



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE QUÍMICA

Estudio de la Permeabilidad en Rocas a Altas Presiones

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA

JOSÉ FERNANDO MORONES HERNÁNDEZ

MÉXICO, CdMx.

2017





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Eduardo Vivaldo Lima

Vocal: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

Secretario: Dr. José Roberto Zenit Camacho

1er Suplente: Dr. Bernardo Carreón Calderón

2do Suplente: Dr. Simón López Ramírez

Sitio donde se desarrolló el tema: Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM, UNAM).

ASESOR: DR. JOSÉ ROBERTO ZENIT CAMACHO

SUSTENTANTE: JOSÉ FERNANDO MORONES HERNÁNDEZ

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo para la predicción del cambio en la permeabilidad, debido a la deformación elástica del tamaño de poro a altas presiones. Los resultados del modelo son comparados con datos experimentales para dos rocas de yacimiento petrolero, tomando en cuenta una multiplicidad de factores litológicos y estadísticos. El análisis de esta comparación permite determinar que el modelo propuesto es capaz de predecir el comportamiento experimental de manera teórica.

Índice general

Nomenclatura	1
1. Introducción	4
2. Deformación elástica de un cilindro hueco bajo presión externa	8
2.1. Deformación elástica de un cilindro hueco bajo presión externa en deformación plana	8
2.2. Deformación elástica de un cilindro hueco bajo presión externa en esfuerzo plano	11
2.3. Solución para el desplazamiento radial del caso homogéneo en esfuerzo plano	13
2.4. Solución para el desplazamiento radial del caso heterogéneo en esfuerzo plano	15
3. Comparación entre la ley de Darcy y el flujo de Poiseuille	19
3.1. Permeabilidad de Poiseuille para una roca con un sólo tubo capilar	20
3.2. Permeabilidad de Poiseuille para una roca con una matriz de tubos capilares	21
3.3. Variación en permeabilidad de una roca, como resultado de cargas externas de presión	21
3.3.1. Modelo homogéneo de deformación plana	23
3.3.2. Modelo homogéneo de esfuerzo plano	23
3.3.3. Modelo heterogéneo de esfuerzo plano.	24
3.4. Modelo teórico de compresibilidad en rocas.	25

4. Descripción experimental	27
5. Resultados experimentales y análisis	36
5.1. Comparación teórica y experimental	44
6. Conclusiones	48
A. Formulación de la teoría de elasticidad en coordenadas polares	51
B. Solución general de Michell para sólidos elásticos en coordenadas cilíndricas	57
B.1. Solución radialmente simétrica	61
C. Flujo en un tubo	64

Nomenclatura

α , β y γ Agrupaciones de términos constantes, desarrollados durante la obtención del desplazamiento radial en un cilindro hueco.

ΔP Caída de presión hidrostática.

δ_{ij} Delta de Kronecker.

ϵ Error experimental.

\hat{v}_z Velocidad promedio del fluido.

λ Constante de Lamé.

μ Módulo de corte o rigidez.

μ_f Viscosidad dinámica del fluido.

∇ Gradiente.

$\nabla \cdot$ Operación de divergencia.

∇^2 Operador Laplaciano.

ν Razón de Poisson.

ϕ Función de esfuerzo de Airy.

ρ Densidad del fluido.

σ Tensor de esfuerzos.

τ_{ij} Torsión en dirección ij .

A	Área transversal de la roca.
a	Posición radial en la pared interna del cilindro hueco para la deducción de la deformación elástica.
A_t	Área transversal del tubo.
A_{t-1}	Valor real en el tiempo j usando la media móvil.
b	Posición radial en la pared externa del cilindro hueco para la deducción de la deformación elástica.
E	Módulo de Young.
E_0	Módulo de Young en la pared interna del cilindro hueco.
e_i	Relaciones de desplazamiento en dirección i .
E_r	Módulo de Young como función de la posición radial en que sea evaluado.
e_{ij}	Relaciones de desplazamiento en dirección ij .
F_i	Fuerzas de cuerpo en dirección i .
F_{t+1}	Valor pronosticado en el tiempo j usando la media móvil.
g	Aceleración gravitacional.
i, j	Índices para denotar direcciones de vectores y tensores (r, θ y z para coordenadas cilíndricas).
k	Permeabilidad.
k_0	Permeabilidad inicial.
L	Longitud del capilar.
L_t	Longitud del tubo
N	Número de periodos anteriores que se incluyen en la media móvil.
n	Término de heterogeneidad elástica del medio sólido.

n_j	Número de capilares en una roca de radio r_j .
P	Presión hidrodinámica.
p_i, p_o	Presión ejercida sobre la pared interna y externa del cilindro hueco, respectivamente.
q	Flujo volumétrico.
R	Posición radial en la pared del tubo para la deducción de la ecuación de Poiseuille del flujo en un tubo.
r, θ y z	Posiciones radial, angular y longitudinal, respectivamente.
T_i	Tracción en dirección i .
u_i	Desplazamiento del sólido en dirección i .
v_i	Velocidad del fluido en dirección i .
v_z	Velocidad finita máxima del flujo de un fluido dentro de un tubo.

Capítulo 1

Introducción

Las propiedades físicas de las rocas son consecuencia de su composición mineralógica. Generalmente las rocas pueden ser divididas en tres tipos, dependiendo de su proceso de formación: rocas ígneas, sedimentarias y metamórficas.

Las rocas ígneas están formadas por la solidificación y enfriado del magma volcánico. Las rocas sedimentarias se forman por la acumulación de sedimentos en fosas tectónicas o sumideros topográficos. Por otro lado, las rocas metamórficas resultan de la transformación de otros tipos de roca bajo la acción de presiones y temperaturas altas (Mibei, 2014). Así como las rocas ígneas están asociadas a fuentes geotérmicas y depósitos hidrotérmicos; las rocas sedimentarias están asociadas a la deposición de sedimentos orgánicos como carbón y aceite, en cuerpos de agua. La sedimentación es el nombre colectivo para procesos de deposición y acumulación de partículas orgánicas, o la precipitación de minerales. Los sedimentos pueden ser detríticos, orgánicos o químicos. Los detritos resultan de la erosión mecánica de rocas existentes. Los sedimentos químicos son precipitados o evaporaciones, depositados en distintos ambientes. Las rocas sedimentarias son comúnmente areniscas, calizas, esquistos, conglomerados y yeso (Carlson and Hammersley, 2008).

Los granos de arena y las partículas de materiales carbonatados que forman yacimientos petroleros de areniscas y calizas, nunca encajan per-

fectamente debido al alto grado de irregularidad en forma. Las rocas en estos yacimientos contienen una matriz porosa o intersticial, que es el espacio vacío creado por las zonas entre granos. La porosidad de una roca de yacimiento está definida como la fracción del volumen total del bulto (incluyendo los espacios vacíos), que no está ocupada por la estructura rocosa (espacios vacíos) (Riab and Donaldson, 2004).

Si los poros son considerados como una red de canales, se clasifican según su tamaño en diámetro como supercapilares, capilares y subcapilares (Hu and Huang, 2016). La porosidad y la permeabilidad de los yacimientos petroleros son las propiedades físicas principales, con respecto al almacenamiento y transporte de fluidos.

En el trabajo de Brown (1987) para rocas altamente fracturadas, situadas en la parte superior de la corteza, las fracturas tienen efectos importantes en las propiedades mecánicas y de transporte de la roca, tales como las constantes elásticas y la resistencia al corte. Esto es, si la roca contiene una gran cantidad de espacios vacíos de grandes tamaños, la roca tendrá una baja resistencia a la deformación y a quebrarse. Tomando en cuenta que las fracturas son espacios vacíos, al igual que los poros, entonces ambas irregularidades afectan las propiedades físicas de la roca.

Además de ser porosas, para la extracción de petróleo las rocas de yacimiento deben tener la capacidad de permitir el flujo de petróleo a través de los poros interconectados. La capacidad de la roca para conducir fluidos es llamada permeabilidad. La permeabilidad de una roca depende de su porosidad efectiva, y consecuentemente es afectada por el tamaño de grano, la forma del grano, la distribución de granos, el empaçado y el grado de cementación. El grado de cementación es la porción de la roca que está constituida por el material que, en la formación, rellenó espacios vacíos entre granos sedimentados y los empacó al endurecerse.

La diferencia entre la porosidad absoluta y porosidad efectiva es el aislamiento. La porosidad efectiva toma en cuenta factores litológicos, incluyendo el tipo de roca, contenido, hidratación de arcillas, la heterogeneidad en los tamaños del grano, la cementación de los granos, el desgaste y la lixiviación. Por otro lado, la porosidad absoluta es el cociente entre el espacio

vacío total en la muestra y el volumen total del bulto, sin importar que los espacios vacíos se encuentren interconectados. Esto significa que una roca puede no tener conductividad del fluido, debido a la falta de interconexiones entre los espacios vacíos. Aunque en ciertas ocasiones tener una alta porosidad no genere una alta permeabilidad, puede existir una relación útil entre ellas. Chilingarian (1963) mostró que la composición granulométrica de areniscas influye en la relación entre la permeabilidad y la porosidad.

El ingeniero francés Henry Darcy propuso en 1856 una ecuación para el flujo de un fluido a través de una roca, que se convirtió en una herramienta común para la predicción de la permeabilidad en la ingeniería petrolera (Riab and Donaldson, 2004). La permeabilidad de Darcy se presenta únicamente cuando la roca se encuentra completamente saturada con un sólo fluido. En presencia de dos o más fluidos es llamada permeabilidad efectiva.

El tipo de arcilla o material de cementación entre los granos también afecta la permeabilidad, especialmente en presencia de agua. Algunas arcillas absorben agua y tienden a bloquear completa o parcialmente los espacios vacíos. Esto conlleva a que el tipo de fluido que pase a través de los canales va a facilitar o disminuir su propio flujo, dependiendo de su afinidad al material y a las propiedades del mismo.

En este trabajo se analiza cuál es la influencia de la presión externa en la permeabilidad de una roca. Como una aproximación podemos suponer que la roca es un material elástico.

La teoría lineal de equilibrio para sólidos elásticos, homogéneos e isotrópicos, consiste en la determinación de desplazamientos y esfuerzos, atravesando el cuerpo. Para un cuerpo cilíndrico, si la superficie fronteriza es confinada a esfuerzos laterales, los problemas de esfuerzo y deformación planos tienen ecuaciones diferenciales bidimensionales, cuyas soluciones satisfacen el problema, pero únicamente bajo condiciones a la frontera excepcionales. Por lo general, estas soluciones bidimensionales proporcionan acercamientos al problema en tres dimensiones. (Youngdahl, 1966)

Por otro lado, el problema en esfuerzo plano puede ser resuelto también para cuerpos elásticos heterogéneos en resistencia elástica, donde las cons-

tantes elásticas asociadas a la deformación del cuerpo difieren en magnitud, con respecto a la posición en donde se evalúe el desplazamiento.

Como se mencionó anteriormente, la anisotropía del medio afecta significativamente las propiedades físicas de la roca, tales como las constantes elásticas, por lo que la solución del problema heterogéneo bidimensional, para un corte transversal del cilindro, puede ser un acercamiento al estudio del cambio en la permeabilidad de rocas a altas presiones.

Este trabajo inicia aplicando la teoría de elasticidad para la deformación de sólidos debido a esfuerzos, en coordenadas cilíndricas. De esta manera, se obtienen las soluciones para el desplazamiento radial, en los problemas para un orificio cilíndrico, en deformación y esfuerzo planos.

Por otro lado, se considera que la red de canales por donde el fluido es conducido es un conjunto de tubos capilares. Tomando en cuenta la permeabilidad como la capacidad que tienen los materiales porosos para conducir fluidos, se compara la Ley de Darcy, con la forma general de la Ley de Poiseuille para el flujo viscoso de un líquido a través de un tubo capilar.

Considerando una matriz porosa homogénea, en términos de diámetro del poro, entonces los modelos teóricos para el desplazamiento radial son aplicados en las expresiones para el cambio de permeabilidad, obtenidas por medio de la comparación entre las Leyes de Darcy y Poiseuille. Cabe mencionar que la Ley de Darcy es empírica, y con ella la permeabilidad se puede obtener únicamente por medio de la experimentación, conociendo la viscosidad dinámica del fluido, las dimensiones del tapón de roca cilíndrico, y midiendo el flujo y la caída de presión que sufre el flujo de la entrada a la salida de la roca.

Finalmente, las soluciones para el cambio en la permeabilidad de los modelos teóricos, son comparadas con los datos experimentales obtenidos por medio de Darcy. Los resultados de dicha comparación proporcionarán información que permita analizar el comportamiento de este cambio.

Capítulo 2

Deformación elástica de un cilindro hueco bajo presión externa

En este capítulo se desarrolla un modelo de deformación de un poro en un material elástico, utilizando la teoría elástica lineal.

2.1. Deformación elástica de un cilindro hueco bajo presión externa en deformación plana

Para este ejemplo se supone que el cilindro es largo y el problema puede ser modelado bajo condiciones para la deformación plana bidimensional. Usando la solución B.21 del apéndice B para los esfuerzos en direcciones radial y angular, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 2a_3 r^2 \ln r + \frac{a_1}{r^2} + a_3 + 2a_2 \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2a_3 r^2 \ln r - \frac{a_1}{r^2} + 3a_3 + 2a_2\end{aligned}$$

donde ϕ es la función de estrés de Airy, a_i son las constantes de integración para el caso axisimétrico y r es la posición radial. El término a_3 en

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

la relación tangencial de desplazamiento, conduce a un comportamiento con valores múltiples. Sin estos términos logarítmicos, los esfuerzos están definidos por:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B; \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B \quad (2.1)$$

donde las constantes A y B son:

$$A = a_1; \quad B = 2a_2 \quad (2.2)$$

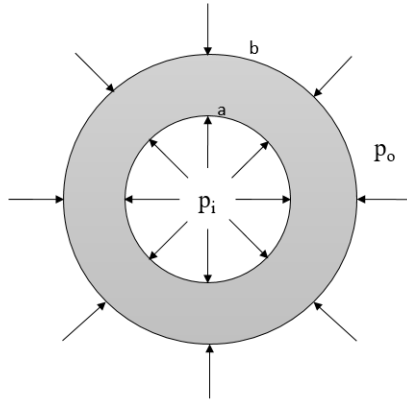


Figura 2.1: Problema del cilindro de pared gruesa.

De acuerdo a la figura 2.1 que ilustra el problema del cilindro hueco sometido a presiones internas y externas, las condiciones a la frontera son:

$$\begin{aligned} r = a; & \quad \sigma_r = -p_i \\ r = b; & \quad \sigma_r = -p_o \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las constantes A y B son evaluadas como:

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2}; \quad B = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} \quad (2.4)$$

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO
HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

Siendo substituidas en los esfuerzos, se obtiene:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} \quad (2.5)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2}$$

Además, según la ley de Hooke para la deformación plana, el esfuerzo en dirección z está definido por:

$$\sigma_z = \lambda(e_r + e_\theta) = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} = 2\nu B \quad (2.6)$$

Usando la ley de Hooke para la deformación plana (ecuación A.12 del apéndice A), las relaciones de desplazamiento (ecuación A.1 del apéndice A) para e_r axisimétrico (sin desplazamiento en θ) y la tabla de relaciones entre las constantes elásticas (tabla A.1 del Apéndice A), el desplazamiento en dirección r queda evaluado como:

$$\sigma_\theta = \lambda(e_r + e_\theta) + 2\mu e_\theta; \quad \therefore \quad \lambda(e_r + e_\theta) = \sigma_\theta - 2\mu e_\theta$$

$$\sigma_z = \lambda(e_r + e_\theta) = \sigma_\theta - 2\mu e_\theta = 2\nu B$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad e_\theta = \frac{u_r}{r}$$

$$\therefore u_r = \frac{(1 + \nu)}{E} r \left[-\frac{A}{r^2} + B(1 - 2\nu) \right]$$

$$u_r = \frac{(1 + \nu)}{E} r \left[-\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + (1 - 2\nu) \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} \right] \quad (2.7)$$

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO
HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

Como se busca evaluar el desplazamiento que está sufriendo el radio interno del cilindro hueco, u_r se evalúa en a , obteniendo:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[-\frac{b^2(p_o - p_i)}{b^2 - a^2} + (1 - 2\nu) \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} \right] \quad (2.8)$$

Arreglando la ecuación se obtiene:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[-\frac{(p_o - p_i)}{1 - \frac{a^2}{b^2}} + (1 - 2\nu) \frac{\frac{a^2}{b^2} p_i - p_o}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right] \quad (2.9)$$

Si $a \ll b$, entonces:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[- (2p_o - p_i) + 2\nu p_o \right] \quad (2.10)$$

Esta es la solución para el desplazamiento del radio interno del cilindro hueco en deformación plana.

2.2. Deformación elástica de un cilindro hueco bajo presión externa en esfuerzo plano

Se inicia el estudio reexaminando el problema axisimétrico de la sección anterior, pero en este caso para el plano de esfuerzo, considerando las constantes elásticas (el módulo de Young y la razón de Poisson) como funciones de la coordenada radial.

Usando la ley de Hooke para el esfuerzo plano (ecuación A.12 del apéndice A) y las relaciones de desplazamiento (ecuación A.1 del Apéndice A) se obtienen las relaciones entre esfuerzo y deformación:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & e_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta); & \therefore \sigma_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} E_r + \nu_r \sigma_\theta \\ e_\theta &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); & e_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r); & \therefore \sigma_\theta &= \frac{E_r}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \nu_r \sigma_r \end{aligned} \quad (2.11)$$

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

Debido a que se han evaluado diferentes valores de las constantes elásticas para distintos materiales, se encontró que el cambio en la razón de Poisson ν es de mucho menor importancia en la deformación del sólido que el cambio en el módulo de Young con respecto a la posición radial (Sadd, 2014), entonces se supone ν como constante. Sustituyendo los esfuerzos en su opuesto y eliminando el desplazamiento en θ puesto que es un problema axisimétrico, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E_r}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u_r \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E_r}{(1-\nu^2)} \left[\frac{u_r}{r} + \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right]\end{aligned}\tag{2.12}$$

Es importante observar que las relaciones en deformación plana pueden ser determinadas por una simple transformación de los módulos elásticos, como se muestra en la tabla A.1.

Sustituyendo las relaciones 2.11, en las ecuaciones de equilibrio (ecuación A.11), para el caso axisimétrico y eliminando fuerzas de cuerpo, obtenemos:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + F_r = 0; \quad \therefore \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0; \tag{2.13}$$

Desarrollando los términos de la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_r}{dr} &= \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{dE_r}{dr} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{\nu}{r} u_r \right) + \frac{E_r}{(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{\nu}{r^2} u_r \right); \\ \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} &= \frac{E_r}{(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{\nu}{r^2} u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{du_r}{dr} \right]\end{aligned}$$

Juntando estos términos de la ecuación y eliminando el factor común, se obtiene:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{E_r} \frac{dE_r}{dr} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{\nu}{r} u_r \right) = 0 \quad (2.14)$$

Para el caso homogéneo, en que el módulo de Young no cambia con respecto a la posición radial, la ecuación se reduce a:

$$\frac{dE_r}{dr} = 0; \quad \frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (2.15)$$

Es importante mencionar que este resultado es el mismo que la solución B.26 para el desplazamiento, obtenida directamente de las ecuaciones de Navier A.14.

2.3. Solución para el desplazamiento radial del caso homogéneo en esfuerzo plano

Tomando la solución B.27, que es la misma para el caso homogéneo: 2.15:

$$u_r = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}$$

Las constantes de integración se determinan con las condiciones a la frontera, con base figura 2.1. Las condiciones a la frontera son:

$$\begin{aligned} r = a; & \quad \sigma_r = -p_i \\ r = b; & \quad \sigma_r = -p_o \end{aligned} \quad (2.16)$$

Siendo las constantes de integración:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(p_i - p_o)(1 - \nu^2)}{E(1 + \nu)} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) - \frac{p_i(1 - \nu^2)}{E(1 + \nu)} \\ C_2 &= \frac{(p_i - p_o)(1 - \nu^2)}{E(1 - \nu)} \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

Si se agrupan los siguientes términos constantes en:

$$\alpha = \frac{E}{(1 - \nu^2)}; \quad \beta = \nu - 1; \quad \gamma = \nu + 1 \quad (2.18)$$

Las constantes de integración se expresan como:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{p_i - p_o}{\alpha\gamma} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \\ C_2 &= -\frac{p_i - p_o}{\alpha(-\beta)} \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sustituyendo las constantes de integración en la solución de la ecuación diferencial, se obtiene la solución del desplazamiento radial para el caso homogéneo:

$$u_r = \left[\frac{p_i - p_o}{\alpha\gamma} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \right] r + \left[-\frac{p_i - p_o}{\alpha(-\beta)} \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \right) \right] \frac{1}{r} \quad (2.20)$$

Como se busca evaluar el desplazamiento que está sufriendo el radio interior del cilindro, u_r se evalúa en a , obteniendo:

$$\frac{u_r}{a} = \left[\frac{p_i - p_o}{\alpha\gamma} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \right] + \left[-\frac{p_i - p_o}{\alpha(-\beta)} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) \right] \quad (2.21)$$

Agrupando los términos con factor común:

$$\frac{u_r}{a} = \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[(p_i - p_o) \left(\frac{b^2}{a^2 - b^2} \right) \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \quad (2.22)$$

Si $a \ll b$, entonces:

$$\frac{u_r}{a} = \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[-(p_i - p_o) \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \quad (2.23)$$

Esta es la solución para el desplazamiento del radio interno del cilindro hueco en esfuerzo plano, para el caso homogéneo.

2.4. Solución para el desplazamiento radial del caso heterogéneo en esfuerzo plano

Para este caso se considera el módulo de Young como función de la posición radial con la ley de potencia:

$$E_r = E_0 \left(\frac{r}{a} \right)^n \quad (2.24)$$

donde E_0 es el módulo de Young en la pared interna del cilindro hueco, o bien en a . El caso homogéneo desarrollado en la sección anterior se obtiene con el valor de $n = 0$. Por otro lado, si el valor de n es 1, la variación del módulo de Young será lineal, como se muestra en la figura 2.2.

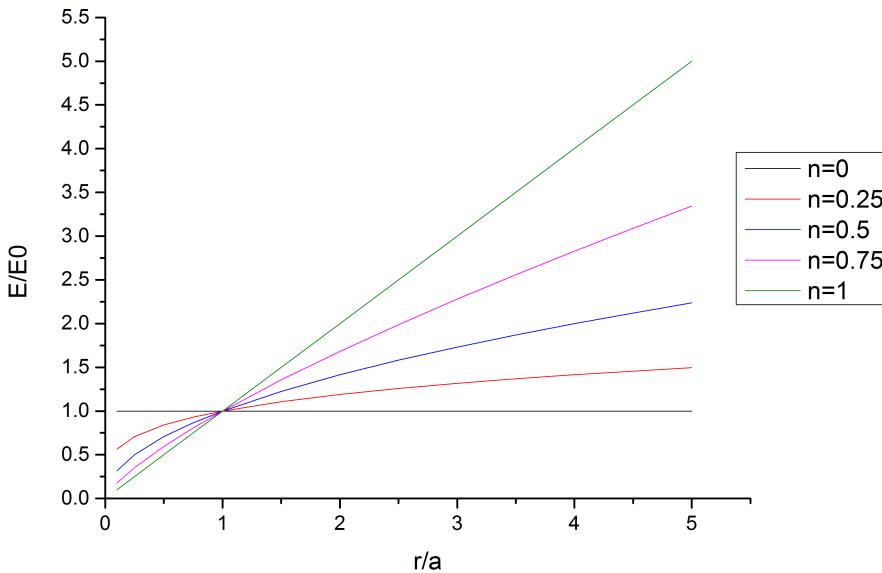


Figura 2.2: Variación del módulo de Young adimensional, con respecto a la distancia adimensional, para la ley de potencia.

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

La zona que comprende del origen al valor de 1 para ambos ejes, muestra que a posiciones de r menores a la pared interna del cilindro hueco, habrá una mayor disminución en la resistencia elástica, conforme el radio resultante de la deformación r sea menor.

Sustituyendo la ley de potencia para el módulo de Young en la ecuación 2.14, se obtiene:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{(n+1)}{r} \frac{du_r}{dr} + (n\nu - 1) \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (2.25)$$

La solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$u_r = Ar^{-\frac{(n+k)}{2}} + Br^{\frac{(-n+k)}{2}} \quad (2.26)$$

donde:

$$k = \sqrt{n^2 + 4 - 4n\nu} \quad (2.27)$$

Las constantes de integración se determinan por medio del esfuerzo en dirección radial de la ecuación 2.12:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u_r \right]$$

La derivada en dirección radial del desplazamiento en r es:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{-(n-k)}{2} Ar^{\frac{k-n-2}{2}} + \frac{(-n+k)}{2} Br^{-\frac{n-k-2}{2}} \quad (2.28)$$

De tal manera que el esfuerzo en dirección radial es:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ A \left[\nu - \frac{(n+k)}{2} \right] r^{\frac{-n-k-2}{2}} + B \left[\nu + \frac{(k-n)}{2} \right] r^{\frac{k-n-2}{2}} \right\} \quad (2.29)$$

Si se agrupan los siguientes términos constantes en:

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO
HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

$$\alpha = \frac{E}{(1 - \nu^2)}; \quad \beta = \nu - \frac{n+k}{2}; \quad \gamma = \nu + \frac{k-n}{2} \quad (2.30)$$

La ecuación 2.29 se reduce a:

$$\sigma_r = \alpha \left(A\beta r^{-\frac{n+k-2}{2}} + B\gamma r^{\frac{k-n-2}{2}} \right) \quad (2.31)$$

Es importante observar que si se considera el caso homogéneo en que $n=0$, y por lo tanto $k=2$, las constantes de integración resultan de la misma manera que en la sección anterior, para el caso homogéneo:

$$\alpha = \frac{E}{(1 - \nu^2)}; \quad \beta = \nu - 1; \quad \gamma = \nu + 1$$

Las condiciones a la frontera, con base en la figura 2.1 son:

$$\begin{aligned} r = a; & \quad \sigma_r = -p_i \\ r = b; & \quad \sigma_r = -p_o \end{aligned} \quad (2.32)$$

Siendo evaluadas las constantes de integración como:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{p_i}{\alpha\beta} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}} - \frac{p_o}{\alpha\beta}}{b^{-\frac{n+k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}} a^{-\frac{n+k-2}{2}}} \\ B &= \left[-\frac{p_i}{\alpha\gamma} - \frac{\frac{p_i}{\alpha\gamma} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}} - \frac{p_o}{\alpha\gamma}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{n+k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}}} \right] \frac{1}{a^{\frac{k-n-2}{2}}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Y así el desplazamiento radial para el caso heterogéneo es:

$$u_r = Ar^{-\frac{(n+k)}{2}} + Br^{\frac{(-n+k)}{2}} \quad (2.34)$$

CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN CILINDRO HUECO BAJO PRESIÓN EXTERNA

Como se busca evaluar el desplazamiento que está sufriendo el radio interno del cilindro hueco, u_r se evalúa en a , obteniendo:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{Aa^{\frac{-(n+k)}{2}} + Ba^{\frac{(-n+k)}{2}}}{a} = Aa^{\frac{-n-k-2}{2}} + Ba^{\frac{k-n-2}{2}} \quad (2.35)$$

Sustituyendo las constantes de integración, tenemos:

$$\frac{u_r}{a} = \left[\frac{\frac{p_i}{\alpha\beta} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}} - \frac{p_o}{\alpha\beta}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-n-k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}}} \right] + \left[\frac{p_i}{\alpha\gamma} - \frac{\frac{p_i}{\alpha\gamma} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}} - \frac{p_o}{\alpha\gamma}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-n-k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}}} \right] \quad (2.36)$$

Agrupando los términos con factor común:

$$\frac{u_r}{a} = \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[\frac{p_i \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}} - p_o}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-n-k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-n-2}{2}}} \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \quad (2.37)$$

Esta es la solución para el desplazamiento del radio interno del cilindro hueco en esfuerzo plano, para el caso heterogéneo.

Capítulo 3

Comparación entre la ley de Darcy y el flujo de Poiseuille

En este capítulo se hace la comparación entre las leyes de Poiseuille y Darcy, para obtener la expresión de permeabilidad en términos geométricos del radio de poro.

La forma general de la ley de Poiseuille para el flujo viscoso de un líquido a través de tubos capilares, desarrollada en el Apéndice D, es:

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 \mu_f L} \quad (3.1)$$

dónde q es el flujo volumétrico, r es el radio del tubo capilar, ΔP es la caída de presión a través del tubo capilar, L es la longitud del tubo capilar y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

Por otro lado, la ley de Darcy para flujos de fluidos incompresibles es:

$$q = \frac{k A \Delta P}{\mu_f L} \quad (3.2)$$

donde q es el flujo volumétrico, A es el área transversal de la roca, ΔP es la caída de presión a través de la roca, L es la longitud del tubo capilar, μ es la viscosidad dinámica del fluido y k es la permeabilidad de la roca.

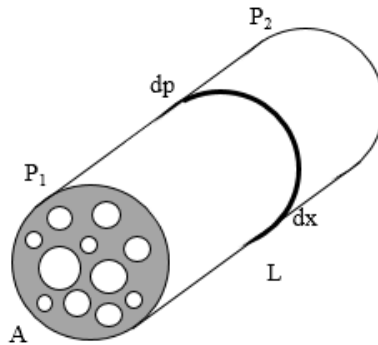


Figura 3.1: Sistema de flujo de Poiseuille para capilares rectos (Riab and Donaldson, 2004, p. 425)

La figura 3.1 proporciona el caso de una muestra rocosa cilíndrica, en la cuál los poros son tubos capilares cilíndricos de distintos tamaños. La ley de Poiseuille, por sí misma únicamente predice el comportamiento del flujo de un líquido a través de un sólo tubo capilar.

Por medio de la relación que existe entre las leyes de Darcy y Poiseuille, y empleando la teoría de Elasticidad, se desarrollará un modelo para el cálculo del cambio en la permeabilidad de rocas sometidas a altas presiones.

3.1. Permeabilidad de Poiseuille para una roca con un sólo tubo capilar

Comparando las ecuaciones 3.1 y 3.2 y suponiendo que la porosidad de la roca se modela para un sólo orificio cilíndrico longitudinal, la permeabilidad es:

$$k = \frac{\pi r^4}{8A} \quad (3.3)$$

3.2. Permeabilidad de Poiseuille para una roca con una matriz de tubos capilares

En este caso se considera que una roca contiene una matriz de tubos capilares. Si los canales por donde se conduce el fluido, se representan como un conjunto de tubos capilares con diferentes diámetros, entonces el flujo de Poiseuille a través del sistema es:

$$q = \left(\frac{\pi}{8} \sum_{j=1}^N n_j r_j^4 \right) \frac{\Delta p}{\mu_f L} \quad (3.4)$$

dónde n_j es el número de tubos de radio r_j y N es el número de grupos de tubos de radio r_j . Así, comparando este resultado con la ley de Darcy 3.2, la permeabilidad queda expresada cómo:

$$k = \left(\frac{\pi}{8A} \sum_{j=1}^N n_j r_j^4 \right) \quad (3.5)$$

Si se tiene una matriz de tubos de un mismo radio, la expresión para la permeabilidad de la roca con una matriz de poros se reduce a:

$$k = \frac{nr^4}{8R^2} \quad (3.6)$$

donde R es el radio transversal total de la roca y r es el radio de los poros con diámetro homogéneo.

3.3. Variación en permeabilidad de una roca, como resultado de cargas externas de presión

En este capítulo se desarrolla un modelo para el cálculo del cambio en la permeabilidad de rocas sometidas a altas presiones, usando la permeabilidad deducida de la ecuación de Poiseuille, y el cambio del tamaño de poro que resulta de aplicar cargas de presión externas a una matriz elástica.

CAPÍTULO 3. COMPARACIÓN ENTRE LA LEY DE DARCY Y EL FLUJO DE POISEUILLE

Empleando las expresiones de permeabilidad 3.3 y 3.6 deducidas a partir de la comparación entre la Ley de Darcy y el flujo de Poiseuille, para un sólo tubo capilar y una matriz de tubos capilares de un mismo radio respectivamente, la ecuación para el cambio en la permeabilidad es:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{r^4}{a^4} \quad (3.7)$$

donde k_0 es la permeabilidad inicial, a es el radio inicial del poro, k es la permeabilidad a una cierta presión externa y r es el radio del poro resultante a esa presión.

Ambas expresiones de permeabilidad proporcionaron el mismo resultado para el cambio en la permeabilidad, debido a la suposición hecha en la ecuación 3.5, considerando la porosidad de la roca como una matriz de tubos capilares de un mismo radio. Por lo tanto, considerar el cambio radial en un sólo poro capilar, es similar a considerar el cambio radial en un conjunto de poros capilares con un mismo radio, suponiendo que dicho cambio es el mismo para cada poro del conjunto.

Se supone la condición inicial en que la presión dentro del poro es la misma que en el exterior de la roca, de tal manera que no exista deformación elástica. Esta condición corresponde a k_0 y a . Consideramos el caso más simple, donde el radio del poro cambia de tamaño, únicamente debido a la deformación elástica.

La expresión general para la deformación del radio del poro es:

$$r = a + u_r \quad (3.8)$$

donde u_r es el desplazamiento del radio de poro inicial a . El desplazamiento puede tener signo positivo o negativo, dependiendo de cuál de las dos presiones, interna o externa, sea mayor a la otra.

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación 3.7, el cambio de permeabilidad en función del desplazamiento radial del poro es:

$$\frac{k}{k_0} = \left(1 + \frac{u_r}{a}\right)^4 \quad (3.9)$$

3.3.1. Modelo homogéneo de deformación plana

Considerando la solución 2.8 para el desplazamiento radial:

$$\frac{u_r}{a} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[-(2p_o - p_i) + 2\nu p_o \right]$$

Por lo tanto, el cambio de permeabilidad para este caso es:

$$\frac{k}{k_0} = \left\{ 1 + \frac{(1 + \nu)}{E} \left[p_i + 2p_o(\nu - 1) \right] \right\}^4 \quad (3.10)$$

Para la deformación plana, el cambio radial no considera la heterogeneidad del módulo de Young. Esto se puede apreciar en el procedimiento para llegar a la ecuación 2.8, donde aparece el módulo de Young como una simple transformación entre constantes elásticas.

3.3.2. Modelo homogéneo de esfuerzo plano

Para este caso, se toma la solución 2.23 para el desplazamiento radial con resistencia a la deformación, homogénea:

$$\frac{u_r}{a} = \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[-(p_i - p_o) \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma}$$

Por lo tanto el cambio de permeabilidad para este caso es:

$$\frac{k}{k_0} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[(p_o - p_i) \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \right\}^4 \quad (3.11)$$

Recordando que las constantes son:

$$\alpha = \frac{E}{(1 - \nu^2)}; \quad \beta = \nu - 1; \quad \gamma = \nu + 1$$

Entonces se puede hacer una comparación entre esta solución y el resultado 3.10 para la deformación plana, ambos casos homogéneos.

3.3.3. Modelo heterogéneo de esfuerzo plano.

Ahora consideramos la solución 2.37 para el desplazamiento radial heterogéneo:

$$\frac{u_r}{a} = \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[\frac{p_i \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k-n-2}{2}} - p_o}{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{-n-k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k-n-2}{2}}} \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma}$$

Por lo tanto, el cambio de permeabilidad para este caso es:

$$\frac{k}{k_0} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta\gamma\alpha} \right) \left[\frac{p_i \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k-n-2}{2}} - p_o}{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{-n-k-2}{2}} - \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k-n-2}{2}}} \right] - \frac{p_i}{\alpha\gamma} \right\}^4 \quad (3.12)$$

Recordando que la constantes son:

$$\alpha = \frac{E}{(1 - \nu^2)}; \quad \beta = \nu - \frac{n+k}{2}; \quad \gamma = \nu + \frac{k-n}{2}; \quad k = \sqrt{n^2 + 4 - 4n\nu}$$

Si se considera el caso homogéneo en que n=0, y por lo tanto k=2, las constantes resultan de la misma manera que para el caso homogéneo. Además, la ecuación 3.12 se reduce a la ecuación 3.11.

Las expresiones en las secciones anteriores fueron obtenidas para ser comparadas con datos experimentales de rocas sometidas a altas presiones provenientes de un yacimiento de petróleo.

3.4. Modelo teórico de compresibilidad en rocas.

Algunos modelos buscan predecir un cambio en la permeabilidad, o un cambio en la porosidad debido a la diferencia entre el esfuerzo en el poro y el esfuerzo de confinamiento, junto con un factor de compresibilidad del poro que disminuye o aumenta el impacto en la deformación del poro, debido a la diferencia entre los esfuerzos. Un ejemplo es:

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_r} = 1 - \frac{c_r}{c_b}; \quad c_p = \frac{c_b - c_r}{\phi} = \frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{d\sigma}; \quad \bar{c}_p = \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_0}^{\sigma} c_p d\sigma \quad (3.13)$$

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{e^{-\alpha\bar{c}_p\Delta p}}{1 - \phi_0(1 - e^{-\alpha\bar{c}_p\Delta p})}; \quad \frac{k}{k_0} = \frac{e^{-3\alpha\bar{c}_p\Delta p}}{1 - \phi_0(1 - e^{-\alpha\bar{c}_p\Delta p})} \quad (3.14)$$

donde c_r, c_b y \bar{c}_p son la compresibilidad de la roca, bulto y promedio del poro, respectivamente, y K, K_r son los módulos de bulto efectivo y de la parte sólida de la roca, respectivamente (Riab and Donaldson, 2004).

La compresibilidad del poro es la capacidad de este a deformarse, debido a fuerzas externas e internas que actúan sobre el cuerpo sólido. A su vez, esta no es constante debido a la anisotropía del medio α , por lo que generalmente se representa como el promedio de la compresibilidad del poro, en un intervalo de esfuerzo.

En el estudio de McKee and Bumb (1988), en el que usaron muestras de areniscas, arcillas y granitos, encontraron que las curvas teóricas para la permeabilidad y la porosidad como función del esfuerzo, comparadas con los valores experimentales, se ajustan satisfactoriamente.

El ejemplo anterior fue desarrollado desde un preámbulo similar al modelo heterogéneo que se obtuvo anteriormente. El factor de compresibilidad tiene un papel similar al módulo de Young, con respecto a la teoría de poroelasticidad de Biot, y de acuerdo a Brandt, quien expresa el factor α

CAPÍTULO 3. COMPARACIÓN ENTRE LA LEY DE DARCY Y EL FLUJO DE POISEUILLE

como función de la geometría del poro, tomando valores de 0 a 1. Cuando este factor toma valor de 0 la presión en el interior del poro no tiene efecto en el comportamiento de la roca, mientras que en el valor de 1 la presión del poro es 100% efectiva en la interacción con la carga externa aplicada.

Similarmente, se introdujo un factor de heterogeneidad n en la resistencia elástica, cambiando el efecto del módulo de Young con respecto a la posición radial, el cual a su vez tomará valores en un intervalo desde 0 hasta 1. Dicho intervalo tiene un efecto similar al explicado anteriormente para el factor α , cuyo comportamiento será analizado y comparado con resultados experimentales.

Capítulo 4

Descripción experimental

El Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM, UNAM) cuenta con una celda de pruebas para mediciones de permeabilidad en materiales porosos, a altas presiones y temperaturas.

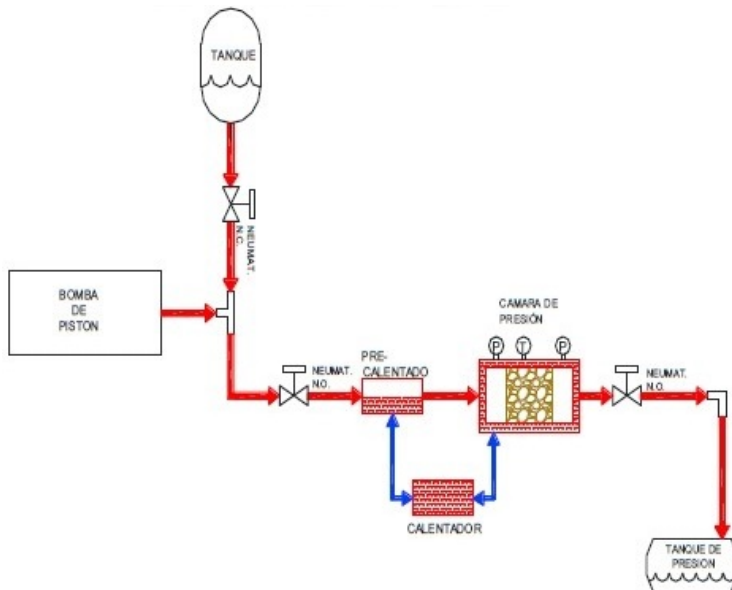


Figura 4.1: Diagrama esquemático del permeámetro de rocas.

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

El sistema impone el flujo de un líquido viscoso a través de una muestra cilíndrica con dimensiones específicas, a alta presión, en una cámara de presión (celda hiperbárica) que es capaz de soportar hasta 25000 psig de presión.

Como se aprecia en la figura 4.1 el flujo puede ser precalentado por el mismo sistema que calienta la celda hiperbárica. La figura 4.2 muestra la línea de flujo principal hacia la cámara hiperbárica.

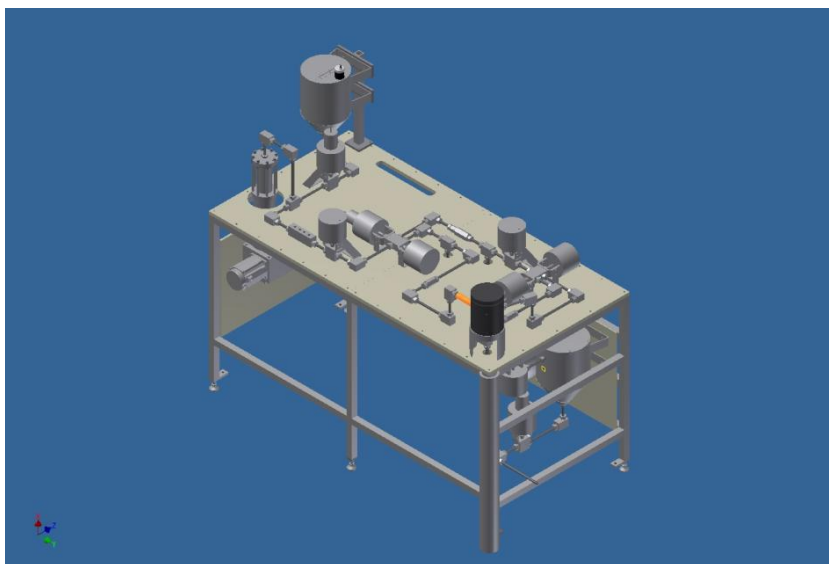


Figura 4.2: Esquema general del montaje experimental. La celda hiperbárica se muestra en negro.

El permeámetro tiene la capacidad de ensamblar arreglos experimentales para las mediciones de presión, flujo y temperatura, para muestras con dos tamaños distintos:

1. 2.5" de diámetro y 3" de largo.
2. 1.5" de diámetro y 2" de largo.

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

La celda de pruebas cuenta con un sistema de control para monitorear variables y manipular bombas y válvulas. Así mismo, integra el lazo de control de presión y temperatura. La figura 4.3 muestra la interfaz del software para el control y monitoreo.

La servo bomba inyecta fluido generando altas presiones en toda la línea de flujo del sistema, como se muestra en la figura 4.2. Está compuesta por un servomotor que mueve un tornillo de bolas, y este a su vez el vástago contenedor del líquido a presurizar.

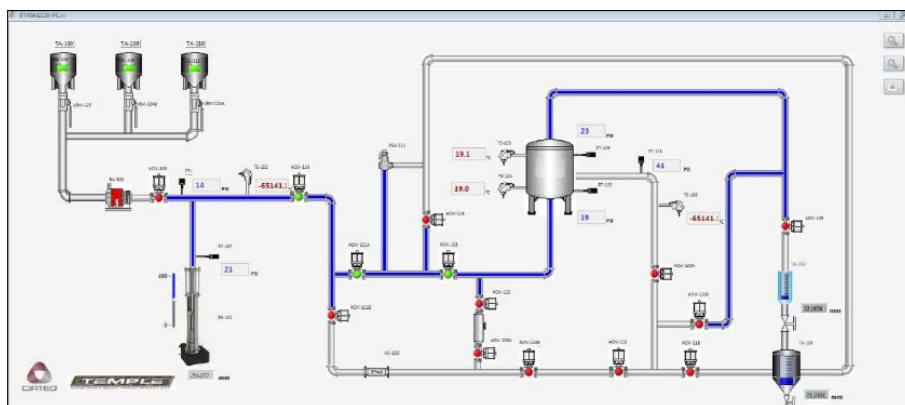


Figura 4.3: Interfaz del software para el monitoreo de las variables de medición, y el control de las válvulas y bombas.

Las muestras porosas son colocadas en la cámara hiperbárica de la figura 4.4 en posición vertical, en un arreglo para asegurar su sellado. Básicamente el arreglo consta de una camisa de fuerza dentro de la que se coloca la muestra previamente maquinada a las dimensiones deseadas, con empaques reforzados. Se coloca una pieza cónica en la parte superior de la camisa, la cual se encarga de sellar la cámara al ser apretada por la tapa rotatoria que se ensabla a la forma cónica de la pieza.

Los resultados de los experimentos dependen de la posición geológica en la que se extrajeron los tapones, cuya posición es marcada con líneas, como se muestra en la figura 4.5.



Figura 4.4: Cámara hiperbárica

El procedimiento para obtener datos de permeabilidad es el siguiente:

1. Verificar que los tanques de almacenamiento de agua, detergente anticorrosivo y aceite, se encuentren llenos.
2. Verificar que la línea de aire que alimenta las electroválvulas tipo solenoide, con actuador neumático, se encuentre en la presión deseada de 80 psig. La presión que suministra el compresor de aire libre de aceite, agua y partículas sólidas, debe ser siempre mayor a 80 psig y es regulada por dos manómetros, que cuentan a su vez con trampas de aceite y partículas. El primero se regula a 100 psig, y el segundo a 80 psig, eliminando sobrecargas de presión.
3. De estar sucias las líneas internas de las tuberías, realizar el procedimiento de limpieza con detergente y enjuagado con agua.
4. Una vez limpia la línea, llenar la servo bomba abriendo la electroválvula que aísla la bomba de engranes de la línea, cerrar las válvulas manuales de los tanques de agua y detergente y abrir la válvula manual del fluido de trabajo.



Figura 4.5: Núcleos provenientes de un pozo petrolero ubicado en Chiapas

5. Cerrar la electroválvula posterior a la servo bomba de la figura 4.3, que abre la línea hacia todo el sistema, para abrir la línea de flujo únicamente entre la bomba de engranes a la servo bomba.
6. Prender la bomba de engranes y activar la servo bomba en posición de velocidad negativa de -500 RPM que es una velocidad proporcional a la de la bomba de engranes (con agua como fluido de trabajo, pero cambia conforme a la viscosidad del líquido), para que la servo bomba sea llenada.
7. Ensamblar la muestra con la camisa de fuerza correctamente, cerrando y apretando la tapa superior que se muestra en la figura 4.4 para sellar la cámara y no presente fugas. La tapa a su vez está diseñada de tal forma que asegure el confinamiento del arreglo ensamblado, por medio de un plug, sobre la camisa, la muestra y otras piezas de sellado, como empaques de teflón reforzado con cobre.
8. El sellado se asegura abriendo la línea de flujo de líquido hacia la cámara, de la misma manera que muestra la línea azul de la figura

4.3, por medio de las electroválvulas. Abrir la electroválvula que aísla la bomba de engranes de la línea, cerrar las válvulas manuales de los tanques de agua y detergente y abrir la válvula manual del fluido de trabajo. Prender la bomba de engranes y verificar que no hayan fugas de líquido en la cámara.

9. Una vez verificado el sellado, purgar el sistema con la bomba de engranes, abriendo y cerrando válvulas manuales de salida, de tal manera que se asegure que la línea se encuentra totalmente llena de líquido.
10. La muestra porosa insertada debió haber sido previamente saturada con el líquido de trabajo (figura 4.6), pesando la muestra seca, y después de un tiempo de saturación. El tiempo de saturación varía dependiendo de la roca, y el tiempo y masa absorbida puede ser un parámetro empírico para inferir que tan permeable va a ser una roca sobre otra.
11. Finalmente, realizar las pruebas de permeabilidad poniendo el software en modo de guardado de datos y la servo bomba en operación de presión. Las pruebas se realizan desde 200 psig hasta 25,000 psig, con saltos de 200 psig.

El software permite una operación manual o automática para las pruebas de permeabilidad. Además, el sistema de control está programado para tomar acciones de seguridad inmediatas en cualquier caso de falla del sistema.

Para este estudio se usaron dos núcleos de roca provenientes de un pozo petrolero ubicado en Chiapas. El fluido de trabajo es aceite mineral blanco de petróleo. Los datos son guardados por medio del software en un archivo con formato .xls como se muestra en la figura 4.7.

Cuando se inicia el guardado de datos, se asignan los valores solicitados, y con ellos el programa calcula automáticamente la permeabilidad, en unidades Darcy (D).

1. Nombre de la muestra, fecha y hora.



Figura 4.6: Saturación del núcleo.

2. Dimensiones de la muestra. Se usó el arreglo para muestras de 1.5" de diámetro y 2" de largo.
3. Viscosidad dinámica del fluido. El valor puede variar dependiendo de la temperatura de trabajo. Para este caso en que la temperatura ambiental permanece constante en 20.41 °C, la viscosidad del aceite blanco del petróleo es de 3.69 cP.
4. Tiempo de muestreo. Se usaron 1000 ms de tiempo entre cada medición.

Las lecturas obtenidas por los sensores y guardadas por el software, y los datos calculados por el software son:

1. Index. Es el número asignado a cada punto de la prueba (en cada segundo).

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1	Reporte de Comportamiento de Muestra Rocosa															
2	Nombre de la muestra:			A3-28-03-2017			No de Pozo:			Fecha:					28/03/2017	
3	Tipo de Experimento:			Viscosidad del líquido [cP]:			3.7			Hora de Inicio:					06:39 p.m.	
4	Altura [mm]:			50			Diámetro [mm]:			38.1					Tiempo de Muestreo [mS]:	
5																
6	Index	Tiempo Acumulado [S]	Presión de Entrada PT-106 [PSI]	Presión de Salida PT-106 [PSI]	Diferencial de presión [PSI]	Temperatura de Entrada TE-104 [°C]	Temperatura de salida TE-103 [°C]	Diferencial de Temperatura [°C]	Flujo de Salida LT-102 [cm ³ /S]	Flujo de Entrada BA-101 [cm ³ /S]	PT-101 [PSI]	PT-111 [PSI]	Posición BA-101 [cm]	Posición LT-102 [cm]	Permeabilidad [d]	

Figura 4.7: Guardado de datos en archivo tipo .xls.

2. Tiempo: con base al index, se suma el tiempo acumulado del punto anterior, más el tiempo de muestreo.
3. Presión del flujo de entrada y salida de la roca en psi.
4. Diferencial de presión entre la entrada a la salida de la roca.
5. Temperatura de entrada y salida de la roca en grados Celsius.
6. Diferencial de temperatura entre la entrada y salida de la roca. Esto se usaría en caso de que se quisiera medir el calor suministrado a la roca.
7. Flujos de salida y entrada.
8. Presión manométrica a la salida de la servo bomba, y a una entrada lateral para el confinamiento de la roca.
9. Posición en cm de la servo bomba para medir la cantidad de fluido inyectado.
10. Permeabilidad en Darcies.

Los dos tapones de roca usados se nombraron A3 y A4. Sus dimensiones de rectificación para el arreglo experimental de 1.5” de diámetro y 2” de altura, son de:

1. A3: 1.488 ± 0.004 ” de diámetro y 1.973 ± 0.002 ” de altura.
2. A4: 1.484 ± 0.003 ” de diámetro y 1.958 ± 0.001 ” de altura.

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

Durante un mes en saturación con aceite blanco de petróleo, la muestra A3 absorbió 367.7 ± 4.4 mg, mientras que la A4 absorbió 462.3 ± 3.6 mg. Comparando las dimensiones con las masas de aceite absorbidas para ambas rocas, y como se aprecia en la figura 4.8, la muestra A4 tiene mayor cantidad de fracturas y por lo tanto absorbe mayor cantidad de aceite que la A3, aunque en dimensiones la A3 sea más grande en volumen de bulto.

Ambas rocas son clasificadas dentro del grupo de lutitas carbonatadas. La extracción y el corte de la roca se hicieron de tal manera que el núcleo sea transversalmente isotrópico, como se aprecia en la figura 4.8 con las líneas blancuzcas transversales del cilindro, las cuáles se formaron debido a las altas presiones, que, a través del tiempo, alinearon los minerales arcillosos dándoles la apariencia de estratificación paralela. Además, por su color amarillento es posible que la roca se encontrara naturalmente en un medio oxidante. Las lutitas se caracterizan por ser compactas debido a su naturaleza sedimentaria detrítica de grano fino, conformada por partículas de los tamaños de la arcilla y del limo, y en consecuencia suelen tener tamaños de poro pequeños y baja permeabilidad. (Blatt and Tracy, 1996)



Figura 4.8: Muestras A4 a la izquierda y A3 a la derecha.

Capítulo 5

Resultados experimentales y análisis

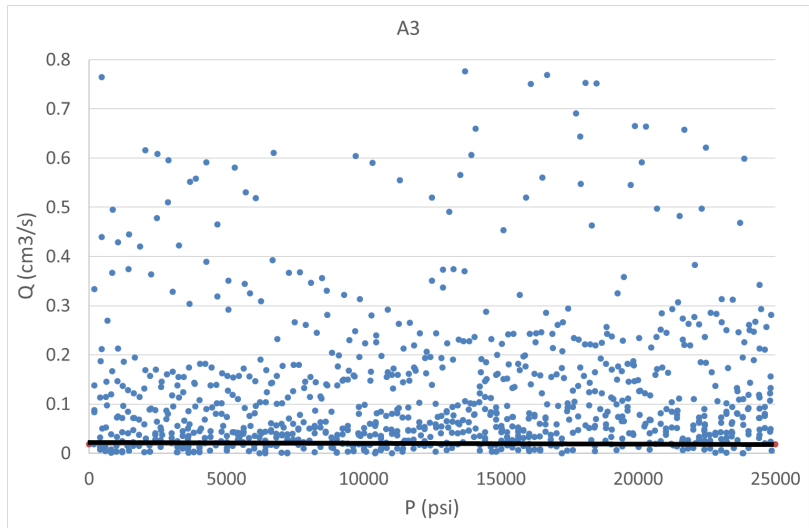
En este capítulo se compararán los resultados experimentales para las rocas A3 y A4, con el modelo elástico para el cambio de permeabilidad. La permeabilidad es calculada por medio de la ecuación de Darcy 3.2 como:

$$k = \frac{q\mu_f L}{A\Delta P}$$

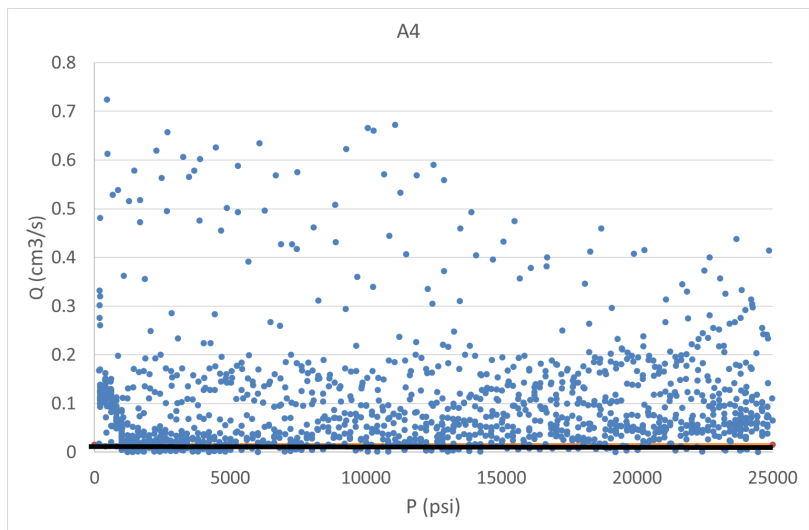
Analizando la ecuación, los únicos elementos que son variables, a temperatura constante, son el flujo volumétrico y la caída de presión. El área transversal y la longitud de la muestra son parámetros para cada muestra. La viscosidad del aceite se supone constante de 3.69 cP, a una temperatura ambiental constante de 20.4 °C.

La variación del flujo conforme aumenta la presión para las rocas A3 y A4 se muestra en en la figura 5.1. El área en ambas gráficas comprendida entre los flujos 0-0.1 $\frac{cm^3}{s}$, y a lo largo de todo el intervalo de presión entre 0-25000 psig, es la zona donde se concentran la mayor parte de las lecturas experimentales para el flujo.

Las lecturas que se encuentran lejos del valor medio se descartan ya que la bomba es de desplazamiento positivo e inyecta un flujo constante.



(a) Muestra A3



(b) Muestra A4

Figura 5.1: Variación de flujo como función de la presión en el sistema.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y ANÁLISIS

Suponiendo el flujo constante de un fluido incompresible a través de la roca, la moda para los datos de flujo para el caso de A3 y el caso de A4 son respectivamente $q=0.018 \frac{cm^3}{s}$ y $q=0.016 \frac{cm^3}{s}$, como muestra la línea de flujo constante en la figura 5.1.

La figura 5.2 muestra la caída de presión a través de la roca, como función de la presión del sistema, para las muestras A3 y A4. El ruido en las lecturas de presión es notable.

Para reducir la incertidumbre experimental usamos la media móvil, la cual proporciona en este caso una tendencia de los datos. Ésta se define como:

$$F_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{t-1+j}; \quad j = t + 1 \quad (5.1)$$

donde N es el número de periodos anteriores que se incluyen en la media móvil, A_j es el valor real en el tiempo j y F_j es el valor pronosticado en el tiempo j.

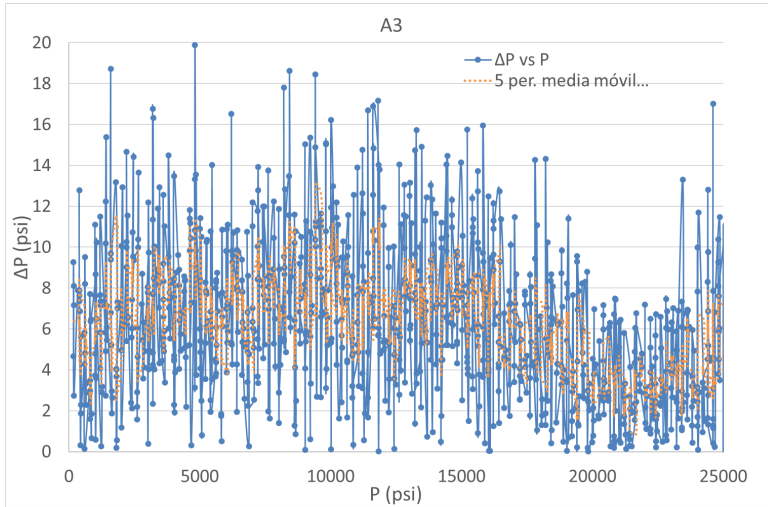
La media móvil es conveniente porque durante una misma prueba para una roca, cada aumento de presión de 200psig en la inyección de la bomba se mantuvo en un intervalo de tiempo constante de 10 segundos. Por lo tanto, al tener un tiempo de muestreo de 1 segundo, el número de periodos que se incluye en la media móvil es proporcional a dicho intervalo de tiempo constante. A su vez, el número de periodos se repetirá durante toda la prueba, haciendo este método adecuado para el propósito.

El error experimental se puede cuantificar como:

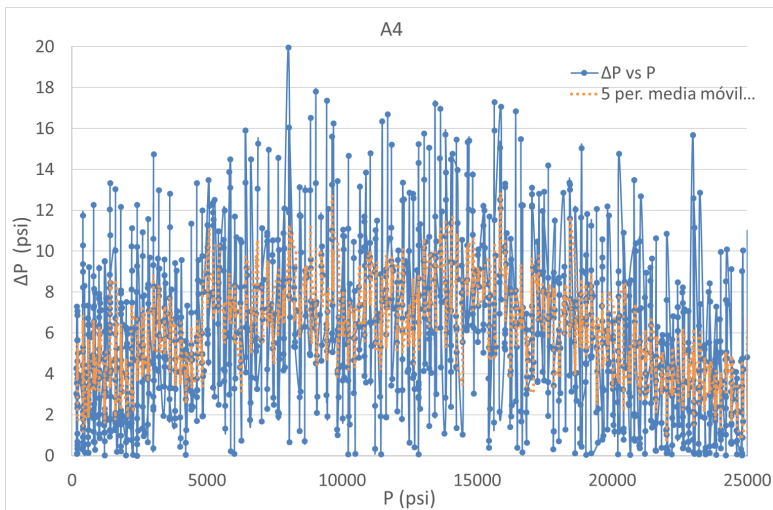
$$\epsilon = \sqrt{\frac{\left(\sum_{j=1}^N A_{t+1} - F_{t+1}\right)}{N}} \quad (5.2)$$

Utilizando la media móvil con 5 periodos para ambos ejes, teniendo a ΔP en las ordenadas y a P en las abscisas, se obtiene el conjunto de puntos

CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y ANÁLISIS



(a) Variación de la caída de presión para A3



(b) Variación de la caída de presión para A4

Figura 5.2: Variación de la caída de presión a través de la roca, conforme aumenta la presión del sistema

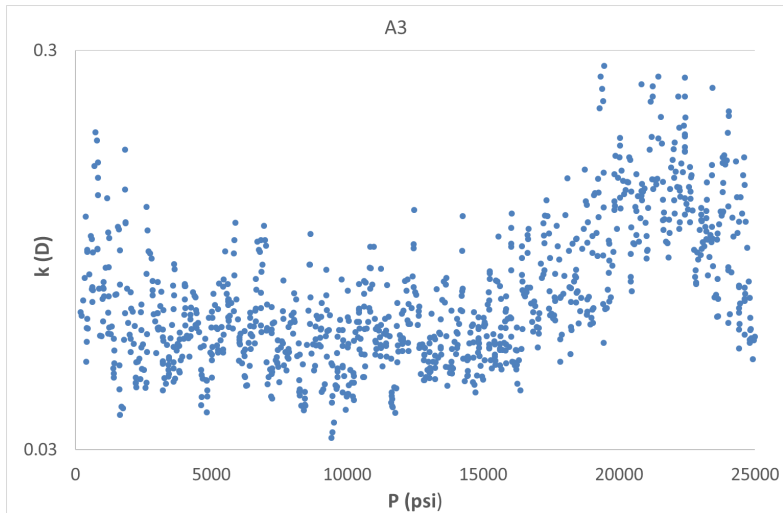
CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y ANÁLISIS

que reducen la incertidumbre de los datos experimentales, pero mantienen la misma tendencia en la figura 5.2. El promedio del error experimental para las dos pruebas es de $\epsilon = \pm 2.85\text{psi}$ para A3, y $\epsilon = \pm 2.83\text{psi}$ para A4.

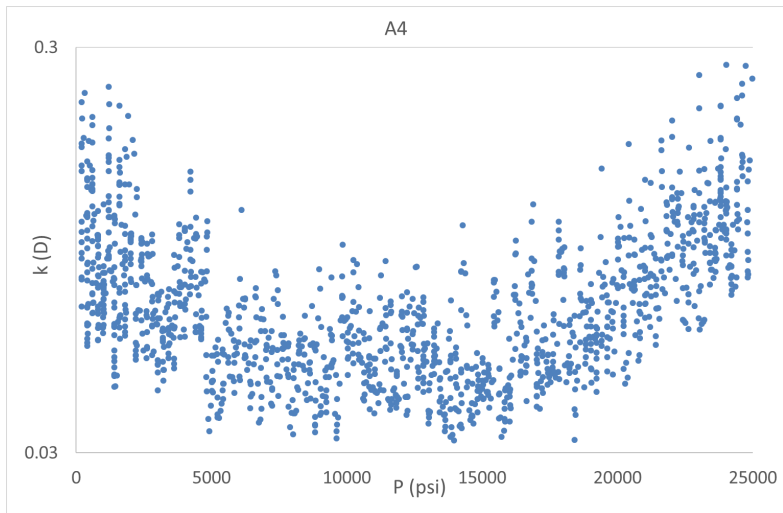
El resultado se refleja en la figura 5.3, donde se muestran los valores de permeabilidad para las rocas A3 y A4 como función de la presión del sistema. Estos valores se encuentran en el intervalo para que las rocas sean clasificadas dentro del grupo de rocas de yacimiento petrolero, de acuerdo a los datos de la tabla 5.1.

Permeabilidad	Permeable				Semi-permeable				Impermeable				
Arena y grava no consolidada	Grava bien clasificada		Arena, o arena y grava bien clasificadas		Arena muy fina, limo y margas								
Arcilla y componentes orgánicos no consolidados					Turba		Arcilla en capas		Arcilla no templada				
Rocas consolidadas	Rocas altamente fracturadas				Rocas de yacimientos petroleros			Arenisca fresca		Caliza y dolomita frescas		Granito fresco	
k (cm ²)	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻¹¹	10 ⁻¹²	10 ⁻¹³	10 ⁻¹⁴	10 ⁻¹⁵
k (mildarcy)	10 ⁸	10 ⁷	10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	100	10	1	0.1	0.01	10 ⁻³	10 ⁻⁴

Tabla 5.1: Valores de permeabilidad para diferentes tipos rocas. (Bear, 1972)



(a) Permeabilidad contra presión, para A3



(b) Permeabilidad contra presión, para A4

Figura 5.3: Cambio en la permeabilidad de las rocas, a lo largo de la prueba, conforme aumenta la presión del sistema.

Analizando los resultados se aprecia inicialmente una disminución en la permeabilidad, conforme aumenta la presión en el sistema. Cuando la presión alcanza un valor de 15000psi, la permeabilidad comienza a aumentar. Este comportamiento es interesante ya que la inflexión sucede en el mismo valor de presión para ambas rocas.

Comparando este punto de inflexión con los datos de la resistencia máxima a la compresión o esfuerzo de cedencia, para lutitas calcáreas transversalmente isotrópicas en pruebas horizontales (Douglas E. Miller and Boitnott, 2012), dicho valor de presión se encuentra dentro del rango aceptable para considerar que el aumento en la permeabilidad puede deberse a que, hasta ese punto, la mayor parte de los canales cerrados que bloqueaban el paso del fluido comenzaron a ceder al esfuerzo, y por consiguiente, a abrirse.

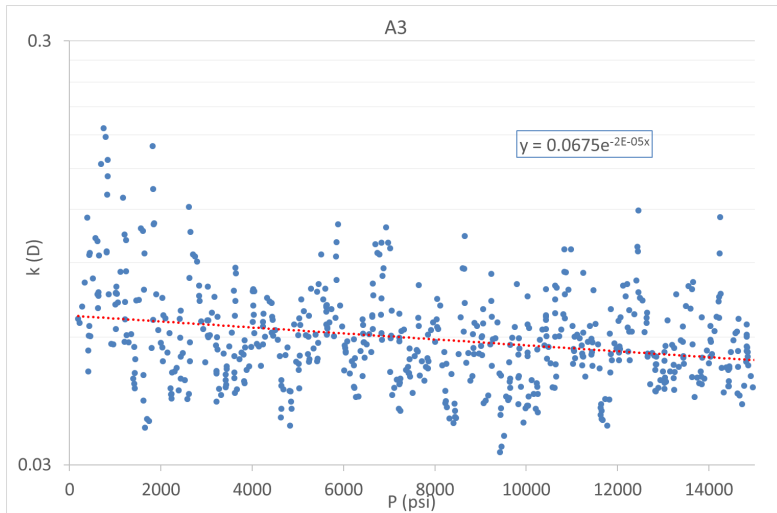
Considerando únicamente los datos de permeabilidad para presiones menores a 15000 psig, podemos obtener una tendencia del decremento en la permeabilidad, como función de la presión del sistema, como se muestra en la figura 5.4. Los datos muestran un comportamiento exponencial y su línea de tendencia se percibe lineal, debido a que las gráficas se encuentran en escala logarítmica en las ordenadas. La ecuación que describe la línea de tendencia es del tipo:

$$k = be^{mP} \tag{5.3}$$

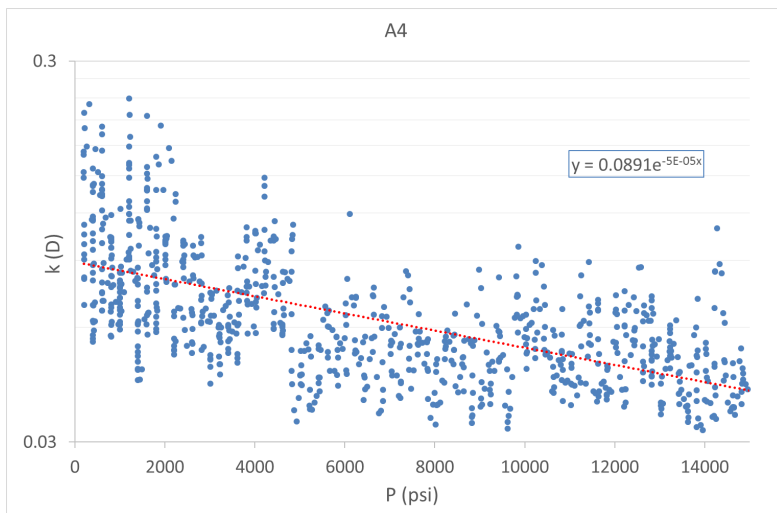
donde b y m tienen los siguientes valores:

1. A3: $m = -2 \times 10^{-5}$; $b = 0.067$
2. A4: $m = -5 \times 10^{-5}$; $b = 0.089$

Con estos ajustes podemos calcular la razón de cambio en la permeabilidad para los datos experimentales.



(a) Permeabilidad contra presión, para A3



(b) Permeabilidad contra presión, para A4

Figura 5.4: Cambio en la permeabilidad de las rocas, a lo largo de la prueba, conforme aumenta la presión del sistema hasta 1500 psig.

5.1. Comparación teórica y experimental

Para poder realizar comparaciones, suponemos que el interior del poro se mantiene a la presión inicial. De esta manera, es posible usar la ecuación 5.3 para obtener el cambio de permeabilidad experimental:

$$\frac{k}{k_0} = e^{m(P-P_0)} \quad (5.4)$$

donde k_0 y P_0 corresponden precisamente a esta condición. Al inicio de cada prueba, ambos términos de presión tienen el mismo valor, por lo tanto, no existe cambio en la permeabilidad. Así, esta expresión se puede comparar con los modelos desarrollados en el capítulo 4 para el cambio de permeabilidad debido a la deformación elástica.

Tipo	Diámetro de poro (mm)	Ancho de la fractura (mm)	Estados del fluido en los poros	Casos
Poros supercapilar	>0.5	>0.25	Fluye libremente	Poros disueltos o cavernas y grandes
Poros capilar	0.5-0.0002	0.25-0.0001	No fluye libremente a menos que la caída de presión sea mayor a la presión de confinamiento	Poros en areniscas convencionales
Poros subcapilar	<0.0002	<0.0001	Difícilmente fluye a condiciones normales	Poros en lutitas convencionales

Tabla 5.2: Clasificación del tipo de poro según su tamaño. (GS, 1994)

Para el modelo heterogéneo 3.12 es necesario suponer un cierto tamaño de poro inicial. El tamaño del poro puede variar dependiendo del tipo de roca, como se muestra en la tabla 5.2.

Considerando el trabajo de Riab and Donaldson (2004), podemos suponer que $E = 9 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.32$ cuyos valores fueron obtenidos para pruebas horizontales en rocas de yacimiento similares.

En la figura 5.5, se muestra el cociente k/k_0 como función de la presión normalizada P/P_0 . Además de los datos experimentales, se muestran las predicciones de las ecuaciones 3.10, 3.11 y 3.12, ésta última para un radio de poro inicial de 0.0001 mm que corresponde a un poro subcapilar, de acuerdo a la tabla 5.2.

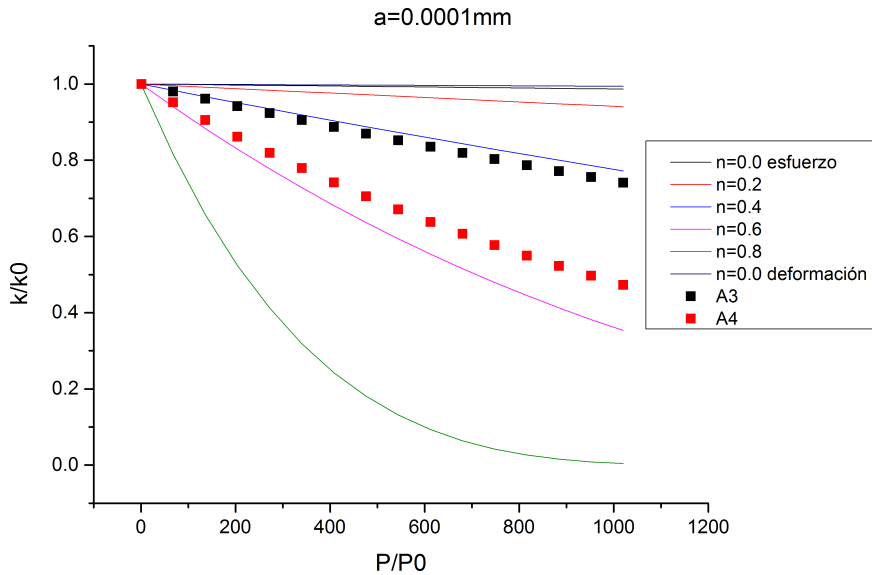


Figura 5.5: Cálculo del cambio en permeabilidad como función de la diferencia de presiones interna y externa, para los dos casos homogéneos (ecuaciones 3.10 y 3.11) y heterogéneo (ecuación 3.12) con $a=0.0001\text{mm}$ constante

Las ecuaciones 3.10 y 3.11, para el caso homogéneo en deformación plana y esfuerzo plano respectivamente, predicen que en efecto, hay una disminución de k/k_0 conforme aumenta la presión externa. Sin embargo, dicha disminución es menor que la observada experimentalmente. Sin importar el tamaño de poro inicial, en estos casos las curvas permanecerán iguales, debido a que el radio del poro es mucho menor que el radio total del bulto, y la resistencia a la deformación E tiene el mismo valor para toda posición radial. Ambos modelos tienen el mismo comportamiento, pero con una desviación mínima entre ellos debido a la transformación de constantes elásticas.

Así mismo, en esta figura el modelo heterogéneo de la ecuación 3.12 se representa en las curvas con n distinto de 0. En este caso, el valor del radio inicial de poro que se asigne sí influye en el resultado. Para el valor constante de 0.0001mm (un punto intermedio entre poro capilar y subcapilar, correspondiente a lutitas calcáreas), si n es 0.42, la curva teórica se ajusta satisfactoriamente a los datos experimentales para la muestra A3, así como en $n=0.55$ para la muestra A4. La comparación entre la predicción y los datos experimentales es razonablemente buena. Si el tamaño de poro es cercano al supuesto, entonces podríamos inferir que las rocas tienen un cierto grado de heterogeneidad, y este sería cercano a 0.5 para ambas.

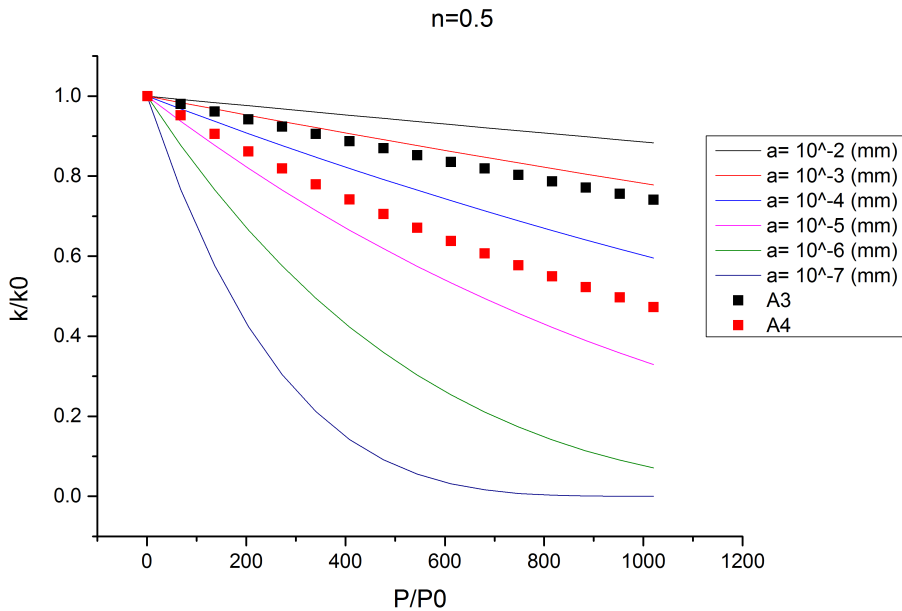


Figura 5.6: Cálculo de la diferencia de permeabilidad como función de la diferencia de presiones interna y externa para el caso heterogéneo de $n = 5$ (ecuación 3.12) y variando r_p .

De manera similar, la figura 5.6 muestra el comportamiento del cambio en la permeabilidad, para un valor de heterogeneidad fijo en $n=0.5$, variando el tamaño inicial del poro. Se tomó dicho valor de n fijo, con base en la figura anterior (con tamaño inicial de poro similar a las lutitas calcáreas), observando que el grado de heterogeneidad es cercano a 0.5 para ambas rocas.

Es notable que en el caso heterogéneo, mientras más pequeño sea a (radio inicial del poro), el cambio en la permeabilidad es más sensible a aumentos de presión externa. Esto se debe a la ley de potencia para el cambio en la resistencia a la deformación, presente en la ecuación 2.24 y la gráfica 2.2, donde a posiciones de r (radio resultante de la deformación elástica) menores a la pared interna del cilindro hueco, habrá una menor resistencia a la deformación, que a su vez tiende a ser nula conforme r se acerque a 0. Esto implica que, conforme más se comprima la circunferencia del poro, la resistencia a la deformación disminuirá.

Por lo tanto, si a es muy pequeño y cercano a 0, al ser muy sensible a la deformación es más probable que a cierto aumento de presión externa r alcance el valor mínimo de 0, y por lo tanto no exista permeabilidad, como sucede en la curva de la figura 5.6 para $a = 10^{-7}$ mm a partir del valor de $P/P_0 \simeq 800$ aproximadamente.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se llevó a cabo un estudio experimental-teórico sobre la disminución de la permeabilidad de rocas bajo presiones altas.

Se utilizó el permeámetro de rocas del IIM para realizar experimentos en rocas de yacimientos petroleros. Las dos rocas utilizadas para este estudio eran similares y fueron denominadas como lutitas calcáreas transversalmente isotrópicas, por su apariencia y propiedades físicas. Se demostró que dicho dispositivo es capaz de medir permeabilidad de manera controlada a altas presiones.

Adicionalmente se formuló un modelo teórico simple para predecir el cambio del tamaño de un poro en un medio elástico. Se consideró la posibilidad de que dicho medio tuviera un grado de heterogeneidad elástica, debido a la misma conformación de la roca y a la irregularidad en los espacios vacíos. Se aplicó el modelo teórico, en la comparación entre la ley de Darcy y el flujo de Poiseuille, que proporciona una ecuación para el cálculo de la permeabilidad en términos geométricos de radio del poro. Dicha aplicación dio lugar a una expresión para el cambio de permeabilidad en función de la diferencia de presión interna y externa de un poro capilar, en una roca sometida a aumentos de presión externa y considerando presión interna constante, como simplificación del comportamiento de la porosidad en el bulto.

Las pruebas experimentales mostraron que, aparentemente, la permeabilidad aumenta después de que la presión exterior sobrepasaba un valor alrededor de 15000 psi. Sin embargo, notamos que ese rango de presiones coincide con el límite mecánico a la compresión para ese tipo de rocas. Por lo tanto, podemos asumir que el aparente incremento de la permeabilidad, es en realidad una indicación de que el material ha fallado y se ha fracturado internamente. Por lo tanto, dado que la estructura interna cambió y se abrieron nuevos caminos para el movimiento del fluido, la permeabilidad es mayor.

Las mediciones experimentales se compararon de manera directa con las predicciones teóricas. Se consideraron valores para las constantes elásticas y radio del poro provenientes de la literatura, que fueran razonables con las propiedades de las rocas, para lograr una comparación correcta. Además, se supuso una presión constante en el interior del poro inicial.

El modelo homogéneo en resistencia elástica presentó un comportamiento correcto, pero lejano a los datos experimentales. En su deducción, considerando los poros como capilares, se encontró que el tamaño del poro, al ser siempre mucho más pequeño que el radio total del bulto, no influía en el cálculo del cambio en la permeabilidad.

Por otro lado, para el modelo heterogéneo, el tamaño inicial de poro es un parámetro importante, debido a que se propuso la heterogeneidad como el cambio en la resistencia elástica, dependiendo de la posición radial en que se evaluara el desplazamiento del poro. Esta propuesta es razonable debido a que se ha demostrado que la porosidad de una roca influye en las propiedades físicas de la roca, tales como sus constantes elásticas. Considerando que los valores del módulo de Young y la razón de Poisson son correctos, el modelo presentó dos grados de libertad por el tamaño de poro inicial y el grado de heterogeneidad, n .

Por ello, se supuso un valor del tamaño de poro correspondiente al tipo de roca que se usó. De esta manera, el ajuste del modelo con los datos experimentales fue bueno a un cierto valor de n , distinto para ambas rocas. También se construyó una segunda familia de curvas fijando un valor de n medio y cercano para ambas rocas, con la finalidad de estudiar el com-

portamiento del tamaño inicial del poro en el modelo heterogéneo, cuyo resultado mostró que mientras más pequeño sea el radio del poro inicial, mayor será su sensibilidad a la deformación, debido a aumentos de presión externa, y así mismo, mientras más pequeño sea el poro resultante de un aumento de presión, será más sensible a la deformación a un segundo aumento de presión.

Podemos concluir que el tipo de rocas que se estudiaron poseen un grado de heterogeneidad y tamaño de grano que conducen a valores del cambio en la permeabilidad esperados.

Este estudio puede dar lugar a trabajo a futuro. Este modelo bidimensional puede ser criticado siendo comparado con un modelo tridimensional más complejo, pero más completo y con menos simplificaciones. El permeámetro del IIM también permite controlar la temperatura dentro de la celda que contiene a la muestra, por lo que se puede hacer un estudio similar de termoelasticidad a altas temperaturas, individual o en conjunto con el modelo a altas presiones. También se cuenta con rocas sintéticas hechas de esferas de vidrio fundidas, para que sus resultados sean comparados con rocas de yacimiento, con el propósito de usar su facilidad de caracterización para predecir el comportamiento del flujo de fluidos a través de rocas reales de yacimiento. También es posible añadir una complicación usando fluidos multifásicos.

Apéndice A

Formulación de la teoría de elasticidad en coordenadas polares

La solución para deformación y esfuerzo planos, involucra la determinación de los desplazamientos, las deformaciones y los esfuerzos. La forma de las relaciones de deformación-desplazamiento en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & e_\theta &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); & e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right); \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right); & e_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Estas relaciones pueden ser desarrolladas usando leyes de transformación para deformación y desplazamiento. Usando notación vectorial, la ecuación de equilibrio para coordenadas curvilíneas, cilíndricas y esféricas es:

$$\nabla \cdot \sigma + F = 0 \quad \text{donde} \quad \sigma = \sigma_{ij} e_i e_j \quad (\text{A.2})$$

Para coordenadas cilíndricas, la matriz de esfuerzo está dada por:

APÉNDICE A. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE ELASTICIDAD
EN COORDENADAS POLARES

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

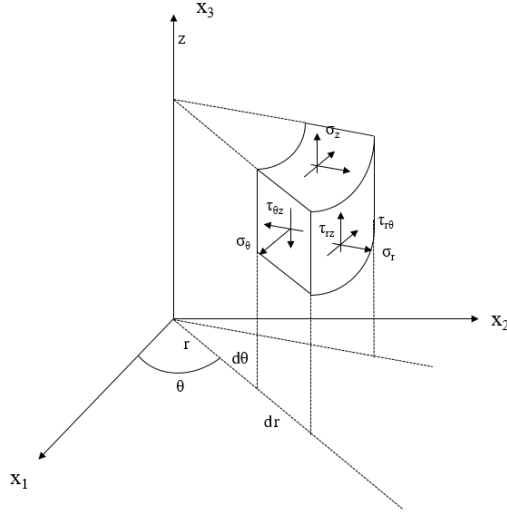


Figura A.1: Componentes de la matriz de esfuerzos.

El esfuerzo puede ser expresado en sus componentes de tracción como:

$$\sigma = e_r T_r + e_\theta T_\theta + e_z T_z \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$\begin{aligned} T_r &= \sigma_r e_r + \tau_{r\theta} e_\theta + \tau_{rz} e_z \\ T_\theta &= \tau_{r\theta} e_r + \sigma_\theta e_\theta + \tau_{\theta z} e_z \\ T_z &= \tau_{rz} e_r + \tau_{\theta z} e_\theta + \sigma_z e_z \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, la operación de divergencia en las ecuaciones de equilibrio es:

$$\nabla \cdot \sigma = \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

APÉNDICE A. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE ELASTICIDAD EN COORDENADAS POLARES

Las relaciones escalares llamadas ecuaciones de equilibrio para coordenadas cilíndricas son entonces:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + F_r &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + F_z &= 0
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

La forma básica de la ley de Hooke en sistema cartesiano no cambia para los sistemas ortogonales curvilíneos, por lo que la forma en coordenadas cilíndricas está dada por las relaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \lambda(e_r + e_\theta + e_z) + 2\mu e_r; & \tau_{r\theta} &= 2\mu e_{r\theta} \\
 \sigma_\theta &= \lambda(e_r + e_\theta + e_z) + 2\mu e_\theta; & \tau_{\theta z} &= 2\mu e_{\theta z} \\
 \sigma_z &= \lambda(e_r + e_\theta + e_z) + 2\mu e_z; & \tau_{rz} &= 2\mu e_{rz}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Estas relaciones son la ley de Hooke generalizada para sólidos isotrópicos y lineales. La constante elástica λ es llamada la constante de Lamé, y μ se refiere al módulo de corte o módulo de rigidez. Para el esfuerzo plano, la ley de Hooke se transforma con la relación:

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{A.9}$$

donde:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\nu)}{\lambda + \mu}; \quad y \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{A.10}$$

E y ν son las constantes elásticas llamadas módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente. Eliminando la dependencia al eje z en coordenadas cilíndricas, se obtienen los resultados apropiados para las ecuaciones bidimensionales de equilibrio A.7 en dirección r y θ , y las deformaciones A.8 y esfuerzos A.9 planos:

APÉNDICE A. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE ELASTICIDAD
EN COORDENADAS POLARES

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + F_r = 0; \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (\text{A.11})$$

Deformación plana:

$$\sigma_r = \lambda(e_r + e_\theta) + 2\mu e_r;$$

$$\sigma_\theta = \lambda(e_r + e_\theta) + 2\mu e_\theta;$$

$$\sigma_z = \lambda(e_r + e_\theta) = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta); \quad e_z = \frac{\nu}{E}(\sigma_r + \nu\sigma_\theta) = \frac{\nu}{1-\nu}(e_r + e_\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta};$$

Esfuerzo plano:

$$e_r = \frac{1}{E}(\sigma_r + \nu\sigma_\theta)$$

$$e_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta + \nu\sigma_r)$$

$$e_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{r\theta} \quad (\text{A.12})$$

Así como los esfuerzos para coordenadas polares bidimensionales usados anteriormente B.5.

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

Las relaciones en las ecuaciones de equilibrio A.7 en términos del desplazamiento A.1 hacen referencia a las ecuaciones de Navier y Lamé, que en su forma vectorial se expresan cómo:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + F = 0 \quad (\text{A.13})$$

Las cuáles en coordenadas cilíndricas, eliminando la dependencia en el eje z, se pueden expresar en términos de dos ecuaciones escalares: Para la deformación plana:

APÉNDICE A. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE ELASTICIDAD
EN COORDENADAS POLARES

	E	ν	κ	μ	λ
E, ν	E	ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
E, κ	E	$\frac{3\kappa - E}{6\kappa}$	κ	$\frac{3\kappa E}{9\kappa - E}$	$\frac{3\kappa(3\kappa - E)}{9\kappa - E}$
E, μ	E	$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$	μ	$\frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}$
E, λ	E	$\frac{2\lambda}{E + \lambda + R}$	$\frac{E + 3\lambda + R}{6}$	$\frac{E + 3\lambda + R}{4}$	λ
ν, κ	$3\kappa(1 - 2\nu)$	ν	κ	$\frac{3\kappa(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$\frac{3\kappa\nu}{1 + \nu}$
ν, μ	$2\mu(1 + \nu)$	ν	$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	μ	$\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$
ν, λ	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	ν	$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$	$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	λ
κ, μ	$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu}$	$\frac{3\kappa - 2\mu}{6\kappa + 2\mu}$	κ	μ	$\kappa - \frac{2}{3}\mu$
κ, λ	$\frac{9\kappa(\kappa - \lambda)}{3\kappa - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3\kappa - \lambda}$	κ	$\frac{3}{2}(\kappa - \lambda)$	λ
μ, λ	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\frac{3\lambda + 2\mu}{3}$	μ	λ
$R = \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}$					

Tabla A.1: Relaciones entre constantes elásticas
(Sadd, 2014, p. 89)

$$\mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r = 0$$

$$\mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_\theta = 0 \quad (\text{A.14})$$

Para el esfuerzo plano se usan las relaciones entre las constantes de elasticidad A.10, y se obtiene:

$$\mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r = 0$$

APÉNDICE A. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA DE ELASTICIDAD
EN COORDENADAS POLARES

$$\mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_\theta = 0 \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Solución general de Michell para sólidos elásticos en coordenadas cilíndricas

Muchos problemas bidimensionales requieren el uso de coordenadas polares. Empleando el enfoque de la función de esfuerzo de Airy, la ecuación biarmónica gobernante está dada por:

$$\nabla^4 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]^2 \phi = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde el operador biarmónico que se encuentra operando a la función de esfuerzo de Airy arbitraria es:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 \quad (\text{B.2})$$

y el Laplaciano bidimensional es:

$$\nabla^2 = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{B.3})$$

Desarrollando la derivada parcial al Laplaciano bidimensional, y operándolo en la función de esfuerzo de Airy (escalar) se obtiene:

APÉNDICE B. SOLUCIÓN GENERAL DE MICHELL PARA
SÓLIDOS ELÁSTICOS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \phi = 0 \quad (\text{B.4})$$

En donde los esfuerzos para coordenadas polares bidimensionales, son los elementos de la operación:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B.5})$$

Usando las relaciones anteriores en la ecuación B.1 se obtiene la forma:

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (\text{B.6})$$

Esto muestra que los esfuerzos estan relacionados con el Laplaciano de la función de esfuerzo de Airy. Regresando a la ecuación B.1 en su forma extendida:

$$\nabla^4 \phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \phi = 0 \quad (\text{B.7})$$

Y realizando el producto de los Laplacianos se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi = & \left[\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Cada renglón de esta ecuación representa los productos de un elemento del Laplaciano. Asumiendo la forma separable de la función de esfuerzo de Airy:

$$\phi = e^{b\theta} f(r) \quad (\text{B.9})$$

APÉNDICE B. SOLUCIÓN GENERAL DE MICHELL PARA
SÓLIDOS ELÁSTICOS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

donde b es un parámetro a ser determinado, desarrollando cada elemento de la suma de la ecuación B.7 y aplicando el operador biarmónico en la función de esfuerzo de Airy, se obtiene:

$$f_{(r)}'''' + \frac{2}{r}f_{(r)}''' - \frac{(1-2b)}{r^2}f_{(r)}'' + \frac{(1-2b)}{r^3}f_{(r)}' + \frac{b^2(4+b^2)}{r^4}f_{(r)} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Que es la ecuación diferencial con coeficientes constantes. Usando el cambio de variable:

$$r = e^\xi; \quad \xi = \ln(r); \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r}; \quad dr = r d\xi$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{df}{d\xi} = e^{-\xi} \frac{df}{d\xi} \quad (\text{B.11})$$

Se obtiene la ecuación diferencial con coeficientes constantes en términos de la nueva variable:

$$f_{(\xi)}'''' - 4f_{(\xi)}''' + (4+2b^2)f_{(\xi)}'' - 4b^2f_{(\xi)}' + b^2(4+b^2)f_{(\xi)} = 0 \quad (\text{B.12})$$

La solución a la ecuación se obtiene empleando el esquema habitual:

$$f_{(\xi)} = e^{a\xi} \quad (\text{B.13})$$

generando la ecuación característica:

$$a^4 - 4a^3 + (4+2b^2)a^2 - 4b^2a + b^2(4+b^2) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - 4a + 4 + b^2) = 0 \quad (\text{B.14})$$

Las raíces de la ecuación son:

APÉNDICE B. SOLUCIÓN GENERAL DE MICHELL PARA
SÓLIDOS ELÁSTICOS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$a = \pm ib, \quad a = 2 \pm ib; \quad o \quad b = \pm ib, \quad b = \pm i(a - 2) \quad (\text{B.15})$$

En B.8 consideramos únicamente soluciones periódicas en θ siendo obtenidas eligiendo la raíz $b = in$, donde “n” es un integrador, por lo que a es a su vez un integrador.

Para valores particulares de n existen raíces repetidas, y estas requieren consideraciones especiales.

Detalles de la solución completa están dados por Little (1973), pero debido a que el desarrollo original es atribuido a Michell (1899), la forma final, usualmente llamada la solución de Michell, es:

$$\begin{aligned} \phi = & \left[a_0 + a_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r \right. \\ & + \left(a_4 + a_5 \ln r + a_6 r^2 + a_7 r^2 \ln r \right) \theta \\ & + \left(a_{11} r + a_{12} r \ln r + \frac{a_{13}}{r} + a_{14} r^3 + a_{15} r \theta + a_{16} r \theta \ln r \right) \cos \theta \\ & + \left(b_{11} r + b_{12} r \ln r + \frac{b_{13}}{r} + b_{14} r^3 + b_{15} r \theta + b_{16} r \theta \ln r \right) \sin \theta \quad (\text{B.16}) \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_{n1} + a_{n2} r^{2+n} + a_{n3} r^{-n} + a_{n4} r^{2-n} \right) \cos \theta \\ & \left. \sum_{n=2}^{\infty} \left(b_{n1} + b_{n2} r^{2+n} + b_{n3} r^{-n} + b_{n4} r^{2-n} \right) \sin \theta \right] = 0 \end{aligned}$$

donde a y b son constantes a ser determinadas. Esta solución está restringida al caso periódico, lo que permite el uso del método de Fourier para obtener condiciones a la frontera generales.

B.1. Solución radialmente simétrica

Para este caso asumimos que las cantidades de campo dependen únicamente de la coordenada radial, por lo que todo término con θ es eliminado, y los esfuerzos B.3 y el Laplaciano B.5 se reducen a:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}; \quad \nabla^2 = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{B.17})$$

Entonces la ecuación biarmónica de esfuerzo B.7 resulta en:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= \nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \nabla^4 \phi &= \left[\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] \phi = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Al asumir la forma separable de la función de esfuerzo de Airy como:

$$\phi = e^{b\theta} f(r)$$

Se elimina todo término que tenga la constante b asociada, en la ecuación B.10. Entonces la ecuación diferencial con coeficientes constantes se reduce a:

$$f_{(r)}'''' + \frac{2}{r} f_{(r)}''' - \frac{1}{r^2} f_{(r)}'' + \frac{1}{r^3} f_{(r)}' \quad (\text{B.19})$$

Debido a las consideraciones anteriores, de la misma manera la solución de Michell B.16 se reduce a:

$$\phi = a_0 + a_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r \quad (\text{B.20})$$

Los esfuerzos para este caso son:

APÉNDICE B. SOLUCIÓN GENERAL DE MICHELL PARA
SÓLIDOS ELÁSTICOS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 2a_3 r^2 \ln r + \frac{a_1}{r^2} + a_3 + 2a_2 \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2a_3 r^2 \ln r - \frac{a_1}{r^2} + 3a_3 + 2a_2\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

Los desplazamientos en las direcciones r y θ son obtenidos a partir de métodos usuales de integración de las relaciones de deformación-desplazamiento A.1, para el esfuerzo plano A.12 y usando los esfuerzos resultantes B.21:

$$\begin{aligned}e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r + \nu\sigma_\theta); & e_\theta &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{E}(\sigma_\theta + \nu\sigma_r) \\ u_r &= \frac{1}{E} \left[2(1-\nu)a_3 r \ln r - \frac{(1+\nu)}{r} a_1 - (1+\nu)a_3 r + 2a_2(1-\nu)r \right] + C_1 \\ u_\theta &= \frac{4r}{E} a_3 - \int C_1 d\theta + C_2\end{aligned}\quad (\text{B.22})$$

Las constantes C_1 y C_2 son constantes arbitrarias asociadas con los términos del movimiento del cuerpo rígido, que toman valor de:

$$C_1 = A \sin \theta + B \cos \theta; \quad C_2 = Cr \quad (\text{B.23})$$

Determinando de esta manera las constantes resultantes de la integral, los desplazamientos en las direcciones r y θ son:

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{1}{E} \left[2(1-\nu)a_3 r \ln r - \frac{(1+\nu)}{r} a_1 - (1+\nu)a_3 r + 2a_2(1-\nu)r \right] + A \sin \theta + B \cos \theta; \\ u_\theta &= \frac{4r}{E} a_3 + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr;\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

APÉNDICE B. SOLUCIÓN GENERAL DE MICHELL PARA SÓLIDOS ELÁSTICOS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Estos resultados se pueden obtener para la deformación plana únicamente cambiando las constantes elásticas con las relaciones A.10 Si el cuerpo a estudiar incluye el origen, las constantes a_1 y a_3 toman valor de cero para esfuerzos que permanezcan finitos, y aquellos en los que el campo de esfuerzo pudiera ser constante. Además, es necesario notar que el término a_3 en la relación tangencial de desplazamiento conduce a un comportamiento con resultados múltiples, si el dominio geométrico es tal que el origen pueda ser rodeado por un contorno que encierre el cuerpo completo. Es necesario puntualizar que no todos los campos de esfuerzo axisimétricos vienen de la función de esfuerzo de Airy. Revisando la forma general de la función de esfuerzo de Airy, el término $a_4\theta$ genera el siguiente campo de esfuerzo:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \frac{a_4}{r}, \quad (\text{B.25})$$

Que también es axisimétrico. Esta solución puede ser usada para resolver problemas con campos cortantes que produzcan desplazamientos tangenciales que sean independientes de θ . Ha sido mencionado anteriormente que para regiones con conexiones múltiples, las ecuaciones de compatibilidad no garantizan desplazamientos con un solo valor. Por eso la solución para el desplazamiento obtenida directamente de las ecuaciones de Navier A.14, sin fuerzas de cuerpo y para el caso axisimétrico, se reducen a:

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

La solución de esta ecuación está dada por:

$$u_r = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \quad (\text{B.27})$$

Esta no es la misma solución que la B.24, debido a que para este caso se asumió a priori que $u_\theta = 0$. Además de que no contiene los términos logarítmicos dados en las relaciones B.21, los cuáles no son consistentes por dar lugar a múltiples funciones.

Apéndice C

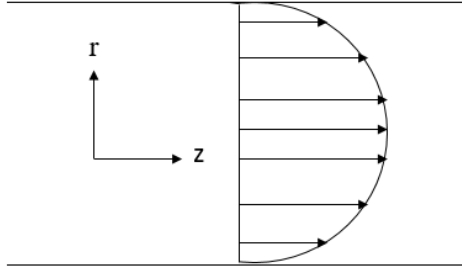
Flujo en un tubo

La solución exacta para un flujo en una tubería circular se obtiene a partir de la ecuación de conservación de momentum de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \underline{f} - \nabla P + \mu_f \nabla^2 \underline{v} \quad (\text{C.1})$$

Desarrollando la ecuación para las direcciones r , θ y z respectivamente:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu_f \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu_f \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$


 Figura C.1: Elemento del flujo laminar en dirección z .

Considerando flujo laminar en dirección z y en estado estacionario como se muestra en la figura C.1, la ecuación de Navier-Stokes para coordenadas cilíndricas resulta en:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g \cos \beta = 0 \quad (\text{C.3})$$

Reordenando los términos de la ecuación:

$$-\frac{d}{dz} \left(P - \rho g z \cos \beta \right) + \mu_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (\text{C.4})$$

Dentro de la derivada direccional en z , el primer término de presión hace referencia al flujo pulsátil, y el segundo término para una constante no homogénea conservativa, con respecto a la caída del fluido con una inclinación de ángulo β . La segunda parte de la ecuación que se encuentra sumando al término anterior es una constante que puede ser expresada como κ_0 .

Si los términos dentro de la derivada se agrupan en un término de presión p , la ecuación C.4 queda expresada cómo:

$$\frac{d}{dz} p = \mu_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \kappa_0 \quad (\text{C.5})$$

E integrando con respecto a z :

$$p = \kappa_0 z + \kappa_1 \quad (\text{C.6})$$

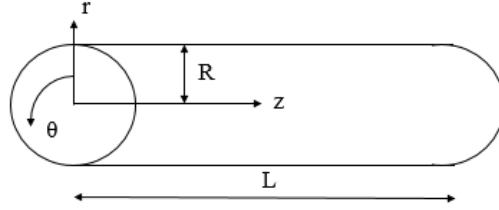


Figura C.2: Elemento del flujo laminar en dirección z .

Las constantes se determinan usando las condiciones a la frontera obtenidas con respecto a la figura C.2 para este caso:

$$\begin{aligned} z = 0; & \quad p = p_0 \\ z = L_t; & \quad p = p_L \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Siendo las constantes κ_1 y κ_0 :

$$\kappa_1 = p_0; \quad \kappa_0 = \frac{p_L - p_0}{L_t} \quad (\text{C.8})$$

Regresando a la ecuación C.5 con κ_0 :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{p_L - p_0}{\mu_f L_t} r \quad (\text{C.9})$$

E integrando, se obtiene la velocidad en dirección z :

$$v_z = \frac{p_L - p_0}{4\mu_f L_t} r^2 + \kappa_2 \ln r + \kappa_3 \quad (\text{C.10})$$

Si se observa el perfil de velocidades en dirección z de la figura C.1, cuando $r=0$, es decir, en el centro del tubo, v_z toma valor de una velocidad finita máxima.

$$r = 0; \quad v_z = \bar{v}_z; \quad \therefore \bar{v}_z = +\kappa_2 \ln 0 + \kappa_3; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \kappa_2 \ln r \quad (\text{C.11})$$

Debido a que la velocidad tiene un valor finito, y el límite expresado anteriormente tiende a ser $-\infty$, el término logarítmico físicamente no existe en este límite, entonces κ_2 debe ser 0.

Además, si se observa nuevamente el perfil de velocidades en dirección z de la figura C.1, la condición de no deslizamiento dice que cuando $r=R$, es decir, en el extremo superior del tubo, no existe perfil de velocidad en z .

$$\kappa_3 = -\left(\frac{p_L - p_0}{4\mu_f L_t}\right)R^2 \quad (\text{C.12})$$

De tal manera que el valor de velocidad finita máxima en z es:

$$\bar{v}_z = -\left(\frac{p_L - p_0}{4\mu_f L_t}\right)R^2 \quad (\text{C.13})$$

Evaluando las constantes de la ecuación C.10 y haciendo la siguiente sustitución se encuentra:

$$\begin{aligned} \Delta P &= p_0 - p_L \\ v_z &= \frac{\Delta P R^2}{4\mu_f L_t} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

El flujo volumétrico está definido cómo:

$$q = \int_S \underline{v} \cdot \underline{ndS} = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\Delta P R^2}{4\mu_f L_t} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right] r dr d\theta \quad (\text{C.15})$$

Aplicando el cambio de variable:

$$\xi = \frac{r}{R} : \quad r = \xi R; \quad dr = R d\xi \quad (C.16)$$

Entonces la ecuación C.15 se expresa cómo:

$$q = \frac{2\pi\Delta PR^2}{4\mu_f L_t} \int_0^1 [1 - \xi^2] \xi R R d\xi = \frac{\pi\Delta PR^4}{8\mu_f L_t} \quad (C.17)$$

Si se obtiene la media aritmética ponderada de la velocidad en dirección z C.18, se consigue el mismo resultado de C.17:

$$\hat{v}_z = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{\frac{\pi\Delta PR^4}{8\mu_f L}}{\pi R^2} = \frac{Q}{A_t} = \frac{\Delta PR^2}{8\mu_f L} \quad (C.18)$$

Estas dos últimas ecuaciones son la forma general de la Ley de Hagen-Poiseuille para un flujo viscoso a través de tubos capilares.

Bibliografía

- Bauk, S. (2008). Properties of liquids. *University Sains Malasya*, (Module 2):42.
- Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Courier Corporation, 764 pages.
- Bird, R.B., S. W. and Lightfoot, E. (1960). *Transport Phenomena*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, United States.
- Blatt and Tracy (1996). *Petrology*. W.H. Freeman, New York.
- Brown, S. (1987). Fluid flow through rock joints The Effect of Surface Roughness. *Journal of Geophysical Research*, 92(10.1029):1337–1347.
- Carlson, D.H. Plummer, C. and Hammersley (2008). *Physical geology, earth revealed*. McGraw-Hill, New York.
- Chilingarian, G. V. (1963). Relationship between porosity, permeability and grain size distribution of sands and sandstones. *Elsevier Science*, 1(1):71–75.
- Douglas E. Miller, R. P. and Boitnott, G. (2012). Compressive strength and elastic properties of a transversely isotropic calcareous mudstone. *Journal of Geophysical Prospecting*, 1(10.1111):1–29.
- Dunham, R. J. (1962). Classification of carbonate rocks according to depositional texture. *Symposium: Classification of Carbonate*, 1(A038):108–121.

- Ellison and P., S. (2008). *Origin of Porosity and Permeability*. University of Texas, Austin, Austin, TC, 1958.
- GS, H. (1994). *Reservoir Physics*. Petroleum Industry Press, Beijing.
- Hu, X. and Huang, S. (2016). Physical properties of reservoir rocks. *Springer Mineralogy*, 1(2):7–164.
- McKee and Bumb (1988). Stress-dependent permeability and porosity of coal and other geologic formations. *Society of Petroleum Engineers*, 1(1):1631–1640.
- Mibei, G. (2014). Introduction to types and clasification of rocks. *Geothermal Development Company*, 2-24(17700-20100):42.
- Riab, D. and Donaldson, E. C. (2004). *Petrophysics Segunda Edición*. Elsevier Inc., 200 Wheeler Road, Burlington.
- Richardson, S. M. (2011). Poiseuille flow. *Thermopedia*, P(10.1615):1.
- Sadd, M. H. (2014). *Elasticity Theory Applications and Numerics*. Elsevier Inc., 225 Wyman Street, Waltham, Ma 02451, USA.
- Youngdahl, C. K. (1966). Three dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body. *Journal of Applied Mechanics*, 33(4):855–865.