Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Introducción a la Teoría de Conjuntos Internos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO
P R E S E N T A:

BENITO ALBERTO CELORIO GALÁN

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

México DF 2017

Hoja de Datos del Jurado

1-. Datos del alumno.

Celorio
Galán
Benito Alberto
5527224279
UNAM
Facultad de Ciencias
Matemáticas
307650014

2-. Datos del tutor.

M. en C.
Rafael
Rojas
Barbachano

3-. Datos del sinodal 1.

Dr.
David
Meza
Alcántara

4-. Datos del sinodal 2.

Dr.
Alfonso Osvaldo
Téllez
Nieto

5-. Datos del sinodal 3.

M. en C.
Luis Jesús
Turcio
Cuevas

6-. Datos del sinodal 4.

Mat.
Fernando Javier
Nuñez
Rosales

7. Datos del trabajo escrito.

Introducción a la teoría de conjuntos internos
47 p.
2017

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer primero que nada a mi familia. A mi tía Maribel Galán y a mi abuela Rebeca Gonzalez, a mis tíos Sergio Martinez y Carolina Celorio. Su apoyo constante y su generosidad hicieron posible terminar esto. No hay forma de agradecerles lo suficiente.

A mi asesor Rafael Rojas Barbachano por creer en este proyecto y por su experiencia y apoyo.

A Alan Mauricio Pasos Trejo, que fue invaluable a la hora de navegar a través de varios momentos de la carrera.

A Javier Fernando Nuñez y Luis Turcio por sus consejos.

De corazón gracias.

Capítulo 1

Introducción

La historia de los números “nuevos”siempre ha sido tumultuosa. Desde la trágica adición de los irracionales en la época de los griegos, hasta la aceptación de los números complejos. No menos conflictiva fue la discusión en torno a los infinitesimales en el siglo XVII.

Introducidos por Leibniz en su desarrollo del cálculo, los infinitesimales eran números menores que cualquier cantidad positiva, pero diferentes de cero. Sin embargo, el hecho de que pudieran usarse como cero y como distintos de cero según la conveniencia del matemático les generó muchas críticas. Uno de los principales opositores fue George Berkeley el cual llamó a los infinitesimales *los fantasmas de las cantidades muertas*.

El tiempo pasó y los infinitesimales no se pudieron justificar, aun sabiendose que los resultados a los que se llegaban con ellos eran correctos. Esto llevó a que Cauchy iniciara los métodos a través de límites que eventualmente formalizó Weirstrass en los métodos omnipresentes de δ y ε.

Fue hasta 1966 que Abraham Robinson finalmente pudo justificar a los infinitesimales utilizando las herramientas de la lógica moderna. Las pláticas de Robinson fueron muy exitosas y generaron varios desarrollos de la teoría. El mismo Kurt Gödel después de escuchar una de sus lecturas dijo que este sería el futuro del análisis.

A partir de lo que demostró Robinson ha habido numerosas aproximaciones al análisis no estándar. Aquí analizaremos una que tiene una aproximación bastante robusta y que otorga muchas ventajas. Está se le atribuye a Nelson y la manera en la que aborda el tema es a través de *la teoría de conjuntos internos* o TCI.

La construcción de Nelson consiste en hacer una extensión conservativa de ZFC a TCI, de forma que en la nueva teoría se pueden utilizar infinitesimales. El hecho de que se realice de manera axiomática es un fuerte argumento para considerar que los infinitesimales siempre han estado ahí, pero que no se tenía una axiomática lo suficientemente rica como para observarlos.

Lamentablemente para gente como yo, que encuentra los métodos de de δ y ε poco elegantes y laboriosos, la profecía de Gödel no se ha cumplido aún. Pero aun si los infinitesimales no son utilizados en la matemática de manera regular, por su simpleza se siguen usando en carreras más técnicas, como en física e ingeniería. A manera comparativa vale la pena mencionar la historía del arreglo QWERTY de nuestros teclados.

En un principio las máquinas de escribir no eran lo suficientemente sofisticadas como para permitir escribir rápidamente sobre ellas, así que para resolver el problema de que se atoraran las teclas ante mecanistas cada vez más diestras, se diseño un teclado especialmente organizado para que se escribiera más lento.

Eventualmente este arreglo dejó de ser necesario con el avance de tecnología en las máquinas de escribir pero este ya se había vuelto el estándar. Este teclado es el que usamos hoy en día, el arreglo QWERTY. De igual manera los límites, que fueron introducidos para remplazar a los infinitesimales porque estos no podían ser justificados, se siguen usando hasta hoy.

Es claro que dependerá de cada quien decir que métodos son más elegantes o sencillos, sin embargo creo que nadie negará que ver los problemas de otra forma hace la diferencia a la hora de solucionarlos. Por lo tanto, el propósito de esta tesis es hacer una presentación del análisis no estándar en aras a que tenga una mayor difusión.

Capítulo 2

Teoría de conjuntos internos

La teoría de conjuntos internos (la abreviaremos TCI) se obtiene a partir de modificar la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Los cambios consisten en ajustar un par de los axiomas de ZFC, añadir un nuevo predicado unario indefinido y 3 axiomas nuevos.

El nuevo predicado unario es $e(x)$ y se leerá cómo “x es estándar”; y al igual que la pertenencia $\in$ no será definido. Como al hacer esto estamos modificando el lenguaje de ZFC, dividiremos en dos grupos las fórmulas de TCI: fórmulas internas, que son las que no utilizan el nuevo predicado e (las fórmulas de ZFC); fórmulas externas, las que utilizan e.

Es por esta extensión al lenguaje que también tenemos que modificar los esquemas de axiomas de ZFC ya que utilizan fórmulas: El axioma de remplazo y el axioma de separación. Dentro de TCI ambos sólo podrán usar fórmulas internas.

Con esto aseguramos que dentro de TCI se seguirá comportando de la misma forma todo lo que conocíamos. Es decir que no estamos cambiando la teoría de ZFC sino que solo estamos añadiendo (o descubriendo) nuevas cosas.

El predicado estándar va a representar esa división a nivel de los elementos. Un objeto de TCI será estándar si es un objeto de ZFC. Es decir, todas las cosas que ya conocíamos de ZFC serán lo estándar, mientras que lo no-estándar será todo lo que aparecerá como nuevo.

Antes de presentar los axiomas, serán de utilidad las siguientes abreviaciones:

Si $\phi(x)$ es una fórmula, en vez de $\forall x(e(x) \to \phi(x))$ usaremos $\forall^e x\phi(x)$.

En vez de $\exists x(e(x) \wedge \phi(x))$ usaremos $\exists^e x\phi(x)$.

Axioma de Transferencia (T)

Si ϕ es una fórmula interna cuyas únicas variables libres son $x, t_1, t_2, ..., t_k$ entonces:

$$\forall^e t_1 ... \forall^e t_k [\forall^e x\phi(x, t_1, ..., t_k) \to (\forall x\phi(x, t_1, ..., t_k)]$$

También tenemos el regreso del axioma y se cumple de manera trivial.

De forma intuitiva el axioma de transferencia nos dice que todo lo que vale para los estándar vale para los no-estándar también. Por ejemplo, si todos los enteros estándar tuvieran inverso aditivo, entonces por transferencia todos los enteros (estándar y no-estándar) tendrían inverso aditivo.

Uno de los principales usos de (T) es confirmar a los estándar como los objetos "clásicos"de ZFC.

Teorema 2.0.1. *Sea ϕ una fórmula interna cuya única variable libre es x entonces:*

1) $\exists x\phi(x) \to \exists^e x\phi(x)$

2) $(\exists! x\phi(x)) \to (\exists^e ! e(x))$

Esta fórmula se deriva de (T) pero usando su contrapositiva y la negación de ϕ. ■

De esto concluimos que si un objeto satisface de manera única una fórmula (interna) entonces ese objeto es estándar. Y estos son todos los elementos "clásicos" de ZFC. Por ejemplo: $\emptyset, 4, 0, \pi, \mathbb{N}, \mathbb{R}$...

También podemos decir que cualquier cosa que construyamos a partir de objetos estándar usando fórmulas internas, será estándar. Por ejemplo, si z es estándar tenemos que su conjunto potencia será estándar. Si z es no-estándar entonces no se puede aplicar (T) ya que esta solo acepta parámetros forzosamente estándar. De igual manera, el axioma de separación aplicado a un conjunto estándar usando una fórmula con parámetros estándar generará un conjunto estándar.

Hay que tener en cuenta que las fórmulas de ZFC no dicen lo mismo en TCI ya que nuestros cuantificadores ahora "alcanzan" nuevos elementos, es decir $\forall n(n \in \mathbb{N} \to 0 + n = 0)$ en TCI no significa lo mismo que en ZFC. Sin embargo, $\forall^e n(n \in \mathbb{N} \to 0 + n = 0)$ sería equivalente tanto en ZFC como en TCI. Esto motiva la siguiente definición.

Si σ es un enunciado interno llamaremos la *relativización* a los estándar de σ, denotada por σ^e a la fórmula que se obtiene de remplazar todas las apariciones de $\forall$ y $\exists$ por $\forall^e$ y $\exists^e$.

Es fácil ver que $\sigma^e \leftrightarrow \sigma$ ya que $\sigma \to \sigma^e$ es trivial y $\sigma^e \to \sigma$ se obtiene de aplicar (T) y el teorema 2.0.1. Es decir, podemos concluir que todos los enunciados que teníamos para los estándar se extienden hasta los no-estándar también.

El siguiente resultado es importante porque nos empieza a dar una idea sobre la naturaleza de los elementos no-estándar. Se obtiene simplemente de aplicar transferencia a el axioma de extensionalidad:

$$\forall^e x \forall^e y (\forall^e z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

De donde obtenemos que dos conjuntos estándar son iguales syss tienen los mismos elementos estándar. Con esto tenemos que los elementos no estándar siguen como una sombra a los estándar.

El siguiente axioma es el que por fin nos va a revelar los nuevo elementos:

Axioma de Idealización (I)

Si ϕ es una fórmula interna cuyas variables libres son al menos x, y y posiblemente $t_1, t_2, ..., t_k$ entonces:

$$\forall t_1 ... \forall t_k (\forall^e z (z finito \rightarrow \exists x \forall y (y \in z \rightarrow \phi(x, y, t_1, ..., t_k)))) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists x \forall^e y \phi(x, y, t_1, ..., t_k))$$

El axioma de idealización puede parecer un poco oscuro a primera vista, sin embargo es el axioma que garantiza la existencia de los elementos no-estándar. En principio lo que hace es una forma de teorema de compacidad llevada a relaciones. Si para cada conjunto finito hay alguien que esta relacionado con todos sus elementos, entonces hay alguien que esta relacionado con todos.

Sabiendo eso, veamos nuestro primer elemento no-estándar. Consideremos los naturales con la relación de mayor, la cual es una fórmula interna de dos variables libres por lo que podemos aplicar (I).

$$\forall^e z (z finito \rightarrow \exists x (\forall y (y \in z \rightarrow (y \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N} \wedge y < x))) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists x \forall^e y (y \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N} \wedge y < x)$$

Como cada subconjunto finito de los naturales tiene un elemento máximo M, para satisfacer el lado izquierdo del bicondicional basta elegir x como $M + 1$. Esto nos garantiza entonces que hay un elemento en los naturales que es mayor que todos los naturales estándar. Este elemento necesariamente es no-estándar.

Una duda interesante puede surgir aquí. Por una parte mencionamos que todo sigue funcionando como en ZFC, en específico la finitud. Es decir, un conjunto es finito si es biyectable con un natural. Por otra parte acabamos de ver que hay un nuevo natural que es más grande que todos los naturales que conocíamos, lo cual parecería llevarnos a una paradoja. Sin embargo, contrario a lo que podríamos esperar, estos nuevos números siguen siendo finitos. Ya que los naturales estándar son finitos, entonces por transferencia los naturales no-estándar también.

Por otra parte, si un conjunto es finito y estándar, y por lo tanto biyectable con un natural, este natural es único. Por lo que aplicando el teorema anterior este natural es estándar. Esto nos debería dejar ya tranquilos de que la finitud sigue funcionando igual, ya que siempre que exista una biyección de un estándar con un natural, este natural será estándar.

Sin embargo, el axioma de idealización va mucho más allá y nos garantiza el siguiente sorprendente resultado:

Teorema 2.0.2. *A es un conjunto estándar y finito syss Todos los elementos de X son estándar.*

Lo que queremos probar formalmente es:

$$\forall A((e(A) \wedge Afinito) \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow e(x)))$$

Consideremos la fórmula interna $x \in A \wedge x \neq y$. Como es interna y tiene al menos dos variables libres podemos aplicar (I).

$$\forall A(\forall^e z(zfinito \rightarrow \exists x \forall y(y \in z \rightarrow (x \in A \wedge x \neq y))) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists x \forall^e y(x \in A \wedge x \neq y))$$

De aquí tomamos A un conjunto y desarrollamos ambos lados del bicondicional.

Primero $\exists x \forall^e y(x \in A \wedge x \neq y)$ lo podemos escribir como $\exists x(x \in A \wedge \neg e(x))$.

Ahora negando ambos lados:

$$\exists^e z(zfinito \wedge \forall x \exists y(y \in z \wedge (\neg(x \in A) \vee x = y))) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow e(x))$$

La parte $\forall x \exists y (y \in z \wedge (\neg(x \in A) \vee x = y))$ es equivalente a $\forall x \exists y (y \in z \wedge (x \in A \rightarrow x = y))$ y esto equivale $\forall x (x \in A \rightarrow x \in z)$ y a su vez a $(A \subseteq z)$

Por lo tanto obtenemos:

$$\exists^e z (z finito \wedge A \subseteq z) \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow e(x))$$

Esto ya es muy parecido a lo que necesitamos probar, siendo solamente el lado izquierdo diferente. Así que usando este resultado pasamos a demostrar el teorema. Tomamos A un conjunto y empezamos por la ida:

$$(e(A) \wedge A finito) \rightarrow \forall x (x \in A \rightarrow e(x))$$

Usamos nuestro resultado previo y como A es estándar y finito lo podemos usar en lugar de la z en el existencial lo cual nos implica lo que necesitamos.

Para el regreso usamos de nuevo nuestro resultado anterior, lo que nos da un conjunto z estándar y finito. Nos fijamos en su potencia $P(z)$. Esta sigue siendo estándar y finita ya que z es estándar y finito. Esto nos permite entonces usar la ida para garantizar que todos sus elementos son estándar, en específico A. Y como $A \subseteq z$ con z finito, tenemos que A es estándar y finto.

■

Este resultado probablemente sea el más significativo de esta sección. Nos dice que cualquier conjunto estándar infinito tiene elementos no-estándar, empezando por los naturales, como ya habíamos visto. Es también la razón por la que TCI tiene mayores implicaciones que otras aproximaciones al análisis no-estándar, y es porque justo nos permite aplicarlo a otras ramas de la matemática como topología y probabilidad, ya que nos habla de todos los espacios y no solo de los reales.

Axioma de Especializacion (E)

Si ϕ es una fórmula (interna o externa) con al menos x como variable libre entonces:

$$\forall^e z \exists^e y \forall^e x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi(x))$$

El axioma de especialización es el más legible de los tres. Básicamente lo que hace es complementar el axioma de separación para poder construir conjuntos con fórmulas externas, con la restricción de que solo nos habla sobre los elementos estándar.

Como dos conjuntos estándar son iguales si tienen los mismos elementos estándar el conjunto creado por (E) es único y lo denotaremos ${}^{e}\{x \in z|\phi(x)\}$.

Hay que tener cuidado con cómo se interpreta este conjunto. No es el conjunto cuyos elementos son solamente los estándar que cumplen ϕ, sino el conjunto cuyos elementos estándar son los que cumplen ϕ. Es decir, si $E = {}^{e}\{x \in z|\phi(x)\}$, puede haber elementos en E que no cumplan ϕ o elementos fuera de E que sí cumplan ϕ pero que estén en z. Estos necesariamente serían no-estándar, pero es algo que hay que tener en cuenta.

Como ejemplo de esto, vamos a demostrar que en los naturales, si m es un no-estándar, entonces ${}^{e}\{x \in \mathbb{N}|x < m\} = \mathbb{N}$.

Para demostrar esto basta ver que tienen los mismos elementos estándar con la doble contención. Omitiendo la contención trivial tenemos que si $n \in \mathbb{N}$ y $e(n)$ entonces $n \neq m$ ya que m es no-estándar. Por lo tanto $n < m \vee m < n$. Por otro lado, como $\{x \in \mathbb{N}|x < n\}$ es un conjunto estándar y finito todos sus elementos son estándar (2.0.1), por lo tanto m no puede pertenecer a el, osea ser menor que n. Concluimos entonces que $n < m$ y que ${}^{e}\{x \in \mathbb{N}|x < m\} = \mathbb{N}$.

Este ejemplo muestra lo engañoso que puede ser (E). Mientras que no pasa que $m < m$ de todas formas $m \in {}^{e}\{x \in \mathbb{N}|x < m\}$.

Esto nos muestra que los no-estándar no pueden ser manipulados de la misma forma que los elementos estándar. La naturaleza de estos objetos impide que podamos trabajar con ellos de la misma forma que con conjuntos estándar. Por eso es importante para trabajar con TCI notar las restricciones que hay a la hora de formar conjuntos, ya que no podemos controlar lo que hagan los no-estándar. Es decir, podemos controlar al objeto, pero no lo que hará su sombra, la cual se puede deformar dependiendo de donde estemos.

Y para finalizar de hablar sobre la esencia distintiva de los no-estándar, veamos la característica quizá más asombrosa.

Teorema 2.0.3. *Existe un conjunto F tal que todo elemento estándar pertenece a él y es finito.*

La fórmula $y \in F \wedge F finito$ es interna y contiene solo dos variables libres por lo tanto es candidata para usar (I).

$$\forall^e z(z finito \rightarrow \exists F \forall y(y \in z \rightarrow (y \in F \wedge F finito)) \leftrightarrow \exists F \forall^e y(y \in F \wedge F finito)$$

Como $\forall^e z(z finito \rightarrow \exists F \forall y(y \in z \rightarrow (y \in F \wedge F finito))$ se satisface trivialmente ya que para cada z, ella misma puede fungir como las F necesaria.

Por lo tanto siempre tenemos $\exists F \forall^e y(y \in F \wedge F finito)$. ■

Esto significa, por ejemplo, que hay un conjunto que contiene a todos los ordinales estándar pero que es finito. Sin embargo, el conjunto F necesariamente es no estándar.

¿Qué pasaría si no lo fuera? Sea E un conjunto que contiene infinitos elementos estándar y F el conjunto finito que contiene todos los elementos estándar de E. Si F fuera estándar, como es finito, todos sus elementos serían estándar y luego por extensionalidad sería igual a F. Sin embargo, F es infinito y por lo tanto contiene elementos no estándar, lo cual es una contradicción.

Tomando de nuevo el caso de los naturales no-estándar, demostrar que el "conjunto"$\{1, 2, 3, ..\} \subset m$ y que por lo tanto m es infinito, es imposible. Aun sí individualmente cada natural estándar está en m. Esto es porque el conjunto de los naturales estándar no se pude construir, no existe dentro de TCI, como acabamos de ver.

Así, la finitud juega un papel curioso con los no-estándar ya que estos parecen no tener consideraciones de espacio. Pero quizá esto no tendría que ser tan sorprendente, después de todo un objeto con un volumen basto puede tener una sombra de volumen nulo.

Terminemos por ver un caso curioso. Como el 0 es estándar y si n es estándar, entonces $n+1$ también es estándar, entonces podríamos concluir que todos los naturales son estándar por inducción.

Uno podría pensar que la inducción ya no funciona pero si nos remitimos a su formula tenemos que si $A \subset \mathbb{N}$ luego $0 \in A \wedge \forall n(n \in A \rightarrow s(n) \in A) \rightarrow A = \mathbb{N})$. Visto así es fácil ver dónde está el error en la paradoja anterior. Para realizar la inducción estamos suponiendo que existe el conjunto de todos los naturales estándar, lo cual ya sabemos es imposible.

Con esto terminamos la presentación de TCI y recalcamos que lo más importante a la hora de trabajar con TCI, es tomar en cuenta las restricciones que impone la naturaleza de los no-estándar; tener claro cuándo se puede aplicar transferencia y las limitaciones que hay a la hora de crear conjuntos.

Capítulo 3

Los reales no estándar

Ahora que ya hemos presentado la teoría de conjuntos internos, podemos pasar a trabajar con ellos. Este capítulo tiene como propósito ejemplificar cómo se trabaja con los infinitesimales. Se hablará del comportamiento de los nuevos elementos así de como de continuidad.

3.1. Definiciones

En esta primera parte veremos cómo se comportan los reales en nuestra nueva teoría. Así que empecemos por ver algunas características generales de los reales estándar.

Teorema 3.1.1. *Sean a y b reales estándar, entonces:*

1) $a + b$ es estándar
2) ab es estándar
3) $-a$ y $1/a$ son estándar

Como a y b son números estándar y el resultado de la suma es único, entonces tenemos que $a + b$ es estándar. Lo mismo ocurre para el producto. Como los inversos aditivos y multiplicativos son únicos, tenemos que ambos son estándar por el teorema 2.0.1.

■

En el capítulo anterior construimos nuestro primer elemento no-estándar utilizando el axioma de idealización, el cual nos mostraba la existencia de un natural mayor que todos los naturales estándar. De igual forma podemos hacer esto en los reales, para obtener un número h.

A un real h que cumpla que para todo real estándar x entonces $x < |h|$ le llamaremos *ilimitado*. Si un número x no es ilimitado, entonces es *limitado*, i.e. existe un real estándar y tal que $|x| < y$.

Ahora podemos preguntarnos cuantos reales ilimitados hay. Si tenemos que h es ilimitado, entonces es fácil ver que $h+1$ también lo es. Lo mismo para todo real estándar, por lo que tenemos al menos tantos reales no-estándar como reales estándar.

Teorema 3.1.2. *Sean a y b reales limitados, y c un real ilimitado entonces:*

1) $a+b$ es limitado.
2) ab es limitado.
3) $a+c$ es ilimitado.
4) ac es ilimitado.
5) c es no-estándar.

Como a y b son limitados entonces existen reales estándar r, t que cumplen $|a| < r$ y $|b| < t$.

1) Sumando $|a| < r$ y $|b| < t$ tenemos $|a| + |b| < r + t$ y por desigualdad del triangulo $|a + b| \leq |a| + |b|$ de donde obtenemos que $|a + b| < r + t$ por lo que $a + b$ es limitado.

2) Ahora multipliquemos $|a| < r$ y $|b| < t$ de donde tenemos $|ab| < rt$ por lo que ab es limitado.

3) Sea r un real estándar. Primero supongamos que $0 < a$, entonces como $r < |c|$ es claro que $r < |c + a|$. Ahora, si $a < 0$ entones supongamos que $|c+a| < r$. Entonces tendríamos que que $|c| < r+|a|$, ya que $|c|-|a| \leq |c+a|$,

pero $r - |a|$ es estándar y c es ilimitado, lo cual es una contradicción, por lo tanto $r < c + a$.

4) De nuevo, $r/|a| < |c|$ entonces $r < |c||a|$, es decir $r < |ca|$.

En estas primeras demostraciones es importante señalar el uso implícito de (T). Por ejemplo, en que las propiedades sobre desigualdades siguen cumpliéndose con los no-estándar. Esto es porque como vimos en el capítulo anterior, TCI hereda todas las propiedades clásicas (internas) a través de transferencia.

5) Como $|c|$ es mayor que todos los estándar, el mismo debe ser necesariamente no-estándar.

■

Se puede ver de forma trivial que el producto de ilimitados es ilimitado. No pasa lo mismo con la suma ya que si a es ilimitado, $a - a$ es limitado.

Ahora, si h es un número ilimitado, consideremos $1/h$. Como tenemos que para todo real estándar r, $1/r < |h|$ obtenemos que $1/|h| < r$. Esto nos dice que el número $1/|h|$ es más pequeño que todos los reales estándar positivos, pero es diferente de cero.

Si h es un real tal que para todo real estándar positivo r, se tiene $|h| < r$ llamaremos a h *infinitesimal*. Notemos que el único infinitesimal estándar es el cero y que si h es un infinitesimal entonces $1/h$ es ilimitado.

Teorema 3.1.3. *Sean a un real estándar y c un real infinitesimal entonces:*

1) $a + c$ es limitado.
2) ac es infinitesimal.
3) c es no-estándar.

La demostración de estos incisos es análoga a las del teorema anterior. De igual manera es trivial ver que suma y producto de infinitesimales es infinitesimal.

En los reales, diremos que dos números están infinitamente cercanos si su diferencia es un infinitesimal. Lo representaremos por $a \simeq b$. Está relación es de equivalencia.

Teorema 3.1.4. *Sean a, b, c, d reales tal que $a \simeq b$ y $c \simeq d$ entonces:*

1) $a + c \simeq b + d$.
2) $ac \simeq bd$.
3) Si a y b no son infinitesimales $1/a \simeq 1/b$.

1) Queremos ver que $a + c - b - d$ es un infinitesimal. Para esto agrupamos $(a - b) + (c - d)$ y como sabemos que $a - b$ es un infinitesimal, al igual que $c - d$, y que la suma de infinitesimales es infinitesimal, obtenemos lo que queremos.

2) $(a - b) = h$ y $(c - d) = h'$ donde h y h' son infinitesimales. De ahí tenemos $a = h + b$ y $c = h' + d$, y si multiplicamos las igualdades obtenemos $ac = hh' + hd + h'b + bd$. De aquí obtenemos $ac - bd = hh' + hd + h'b$, donde $hh' + hd + h'b$ es un infinitesimal como buscábamos.

3) Queremos demostrar que $1/x - 1/y$ es un infinitesimal. Observemos que en la expresión $|\frac{y-x}{xy}|$, $y - x$ es un infinitesimal por hipótesis, $1/x$ es limitado al igual que $1/y$ ya que tanto x como y no son infinitesimales. Como el producto de un número limitado por un infinitesimal, es un infinitesimal, tenemos el resultado deseado.

■

Teorema 3.1.5. *Si a y b son reales estándar y $a \simeq b$ entonces $a = b$*

Como $a - b$ es un infinitesimal, y la resta de estándares es estándar, $a - b = 0$ ya que es el único infinitesimal estándar.

■

Teorema 3.1.6. *Todo real limitado está infinitamente cercano a un real estándar.*

Sea a un real limitado, i.e. hay un real estándar positivo r tal que $|a| < r$. Usando (S) sea $A = {}^{e}\{x \in R | x \leq a\}$. Ahora como todos los elementos estándar en A son menores que r, entonces por (T) todos los elementos de A son menores que r. Por lo tanto, como al menos $-r \in A$ tenemos que A es un conjunto no vacío y acotado. Como todo conjunto acotado de los reales tiene un supremo, sea α tal número. Por el teorema 2.0.1 sabemos que α es estándar.

Ahora veamos que $\alpha \simeq a$ y procedamos por reducción al absurdo en ambos casos del valor absoluto. Sea e un estándar positivo. Si $\alpha - a > e$ entonces $\alpha > e + a$ pero $e + a$ es una cota superior de A menor que α, contradicción. Si $a - \alpha > e$ entonces $a > \alpha + e$ pero $\alpha > a$ y e es positivo, contradicción.

■

¿Porqué no habríamos podido simplemente decir que el conjunto A del teorema anterior es acotado por a y es no vacío porque $a \in A$? Aquí tenemos que recordar sobre la advertencia sobre el uso de (S) ya que no sabemos si a es estándar por lo que no podemos asegurar ninguna de las dos afirmaciones.

Otro punto que podría haber salido mal habría sido decir que como todos los elementos estándar de A son menores que a por (T) todos los elementos de A son menores que a. Esto de nuevo es un uso incorrecto de (T) ya que a no es estándar necesariamente.

Con esto queda demostrado el teorema y al mismo tiempo vemos un ejemplo de qué cuidados se deben tener al usar (T) y (S). Ahora podemos dar la siguiente definición:

Llamaremos *parte estándar* de un número limitado al real estándar infinitamente cercano a él.

Definiremos el *halo* de un punto x como el conjunto $h(x) = \{y|y \simeq x\}$
.

3.2. Continiudad

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x \in [a, b]$ si $f(x) \simeq f(y)$ para cualesquiera $y \simeq x$. Una función continua, es una función que es continua en todos los puntos de su dominio.

Tomemos por ejemplo la función $f(x) = x^3 + 2x + 3$. Para demostrar que es una función continua basta con tomar un punto estándar x de su dominio y un y tal que $x \simeq y$. Ahora queremos ver que $f(x) \simeq f(y)$.

Como $x^3 \simeq y^3$, $2x \simeq 2y$ y $3 \simeq 3$ tenemos que la suma de nos da $f(x) \simeq f(y)$ como buscábamos, por lo que la función $f(x)$ es continua.

En cambio consideremos la siguiente función en el punto 0.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

Tomamos un punto h tal que $0 \simeq h$. Por una parte tenemos que $f(0) = 1$ pero $f(h) = h^2$ donde $h^2 \simeq 0$ por lo que no está infinitamente cercano a 1. De ahí que la función no es continua en el punto 0.

Teorema 3.2.1. *Si f y g son funciones continuas en un domino D:*

1) $f + g$ es continua.
2) fg es continua.
3)$f \circ g$ es continua .

1) Sean x y y tal que $x \simeq y$. Como $f + g(x) = f(x) + g(x)$ y $f(x) \simeq f(y)$, $g(x) \simeq g(y)$ tenemos que $f + g(x) \simeq f + g(y)$ por el teorema 3.1.3.

2) Igual que el inciso anterior.

3) Sean x y y tal que $x \simeq y$. Queremos ver que $f(g(x)) \simeq f(g(y))$. Como g es continua tenemos que $g(x) \simeq g(y)$ y como f es continua entonces $f(g(x)) \simeq f(g(y))$.

■

Teorema 3.2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua entonces f alcanza su valor máximo.*

Por el teorema 2.0.3 del capítulo anterior tenemos que hay un conjunto $E \subset [a, b]$ que contiene todos los elementos estándar de $[a, b]$ y que es finito. Como E es finito podemos tomar el máximo de las imágenes de f restringida a E. Sea $m \in F$ el máximo y tomemos m' su parte estándar.

Supongamos que hay un elemento estándar r tal que $f(m') < f(r)$. Como $f(m) > f(r)$, $m \simeq m'$ y f es continua tenemos $f(m) \simeq f(m')$. Por lo tanto $f(m') \simeq f(r)$. Sin embargo, como m' y r son estándar, y f es estándar, sus imágenes son estándar y por el teorema 3.1.5 entonces $f(m') = f(r)$, lo cual contradice nuestra suposición.

■

Recordemos que ahora usamos en varias partes (T) a la hora de demostrar las cosas solo para los elementos estándar. Si nos fijamos en la parte estándar de r fue justo para poder utilizar (T) de forma legal en los varios pasos.

Capítulo 4

Teorema de conservación

4.1. Modelos internos

En esta sección probaremos que TCI es una extensión conservativa de ZFC, i.e. lo que se puede probar en ella se puede probar en ZFC (en su respectivo lenguaje). Este resultado es crucial ya que, como vimos en la primera sección, nos induce a pensar que en realidad los elementos no-estándar siempre han estado ahí, y que solo necesitábamos una axiomática más rica para poder identificarlos.

Formalmente lo que queremos probar es que si σ es un teorema interno de TCI entonces σ también es un teorema de ZFC. Realizaremos nuestra demostración utilizando la teoría de modelos internos desarrollada por Von Neumann. Para esto seleccionaremos 3 variables de nuestro lenguaje que reservaremos exclusivamente para este uso. Elijamos entonces E, S y M. Intuitivamente estas variables representarán: M el universo de conjuntos; S los elementos estándar; E la relación de pertenencia.

Puesto de otra forma, M se puede ver como un conjunto fijo, $S \subset M$ y $E \subset M \times M$.

Entonces a una fórmula σ le asignaremos su relativización σ^M de la siguiente forma.

$$(x_1 = x_2)^M \equiv x_1 = x_2$$

$$(x_1 \in x_2)^M \equiv (x_1, x_2) \in E$$

$$(e(x))^M \equiv x \in S$$

$$(\neg\sigma)^M \equiv \neg\sigma^M$$

$$(\sigma \wedge \phi)^M \equiv \sigma^M \wedge \phi^M$$

$$(\forall x \sigma(x))^M \equiv \forall x \in M \sigma^M(x)$$

Como ejemplo, si tenemos la fórmula $\forall x(x \in B \to x \in A)$ su relativización a M es $\forall x(x \in M \wedge x \in B \to x \in A)$.

A la terna (M,S,E) que cumple $S \subset M$ y $E \subset MXM$ le llamaremos interpretación. A una interpretación para ZFC (es decir, uno que no tenga la variable S) le llamaremos interpretación estándar.

Si $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ es un conjunto de fórmulas y $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son las variables libres que aparecen en ellas, abreviaremos con $M \models \Gamma$ la fórmula:

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \in M(\alpha_1^M \wedge \alpha_2^M ... \wedge \alpha_m^M)$$

Esto se suele leer como M modela Γ.

4.2. Teorema de Reflexión

En ZFC tenemos la siguiente sucesión definida por recursión sobre los ordinales:

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

$$V_\lambda = \bigcup_{\sigma<\lambda} V_\sigma$$

Donde λ es un ordinal límite.

A cada V_α lo podemos ver como una interpretación estándar tomando $V_\alpha = M$ y $E = \in$. De esta forma podemos enunciar ya el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. *Teorema de Reflexión*
Si $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ *es una colección finita de fórmulas cuyas variables son* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$*, en ZFC se demuestra que existe un ordinal límite* λ *tal que para cada* $i \in \{1, 2, ..., m\}$*:*

$$\forall x_1 ... \forall x_n \in V_\lambda (\alpha_i^{V_\lambda} \leftrightarrow \alpha_i)$$

Para la prueba tomamos una sucesión de expresiones $\theta_1, ..., \theta_r$ de la siguiente forma:

1) Todas las fórmulas de Γ están entre $\theta_1, ..., \theta_r$.

2) Todas las subfórmulas de cada θ_i están en la sucesión.

Con esta colección de fórmulas procedemos a realizar la demostración usando inducción sobre la formación de las fórmulas θ_i.

Para encontrar el ordinal límite λ que estamos buscando crearemos recursivamente una sucesión numerable de ordinales $\beta_0 < \beta_1 < ... \beta_k < ...$ de forma que su supremo sea λ .

Primero elegimos cualquier ordinal como β_0 y asumiendo que β_k ya está definido, definiremos su sucesor β_{k+1} de la siguiente manera:

A cada θ_i le asignaremos un ordinal γ_i de forma que β_{k+1} será el máximo entre $\beta_k + 1$ y todos los γ_i.

Tomamos pues un θ_i. Vamos a tomar $\gamma_i = 0$ en todo caso excepto si es de la forma $\theta_i \equiv \forall x \alpha(x, x_1, ..., x_n)$. En ese caso para cada $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in V_{\beta_k}^n$ asignaremos el mínimo ordinal $\delta_{\overline{y}}$ tal que hay un $z \in V_{\delta_{\overline{y}}}$ que cumpla que $\neg\alpha(z, \overline{y})$. Si no hay tal z entonces $\delta_{\overline{y}} = 0$. Definimos γ_i como el mínimo ordinal tal que V_{γ_i} contiene todos las $\delta_{\overline{y}}$.

Así podemos elegir a β_{k+1} como el máximo entre $\beta_k + 1$ y todos los γ_i y considerar a λ como el supremo de la sucesión de los β que construimos.

Con esto podemos ya empezar nuestra inducción. Demostraremos para las fórmulas que:

$$\forall x_1, ..., x_n \in V_\lambda(\theta_i(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \theta_i^{V_\lambda}(x_1, ..., x_n))$$

Si θ_i es una fórmula atómica:

a)Si $\theta_i \equiv x_1 = x_2$ tenemos:

$$\forall x_1, ..., x_n \in V_\lambda(x_1 = x_2 \leftrightarrow x_1 = x_2)$$

Por lo que el resultado es obvio. Lo mismo tenemos cuando $\theta_i \equiv x_1 \in x_2$.

Si α es una fórmula que cumple el teorema con $(x_1, ..., x_n)$ como variables libres tenemos:

b)Si $\theta \equiv \neg\alpha(x_1, ..., x_n)$ entonces por hipótesis de inducción tenemos:

$$\forall x_1, ..., x_n \in V_\lambda(\alpha(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \alpha^{V_\lambda}(x_1, ..., x_n))$$

Lo cual se sigue cumpliendo si negamos ambos lados.

$$\forall x_1, ..., x_n \in V_\lambda(\neg\alpha(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \neg\alpha^{V_\lambda}(x_1, ..., x_n))$$

c) De forma análoga se cumple para $\theta \equiv \alpha \wedge \beta$.

d) si $\theta \equiv \forall x\alpha(x, x_1, ..., x_n)$ por hipótesis de inducción tenemos:

$$\forall x\forall x_1, ..., x_n \in V_\lambda(\alpha(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \alpha^{V_\lambda}(x, x_1, ..., x_n))$$

Entonces probaremos:

$$\forall x_1, ..., x_n \in V_\lambda(\forall x\alpha(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \forall x \in V_\lambda\alpha^{V_\lambda}(x, x_1, ..., x_n))$$

Fijamos $(y_1, ..., y_n) \in V_\lambda$ para la demostración y suponemos primero $\forall x \alpha(x, y_1, ..., y_n)$.

Si tomamos una $x \in V_\lambda$, tenemos que $\alpha(x, y_1, ..., y_n)$ por hipótesis y por lo tanto por hipótesis de inducción tenemos $\alpha^{V_\lambda}(x, y_1, ..., y_n)$, y por ende $\forall x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}(x, y_1, ..., y_n)$.

Para demostrar el bicondicional veremos que:

$\neg\forall x \alpha(x, y_1, ..., y_n) \to \neg\forall x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}(x, y_1, ..., y_n)$.

Como $\neg\forall x \alpha(x, y_1, ..., y_n)$ hay una z tal que $\neg\alpha(z, y_1, ..., y_n)$ y por como construimos nuestro V_λ existe una z' (sabemos que existe ya que al menos existe z para la $(y_1, ..., y_n)$ que fijamos) en V_λ que cumple $\neg\alpha(z', y_1, ..., y_n)$. Luego por hipótesis de inducción tenemos que $\neg\alpha^{V_\lambda}(z', y_1, ..., y_n)$ por lo cual tenemos $\neg\forall x \in V_\lambda \alpha^{V_\lambda}(x, y_1, ..., y_n)$.

■

Le llamaremos inmersión elemental a una función $j : M \longrightarrow M'$ inyectiva entre dos interpretaciones del mismo lenguaje que cumpla que para toda fórmula (en realidad para un conjunto lo suficientemente grande) $\alpha(x_1, .., x_n)$:

$$\forall x_1, .., x_n \in M(\alpha^M(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \alpha^{M'}(j(x_1), ..., j(x_n))).$$

4.3. Construcción de la interpretación no-estándar

El siguiente paso será construir nuestra interpretación no-estándar que cumpla nuestros requerimientos. Nuestra construcción seguirá los siguientes pasos: Filtro, ultrafiltro, ultrapotencia, ultrapotencia adecuada, límite inductivo y ultralímite.

Un filtro U sobre el conjunto I es un subconjunto de la potencia de I tal que cumple las siguientes propiedades:

a) $\emptyset \notin U$
b) Si $X, Y \in U \rightarrow X \bigcap Y \in U$
c) Si $X, Y \in \wp(I) \rightarrow ((X \in U \wedge X \subset Y) \rightarrow Y \in U)$

Un filtro es ultrafiltro si además cumple que para todo conjunto $X \in \wp(I)$ entonces $X \in U$ ó $I \setminus X \in U$.

Ahora consideraremos el conjunto V^I de las funciones que van de I a V y U un ultrafiltro sobre I.

Definimos la relación $g =_U h \leftrightarrow \{i \in I | g(i) = h(i)\} \in U$. Es obvio que esta relación es de equivalencia sobre V^I.

Llamaremos ultrapotencia de V respecto a U al conjunto cociente ${}^*V = V^I/U$ de U respecto de $=_U$. Si $f \in V^I$ entonces su clase estará denotada por $[f] \in {}^*V$.

Definiremos la inmersión natural $j \colon V \longrightarrow {}^*V$ definida por $j(x) = [C_x]$ donde $C_x \colon I \longrightarrow V$ y $C_x(i) = x$.

Si tenemos que (V, E) es una interpretación estándar podemos definir la interpretación $({}^*V, {}^*E, S)$ de forma natural. Aquí $S = j[V]$ y ${}^*E$ queda definido de la siguiente manera:

$[g]^*E[h] \leftrightarrow \{i \in I | g(i) E h(i)\} \in U.$

Teorema 4.3.1. *Sea θ una fórmula con $x_1, ..., x_n$ como únicas variables libres. Si (V, E) es una interpretación estándar y ${}^*V$ la ultrapotencia respecto al ultrafiltro U, se demuestra en ZFC:*

$$\forall f_1, ..., f_n \in V^I (\theta^{{}^*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I | \theta^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U.)$$

Para la demostración vamos a proceder por inducción sobre la formación de fórmulas.

Sí θ es una fórmula atómica:

a) Si $\theta \equiv x_1 \in x_2$ se obtiene de manera directa de la definición de ${}^*E$.

$\theta_k^{*V}([f_1],[f_2]) \leftrightarrow [f_1]^*E[f_2] \leftrightarrow \{i \in I | f_1(i)Ef_2(i)\} \in U \leftrightarrow$
$\{i \in I | (f_1Ef_2)^V\} \in U \leftrightarrow$
$\{i \in I | \theta_k^V(f_1(i), f_2(i))\} \in U$

b) Sí $\theta \equiv x_1 = x_2$ se obtiene de forma manera directa de la definición de $=_U$.

Sean α y β son fórmulas cuyas únicas variables libres son $(x_1, ..., x_n)$ entonces:

c) $\theta \equiv \neg\alpha$

Por hipótesis de inducción tenemos que:

$\alpha^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

De donde podemos negar ambos lados:

$\neg\alpha^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \notin U$

Pero como U es un ultrafiltro tenemos que :

$\{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \notin U \leftrightarrow$
$V^I \setminus \{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U \leftrightarrow$
$\{i \in I | \neg\alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

Es decir:

$\neg\alpha^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I | \neg\alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

d) $\theta \equiv \alpha \wedge \beta$

Por nuestra hipótesis de inducción tenemos que:

$\alpha^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

$\beta^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I | \beta^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

De donde tenemos que:

$\alpha^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \wedge \beta^{*V}([f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow$
$\{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U \wedge \{i \in I | \beta^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

Y como U es un filtro esto equivale a :

$\{i \in I | \alpha^V(f_1(i), ..., f_n(i) \wedge \beta^V(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U \leftrightarrow$
$\{i \in I | \alpha^V \wedge \beta^V(f_1(i), ..., f_n(i)\} \in U \leftrightarrow$

e) $\theta \equiv \forall x \alpha$

Por construcción de nuestra sucesión de θ tenemos que α aparece antes así que por hipótesis de inducción tenemos:

$\forall f \in V^I \alpha^{*V}([f], [f_1], ..., [f_n]) \leftrightarrow$
$\forall f \in V^I \{i \in I | \alpha^V(f(i), f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

Si llamamos 1) al lado derecho de la bicondicional, demostraremos entonces que equivale a la proposición:

2) $\{i \in I | \forall x \in V \alpha^V(x, f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$

Suponiendo 2), entonces sea $f \in V^I$, y llamemos $A = \{i \in I | \alpha^V(f(i), f_1(i), ..., f_n(i))\}$ y $B = \{i \in I | \forall x \in V \alpha^V(x, f_1(i), ..., f_n(i))\}$.

Tomemos $i \in B$, es obvio que $i \in A$ también ya que $f(i) \in V$ por lo que cumple $\forall x \in V \alpha^V(x, f_1(i), ..., f_n(i))\}$ tomando $x = f(i)$, por lo tanto $B \subset A$ y como $B \in U$ y U es un ultrafiltro entonces $A \in U$.

Suponiendo 1), tomemos B como antes y f tal que si $i \in B$ entonces f toma cualquier valor, pero si $i \notin B$ entonces existe un $x' \in V$ tal que $\neg\alpha^V(x', f_1(i), ..., f_n(i))$, en ese caso $f = x'$.

Tomamos como A de nuevo como al conjunto que genera esta f. Por nuestra construcción $A \subset B$ y como U es filtro tenemos que $B \in U$.

■

De aquí tenemos que si θ es una fórmula sin variables libres:

$V \models \theta \leftrightarrow^* V \models \theta$

Teorema 4.3.2. *Sea V una interpretación estándar y $^*V$ una ultrapotencia de V, entonces $^*V$ cumple el principio de transferencia.*

Tenemos que el principio de transferencia dice lo siguiente:

$\forall^e x_1 ... \forall^e x_n (\forall^e x\alpha \rightarrow \forall x\alpha)$

Lo que relativizado a $^*V$ nos da:

$\forall x_1, ..., x_n \in S(\forall x \in S\theta^{*V}(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \forall x\theta^{*V}(x, x_1, ..., x_n))$

De donde como $S = j[V]$ tenemos:

$\forall x_1, ..., x_n \in V(\forall x \in V\theta^{*V}(j(x), j(x_1), ..., j(x_n)) \leftrightarrow \forall x\theta^{*V}(x, x_1, ..., x_n))$

Como tenemos que $j : V \longrightarrow {}^*V$ es una inmersión elemental:

$\forall x \in V\theta^{*V}(j(x), j(x_1), ..., j(x_n)) \leftrightarrow \forall x \in V\theta^V(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow (\forall x\theta)^V(x, x_1, ..., x_n)$

Y utilizando de nuevo que es una inmersión elemental tenemos:

$(\forall x\theta)^V(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow (\forall x\theta)^{*V}(x, j(x_1), ..., j(x_n)) \leftrightarrow \forall x \in {}^*V\theta^{*V}(x, j(x_1), ..., j(x_n))$

■

Ahora refinaremos más nuestra construcción y definiremos una ultrapotencia adecuada.

Primero definiremos para todo $X \subset V$ a $^*X \subset {}^*V$ como:

$[f] \in {}^*X \leftrightarrow \{i \in I | f(i) \in X\} \in U$

Sea ν el conjunto de todos los ultrafiltros de V (se podrían considerar sus ultrapotencias también) de V. Definiremos $t : {}^*V \longrightarrow \nu$ como $t([f]) : \{X \in P(V) | [f] \in {}^*X\}$. Diremos que ${}^*V$ es una ultrapotencia adecuada si la aplicación t es suprayectiva.

Teorema 4.3.3. *Todo conjunto tiene una ultrapotencia adecuada.*

Sea A un conjunto y tomemos a I como el conjunto de los subconjuntos finitos de la potencia de A. Luego, para cada $X \subset A$ definimos $X' = \{i \in I | X \in i\}$. Ahora veamos que cumplen que la intersección finita es no vacía. Si $X_1, X_2 \subset A$ entonces $X'_1 \bigcap X'_2 \neq \emptyset$ ya que al menos contiene a $\{X_1, X_2\}$. Por lo tanto la familia de los X' está contenido en un ultrafiltro U y veremos que su ultrapotencia es adecuada.

Sea F un ultrafiltro de A. Entonces queremos buscar $f : I \longrightarrow V$ tal que $t([f]) = F$. Para esto tomamos para cada $i \in I$ el conjunto A_i que es la intersección de todos los conjuntos de i que pertenecen a F. De no haber elementos que esten en F, tomaremos por default $A_i = V$. Entonces tomamos f de forma que $f(i) \in A_i$.

Ahora veremos que $t([f]) = F$. Para esto probaremos que $F \subset t([f])$. Sea $X \in F$, entonces queremos ver que $[f] \in {}^*X$ i.e. $\{i \in I | f(i) \in X\} \in U$ y para esto tomamos $X' \in U$ y $Y = \{i \in I | f(i) \in X\}$. Veremos que $X' \subset Y$ para demostrar que Y está en U por propiedades de filtro.

Sea $i \in X'$ entonces $X \in i$ y por lo tanto $A_i \in X$. Entonces como definimos que $f(i) \in A_i$ tenemos que $f(i) \in X$ de donde $X' \subset Y$, por lo tanto $[f] \in {}^*X$ y luego $F \subset t([f])$. Como F y $t([f])$son ultrafiltros tenemos la igualdad.

■

Teorema 4.3.4. *Sea $\theta(x, y, x_1, ..., x_m)$ una fórmula cuyas únicas variables libres son las indicadas. Si V es una interpretación estándar que cumple una cierta cantidad de axiomas Δ y ${}^*V$ es una ultrapotencia adecuada:*

$\forall^e x_1, ..., \forall^e x_m \forall^e z(z finito \to \exists x \forall y(y \in z \to \theta(x,y)) \to (\exists x \forall^e y \theta(x,y))$

Primero relativizamos a ${}^*V$

$\forall x_1 ... \forall x_m \in S \forall z \in S(z finito^{*V} \to \exists x \forall y(y \in z \to$
$\theta^{*V}(x,y)) \to (\exists x \forall y \in S \theta^{*V}(x,y))$

Fijamos $j(x_1), .., j(x_m) \in S$ donde $x_1, ..., x_m \in V$ y sea Δ la colección de axiomas necesarios para demostrar la existencia de $\{x\}$, que la unión de dos conjuntos es un conjunto, unión de finitos es finita y que $\{x\}$ siempre es un conjunto finito. Con esto podemos afirmar que si tomamos $y_1, ..., y_n \in V$ existe un $z \in V \wedge z finito^V$ de forma que $y_i E z$ para toda $i \in [1, n]$.

Usando que j es una inmersión elemental tenemos que $j(z) finito^{*V}$ y que $j(y_i)^* E j(z)$. Esto junto al teorema nos da:

$\exists x \in {}^*V \forall y \in^* V(y^* E z \to \theta^{*V}(x, y, j(x_1), .., j(x_m)))$

Donde usando otra vez que j es elemental tenemos que existe $x \in V$ tal que $\theta^V(x,y)$ para cada y_i.

Ahora consideremos la familia de conjuntos:

$$A_y = \{x \in V | \theta^V(x, y, x_1, ..., x_m)\}$$

Por lo que acabamos de decir esta familia cumple la propiedad de la intersección finita, ya que si tenemos A_{y_1} y A_{y_2} hay una z tal que contiene ambas y por nuestra hipótesis una x relacionada con ellas, de donde $A_{y_1} \bigcap A_{y_2} \neq \emptyset$. Por lo tanto la familia $\{A_y\}$ esta contenida dentro de un ultrafiltro F.

Como ${}^*V$ es una ultrapotencia adecuada existe $\varphi \in {}^*V$ tal que $t(\varphi) = F$, la cual cumplirá la implicación que buscamos.

Para esto tomemos $y \in S$ entonces hay un y' tal que $j(y') = y$ y $\{x \in V | \theta^V(x, y, x_1, ..., x_m)\} \in F$ de donde por definición de $t(\varphi)$ tenemos que entonces $\varphi \in {}^*\{x \in V | \theta^V(x, y', x_1, ..., x_m)\}$ que significa $\{i \in I | \theta(\varphi(i), y', , x_1, ..., x_m)\}$ por lo que por el teorema 4.3.1 tenemos que $\theta^{*V}(\varphi, y, j(x_1), .., j(x_m))$ como buscábamos, ya que esto nos da:

$$\exists x \in {}^*V \forall y \in S(\theta^{{}^*V}(x, y, j(x_1), .., j(x_m)))$$

$\blacksquare$

Con esto demostramos una implicación del axioma de idealización pero restringiendo los x_i a los estándar. Para demostrar la versión completa del teorema continuamos refinando nuestra interpretación a través de límites inductivos.

Un sistema inductivo consiste de una familia de conjuntos no vacíos $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ donde λ es un ordinal límite, y una familia de aplicaciones inyectivas $j_{\alpha\alpha'} : M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha'}$ que cumplen para $\alpha < \alpha' < \alpha'' < \lambda$ entonces $j_{\alpha\alpha'} \circ j_{\alpha'\alpha''} = j_{\alpha\alpha''}$.

Una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha_0<\alpha<\lambda}$ donde α_0 varía, se llamará inductiva si cumple que $x_\alpha \in M_\alpha$ para toda α y para $\alpha_0 < \alpha < \alpha' < \lambda$ satisfaga $x_{\alpha'} = j_{\alpha\alpha'}(x_\alpha)$.

Por último definiremos el límite inductivo de un sistema inductivo como el conjunto cociente de todas las sucesiones inductivas a través de la relación de equivalencia donde dos sucesiones están relacionadas si su intersección es no vacía.

Sea M el límite inductivo y definamos las aplicaciones

$$j_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$$

como $j_\alpha(x) = [\{j_{\alpha\alpha'}(x)\}_{\alpha<\alpha'<\lambda}]$.

Ahora, si tomamos los M_α como interpretaciones estándar tal que para $\alpha < \alpha' < \lambda$ entonces $\forall x \forall y \in M_\alpha(xE_\alpha y \leftrightarrow j_{\alpha\alpha'}(x)E_{\alpha'}j_{\alpha\alpha'}(y)$ y $j_{\alpha\alpha'}(d_\alpha) = d_{\alpha'}$ entonces podemos ver también a M como interpretación estándar tomando la relación E como:

$$xEy \leftrightarrow \exists \alpha(\alpha < \lambda \wedge \exists x' \exists y' \in M_\alpha(j_\alpha(x') = x \wedge j_\alpha(y') = y \wedge xE_\alpha y))$$

Teorema 4.3.5. *Si M es un límite inductivo y las aplicaciones $j_{\alpha\alpha'}$ son inmersiones elementales entonces las aplicaciones j_α también lo son.*

En particular lo que queremos demostrar es que:

$\forall x_1 ... \forall x_n \in M_\alpha(\phi^{M_\alpha}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \phi^M(j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n)))$

Procedemos por inducción sobre la construcción de fórmulas.

a) $\theta \equiv x_1 \in x_2$

De aquí lo que queremos demostrar es:

$(x_1 \in x_2)^{M_\alpha} \leftrightarrow (j_\alpha(x_1) \in j_\alpha(x_2))^M$

Lo cual equivale a:

$x_1 E_\alpha x_2 \leftrightarrow j_\alpha(x_1) E j_\alpha(x_2)$

Lo cual se da trivialmente por la definición de E en M.

b) $\theta \equiv x_1 = x_2$

Se da de forma trivial.

c) $\theta \equiv \neg\phi$

Por hipótesis tenemos que:

$\phi^{M_\alpha}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \phi^M(j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n))$

De aquí tenemos directamente el resultado con negar ambos lados:

$\neg\phi^{M_\alpha}(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \neg\phi^M(j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n))$

d) $\theta \equiv \phi \wedge \varphi$

Se sigue inmediatamente de la hipótesis como en el inciso anterior.

e) $\theta \equiv \forall x \phi$

Por hipótesis de inducción tenemos:

$\forall x \forall x_1 ... \forall x_n \in M_\alpha (\phi^{M_\alpha}(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \phi^M(j_\alpha(x), j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n)))$

y por demostrar:

$\forall x_1 ... \forall x_n \in M_\alpha (\forall x \in M_\alpha \phi^{M_\alpha}(x, x_1, ..., x_n) \leftrightarrow$
$\forall x \in M \phi^M(x, j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n)))$

Para esto necesitaremos un par de observaciones: La primera es que para todo $x \in M$ existe un α tal que $\exists x' \in M_\alpha(j_\alpha(x') = x)$.

La segunda es que $j_{\alpha\alpha'} \circ j_{\alpha'} = j_\alpha$. Para demostrarlo veamos:

$j_{\alpha'}(j_{\alpha\alpha'}(x)) = j_{\alpha'}(x_{\alpha'}) = [\{j_{\alpha'\beta}(x_{\alpha'})\}_{\alpha'<\beta<\lambda}]$

$j_\alpha(x) = [\{j_{\alpha\beta}(x)\}_{\alpha<\beta<\lambda}]$

Queremos ver que ambas clases son iguales, así que buscaremos un elemento que tengan en común ambas sucesiones.

Sea β' tal que $\alpha' < \beta' < \lambda$. Tenemos que $j_{\alpha'\beta'}(x_{\alpha'}) = j_{\alpha'\beta'}(j_{\alpha\alpha'}(x))$ de donde por la propiedad de las aplicaciones j tenemos que $j_{\alpha'\beta'}(x_{\alpha'}) = j_{\alpha\beta'}(x)$, por lo que tenemos que la intersección es no vacía.

Con esto podemos pasar a la demostración. Sea $x_1, ..., x_n \in M_\alpha$, y veamos la primera implicación:

$\forall x \in M \phi^M(x, j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n)) \rightarrow \forall x \in M_\alpha \phi^{M_\alpha}(x, x_1, ..., x_n)$

Sea $x \in M_\alpha$ entonces como supusimos $\phi^M(j_\alpha(x), j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n))$ por hipótesis de inducción tenemos que $\phi^{M_\alpha}(x, x_1, ..., x_n)$.

Para la ida:

$$\forall x \in M_\alpha \phi^{M_\alpha}(x, x_1, ..., x_n) \to \forall x \in M \phi^M(x, j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n))$$

Sea $x \in M$, existe entonces un β tal que $\alpha < \beta < \lambda \wedge x' \in M_\beta \wedge j_\beta(x') = x$. Como la aplicación $j_{\alpha\beta}$ es elemental tenemos que:

$$\forall x \in M_\beta \phi^{M_\beta}(x', j_{\alpha\beta}(x_1), ..., j_{\alpha\beta}(x_n))$$

Luego aplicando la hipótesis de inducción sobre $\phi^{M_\beta}(x', j_{\alpha\beta}(x_1), ..., j_{\alpha\beta}(x_n))$ tenemos que:

$$\phi^M((j_\beta(x'), j_\beta(j_{\alpha\beta}(x_1)), ..., j_\beta(j_{\alpha\beta}(x_n)))$$

Que nos da el resultado que buscábamos:

$$\phi^M(x, j_\alpha(x_1), ..., j_\alpha(x_n))$$

■

Con este teorema tenemos lo necesario para construir una interpretación no-estándar lo suficientemente resistente como para satisfacer nuestros requerimientos. El siguiente teorema es inmediato y resume la construcción de la interpretación que buscamos:

Teorema 4.3.6. *Sea V una interpretación estándar y λ nuestro ordinal límite de forma que existe una familia de interpretaciones estándar $\{^\alpha V\}_{\alpha<\lambda}$ donde $^0V = V$ y una familia de inmersiones elementales $j_{\alpha\alpha'} : {^\alpha V} \longrightarrow {^{\alpha'} V}$ tal que para todo $\alpha < \lambda$ tenemos que $^{\alpha+1}V$ es una ultrapotencia adecuada de $^\alpha V$ respecto de un ultrafiltro U_α y $j_{\alpha\alpha+1}$ es la inmersión canónica que nos da la ultrapotencia.*

Llamaremos a $^\lambda V = {^*V}$ el ultralímite adecuado de la interpretación V. Si consideramos la aplicación $j_0 = j$ podemos definir a $^*V$ como una interpretación no estándar tomando $S = j[V]$

Para nuestra interpretación estándar V tomaremos un λ de forma que

$V_\lambda = V$ satisfaga el principio de transferencia.

Teorema 4.3.7. *Si λ es un ordinal límite, tal que para un conjunto finito de axiomas Δ tal que $V_\lambda \vDash \Delta$ y:*

$$\forall z \in V_\lambda (z finito^{V_\lambda} \leftrightarrow z finito)$$

Entonces el ultralímite adecuado ${}^*V$ cumple los axiomas de transferencia, idealización y estandarización.

a) Transferencia

Como $j = j_0$ sigue siendo siendo una inmersión elemental el teorema 3.2 sigue siendo valido.

b) Idealización

${}^*V \vDash \forall x_1 .... \forall x_n \forall^e z(z finito \to \exists x \forall y(y \in z \to \theta(x, y, x_1, ..., x_n))) \leftrightarrow$
$\exists x \forall^e y(\theta(x, y, x_1, ..., x_n))$

Relativizando tenemos:

$\forall x_1 .... \forall x_n \in {}^*V(\forall z \in S(z finito^{*V} \to \exists x \forall y \in {}^*V(y \in z \to \theta^{*V}(x, y, x_1, ..., x_n))) \leftrightarrow$
$\exists x \in^* V \forall y \in S(\theta^{*V}(x, y, x_1, ..., x_n)))$

Empecemos por la ida:

Tomemos $x_1, ..., x_n \in {}^*V$ entonces existe un m tal que $x'_1, ..., x'_n \in {}^mV$ y $j_m(x'_i) = x_i$.

Por hipótesis tenemos entonces que:

$(\forall z \in S(z finito^{*V} \to \exists x \forall y \in {}^*V(y \in z \to \theta^{*V}(x, y, j_m(x_1), ..., j_m(x_n))))$

Ahora nos fijaremos en ${}^{m+1}V$, pensando en utilizar nuestro resultado del teorema 4.3.4. Como tanto $j_{m+1} : {}^{m+1}V \longrightarrow {}^{*}V$ y $j_{mm+1} : {}^{m}V \longrightarrow {}^{m+1}V$ son inmersiones elementales tenemos que:

$$\forall z \in {}^{m+1}S(zfinito^{{}^{m+1}V} \to$$
$$\exists x \forall y \in^{m+1} V(y \in z \to \theta^{{}^{m+1}V}(x, y, j_{mm+1}(x'_1), ..., j_{mm+1}(x'_n))))$$

Fijando $z \in^{m+1} S \wedge zfinito^{{}^{m+1}V}$ tenemos que a su vez $j_{m+1}(z) \in S$ y que $j_{m+1}(z)finito^{{}^{*}V}$ de donde tenemos que:

$$\exists x \forall y \in {}^{*}V(y \in j_{m+1}(z \to \theta^{{}^{*}V}(x, y, j_m(x_1), ..., j_m(x_n)))$$

Ahora como por construcción ${}^{m+1}V$ es la ultrapotencia adecuada de ${}^{m}V$ podemos aplicar el teorema 4.3.4 de donde tenemos que:

$$\exists x \in^{m+1} V \forall y \in^{m+1} S(\theta^{{}^{m+1}V}(x, y, j_{mm+1}(x'_1), ..., j_{mm+1}(x'_n))$$

Ahora fijamos la x que nos da el inciso anterior como x_0 y vemos que $j_{m+1}(x_0)$ satisface nuestras necesidades, i.e. cumple que:

$$\forall y \in S(\theta^{{}^{*}V}(j_{m+1}(x_0), y, x_1, ..., x_n))$$

Ya que toda $y \in S$ viene de algún $y_0 \in^{m+1} S$ y como tenemos que:

$$\theta^{{}^{m+1}V}(x_0, y_0, j_{mm+1}(x'_1), ..., j_{mm+1}(x'_n))$$

Aplicando que j_{m+1} es elemental tenemos que:

$$(\theta^{{}^{*}V}(j_{m+1}(x_0), j_{m+1}(y_0), x_1, ..., x_n))$$

Lo cual nos garantiza lo que queríamos:

$$\exists x \in {}^{*}V \forall y \in S(\theta^{{}^{*}V}(x, y, x_1, ..., x_n)))$$

Para el regreso:

$$(\forall z \in S(zfinito^{{}^{*}V} \to \exists x \forall y \in {}^{*}V(y \in z \leftarrow \theta^{{}^{*}V}(x, y, j_m(x_1), ..., j_m(x_n))))$$

Para demostrar esto basta con demostrar que:

$\forall z \in S(z finito^{*V} \to \forall y \in {}^*V(y^*Ez \to y \in S))$

Ya que entonces como las y son estándar, nuestra hipótesis de la implicación garantiza que hay una x con la que están relacionadas.

Tomemos $z \in S$, al estar en S sabemos que existe entonces un $z' \in V_\lambda$ tal que $j(z') = z$ y como j es elemental tenemos que $z finito^{*V} \leftrightarrow z' finito^{V_\lambda}$ y por hipótesis $z' finito^{V_\lambda} \leftrightarrow z' finito$ de donde tenemos que $z' = \{y_1, ..., y_n\}$ donde cada $y_i \in V_\lambda$ y por lo tanto $j(y_i) \in S$.

Ahora veamos por inducción sobre n que si y^*Ez entonces $y = j(y_i)$ para alguna $i \in [1, n]$.

Si $z = \{y_1\}$ entonces podemos afirmar que $\forall y(y \in z \to y = y_1)$ y como j es elemental tenemos $\forall y \in {}^*V(y^*Ez \to y = j(y_1))$ como necesitábamos.

Si suponemos para $n-1$ consideremos a $z = \{y_1, ..., y_n\}$ y a $z_0 = \{y_1, ..., y_{n-1}\}$.

Aquí podemos afirmar que $\forall y(y \in z \to (y \in z_0 \lor y = y_n))$ y aplicando que j es elemental obtenemos $\forall y \in {}^*V(y^*Ez \to (y^*Ej(z_0) \lor y = j(y_n))$ de donde aplicamos nuestra hipótesis de inducción a $y^*Ej(z_0)$ para saber que $y = j(y_i)$ para alguna $i \in [1, n-1]$ o que $y = (y_n)$ como buscábamos.

$\blacksquare$

c) Estandarización

${}^*V \models \forall x_1, ...\forall x_n \forall^e x \exists^e y \forall^e z(z \in y \leftrightarrow \theta(x, y, z, x_1, ..., x_n))$

Relativizando:

$\forall x_1, ...\forall x_n \in {}^*V \forall x \exists y \forall z(z^*Ey \in S \leftrightarrow z^*Ex \land \theta^{*V}(x, y, z, x_1, ..., x_n))$

Fijamos $x_1, ..., x_n \in {}^*V$ y $x \in V_\lambda$ y buscaremos un $y \in V_\lambda$ que cumpla lo que buscamos.

Definamos $y_0 = \{zEx|\theta^{*V}(j(x), j(y_0), j(z), x_1, ..., x_n))\}$ y veamos que cumple.

Entonces como $j(z) \in S$:

$j(z)^*Ej(y_0) \leftrightarrow zEy \leftrightarrow zEx \wedge \theta^{*V}(j(x), j(y_0), j(z), x_1, ..., x_n)) \leftrightarrow j(z)^*Ej(x) \wedge \theta^{*V}(j(x), j(y_0), j(z), x_1, ..., x_n))$

Como buscábamos.

■

Ahora pasamos a nuestro resultado final:

Teorema 4.3.8. *Sea Γ una colección finita de axiomas de ZFC y θ una fórmula interna sin variables libres. Existe entonces una interpretación M tal que $M \vDash \Gamma$ y $\theta \leftrightarrow M \vDash \theta$*

Tomamos una colección de axiomas Δ de ZFC tal que contenga a Γ y satisfaga el teorema 4.3.7. Entonces existe un λ por el teorema de transferencia tal que V_λ satisface el teorema 4.3.7 y $\theta \leftrightarrow \theta^{V_\lambda}$. De aquí tomamos ${}^*V = M$ el ultralímite adecuado de V_λ el cual satisface $\theta^{V_\lambda} \leftrightarrow M \vDash \theta$ así como $M \vDash \Delta$ y los axiomas de transferencia, idealización y estandarización.

■

Bibliografía

[1] Nelson, E., Internal Set Theory: A New Approach to Non-Standard Analysis 1977 Bulletin of the North American Mathematical Society Volume 83 Number 6 1165-1198

[2] Kanovei & Reeken, Non Standard Analysis, Axiomatically, 2004, Springer

[3] Ivorra, C., Análisis No Estándar

[4] Väth, M., Non Standard Analysis, 2007, Birkhauser.

[5] Gordon, Y., An Axiomatics for Non Standard Set Theory.

[6] Robert, A., Nonstandard Analysis, 1985, John Wiley & Sons.