grupos topológicos.

Si bien se presentan las nociones que se emplearán en este trabajo, se supone del lector familiaridad con temas de la Teoría de grupos y la Topología general. De la primera se requieren sólo las definiciones elementales de de grupo, subgrupo, subgrupo normal, homomorfismo y clase lateral; así como los teoremas básicos sobre estos conceptos. Si fuera necesario esto puede consultarse en [8]. Sobre Topología se espera familiaridad con las nociones de compacidad, particularmente compacidad local y σ-compacidad, topología cociente y metrizabilidad. Esto puede ser consultado en [5].

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo se presentan las nociones básicas que serán requeridas a lo largo de este texto y en su mayoría son elementales. La primera sección se ocupa del concepto de métrica propia, el cual es uno de los más fundamentales para este trabajo. En la segunda sección se estudiarán grupos topológicos y espacios de clases laterales, que serán los espacios de mayor interés en esta tesis. La tercera sección introduce las definiciones y resultados sobre acciones continuas que serán empleadas. Por último, la cuarta sección tratará sobre grupos de isometrías y en particular condiciones bajo las cuales su acción es propia.

Antes de comenzar es pertinente establecer algunas convenciones generales. Todos los espacios topológicos a considerar, en particular los grupos topológicos, serán espacios de Hausdorff. Los símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{N}$ denotarán a los conjuntos de los números reales, reales positivos y naturales, respectivamente; o bien al los correspondientes espacios con su topología usual. Un subconjunto de un espacio topológico se llamará *precompacto* si su cerradura en dicho espacio es compacta.

1.1. Métricas propias.

Para comenzar se enuncia la definición de métrica propia. Cabe señalar que en algunos textos se les nombra también como métricas de Heine-Borel, aunque emplear este término es menos común.

Definición 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que d es *propia* si para cada $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ la bola cerrada $\bar{B}(x, r)$ es un conjunto compacto.

Los ejemplos más elementales de métricas propias son las inducidas por normas en espacios vectoriales de dimensión finita.

Es fácil ver que si una métrica d en un espacio X es propia, entonces X es un espacio localmente compacto y σ-compacto, es decir, X puede expresarse como una unión numerable de subespacios compactos. A continuación se muestra que estas condiciones topológicas permiten caracterizar a los espacios metrizables que admiten una métrica propia.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico localmente compacto y σ-compacto. Entonces existe una familia de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y para cada n el conjunto $\overline{U_n}$ es compacto y está contenido en U_{n+1}*

Demostración. Por σ-compacidad, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, con K_n compacto para cada n. Al ser K_1 compacto y X localmente compacto existe un abierto precompacto U_1 tal que $K_1 \subseteq U_1$. Recursivamente, dado U_n abierto precompacto, se tiene que $\overline{U_n} \cup K_{n+1}$ es compacto y entonces existe U_{n+1} abierto precompacto tal que $\overline{U_n} \cup K_{n+1} \subseteq U_{n+1}$. Así, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.3. *Sea X un espacio metrizable. Entonces existe una métrica propia d en X compatible con su topología si y sólo si X es un espacio localmente compacto y σ-compacto.*

Demostración. Supóngase la existencia de una métrica propia d. Entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(x_0, n)$, para $x_0 \in X$. Además para cualquier punto $x \in X$ la bola $B(x, 1)$ es una vecindad precompacta, pues $\overline{B(x,1)} \subseteq \bar{B}(x, 1)$.

Ahora supóngase que X es localmente compacto y σ-compacto. Como muestra el lema anterior, en esta situación existe una familia de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\overline{U_n}$ es compacto y está contenido en U_{n+1}.

Primero se construirá una función propia $F\colon X \to \mathbb{R}$, es decir, tal que $F^{-1}[K]$ sea compacto si K lo es. Para cada n se define $K_n := \overline{U_{n+1}} \setminus U_n$. Por el Lema de Uryshon existe, para $n \in \mathbb{N}$, una función continua $f_n\colon K_n \to [n, n+1]$ tal que $f_n(x) = n$ si $x \in \overline{U_n}$ y $f(x) = n + 1$ si $x \notin U_{n+1}$. Sea $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Nótese que para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$ distintos los dominios de las funciones f_m y f_n son ajenos si $|m - n| \geq 2$, o se intersecan en $Fr(U_k)$, con $k = \max\{m, n\}$, si $|m - n| = 1$. Por tanto $F\colon X \to [0, \infty)$ es una función bien definida. Además para cada n, $F\restriction_{\overline{U_n}} = \bigcup_{k<n} f_n$ es

continua, en particular, cada $F\restriction_{U_n}$ es continua y por tanto F es continua.

Considérese $K \subseteq [0,\infty)$ compacto. Entonces $K \subseteq [0,m]$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y

$$F^{-1}[K] = \bigcup_{n=1}^{m} f_n^{-1}\left[K \cap [n-1,n]\right] \subseteq \overline{U_m}.$$

Como cada f_n es continua y $\overline{U_m}$ es compacto, se sigue la compacidad de $F^{-1}[K]$. Por lo tanto F es en efecto una función propia.

Ahora considérese una métrica d_0 compatible con la topología de X. Se define $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = d_0(x,y) + |F(x) - F(y)|.$$

d es la suma de dos pseudométricas en X y por ende es también una pseudométrica. Además, si $d_0(x,y) + |F(x) - F(y)| = 0$, entonces $d_0(x,y) = 0$ y $x = y$. Por continuidad de F, d es continua y por ende cualquier bola $B_d(x,r)$ es abierta en X. Por otro lado $d_0 \leq d$ y entonces $B_d(x,r) \subseteq B_{d_0}(x,r)$ para $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ cualesquiera. Por tanto d es compatible con la topología de X.

Finalmente resta verificar que d es propia. Sean $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bar{B}(x,r) &= \{y \in X : d(x,y) \leq r\} \\
&= \{y \in X : d_0(x,y) + |F(x) - F(y)| \leq r\} \\
&\subset \{y \in X : |F(x) - F(y)| \leq r\} \\
&= \{y \in X : -r \leq F(x) - F(y) \leq r\} \\
&= \{y \in X : r + F(x) \geq F(y) \geq -r + F(x)\} \\
&= F^{-1}[-r + F(x), r + F(x)].
\end{aligned}$$

Como F es una función propia esto implica que $\bar{B}(x,r)$ es compacto. □

Proposición 1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico con d propia. Entonces (X,d) es un espacio métrico Polaco, es decir, separable y completo.*

Demostración. Por el Teorema 1.3, X es σ-compacto. Como en espacios metrizables la s condiciones de σ-compacidad y separabilidad son equivalentes, X es separable.

Ahora sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión d-Cauchy. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $n, m \geq n_0$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Luego, $(x_n)_{n\geq n_0} \subseteq \overline{B}(x_{n_0}, 1)$. Como d es propia, el conjunto $\overline{B}(x_{n_0}, 1)$ es compacto y por ende $(x_n)_{n\geq n_0}$ tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente, i.e., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $\square$

Una manera alternativa de definir una métrica propia es mediante el concepto de radio de compacidad.

Definición 1.5. Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto. Para cada $x \in X$ se define su *radio de compacidad* como

$$\rho(x) := \sup\{r > 0 : \overline{B}(x, r) \text{ es compacto}\}.$$

En estos términos se puede decir que una métrica es propia si existe $x_0 \in X$ para el cual $\rho(x_0) = \infty$, o de manera equivalente si $\rho(x) = \infty$ para toda $x \in X$, pues $\overline{B}(x, r) \subseteq \overline{B}(x_0, r + d(x, x_0))$.

1.2. Grupos topológicos y sus cocientes.

En esta sección se presentan los conceptos y resultados referentes a grupos topológicos. Un grupo topológico es un grupo provisto de una topología con la que su operación y la toma de inversos son continuas. Más formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 1.6. Una terna $(G, \cdot, \tau)$ se llama *grupo topológico* si

- $\cdot$ es una operación binaria en G tal que $(G, \cdot)$ es un grupo,
- τ es una topología en G y
- las funciones $(g, h) \mapsto g \cdot h$ y $g \mapsto g^{-1}$ son continuas respecto a τ.

Como es usual, los grupos topológicos se nombrarán simplemente por su conjunto subyacente, es decir, G se referirá a $(G, \cdot, \tau)$. Además se omitirá el símbolo $\cdot$, es decir, $a \cdot b$ será ab.

Frecuentemente se denotará al elemento neutro de un grupo G por e, o e_G si es necesario precisar.

Como consecuencia inmediata de la continuidad de la operación en un grupo topológico se tiene la continuidad de las funciones $L_g(x) = gx$, llamadas traslaciones por la izquierda. Más aún, como $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = Id_G$, cada traslación es un homeomorfismo y por ende G es homogéneo.

Si $A, B \subseteq G$, entonces se denotará

$$\begin{aligned} AB &:= \{ab : a \in A,\ b \in B\}, \\ A^{-1} &:= \{a^{-1} : a \in A\}, \end{aligned}$$

y recursivamente $A^{n+1} = A^n A$, con $n \geq 0$ y $A^0 = \{e\}$. Por simplicidad $aB := \{a\}B$ y $Ab := A\{b\}$. Un subconjunto A se llama simétrico si $A = A^{-1}$. Con esta notación se enuncian las siguientes proposiciones.

Proposición 1.7. *Sean G un grupo topológico y $U \subseteq G$ un abierto tal que $e \in U$. Entonces*

1. *existe un abierto simétrico V tal que $e \in V \subseteq U$ y*

2. *para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto W tal que $e \in W$ y $W^n \subseteq U$.*

Demostración.

1. Es inmediato de las definiciones que U^{-1} es la imagen de U bajo la función $x \mapsto x^{-1}$. Por ser esta función un homeomorfismo, U^{-1} es abierto. Definiendo $V = U \cap U^{-1}$ es claro que $e \in V \subseteq U$. Además $x \in V = U \cap U^{-1}$ si y sólo si $x^{-1} \in U^{-1} \cap U = V$, i.e., V es simétrico.

2. La prueba será por inducción en n. El caso $n = 1$ es obvio. Supóngase ahora que la afirmación es válida para algún $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Entonces existe V, vecindad abierta de e, tal que $V^n \subseteq U$. Por continuidad del producto en G existen V_1, V_2 vecindades abiertas de e tales que $V_1 V_2 \subseteq V$. Entonces $V_1 = V_1 e \subseteq V_1 V_2$ y $V_2 \subseteq V_1 V_2 \subseteq V$. Sea $W = V_1 \cap V_2$. Luego, $e \in W$ y $W^{n+1} = WWW^{n-1} \subseteq V_1 V_2 V^{n-1} \subseteq V^n \subseteq U$.

□

Proposición 1.8. *Sean G un grupo topológico y $A, B \subseteq G$.*

1. *Si A es abierto, entonces AB y BA son abiertos.*

2. *Si A es cerrado y B es compacto, entonces AB y BA son cerrados.*

3. *Si A y B son compactos, entonces AB es compacto.*

Demostración.

1. Para cada $x \in G$, xA y Ax son abiertos, pues las traslaciones son homeomorfismos. Así, $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$ y $BA = \bigcup_{b \in B} bA$ son abiertos.

2. Sólo se probará que AB es cerrado, la prueba para BA es análoga. Sea $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una red en AB convergente a algún $x \in G$. Para cada i existen $a_i \in A$ y $b_i \in B$ tales que $x_i = a_i b_i$. Por compacidad de B existe una subred $(b_j)_{j\in\mathcal{J}}$ convergente a algún $b \in B$. Luego, $a_j = x_j b_j^{-1} \to xb^{-1}$. Como A es cerrado, se sigue que $xb^{-1} \in A$ y por tanto $x = (xb^{-1})b \in AB$.

3. Basta observar que AB es la imagen de $A \times B$ bajo el producto en G.

□

Proposición 1.9. *Sean G un grupo topológico, $K \subseteq G$ compacto y $U \subseteq G$ una abierto tal que $K \subseteq U$. Entonces existen una vecindad abierta y simétrica U de e tal que $KU \cup UK \subseteq U$.*

Demostración. Para cada $x \in K$, por la Proposición 1.7 existen vecindades abiertas y simétricas V'_x, W'_x, V_x y W_x de e tales que $V_x^2 \subseteq V'_x \subseteq x^{-1}U$ y $W_x^2 \subseteq W'_x \subseteq Ux^{-1}$. Las familias $\{xV_x : x \in K\}$ y $\{W_x x : x \in K\}$ son cubiertas abiertas de K. Entonces existen $F_1, F_2 \subseteq K$ tales que $\{xV_x : x \in F_1\}$ y $\{W_x x : x \in F_2\}$ son cubiertas de K. Sea

$$U \coloneqq \left(\bigcap_{x\in F_1} V_x \right) \cap \left(\bigcap_{x\in F_2} W_x \right).$$

Considérense $k_1, k_2 \in K$. Por lo anterior, existen $x_1 \in F_1$ y $x_2 \in F_2$ tales que $k_1 \in x_1 V_{x_1}$ y $k_2 \in W_{x_2} x_2$. Luego

$$k_1 U \subseteq x_1 V_{x_1} U \subseteq x_1 V_{x_1}^2 \subseteq x_1 V'_{x_1} \subseteq U \text{ y}$$
$$U k_2 \subseteq U W_{x_2} x_2 \subseteq W_{x_2}^2 x_2 \subseteq W'_{x_2} x_2 \subseteq U.$$

Por lo tanto $KU \cup UK \subseteq U$. □

Proposición 1.10. *Sean G un grupo topológico y $U \subseteq G$ una vecindad abierta y simétrica de e. Entonces $H \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ es un subgrupo abierto y cerrado de G.*

Demostración. Nótese que H es el conjunto de productos finitos de elementos de U y U^{-1}, i.e., H es el subgrupo generado por U. H es un conjunto abierto porque es la unión de conjuntos abiertos. Luego, cada clase lateral gH es también un abierto, por lo que

$$H = G \setminus \bigcup_{g\in G\setminus H} gH$$

es cerrado. □

Una propiedad destacable de los grupos topológicos es que son espacios completamente regulares [15, Teorema 4.14]. En este texto sólo se hará referencia a su regularidad que se prueba a continuación.

Teorema 1.11. *Sea G un grupo topológico. Entonces G es un espacio regular.*

Demostración. Debido a la homogeneidad del grupo es suficiente probar que para cualquier vecindad U de e existe otra vecindad V de e tal que $e \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Por la Proposición 1.7, existen vecindades V y W de e tales que $W^2 \subseteq U$ y $V = V^{-1} \subseteq W$. Nótese que $V^2 \subseteq W^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces cualquier vecindad de x interseca a V, en particular $xV \cap V \neq \varnothing$. Luego, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $xv_1 = v_2$ y por ende $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2$. Por lo tanto $\overline{V} \subseteq V^2 \subseteq U$. □

Evidentemente, si H es un subgrupo de un grupo topológico, entonces al considerarlo con la topología de subespacio es también un grupo topológico.

En adelante el símbolo G/H se referirá a el *espacio cociente de G entre H*, esto es, el conjunto de clases laterales izquierdas $\{gH : g \in G\}$ provisto de la topología cociente respecto a la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/H \\ g &\mapsto gH. \end{aligned}$$

Por definición la proyección canónica es continua. π además resulta abierta, como se muestra a continuación. Si $U \subseteq G$ es abierto, entonces, según la Proposición 1.8, el conjunto

$$\begin{aligned} \pi^{-1}[\pi(U)] &= \pi^{-1}[\{uH \in G/H : u \in U\}] \\ &= \{g \in G : \exists u \in U\ gH = uH\} \\ &= UH, \end{aligned}$$

es un abierto, i.e., $\pi[U]$ es abierto en G/H. Supóngase ahora que H es además compacto. Si $A \subseteq G$ es cerrado, entonces

$$\pi^{-1}[\pi(A)] = \pi^{-1}[\{aH \in G/H : a \in A\}] = AH$$

es cerrado y por tanto π será además cerrada. Más aún, cada fibra $\pi^{-1}[gH] = gH$ es compacta, por lo que π es de hecho perfecta.

A continuación se dan algunas propiedades importantes de estos cocientes.

Proposición 1.12. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo topológico de G. Entonces G/H es un espacio homogéneo.*

Demostración. Considérense $xH, yH \in G/H$. Se define

$$\begin{aligned} \psi : G/H &\to G/H \\ gH &\mapsto yx^{-1}gH. \end{aligned}$$

ψ está bien definida y es inyectiva, ya que $g_1^{-1}g_2 \in H$ es equivalente a $g_1^{-1}xy^{-1}yx^{-1}g_2 \in H$, i.e., a $yx^{-1}g_1H = yx^{-1}g_2H$. Además se tiene por la definición que $\psi(xH) = yH$.

Sea U abierto en G/H. Como

$$\psi[U] = \{yx^{-1}uH : u \in \pi^{-1}[U]\} = \pi[yx^{-1}\pi^{-1}[U]]$$

y π es continua y abierta, se deduce que ψ es abierta.

Análogamente la función

$$\begin{aligned} \varphi : G/H &\to G/H \\ gH &\mapsto xy^{-1}gH \end{aligned}$$

es inyectiva y abierta. Claramente $\psi^{-1} = \varphi$. Por lo tanto ψ es un homeomorfismo tal que $\psi(xH) = yH$. □

Proposición 1.13. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal cerrado de G. Entonces G/H es un grupo topológico con la operación $g_1H * g_2H = g_1g_2H$ y la proyección natural es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Es un hecho básico del álgebra que G/H es en efecto un grupo [8, Proposition 7.11]. Denotando por α a la operación en G y por α' a la operación en G/H se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\alpha'"] & G/H \end{tikzcd}$$

Sea $U \subseteq G/H$ abierto. Entonces

$$\alpha'^{-1}[U] = (\pi \times \pi)\left[\alpha^{-1}\left[\pi^{-1}[U]\right]\right].$$

Por ser π continua y abierta y α continua, se tiene de la igualdad anterior que $\alpha'^{-1}[U]$ es abierto. Por tanto el producto en G/H es continuo.

Análogamente se prueba la continuidad de $gH \to g^{-1}H$. □

A continuación se presenta el concepto de producto semidirecto de grupos topológicos.

Proposición 1.14. *Sean H y N grupos topológicos y $\theta\colon H \to Aut(N)$ un homomorfismo de grupos, donde $Aut(N)$ es el grupo de automorfismos de N, i.e., funciones $f : N \to N$ que simultáneamente son homeomorfismos y homomorfismos de grupos. Si la función*

$$\begin{aligned} H \times N &\to N \\ (h, n) &\mapsto \theta(h)(n) \end{aligned}$$

es continua, entonces $N \times H$ provisto de la topología producto y operación

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2)$$

es un grupo topológico. Este grupo se denota como $N \rtimes_\theta H$ y se llama producto semidirecto de H y N respecto a θ*.*

Demostración. El elemento neutro es (e_N, e_H), en efecto,

$$\begin{aligned} (n, h)(e_N, e_H) &= (n\theta(h)(e_N), he_H) = (ne_N, h) \text{ y} \\ (e_N, e_H)(n, h) &= (e_N\theta(e_H)(n), e_Hh) = (Id_N(n), h). \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} (n, h)(\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) &= \left(n\theta(h)\left(\theta(h^{-1})(n^{-1})\right), e_H\right) \\ &= (nn^{-1}, e_H) \\ &= (e_N, e_H) \\ \text{y} \quad (\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})(h, n) &= ([\theta(h^{-1})(n^{-1})][\theta(h^{-1})(n)], e_H) \\ &= (\theta(h^{-1})(e_N), e_H) \\ &= (e_N, e_H). \end{aligned}$$

De la continuidad del producto en H, se sigue que la función $((h_1, n_1), (h_2, n_2)) \mapsto h_1h_2$ es continua. Por continuidad del producto en N y de la función $(h, n) \mapsto \theta(h)(n)$, se tiene la continuidad de $((h_1, n_1), (h_2, n_2)) \mapsto n_1\theta(h_1)(n_2)$. Por tanto el producto en $N \rtimes_\theta H$ es continuo. Similarmente la continuidad de la toma de inversos en H y en N y de la función $(h, n) \mapsto \theta(h)(n)$ implican que $(h, n) \mapsto h^{-1}$ y $(h, n) \mapsto \theta(h^{-1})(n^{-1})$ son continuas. □

Para concluir esta sección se enuncia un resultado fundamental sobre la metrizabilidad de grupos topológicos y al cual se hará alusión en repetidas ocasiones. Su demostración puede ser consultada en [15] o [2].

Teorema 1.15 (Birkhoff-Kakutani)**.** *Sea G un grupo topológico. Es condición necesaria y suficiente para la metrizabilidad de G que este sea un grupo Hausdorff primero numerable. En tal caso el grupo admite una métrica acotada tal que para cualesquier $g, x, y \in G$ se cumple $d(gx, gy) = d(x, y)$ $(d(xg, yg) = d(x, y))$.*

1.3. Acciones continuas.

Si G es un grupo topológico entonces G *actúa* naturalmente en los cocientes de la forma G/H. El propósito de esta sección es presentar las definiciones elementales referentes a las acciones continuas de grupos topológicos. Para empezar se precisa este concepto.

Definición 1.16. Sean G un grupo topológico con elemento neutro e y X un espacio topológico. Una *acción continua* de G en X es un función continua $G \times X \to X$, en general denotada por $(g, x) \mapsto gx$, que cumple $ex = x$ y $(gh)x = g(hx)$ para cualesquier $g, h \in G$ y $x \in X$. Se dice también que G actúa en X o que X es un G*-espacio.*

Observación 1.17. Si G actúa continuamente en un espacio X, entonces la función $\Phi\colon G \to Homeo(X)$ dada por $\Phi(g)(x) = gx$ es un homomorfismo de grupos. Φ está bien definida, pues para cada $g \in G$ la función $x \mapsto gx$ es continua con inversa $x \mapsto g^{-1}x$ también continua. Es un homomorfismo porque para cualesquier $g, h \in G$ y $x \in X$ se tiene por definición $\Phi(gh)(x) = (gh)x = g(hx) = \Phi(g) \circ \Phi(h)(x)$.

A lo largo de este texto se hará uso de las definiciones a continuación listadas.

Definición 1.18. Sean G un grupo topológico y X y Y G-espacios. Una función continua $f : X \to Y$ se llama G*-equivariante*, o simplemente *equivariante*, si para cualesquier $g \in G$ y $x \in X$ se satisface $f(gx) = gf(x)$.

Definición 1.19. Sean G un grupo topológico, X un G-espacio y $x \in X$. El *estabilizador* o *grupo de isotropía* de x es

$$G_x \coloneqq \{g \in G : gx = x\}.$$

Observación 1.20. G_x es un subgrupo cerrado. En efecto es un subgrupo, ya que dados $g, h \in G_x$, entonces $(gh)x = g(hx) = gx = x$ y $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = ex = x$. Es cerrado pues dada una red $(g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ convergente a algún g se tiene por continuidad que $gx = (\lim_{i\in\mathcal{I}} g_i)x = \lim_{i\in\mathcal{I}} (g_i x) = x$.

Definición 1.21. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio con acción θ. Se define el *núcleo* de θ como $\ker\theta \coloneqq \bigcap_{x\in X} G_x$. La acción de G en X es *efectiva* si $\ker\theta = \{e\}$.

Obsérvese que $\ker\theta$ es exactamente el núcleo del morfismo Φ descrito en 1.17

Definición 1.22. La *órbita* de x es

$$G(x) \coloneqq \{gx : g \in G\}.$$

Si $y \in G(x)$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Luego, para cualquier $h \in G$, $hy = hgx \in G(x)$ y $hx = hg^{-1}y \in G(y)$. Por tanto $G(x) = G(y)$ y así el conjunto $X/G \coloneqq \{G(x) : x \in X\}$ es una partición de X. A este conjunto provisto de la topología cociente respecto a la *proyección natural* $\pi : X \to X/G$, $x \mapsto G(x)$ se le llama *espacio orbital*.

Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. En adelante, si $A \subseteq G$ y $B \subseteq X$, se denotará $A(B) = \{gx : g \in A,\ x \in B\}$. Además, por simplicidad, $\{g\}(A) = g(A)$.

A continuación se presentan los dos ejemplos de acciones que serán mayormente considerados en este texto.

Ejemplo 1.23. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Se afirma que H actúa en G por multiplicación izquierda (derecha) mediante $h * g = gh^{-1}$ ($h * g = hg$). Para cualesquier $g \in G$ y $h_1, h_2 \in H$ se cumplen $e * g = ge^{-1} = g$ ($e * g = eg = g$) y

$$h_1 * (h_2 * g) = (gh_2^{-1})h_1^{-1} = g(h_1h_2)^{-1} = (h_1h_2) * g$$

($h_1 * (h_2 * g) = h_1h_2g = (h_1h_2) * g$). Además esta acción es continua por la continuidad de las operaciones en el grupo.

La órbita de $g \in G$ es $\{gh^{-1} : h \in H\} = gH$, la clase lateral izquierda de H respecto a G. Entonces el espacio orbital correspondiente a esta acción es el cociente G/H definido en la sección anterior.

Ejemplo 1.24. Considérense G, H y G/H como en el ejemplo anterior. G/H es naturalmente un G-espacio con la acción dada por $\theta(g, xH) = gxH$, para $g, x \in G$. Sean $g_1, g_2, x \in G$. Entonces $\theta(e, xH) = exH = xH$ y

$$\theta(g_1, \theta(g_2, xH)) = g_1(g_2x)H = (g_1g_2x)H = \theta(g_1g_2, xH).$$

A continuación μ denotará a la operación en G. La continuidad de θ se observa en el siguiente diagrama conmutativo, pues μ es continua y la función $Id \times \pi$ es abierta:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "Id\times\pi"'] & G \\ G \times G/H \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, θ es una acción continua. Nótese además que la proyección cociente $G \to G/H$ es G-equivariante respecto a la acción recién descrita y la acción de G en sí mismo por multiplicación izquierda.

La siguiente es una de las definiciones fundamentales para este trabajo.

Definición 1.25. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Una métrica d compatible con la topología de X se llama G-*invariante*, o simplemente *invariante* si para cualesquier $g \in G$ y $x, y \in X$ se satisface

$$d(gx, gy) = d(x, y).$$

Un tipo importante de acción son las acciones propias, que se definen enseguida.

Definición 1.26. Sean G un grupo topológico, X un G-espacio y $U, V \subseteq X$. El *transportador* de U en V es

$$\langle U, V\rangle \coloneqq \{g \in G : gU \cap V \neq \varnothing\}.$$

U es *pequeño* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad V tal que $\langle U, V\rangle$ es precompacto en G. La acción de G en X es *propia* o X es un *G-espacio propio* si cada punto tiene una vecindad pequeña.

Algunas consecuencias básicas de considerar G-espacios propios se mencionan en la siguiente

Proposición 1.27. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio propio. Entonces se verifica que*

- *para cada $x \in X$ la órbita $G(x)$ es cerrada,*
- *para cada $x \in X$ el estabilizador G_x es compacto,*

- *para cada $x \in X$ la función $f_x \colon G \to G(x)$, $f_x(g) = gx$ es continua y cerrada y*
- *para cada $x \in X$ la función $F_x \colon G/G_x \to G(x)$, $F_x(gG_x) = gx$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $(g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una red en G tal que $g_i x \to y$ para algún $y \in X$. Por ser la acción propia, existen vecindades U de x y V de y tales que $\langle U, V\rangle$ es precompacto. Por la convergencia, existe un $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $g_i x \in V$, si $i \geq i_0$. Entonces $(g_i)_{i\geq i_0} \subseteq \langle U, V\rangle$. Por compacidad existe una subred $(g_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de $(g_i)_{i\geq i_0}$ que converge a algún $g \in G$. Por continuidad de la acción se sigue que $g_i x \to gx$ y por tanto $y = gx$.

Como la acción es propia, existen U y V vecindades de x tales que $\langle U, V\rangle$ es precompacto. Para cualquier $g \in G_x$, $gx = x \in V$. Entonces $G_x = \overline{G_x} \subseteq \overline{\langle U, V\rangle}$.

La continuidad de f_x se tiene por continuidad de la acción en X. Sean $A \subseteq G$ un cerrado y $(g_i)_{i\in\mathcal{I}} \subseteq A$ una red tal que $g_i x \to y \in G(x)$. Existen $U, V \subseteq X$ vecindades de x y y, respectivamente, tales que $\langle U, V\rangle$ es precompacto. Debido a la convergencia existe $i \in \mathcal{I}$ tal que $(g_i)_{i\geq i_0} \subseteq \langle U, V\rangle$. Luego, existe una subred $(g_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de $(g_i)_{i\geq i_0}$ que converge a algún $g \in G$. Como $(g_j)_{j\in\mathcal{J}} \subseteq A$ y A es cerrado, se tiene que $g \in A$. Por lo tanto $y = \lim\limits_{i\in\mathcal{I}} g_i x = gx \in A(x)$.

Nótese que $g_1 x = g_2 x$ si y sólo si $g_1 G_x = g_2 G_x$, por lo que la función F_x está bien definida y es inyectiva. Obsérvese también que F_x es la función inducida por la función f_x del punto anterior

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, "\pi"'] & G(x) \\
G/G_x \arrow[ur, "F_x"'] &
\end{tikzcd}$$

y por ende es continua. Además F_x es evidentemente suprayectiva. Finalmente, si $A \subseteq G/G_x$ es cerrado, entonces se sigue del punto anterior que $F_x[A] = f_x[\pi^{-1}[A]]$ también lo es.

□

1.4. Acciones propias de grupos de isometrías.

Posteriormente será necesario recurrir a algunas nociones relativas a grupos topológicos de isometrías. Por ello esta sección estará dedicada a presentar tales grupos y los resultados de que se hará uso. Naturalmente lo primero es definirlos.

Definición 1.28. Sea (X, d) un espacio métrico. Una *isometría* de X es una función biyectiva $\varphi : X \to X$ tal que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$$

para cualesquier $x, y \in X$. Se denota al conjunto de tales funciones por $\mathrm{Iso}(X, d)$.

Es evidente que cualquier isometría es un homeomorfismo y que el conjunto de dichas funciones constituye un grupo bajo la composición. Lo siguiente es dotar este conjunto de una estructura topológica, esta será la *topología de la convergencia puntual*, es decir, aquella en la que la convergencia es la convergencia puntual de funciones. Recuerde que una subbase para esta topología está constituida por los conjuntos de la forma

$$B(x, \varphi, \varepsilon) \coloneqq \{\psi \in \mathrm{Iso}(X, d) : d(\psi(x), \varphi(x)) < \varepsilon\}$$

con $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{Iso}(X, d)$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. En adelante se asume que cualquier grupo de isometrías está provisto de esta topología.

Teorema 1.29. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces Iso(X, d) es un grupo topológico Hausdorff.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in Iso(X, d)$ y considérese una vecindad subbásica $B(x, \varphi\psi, \varepsilon)$. Sean $V \coloneqq B\left(\psi(x), \varphi, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $W \coloneqq B\left(x, \psi, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Es claro que $V \times W$ es vecindad abierta de (φ, ψ) en $\mathrm{Iso}(X, d) \times \mathrm{Iso}(X, d)$. Para $\varphi_1 \in V$ y $\psi_1 \in W$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\varphi_1\psi_1(x), \varphi\psi(x)) &\leq d(\varphi_1\psi_1(x), \varphi_1\psi(x)) + d(\varphi_1\psi(x), \varphi\psi(x)) \\ &= d(\psi_1(x), \psi(x)) + d(\varphi_1\psi(x), \varphi\psi(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Por tanto la composición es continua en $\mathrm{Iso}(X, d)$.

Sean $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ y $U = B(x,\varphi,\varepsilon)$. Para cualquier $\psi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ se cumple que

$$d(\psi^{-1}\varphi(x), \varphi^{-1}\varphi(x)) = d(\psi^{-1}\varphi(x), \psi^{-1}\psi(x)) = d(\psi(x), \varphi(x)),$$

por lo que $\psi \in U$ si y sólo si $\psi^{-1} \in B(\varphi(x), \varphi^{-1}, \varepsilon)$, es decir, $U^{-1} = B(\varphi(x), \varphi^{-1}, \varepsilon)$. Por tanto $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ es continua en $\mathrm{Iso}(X,d)$.

Finalmente sean $\varphi, \psi \in Iso(X,d)$ distintas. Entonces existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Así los conjuntos $B(x,\varphi,\frac{d(\varphi(x),\psi(x))}{2})$ y $B(x,\psi,\frac{d(\varphi(x),\psi(x))}{2})$ son abiertos ajenos que contienen a φ y ψ respectivamente. $\square$

Una importante propiedad de los grupos de isometrías de espacios separables es la siguiente:

Proposición 1.30. *Si (X,d) es separable, entonces Iso(X,d) es metrizable.*

Demostración. Esto se probará haciendo uso del Teorema de Metrizabilidad de Urysohn [9, Chapter 4, Theorem 16]. Por el Teorema 1.11, $\mathrm{Iso}(X,d)$ es regular. Para mostrar que también es segundo numerable se construirá un encaje en un espacio segundo numerable.

Sea $D \subseteq X$ denso numerable. Considérese el producto topológico $\prod_{d\in D} X$. Este producto es un espacio segundo numerable, ya que X lo es y D es numerable [5, Corollary 2.3.14].

Se define la función $\Gamma\colon Iso(X,d) \to \prod_{d\in D} X$ por $\Gamma(\varphi) = \varphi\restriction_D$.

Si $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ son distintas, entonces $\varphi\restriction_D \neq \psi\restriction_D$, pues X es un espacio Hausdorff [5, Theorem 1.5.4.]. Por tanto Γ es inyectiva.

Si $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una red en $\mathrm{Iso}(X,d)$ tal que $\varphi_\alpha \to \varphi$ puntualmente para algún $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$, entonces en particular $\varphi_\alpha\restriction_D \to \varphi\restriction_D$ puntualmente, por lo que Γ es continua.

Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} B(x_i,\psi_i,\varepsilon_i)$ un abierto básico en $\mathrm{Iso}(X,d)$. Si $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{m} = \{x_j\}_{j=i}^{n} \cap D$, entonces

$$\Gamma(U) = \{f \in \Gamma[\mathrm{Iso}(X,d)] : \forall i \in \{1,\ldots,m\}\ f(x_{k_i}) \in B_d(\psi_{k_i}(x_{k_i}), \varepsilon_{k_i})\}.$$

Por tanto Γ es un encaje topológico. $\square$

Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces naturalmente $\mathrm{Iso}(X,d)$ actúa en X mediante la evaluación, esto es $(\varphi,x) \mapsto \varphi(x)$. Además esta acción es siempre continua:

Proposición 1.31. *La acción de Iso(X,d) en X es continua.*

Demostración. Sea $U = B(y, \varepsilon)$ un abierto básico en X. Si $\varphi \in \mathrm{Iso}(X, d)$ y $x \in X$ son tales que $\varphi(x) \in U$ sean

$$V \coloneqq B(x, \varphi, \frac{\varepsilon - d(\varphi(x), y)}{2}) \text{ y } W \coloneqq B(x, \frac{\varepsilon - d(\varphi(x), y)}{2});$$

es claro que $V \times W$ es vecindad abierta de (φ, x) en $\mathrm{Iso}(X, d) \times X$. Considérense $\varphi_1 \in V$ y $x_1 \in W$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\varphi_1(x_1), y) &\leq d(\varphi_1(x_1), \varphi_1(x)) + d(\varphi_1(x), \varphi(x)) + d(\varphi(x), y) \\ &< \frac{\varepsilon - d(\varphi(x), y)}{2} + \frac{\varepsilon - d(\varphi(x), y)}{2} + d(\varphi(x), y) = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto la acción de $\mathrm{Iso}(X, d)$ en X es continua. □

Serán de particular interés los casos en los que esta acción es propia. Al respecto se tienen varios resultados. Por ejemplo el siguiente teorema, cuya prueba puede ser revisada en [11].

Teorema 1.32 (van Dantzing-van der Waerden)**.** *Si (X, d) es un espacio métrico conexo y localmente compacto, entonces Iso(X, d) es localmente compacto y la acción de Iso(X, d) en X es propia.*

Como se probo en [6], la hipótesis de conexidad en el teorema anterior puede ser debilitada a pseudoconexidad.

Teorema 1.33 (Gao-Kechris)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto, separable y pseudoconexo [6, §5, p. 38]. Entonces la acción de Iso(X, d) en X es propia.*

Sin embargo, para los propósitos de este trabajo basta considerar el siguiente caso particular.

Teorema 1.34. *Sea (X, d) un espacio métrico con d propia. Entonces la acción de Iso(X, d) en X es propia.*

Demostración. Fíjense $x, y \in X$. Sean $U \coloneqq B(x, 1)$ y $V \coloneqq B(y, 1)$. Se afirma que $\langle U, V \rangle$ es precompacto. Si $\varphi \in \mathrm{Iso}(X, d)$ es tal que $\varphi[U] \cap V \neq \varnothing$, entonces $d(\varphi(x), y) < 2$ y por tanto basta mostrar que

$$K = \{\varphi \in \mathrm{Iso}(X, d) : d(\varphi(x), y) \leq 2\}$$

es compacto. Sea $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en K.

Por definición de K, $\varphi_n(x) \in \overline{B}(y, 2r)$ y $\varphi_n^{-1}(y) \in \overline{B}(x, 2r)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ y $(\varphi_{n_k}^{-1}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ son convergentes

Afirmación. Si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathrm{Iso}(X,d)$ tal que $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen en X, entonces para cualquier $z\in X$ existe una subsucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\zeta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n^{-1}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes

Prueba: Sean $y_0, y_1 \in X$ los límites de $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Como las sucesiones son convergentes, en particular son acotadas. Sea $M\in\mathbb{R}^+$ una cota, i.e., $sup_{n\in\mathbb{N}} d(y_0,\gamma_n(x)) < M$ y $sup_{n\in\mathbb{N}} d(y_1,\gamma_n^{-1}(x)) < M$. Luego, para cualquier $n\in\mathbb{N}$

$$d(y_0,\gamma_n(z)) \le d(y_0,\gamma_n(x)) + d(\gamma_n(x),\gamma_n(z)) \le M + d(x,z) \text{ y}$$
$$d(y_1,\gamma_n^{-1}(z)) \le d(y_1,\gamma_n^{-1}(x)) + d(\gamma_n^{-1}(x),\gamma_n^{-1}(z)) \le M + d(x,z).$$

Al ser d propia esto implica que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\zeta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n^{-1}(z))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen. †

Como X es separable (Proposición 1.4) existe $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ denso. Según la afirmación anterior existe una subsucesión $(\varphi_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{0,n}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_{0,n}^{-1}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes. Aplicando recursivamente la afirmación anterior, para $m\in\mathbb{N}$ existe $(\varphi_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(\varphi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{m+1,n}(x_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_{m+1,n}^{-1}(x_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes.

Así, para cada $m\in\mathbb{N}$ $(\varphi_{n,n})_{n\ge m}$ es una subsucesión de $(\varphi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$, por lo cual $(\varphi_{n,n}(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_{n,n}^{-1}(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes. Por lo tanto $(\varphi_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_{n,n}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen puntualmente en $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Para simplificar la notación se denotará $\psi_n \coloneqq \varphi_{n,n}$, para cada $n\in\mathbb{N}$.

Sea $z\in X$. Dado $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sean $n,m\in\mathbb{N}$ tales que $d(z,x_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ y para $i,j\ge m$, $d(\psi_i(x_n),\psi_j(x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\psi_i(z),\psi_j(z)) &\le d(\psi_i(z),\psi_i(x_n)) + d(\psi_i(x_n),\psi_j(x_n)) + d(\psi_j(x_n),\psi_j(z)) \\ &= 2d(z,x_n) + d(\psi_i(x_n),\psi_j(x_n)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que $(\psi_i(z))_{i\in\mathbb{N}}$ es d-Cauchy. Como d es propia y por ende completa, esto implica que $(\psi_i(z))_{i\in\mathbb{N}}$ converge. Puede entonces definirse la función $\psi(z) = \lim_{i\in\mathbb{N}}(\psi_i(z))$. Para cualesquier $z_1,z_2\in X$ $d(\psi(z_1),\psi(z_2)) = \lim_{i\in\mathbb{N}} d(\psi_i(z_1),\psi_i(z_2)) = d(z_1,z_2)$.

Similarmente se prueba que $(\psi_i^{-1}(z))_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente para cualquier $z\in X$. Se define también $\sigma(x) = \lim_{i\in\mathbb{N}} \psi_i^{-1}(x)$.

Finalmente, para cualquier $z\in X$ se tiene que

$$d(\psi\sigma(z),z) = \lim_{i\in\mathbb{N}} d(\psi_i\sigma(z),z) = \lim_{i\in\mathbb{N}} d(\sigma(z),\psi_i^{-1}(z)) = 0 \text{ y}$$
$$d(\sigma\psi(z),z) = \lim_{i\in\mathbb{N}} d(\psi_i^{-1}\psi(z),z) = \lim_{i\in\mathbb{N}} d(\psi(z),\psi_i(z)) = 0,$$

lo cual implica que $\psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi = Id_X$. Por tanto $\psi \in \mathrm{Iso}(X, d)$ y por construcción $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a φ puntualmente.

Por lo tanto $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se concluye entonces que K es compacto. $\square$

Capítulo 2

Métricas propias en grupos topológicos

El objetivo de este capítulo es dar condiciones para la existencia de métricas propias e invariantes en grupos topológicos respecto a su acción por multiplicación izquierda. Por el Teorema 1.3 son condiciones necesarias que el grupo sea metrizable, localmente compacto y σ-compacto. Para espacios metrizables y localmente compactos las condiciones de σ-compacidad y segundo numerabilidad son equivalentes. Además, por el Teorema de Birkhoff-Kakutani (1.15), todo grupo segundo numerable es metrizable. Por lo tanto para garantizar que un grupo admita una métrica propia e invariante son condiciones necesarias la compacidad local y la segundo numerabilidad. El teorema principal de este capítulo será que dichas propiedades son suficientes para tener una métrica como la descrita. Esto fue demostrado originalmente por Struble en [14], sin embargo la prueba aquí presentada se debe a Haagerup y Przybyszewska en [7].

Definición 2.1. Sea G un grupo topológico. Una norma en G es una función $l : G \to \mathbb{R}$ tal que

- para cada $g \in G$ se satisface $l(g) = 0 \Leftrightarrow g = e$,
- para cada $g \in G$ se satisface $l(g) = l(g^{-1})$ y
- se satisface la *desigualdad del triángulo*, es decir, para cualesquier $g, h \in G$ se tiene $l(gh) \leq l(g) + l(h)$.

La relación básica entre los conceptos de norma y métrica invariante está dada por el siguiente lema.

Lema 2.2. *Sea G un grupo topológico.*

1. *Si $l : G \to \mathbb{R}$ es una norma, entonces $d(x, y) := l(x^{-1}y)$ es una métrica invariante en G.*
2. *Si $d : G \times G \to \mathbb{R}$ es una métrica invariante, entonces $l(x) := d(e, x)$ es una norma en G.*

Además si l es una norma en G, entonces la métrica asociada $d(x, y) = l(x^{-1}y)$ genera la topología de G si y sólo si $\{l^{-1}[0, r) : r \in \mathbb{R}^+\}$ es una base local para e. Más aún, d es propia si para cada $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $l^{-1}[0, r]$ es compacto.

Demostración. 1. Sea l una norma. Entonces

$$\begin{aligned} l(x^{-1}y) &= 0 \Leftrightarrow x^{-1}y = e \Leftrightarrow x = y, \\ l(x^{-1}y) &= l((x^{-1}y)^{-1}) = l(y^{-1}x) \text{ y} \\ l(x^{-1}y) &= l(x^{-1}zz^{-1}y) \leq l(x^{-1}z) + l(z^{-1}y). \\ l(x^{-1}y) &= l((gx)^{-1}gy) \end{aligned}$$

2. Sea d una métrica invariante en G. Entonces

$$\begin{aligned} d(e, x) &= 0 \Leftrightarrow x = e, \\ d(e, x) &= d(x, e) = d(e, x^{-1}) \text{ y} \\ d(e, xy) &\leq d(e, x) + d(x, xy) = d(e, x) + d(e, y). \end{aligned}$$

Como d es invariante, $B_d(x, r) = xB_d(e, r)$ para cualesquier $x \in G$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces d es compatible con la topología si y sólo si los conjuntos $B_d(e, r) = \{y \in G : l(ey) < r\} = l^{-1}[0, r)$ constituyen una base. Además d es propia si los conjuntos $\overline{B_d}(e, r) = \{y \in G : l(ey) \leq r\} = l^{-1}[0, r]$ son compactos. □

Enseguida se prueba un caso particular del teorema principal del capítulo que será usado para la prueba del caso general.

Lema 2.3. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y segundo numerable cuya topología es inducida por una métrica invariante δ tal que $U := B_\delta(e, 1)$ es precompacto y $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$. Entonces δ es equivalente a una métrica d propia e invariante tal que $U = B_d(e, 1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $B_d(e, n) \subseteq B_d(e, 1)^{2n-1}$.*

Demostración. Sea l_δ la norma asociada con δ. Se define $l : G \to \mathbb{R}$ por

$$l(g) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{k} l_\delta(g_i) : k \in \mathbb{N},\ g_1, g_2, \ldots, g_k \in U \text{ y } g = g_1 g_2 \cdots g_k \right\}.$$

Por la hipótesis $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$, l está en efecto definida en G. Por la definición de norma, para cualesquier $g_1, g_2, \ldots, g_k \in U$ se tiene que $\sum_{i=1}^{k} l_\delta(g_i) \geq l_\delta(g_1 g_2 \cdots g_k)$, de lo cual se sigue que

$$l \geq l_\delta.$$

Por otro lado, es claro que si $g \in U$ entonces $l(g) \leq l_\delta(g)$. Por lo tanto

$$l\restriction_U = l_\delta\restriction_U .$$

Lo anterior implica $l(g) = 0$ $l(e) = l_\delta(e) = 0$. Reciprocamente, si $l(g) = 0$, entonces $l_\delta(g) = 0$ y por ende $g = e$.

Obsérvese que por la invarianza de δ,

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \{x^{-1} : \delta(e, x) < 1\} \\ &= \{x^{-1} : \delta(x^{-1}, e) < 1\} \\ &= \{y : \delta(y, e) < 1\} \\ &= U. \end{aligned}$$

Se afirma que para cualquier $g \in G$ se satisface $l(g) = l(g^{-1})$. Esto ya que dados $g_1, g_2, \ldots, g_k \in U$ tales que $g = g_1 g_2 \cdots g_k$, se tiene que $g^{-1} = g_k^{-1} g_{k-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$ con $g_k^{-1}, g_{k-1}^{-1}, \ldots, g_1^{-1} \in U$ y $l(g_i) = l(g_1^{-1})$.

Para probar la desigualdad del triángulo considérense $g, h \in G$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Entonces existen $g_1, g_2, \ldots, g_k, h_1, h_2, \ldots, h_m \in U$ tales que $g = g_1 g_2 \cdots g_k$, $h = h_1 h_2 \cdots h_m$, $\sum_{i=1}^{k} l_\delta(g_i) < l(g) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\sum_{i=1}^{m} l_\delta(h_i) < l(h) + \frac{\varepsilon}{2}$. Así

$$l(gh) \leq \sum_{i=1}^{k} l_\delta(g_i) + \sum_{i=1}^{m} l_\delta(h_i) < l(g) + l(h) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto implica que $l(gh) \leq l(g) + l(h)$.

Sea $d(g, h) \coloneqq l(g^{-1}h)$. Por el lema anterior d es una métrica invariante en G. Se afirma que $B_d(e, r) = B_\delta(e, r)$ cuando $r \in (0, 1)$. Sea $x_1 \in B_\delta(e, r)$. Entonces, por la igualdad $l\restriction_U = l_\delta\restriction_U$, $l(x_1) = l_\delta(x_1) < r$, por lo que $x_1 \in B_d(e, r)$. Sea $x_2 \in B_d(e, r)$. Entonces, por la desigualdad $l_\delta \leq l$, $l_\delta(x_2) \leq l(x_2) < r$, por lo que $x_2 \in B_\delta(e, r)$. Luego, por la invarianza de d y δ, $B_d(g, r) = gB_d(e, r) = gB_\delta(e, r) = B_\delta(g, r)$ para cualesquier $g \in G$ y $r \in (0, 1)$. Se concluye de esto que d y δ son métricas equivalentes, i.e., inducen la misma topología.

Por último, se demostrará que d es propia. Sean $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$ y $g \in B_d(e, n)$. Entonces existen $g_1, g_2, \ldots, g_k \in U$ tales que $g = g_1 g_2 \ldots g_k$ y $\sum_{i=1}^{k} l_\delta(g_i) < n$. Puede también suponerse que k es el mínimo natural para el cual existe una expresión de g con dichas propiedades. Se afirma que en este caso $l_\delta(g_i) + l_\delta(g_{i+1}) > 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Supóngase lo contrario, es decir, $l_\delta(g_{i_0}) + l_\delta(g_{i_0+1}) < 1$ para algún i_0, por lo que $l_\delta(g_{i_0}g_{i_0+1}) < 1$ y entonces $g_{i_0}g_{i_0+1} \in U$. Así, sería posible expresar a g como un producto de $k-1$ elementos de U, a saber $g = g_1 \ldots g_{i_0-1}(g_{i_0}g_{i_0+1})g_{i_0+2} \ldots g_k$, para los cuales $\sum_{j=1}^{i_0-1} l(g_j) + l(g_{i_0}g_{i_0+1}) + \sum_{j=i_0+2}^{k} l(g_j) < n$; contradiciendo la minimalidad de k.

En lo siguiente se empleará la notación $\lfloor q \rfloor$ para referirse a la parte entera de un número q. De acuerdo a la afirmación anterior,

$$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (l_\delta(g_{2j-1}) + l_\delta(g_{2j})) \leq \sum_{i=1}^{k} l_\delta(g_i) < n.$$

Al ser $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ y n enteros, $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq n-1$ y entonces $k \leq 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leq 2n-1$. Por tanto $g \in U^{2n-1}$ y entonces $B_d(e,n) \subseteq U^{2n-1}$.

Debido a la compacidad de $\overline{U}$, $\overline{U}^{2n-1}$ es compacto (1.8). Luego, $\overline{B_d}(e,n)$ es compacto también, pues $\overline{B_d}(e,n) \subseteq \overline{U^{2n-1}} \subseteq \overline{U}^{2n-1}$. Por lo tanto d es una métrica propia. □

Teorema 2.4. *Todo grupo topológico localmente compacto y segundo numerable admite una métrica propia e invariante.*

Demostración. Sea G un grupo topológico localmente compacto y segundo numerable. Por el Teorema de Birkhoff-Kakutani existe una métrica δ_0 en G invariante. Además por compacidad local existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola $B_{\delta_0}(e,r)$ es precompacta. Se define $\delta = \frac{1}{r}\delta_0$. Entonces δ es una métrica invariante en G que genera su topología y tal que $U = B_\delta(e,1)$ es precompacto.

Sea $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. De acuerdo a la Proposición 1.10, G_0 es un subgrupo abierto y cerrado de G. Como G es segundo numerable, G/G_0 es contable. Sean $\mathcal{I} = |G/G_0|$ y $S = \{x_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset G$ tal que $x_0 = e$ y G es igual a la unión disjunta $\bigcup_{x \in S} xG_0$.

Aplicando el lema anterior a G_0, se obtiene una métrica d_0 propia e invariante en este subgrupo. Sea $l_0 : G_0 \to \mathbb{R}$ la norma asociada con dicha métrica. Se definen $l_1 : S \to \mathbb{N}$ por $l_1(x_n) = n$ y $\bar{l} : G \to \mathbb{R}$ por

$$\bar{l}(g) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=0}^{k} (l_1(s_i) + l_0(g_i)) : \begin{array}{c} k \in \mathbb{N},\ g = \prod_{i=0}^{k} s_i g_i, \\ \{g_i\}_{i=0}^{k} \subseteq G_0,\ s_0 = e \\ \text{y } \{s_i\}_{i=1}^{k} \subseteq S \setminus \{e\} \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

Ahora sea

$$l(g) = \text{máx}\{\bar{l}(g), \bar{l}(g^{-1})\}.$$

Se probará que l es una norma cuya métrica asociada es compatible con la topología de G y propia.

Primero es evidente que $l(x) = l(x^{-1})$ para cualquier $x \in G$. Sean $g, h \in G$. Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, entonces existen representaciones $g = \prod_{i=0}^{k} s_i g_i$ y $h = \prod_{i=0}^{m} r_i h_i$ como las descritas en el párrafo anterior de manera que $\sum_{i=0}^{k}(l_1(s_i)+l_0(g_i)) < \bar{l}(g)+\frac{\varepsilon}{2}$ y $\sum_{i=0}^{m}(l_1(r_i)+l_0(h_i)) < \bar{l}(h)+\frac{\varepsilon}{2}$. Luego,

$$gh = \left(\prod_{i=0}^{k} s_i g_i\right)\left(\prod_{i=0}^{m} r_i h_i\right) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} s_i g_i\right)(s_k g_k h_0)\left(\prod_{i=1}^{m} r_i h_i\right)$$

es una expresión de gh como las que intervienen en 2.1. Así

$$\bar{l}(gh) \leq \sum_{i=1}^{k}(l_1(s_i) + l_0(g_i)) + \sum_{i=1}^{m}(l_1(r_i) + l_0(h_i) < \bar{l}(g) + \bar{l}(h) + \varepsilon$$

y se concluye que $\bar{l}(gh) \leq \bar{l}(g) + \bar{l}(h)$.

Esto a su vez implica que

$$\begin{aligned} l(gh) &= \text{máx}\{\bar{l}(gh), \bar{l}(h^{-1}g^{-1})\} \\ &\leq \text{máx}\{\bar{l}(g) + \bar{l}(h), \bar{l}(g^{-1}) + \bar{l}(h^{-1})\} \\ &\leq \text{máx}\{\bar{l}(g), \bar{l}(g^{-1}\} + \text{máx}\{\bar{l}(h), \bar{l}(h^{-1}\} \\ &= l(g) + l(h). \end{aligned}$$

Ahora supóngase que $l(g) < 1$. Entonces $\bar{l}(g) < 1$, por lo que dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $l(g) + \varepsilon < 1$, existe una representación $g = \prod_{i=0}^{k} s_i h_i$ tal que $\sum_{i=0}^{k}(l_1(s_i) + l_0(h_i)) < l(g) + \varepsilon$. Ya que $l_1(x_i) = i \geq 1$ cuando $i \neq 0$, necesariamente $k = 0$, i.e., $g = h_0 \in G_0$ y $l_0(g) = l_0(h_0) < l(g) + \varepsilon$. Haciendo ε tender a 0 se concluye que $l_0(g) \leq l(g)$. En particular, $l(g) = 0$ implica $l_0(g) = 0$ y como l_0 es una norma, necesariamente $g = e$. Por otro lado, es obvio que $l(e) = 0$. Por lo tanto l es una norma en G.

Es consecuencia inmediata de la definición de $\bar{l}$ que para cualquier $g \in G_0$ se tiene $\bar{l}(g) \leq l_0(g)$. Luego

$$l(g) = \text{máx}\{\bar{l}(g), \bar{l}(g^{-1})\} \leq \text{máx}\{l_0(g), l_0(g^{-1})\} = l_0(g).$$

En el párrafo anterior se mostró que si $l(g) < 1$, entonces $g \in G_0$ y $l_0(g) \leq l(g)$. De estas dos desigualdades se sigue que para cada

$r \in [0,1)$ se tiene la igualdad $B_d(e,r) = B_{d_0}(e,r)$. Como G_0 es abierto en G el conjunto $\{B_{d_0}(e,r) : r \in [0,1)\}$ es de hecho una base local para e en G. Por lo tanto d genera la topología de G.

Resta verificar que d es propia. Esto se hará verificando la compacidad de $\overline{B_d(e,n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Considérese $g \in B_d(e,n)$, esto es, $l(g) < n$. Entonces existen $h_0, \ldots, h_k \in G_0$ y $s_0, \ldots, s_k \in S$, con $s_0 = x_0$ y $s_i \neq x_0$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, tales que

$$g = \prod_{i=0}^{k} s_i h_i \ \text{ y } \ \sum_{i=0}^{k} (l_1(s_i) + l_0(h_i)) < n.$$

Ya que $l_1(x_i) = i$ y $s_1, \ldots, s_k \in S \setminus \{x_0\}$, necesariamente $k < n$ y entonces $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Por otro lado, para cada i, $l_0(h_i) < n$, i.e., $h_i \in B_{d_0}(e,n)$. Por lo tanto, denotando $T = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$,

$$g = \prod_{i=0}^{k} s_i h_i \in (TB_{d_0}(e,n))^{k+1} \subseteq (TB_{d_0}(e,n))^n .$$

Así,

$$B_d(e,n) \subseteq (TB_{d_0}(e,n))^n \subseteq \left(T\overline{B_{d_0}(e,n)}\right)^n .$$

Al ser d_0 propia, el conjunto $\overline{B_{d_0}(e,n)}$ es compacto. Esto a su vez implica que $\left(T\overline{B_{d_0}(e,n)}\right)^n$ es compacto, pues T es finito. Por ende $B_d(e,n)$ es compacto. $\square$

Capítulo 3

Métricas propias en cocientes de grupos topológicos.

En este capítulo se estudiará la existencia de métricas propias e invariantes en cocientes de grupos topológicos. Como muestra el siguiente resultado, es posible garantizar la metrizabilidad de cocientes de grupos topológicos en casos importantes.

Teorema 3.1. *Si G es un grupo topológico metrizable y H es un subgrupo cerrado de G, entonces G/H es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema de Birkhoff-Kakutani (Teorema 1.15), existe una métrica d en G compatible con su topología y tal que $d(xg, yg) = d(x, y)$, para cualesquier $g, x, y \in G$. Se define una métrica D en G/H como

$$\begin{aligned} D(xH, yH) &:= \inf\{d(u, v) : u \in xH,\ v \in yH\} \\ &= \inf\{d(xh_1, yh_2) : h_1, h_2 \in H\}. \end{aligned}$$

Es claro que $D(xH, yH) = \inf\{d(v, u) : u \in xH,\ v \in yH\} = D(yH, xH)$ y $D(xH, xH) = \inf\{d(u, v) : u \in xH,\ v \in xH\} = 0$. Además, por la invarianza de d, para $x, y, z \in G$ cualesquiera se tiene

$$\begin{aligned} D(xH, zH) &= \text{ínf}\{d(xh_1, zh_2) : h_1, h_2 \in H\} \\ &= \text{ínf}\{d(x, zh_2h_1^{-1}) : h_1, h_2 \in H\} \\ &\leq \text{ínf}\{d(x, yg) + d(yg, zh_2h_1^{-1}) : g, h_1, h_2 \in H\} \\ &= \text{ínf}\{d(x, yg) + d(y, zh_2h_1^{-1}g^{-1}) : g, h_1, h_2 \in H\} \\ &= \text{ínf}\{d(x, yg) + d(y, zh) : g, h \in H\} \\ &= \text{ínf}\{d(x, yg) : g \in H\} + \text{ínf}\{d(y, zh) : h \in H\} \\ &= D(xH, yH) + D(yH, zH). \end{aligned}$$

Por ser H cerrado cada clase xH también lo es, luego, para $xH \neq yH$ se tiene $D(xH, yH) = \text{ínf}\{d(x, yh) : h \in H\} > 0$. Por tanto D es una métrica.

Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección natural. Se sigue de la definición de D que para cualesquier $x \in G$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se tiene $\pi[B_d(x, \varepsilon)] = \{yH \in G/H : d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq B_D(xH, \varepsilon)$. Además, si $D(xH, yH) < \varepsilon$, entonces $d(xh_1, yh_2) < \varepsilon$ para algunos $h_1, h_2 \in H$ y por invarianza de d, $d(x, yh_2h_1^{-1}) < \varepsilon$. Así, $B_D(xH, \varepsilon) \subseteq \pi(B_d(x, \varepsilon))$. Por tanto la proyección orbital es continua y abierta respecto a d y D, de lo cual se sigue que D es compatible con la topología de G/H. □

A continuación se presenta un resultado más general que el anterior y que extiende el Teorema de Birkhoff-Kakutani a cocientes de grupos topológicos. En su demostración será necesario tener en cuenta el siguiente lema.

Lema 3.2. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Si $U \subseteq G/H$ es una vecindad abierta de eH, entonces existe una vecindad abierta V de eH tal que $\pi^{-1}[V]$ es simétrico, $\pi^{-1}[V](V) \subseteq U$ y $h(V) = V$ para cada $h \in H$.*

Demostración. Como $U \subseteq G/H$ es una vecindad abierta de eH, entonces $\pi^{-1}[U]$ es una vecindad abierta de H en G. Luego, por las proposiciones 1.9 y 1.7, existen vecindad abiertas y simétricas W_1 y W_2 de e tales que $HW_1 \subseteq \pi^{-1}[U]$ y $W_2^2 \subseteq W_1$. Así,

$$(HW_2 \cap W_2H)^2 \subseteq HW_2^2H \subseteq HW_1H \subseteq \pi^{-1}[U]H = \pi^{-1}[U].$$

Nuevamente por la Proposición 1.9, existe una vecindad V' abierta y simétrica de e tal que $HV' \subseteq HW_2 \cap W_2H$. Luego,

$$(HV'H)^2 = HV'HV'H \subseteq (HW_2 \cap W_2H)^2H \subseteq \pi^{-1}[U]H = \pi^{-1}[U].$$

Por la Proposición 1.8 $HV'H$ es un conjunto abierto. Sea $V = \pi[HV'H]$. V es una vecindad abierta de eH, pues π es abierta y $H \subseteq HV'H$. $\pi^{-1}[V] = HV'H$ es simétrico, ya que $(HV'H)^{-1} = H^{-1}V'^{-1}H^{-1} = HV'H$. Además

$$\pi^{-1}[V](V) = \{xyH : x, y \in HV'H\} \subseteq \{zH : z \in \pi^{-1}[U]\} = U$$

y para cada $h \in H$ se tiene que $h(V) = \{hxH : x \in HV'H\} = V$. $\square$

Teorema 3.3. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Entonces el cociente G/H es metrizable si y sólo si es primero numerable. Además, en tal caso existe una métrica invariante.*

Demostración. Considérese una base local $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ de G/H en eH. Sea $U_0 = G/H$. Haciendo uso del lema anterior se define recursivamente $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de manera que $\pi^{-1}[U_{n+1}](U_{n+1}) \subseteq U_n \cap Q_n$, $\pi^{-1}[U_n]$ es simétrico y para cada $h \in H$ se cumple que $h(U_{n+1}) = U_{n+1}$. Se denotará por $\mathbb{Q}_D$ el conjunto de racionales diádicos $\frac{k}{2^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Enseguida, para cada $r \in \mathbb{Q}_D$ se definirá una vecindad V_r de eH como sigue:

Para $n \in \mathbb{N}$ sea $V_{\frac{1}{2^n}} = U_n$. De forma recursiva, si para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene $V_{\frac{k}{2^n}}$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$, entonces se definirán los conjuntos $V_{\frac{m}{2^{n+1}}}$ como

- $V_{\frac{2k}{2^{n+1}}} := V_{\frac{k}{2^n}}$ y
- $V_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} := \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right)$.

Es claro de la definición que cada V_r depende únicamente del racional diádico r y no de alguna representación particular. Se afirma que cada V_r satisface $hV_r = V_r$ para cualquier $h \in H$. Esto se verificará inductivamente sobre n. Por construcción, cada $V_{\frac{1}{2^n}}$ satisface esta propiedad. Por G-equivarianza de π esto implica que cada $\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^n}}\right]$ también la satisface. Ahora supóngase que para algún n cada $V_{\frac{k}{2^n}}$ tiene la propiedad. Así, para cualquier $h \in H$,

$$hV_{\frac{2k}{2^{n+1}}} = hV_{\frac{k}{2^n}} = V_{\frac{k}{2^n}} = hV_{\frac{2k}{2^n}} \text{ y}$$
$$hV_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = h\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right) = \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right) = V_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}.$$

Se afirma también que $\pi^{-1}[V_{\frac{1}{2^n}}](V_{\frac{m}{2^n}}) \subseteq V_{\frac{m+1}{2^n}}$, cuando $m < 2^n$. Si m es par, $m = 2k$, entonces

$$\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{2k}{2^{n+1}}}\right) = \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right) = V_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}.$$

Si m es impar, $m = 2k+1$, entonces

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\right) &= \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right)\\ &\subseteq \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^n}}\right]\left(V_{\frac{k}{2^n}}\right) \subseteq V_{\frac{k+1}{2^n}} = V_{\frac{2k+2}{2^{n+1}}},\end{aligned}$$

donde la contención $\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right] \subseteq \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^n}}\right]$ se debe a que $\pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]\left(V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = \pi^{-1}[U_{n+1}](U_{n+1}) \subseteq U_n = V_{\frac{1}{2^n}}$.

Sea $x \in G$. Para cada $r \in \mathbb{Q}_D$ se define una vecindad de xH en G/H como $V_r^x := xV_r$. Si $x_1H = x_2H$, entonces $x_1^{-1}x_2 \in H$ y por H-invarianza, $x_1^{-1}x_2V_r = V_r$. Por lo tanto las vecindades V_r^x no dependen de x sino de xH. Nótese también que $gV_r^x = gxV_r = V_r^{gx}$.

A continuación se define una función auxiliar d como

$$d(xH, yH) = \sup\{r : yH \notin V_r^x\} \cup \{0\}.$$

d es evidentemente finita, de hecho $d \leq 1$. Como $\{V_r^x : r \in \mathbb{Q}_D\}$ es una base local en xH y G/H es un espacio Hausdorff, se verifica que $d(xH, yH) = 0$ si y sólo si $xH = yH$. Además, por la condición $gV_r^x = V_r^{gx}$ se tiene que

$$d(gxH, gyH) = \sup\{r : gyH \notin gV_r^x\} \cup \{0\} = d(xH, yH).$$

Ahora sea

$$\rho(xH, yH) = \sup\{|d(xH, uH) - d(yH, uH)| : uH \in G/H\}.$$

Se afirma que ρ es una métrica con las propiedades buscadas. ρ es finita pues

$$\rho(xH, yH) \leq \sup\{|d(xH, uH)| + |d(yH, uH)| : uH \in G/H\} \leq 2.$$

Claramente $\rho(xH, xH) = 0$. Por otro lado $\rho(xH, yH) = 0$ implica que $d(xH, yH) = 0$. También es evidente que $\rho(xH, yH) = \rho(yH, xH)$. La desigualdad del triángulo se cumple porque

$$\begin{aligned}d(xH, yH) =& \sup\{|d(xH, uH) - d(yH, uH)| : uH \in G/H\}\\ \leq& \sup\{|d(xH, uH) - d(zH, uH)| : uH \in G/H\}\\ &+ \sup\{|d(zH, uH) - d(yH, uH)| : uH \in G/H\}\\ =& d(xH, zH) + d(zH, yH).\end{aligned}$$

Por lo tanto ρ es una métrica. La invarianza de ρ se deduce de la invarianza de la función d como sigue

$$\begin{aligned}\rho(gxH, gyH) &= \sup\{|d(gxH, uH) - d(gyH, uH)| : uH \in G/H\}\\ &= \sup\{|d(xH, g^{-1}uH) - d(yH, g^{-1}uH)| : uH \in G/H\}\\ &= \sup\{|d(xH, vH) - d(yH, vH)| : vH \in G/H\}\\ &= \rho(xH, yH).\end{aligned}$$

Finalmente se verifica que ρ es una métrica compatible. Si r es un racional diádico en $[0,1]$, entonces

$$B_\rho(xH, r) \subseteq \{yH \in G/H : d(xH, yH) < r\} \subseteq V_r^x.$$

Ahora supóngase que $yH \in V^x_{\frac{1}{2n+1}}$, es decir, $x^{-1}yH \in V_{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Esto, junto con la simetría de $\pi^{-1}[U_{n+1}]$, implica que $y^{-1}x \in \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right] = \pi^{-1}[U_{n+1}]$. Por ende también se satisface que $xH \in V^y_{\frac{1}{2n+1}}$. Sea $uH \in G/H$. Como $uH \in V_{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}} = G/H$, existen $m, l \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}$ mínimos tales que $uH \in V^x_{\frac{m}{2^{n+1}}}$ y $uH \in V^y_{\frac{l}{2^{n+1}}}$. Nótese que la condición de minimalidad implica que

$$\frac{m-1}{2^{n+1}} \leq d(xH, uH) \leq \frac{m}{2^{n+1}} \text{ y } \frac{l-1}{2^{n+1}} \leq d(xH, uH) \leq \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Si $m < 2^{n+1}$, entonces

$$(y^{-1}x)(x^{-1}uH) \in \pi^{-1}\left[V_{\frac{1}{2^{n+1}}}\right] V_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subseteq V_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}.$$

Así, $uH \in V^y_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$ y de la minimalidad de l se sigue que $l \leq m+1$. Similarmente, si $l < 2^{n+1}$, se tiene que $uH \in V^x_{\frac{l+1}{2^{n+1}}}$ y $m \leq l+1$. Por tanto $l = m = 2^{n+1}$ o bien $|l - m| \leq 1$. Se concluye entonces que

$$|d(xH, uH) - d(yH, uH)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Como uH es arbitrario, esto muestra que

$$V_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subseteq B_\rho\left(xH, \frac{1}{2^n}\right).$$

$\square$

A continuación, se presenta un sencillo ejemplo de un cociente G/H para el cual no existe una métrica invariante compatible con su topología. El grupo G será un producto semidirecto, por lo que es conveniente recordar la Proposición 1.14.

Ejemplo 3.4. Considérense $\mathbb{R}^+$ el grupo multiplicativo de los reales positivos y $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de los reales, ambos con la topología usual. Considérese la acción de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ dada por $(t, x) \mapsto tx$. Esta es evidentemente una acción continua. Se denotará por $\nu \colon \mathbb{R}^+ \to Aut(\mathbb{R})$ al homomorfismo de grupos inducido por dicha acción.

Entonces puede construirse el producto semidirecto $G = \mathbb{R} \rtimes_\nu \mathbb{R}^+$. Esto es, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ con operación

$$(x_1, t_1)(x_2, t_2) = (x_1 + t_1 x_2, t_1 t_2).$$

Sea $H \coloneqq \{0\} \times \mathbb{R}^+$. Entonces H es un subgrupo cerrado de G. Para cada $(x, t) \in G$ se verifica que

$$(x, t)H = \{(x+ty, ts) : (y, s) \in H\} = \{(x, ts) : s \in \mathbb{R}^+\} = \{x\}\times\mathbb{R}^+.$$

Luego $G/H \cong \mathbb{R}$.

Por otro lado la acción de G en G/H está dada por

$$(z, r) * (x, t)H = (z + rx, rt)H = \{z + rx\} \times \mathbb{R}^+.$$

Supóngase que existe una métrica d invariante en G/H compatible con su topología. Según lo anterior esto equivale a una métrica invariante para la acción de G en $\mathbb{R}$ definida por $(z, r)x = z + rx$. Pero en tal caso se tendría que para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$ se satisface $d(0, 1) = d((0, a)0, (0, a)1) = d(0, a)$, con lo cual no es posible que d sea compatible.

Pasando al caso de métricas propias, es posible conseguir en ciertos casos la invarianza de la métrica.

Teorema 3.5. *Sean G un grupo localmente compacto segundo numerable y H un subgrupo compacto. Entonces existe una métrica compatible, propia y G-invariante en G/H.*

Demostración. Por el Teorema 2.4 existe una métrica d compatible, propia e invariante en G. Considérese la métrica de Hausdorff correspondiente en G/H,

$$d_H(xH, yH) = \max\{\sup_{h_1 \in H} \inf_{h_2 \in H} d(xh_1, yh_2), \sup_{h_2 \in H} \inf_{h_1 \in H} d(xh_1, yh_2)\}.$$

De la invarianza de la métrica d se sigue que d_H es G-invariante. En efecto,

$$\begin{aligned} d_H(gxH, gyH) &= \max\{\sup_{h_1\in H} \inf_{h_2\in H} d(gxh_1, gyh_2), \sup_{h_2\in H} \inf_{h_1\in H} d(gxh_1, gyh_2)\} \\ &= \max\{\sup_{h_1\in H} \inf_{h_2\in H} d(xh_1, yh_2), \sup_{h_2\in H} \inf_{h_1\in H} d(xh_1, yh_2)\} \\ &= d_H(xH, yH). \end{aligned}$$

A continuación se probará que d_H es propia. Sea $r \in \mathbb{R}^+$. Si $gH \in \bar{B}_{d_H}(eH, r)$, entonces para cada $h \in H$ existe $h' \in H$ tal que $d(h', gh) \leq r$. Por ende

$$d(e, gh) \leq d(e, h') + d(h', gh) \leq \sup_{x\in H} d(e, x) + r.$$

Se sigue que $\bar{B}_{d_H}(e, r) \subseteq \pi[\bar{B}_d(e, \sup_{x\in H} d(e, x) + r)]$. Como d es propia y π es continua, se tiene la compacidad de $\bar{B}_{d_H}(e, r)$.

Finalmente, resta verificar que d_H es compatible. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por continuidad de la operación en el grupo, para cada $h \in H$ existen vecindades W_h de e y V_h de h, con $diam(V_h) < \frac{\varepsilon}{4}$ tales que $d(h, gh') < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $g \in W_h$ y $h' \in V_h$. Como H es compacto, existen $h_1, \ldots, h_n \in H$ tales que $H \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{h_i}$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^n W_{h_i}$. Entonces para cada $g \in W$ y $h \in H$, si $h \in V_{h_i}$, entonces

$$d(h, gh) \leq d(h, h_i) + d(h_i, gh_i) + d(gh_i, gh) < \varepsilon.$$

Luego, para $g \in W$, se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{h_1\in H} \inf_{h_2\in H} d(h_1, gh_2) &\leq sup_{h\in H} d(h, gh) \leq \varepsilon \text{ y} \\ \sup_{h_2\in H} \inf_{h_1\in H} d(h_1, gh_2) &\leq sup_{h\in H} d(h, gh) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es, $d_H(eH, gH) \leq \varepsilon$ cuando $g \in W$. Por tanto la función $g \mapsto d_H(eH, gH)$ es continua en e. Se sigue que la función $gH \mapsto d_H(eH, gH)$ es continua en eH respecto a la topología cociente. Luego, las bolas con centro en eH son abiertas en la topología cociente. Por invarianza de d_H esto implica que la métrica d_H induce una topología más gruesa que la topología cociente.

Ahora considérese una vecindad abierta V de eH en la topología cociente. Al ser las bolas cerradas respecto a d_H conjuntos compactos y tenerse que $[\bigcap_{n=1}^\infty \bar{B}(eH, \frac{1}{n})] \cap [G/H \setminus V] = \varnothing$, se concluye que $B(eH, \frac{1}{n}) \subseteq V$ para algún n. Por lo tanto d_H es una métrica compatible en G/H. $\square$

Finalmente se estudian condiciones necesarias y suficientes para la existencia de métricas propias e invariantes en G/H. En el resto del capítulo $\Phi : G \to Homeo(G/H)$ será el homomorfismo natural determinado por

$$\Phi(g)(g'H) = gg'H.$$

Lema 3.6. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Supóngase que existen una métrica d propia y G-invariante en G/H y un subgrupo localmente compacto G' de $Iso(G/H, d)$ que contiene a $\Phi[G]$ y cuya acción en G/H es propia. Entonces existe un subgrupo compacto H' de G' tal que $\Phi[H] \subseteq H'$ y la función*

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi} : G/H &\to G'/H' \\ gH &\mapsto \Phi(g)H' \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sea H' el estabilizador de eH para la acción de G' en G/H. Como la acción de G' es propia, se tiene por la Proposición 1.27 que H' es compacto.

Se define $\theta : G'/H' \to G/H$ como $gH' \mapsto g(eH)$. De acuerdo a la Proposición 1.27, θ es un encaje topológico con $\theta[G'/H'] = G'(eH)$. Por otro lado $\Phi[G] \subseteq G'$, por lo que

$$G'(eH) \supseteq \Phi[G](eH) = G(eH) = G/H.$$

Por lo tanto θ es un homeomorfismo.

Para concluir nótese que $\theta = \widehat{\Phi}^{-1}$. □

Teorema 3.7. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una métrica compatible, propia y G-invariante en G/H*
2. *Existen un grupo metrizable y localmente compacto G', un subgrupo compacto H' de G' y un homomorfismo de grupos continuo $\varphi : G \to G'$ tales que $\varphi[H] \subseteq H'$ y la función $\tilde{\varphi} : G/H \to G'/H'$ inducida por φ es un homeomorfismo.*

Demostración. **2.$\Rightarrow$ 1.** Supóngase que 2. se satisface. Entonces el espacio G'/H' es σ-compacto, ya que G/H es imagen continua de G. Al ser además H' compacto, se tiene que la función cociente $G' \to G'/H'$ es perfecta y por ende G' es σ-compacto. Así, G' es localmente compacto y segundo numerable. Entonces, por el Teorema 3.5, existe una métrica d' compatible, propia y G'-invariante en G'/H'. Esto da la métrica buscada en G/H como $d(g_1H, g_2H) = d'(\tilde{\varphi}(g_1H), \tilde{\varphi}(g_2H))$.

1.⇒ 2. Sea d una métrica compatible, propia y G-invariante en G/H. Sean $G' = Iso(G/H, d)$ y $\varphi = \Phi$. De la separabilidad de G/H se sigue que G' es metrizable (ver 1.30). Por ser d propia, el Teorema 1.34 implica que G' es localmente compacto y su acción propia. Entonces aplicando el lema anterior se concluye lo deseado.

□

Corolario 3.8. *Sean G un grupo localmente compacto y segundo numerable y H un subgrupo cerrado de G. Si G/H es conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Existe una métrica compatible, propia y G-invariante en G/H.*
2. *Existe una métrica compatible y G-invariante en G/H.*

Demostración. Sea d una métrica compatible y G invariante en G/H. Se sigue del Teorema 1.32 que el grupo $Iso(G/H, d)$ es localmente compacto, segundo numerable y actúa propiamente en G/H. Entonces se satisfacen la hipótesis del Lema 3.6 y esto permite concluir aplicando el Teorema 3.7. □

A pesar de que el Teorema 3.7 establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de métricas G-invariantes y propias en cocientes de grupos topológicos, estas no son sencillas de aplicar en situaciones concretas, ya que requieren tener candidatos claros de (G', H', φ). La utilidad de dicho teorema se encuentra en establecer distintas condiciones, necesarias o suficientes, para la existencia de una métrica como la buscada.

Por ejemplo las que que a continuación se definen.

Definición 3.9. Sean G un grupo topológico localmente compacto y H un subgrupo cerrado de G. Se dice que H es *topológicamente casi normal* (respectivamente *casi normal)* en G si para cada subconjunto compacto (resp. finito) K de G existe un subconjunto K' de G también compacto (resp.finito) que satisface $HK \subseteq K'H$.

Definición 3.10. Sea G un grupo topológico. Se dice que G es *maximalmente casi periódico* si existe un homomorfismo de grupos continuo e inyectivo de G hacia algún grupo compacto.

Antes de pasar a la siguiente proposición se debe notar que

$$\begin{aligned} ker\Phi &= \{g \in G : \Phi(g) = Id_{G/H}\} \\ &= \{g \in G : \forall x \in G\ gxH = xH\} \\ &= \{g \in G : \forall x \in G\ x^{-1}gx \in H\} \\ &= \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}. \end{aligned}$$

Por ende $ker\Phi$ es un subgrupo normal de H.

Proposición 3.11. *Sean G un grupo localmente compacto y segundo numerable y H un subgrupo cerrado de G. Son condiciones necesarias para la existencia de una métrica propia, invariante y compatible en G:*

1. *$H/ker\Phi$ es maximalmente casi periódico.*

2. *H es topológicamente casi normal.*

Demostración. Sea d una métrica propia e invariante en G/H.

1. Al igual que en la demostración de 3.6 sea H' el estabilizador de eH respecto a la acción de $\mathrm{Iso}(G/H, d)$. Según el Teorema 1.34 la acción de $\mathrm{Iso}(G/H, d)$ es propia y se sigue de la Proposición 1.27 que H' es compacto. Como ya se probó, $\Phi\restriction_H : H \to H'$. Además, $h_1h_2^{-1} \in ker\Phi$ equivale a $\Phi(h_1)\Phi(h_2^{-1}) = Id_{G/H}$, i.e., $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$. Luego, $\Phi\restriction_H$ induce un homomorfismo continuo e inyectivo $\psi : H/Ker\Phi \to H'$.

2. Sea $K \subseteq G$ compacto. Si $s = sup\{d(eH, kH) : k \in K\}$, entonces para cualesquier $h \in H$ y $k \in K$ se tiene que x$d(eH, hkH) = d(eH, kH) \leq s$, por lo que $HK \subseteq \pi^{-1}[\overline{B_d}(eH, s)] = K'$. Como π es una función perfecta, K' es compacto.

□

Bibliografía

[1] Anantharaman-Delaroche, Claire. *Invariant Proper Metrics on Coset Spaces.* Topology Appl. 160 (2013), no. 3, 546–552.

[2] Arhangel'skii, Alexander; Tkachenko, Mikhail. *Topological Groups and Related Structures.* Atlantis Studies in Mathematics, 1. Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.

[3] Bourbaki, Nicolas. *General Topology.* Chapters 1–4. Reprint of the 1989 English translation. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[4] de Neymet, Silvia. *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones.* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 23, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2005.

[5] Engelking, Ryszard. *General Topology.* Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[6] Gao, Su; Kechris, Alexander S. *On the Classification of Polish Metric Spaces up to Isometry.* Mem. Amer. Math. Soc. 161 (2003), no. 766, viii+78 pp.

[7] Haagerup, Uffe; Przybyszewska, Agata. *Proper metrics on locally compact groups, and proper affine isometric actions on Banach spaces.* Preprint, arXiv:math/0606794, 2006.

[8] Humphreys, John. *A course in Group Theory.* Oxford University Press Inc., New York, 1996.

[9] Kelley, John. *General Topology* Graduate Texts in Mathematics No.27, Springer-Verlag, Nueva York, 1975.

[10] Montgomery, Deane; Zippin, Leo. *Topological Transformation Groups.* Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[11] Manoussos, Antonios; Strantzalos, Polychronis. *On the Group of Isometries on a Locally Compact Metric Space.* J. Lie Theory 13 (2003), no. 1, 7–12.

[12] Palais, Richard S. *On the Existence of Slices for Actions of Non-compact Lie Groups.* Ann. of Math. (2) 73 (1961) 295–323.

[13] Roelcke, Walter; Dierolf, Susanne. *Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients.* Advanced Book Program. McGraw-Hill International Book Co., New York, 1981.

[14] Struble, Raimond A. *Metrics in Locally Compact Groups.* Compositio Math. 28 (1974), 217–222.

[15] Tkachenko, Mikhail et. al. *Grupos topológicos.* Libros de texto, manuales de prácticas y antologías. Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F., 1997.