



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ANÁLISIS DE COMPUESTOS PERIÓDICOS CON COMPONENTES AUXÉTICAS
USANDO LA HOMOGENEIZACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MIRELLA RAMIREZ RAMIREZ

DIRECTOR DE LA TESIS: FEDERICO JUAN SABINA CÍSCAR
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. ARTURO OLVERA CHÁVEZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS

DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO
FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO, CDMX 08 DE AGOSTO DEL 2017.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a mis padres Arcelia y Héctor que siempre han apoyado mis decisiones. A mis hermanas, Jasmyn y Cristina, quienes siempre están cuando las necesito. A mis sobrinos, que alegran los días malos con sus ocurrencias.

Agradecimientos

Gracias a la ayuda de varias personas he podido llegar a este punto de mi vida. Agradezco especialmente al Dr. Federico Sabina por compartirme sus enseñanzas, mismas que no se limitan al ámbito académico. Por toda su paciencia y comprensión que incentivaron mi pasión por el trabajo. Para agradecerle haré uso de uno de los idiomas más bellos, que en este caso sirve para expresar todo mi agradecimiento: *Tlazocamati miac Temachtianitzin*.

Quiero agradecer también al Dr. Arturo Olvera Chávez y al Dr. Faustino Sánchez Garduño por sus consejos y aportaciones durante todo el proceso de mi doctorado.

A los doctores Raúl Guinovart Díaz, Julián Bravo Castellero, Reinaldo Rodríguez Ramos y Gerardo Nava Gómez por todo su apoyo.

A las secretarias del MyM del IIMAS, Alma Rosa Rodríguez y Lourdes Romero. A Ramiro Chávez Tovar, Ana Pérez Arteaga quienes me salvaron en más de una ocasión de mis problemas técnicos.

Al personal del Posgrado por toda la ayuda y orientación prestada en cada uno de los trámites realizados.

Amis amigos, quienes me apoyaron de una u otra manera, ya sea con mi trabajo de tesis o con su compañía en momentos difíciles.

Finalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por otorgarme la beca de doctorado con la cual fue posible realizar este trabajo.

Índice general

Lista de figuras	xi
Lista de tablas	xiii
1. Introducción	1
2. Termoelasticidad lineal	9
2.1. Relaciones y restricciones	12
2.1.1. Material con simetría isótropa	12
2.1.2. Material con simetría cúbica	13
2.1.3. Material con simetría transversalmente isótropa	15
2.1.4. Material con simetría tetragonal	17
3. Descripción de los problemas	19
3.1. Compuestos laminados	20
3.2. Reforzado de fibras	21
4. Obtención de propiedades efectivas	23
4.1. Método de Backus	23
4.2. Método de homogeneización asintótica	26
4.3. Solución de los problemas locales	30
5. Compuestos laminados	45
5.1. Constituyentes isótropos	46
5.1.1. Comparación con elemento finito	49
5.1.2. Comparación con Chirima et al. (2009) EF	51
5.1.3. Bilaminados	63
5.1.4. Corrección a las gráficas de Lim (2009)	65
5.1.5. Bilaminados auxético-auxético y convencional-convencional	68
5.1.6. Indentación de flexibilidad	74

5.2. Constituyentes con simetría cúbica	78
5.3. Constituyentes con simetría transversalmente isótropa	86
6. Compuestos reforzados de fibras	93
6.1. Compuesto elástico	94
6.2. Compuesto termoelástico	103
7. Laminado de fluidos viscosos	111
7.1. Formulación del problema	112
7.2. Método de homogeneización asintótica	113
7.2.1. Caso localmente resonante	119
7.2.2. Observaciones	124
8. Conclusiones	127
A. Condiciones de positividad de C y S	135
B. Ventanas de auxeticidad	139

Índice de figuras

3.1. Celda unidad compuesta de tres láminas cuya fracción volumétrica se denota por V_1, V_2 y V_3 ; sus respectivos tensores de flexibilidad son $S^{(1)}, S^{(2)}$ y $S^{(3)}$. La dirección del laminado es x_3 .	20
3.2. a) Sección transversal del compuesto reforzado de fibras en el cual la celda es un paralelogramo. b) La celda unidad que se repite periódicamente. Paralelogramo de base 1, lado ω_2 y ángulo ϕ . Contiene dos regiones $S_1 \cup S_2$. La fibra ocupa la región S_2 , un círculo de radio R . S_1 es el complemento de S_2 ocupado por la matriz y Γ la interfaz común. El tensor de rigidez de la matriz se define como $C^{(1)}$ y el esfuerzo térmico como $\beta^{(1)}$; los respectivos tensores de la fibra son $C^{(2)}$ y $\beta^{(2)}$, respectivamente.	21
5.1. Laminado de Kocer et al. (2009). El signo $-$ indica que el constituyente es auxético y el signo $+$ que su cociente de Poisson es positivo.	50
5.2. (a) Gráfica de E_{out}, E_{in} como función de la fracción volumétrica, V_2 . Los datos del bilaminado son $E_1 = E_2 = 1, \nu_1 = -0.9$ y $\nu_2 = 0.4$. La línea continua y discontinua son el resultado de aplicar la fórmula (5.13a) y (5.14a), respectivamente. Los datos de FE de E_{out} son tomados de Kocer et al. (2009) y aparecen con estrellas o círculos abiertos. El orden de la sucesión con respecto a los cocientes de Poisson $+, -, +, \dots$ es mostrado con estrellas. Los círculos corresponden al orden $-, +, - \dots$. La cota superior de Hill, E_V , aparece con una línea continua con puntos y la cota inferior, E_R , una línea punteada. (b) Son las gráficas de ν_{out} , línea continua y ν_{in} , línea discontinua, contra V_2 . Son el resultado de aplicar las fórmula (5.15a) y (5.16a).	51
5.3. Configuraciones estudiadas por Chirima et al. (2009) (a) Configuración de grosor constante (CT). Cada capa tiene un grosor constante de 0.2 mm mientras que el del adhesivo es uniforme pero variable. El grosor total del laminado es de 1.0 mm. (b) Configuración de grosor progresivo (PT). Cada capa tiene un grosor constante de 0.2 mm para la capa y 0.05 mm para el adhesivo. En ambas configuraciones la capa superior e inferior son adhesivos independientemente del número de capas.	52

5.4. a) Condiciones de los nodos usados en el modelo de EF desarrollado en ANSYS para el problem local $_{22}L$. Los desplazamientos u_1 y u_3 se dan a lo largo de las líneas indicadas. b) Análogo a a) para $_{33}L$. c) Para el problema local $_{23}L$, se obtiene un estado de corte al imponer una fuerza uniforme como se indica. Para evitar cualquier movimiento rígido, los desplazamientos u_1 y u_3 son impuestos como cero en la línea inferior del modelo de EF.	54
5.5. Modelo 2-D de elemento finito para la configuración de interfaz constante en ANSYS 12 con los detalles de la malla. Las dimensiones del laminado es de 1×1 . Las capas de adhesivo están coloreadas.	55
5.6. Gráficas de E_{out} y E_{in} en MPa contra la fracción volumétrica de la capa V_{film} . Las curvas son graficadas considerando LMA y AF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.	57
5.7. Análogo a la Fig. 5.6 corresponden al caso HMA-AF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.	58
5.8. Análogo a la Fig. 5.6 corresponden al caso LMA-CF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.	59
5.9. Análogo a la Fig. 5.6. Corresponden al caso HMA-CF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.	60
5.10. Gráfica de μ_{out} como función de V_{film} para los laminados formados por los constituyentes HMA-AF y HMA-CF.	60
5.11. Gráfica de μ_{out} como función de V_{film} para los laminados formados por los constituyentes LMA-AF y LMA-CF.	61
5.12. Gráficas de v_{out} y v_{in} como función de V_{film} de LMA-AF y HMA-AF.	61
5.13. Análogo a la 5.12 pero para CF.	62
5.14. Gráfica de E_{out} como función de los cocientes de Poisson, $-0.5 < \nu_1, \nu_2 < 0.5$, $E_1 = E_2 = 1$. Esta figura corrige la Fig. 2 de Lim (2009).	66
5.15. Tomada de la Figura 3 de Lim (2009). Comparar con Fig. 5.16 que muestra las curvas correctas.	67

5.16. Módulo de Young normalizado E_{out} como función de V_2 para el bilaminado estudiado por Lim (2009), es decir, con $v_1 = -v_2 = \sqrt{0.1}$ (círculos) y $-v_1 = v_2 = \sqrt{0.1}$ (círculos llenos); también se grafican la regla directa de mezcla (línea continua) y la regla inversa de mezcla, (línea discontinua). Estas gráficas corrigen la de Lim (2009) véase Fig. 5.15	67
5.17. (a) Módulos de Young relativos efectivos, E_{in}, E_{out} como función de V_2 correspondientes a un laminado con datos $E_1 = 25, v_1 = 0.3, v_2 = -0.4$, (b) como en (a) pero $E_1 = 30, v_1 = -0.6, v_2 = 0.4$	69
5.18. (a) Gráficas de E_{out} y E_{in} relativos como función de V_2 para el laminado PP $E_1 = 1.2, E_2 = 1, v_1 = 0.1$ y $v_2 = 0.49$. (b) Gráficas correspondientes a v_{out} y v_{in} contra V_2	70
5.19. Constantes elásticas C_{11}, C_{33}, C_{12} y C_{31} como función de V_2 correspondiente al laminado AA.	70
5.20. Análogo a la Fig. 5.18 pero para el bilaminado AA.	71
5.21. Análogo a la Fig. 5.19 pero para el bilaminado AA con datos $E_1 = 1.2, E_2 = 1, v_1 = 0.2$ y $v_2 = -0.9$	72
5.22. (a) Gráficas de E_{in} contra V_2 para un laminado PA con $v_1 = -0.8, v_2 = 0.45, E_1 = 1.2$ (línea continua con puntos), $E_1 = 1.8$ (línea discontinua) y $E_1 = 3$ (línea continua). (b)-(d): Gráficas correspondientes a E_{out}, v_{in} y v_{out} , versus V_2	73
5.23. (a) Constante elástica C_{11} vs V_2 de un bilaminado PA con $E_1 = 1.2, v_1 = -0.8, v_2 = 0.45$ mostrado con línea continua con puntos, la línea discontinua corresponde a $E_1 .8$ y la línea continua a $E_1 = 3$. (b)-(d) Análogo a (a) pero para C_{33}, C_{12} y C_{13} vs V_2 respectivamente.	73
5.24. Bilaminado con constituyentes isótropos con un indentador cilíndrico de radio a al que se le aplica una carga P	74
5.25. Gráficas de la indentación de flexibilidad δ/P en nm/N contra el cociente del grosor entre las láminas negativas y positivas $V_2/(1 - V_2)$. La línea continua corresponde al caso en el que el indentador y el medio están en contacto sin fricción, la línea discontinua corresponde al caso cuando están en contacto soldado. Los cuadros corresponden a los cálculos hechos mediante EF.	76
5.26. (a) Lámina de simetría cúbica con ejes de simetría $x_1 x_2 x_3$. (b) Lámina de simetría cúbica con ejes de simetría $x'_1 x'_2 x'_3$. Entre los ejes $x_1 x_2$ y los ejes $Ox'_1 x'_2$ hay un ángulo θ . (c) Bilaminado formado por las láminas (a) y (b).	78
5.27. Gráfica de E_1 en GPa como función de θ y V_2 de un bilaminado en el cual las láminas no tienen los mismos ejes de simetría. Los constituyentes son una lámina de Plata y una de Teluro de estaño.	81

5.28. E_3 en GPa contra V_2 y θ del bilaminado compuesto por una lámina de Plata y una de Teluro de estaño.	82
5.29. Gráfica de ν_{12} como función de V_2 y θ para un bilaminado que tiene como constituyentes Plata y Teluro de estaño.	83
5.30. Gráfica de ν_{31} como función de V_2 y θ para un bilaminado que tiene como constituyentes Plata y Teluro de estaño.	84
5.31. Gráfica de E_1 en GPa como función de θ para diferentes fracciones volumétricas. Nótese para $V_2 = 0.70$ que hay una VAX.	84
5.32. Gráfica de ν_{12} como función del ángulo de rotación θ para diferentes fracciones volumétricas, V_2	85
5.33. Gráficas de las constante ingenieriles como función de V_2 de un bilaminado formado por Teluro de estaño y Plata.	85
5.34. Bilaminado con constituyentes transversalmente isótropos cuyo eje de simetría es el eje x_1	86
5.35. Gráficas de las constantes ingenieriles de un bilaminado con constituyentes Zinc y Titanio. (a) E_1 vs V_2 , (b) E_2, E_3 vs V_2 , (c) ν_{23} vs V_2 , (d) ν_{21}, ν_{31} vs V_2	89
5.36. Las constantes elásticas del bilaminado con constituyentes Zinc y Titanio.	90
5.37. Análogo a Fig. 5.35 para los constituyentes Hidroxiapatita y Aluminato de plata.	91
5.38. Las gráficas de las constantes elásticas de un bilaminado con constituyentes Hidroxiapatita y Aluminato de plata.	91
6.1. Gráficas de (a) E_{in} vs V_2 , (b) E_{out} vs V_2 , (c) ν_{in} vs V_2 y (d) ν_{out} vs V_2 de un compuesto en arreglo cuadrado (líneas con cuadros) y uno en arreglo hexagonal (líneas con estrellas) cuyos constituyentes tienen las propiedades $E_1 = 1.2$, $-\nu_1 = \nu_2 = 0.333$	95
6.2. Gráficas de las constantes elásticas efectivas (a) C_{11} , (b) C_{33} , (c) C_{12} y (d) C_{23} como función de V_2 de un compuesto reforzado de fibras con arreglo cuadrado (línea con cuadros) y arreglo hexagonal (línea con estrellas) donde las propiedades de los constituyentes son	96
6.3. Análogo a Fig. 6.1 con datos $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -\nu_2 = 0.3$	96
6.4. Análogo a Fig. 6.2 con datos $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -\nu_2 = 0.3$	97
6.5. Análogo a Fig. 6.1 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.9$ y $\nu_2 = -0.2$	99
6.6. Análogo a Fig. 6.1 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ y $\nu_2 = 0.3$	100
6.7. Análogo a Fig. 6.2 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ y $\nu_2 = 0.3$	101
6.8. E_{out} como función de V_2 para el compuesto cuyos constituyentes tienen las propiedades $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ y $\nu_2 = 0.3$ en arreglo paralelográfico con $\phi = 60^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 90^\circ$	101
6.9. Análogo a la Fig. 6.8 para E_{in}	102

6.10. Gráficas de los CET efectivos. Comparación de los coeficientes térmicos efectivos normalizados versus V_2 de un CRF en arreglo hexagonal para los compuestos de Lim ($--/+ +$) y $(+/- - +)$. En el primer caso se grafica α_{in} vs V_2 (línea discontinua con puntos) y α_{out} vs V_2 (línea continua con puntos). En el segundo caso α_{in} vs V_2 (línea discontinua) y α_{out} vs V_2 (línea continua).	104
6.11. Constantes ingenieriles: (a) E_{in}, E_{out} vs V_2 (líneas discontinua y continua, respectivamente), (b) v_{in}, v_{out} vs V_2 (líneas discontinua y continua, respectivamente), de un compuesto con propiedades $E_1=1, v_1=-v_2=0.333$ y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.	105
6.12. Coeficientes de expansión térmica efectivos: α_{in} vs V_2 (línea discontinua) y α_{out} vs V_2 (línea continua) de un compuesto con datos $E_1 = 1, v_1 = 0.45, v_2 = -0.8$, y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.	106
6.13. Análogo a Fig. 6.11 con datos $E_1, v_1 = 0.45, v_2 = -0.8$ y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.	106
6.14. Análogo a Fig. 6.12 con datos $E_1 = 1, v_1 = -0.8, v_2 = 0.45$ y $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$.	107
6.15. Análogo a Fig. 6.11 con datos $E_1 = 1, v_1 = -0.8, v_2 = 0.45$ y $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$.	108
6.16. Análogo Fig. 6.12 con datos $E_1 = 1, v_1 = -0.8, v_2 = -0.2, -\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.	109
6.17. Análogo a la Fig. 6.11 con datos $E_1 = 1, v_1 = -0.8, v_2 = -0.2, -\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.	109
7.1. Laminado consistente de dos fluidos viscosos. Un fluido viscoso, que ocupa el dominio D_1 , tiene densidad de masa ρ_1 , módulo de compresibilidad κ_1 , viscosidad volumétrica K_1 y viscosidad cortante η_1 y la lámina tiene un grosor h_1 . El otro fluido viscoso tiene propiedades análogas con subíndice 2. La celda es periódica de período $h_1 + h_2$.	112

Índice de tablas

5.1. Propiedades de los materiales isótropos y las claves usadas en el modelo.	52
5.2. Propiedades de los materiales con simetría cúbica usados como constituyentes. .	80
5.3. Propiedades de los materiales con simetría transversalmente isótropa.	88

Capítulo 1

Introducción

Un material compuesto es aquel que está hecho de dos o más materiales con características diferentes, es decir, es un material heterogéneo. A los materiales que lo forman se les llama *constituyentes* o *fases*. Si el material está constituido por dos fases, una de ellas es llamada *matriz* y la otra *refuerzo*. Las propiedades del compuesto visto como material homogéneo son llamadas *propiedades efectivas*. Éstas dependen de las propiedades de los materiales que lo constituyen y la geometría del compuesto. En la naturaleza podemos encontrar compuestos, la madera es un ejemplo de ellos que a nivel macroscópico es un material homogéneo, es decir, constituido por un sólo material, pero a nivel microscópico es un material heterogéneo formado por fibras de celulosa de estructura tubular y una matriz de lignina. Otro ejemplo de compuesto natural es el hueso, el cual está formado por colágeno, una proteína resistente pero blanda y por hidroxiapatita, un mineral frágil. Como compuesto el hueso posee una dureza comparable con el acero pero más ligero.

El uso de materiales compuestos artificiales es muy antiguo. Un ejemplo de ello es el uso del adobe por los egipcios. El adobe está hecho de una masa de arcilla y paja secado al sol en forma de ladrillo. Agregar paja a la arcilla permite una correcta aglutinación de la masa, le da resistencia a la intemperie y evita que una vez solidificados, los bloques se agrieten. En este compuesto la característica de dureza de la arcilla es mejorada. Esto es lo que se busca en un material compuesto, que por lo menos una de las propiedades del compuesto mejore. En Oaxaca se utiliza fibra de maguey en lugar de paja para el mismo propósito. En la actualidad el concreto reforzado es un compuesto clave en la construcción, el cual está formado por barras de acero, un material duro pero caro, embebidas en concreto un material ligero y barato. Como resultado el concreto reforzado es barato, relativamente ligero y duro. La madera es rígida en la dirección de las fibras pero en la dirección perpendicular éstas se pueden separar fácilmente. La madera contrachapada es un compuesto que se forma al alternar láminas de madera que son

duras en la dirección x_1 con láminas que son duras en la dirección x_2 lo que da como resultado un compuesto duro en ambas direcciones. Este es un ejemplo de los llamados compuestos laminados.

En conclusión los compuestos poseen mejores propiedades que sus constituyentes. Estas mejoras y sus posibles aplicaciones son la motivación del estudio de materiales compuestos.

El principal problema en los compuestos es la predicción de sus propiedades efectivas como función de sus constituyentes y de su microestructura. Trabajos previos se remontan hasta [Maxwell \(1873\)](#), en su tratado obtiene una expresión para la conductividad efectiva de una dispersión de esferas que es exacta para concentraciones diluidas de esferas. [Rayleigh \(1892\)](#) desarrollo el formalismo para calcular la conductividad efectiva de arreglos regulares de esferas que se usa hoy en día. El trabajo de las propiedades de materiales heterogéneos comenzó con el famoso artículo de [Einstein \(1905\)](#) en el cual determina la viscosidad efectiva de una suspensión diluida de esferas.

Existen diversos métodos para el estudio de compuestos, unos con enfoque analítico y otros con enfoque numérico. En el enfoque analítico se incluyen: los métodos variacional, autoconsistente y de homogeneización, y técnicas de optimización. Los procedimientos numéricos comprenden el análisis de Fourier y el método de elementos finitos (MEF).

En el método variacional se usan los principios variacionales para calcular cotas de las propiedades efectivas de compuestos. Los primeros trabajos son de [Hill \(1952\)](#), [Paul \(1960\)](#) y Hashin y Shtrikman (1962,1963). Las cotas variacionales están basadas en la minimización de la energía, o más precisamente, minimizando el poder de disipación en el sistema ([Torquato, 2001](#)).

En la actualidad existen diferentes versiones del método autoconsistente pero hay dos enfoques principales: el método de campo efectivo y el de medio efectivo. Ambos métodos se basan en dos hipótesis: la primera, el problema de partículas múltiples se reduce a un problema de una partícula y la segunda es la condición de autoconsistencia en la cual el campo que actúa en cada inclusión es el campo externo aplicado al medio o bien que la inclusión se encuentra en el medio efectivo, que se desconoce. Hay que señalar que las hipótesis son introducidas de forma heurística y existe la dificultad de evaluar *ad hoc* su región de validez. Sólo al comparar las predicciones de los métodos con datos experimentales o soluciones exactas se puede estimar las regiones donde éstos dan resultados confiables (Kanaun y Levin (2008)). [Budiansky \(1965\)](#), [Hill \(1965\)](#), [Hershey \(1954\)](#), [Kerner \(1956\)](#) y [Kroner \(1958\)](#) obtuvieron las primeras soluciones autoconsistentes en la mecánica del medio heterogéneo en la mitad del siglo XX. En sus trabajos se determinaron las propiedades elásticas de policristales y compuestos.

La teoría de homogeneización se ocupa de la conducta de la ecuaciones diferenciales parciales

que son válidas en un material heterogéneo cuya razón entre la escala microscópica y macroscópica tiende a cero. La teoría de homogeneización asintótica de compuestos periódicos fue desarrollada en las décadas setentas y ochentas del siglo pasado (Bakhvalov and Panasenko, 1989; Bensoussan et al., 1978). El método de homogenización asintótica (MHA) es una técnica basada en un desarrollo asintótico a dos escalas. El problema fundamental del MHA es que los coeficientes efectivos dependen de la solución de los problemas locales sobre una celda periódica, es decir, requiere la solución de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera periódicas y condiciones de conjugación en las interfaces.

En el caso de compuestos laminados, es decir, con la homogeneización unidimensional, los problemas locales involucran derivadas ordinarias. Se han obtenido fórmulas exactas para los coeficientes efectivos por diferentes autores. En Pobedria (1984) se determinan las propiedades efectivas de compuestos elásticos con cualquier número finito de láminas por celda periódica. En Bravo-Castillero et al. (1998) estos resultados se extendieron a medios piezoeléctricos y la importancia de las fórmulas deducidas se muestra mediante su aplicación al diseño de hidrófonos. En Rodríguez-Ramos et al. (1996), se estudian compuestos formados por láminas de simetría hexagonal 6mm acoplados en paralelo, se señala la importancia de sus resultados en el diseño de transductores ultrasónicos para propósitos médicos.

Los problemas bidimensionales sobre la celda unidad son más complicados. Sin embargo, para compuestos fibrosos unidireccionales con fibras cilíndricas periódicamente distribuidas en una matriz isótropa, se obtuvieron fórmulas exactas para los coeficientes efectivos (Pobedria, 1984; Meguid and Kalamkarov, 1994) utilizando la teoría de las funciones elípticas. Estos resultados fueron extendidos al caso de componentes de simetría hexagonal 6mm en Bravo-Castillero et al. (1997) para obtener los coeficientes efectivos básicos en las aplicaciones a transductores.

También se han estudiado diversos aspectos de materiales reforzados de fibras: elástico con simetría cuadrada (Rodríguez-Ramos et al., 2001); elástico con simetría hexagonal (Guinovart-Díaz et al., 2001); piezoeléctrico y simetría cuadrada (Bravo-Castillero et al., 2001); piezoeléctrico y simetría hexagonal (Sabina et al., 2001). Compuestos reforzados de fibra con estructura periódica del tipo paralelogramo han sido estudiados por Guinovart-Díaz et al. (2011).

El último método analítico que mencionaremos tiene que ver con las técnicas de optimización. El problema central aquí consiste en diseñar varios materiales en un dominio determinado para maximizar o minimizar una integral funcional asociada, por ejemplo, con la elasticidad o conductividad de un medio. Se utilizan materiales compuestos en el diseño porque se prefieren materiales con nuevas propiedades que se puedan obtener al combinar materiales de los que se disponen (Cherkaev, 2000). El diseño óptimo con componentes múltiples fue considerado en Burns y Cherkaev (1997).

Ahora pasamos a describir en forma general los métodos numéricos arriba mencionados. El análisis de Fourier se usa para superar algunas limitaciones de la espectroscopía infrarroja para obtener el espectro infrarrojo de la superficie de los materiales compuestos. Esto da información acerca de la composición química y de la estructura molecular del material (Cole et al., 1988). En el método de elementos finitos se representa el dominio como una colección de geometría de subdominios, llamados elementos finitos, los cuales se ensamblan de tal forma que representa la distorsión de la estructura bajo cargas específicas. Una parte importante en la aplicación del método es la habilidad de seleccionar apropiadamente las distribuciones y el tamaño correcto de los elementos.

El MEF fue inicialmente desarrollado para materiales isótropos. Para aplicar la técnica a compuestos se requieren formulaciones que adecuen apropiadamente su anisotropía, su rigidez y fuerza, así como la forma del compuesto (Matthews et al., 2000). Por medio de este método se han calculado propiedades efectivas como módulo de Young, módulo de rigidez e indentación para compuestos laminados (Kocer et al., 2009; Chirima et al., 2009).

Los métodos antes mencionados se han utilizado para estudiar compuestos con diversos tipo de constituyentes. Recientemente se tiene un interés especial en materiales que han mostrado mejoras en ciertas propiedades mecánicas por sí mismos o como constituyentes de compuestos, entre ellos están los materiales *auxéticos*, éstos tienen cociente de Poisson negativo, es decir, se expanden lateralmente al ser estirados longitudinalmente; el otro tipo de material es el que posee coeficiente de expansión térmica (CET) negativo; este material al calentarse se contrae. Y por supuesto, la combinación de materiales con estas dos características, puede dar lugar a nuevos efectos.

Los materiales auxéticos son poco comunes en la naturaleza para entender el por qué de este hecho recordemos que el cociente de Poisson, ν_{ij} , se define como menos la deformación transversal e_j en la dirección x_j sobre la deformación longitudinal e_i en la dirección x_i cuando el esfuerzo se aplica en la dirección x_i , es decir, $\nu_{ij} = -e_j/e_i$. Los materiales con los que generalmente estamos en contacto en nuestra vida diaria se contraen transversalmente al ser estirados longitudinalmente de aquí que los materiales más comunes posean cociente de Poisson positivo. De hecho $0.3 < \nu_{ij} < 0.5$.

La palabra auxético fue introducida por (Evans et al., 1991) para reemplazar la frase cociente de Poisson negativo. Se han descubierto materiales que naturalmente presentan auxeticidad, por ejemplo, las piritas de hierro, (Love (1944), rocas con microfracturas Nur y Simmons, Homand-Etienne y Houpert, la piel de gato, Veronda y Westmann (1970). Pero no fue hasta que (Lakes (1987a,b) produjo un nuevo material, una espuma porosa isótropa que poseía cociente de Poisson negativo, que se puso un especial interés en ellos. Muchos otros autores después han presentado estructuras auxéticas. (Ravirala et al., 2005a) reportan la

producción de películas auxéticas de polipropileno usando un proceso de extrusión. [Ravirala et al. \(2005b\)](#) describen la producción de las películas auxéticas de polipropileno desarrolladas, y presentan fibras de poliéster y poliamida auxéticas; entonces un sistema de láminas con multicomponentes auxéticos y positivos es realizable. [Glazzard and Breedon \(2014\)](#) reportan el diseño, la fabricación y la prueba de un tejido auxético. [Ge et al. \(2013\)](#) reportan un análisis con elemento finito de una nueva estructura textil que consiste de tres hilos; ésta exhibe una conducta auxética. Los materiales auxéticos, su fabricación y aplicaciones han sido considerados en varias revisiones por [Evans and Alderson \(2000\)](#), [Yang et al. \(2004\)](#), [Alderson and Alderson \(2007\)](#) y [Liu and Hu \(2010\)](#).

Cuando [Lakes \(1987a\)](#) presentó su nueva estructura auxética, se planteó la idea de que ciertas propiedades mecánicas como la indentación de resistencia, la resistencia a fractura y la absorción de energía podrían exhibir una mejora, esto basado en que algunas propiedades mecánicas son proporcionales al cociente de Poisson como el módulo corte, $E/(1 + \nu)$, lo cual indica que si el cociente de Poisson es cercano a -1, este valor crece haciendo más difícil la deformación del material. Esto es posible ya que de la estabilidad termodinámica se sabe que para un material isótropo ν_{ij} puede variar de -1 a 0.5 y para un material anisótropo ν_{ij} puede alcanzar cualquier valor ([Ting, 2004](#)). Estas mejoras en las propiedades de los materiales dan lugar a posibles aplicaciones como el uso de espumas auxéticas en cojines para asientos ([Loureuro and Lakes, 1997](#)). Estos asientos ayudarían en la prevención de llagas por presión y úlceras en los enfermos que pasan mucho tiempo en cama, Wang y Lakes (2002).

Otras aplicaciones biomédicas incluyen los vendajes, vasos sanguíneos artificiales e hilo dental por mencionar algunas. Los vasos sanguíneos hechos de un material auxético aumentarían el grosor de la pared en respuesta a un pulso de sangre, lo cual evitaría la ruptura del vaso ([Evans and Alderson, 2000](#)). En combinación con otros materiales puede ser usado para fabricar accesorios de protección personal, como es el casco protector o el chaleco a prueba de balas, rodilleras o barreras porosas. En la industria, algunas de sus aplicaciones serían los cinturones de seguridad, los amortiguadores de sonido y materiales de empaquetamiento ([Liu and Hu, 2010](#)).

Mejoras en la dureza han sido encontradas para un conjunto de materiales auxéticos tan variados como los metales y espumas poliméricas (Chan y Evans, 1997, Lakes, 1987a), y polímeros microporosos ([Alderson et al., 2000](#)). La resistencia a fracturas fue estudiada por Choi y Lakes (1992) quienes encontraron un aumento de la resistencia en los materiales auxéticos con respecto a los materiales convencionales. La cuestión sobre la mejora en el amortiguamiento y absorción del sonido fue tratada por [Howell et al. \(1994\)](#), [Alderson et al. \(1994, 2000\)](#) y [Lipsett and Beltzer \(1988\)](#), [Scarpa et al. \(2004\)](#). Más recientemente [Yang et al. \(2013\)](#) proponen un panel tipo sándwich con núcleo auxético y mediante un análisis muestran que éste es muy superior

en la resistencia balística comparado con uno en el cual el núcleo es una espuma de aluminio.

El estudio de materiales con componentes múltiples como los laminados con constituyentes isótropos auxéticos y con cociente de Poisson positivo han sido estudiados por diferentes autores como [Chirima et al. \(2009\)](#), [Ravirala et al. \(2005b\)](#), [Kocer et al. \(2009\)](#), [Lim \(2009, 2010\)](#), [Lim and Acharya \(2010\)](#), [Ramírez, M. and Sabina \(2012\)](#) y [Ramírez, M. et al. \(2012\)](#). En el caso de bilaminados, es decir, laminados con dos componentes diferentes se han dado fórmulas para los módulos de Young ([Lim, 2009, 2010](#)). Para el cociente de Poisson fuera del plano, [Hsieh and Tuan \(2005\)](#) proporcionan una fórmula. [Christensen \(1979\)](#) da fórmulas para el módulo de Young y el cociente de Poisson fuera del plano. [Lim \(2009\)](#) muestra que el módulo de Young puede presentar un aumento con respecto a los valores de los constituyentes pero presenta 4 gráficas erróneas que fueron corregidas por Ramírez y Sabina (2012). De hecho el efecto de aumento es mucho mayor que el reportado por [Lim \(2010\)](#). [Kocer et al. \(2009\)](#) y [Chirima et al. \(2009\)](#) muestran esto mismo usando elemento finito. [Chirima et al. \(2009\)](#) presentan resultados que no satisfacen el intervalo de validez de las cotas variacionales. [Ramírez, M. et al. \(2012\)](#) muestran por medio de fórmulas analíticas y el método de elemento finito cuáles son los resultados correctos de las propiedades efectivas.

Ahora que ya hemos introducido los materiales auxéticos pasaremos a los materiales con coeficiente de expansión térmica (CET) negativo para eso recordemos lo que aprendimos en la educación básica en la cual nuestros profesores nos decían que la calentar un material este se dilataba. Tomamos la definición de CET, que es la medida del cambio de volumen o el cambio lineal con la temperatura y se define como $\alpha_v = \Delta V/V_0\Delta T$ o $\alpha_l = \Delta l/V_{l_0}\Delta T$, donde ΔV es el cambio de volumen, Δl el cambio de longitud, V_0 y l_0 el volumen y la longitud inicial, respectivamente, y ΔT el cambio de temperatura. Entonces sabemos que los materiales que se dilatan al calentarse poseen CTE positivo pero no todos los materiales se comportan de esa forma por ejemplo a ciertas temperaturas en el rango por debajo de 15 °K hasta su temperatura de descomposición de 1500 °K, el Tungsteno de zirconio se contrae al calentarse ([Sleight, 1998](#)). Ciertos materiales se contraen en una dirección y se expanden en otra como los cuarzos α .

Del mismo modo que existen técnicas para producir materiales auxéticos también se han reportado métodos para producir materiales con CET negativo. [Miller et al. \(2008\)](#) describen un procedimiento para diseñar estructuras a partir de materiales con CET positivo. [Grima et al. \(2010\)](#) proponen una estructura cilíndrica con inclusión más suave en la cual las propiedades térmicas se pueden modificar. [Kelly et al. \(2006\)](#) demuestra cómo obtener valores negativos de expansión térmica. [Grima et al. \(2007\)](#) analiza una estructura rígida hecha con varillas de diferentes materiales, muestran que esta estructura puede exhibir, CET negativo, en ciertas direcciones o su CET puede ser más positivo que los CET de los constituyentes.

El interés en esta clase de materiales es por su uso en el control de expansión térmica, es decir para combinarlos con otros materiales de CET positivo y obtener materiales con expansión cercana a cero. Esto es útil en el área de electrónicos, donde son necesarios materiales que compensen la expansión térmica del silicio. Otra aplicación de la expansión térmica cercana a cero es en los espejos de los telescopios (Sleight, 1998).

Wu et al. (2013) concluyen que los compuestos Al/ZrW_2O_8 de baja expansión térmica pueden ser fabricados por una técnica de fundición. Shokrieh et al. (2014) fabrican un compuesto reforzado teniendo como matriz epoxy y como fibra nanotubos de carbono de pared múltiple, el cual tiene una gran reducción del CTE y un ligero aumento del módulo de Young.

Hasta ahora hemos hablado de compuestos que tienen como constituyentes materiales auxéticos o con CTE negativo pero también existen estudios de compuestos cuyas fases son auxéticas y/o con CTE negativo. Lim (2011) muestra que un laminado en el cual una de las fases tiene coeficiente de expansión térmica negativo y cociente de Poisson positivo y la otra lámina es auxética con coeficiente de expansión térmica negativo tiene una reducción del coeficiente efectivo comparado con el laminado en el cual los constituyentes tienen propiedades inusuales y los dos tienen propiedades positivas. La patente de un compuesto que puede tener ambas propiedades negativas o una combinación de ellas fue hecha por Namburi et al. (2010).

Los materiales auxéticos o con CET negativo presentan una conducta poco usual pero como mencionamos anteriormente existen en la naturaleza a diferencia de los metamateriales. No hay una definición universal para metamateriales, aquí diremos que son materiales que poseen microestructura y que como mencionamos sus propiedades no se encuentran en la naturaleza. Como un ejemplo de ellos podemos mencionar a los metamateriales doblemente negativos, estos permiten que una onda electromagnética transmita energía en la dirección opuesta a su velocidad de fase. Un metafluido tiene una densidad de masa anisótropa a diferencia de los fluidos convencionales que tienen una densidad de masa isotrópica. Smith (2011) muestra un compuesto laminado periódico formado por dos fluidos invíscidos. Éste posee una densidad de masa anisótropa y una compresibilidad isotrópica. Si las propiedades de los fluidos son tales que se presentan efectos resonantes entonces la compresibilidad así como la densidad de masa del laminado son anisótropas. Reyes-Ayona et al. (2012) emplean el método de dispersión múltiple para analizar la dispersión de ondas acústicas a través de cilindros elásticos embebidos en un fluido viscoso. Ellos obtienen fórmulas analíticas para los parámetros del medio efectivo, el cual es una clase de metamaterial elástico.

Nuestro objetivo principal en esta tesis es estudiar cómo influyen los materiales auxéticos en las propiedades elásticas efectivas al ser considerados como constituyentes de compuestos laminados y compuestos reforzados de fibras. Ver el efecto en las propiedades termoelásticas de un compuesto reforzado con arreglo hexagonal en el cual sus componentes pueden ser

auxéticos y/o tener coeficiente de expansión térmico negativo. Además de iniciar un estudio sobre los compuestos laminados periódicos que tienen como constituyentes fluidos viscosos. Dichos compuestos resultan tener propiedades de metamateriales.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se dan elementos básicos de la teoría de termoelasticidad lineal para introducir notación y definiciones así como algunas relaciones entre las propiedades ingenieriles y las elásticas. Se describen las diferentes simetrías de los materiales en los que estamos interesados. El Capítulo 3 está dedicado a describir los tipos de compuestos considerados, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los mismos y las consideraciones que hacemos sobre los compuestos. En el Capítulo 4 se desarrollan los métodos utilizados para obtener fórmulas para las propiedades efectivas. Primeramente se describe la aplicación del método de Backus, que se utilizó para determinar las propiedades efectivas de los laminados, después el de homogenización asintótica que es el utilizado para los compuestos reforzados de fibras. En el Capítulo 5 se exponen los resultados para compuestos laminados. Se dan fórmulas cerradas para un laminado de n fases con simetría isotropa, cúbica y transversalmente isotropa. Así como ejemplos numéricos para bilaminados. Para la validación, de las fórmulas se realiza una comparación con elemento finito para el caso de laminados con fases isotropas. Además se dan ventanas de auxeticidad, y condiciones bajo las cuales los módulos de Young son más grandes que los módulos de Young de los constituyentes.

El Capítulo 6 se divide en dos secciones en la primera se muestran ejemplos numéricos de las propiedades elásticas efectivas de un compuesto reforzado de fibras cuyos constituyentes son isotropos y que pueden ser auxéticos. Los ejemplos muestran que el endurecimiento del compuesto es mayor si la fibra es auxética. Además conforme los cocientes de Poisson se acercan a los límites termodinámicos la dureza de los compuestos se mejora con respecto a sus constituyentes. En la segunda sección se muestran las propiedades termoelásticas efectivas de compuestos reforzados de fibras con constituyentes isotropos los cuales pueden ser auxéticos y/o tener CET negativo. Las propiedades son mejoradas si el compuesto está formado por un material auxético con CET positivo y uno convencional con CET negativo. En ambas clases de compuestos se observa que para fracciones volumétricas pequeñas las propiedades no varían mucho de un compuesto a otro con diferente arreglo paralelográfico.

En el Capítulo 7 se estudia un laminado periódico formado por dos fluidos viscosos. Se analizaron dos casos, uno en el que las propiedades son tales que se presentan efectos de resonancia y otro en el cual esto no ocurre. En ambos casos se determinaron la densidad de masa efectiva, la compresibilidad efectiva y la ecuación homogeneizada para la presión.

En el Capítulo 8 y último, se presentan las conclusiones a las que se llegaron con el presente trabajo y las posibles extensiones del mismo.

Capítulo 2

Termoelasticidad lineal

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados que usaremos en el resto de la tesis. También introduciremos la notación usada en la misma. Iniciamos con las definiciones de termoelasticidad. Después damos las restricciones termodinámicas de las propiedades de los materiales. Por último, damos las relaciones entre las constantes elásticas y las ingenieriles.

En el análisis de las propiedades efectivas es importante saber cuáles son los valores que pueden tomar las propiedades de los materiales que son usados como constituyentes, por esta razón incluimos las restricciones de las mismas en esta sección. Las restricciones de las propiedades efectivas son consecuencia de la estabilidad del sistema. Únicamente escribimos las restricciones para los materiales con simetría isótropa, cúbica, transversalmente isótropa y tetragonal. Las restricciones para éstas y demás simetrías se pueden encontrar en [Ballato \(2010\)](#) o [Ting \(2004\)](#).

Sabemos que los tensores de esfuerzo y deformación se relacionan por medio del tensor de rigidez y también por el tensor de flexibilidad. Los elementos del tensor de rigidez son las llamadas constantes de elasticidad mientras que los del tensor de flexibilidad son las *constantes ingenieriles*. En ocasiones solamente se cuentan con los datos ingenieriles o los elásticos de aquí que sea importante saber cuál es la relación entre estos componentes. Este es el motivo por el cual en el presente capítulo damos la relación entre estos, para los materiales en los cuales estamos interesados. Una explicación con más detalle se puede encontrar en [Nowinski \(1978\)](#).

Primeramente introducimos los conceptos de termoelasticidad. Un desarrollo más amplio de estos conceptos se puede encontrar en Parton y Kudrayavtsev (1993) y en [Nowinski \(1978\)](#).

La teoría de la elasticidad explica la respuesta de los materiales a una fuerza aplicada, [Love \(1944\)](#). Si la respuesta es lineal se dice que el material es elástico lineal. En un cuerpo elástico en equilibrio y en la ausencia de fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de elasticidad lineal toman

la forma

$$\sigma = Ce, \quad \nabla \cdot \sigma = 0, \quad e = [\nabla u + (\nabla u)^T]/2, \quad (2.1)$$

donde σ y e son los tensores de segundo orden de esfuerzo y deformación, respectivamente, y C es el tensor de cuarto orden de elasticidad. El superíndice T denota el operador transpuesto. El tensor de esfuerzo, σ , es simétrico, es decir, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, por lo tanto $C_{ijkl} = C_{jikl}$. El tensor de deformación también es simétrico, ($e_{kl} = e_{lk}$) y de esto tenemos que $C_{ijkl} = C_{jilk}$. De estas condiciones se puede reducir las 81 constantes de C a 36 independientes para la elasticidad en tres dimensiones. Ahora tomando en cuenta que la energía de deformación debe ser positiva, es decir,

$$U = \frac{1}{2} e_{ij} C_{ijkl} e_{kl} > 0; \quad (2.2)$$

tenemos que el tensor de rigidez debe cumplir la condición de simetría, $C_{ijkl} = C_{klij}$ lo que reduce de 36 a 21 constantes independientes el tensor de rigidez C . Para abreviar notación escribiremos los elementos de C en una forma sencilla usando la notación de Voigt que reduce la relación constitutiva a una ecuación matricial con las ventajas algebraicas que esto representa. Así, cada par de índices se representa como uno de la forma siguiente

$$11 \mapsto 1, \quad 22 \mapsto 2, \quad 33 \mapsto 3, \quad 23 \mapsto 4, \quad 13 \mapsto 5, \quad 12 \mapsto 6. \quad (2.3)$$

Usando esta notación podemos escribir en forma matricial la relación constitutiva (2.1) como

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_4 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{sim} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix},$$

con $e_4 = 2e_{23}$, $e_5 = e_{13}$ y $e_6 = 2e_{12}$. Esta relación es la ley de Hooke generalizada. La relación constitutiva entre los campos σ y e también se puede escribir en términos del tensor de flexibilidad, S , y se expresa de la siguiente forma:

$$e = S\sigma, \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & \text{sim} & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix},$$

y $C^{-1} = S$. En general como mencionamos anteriormente sólo hay 21 constantes independientes, como ya se mencionó anteriormente, pero dependiendo de la simetría del material puede haber un número menor. Los casos extremos de materiales elásticos son los triclinicos con 21 constantes independientes y los isótropos con sólo dos.

Para la estabilidad del sistema la energía de deformación U_e y la de esfuerzo U_σ deben ser positivas, es decir,

$$U_e = e(x)C(x)e(x) > 0 \quad y \quad U_\sigma = \sigma(x)S(x)\sigma(x) > 0, \quad (2.5)$$

lo que significa que la representación matricial del tensor de esfuerzo y el de deformación deben ser definidos positivos. Esta condición, nos da restricciones sobre $S_{ij}(x)$ y $C_{ij}(x)$, las cuales daremos en la siguiente sección. Estas restricciones son deducidas de la estabilidad del sistema y nos referiremos a ellas como las condiciones debidas a la termodinámica.

En la teoría de elasticidad se considera que la temperatura es la misma en todos los puntos del medio y que no cambia durante la deformación pero en realidad una deformación es seguida de un cambio en la temperatura, y en forma inversa, un cambio en la temperatura del cuerpo es seguido de una deformación debida a la expansión térmica. Si alguna fuente de calor cambia la temperatura del cuerpo habrá una deformación de éste aún si no hay un esfuerzo o fuerzas de masa. La teoría que acopla estas dos "ideas" es la termoelasticidad.

La relación constitutiva que relaciona el esfuerzo, la deformación y el cambio en la temperatura:

$$e = S\sigma + \alpha\theta, \quad (2.6)$$

o equivalentemente

$$\sigma = Ce - \beta\theta, \quad (2.7)$$

donde α es el tensor de segundo orden de expansión térmica y β es el tensor de esfuerzo térmico y θ es el cambio de temperatura relativo a una temperatura fija. Además se tiene que

$$\beta = C\alpha, \quad (2.8)$$

$$\alpha = -S\beta. \quad (2.9)$$

La forma matricial de (2.7), por ejemplo, es

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{sim} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix}$$

con $\beta_4 = 2\beta_{23}$, $\beta_5 = 2\beta_{13}$ y $\beta_6 = 2\beta_{12}$.

En las siguientes secciones describimos las simetrías que poseen los materiales que son de nuestro interés en este trabajo. Damos la relación que se tiene entre S_{ij} y C_{ij} . También se dan restricciones de las constantes obtenidas de la condición de estabilidad del sistema. Los detalles de cómo se obtienen estas restricciones están incluidas en el Apéndice [A](#).

2.1. Relaciones y restricciones

2.1.1. Material con simetría isótropa

El material isótropo tiene la simetría más simple. Sólo tiene dos constantes independientes. En este tipo de materiales las propiedades son independientes de la dirección.

Las componentes diferentes de cero del tensor de rigidez, C , en términos de las constantes de Lamé, λ y μ .

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad (2.10)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda, \quad (2.11)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \mu, \quad (2.12)$$

Notemos que estamos usando la notación de Voigt. Las componentes del tensor de esfuerzo térmico diferentes de cero son

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3. \quad (2.13)$$

Las componentes correspondientes al tensor de flexibilidad, S , dadas en términos de las constantes ingenieriles son

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = E^{-1}, \quad (2.14)$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = -\nu E^{-1}, \quad (2.15)$$

$$S_{44} = S_{55} = S_{66} = \frac{S_{11} - S_{12}}{2} = \mu^{-1}, \quad (2.16)$$

donde E es el módulo de Young y ν el cociente de Poisson. Es bien conocido que con cualquier par de éstos (es decir, de λ , μ , E , ν y κ , la compresibilidad) es posible caracterizar un medio isótropo.

Las componentes del tensor de expansión térmica como función del tensor de esfuerzo térmico son

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\beta_1(3\lambda + 2\mu). \quad (2.17)$$

Usando la igualdad $C = S^{-1}$ podemos relacionar E y ν con λ así

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.18)$$

esta ecuación tiene implicaciones importantes para auxéticos. De la teoría de la termodinámica se tiene que $E > 0$ y $-1 < \nu < 1/2$, lo cual significa que λ es negativa cuando $\nu < 0$, es decir, los elementos que están fuera de la diagonal principal de C son negativos para un material auxético. La importancia de saber si un material es auxético radica en sus posibles aplicaciones, por ejemplo, en la industria. Éstas son debidas a que los materiales auxéticos presentan una mejora en ciertas propiedades mecánicas como la indentación o absorción de sonido, por mencionar algunas, con respecto a los materiales comunes.

El esquema de tensor de rigidez y el de flexibilidad es de la forma

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Sim

Los puntos que están unidos por una línea indican que tienen los mismos valores. Entonces para un material isótropo se tienen tres diferentes valores en el tensor de flexibilidad y en el de rigidez pero sólo dos de ellos son independientes.

2.1.2. Material con simetría cúbica

La simetría cúbica se encuentra en muchos semiconductores. El esquema del tensor de rigidez y flexibilidad es idéntico al del material isótropo salvo que aquí el coeficiente C_{44} no depende de C_{11} , C_{12} y S_{44} ; tampoco depende de S_{11} y S_{12} . Para este tipo de materiales hay tres constantes independientes para el tensor de rigidez que son:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}, \quad (2.19)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23}, \quad (2.20)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66}. \quad (2.21)$$

Recordemos que la componente C_{44} es independiente de C_{11} y C_{12} .

Las componentes del esfuerzo térmico son

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3. \quad (2.22)$$

Las restricciones sobre las constantes elásticas debidas a la termodinámica son:

$$C_{11} - C_{12} > 0, \quad (2.23)$$

$$C_{11} + 2C_{12} > 0, \quad (2.24)$$

$$C_{44} > 0. \quad (2.25)$$

Las componentes correspondientes al tensor de flexibilidad son:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33}, \quad (2.26)$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23}, \quad (2.27)$$

$$S_{44} = S_{55} = S_{66}. \quad (2.28)$$

Recordemos que S_{44} es independiente de S_{11} y S_{12} . Las componentes del tensor de expansión térmica son

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3. \quad (2.29)$$

La relación entre S_{ij} y C_{ij} está dada de la siguiente forma

$$S_{11} = 1/E_1 = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}, \quad (2.30)$$

$$S_{12} = -\nu/E_1 = \frac{-C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}, \quad (2.31)$$

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}}. \quad (2.32)$$

La relación entre α_j y β_j es

$$\alpha_1 = -\beta_1/(C_{11} + 2C_{12}). \quad (2.33)$$

De (2.31) vemos que el material es auxético sí y sólo si C_{12} es negativo ya que de (2.23) y (2.24) se tiene que los términos $(C_{11} - C_{12})$ y $C_{11} + 2C_{12}$ son positivos.

2.1.3. Material con simetría transversalmente isótropa

El tensor de rigidez de los materiales con simetría transversalmente isótropa tiene cinco constantes independientes. Las constantes diferentes de cero en el tensor son

$$C_{22} = C_{33}, \quad C_{11}, \quad (2.34)$$

$$C_{12} = C_{13}, \quad C_{23}, \quad (2.35)$$

$$C_{55} = C_{66}, \quad C_{44} = (C_{22} - C_{23})/2. \quad (2.36)$$

Para el tensor de esfuerzo térmico las constantes independientes son dos, los elementos diferentes de cero son

$$\beta_1 \quad \text{y} \quad \beta_2 = \beta_3. \quad (2.37)$$

Los términos diferentes de cero de S en términos de las constantes ingenieriles son

$$S_{11} = 1/E_1, \quad S_{22} = S_{33} = 1/E_2, \quad (2.38)$$

$$S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad S_{12} = S_{13} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad (2.39)$$

$$S_{44} = (S_{22} - S_{23})/2 = 1/\mu_{23}, \quad S_{55} = S_{66} = 1/\mu_{13}, \quad (2.40)$$

donde E_i es el módulo de Young en la dirección x_i , ν_{ij} es el cociente de Poisson, es decir, la deformación transversal en la dirección j sobre la deformación en la dirección i cuando el esfuerzo se aplica en la dirección i y μ_{23} , μ_{13} son los módulos de corte en el plano x_2x_3 y x_1x_2 , respectivamente.

Los elementos del tensor de expansión térmica diferentes de cero son

$$\alpha_1, \quad (2.41)$$

$$\alpha_2 = \alpha_3. \quad (2.42)$$

Las ecuaciones dadas son para materiales cuyo eje de simetría es el eje x_1 . Las restricciones termodinámicas sobre C_{ij} son

$$C_{22} - C_{23} > 0, \quad (2.43)$$

$$C_{11}(C_{22} + C_{23}) - 2C_{12}^2 > 0, \quad (2.44)$$

$$[C_{11} - (C_{22} + C_{23})]^2 + 8C_{12}^2 > 0. \quad (2.45)$$

De la relación entre C y S tenemos

$$S_{11} = \frac{(C_{22} + C_{23})(C_{22} + C_{23})}{-2C_{12}^2 + C_{11}}, \quad (2.46)$$

$$S_{12} = \frac{C_{12}}{2C_{12}^2 - C_{11}(C_{22} + C_{23})}, \quad (2.47)$$

$$S_{23} = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{(C_{22} - C_{23})(-2C_{12}^2 + C_{11}(C_{22} + C_{23}))}, \quad (2.48)$$

$$S_{22} = \frac{-C_{12}^2 + C_{11}C_{22}}{(C_{22} - C_{23})(-2C_{12}^2 + C_{11}(C_{22} + C_{23}))}, \quad (2.49)$$

$$S_{66} = 1/\mu_{66} = \frac{1}{C_{66}}. \quad (2.50)$$

De (2.47) observamos que para que v_{12} sea negativo, C_{12} deber ser negativo y de (2.48) que v_{23} es negativo si se cumple la desigualdad $C_{12}^2 > C_{11}C_{23}$. La relación entre α_j y β_j es

$$\alpha_1 = -C_{11}\beta_1 - 2C_{12}\beta_2,$$

$$\alpha_2 = -C_{12} + (C_{22} - C_{23})\beta_2$$

El tensor de rigidez y el de flexibilidad tienen un esquema de la forma

$$\begin{pmatrix} \bullet & \text{---} & 0 & 0 & 0 \\ & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ & \diagdown & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sim} & \bullet & 0 & 0 \\ & & & \bullet & 0 \\ & & & & \diagdown \end{pmatrix}$$

Para materiales con simetría transversalmente isotrópica el tensor tiene 6 valores diferentes pero solo 5 independientes.

2.1.4. Material con simetría tetragonal

Para este sistema hay 6 constantes independientes en el tensor de rigidez.

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{33}, \quad (2.51)$$

$$C_{23} = C_{13}, \quad C_{12}, \quad (2.52)$$

$$C_{55} = C_{44}, \quad C_{66}, \quad (2.53)$$

$$C_{16} = -C_{26}. \quad (2.54)$$

La diferencia con los materiales con simetría transversalmente isótropa es que aquí C_{66} es independiente de C_{11} y C_{12} . Este material tiene las siguientes restricciones debidas a la termodinámica

$$C_{66}(C_{11} - C_{12}) - 2C_{16}^2 > 0, \quad (2.55)$$

$$[(C_{11} - C_{12}) - C_{66}]^2 + 8C_{16}^2 > 0, \quad (2.56)$$

$$C_{33}(C_{11} - C_{12}) - 2C_{13}^2 > 0, \quad (2.57)$$

$$[(C_{11} + C_{12}) - C_{33}]^2 + 8C_{13}^2 > 0. \quad (2.58)$$

Si $C_{16} = 0$ se reducen a tres

$$(C_{11} - C_{12}) > 0, \quad (2.59)$$

$$C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}^2 > 0, \quad (2.60)$$

$$[(C_{11} + C_{12}) - C_{33}]^2 + 8C_{13}^2 > 0. \quad (2.61)$$

Que son las mismas que tiene un material transversalmente isótropo con eje de simetría x_3 . Las constantes de flexibilidad en términos de las constantes elásticas se escriben como,

$$S_{11} = \frac{C_{16}^2 C_{33} + (C_{13}^2 - C_{11} C_{33}) C_{66}}{(2C_{13}^2 - (C_{11} + C_{12}) C_{33}) (-2C_{16}^2 + (C_{11} - C_{12}) C_{66})}, \quad (2.62)$$

$$S_{12} = \frac{C_{16}^2 C_{33} - C_{13}^2 C_{66} + C_{12} C_{33} C_{66}}{(2C_{13}^2 - (C_{11} + C_{12}) C_{33}) (-2C_{16}^2 + (C_{11} - C_{12}) C_{66})}, \quad (2.63)$$

$$S_{13} = \frac{-C_{13}}{-2C_{13}^2 + (C_{11} + C_{12}) C_{33}}, \quad (2.64)$$

$$S_{22} = \frac{C_{11} + C_{12}}{-2C_{13}^2 + (C_{11} + C_{12}) C_{33}}. \quad (2.65)$$

De (2.64) y la condición (2.57) se tiene que el material es auxético en el plano $x_1 x_3$ si C_{13} es negativo. Para que ν_{12} sea negativo la condición es:

$$C_{16}^2 C_{33} < C_{66} (C_{13}^2 - C_{12} C_{33}) \quad (2.66)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ & & \bullet & 0 & 0 \\ \text{Sim} & & & \bullet & 0 & 0 \\ & & & & \bullet & 0 \\ & & & & & \bullet \end{array} \right)$$

esto de (2.63) y las condiciones (2.55) y (2.55). El tensor de rigidez y flexibilidad tienen un esquema de la forma

Para este tipo de materiales hay 8 valores diferentes pero recordemos solo 6 son independientes. Ahora ya conocemos las restricciones y las relaciones que deben guardar S_{ij} y C_{ij} . En el siguiente capítulo nos dedicaremos a plantear los problemas que deseamos estudiar.

Capítulo 3

Descripción de los problemas

Este capítulo está dedicado a describir el objetivo del trabajo y los dos tipos de compuestos que estudiamos, así como las ecuaciones que los gobiernan. El primer tipo son los llamados *compuestos laminados* (CL) y el segundo son los *compuestos reforzados de fibras* (CRF). Nuestro principal objetivo es estudiar el efecto de introducir materiales auxéticos y/o con coeficiente de expansión térmica negativa (CETN) como constituyentes en estos materiales compuestos cuyos efectos no están suficientemente estudiados. Suponemos que en ambos compuestos los constituyentes están en contacto perfecto.

En los compuestos laminados CL nos enfocamos en el efecto que tienen los materiales auxéticos sobre las propiedades elásticas, es decir, no tomamos en cuenta el cambio en la temperatura. En este caso, la ley generalizada de Hooke es la que caracteriza el comportamiento de un sólido elástico lineal. Estudiamos tres diferentes tipos de constituyentes; isótropos, de simetría cúbica y transversalmente isótropos. En CL de n fases es relativamente fácil obtener fórmulas para las propiedades efectivas. En bilaminados también se pueden obtener las regiones de la fracción volumétrica en la cual los módulos de Young son aumentados con respecto al de los constituyentes así como las condiciones bajo las cuales se da el aumento. Igualmente las regiones en las cuales los compuestos son auxéticos.

En compuestos reforzados de fibras CRF tomamos en cuenta la temperatura. Aquí nos interesa saber cómo se afectan las propiedades de los compuestos cuando son incluidos como constituyentes materiales auxéticos y/o con coeficiente de expansión térmica negativa. En el caso de sólidos termoelásticos su comportamiento es determinado por la ley de Neumann-Duhamel. El arreglo que estudiamos es un arreglo paralelográfico, es decir, estudiamos un CRF en el cual la celda repetitiva es un paralelogramo.

En las siguientes secciones describimos por separado cada uno de los problemas que estudia-

mos empezando con el compuesto laminado.

3.1. Compuestos laminados

Se considera un compuesto formado de láminas paralelas con grosor constante. El vector normal a cada plano está dirigido a lo largo del eje x_3 , este es llamado la dirección del laminado, en un sistema coordenado Cartesiano $x_1 x_2 x_3$. El compuesto es periódico y la celda unidad tiene n láminas hechas de m diferentes materiales. Este compuesto llamado laminado puede ser extendido infinitamente en la dirección x_3 o acotado por uno o dos planos (ver Fig. 3.1). Sea V_i , $i = 1, 2, 3 \dots n$, la fracción volumétrica, o grosor por unidad de área, de cada lámina. Por lo tanto

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = 1 \quad (3.1)$$

La i ésima lámina está hecha de un material elástico lineal cuyo tensor elástico de rigidez y

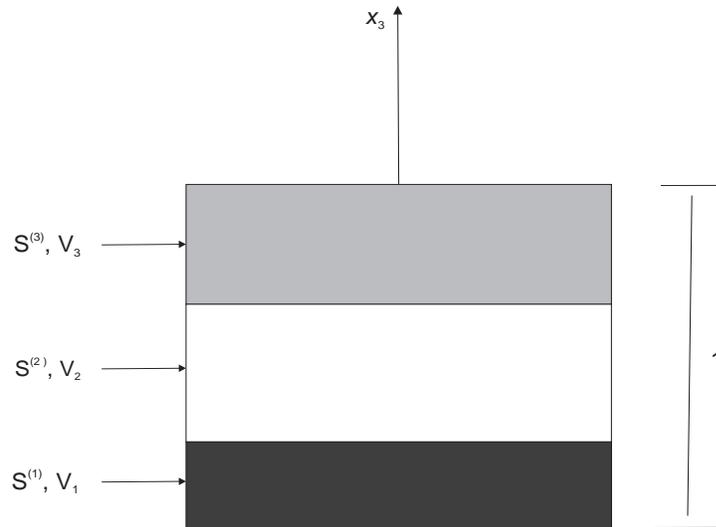


Fig. 3.1: Celda unidad compuesta de tres láminas cuya fracción volumétrica se denota por V_1 , V_2 y V_3 ; sus respectivos tensores de flexibilidad son $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ y $S^{(3)}$. La dirección del laminado es x_3 .

flexibilidad se denotan por $C^{(i)}$ y $S^{(i)}$, respectivamente. La ley generalizada de Hooke para cada lámina es

$$\sigma^{(i)} = C^{(i)} e^{(i)}, \quad e^{(i)} = S^{(i)} \sigma^{(i)} \quad \text{con} \quad C^{(i)} = (S^{(i)})^{-1}, \quad (3.2)$$

donde el superíndice (i) denota la lámina i . Las láminas están en contacto soldado, es decir, el desplazamiento y la tracción son continuas en la interfaz común. Nuestro objetivo es estudiar el efecto de una o más fases auxéticas sobre el compuesto, lo cual no ha sido estudiado completamente hasta la fecha. [Kocer et al. \(2009\)](#) y [Chirima et al. \(2009\)](#), en particular, han

estudiado parcialmente este problema. Sin embargo, los últimos autores presentan errores notables que es necesario corregir. Un conocimiento completo de las propiedades es útil en el diseño del compuesto. Las propiedades efectivas que denotaremos sin superíndice obedecen las leyes

$$\sigma = Ce, e = S\sigma \quad \text{con} \quad C = S^{-1}. \quad (3.3)$$

Las ecuaciones de elasticidad lineal que gobiernan un compuesto periódico acotado por una superficie plana con una tracción y desplazamiento prescritos producen un efecto de capa límite. Es bien sabido que las propiedades efectivas del laminado no se afectan por esta presencia (Bakhvalov y Panasenko, 1989). Las fórmulas discutidas en el siguiente capítulo son aplicables igualmente a láminas de extensión infinita, en una o dos direcciones, o acotadas por dos planos.

3.2. Reforzado de fibras

También vamos a considerar un compuesto binario periódico de estructura columnar. Las fibras son cilindros muy largos de sección transversal circular de radio R . Las fibras están distribuidas en un arreglo paralelogramático cubriendo todo el espacio. La Fig. 3.2 muestra una sección transversal del plano $y_1 y_2$ y la celda unidad que se repite periódicamente, es decir, un paralelogramo de base 1, lado ω_2 y ángulo agudo ϕ . La celda incluye al origen y está en el plano $y_1 y_2$, la celda se denota por Y . En este compuesto de dos constituyentes tiene lugar un problema

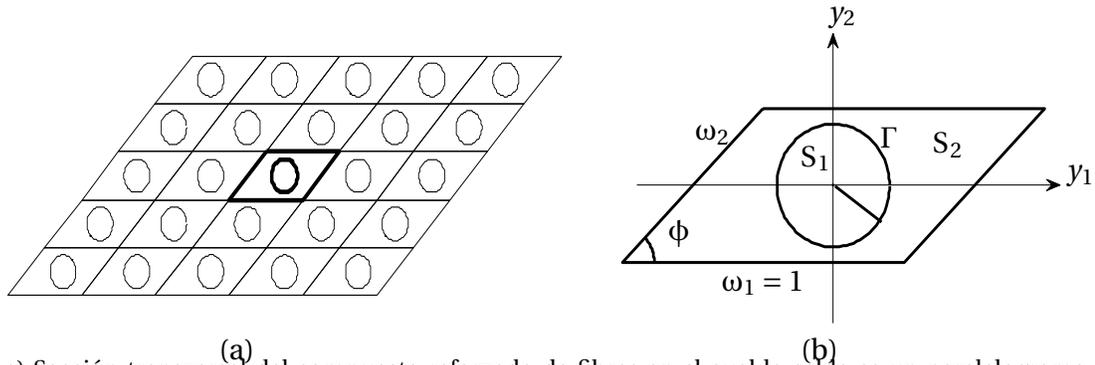


Fig. 3.2: a) Sección transversal del compuesto reforzado de fibras en el cual la celda es un paralelogramo. b) La celda unidad que se repite periódicamente. Paralelogramo de base 1, lado ω_2 y ángulo ϕ . Contiene dos regiones $S_1 \cup S_2$. La fibra ocupa la región S_2 , un círculo de radio R . S_1 es el complemento de S_2 ocupado por la matriz y Γ la interfaz común. El tensor de rigidez de la matriz se define como $C^{(1)}$ y el esfuerzo térmico como $\beta^{(1)}$; los respectivos tensores de la fibra son $C^{(2)}$ y $\beta^{(2)}$, respectivamente.

de termoelasticidad. La matriz y la fibra están hechas de materiales termoelásticos. La matriz ocupa la región que se denota por S_1 , su tensor de rigidez por $C^{(1)}$ y su tensor de esfuerzo térmico por $\beta^{(1)}$. La fibra ocupa la región S_2 , su tensor de rigidez se denota por $C^{(2)}$ y su tensor de esfuerzo

térmico como $\beta^{(2)}$. La fracción volumétrica de la matriz es V_1 , la de la fibra V_2 ; al igual que para los laminados estamos tomando

$$V_1 + V_2 = 1. \quad (3.4)$$

Vamos a considerar un medio no acotado con estructura periódica en una región Ω contenida en \mathbb{R}^3 . Las propiedades del material están determinadas por $C_{ijkl}(y)$, $\beta_{ij}(y)$, donde $y = x/\epsilon$ y $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$\epsilon = |\omega_2|/L \ll 1, \quad (3.5)$$

donde L es el diámetro de Ω . Así que consideramos el siguiente problema de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contacto ideal entre ambos materiales. El problema es

$$\sigma_{ij,j} + X_{i,j} = 0. \quad (3.6)$$

Los subíndices pueden ser 1,2,3 y la coma denota la derivada parcial con respecto a y_j . Aquí se está usando la convención de suma de Einstein. X_i es la fuerza de cuerpo. Los tensores de esfuerzo σ y deformación e están relacionados con el cambio en la temperatura θ mediante la relación constitutiva

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x/\epsilon)e_{kl}(x) - \beta(x/\epsilon)\theta(x), \quad (3.7)$$

$$\beta_{ij}(x/\epsilon) = C_{ijkl}(x/\epsilon)\alpha(x/\epsilon). \quad (3.8)$$

Los coeficientes dependen de la variable x/ϵ porque estos presentan cambios rápidos de las propiedades en el compuesto o un alto nivel de heterogeneidad ya que $\epsilon \ll 1$. Esto quiere decir que estamos ante un problema a dos escalas.

El vector de flujo de calor se expresa en términos del cambio en la temperatura por la ley de Fourier según la cual

$$q_i(x) = -\kappa_{ij}(x/\epsilon)\theta_{,j}(x), \quad (3.9)$$

donde κ_{ij} es la conductividad térmica. La ecuación de balance de calor (caso estacionario) se escribe de la forma

$$q_{i,i} = -(\kappa_{ij}(x/\epsilon)\theta_{,j}(x))_{,i} = f(x), \quad (3.10)$$

donde $f(x)$ es la densidad de fuentes de calor internas las cuales dependen de la posición, x . Una explicación más amplia de la teoría termoelástica se puede encontrar en Parton y Kudryavtsev (1993).

Al igual que para laminados, los tensores efectivos se denotarán por C , S , σ y e para el tensor efectivo de rigidez, flexibilidad, esfuerzo y deformación, respectivamente. Los tensores de esfuerzo térmico efectivo por β y el de expansión térmica efectivo por α . Todos los tensores efectivos se escriben sin superíndices.

Capítulo 4

Obtención de propiedades efectivas

Para la predicción de las propiedades efectivas de los compuestos con estructura periódica planteados en el Capítulo 3, usamos dos métodos de homogeneización. Para los CL el método basado en la idea de Backus (1962) descrito en la en la sección 4.1 y el método de homogeneización asintótica (MHA) para los CRF, el cual se describe en la sección 4.2.

En este capítulo se describen cada uno de los métodos de homogeneización. Empezando con el método de Backus (1962), este se aplica a un laminado de n constituyentes elásticos de simetría arbitraria. El método se aplica a la ley de Hooke generalizada. Aquí sólo se escriben los tensores de esfuerzo y deformación efectivos.

En la sección 4.2 se aplica, el método de homogeneización asintótica (MHA) se aplica a un compuesto termoelástico, en el cual una celda con arreglo paralelogramico se repite periódicamente; la celda está formada por una matriz y una fibra cilíndrica, ambas isótropas. El MHA es una técnica basada en un desarrollo asintótico a dos escalas. El problema fundamental de este método es que los coeficientes efectivos dependen de la solución de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera periódicas y con condiciones de conjugación en las interfaces. Aquí describimos la aplicación del MHA y la solución de las ecuaciones diferenciales que se obtienen en el proceso del método y que son necesarias para determinar las constantes efectivas.

4.1. Método de Backus

Para CL usamos el conocido método basado en la idea de Backus (1962) quien obtuvo los tensores efectivos de un laminado no homogéneo de láminas elásticas por medio de una técnica de promedios. Recientemente se han usado métodos alternativos (Milton, 2002) para tratar el

mismo problema. Fórmulas similares han sido obtenidas usando homogeneización asintótica para laminados con materiales piezoeléctricos y magnetoelásticos (Bravo-Castillero et al., 2008; Rodríguez-Ramos et al., 1996) que en el caso de desacoplamiento de campos resultan las mismas que los casos eléctrico y elástico en el primero y los casos magnético, eléctrico y elástico en el segundo. La clave en el método de Backus es buscar soluciones donde los campos varían en la dirección del laminado y observar que las restricciones sobre éstos, las ecuaciones diferenciales y las relaciones constitutivas, implican que ciertos componentes de los campos son constantes o, equivalentemente, que las proyecciones son constantes.

En el campo que estamos tratando, los tensores $S(x)$, $C(x)$, $e(x)$ y $\sigma(x)$ sólo varían en la dirección, x_3 , que es la dirección del laminado por lo que buscamos soluciones que sólo dependan de esta coordenada. Además de las restricciones $\nabla \cdot \sigma = 0$ y $e = [\nabla u + (\nabla u)^T]/2$, se tiene que las componentes $e_{11}^{(i)}$, $e_{22}^{(i)}$, $e_{12}^{(i)}$, $\sigma_{33}^{(i)}$, $\sigma_{23}^{(i)}$, $\sigma_{13}^{(i)}$ en cada constituyente son independientes de x_3 .

Milton (2002) proporciona fórmulas para las constantes elásticas efectivas de un laminado. Para esto, él divide el tensor de rigidez en bloques de la siguiente manera:

$$A_{11}^{(i)} = \begin{pmatrix} C_{33}^{(i)} & C_{34}^{(i)} & C_{35}^{(i)} \\ C_{43}^{(i)} & C_{44}^{(i)} & C_{45}^{(i)} \\ C_{53}^{(i)} & C_{54}^{(i)} & C_{55}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad A_{22}^{(i)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(i)} & C_{12}^{(i)} & C_{16}^{(i)} \\ C_{21}^{(i)} & C_{22}^{(i)} & C_{26}^{(i)} \\ C_{61}^{(i)} & C_{62}^{(i)} & C_{66}^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$A_{12}^{(i)} = \begin{pmatrix} C_{31}^{(i)} & C_{32}^{(i)} & C_{36}^{(i)} \\ C_{41}^{(i)} & C_{42}^{(i)} & C_{46}^{(i)} \\ C_{51}^{(i)} & C_{52}^{(i)} & C_{56}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \text{con } A_{21}^{(i)} = \left(A_{12}^{(i)} \right)^T,$$

y $\left(A_{12}^{(i)} \right)^T$ indica la transpuesta de $A_{12}^{(i)}$. Los bloques asociados al tensor efectivo C están dados por las expresiones

$$A_{11} = \langle A_{11}^{-1} \rangle^{-1}, \quad (4.1)$$

$$A_{12} = \langle A_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle A_{11}^{-1} A_{12} \rangle, \quad (4.2)$$

$$A_{22} = \langle A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \rangle + \langle A_{21} A_{11}^{-1} \rangle \langle A_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle A_{11}^{-1} A_{12} \rangle, \quad (4.3)$$

donde $\langle F \rangle = \sum_{i=1}^n V_i F^{(i)}$ es el promedio aritmético de las fases $F^{(i)}$, también conocido como la regla de mezclas simple. Renombramos $\langle F^{-1} \rangle = \sum_{i=1}^n V_i / F^{(i)}$, al promedio geométrico de las fases, es la llamada regla inversa de mezclas. La formulación de Milton de (4.1)–(4.3) está basada en la relación (3.2a).

Fórmulas similares a (4.1)–(4.3) para S no han sido dadas, hasta donde sabemos. La contraparte de la deducción de Milton (2002) está basada en la ecuación (3.2b). Para la deducción de las

fórmulas primeramente usamos el hecho de que las seis cantidades $e_1^{(i)}$, $e_2^{(i)}$, $e_6^{(i)}$, $\sigma_3^{(i)}$, $\sigma_4^{(i)}$ y $\sigma_{13}^{(i)}$ que aparecen en (3.2) son independientes de x_3 y escribimos

$$e^{(i)} = (e_I^{(i)}, e_{II}^{(i)})^T, \quad (4.4)$$

$$\sigma^{(i)} = (\sigma_I^{(i)}, \sigma_{II}^{(i)})^T, \quad (4.5)$$

con

$$e_I^{(i)} = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_6^{(i)})^T, \quad e_{II}^{(i)} = (e_3^{(i)}, e_4^{(i)}, e_5^{(i)})^T, \quad (4.6)$$

$$\sigma_I^{(i)} = (\sigma_3^{(i)}, \sigma_4^{(i)}, \sigma_5^{(i)})^T, \quad \sigma_{II}^{(i)} = (\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \sigma_6^{(i)})^T. \quad (4.7)$$

De aquí que podamos escribir a (3.2b) como

$$\begin{aligned} e_I^{(i)} &= Q_{12}^{(i)} \sigma_I^{(i)} + Q_{11}^{(i)} \sigma_{II}^{(i)}, \\ e_{II}^{(i)} &= Q_{33}^{(i)} \sigma_I^{(i)} + Q_{21}^{(i)} \sigma_{II}^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$Q_{12}^{(i)} = \begin{pmatrix} S_{13}^{(i)} & S_{14}^{(i)} & S_{15}^{(i)} \\ S_{23}^{(i)} & S_{24}^{(i)} & S_{25}^{(i)} \\ S_{63}^{(i)} & S_{64}^{(i)} & S_{65}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad Q_{11}^{(i)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(i)} & S_{12}^{(i)} & S_{16}^{(i)} \\ S_{21}^{(i)} & S_{22}^{(i)} & S_{26}^{(i)} \\ S_{61}^{(i)} & S_{62}^{(i)} & S_{66}^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$Q_{33}^{(i)} = \begin{pmatrix} S_{33}^{(i)} & S_{34}^{(i)} & S_{35}^{(i)} \\ S_{43}^{(i)} & S_{44}^{(i)} & S_{45}^{(i)} \\ S_{53}^{(i)} & S_{54}^{(i)} & S_{55}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad Q_{21}^{(i)} = (Q_{12}^{(i)})^T.$$

Ahora reescribimos la relación (4.8) de forma que los elementos de los tensores de esfuerzo y de deformación que dependen de x_3 , σ_{II} y e_{II} , queden del lado izquierdo de la relación y los que no tienen dependencia de x_3 , σ_I y e_I , del lado derecho, es decir,

$$\begin{aligned} \sigma_{II}^{(i)} &= [Q_{11}^{(i)}]^{-1} e_I^{(i)} - [Q_{11}^{(i)}]^{-1} Q_{12}^{(i)} \sigma_I^{(i)}, \\ e_{II}^{(i)} &= Q_{21}^{(i)} [Q_{11}^{(i)}]^{-1} e_I^{(i)} + (Q_{33}^{(i)} - Q_{21}^{(i)} [Q_{11}^{(i)}]^{-1} Q_{12}^{(i)}) \sigma_I^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como segundo paso se toma el promedio sobre la celda unidad tomando en cuenta que $e_I^{(i)}$ y $\sigma_I^{(i)}$ no dependen de x_3 . Por lo tanto, su promedio sobre la celda es constante y podemos desacoplar el promedio del producto.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{II} \rangle &= \langle Q_{11}^{-1} \rangle \langle e_I \rangle - \langle Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle \langle \sigma_I \rangle, \\ \langle e_{II} \rangle &= \langle Q_{21} Q_{11}^{-1} \rangle \langle e_I \rangle + \langle (Q_{33} - Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12}) \rangle \langle \sigma_I \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ahora reescribimos las ecuaciones en la forma (4.8) quedando la siguiente relación

$$\langle e_I \rangle = \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle \langle \sigma_I \rangle + \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \sigma_{II} \rangle, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \langle e_{II} \rangle = & \left(\langle Q_{33} - Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle + \langle Q_{21} Q_{11}^{-1} \rangle \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle \right) \langle \sigma_I \rangle \\ & + \langle Q_{21} Q_{11}^{-1} \rangle \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \sigma_{II} \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De aquí que los correspondientes bloques efectivos para el compuesto son dados por:

$$Q_{12} = \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle, \quad (4.13)$$

$$Q_{11} = \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1}, \quad (4.14)$$

$$Q_{33} = \langle Q_{33} - Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle + \langle Q_{21} Q_{11}^{-1} \rangle \langle Q_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle Q_{11}^{-1} Q_{12} \rangle. \quad (4.15)$$

Como las ecuaciones (4.13)–(4.15) son promedios esto nos dice que el orden en el cual las láminas se toman no tiene influencia en las propiedades efectivas. Láminas con las mismas propiedades materiales contribuyen proporcionalmente al total de su fracción volumétrica en la propiedad efectiva.

4.2. Método de homogeneización asintótica

Este método se basa en la idea de resolver problemas con oscilaciones rápidas en la forma de un desarrollo asintótico a dos escalas. Una escala rápida que describe la microestructura del compuesto y la segunda una variable lenta que describe el comportamiento del mismo.

Los coeficientes efectivos dependen de la solución de problemas locales, sobre una celda periódica, es decir, se requiere solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera periódicas y condiciones de conjugación en las interfaces.

Las ecuaciones de gobierno de nuestro problema son

$$\sigma_{ij,j}(x) + X_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (4.16)$$

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x/\epsilon) e_{kl}(x) - \beta_{ij}(x/\epsilon) \theta(x), \quad (4.17)$$

$$\beta_{ij}(x/\epsilon) = C_{ijkl}(x/\epsilon) \alpha_{kl}(x), \quad (4.18)$$

$$2e_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (4.19)$$

$$q_{i,i}(x) = -(\kappa_{ij}(x/\epsilon) \theta_{,j}(x))_{,i} = f(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (4.20)$$

$$q_i = -\kappa_{ij}(x/\epsilon) \theta_{,j}(x), \quad (4.21)$$

donde X_i es una fuerza de cuerpo, σ_{ij} es el tensor de esfuerzo, C_{ijkl} es el tensor de elasticidad, e_{kl} es el tensor de la deformación, $\theta(x)$ es el cambio de temperatura, β_{ij} es el tensor de esfuerzo

térmico, α_{kl} es el coeficiente de expansión térmica, κ_{ij} es la conductividad térmica, q_i es el flujo de calor, $f(x)$ es la densidad de fuentes de calor interna y ϵ es un parámetro pequeño. Las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.20) son independientes. Primeramente se resuelve (4.20) para determinar $\theta(x)$ y después se introduce como una función conocida en la ecuación (4.16) y (4.17).

Las ecuaciones (4.16), (4.17), (4.21) y (4.20) forman un sistema de ecuaciones lineales acopladas cuyos coeficientes que varían rápidamente. Las condiciones en la interfaz son

$$\|u_i(x)\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.22)$$

$$\|\sigma_{ij}(x)n_j\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.23)$$

y

$$\|\theta(x)\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.24)$$

$$\|q_i(x)\| = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.25)$$

Buscamos reducir este sistemas de ecuaciones a otro que sea más sencillo con coeficientes constantes. Esto lo haremos por medio del método de homogeneización asintótica. Se supone que la solución es de la forma

$$u_i(x) = u_i^{(0)}(x, y) + \epsilon u_i^{(1)}(x, y) + \epsilon^2 u_i^{(2)}(x, y) + \dots, \quad (4.26)$$

$$\theta(x) = \theta^{(0)}(x, y) + \epsilon \theta^{(1)}(x, y) + \epsilon^2 \theta^{(2)}(x, y) + \dots. \quad (4.27)$$

Las funciones $u_i^{(m)}(x, y)$ y $\theta^{(m)}(x, y)$ son funciones Y -periódicas, Y es la celda unidad que se repite periódicamente con $y = x/\epsilon$. Primeramente empezamos a trabajar con la ecuación (4.20) para poder obtener $\theta(x)$ y después sustituiremos en (4.16) y (4.17).

Haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (4.28)$$

tenemos

$$\begin{aligned} q_{i,i}(x) = & -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{\partial \kappa_{ij} \theta^{(0)}}{\partial y_j} \right] - \frac{1}{\epsilon} \left[\kappa_{ij} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} - \kappa_{ij} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial y_i \partial x_j} + \kappa_{ij} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y_i \partial y_j} \right] \\ & - \kappa_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\kappa_{ij}(y) \left(\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y_j} \right) \right] \quad \text{en } Y. \end{aligned} \quad (4.29)$$

El siguiente paso es ordenar en términos de potencias de ϵ . Para orden ϵ^{-2}

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{\partial \kappa_{ij} \theta^{(0)}}{\partial y_j} \right] = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.30)$$

De aquí que

$$\theta^{(0)}(x, y) = \theta^{(0)}(x), \quad (4.31)$$

es decir, $\theta^{(0)}$ es independiente de la escala rápida. A orden ϵ^{-1}

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\kappa_{ij}(y) \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y_j} \right] = - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\kappa_{ij} \frac{\partial \theta^{(0)}(y)}{\partial x_j} \right] \quad \text{en } Y. \quad (4.32)$$

De aquí y de (4.31) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\kappa_{ij}(y) \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y_j} \right] = - \frac{\partial \theta^{(0)}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial y_i}(y) \quad \text{en } Y; \quad (4.33)$$

dado esto, podemos escribir una solución del tipo separación de variables como

$$\theta^{(1)}(x, y) = {}_qM(y)\theta_q^{(0)}(x), \quad (4.34)$$

donde ${}_qM(y)$ es solución de la ecuación diferencial del siguiente problema canónico, $q = 1, 2, 3$

$$\left(\kappa_{iq}(y) + \kappa_{ik} {}_qM_{,k}(y) \right)_{,i} = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.35)$$

con condiciones de interfaz

$$\| {}_qM \| = 0, \quad \| \left(\kappa_{iq}(y) + \kappa_{ik} {}_qM_{,k}(y) \right) n_i \| = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.36)$$

Hasta aquí ya sabemos de qué forma debe ser $\theta(x)$ a $O(\epsilon)$ la cual es

$$\theta(x) = \theta^{(0)}(x) + \epsilon {}_qM(y)\theta_q^{(0)}(x) + \dots. \quad (4.37)$$

Ahora regresamos a (4.16) y sustituimos $\theta(x)$ para obtener $u_i(x)$. Para esto procedemos de la misma forma que lo hicimos para obtener $\theta(x)$ primeramente a orden ϵ^{-2} tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}(x/\epsilon) \left(\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^{(0)}}{\partial y_k} \right) \right] = 0 \quad \text{en } Y. \quad (4.38)$$

Por lo tanto tenemos que a primer orden el campo sólo depende de x , la variable macroscópica, es decir,

$$u_i^{(0)}(x, y) = u_i^{(0)}(x). \quad (4.39)$$

A orden ϵ^{-1}

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}(x/\epsilon) \left(\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial y_k} \right) \right] + C_{ijkl}(x/\epsilon) \left[\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(0)}}{\partial x_k} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ikkl}(x/\epsilon)\alpha(x/\epsilon)\theta^{(0)}(x)] = 0 \quad \text{en } Y. \end{aligned} \quad (4.40)$$

$\theta^{(0)}$ sólo depende de x . Propongo una solución tipo separación de variables para (4.40)

$$u_i^{(1)}(x, y) = {}_{pq}U_i(y)u^{(0)}(x)_{p,q} + N_i(y)\theta^{(0)}(x). \quad (4.41)$$

La ecuación diferencial que ${}_{pq}U_i(y)$ debe cumplir es

$$(C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y) {}_{pq}U_{k,l}(y))_{,j} = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.42)$$

con condiciones de interfaz

$$\| {}_{pq}U_i \|_{\Gamma} = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.43)$$

$$\|(C_{ijpq} + C_{ijkl}(y) {}_{pq}U_{k,l})n_j\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.44)$$

mientras que $N_i(y)$ debe satisfacer

$$(\beta_{ij}(y) + C_{ijkl}N_{k,l}(y))_{,j} = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.45)$$

con condiciones

$$\|N_i\| = 0, \quad \|(\beta_{ij}(y) + C_{ijkl}N_{k,l}(y))n_j\| = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.46)$$

Hasta aquí tenemos que $u_i(x)$ a primer orden se escribe de la forma

$$u_i(x) = u_i^{(0)}(x) + \epsilon ({}_{pq}U_{k,l}(x) + N_i(y)\theta^{(0)}(x)) \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_q} + \dots \quad (4.47)$$

Resolviendo los problemas canónicos tenemos los campos a primer orden, nos faltan las propiedades efectivas para esto se hace uso de los términos a orden ϵ^0 de las ecuaciones (4.17) y (4.29). Para $\theta(x)$ y $u_i(x)$ tenemos

$$\kappa_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y_j} \right] + \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\kappa_{ij}(y) \left(\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y_j} \right) \right] = f(x) \quad \text{en } Y, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & C_{ijkl}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial x_k} \right] - \beta_{ij} \frac{\partial \theta^{(0)}(x)}{\partial x_j} \\ & + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \left[\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^{(2)}}{\partial x_k} \right] \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial y_j} [\beta_{ij}\theta^{(1)}(x, y)] + X_i = 0, \quad \text{en } Y. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Tomando el promedio sobre la celda unitaria y usando las condiciones de interfaz obtenemos las ecuaciones homogeneizadas

$$-\kappa_{ij}\theta_{,ij}^0(x) = f(x) \quad \text{en } Y, \quad (4.50)$$

$$C_{ijkl}u_{k,lj}^{(0)}(x) - \beta_{ij}\theta_{,j}^{(0)}(x) + X_i = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.51)$$

Notemos que κ_{ij} , C_{ijkl} y β_{ij} en (4.50) y (4.51) ya no tienen dependencia de y esto es porque éstas son las propiedades efectivas del compuesto, son constantes en la celda unidad y están dadas por

$$C_{ijpq} = \langle C_{ijpq}(y) + C_{ijkl} U_{k,l}(y) \rangle, \quad (4.52)$$

$$\beta_{ij} = \langle \beta_{ij}(y) + C_{ijkl} N_{k,l}(y) \rangle, \quad (4.53)$$

$$\kappa_{iq} = \langle \kappa_{iq}(y) + \kappa_{ikq} M_{,k}(y) \rangle. \quad (4.54)$$

Las propiedades efectivas están determinadas por las propiedades de los constituyentes, la fracción volumétrica que ocupan en el compuesto y por la solución de (4.35), (4.42) y (4.45). Para resolver estos problemas se usan métodos de teoría del potencial de variable compleja, las propiedades y relaciones de las funciones elípticas de Weirstrass con periodos $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \exp(i\alpha)$, α es el ángulo del paralelogramo. La obtención de la solución se detalla en la siguiente sección.

4.3. Solución de los problemas locales

Resumiendo tenemos que para determinar las constantes elásticas efectivas C_{ijpq} del compuesto, es necesario resolver qp problemas

$$(C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y) U_{k,l}(y))_{,j} = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.55)$$

$$\| U_{,i} \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.56)$$

$$\| (C_{ijpq} + C_{ijkl}(y) U_{k,l}(y))_{,j} n_j \| = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.57)$$

Para determinar el tensor de esfuerzo térmico efectivo β_{ij} se deben resolver los i -problemas

$$(\beta_{ij}(y) + C_{ijkl} N_{k,l}(y))_{,j} = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.58)$$

$$\| N_i \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.59)$$

$$\| (\beta_{ij}(y) + C_{ijkl} N_{k,l}(y))_{,j} n_j \| = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.60)$$

Para la conductividad térmica efectiva κ_{iq} , los q -problemas

$$(\kappa_{iq}(y) + \kappa_{ikq} M_{,k}(y))_{,i} = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.61)$$

$$\| M \| = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.62)$$

$$\| (\kappa_{iq}(y) + \kappa_{ikq} M_{,k}(y))_{,i} n_i \| = 0 \quad \text{en } Y. \quad (4.63)$$

Describiremos la solución de los problemas para U_k ya que para N_k la solución es análoga a ellos. La solución para cada uno de los problemas ${}_1M$ y ${}_2M$ es análoga a la del problema ${}_3U_3$

ya que los tres se reducen al problema de Laplace. Mientras que no es necesario resolver el problema ${}_3M$ ya que se puede ver la solución directamente de la expresión (4.54), pues

$$\kappa_{33} = \langle \kappa_{33}(y) + \kappa_{3k3}M_{,k} \rangle, \quad (4.64)$$

κ_{3k} es diferente de cero sólo para $k = 3$ pero $M_{,3} = 0$ porque las propiedades no varían en la dirección x_3 . Por lo tanto (4.64) se reduce al problema aritmético, es decir,

$$\kappa_{33} = \langle \kappa_{33}(y) \rangle. \quad (4.65)$$

Dicho lo anterior, pasamos a la descripción de obtener las soluciones a los problemas pq .

Los valores que pq puede tomar son 11, 22, 33, 12, 31, 32. Para 11, 22, 33, 12 se tiene una ecuación (4.55) que toma la forma

$$C_{1122} {}_{pq}U_{2,21} + C_{1111} {}_{pq}U_{1,11} + C_{1212} ({}_{pq}U_{2,12} + {}_{pq}U_{2,22}) = 0 \quad \text{en } Y, \quad (4.66)$$

para $pq = 31, 32$ se tiene

$$C_{1313} ({}_{pq}U_{3,11} + {}_{pq}U_{3,22}) = 0 \quad \text{en } Y. \quad (4.67)$$

Los problemas locales se desacoplan en dos categorías a los que se les denomina problemas planos y antiplanos. Empezaremos la descripción por los problemas antiplanos 13 y 32. En ambos hay que resolver la ecuación de Laplace y usar las condiciones de frontera que son muy similares, por esta razón sólo escribiremos en detalle la solución para el problema 13.

Problema antiplano 13

Se busca ${}_{13}U_3$ como una solución doblemente periódica que cumpla las siguientes condiciones

$$\Delta U_3^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (4.68)$$

$$\|U_3\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.69)$$

$$\|(C_{3j13} + C_{3jkl}U_{k,l})n_j\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.70)$$

$$\langle U_3 \rangle = 0. \quad (4.71)$$

Omitimos los preíndices 13 por conveniencia en la notación, y donde Δ es el operador Laplaciano en dos dimensiones, el vector unidad normal exterior a la interfaz Γ es $n = (n_1, n_2) = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$ y γ puede tomar el valor 1 o 2. Para encontrar la solución de este problema se hace uso de la teoría de funciones elípticas. Para ello se propone una solución dada por la

combinación lineal completa de estas funciones, así

$$U_3^{(1)} = \operatorname{Re} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\} \quad \text{en } S_1, \quad (4.72)$$

$$U_3^{(2)} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k z^k \right\} \quad \text{en } S_2, \quad (4.73)$$

donde $z = y_1 + i y_2$, $\zeta(z)$ es la función Zeta de Weierstrass la cual es cuasiperiódica con períodos ω_1 y ω_2 y $\zeta^{(k)}(z)$ indica la k -ésima derivada de esta función, las cuales son doblemente periódicas. Los coeficientes a_k y b_k son reales y desconocidos. El superíndice o en la suma indica que sólo se suma sobre los índices impares. Ahora el objetivo es encontrar estos coeficientes. Antes de continuar podemos ver que se puede encontrar una relación entre a_0 y a_1 usando la cuasiperiodicidad de $\zeta(z)$ y tomando en cuenta la doble periodicidad de U_3 , tenemos

$$U_3^{(1)}(z + \omega_1) - U_3^{(1)}(z) = 0 \quad (4.74)$$

entonces

$$\begin{aligned} U_3^{(1)}(z + \omega_1) - U_3^{(1)}(z) &= \operatorname{Re} \left\{ a_0(z + \omega_1) + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z + \omega_1)}{(k-1)!} \right\} + \\ &\quad - \operatorname{Re} \left\{ a_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \{ a_0 \omega_1 + a_1 (\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z)) \} \end{aligned} \quad (4.75)$$

De la cuasiperiodicidad de la función $\zeta(z)$, es decir, $\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) = \delta_1$. Esto lleva a

$$a_0 + a_1 \delta_1 = 0. \quad (4.76)$$

Haciendo el desarrollo en serie de potencias de la función ζ de Weierstrass obtenemos

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} {}^o a_l z^{-l} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^o \eta_{kl} z^l \right\} \quad (4.77)$$

donde

$$\eta_{kl} = \frac{(k+l-1)!}{k!l!} S_{k+l}, \quad k, l = 1, 3, \dots, \quad (4.78)$$

$$S_k = \sum_{m,n}^l (m\omega_1 + n\omega_2)^{-k}, \quad k = 4, 8, \dots. \quad (4.79)$$

S_k es la suma de la latiz asociada a la celda de periodos $\omega = 1$ y $\omega_2 = \exp(i\phi)$. De la suma se excluyen los casos $m = n = 0$ denotando esto con la prima en la suma. Nótese que la matriz η_{kl} es simétrica. Definimos

$$S_2 = \delta_1. \quad (4.80)$$

Para determinar los coeficientes de las series (4.72), (4.73) vamos a hacer uso de la continuidad en el desplazamiento y en la tracción. Primeramente de la continuidad del desplazamiento en la interfaz se tiene

$$U^{(1)}(z) = U^{(2)}(z) \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.81)$$

donde $\Gamma = \text{Rexp}(i\theta)$ que en términos de las series de potencias se escribe como

$$\sum_{l=1}^{\infty} {}^o a_l R^{-l} \cos l\theta - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^o \eta_{kl} R^l \cos l\theta = b_l R^l \cos l\theta. \quad (4.82)$$

Esta se reduce a una serie de cosenos nula. La condición de continuidad en el desplazamiento se escribe como

$$a_l R^{-l} - R^l \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kl} = b_l R^l. \quad (4.83)$$

Para trabajar con la condición de tracción continua

$$\|C_{1313}U_{3,1}n_1 + C_{3232}U_{3,2}n_2\| = -\|C_{1313}\|n_1, \quad (4.84)$$

Para facilitar el siguiente cálculo introducimos las funciones

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} {}^o \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} a_k, \quad y \quad (4.85)$$

$$g(z) = \sum_{l=1}^{\infty} {}^o b_l z^l. \quad (4.86)$$

Luego,

$$U_{3,1}^{(1)} = \text{Re} \{a_0 + f'(z)\}, \quad (4.87)$$

$$U_{3,2}^{(1)} = -\text{Im} \{a_0 + f'(z)\}, \quad (4.88)$$

$$U_{3,1}^{(2)} = \text{Re} \{g'(z)\}, \quad (4.89)$$

$$U_{3,2}^{(2)} = -\text{Im} \{g'(z)\}, \quad (4.90)$$

entonces la condición de interfaz (4.84) se puede escribir como

$$C_{3232}^{(1)} a_0 n_1 + \text{Re} \left\{ C_{3232}^{(1)} f'(z) - C_{3232}^{(2)} g'(z) \right\} n_1 \quad (4.91)$$

$$-\text{Im} \left\{ C_{3232}^{(1)} f'(z) - C_{3232}^{(2)} g'(z) \right\} n_2 = C_{1313}^{(2)} n_1 - C_{1313}^{(1)} n_1, \quad (4.92)$$

en la interfaz Γ , $z = \text{Re}^{i\theta}$

$$y_1 = R \cos \theta, \quad y_2 = R \sin \theta \quad (4.93)$$

$$n_1 = \cos \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \quad n_2 = \sin \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial y_1}{\partial \theta}. \quad (4.94)$$

Sea

$$v(z) = \text{Im} \left\{ C_{3232}^{(1)} f(z) - C_{3232}^{(2)} g(z) \right\}. \quad (4.95)$$

En términos de $v(z)$ la condición de interfaz queda de la forma

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \theta} = (C_{1313}^{(2)} - C_{1313}^{(1)}) \cos \theta. \quad (4.96)$$

Integrando indefinidamente con respecto a θ tenemos que

$$C_{3232}^{(1)} a_0 \sin \theta + \frac{v}{R} = (C_{1313}^{(2)} - C_{1313}^{(1)}) \sin \theta + C, \quad (4.97)$$

donde C es una constante de integración que es igual a cero por la periodicidad de las funciones.

Escribiendo las series de Laurent de $f(z)$ y $g(z)$ en (4.95) queda

$$v(z) = \text{Im} \left\{ C_{3232}^{(1)} \left(- \sum_{l=1}^{\infty} {}^o a_l z^{-l} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^o \eta_{kl} z^l \right) - C_{3232}^{(2)} \sum_{l=1}^{\infty} {}^o b_l z^l \right\} \quad (4.98)$$

Entonces la condición en la interfaz (4.97) es

$$-C_{3232}^{(1)} \sum_{l=1}^{\infty} {}^o a_l \left(R^{-l} - a_k \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \eta_{kl} R^{-l} \right) \sin l\theta - C_{3232}^{(2)} \sum_{l=1}^{\infty} {}^o b_l R^l \sin l\theta = -R \|C_{1313}\| \sin \theta. \quad (4.99)$$

Para $l = 1$ tenemos

$$\|C_{1313}\| \sin \theta + \frac{1}{R} C_{3232}^{(1)} \left(-R^{-1} a_1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{k1} R \right) \sin \theta = C_{3232}^{(2)} b_1 R \sin \theta. \quad (4.100)$$

mientras que $l \neq 1$

$$C_{3232}^{(1)} \left(-R^{-l} a_l + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kl} R^l \right) \sin l\theta = C_{3232}^{(2)} b_l R^l \sin l\theta \quad (4.101)$$

Escribiendo la condición de interfaz (4.83) junto con la segunda condición de interfaz, de la combinación (4.100) y (4.101), se obtienen, los siguientes sistemas para los coeficientes desconocidos a_k y b_k

$$a_l R^{-l} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kl} R^l = b_l R^l, \quad (4.102)$$

$$R(C_{1313}^{(1)} - C_{1313}^{(2)}) \delta_{l1} - C_{3232}^{(1)} \left(R^{-l} a_l + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kl} R^l \right) = C_{3232}^{(2)} b_l R^l. \quad (4.103)$$

Despejando $b_l R^l$ de (4.102) y sustituyendo en (4.103) obtenemos

$$R(C_{1313}^{(1)} - C_{1313}^{(2)}) \delta_{l1} - C_{3232}^{(1)} \left(R^{-l} a_l + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kl} R^l \right) = C_{3232}^{(2)} \left(a_l R^{-l} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kl} R^l \right) \quad (4.104)$$

o bien

$$a_l R^{-l} + \chi \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kl} R^l = \chi R \delta_{1l}, \quad (4.105)$$

donde χ es el contraste relativo

$$\chi = \frac{C_{1313}^{(1)} - C_{1313}^{(2)}}{C_{1313}^{(1)} + C_{1313}^{(2)}}. \quad (4.106)$$

Para simplificar el sistema de ecuaciones (4.105) hacemos el siguiente reescalamiento $a'_m = \sqrt{m} a_m R^{-m}$ entonces el sistema queda como

$$a'_l + \chi \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a'_k R^{l+k} \eta_{kl} \sqrt{l/k} = \chi R \delta_{1l} \sqrt{l}. \quad (4.107)$$

Ahora definimos $w_{kl} = R^{l+k} \eta_{kl} \sqrt{l/k}$, nótese que $w_{kl} = w_{lk}$. El sistema final a resolver para a_l es un sistema algebraico simétrico de ecuaciones lineales infinito cuyo término inhomogéneo es un vector con sólo una componente no nula.

$$a'_l + \chi \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a'_k w_{kl} = \chi R \delta_{1l} \sqrt{l}. \quad (4.108)$$

Propiedades efectivas

Para tener una expresión analítica de la propiedad efectiva C_{1313} dada por la expresión (4.52) vamos a calcular $\langle C_{1313} {}_{pq} U_{3,1} \rangle$ por medio del Teorema de Gauss y la continuidad del desplazamiento en la interfaz. Ver Fig. (3.2) b.

$$\begin{aligned} C_{1313} &= \langle C_{1313} \rangle + \langle C_{1313} {}_{pq} U_{3,1} \rangle = \langle C_{1313} \rangle + \int_{S_1 \cup S_2} C_{1313} {}_{pq} U_{3,1} dy_1 dy_2 \\ &= \langle C_{1313} \rangle + \int_{S_1} C_{1313} {}_{pq} U_{3,1} dy_1 dy_2 + \int_{S_2} C_{1313} {}_{pq} U_{3,1} dy_1 dy_2 \\ &= \langle C_{1313} \rangle - \|C_{1313}\| \int_{\Gamma} {}_{pq} U_3^{(2)} dy_2. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Como Γ es la circunferencia de radio R , podemos parametrizar en coordenadas polares, es decir, hacer $y_1 = R \sin \theta$ $dy_2 = R \cos \theta$. Entonces $y U_3^{(2)} = \text{Re}\{\sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k z^{k1}\}$,

$$\int_{\Gamma} U_3^{(2)} dy_2 = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \int_{\Gamma} b_k \cos(k\theta) R^{k+1} \cos \theta d\theta = b_1 R^2 \pi; \quad (4.110)$$

ahora de (4.102)

$$b_1 = a_1 R^{-2} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1} \quad (4.111)$$

y de (4.105)

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1} = -\frac{a_1 R^{-2}}{\chi} + 1. \quad (4.112)$$

De aquí

$$C_{1313} = \langle C_{1313} \rangle - \|C_{1313}\| R^2 \pi (a_1 R^{-2} [1 + \chi^{-1}] - 1) \quad (4.113)$$

$$= \langle C_{1313} \rangle - \frac{2\pi a_1 C_{1313}^{(1)}}{V} + \frac{\|C_{1313}\| \pi R^2}{V}; \quad (4.114)$$

tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle C_{1313} \rangle &= C_{1313}^{(1)} (1 - V_2) + V_2 C_{1313}^{(2)} \\ &= C_{1313}^{(1)} - V_2 \|C_{1313}\| \end{aligned} \quad (4.115)$$

y sustituyendo lo anterior en (4.113) tenemos que la propiedad efectiva está dada por

$$C_{1313} = C_{1313}^{(1)} \left(1 - \frac{2\pi a_1}{V} \right). \quad (4.116)$$

Nos queda por determinar a_1 , para esto retomemos el sistema (4.108)

$$a'_l + \chi \sum_{k=1}^{\infty} a'_k w_{kl} = \chi R \delta_{1l} \sqrt{l}. \quad (4.117)$$

En forma matricial se escribe como

$$(\chi^{-1} I + W) D = U, \quad (4.118)$$

con

$$I_{ij} = \delta_{ij}, \quad D = (a'_1, a'_2, a'_3, \dots) \quad \text{y} \quad U = (R, 0, 0, \dots). \quad (4.119)$$

El sistema (4.118) se puede escribir equivalentemente como

$$(\chi^{-1} + w_{11}) a'_1 + \mathcal{V}^T D' = -R, \quad (4.120)$$

$$\mathcal{V} a'_1 + (\chi^{-1} I + W') D' = 0, \quad (4.121)$$

donde la matriz W y el vector D se descomponen de la siguiente forma

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \mathcal{V}^T \\ \mathcal{V} & W' \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 \\ D' \end{pmatrix},$$

D' y \mathcal{V} son vectores infinitos y W' es una matriz infinita. Esto se hace con el fin de encontrar una expresión para a_1 y poder sustituirla en la ecuación anterior. Al despejar D' de la ecuación y sustituir obtenemos

$$[(\chi^{-1} + w_{11}) - \mathcal{V}^T (\chi^{-1} + W') \mathcal{V}] a'_1 = R;$$

de aquí se tiene

$$\begin{aligned} a'_1 &= R^2 \chi [1 + w_{11} \chi - \chi^2 \mathcal{V}^T (\mathbf{I} + \chi \mathbf{W}')^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \\ &= R^2 \chi [1 + w_{11} \chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1\mathbf{M}^{-1} \mathcal{V}]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.122)$$

con

$${}_1\mathbf{M} = \mathbf{I} + \chi \mathbf{W}'. \quad (4.123)$$

Sustituimos a'_1 en (4.116) para obtener la propiedad efectiva C_{1313}

$$C_{1313} = C_{1313}^{(1)} \left\{ 1 - \frac{2\pi R^2 \chi}{\sin \theta} [1 + {}_1w_{11} \chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1\mathbf{M}^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \right\}. \quad (4.124)$$

Para determinar C_{2323} necesitamos resolver el problema $pq = 23$; haciendo un procedimiento análogo al problema $pq = 13$ obtenemos

$$C_{2323} = C_{2323}^{(1)} \left\{ 1 - \frac{2\pi R^2 \chi}{\sin \theta} [1 - {}_2w_{11} \chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_1\mathbf{N}^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \right\}, \quad (4.125)$$

con ${}_1\mathbf{N} = \mathbf{I} - \chi \mathbf{W}'$.

Las fórmulas para las propiedades efectivas C_{1313} y C_{2323} están escritas de tal manera que la periodicidad se manifiesta en W debido a las sumas de la latiz. La dependencia de las propiedades de los constituyentes está en el contraste relativo χ . La dependencia de la geometría está en el radio del cilindro R . Las fórmulas son expresiones sencillas.

Solución de los problemas pp U y ${}_{12}$ U

Para poder determinar las propiedades efectivas C_{ijpp} es necesario resolver los problemas pp los cuales son de la forma siguiente

$$C_{1212} \mathbf{U}_{1,22}^{(Y)} + C_{1111} \mathbf{U}_{1,11}^{(Y)} + (C_{1122} + C_{1212}) \mathbf{U}_{2,12}^{(Y)} = 0 \quad \text{en } S_Y \quad (4.126)$$

$$\|\mathbf{U}_i\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.127)$$

$$\|\sigma_{1\delta} n_\delta\| = -\|C_{i\delta 11}\| n_\delta \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.128)$$

lo cual haremos en esta sección. Al igual que en el caso anterior suprimimos los preíndices para facilitar la notación. Para la solución de los problemas pp U se utilizarán los potenciales de Kolosov-Muskhelishvili. Los potenciales φ y ψ están relacionados con el desplazamiento y la tracción mediante las fórmulas

$$\sigma_{11}^{(i)} + \sigma_{22}^{(i)} = 2 \left[\varphi'_i(z) + \overline{\varphi}'_i(z) \right], \quad (4.129)$$

$$\sigma_{22}^{(i)} - \sigma_{11}^{(i)} + 2i\sigma_{12}^{(i)} = 2 \left(\overline{z} \varphi_i(z)''(z) + \psi_i(z)'(z) \right), \quad (4.130)$$

$$2C_{1212}^{(i)} \left(\mathbf{U}_1^{(i)} + i\mathbf{U}_2^{(i)} \right) = \kappa_i \varphi_i(z) - z \overline{\varphi}'_i(z) - \overline{\psi}_i(z), \quad (4.131)$$

donde $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$. Los potenciales $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_1(z)$ y $\psi_2(z)$ en S_1 se pueden escribir en términos de ζ , $\zeta^{(k)}$ y $Q^{(k-1)}$ (Parton and Kudryavtsev, 1993) como

$$\varphi_1(z) = a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \quad \text{en } S_1, \quad (4.132)$$

$$\psi_1(z) = b_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{Q^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \quad \text{en } S_1, \quad (4.133)$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o c_k z^k \quad \text{en } S_2, \quad (4.134)$$

$$\psi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o d_k z^k \quad \text{en } S_2, \quad (4.135)$$

donde a_k , b_k , c_k y d_k son las incógnitas por encontrar. $Q(z)$ es la función Natanzon que cumple

$$Q(z + \omega_j) - Q(z) = \bar{\omega}_j P(z) + \gamma_j, \quad (4.136)$$

$$Q^{(k)}(z + \omega_j) - Q^{(k)}(z) = \bar{\omega}_j P^{(k)}(z) \quad (4.137)$$

y

$$\gamma_j = 2Q\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \bar{\omega}_j P\left(\frac{\omega_j}{2}\right). \quad (4.138)$$

Los periodos ω_j y los valores en $\omega_j/2$ de γ_j están relacionados de la siguiente manera

$$\gamma_2 \omega_1 - \gamma_1 \omega_2 = \delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta \bar{\omega}_1. \quad (4.139)$$

Por las condiciones de periodicidad se tiene que

$$k_1 \varphi_1(z + \omega_j) - (z + \omega_j) \bar{\varphi}_1(z + \omega_j) - \bar{\psi}_1(z + \omega_j) = k_1 \varphi_1(z) - z \bar{\varphi}_1(z) - \bar{\psi}_1(z). \quad (4.140)$$

Usando (4.136) y (4.137) se obtiene

$$a_0 \omega_j (k_1 - 1) - b_0 \bar{\omega}_j = a_1 (\bar{\gamma}_j - k_1 \delta_j) + b_1 \bar{\delta}_j. \quad (4.141)$$

De aquí que a_0 y b_0 están dados en función de a_1 y b_1 como

$$a_0 = a_1 E_1 + b_1 F_1, \quad (4.142)$$

$$b_0 = a_1 E_2 + b_1 F_2, \quad (4.143)$$

con

$$E_1 = \frac{\bar{\delta}_2 \omega_1 - \bar{\delta}_1 \omega_2 + k_1 (\bar{\omega}_1 \delta_2 - \bar{\omega}_2 \delta_1)}{\Delta (k_1 - 1)}, \quad (4.144)$$

$$F_1 = \frac{\bar{\omega}_2 \bar{\delta}_1 \bar{\omega}_1 \bar{\delta}_2}{\Delta (k_1 - 1)}, \quad (4.145)$$

$$E_2 = \frac{\bar{\gamma}_2 \omega_1 - \bar{\gamma}_1 \omega_2 + k_1 (\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1)}{\Delta}, \quad (4.146)$$

$$F_2 = \frac{\omega_1 \bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_1 \omega_2}{\Delta}, \quad (4.147)$$

y

$$\Delta = \bar{\omega}_1 \omega_2 - \omega_1 \bar{\omega}_2. \quad (4.148)$$

Las funciones incógnitas se desarrollan en serie de Laurent de la forma

$$\varphi_1(z) = a_0 z + \sum_{p=1}^{\infty} {}^o a_k z^{-p} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \sum_{p=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{kp} z^p \quad \text{en } S_1, \quad (4.149)$$

$$\psi_1(z) = b_0 z + \sum_{p=1}^{\infty} {}^o b_k z^{-p} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \sum_{p=1}^{\infty} {}^o b_k \eta_{kp} z^p + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \sum_{p=1}^{\infty} k {}^o a_k R^k \rho_{kp} z^p, \quad \text{en } S_1, \quad (4.150)$$

y en serie de Taylor

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o d_k z^k \quad \text{en } S_2, \quad (4.151)$$

$$\psi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o e_k z^k \quad \text{en } S_2, \quad (4.152)$$

con

$$\rho_{kp} = \frac{(k+p)!}{p!k!} T_{k+p+1}, \quad (4.153)$$

y

$$T_{k+p+1} = \sum_{m,n} \left(\frac{m\omega_1 + n\bar{\omega}_2}{n\omega_1 + m\omega_2} \right)^{k+p+1}. \quad (4.154)$$

Para determinar los coeficientes desconocidos a_k , b_k , c_k , d_k y e_k se hará uso de las condiciones de continuidad en la interfaz. De la continuidad en el desplazamiento (4.127) se tiene que

$$U_1^{(1)}(z) + iU_2^{(1)}(z) = U_2^{(2)}(z) + iU_1^{(2)}(z) \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.155)$$

En términos de los potenciales esta relación se puede escribir como

$$\frac{C_{1212}^{(2)}}{C_{1212}^{(1)}} \left(k_1 \varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \right) = k_2 \varphi_2(z) - z \overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)}. \quad (4.156)$$

Al sustituir los desarrollos en series de los potenciales $\varphi_s(z)$ y $\psi_s(z)$ se tiene las siguientes ecuaciones

$$\chi_m R(k_1 - 1) \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1} \right) - \chi_m b_1 R^{-1} = d_1 R(k_2 - 1), \quad (4.157)$$

$$\chi_m \left[k_1 \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k R^k \eta_{kp} + R^{-(p-2)} (p-2) a_{p-2} - b_p R^p \right] = k_2 d_k R^p, \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned} \chi_m \left[k_1 a_p R^p - b_0 \delta_{1p} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k(p+2)} R^{p+2} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k \eta_{kp} R^p + \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \rho_{kp} R^p \right] = -(p+2) d_{p+2} R^{p+2} - e_p R^p, \quad (4.159) \end{aligned}$$

La continuidad en la tracción en términos de los potenciales se puede escribir como

$$\|\varphi_i(z) + z\overline{\varphi}'_i(z) + \overline{\psi}_i(z)\| = -\nu z + m\bar{z}, \quad (4.160)$$

donde

$$\nu = \frac{\|C_{22pp} + C_{11pp}\|}{2} \quad \text{y} \quad m = \frac{\|C_{22pp} - C_{11pp}\|}{2}. \quad (4.161)$$

De (4.160) se obtienen las siguientes expresiones

$$a_0R + \frac{kR}{2} + R \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta_{k1} + \frac{b_1 R^{-1}}{2} = d_1, \quad (4.162)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta_{kp} R^p - (p-2)R^{-(p-2)} a_{p-2} + b_p R^{-p} = d_p R^p, \quad (4.163)$$

$$\begin{aligned} a_p R^{-p} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k (p+2) \eta_{k(p+2)} R^{p+2} + b_0 R \delta_{1p} + m R \delta_{1p} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k \eta_{kp} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \rho_{pk} = (p+2) d_{p+2} + e_p. \end{aligned} \quad (4.164)$$

De las ecuaciones (4.157)-(4.159) y (4.162)-(4.164) se obtiene

$$b_1 = \left(-E_1 a_1 - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1} \right) \frac{\beta_1}{\beta_0} + n \frac{\beta_2}{\beta_0}, \quad (4.165)$$

$$b_p = \frac{\chi_m k_1 - k_2}{\chi_m + k_2} \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta_{kp} + a_{p-2} (p-2) R^{-2p+2}, \quad (4.166)$$

$$\begin{aligned} a_p R^{-p} \frac{k_1 \chi_m + 1}{1 - \chi_m} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o R^{p+2} a_k \eta_{k(p+2)} (p+2) - b_0 R \delta_{1p} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k \eta_{kp} \\ - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \tau_{kp} = -\frac{m R \delta_{1p}}{1 - \chi_m}, \end{aligned} \quad (4.167)$$

$$d_{p+2} R^{p+2} (p+2) + e_p R^p = \frac{\chi_m}{\chi_m - 1} \left(\frac{k_1 + 1}{\chi_m + 1} a_p R^{-p} + \frac{m R \delta_{1p}}{\chi_m + 1} \right), \quad (4.168)$$

con

$$\beta_0 = F_1 (\chi_m (\kappa_1 - 1)) - (\kappa_2 - 1) - R^{-2} (\chi_m + (\kappa_2 - 1)), \quad (4.169)$$

$$\beta_1 = \chi_m (\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1), \quad (4.170)$$

$$\beta_2 = \frac{\kappa_2 - 1}{2}. \quad (4.171)$$

Usamos la definición de b_1 y b_p dados en (4.165) y (4.166) para escribir (4.167) sólo en términos de a_k . Primeramente

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \eta_{kp} = b_1 \eta_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{(k+2)} \eta_{(k+2)p}; \quad (4.172)$$

y de (4.165)

$$b_{(k+2)} = \frac{\chi_m k_1 - k_2}{\chi_m + k_2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j {}^o \eta_{j(k+2)} R^{2k+2} + a_k k R^2. \quad (4.173)$$

Sumando sobre k tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_{k+2} \eta_{(k+2)p} = \frac{\chi_m k_1 - k_2}{\chi_m + k_2} \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{j=1}^{\infty} {}^o \eta_{(j+2)p} \eta_{k(j+2)} R^{2j+4} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \eta_{(k+2)p} k a_k R^2. \quad (4.174)$$

Sustituimos b_0 y $\sum_{k=1}^{\infty} {}^o b_k \eta_{kp}$ en (4.167)

$$\begin{aligned} & a_1 \left[E_1 (F_2 \delta_{1p} + \eta_{1p}) \frac{\beta_1}{\beta_2} - \delta_{1p} \right] + a_p \frac{\chi_m k_1 + 1}{\chi_m - 1} + \frac{\beta_1}{\beta_0} (F_2 \delta_{1p} + \eta_{1p}) \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1} \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k R^2 [\eta_{k(p+2)} (p+2) + k \eta_{(p+2)p}] \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o \sum_{j=1}^{\infty} {}^o a_k \frac{\chi_m - k_2}{\chi_m + k_2} \eta_{(j+2)p} \eta_{k(j+2)} R^{2j+4} - k \rho_{kp} = \frac{-m \delta_{1p}}{\chi_m - 1} + \frac{n \beta_2}{\beta_0} (F_2 \delta_{1p} + \eta_{1p}). \end{aligned} \quad (4.175)$$

Como en el caso antiplano, reescalamos $a'_l = a_l \sqrt{l}/R^l$, el sistema se reescribe como

$$a_1 [H_1 \delta_{1p} + E_2 w_{1l} R^{-1}] + H_2 a'_p + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a'_k H_{kp} = H_4 + \delta_{1p} + \frac{n \beta_2}{\beta_0} w_{1p}.$$

donde

$$H_1 = E_1 F_2 \frac{\beta_1}{\beta_2} - E_2, \quad (4.176)$$

$$H_2 = \frac{\chi_m k_1 + 1}{\chi_m - 1}, \quad (4.177)$$

$$H_3 = \frac{\chi_m k_1}{\chi_m + k_2}, \quad (4.178)$$

$$H_4 = \left(\frac{-m}{\chi_m - 1} + \frac{n \beta_2}{\beta_0} F_2 \right), \quad (4.179)$$

$$\begin{aligned} H_{pk} &= \frac{\beta_1}{\beta_0} (F_2 \delta_{1p} + w_{1p} R^{-1}) + w_{k1} \left[\sqrt{p(p+2)} w_{k(p+2)} + \sqrt{\frac{(k+2)}{k}} w_{(k+2)p} \right] \\ & - H_3 \sum_{j=1}^{\infty} w_{(j+2)p} w_{k(j+2)} - g_{kp}; \end{aligned} \quad (4.180)$$

el lado derecho de (4.176) es un vector que sólo tiene una componente no nula lo cual permite despejar a'_1 fácilmente. Así

$$G a'_1 + \mathcal{V}^T D' = n \frac{\beta_2}{\beta_0} + \Lambda, \quad (4.181)$$

$$(E_2 \mathcal{V}_p + \mathcal{V}) a'_1 + (H_2 I + \mathcal{H}') D' = \frac{n \beta_2}{\beta_0} \mathcal{V}_p. \quad (4.182)$$

con

$$\Lambda = \frac{n\beta_2}{\beta_0} - \frac{\chi_m}{\chi_m - 1}, \quad (4.183)$$

$$\mathcal{V}^T = \mathcal{H}_{1k}, \quad (4.184)$$

$$\mathcal{V}_p = w_{1p}, \quad (4.185)$$

$$a'_1 = [G - \mathcal{V}^T M^{-1} (E_2 \mathcal{V}_p + \mathcal{V})]^{-1} \left(\frac{n\beta_2}{\beta_0} w_{11} + \Lambda - \mathcal{V}^T M^{-1} \frac{n\beta_2}{\beta_0} \mathcal{V} \right), \quad (4.186)$$

$$D' = \left[\mathcal{V}^T - G (E_2 \mathcal{V}_p + \mathcal{V})^{-1} (H_2 I + \mathcal{H}') + \mathcal{V}^T \right]^{-1} \left[\frac{n\beta_2}{\beta_0} w_{11} + \Lambda - G (E_2 \mathcal{V}_p + \mathcal{V})^{-1} \frac{n\beta_2}{\beta_0} \mathcal{V}_p \right]. \quad (4.187)$$

Propiedades efectivas

Al igual que en el problema antiplano para obtener una expresión analítica de las constantes efectivas C_{ijpp} vamos a hacer uso del teorema de Gauss y la continuidad del desplazamiento en la interfaz para $\langle pp\sigma_{ij} \rangle$. La expresión que se tiene para C_{ijpp} es

$$C_{ijpp} = \langle C_{ijpp} + pp\sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijpp} \rangle + \langle pp\sigma_{ij} \rangle, \quad (4.188)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle pp\sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \left(pp\sigma_{ij} dV = \int_V C_{ij11} ppU_{1,1}^{(i)} + C_{ij22} ppU_{2,2}^{(i)} \right) dV \\ &= \int_{V_1} C_{ij11}^{(1)} ppU_{1,1}^{(1)} dV_1 + \int_{V_2} C_{ij11}^{(2)} ppU_{1,1}^{(2)} dV_2 + \int_{V_1} C_{ij22}^{(1)} ppU_{2,2}^{(1)} dV_1 \\ &\quad + \int_{V_2} C_{ij22}^{(2)} ppU_{2,2}^{(2)} dV_2. \end{aligned} \quad (4.189)$$

$$\quad \quad \quad (4.190)$$

Usando el teorema de Gauss esta expresión se puede reescribir como

$$\langle pp\sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \left\{ - \left(C_{ij11}^{(1)} - C_{ij11}^{(2)} \right) \int_{\Gamma} ppU_1^{(2)} dy_2 + \left(C_{ij22}^{(1)} - C_{ij22}^{(2)} \right) \int_{\Gamma} ppU_2^{(2)} dy_1 \right\}. \quad (4.191)$$

Como $y_1 = \text{sen } \theta$ y $y_2 = \text{cos } \theta$

$$\langle pp\sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \left\{ - \|C_{ij11}^{(1)}\| \int_{\Gamma} ppU_1^{(1)} \text{cos } \theta d\theta + \|C_{ij22}\| \int_{\Gamma} ppU_2^{(2)} \text{sen } \theta d\theta \right\}. \quad (4.192)$$

De [\(4.131\)](#)

$$U_1^{(2)}(z) = \text{Re} \left\{ k^2 \varphi_2(z) - z \overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\Psi_2(z)} \right\}, \quad (4.193)$$

$$U_2^{(2)}(z) = \text{Im} \left\{ k^2 \varphi_2(z) - z \overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\Psi_2(z)} \right\}, \quad (4.194)$$

y (4.192) se convierte en

$$\langle {}_{pp}\sigma_{ij} \rangle = \frac{P}{2C_{1313}^{(2)}} \left(\|C_{ij22}^{(1)}\| - \|C_{ij11}^{(1)}\| \right) - \frac{Q}{2C_{1313}^{(2)}} \left(\|C_{ij22}^{(1)}\| + \|C_{ij11}^{(1)}\| \right) \quad (4.195)$$

con

$$P = \frac{d_1 R(k_2 - 1)}{\chi_m}, \quad Q = \frac{-3d_3 R^3 - e_1 R}{\chi_m}. \quad (4.196)$$

Usando (4.168) y (4.157) para despejar d_1 y d_3 tenemos

$$P = \left[R(k_1 - 1)E_1 \left(1 - \frac{F_1 \beta_1}{\beta_0} \right) + R^{-1}E_1 \right] a_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} [F_1 R(k_1 - 1) + n] \\ + \left[R(k_1 - 1) \left(1 - \frac{F_1 \beta_1}{\beta_0} \right) + R^{-1} \frac{\beta_1}{\beta_0} \right] \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1}, \quad (4.197)$$

$$Q = \frac{1}{\chi_m - 1} \left(\frac{k_1 + 1}{\chi_m + 1} a_1 R^{-1} + \frac{mR}{\chi_m + 1} \right). \quad (4.198)$$

Ahora

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \eta_{k1} = \mathcal{V}_p D' \quad (4.199)$$

a'_1 y D' están dadas en (4.186) y (4.187), respectivamente. Luego sustituyendo tenemos las propiedades efectivas definidas.

Para determinar C_{1212} es necesario resolver el problema $pq = 12$. Este se resuelve de forma análoga a los problemas pp usando los potenciales de Kosolov-Muskhelishvili. La relación de los potenciales para este problema $pq = 12$ y los potenciales para los problemas pp , es

$${}_{12}\varphi(z) = i {}_{pp}\varphi(z), \quad {}_{12}\psi(z) = i {}_{pp}\psi(z). \quad (4.200)$$

Usando esta relación, la condición de desplazamiento continuo para este problema se escribe como

$$\frac{C_{1212}^{(2)}}{C_{1212}^{(1)}} \left(k_1 {}_{pp}\varphi_1(z) + z {}_{pp}\overline{\varphi'_1(z)} + {}_{pp}\overline{\psi_1(z)} \right) = k_2 {}_{pp}\varphi_2(z) + z {}_{pp}\overline{\varphi'_2(z)} + {}_{pp}\overline{\psi_2(z)} \quad (4.201)$$

y la de tracción como

$$\| {}_{pp}\varphi_i(z) - z {}_{pp}\overline{\varphi'_i(z)} - {}_{pp}\overline{\psi_i(z)} \| = \| C_{1616} \| \bar{z}. \quad (4.202)$$

Con esto se encuentra un sistema infinito similar al dado para los problemas pp .

$$\begin{aligned} H_2 a_p + B'_a R^2 \delta_{1p} - \sum_1^{\infty} a'_k \left[\sqrt{(p+2)p} w_{k(p+2)} + \sqrt{(k+2)k} w_{(k+2)p} \right. \\ \left. - A \sum_{k=1}^{\infty} w_{j+2} p w_{k(j+2)} - \sqrt{k p R^{k+p}} \rho_{kp} \right] = -C_{66}^{(1)} R^2 \delta_{1p} \end{aligned} \quad (4.203)$$

Para determinar C_{1212} usamos la igualdad

$$C_{1212} = \langle C_{1212} \rangle + \frac{1}{V} \int_V C_{1212} (U_{1,2} + U_{2,1}) dV. \quad (4.204)$$

La cual al aplicar el teorema de Green y procediendo de forma análoga en la que procedimos para determinar C_{ijpp} se tiene que la propiedad efectiva es

$$C_{1212} = C_{1212}^{(1)} - V_2 (k_1 + 1) \frac{a_1}{R^2}; \quad (4.205)$$

también esta propiedad queda en términos de a_1 correspondiente al problema $pq = 12$. Del sistema (4.203) se tiene

$$C_{1212} = C_{1212}^{(1)} \left(1 + \frac{(k_1 + 1) B V_2}{1 - B H_{11} - B^2 \mathcal{V}_{12} \mathcal{M}_{12}^{-1} \mathcal{V}_{12}} \right), \quad (4.206)$$

donde

$$\mathcal{V}_{12} = [H_{13}, H_{15}, H_{17} \dots] \quad (4.207)$$

$$\mathcal{M}_{12} = H_2 \delta_{ij} - H_{kl}, \quad (4.208)$$

$$H_{kl} = \sqrt{(p+2)p} w_{k(p+2)} + \sqrt{(k+2)k} w_{(k+2)p} - \frac{\chi_m - k_2}{\chi_m + k_2} \sum_{k=1}^{\infty} w_{j+2} p w_{k(j+2)} - \quad (4.209)$$

$$\sqrt{k p R^{k+p}} \rho_{kp} - \mathcal{S}_{kl}, \quad (4.210)$$

$$\mathcal{S}_{kl} = B'_a R^2. \quad (4.211)$$

Capítulo 5

Compuestos laminados

Recientemente se ha observado que los compuestos con constituyentes auxéticos presentan mejoras en sus propiedades mecánicas. [Lim \(2009\)](#), [Kocer et al. \(2009\)](#), [Chirima et al. \(2009\)](#) muestran ejemplos de *compuestos laminados*, CL, cuyo módulo de Young en la dirección del laminado es más grande que el de las láminas que lo constituyen, es decir, los CL presentan un aumento en la dureza con respecto a la de sus constituyentes.

En este capítulo estudiamos CL consistentes de n láminas las cuales son paralelas al plano x_1x_2 y cada una tiene grosor constante. Las láminas están en contacto soldado de modo que el desplazamiento y la tracción son continuas en la interfaz común entre dos láminas. Se estudian tres tipos de constituyentes: con simetría isótropa, cúbica y transversalmente isótropa.

Nuestro principal interés es estudiar la influencia de constituyentes auxéticos en las propiedades efectivas de los CL. Para esto hacemos un análisis de las propiedades efectivas. Éstas se obtienen usando el tensor de flexibilidad efectivo calculado en la primera parte del Capítulo [4](#). Para determinar las propiedades efectivas se consideran las simplificaciones del tensor de flexibilidad de cada constituyente y se sustituyen en los bloques efectivos [\(4.13\)](#)–[\(4.15\)](#).

Este capítulo se divide en tres secciones: la primera está dedicada a CL con constituyentes de simetría isótropa, en la segunda los constituyentes poseen simetría cúbica y la última trata de simetría transversalmente isótropa.

En el caso de bilaminados con constituyentes isótropos se han reportado fórmulas analíticas para los módulos de Young y para el cociente de Poisson calculados mediante métodos diferentes al de Backus usado aquí. Las fórmulas coinciden con las calculadas con el método de Backus. En esta primera sección se dan las fórmulas de las propiedades ingenieriles para un laminado de n constituyentes. Las fórmulas se validaron realizando una comparación con elemento finito. Para bilaminados se dan las condiciones bajo las cuales los módulos de Young

son más grandes que los de los constituyentes y las condiciones bajo las cuales los cocientes de Poisson efectivos serán negativos. Se calcula la indentación de flexibilidad de un bilamiando y se comparan los resultados con los obtenidos mediante elemento finito.

En la sección 2 se calculan las propiedades efectivas de un bilaminado en el cual los ejes de simetría de los constituyentes no son los mismos. Se observa que las propiedades efectivas en la dirección perpendicular al plano dependen del ángulo que hay entre los ejes de simetría de las fases. Mientras que las que son paralelas no dependen de este ángulo. También, en este caso se observa un aumento en el módulo de Young con respecto al módulo de Young de los constituyentes.

En la última sección los constituyentes poseen simetría transversalmente isótropa. Se considera que el eje de simetría es el eje x_1 por lo tanto el eje de simetría y la dirección del laminado no coinciden. Se calculan las propiedades ingenieriles efectivas para un laminado de n fases. Se dan fórmulas para las ventanas de auxeticidad del compuesto.

5.1. Constituyentes isótropos

Sean λ_i , μ_i , las constantes de Lamé de la i ésima lámina y sean E_i y ν_i , el módulo de Young y el cociente de Poisson, respectivamente. En términos de las constantes de Lamé, las constantes elásticas diferentes de cero de la i ésima lámina son:

$$C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)} = C_{33}^{(i)} = \lambda_i + 2\mu_i, \quad (5.1)$$

$$C_{12}^{(i)} = C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)} = \lambda_i, \quad (5.2)$$

$$C_{44}^{(i)} = C_{55}^{(i)} = C_{66}^{(i)} = \mu_i \quad (5.3)$$

Las componentes diferentes de cero del tensor de flexibilidad son

$$S_{11}^{(i)} = S_{22}^{(i)} = S_{33}^{(i)} = E_i^{-1}, \quad (5.4)$$

$$S_{12}^{(i)} = S_{13}^{(i)} = S_{23}^{(i)} = -\nu_i E_i^{-1}, \quad (5.5)$$

$$S_{44}^{(i)} = S_{55}^{(i)} = S_{66}^{(i)} = \mu_i^{-1}. \quad (5.6)$$

La simetría de este CL es la de un medio transversalmente isótropo con Ox_3 como el eje de simetría.

Las constantes elásticas diferentes de cero del tensor de rigidez del compuesto son

$$C_{11} = C_{22} = \langle 4\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) \rangle + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle^{-1}, \quad (5.7)$$

$$C_{33} = \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle^{-1}, \quad (5.8)$$

$$C_{12} = \langle 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu) \rangle + \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle^{-1}, \quad (5.9)$$

$$C_{13} = C_{23} = \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle / \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle, \quad (5.10)$$

$$C_{44} = C_{55} = \langle 1/\mu \rangle^{-1}, \quad (5.11)$$

$$C_{66} = \langle \mu \rangle. \quad (5.12)$$

Las fórmulas (5.7)–(5.12) se tomaron de Milton (2002) (expresiones (9.9), pag. 163, sección 9) y adaptadas para n láminas; es un caso particular de las fórmulas para las constantes elásticas efectivas (4.1)–(4.3). Una errata menor ha sido corregida en (5.7). Estas fórmulas aparecen, por primera vez, en Postma (1955) para dos láminas isótropas. Backus (1962) las obtuvo a través de una técnica de promedios. Muchos otros han usado diferentes técnicas (ver Milton, 2002). Usando el método de homogeneización asintótica se han obtenido fórmulas similares para laminados con constituyentes piezoeléctricos y magnetoelásticos (Bravo-Castillero et al., 2009), que en el caso de desacople, es decir, el caso elástico se llegan a estas mismas expresiones, (5.7)–(5.12).

Las constantes ingenieriles del compuesto se obtienen al sustituir los elementos del tensor de flexibilidad (5.4)–(5.6) en las expresiones (4.13)–(4.15). Después de un poco de álgebra se pueden escribir de la siguiente forma:

$$E_{in} \equiv E_1 = \left\langle \frac{E}{1 - \nu^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \right\rangle^2 \left\langle \frac{E}{1 - \nu^2} \right\rangle^{-1} \quad (5.13a)$$

$$= \sum_{i=1}^n V_i E_i + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{V_i V_j E_i E_j (\nu_i - \nu_j)^2}{(1 - \nu_i^2)(1 - \nu_j^2)} \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{V_i E_i}{1 - \nu_i^2} \right]^{-1}, \quad (5.13b)$$

$$\frac{1}{E_{out}} \equiv \frac{1}{E_3} = \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle - 2 \left[\left\langle \frac{\nu^2}{E(1 - \nu)} \right\rangle - \left\langle \frac{\nu}{1 - \nu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{E}{1 - \nu} \right\rangle^{-1} \right] \quad (5.14a)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{E_i} - 2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{V_i V_j E_i E_j}{(1 - \nu_i)(1 - \nu_j)} \left(\frac{\nu_i}{E_i} - \frac{\nu_j}{E_j} \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{V_i E_i}{1 - \nu_i} \right]^{-1}, \quad (5.14b)$$

$$\nu_{in} \equiv \nu_{12} = \left\langle \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \right\rangle \left\langle \frac{E}{1 - \nu^2} \right\rangle^{-1} \quad (5.15a)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n \frac{V_i E_i \nu_i}{1 - \nu_i^2} \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{V_i E_i}{1 - \nu_i^2} \right]^{-1}, \quad (5.15b)$$

$$\nu_{out} \equiv \nu_{13} = E_{out} \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle \left\langle \frac{E}{1-\nu} \right\rangle^{-1} \quad (5.16a)$$

$$= E_{out} \left[\sum_{i=1}^n \frac{V_i \nu_i}{1-\nu_i} \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{V_i E_i}{1-\nu_i} \right]^{-1}, \quad (5.16b)$$

para un laminado de n fases isotropas donde E_{in} es el módulo de Young efectivo la dirección perpendicular a la del laminado, es decir, en la dirección x_1 (x_2), E_{out} es el módulo de Young efectivo en la dirección del laminado, es decir, en la dirección x_3 ; ν_{in} es el cociente de Poisson efectivo en el plano $x_1 x_2$ y ν_{out} es el cociente de Poisson en el plano $x_1 x_3$.

A continuación hacemos unas observaciones acerca de las ecuaciones (5.13a)–(5.16b). De (5.13b) se sigue que

$$E_{in} \geq \sum_{i=1}^n V_i E_i \quad (5.17)$$

si $\nu_i \neq \nu_j$ para al menos dos láminas; la igualdad ocurre cuando todas las láminas tienen el mismo cociente de Poisson. Por otro lado, de (5.14a) es claro que la desigualdad

$$E_{out}^{-1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{E_i} \quad (5.18)$$

se cumple si $\nu_i E_j \neq \nu_j E_i$ para al menos un par $i \neq j$; la igualdad se da cuando $\nu_i E_j = \nu_j E_i$ para todo par de i, j . Alternativamente el mismo resultado se sigue usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el segundo término del lado derecho de (5.14a).

Las desigualdades (5.17) y (5.18) son consistentes con los resultados dados por Hill (1963). De donde se tiene que dos de las cinco constantes introducidas para un material isotropo, κ y μ , están acotadas inferiormente por las cotas de Reus κ_R , μ_R y superiormente por las cotas de Voigt κ_V , μ_V , respectivamente, definidas por Hill (1963) como

$$\kappa_R \equiv \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle^{-1} \leq \kappa \leq \langle \kappa \rangle \equiv \kappa_V, \quad (5.19)$$

$$\mu_R \equiv \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \leq \mu \leq \langle \mu \rangle \equiv \mu_V. \quad (5.20)$$

Además él definió E_V y E_R como

$$\frac{3}{E_V} = \frac{1}{3\kappa_V} + \frac{1}{\mu_V}, \quad \frac{3}{E_R} = \frac{1}{3\kappa_R} + \frac{1}{\mu_R}. \quad (5.21)$$

Esto transforma a $E_R^{-1} = \langle E^{-1} \rangle$; vemos que $E_V \neq \langle E \rangle$ en general. Además se puede probar que $E_V \geq \langle E \rangle$ y la igualdad se da sólo cuando los cocientes de Poisson son iguales. Por lo tanto

tenemos una cadena de desigualdades

$$\langle E^{-1} \rangle^{-1} = E_R \leq \begin{cases} E \\ \langle E \rangle \end{cases} \leq E_V. \quad (5.22)$$

No existe un orden universal para E y $\langle E \rangle$. Sabemos que E está acotado por abajo por la regla de mezclas inversa, que coincide con E_R definida en (5.21b). Por otro lado E es acotado por arriba por E_V lo cual en general no es igual a la regla de mezclas simple, $\langle E \rangle$.

Como ya se había mencionado las expresiones para las propiedades efectivas del laminado son independientes del orden en el cual se toman las láminas. Esto se puede ver claramente en (5.13a)–(5.16b). Entonces, sin pérdida de generalidad, se eligen el orden de las láminas de acuerdo a sus módulos de Young. Esto es $E_1 \geq E_2 \geq \dots \geq E_m$, $m \leq n$.

Además, todos los módulos son normalizados de tal forma que E_m , la lámina más suave, tiene valor 1. De aquí en adelante, excepto cuando se mencione explícitamente, usaremos E_{out} para denotar E_{out}/E_m ; E_1 es E_1/E_m , etc. No debería crear ninguna confusión el uso de la misma notación para las cantidades antes usadas y las cantidades relativas que usaremos más adelante. Las fórmulas (5.13a) a (5.16b) y las cotas se pueden programar fácilmente. Se escribió un programa usando el software Matlab

5.1.1. Comparación con elemento finito

Con relación al orden de las láminas, podemos comparar los resultados obtenidos usando (5.14b) y los cálculos obtenidos usando elemento finito (EF) de Kocer et al. (2009) para láminas de la misma composición. El número n de láminas cubre un rango amplio desde $n = 2, 3, 4, \dots, 15, 19$ a 23 . El grosor de cada lámina es el mismo en todos los ejemplos. Los datos aquí dados son tomados de su Tabla 1. Se debe enfatizar que Kocer et al. (2009) eligen n , como su parámetro en lugar de la fracción volumétrica y sólo calculan E_{out} . Se consideran sólo dos materiales en su trabajo, es decir, $m = 2$ con $E_1 = 1$ y $\nu_1 = -0.9$, $\nu_2 = 0.4$ de modo que el material auxético se alterne con el de cociente de Poisson positivo y viceversa, como se observa en la Fig. 5.1; en el laminado del lado izquierdo la primera lamina es auxética y la segunda es convencional ($\nu > 0$), mientras que en la del lado derecho es lo opuesto.

La Fig. 5.2(a) muestra la gráficas de E_{out} y E_{in} contra la fracción volumétrica V_2 del material no auxético. Las líneas continua y discontinua corresponden a los resultados obtenidos usando (5.13a) o (5.13b) y (5.14a) o (5.14b), respectivamente. Las estrellas corresponden a los cálculos de los materiales alternados empezando con la lámina con cociente de Poisson positivo; ellos están en el intervalo $V_2 > 0.5$ mientras que en el intervalo $V_2 < 0.5$ están los cálculos hechos

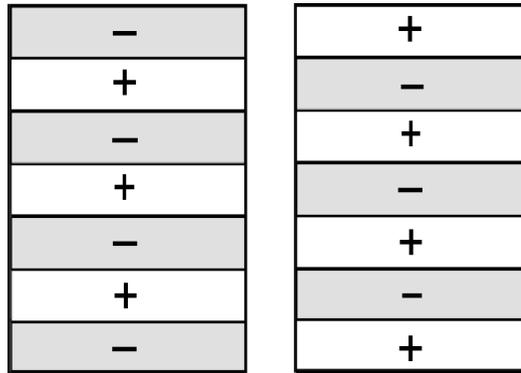


Fig. 5.1: Laminado de Kocer et al. (2009). El signo $-$ indica que el constituyente es auxético y el signo $+$ que su cociente de Poisson es positivo.

cuando el primer material tiene cociente de Poisson negativo y se denotan con círculos abiertos. En estos dos ejemplos n es impar. Cuando n es par, ambas fracciones volumétricas son $V_2 = 0.5$. Las cotas inferior E_R y superior E_V de Hill contra la fracción volumétrica también aparecen con línea punteada y línea continua con puntos, respectivamente. Notemos que en este caso $E_R = 1$; E_{out}, E_{in} están dentro de las cotas de Hill como debe de ser. Como se puede ver en la Fig. 5.2(a) la comparación entre los datos teóricos y los de EF es excelente. Es claro que el orden en el cual los materiales se toman es irrelevante en lo que a propiedades efectivas se refiere. Sólo su fracción volumétrica total es importante, no el orden en que se consideran las láminas como afirman Kocer et al. (2009).

Definimos una ventana de endurecimiento, VE, como el intervalo de fracción volumétrica en el cual el módulo de Young presenta un aumento con respecto al valor más grande de los módulos de Young de los constituyentes. Entonces aquí $VE=(0,1)$ para E_{out} y E_{in} , es decir, hay un endurecimiento en las dos direcciones principales para cualquier fracción volumétrica. El máximo aumento es de cerca del 260% y se alcanza cerca de $V_2 = 0.35$. En lo que a E_{in} se refiere, no hay datos de EF con los cuales podamos comparar. Este también aumenta aunque en menor grado, cerca de 92%, alcanzando el máximo cerca de $V_2 = 0.7$.

La Fig. 5.2(b) muestra la gráficas de ν_{out}, ν_{in} contra V_2 con líneas continua y discontinua, respectivamente. Se define una ventana auxética (VAX) como el intervalo de fracción volumétrica en el cual el cociente de Poisson es negativo, definición introducida por Wei y Edwards (1998). Notamos que ν_{out}, ν_{in} son negativos para una fracción volumétrica menor a 0.4, es decir, tienen en común una VAX = (0, 0.4). En el plano $x_1 x_2$ la ventana de auxeticidad se extiende hasta 0.9. Para $V_2 = (.9, 1)$ el compuesto no presenta auxeticidad, sin embargo, E_{in}, E_{out} sí presentan aumento en esta región. La función ν_{in} crece monótonamente desde -0.9 a 0.4, esto es, entre los cocientes de Poisson de los constituyentes; ν_{out} , muestra intervalos donde es mayor que $\nu_2 = 0.4$ y menor que $\nu_1 = -0.9$, o sea que es más pequeño o más grande que los cocientes de

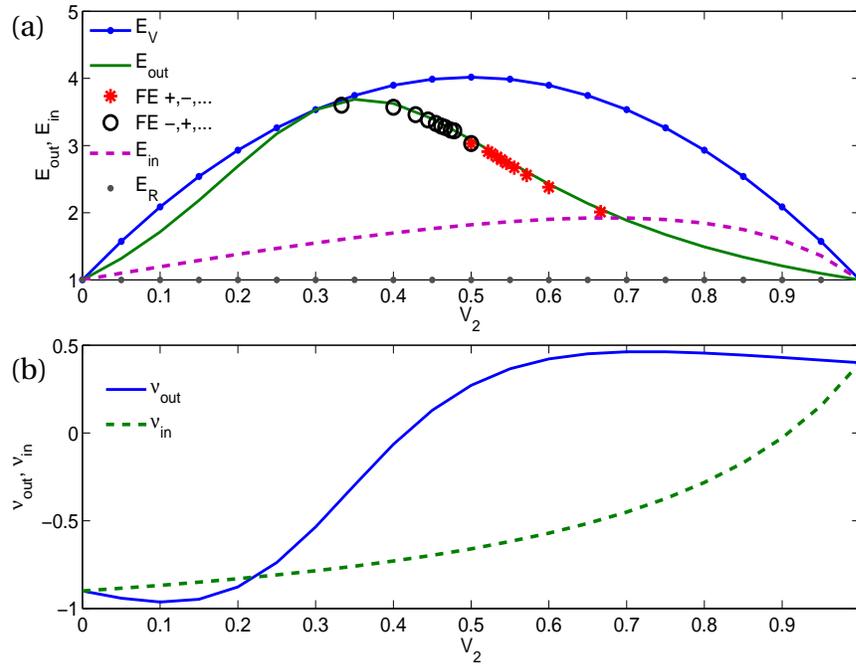


Fig. 5.2: (a) Gráfica de E_{out} , E_{in} como función de la fracción volumétrica, V_2 . Los datos del bilaminado son $E_1 = E_2 = 1$, $\nu_1 = -0.9$ y $\nu_2 = 0.4$. La línea continua y discontinua son el resultado de aplicar la fórmula (5.13a) y (5.14a), respectivamente. Los datos de FE de E_{out} son tomados de Kocer et al. (2009) y aparecen con estrellas o círculos abiertos. El orden de la sucesión con respecto a los cocientes de Poisson $+, -, +, \dots$ es mostrado con estrellas. Los círculos corresponden al orden $-, +, -, \dots$. La cota superior de Hill, E_V , aparece con una línea continua con puntos y la cota inferior, E_R , una línea punteada. (b) Son las gráficas de v_{out} , línea continua y v_{in} , línea discontinua, contra V_2 . Son el resultado de aplicar las fórmula (5.15a) y (5.16a).

Poisson de los constituyentes, lo cual no se había observado con anterioridad, o sea, que su contracción o expansión es mayor que la de sus constituyentes.

5.1.2. Comparación con Chirima et al. (2009) EF

Otro análisis interesante de laminados se puede encontrar en Chirima et al. (2009), (C9), cuyo principal objetivo es predecir numéricamente E_{out} y μ_{out} (de hecho, μ_{13}) como función del número de láminas $n = 1, 3, 5, 7, 9$. Excepto para $n=1$, ellos se ocupan de una composición de dos materiales. Es decir, modelan un laminado combinando dos láminas diferentes. Una lámina (auxética o convencional) a la que llamaremos capa y la otra lámina es un adhesivo. Se consideran dos adhesivos diferentes uno con módulo de Young alto y otro con módulo de Young bajo. Ellos consideran dos configuraciones; en la primera el grosor del laminado es constante igual a 1.0 mm, se denota a esta configuración como CT (Constant Thickness) Fig. 5.3(a). El grosor de la capa es de 0.2 mm, el grosor de las láminas adhesivas es uniforme pero variable va de 1.0 mm (laminado formado sólo por el adhesivo) y decrece conforme aumenta el

número de láminas hasta llegar a 0.04 mm (laminado con 5 capas y 4 adhesivos). En la segunda configuración el grosor de los adhesivos está fijo en 0.05 mm y el de la capa es de 0.2 mm. El grosor del laminado varía dependiendo del número de láminas. A esta segunda configuración la denotamos como PT (Progressive Thickness).

Código	Material	Módulo de Young	Módulo de corte	ν
		E en GPa	μ en GPa	
HMA	Adhesivo de módulo alto	1.7	.65	0.30
LMA	Adhesivo de módulo bajo	0.12	0.044	0.30
CF	Capa convencional	0.34	1.7	0.43
AF	Capa auxética	0.34	0.12	-0.90

Tabla 5.1: Propiedades de los materiales isotropos y las claves usadas en el modelo.

La Tabla 5.1 reproduce las propiedades isotropas de los consituyentes usados en su modelo, tomados de (C9). Las claves usadas y el módulo de corte, μ , también están incluidos ahí.

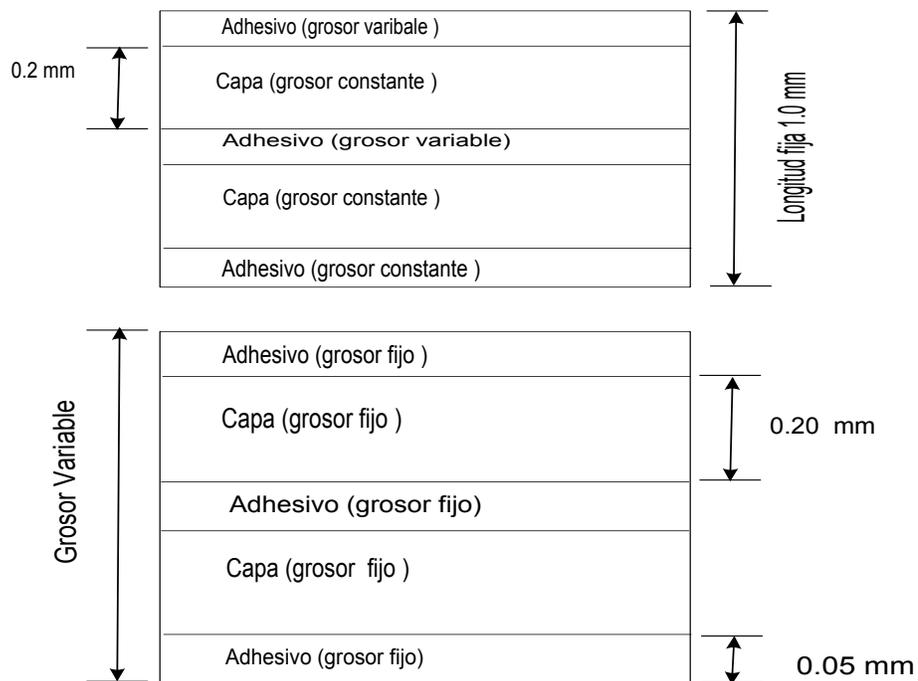


Fig. 5.3: Configuraciones estudiadas por Chirima et al. (2009) (a) Configuración de grosor constante (CT). Cada capa tiene un grosor constante de 0.2 mm mientras que el del adhesivo es uniforme pero variable. El grosor total del laminado es de 1.0 mm. (b) Configuración de grosor progresivo (PT). Cada capa tiene un grosor constante de 0.2 mm para la capa y 0.05 mm para el adhesivo. En ambas configuraciones la capa superior e inferior son adhesivos independientemente del número de capas.

Ellos, al igual que Kocer et al. (2009), utilizaron una técnica de EF. Usando el paquete ANSYS versión 10.0 simularon numéricamente un modelo tres dimensional con SOLID45. Más detalles

de su modelo se pueden encontrar en C9, casi inmediatamente puede verse que sus resultados numéricos son inexactos en muchos de sus ejemplos modelados. Para realizar una buena comparación con los datos dados en C9 en esta sección regresamos a la notación inicial para los módulos de Young, es decir, éstos no están normalizados con respecto al módulo de Young más bajo. Si tenemos una sola lámina, es decir, $n = 1$, E_{out} debería alcanzar un valor cercano a E_1 , sin embargo, no es suficientemente cercano en todos los casos graficados. Por ejemplo, E_{out} es casi 80% mayor de lo que debería en la combinación LMA-AF con configuración PT, el código está dado en la Tabla 5.1, (ver Fig. 6 de C9). Por otra parte la modelación para μ_{out} cae fuera de las cotas ya conocidas, μ_R . Además ellos usan μ_R como una expresión analítica para comparar la cual es bien conocida como una cota inferior para μ_{out} para esta geometría, Hill (1963). Los resultados de EF casi siempre caen por abajo de μ_R , lo cual es una seria inconsistencia. Notemos que nuestra fórmula (5.11) para μ_{out} es de hecho μ_R , de aquí que surjan serias dudas sobre la instrumentación de su EF.

Por lo tanto, para poder hacer una comparación con nuestras predicciones analíticas, hacemos el cálculo de elemento finito usando la guía general reportada en Berger et al. (2005) en ANSYS 12. Es importante aclarar aquí que este método está basado en el uso de condiciones de frontera periódicas Suquet (1987), y da resultados exactos cuando el modelo de EF tiene las restricciones adecuadas (Berger et al., 2005).

Para la instrumentación del modelo de EF, se puede agregar una simplificación. Esto ocurre si primero se considera la naturaleza transversalmente isótropa del laminado. Así, en lugar de resolver modelos 3D como los reportados en C9, con el método propuesto y las consideraciones previas, las cinco constantes elásticas independientes C_{11} , C_{12} , C_{33} , C_{13} y C_{44} , se pueden calcular usando tres modelos bidimensionales independientes. Hasta donde sabemos, esta es la primera vez que este enfoque se emplea para un laminado.

Hipótesis del modelo

Como el compuesto es transversalmente isótropo, el laminado puede ser modelado geométricamente en 2D. Con esta simplificación, el problema que tenemos aquí se puede tratar como un problema de deformación plana ($e_{22} = 0$). Por lo tanto, nombramos cada frontera de la siguiente forma: línea frontera superior, inferior, izquierda y derecha, respectivamente, Fig. 5.4.

Además, usando la metodología de Berger et al. (2005) y mediante el principio de Neumann, es claro que sólo son necesarios los tres modelos para obtener las 5 constantes elásticas efectivas con las cuales el medio es caracterizado. Con las consideraciones previas, se propone el modelo de EF ilustrado en la Fig. 5.5. Las condiciones específicas de los nodos de cada problema están ilustradas en la Fig. 5.4 para un laminado.

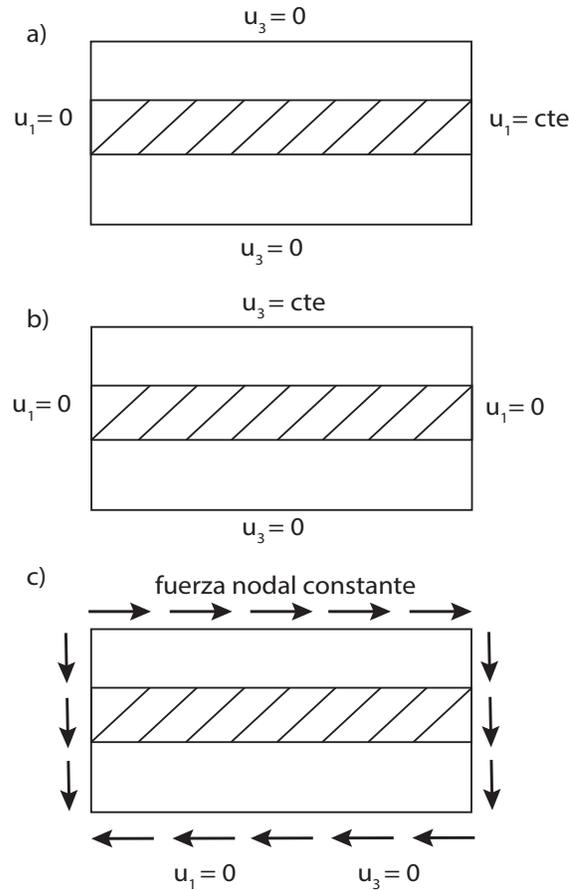


Fig. 5.4: a) Condiciones de los nodos usados en el modelo de EF desarrollado en ANSYS para el problem local ${}_{22}L$. Los desplazamientos u_1 y u_3 se dan a lo largo de las líneas indicadas. b) Análogo a a) para ${}_{33}L$. c) Para el problema local ${}_{23}L$, se obtiene un estado de corte al imponer una fuerza uniforme como se indica. Para evitar cualquier movimiento rígido, los desplazamientos u_1 y u_3 son impuestos como cero en la línea inferior del modelo de EF.

Para obtener las propiedades elásticas efectivas: C_{21} , C_{22} and C_{23} , las condiciones impuestas (mostradas en la Fig. 5.4a) son : 1) sin desplazamiento vertical (u_3) en cada nodo localizado en las líneas de frontera superior e inferior, 2) sin desplazamiento horizontal (u_1) en cada nodo localizado en las líneas de frontera izquierda y 3) desplazamiento horizontal uniforme en cada nodo localizado en la línea de frontera derecha. Con estas restricciones se espera un desplazamiento horizontal, y las siguientes aproximaciones para el promedio de las componentes en el plano de deformación son representativas (Berger et al., 2005). Se tiene que $\langle e_{22} \rangle$ y $\langle e_{12} \rangle$, son aproximadamente 0 cuando se compara con $\langle e_{11} \rangle$.

De forma similar para los coeficientes C_{31} , C_{32} y C_{33} se usaron las condiciones mostradas en la Fig. 5.4b). Ellas son 1) sin desplazamiento horizontal en cada nodo localizado en las líneas de frontera izquierda y derecha 2) sin desplazamiento vertical en cada nodo localizado en la línea de frontera superior y 3) un desplazamiento vertical uniforme en cada nodo localizado

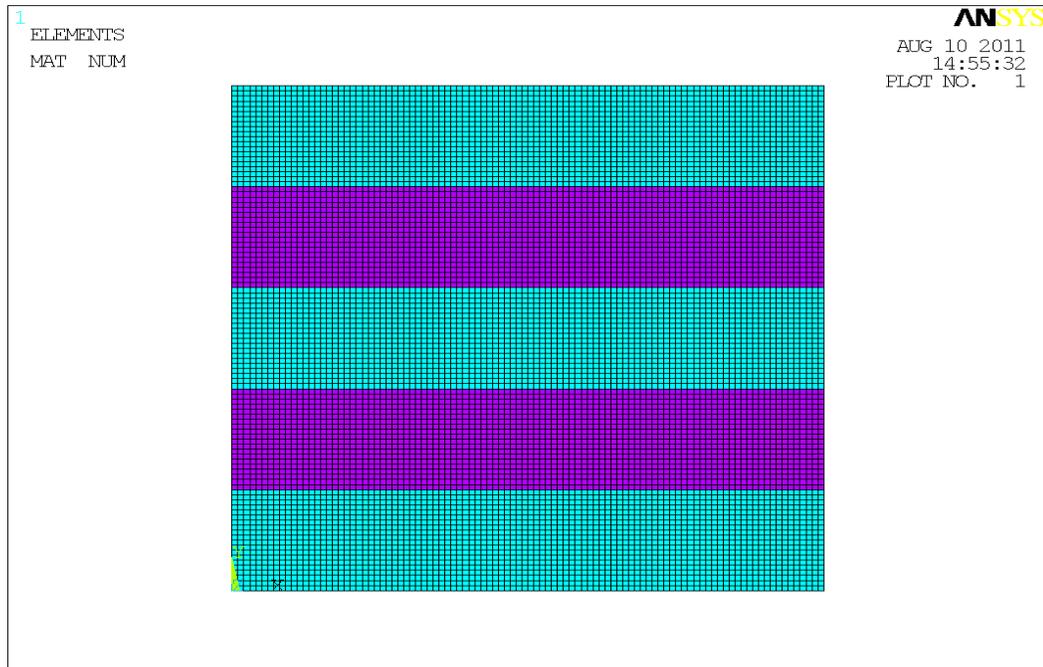


Fig. 5.5: Modelo 2-D de elemento finito para la configuración de interfaz constante en ANSYS 12 con los detalles de la malla. Las dimensiones del laminado es de 1×1 . Las capas de adhesivo están coloreadas.

en la frontera superior. Con estas condiciones se obtienen las siguientes aproximaciones: $\langle e_{11} \rangle$ y $\langle e_{12} \rangle$, son aproximadamente 0 cuando se compara con

$$\langle e_{22} \rangle. \quad (5.23)$$

Finalmente, como se indica en Berger et al. (2005), se adopta un estado cortante para calcular el coeficiente C_{12} . Para este problema se aplican fuerzas opuestas pero uniformes en cada nodo de las fronteras, como indica la Fig 5.4c). Para evitar movimiento rígido, la línea inferior se fija para imponer la condición de no desplazamiento. Para este caso las aproximaciones consideradas (Berger et al., 2005) son: $\langle e_{11} \rangle$ y $\langle e_{22} \rangle$, son aproximadamente 0 cuando se compara con $\langle e_{12} \rangle$. Para todas las instrumentaciones de EF usamos ANSYS 12 PLANE42. Esto es, una estructura sólida 2-D 4-nodo cuyos grados de libertad son las componentes de desplazamiento u y w .

Las opciones de formulación fueron establecidas a un modelo de deformación plana ($e_{22} = 0$) con la solución del esfuerzo como un dato de salida adicional, ¹ respectivamente.

Para obtener todas las constantes elásticas efectivas de la configuración con grosor constante (CT), construimos un cuadrado unitario presentado en la Fig. 5.5. Después de pegar las áreas involucradas usando las herramientas de modelación de ANSYS, sólo necesitamos imponer las diferentes condiciones de frontera en los nodos del modelo de EF para simular las condiciones

¹ANSYS opciones de elementos: KEYOPT(3)=2 y KEYOPT(5)=2

periódicas requeridas. Fig. 5.4 (a)–(c).

Para la configuración de grosor progresivo (PT), el modelo geométrico es similar, excepto por el grosor. Sin embargo, dependiendo del modelo y la propiedad elástica, algunas condiciones han sido ajustadas. Como se trata de elementos bidimensionales, los promedios de esfuerzo y deformación están dados como:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{A} \sum_{\forall \text{ elementos}} \sigma_{ij}^{(\text{elemento})} A^{(\text{elemento})} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5.24a)$$

$$\langle e_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{A} \sum_{\forall \text{ elementos}} e_{\alpha\beta}^{(\text{elemento})} A^{(\text{elemento})} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (5.24b)$$

donde A es el área total, $\sigma_{ij}^{(\text{elemento})}$, $e_{\alpha\beta}^{(\text{elemento})}$ y $A^{(\text{elemento})}$ son el esfuerzo, deformación y área de cada elemento, respectivamente. Junto con las restricciones específicas de cada problema bidimensional, las propiedades efectivas están dadas, usando la notación de Voigt, por las siguientes fórmulas de Berger et al. (2005):

$$C_{11}^{\text{FEB}} = C_{11} = C_{22} \approx \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\langle e_{11} \rangle}, \quad (5.25a)$$

$$C_{12}^{\text{FEB}} = C_{13} = C_{23} \approx \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{\langle e_{11} \rangle}, \quad (5.25b)$$

$$C_{13}^{\text{FEB}} = C_{12} = C_{21} \approx \frac{\langle \sigma_{33} \rangle}{\langle e_{11} \rangle}, \quad (5.25c)$$

$$C_{21}^{\text{FEB}} = C_{31} = C_{32} \approx \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\langle e_{22} \rangle}, \quad (5.25d)$$

$$C_{22}^{\text{FEB}} = C_{33} \approx \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{\langle e_{22} \rangle}, \quad (5.25e)$$

$$C_{23}^{\text{FEB}} = C_{32} = C_{31} \approx \frac{\langle \sigma_{33} \rangle}{\langle e_{22} \rangle}, \quad (5.25f)$$

$$C_{66}^{\text{FEB}} = C_{44} = C_{55} \approx \frac{\langle \sigma_{12} \rangle}{\langle e_{12} \rangle}. \quad (5.25g)$$

Hicimos la distinción entre nuestro modelo de EF 2-D, usando la notación C_{ij}^{FEB} ($j, i = 1, \dots, 6$), y su equivalente 3-D (C_{ij} notation) reportado en C9.

Procedemos a mostrar los cálculos numéricos y la evaluación de las fórmulas en la Fig. 5.6 como curvas de E_{out} , E_{in} , en MPa contra la fracción volumétrica de la capa, V_{film} . Esta última es una variable más adecuada que el número de láminas que se eligió en C9, porque E_{out} sólo depende del número de los diferentes constituyentes y el total de la fracción volumétrica de cada lámina tomada en cuenta (ver sección 5.1.1).

La Fig. 5.6 muestra dos cálculos diferentes de EF: FEB, basados en el desarrollo con condiciones periódicas de Berger et al. (2005), con diamantes para E_{out} y con círculos para E_{in} ; FEC con cuadros son los dados en C9. También los resultados de la fórmulas (5.13b)–(5.14b) a

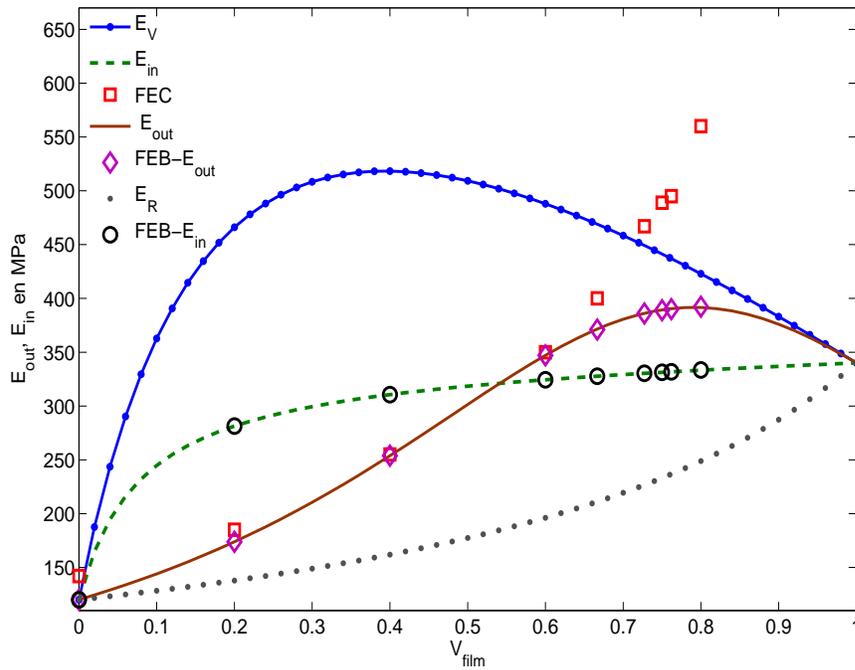


Fig. 5.6: Gráficas de E_{out} y E_{in} en MPa contra la fracción volumétrica de la capa V_{film} . Las curvas son graficadas considerando LMA y AF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.

los cuales nos referimos como exactos son dados como una línea discontinua y continua, respectivamente, las cotas de Hill, E_V con una línea continua con puntos y E_R , una línea punteada. Las curvas son graficadas considerando la lámina adhesiva LMA y la capa auxética (AF). Se puede observar inmediatamente que los datos de FEB coinciden plenamente con las fórmulas exactas. Los datos de EF así como las curvas de los resultados analíticos están dentro de las cotas de Hill. Varios de los datos de Chirima et al. (2009) están por arriba de las cotas de Hill. Sólo tres de sus nueve cálculos están cerca del valor exacto; para $V_{film} = 0$, es decir, cuando sólo hay un constituyente su cálculo está en error por un 18%.

Este ejemplo muestra que diferentes instrumentaciones del mismo problema pueden dar resultados diferentes. Se debe tener mucho cuidado cuando no existen resultados analíticos confiables o hay carencia de una comparación con otros métodos numéricos. Como se esperaba de (5.32), al introducir una lámina auxética (AF), E_{out} presenta un aumento con respecto al módulo de Young más duro ($E_{AF} = 340$ MPa). Se tiene un intervalo de fracción volumétrica donde el aumento se manifiesta y este es (0.65, 1).

Las Fig. 5.8, 5.7, 5.9 son análogas a la Fig. 5.6. En estas tres figuras al igual que en la Fig. 5.6 aparecen nuestros cálculos hechos con elemento finito los cuales coinciden con los obtenidos usando la fórmula exacta (5.14b). Además están dentro de las cotas de Hill mientras que los

realizados por Chirima et al. (2009), sólo tres de sus cálculos están dentro de éstas.

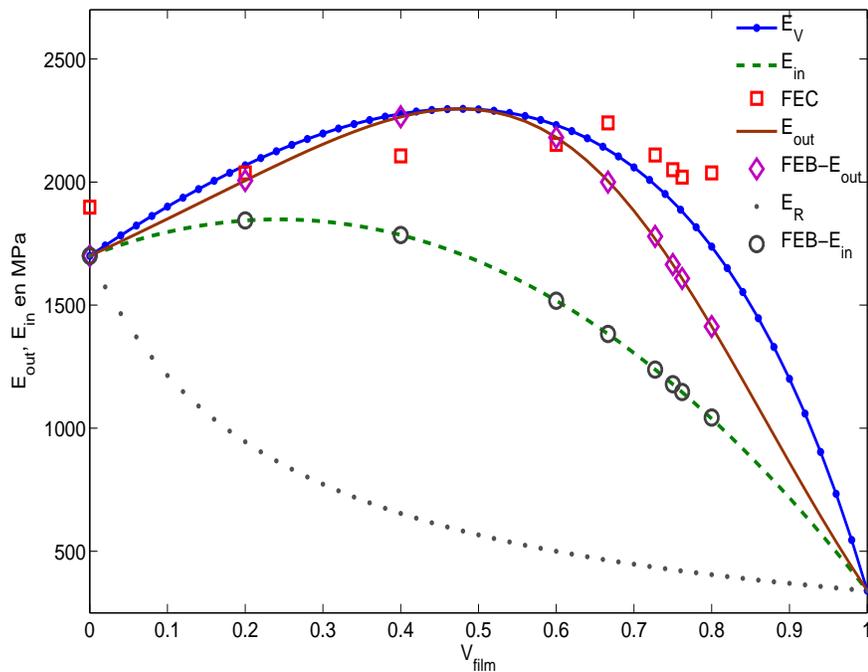


Fig. 5.7: Análogo a la Fig. 5.6 corresponden al caso HMA-AF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.

En la Fig. 5.7 los constituyentes son HMA-AF. En las dos direcciones principales existe una VE. E_{out} tiene un aumento máximo de 34 % y E_{in} de un 8.5%. Observamos que el laminado es más duro en la dirección perpendicular al plano ya que se tiene que $E_{out} > E_{in}$ para toda fracción volumétrica de AF.

En las Fig. 5.8 y 5.9 los CL están formados por LMA-CF y HMA-CF, respectivamente (ver Tabla 5.1). No se observa un aumento en los módulos de Young. Además en los dos casos el laminado es más duro en la dirección del plano pues $E_{in} > E_{out}$ para toda V_{film} .

En la Fig. 5.10 se muestran las gráficas de $\mu_{out} = \mu_R$ en MPa contra V_{film} para los CL, HMA-AF (línea continua) y HMA-CF (línea punteada). También se muestran los valores de μ_{out} dados por C9 para el laminado HMA-AF (cuadros) los cuales están por abajo de μ_{out} que como se sabe debe ser una cota inferior. También varios de los cálculos del laminado HMA-CF (diamantes) están por debajo de su respectiva curva μ_{out} . Dado que existen cálculos que están debajo de su cota inferior esto indica que éstos están mal calculados.

La Fig. 5.11 muestra las curvas de μ_{out} vs V_{film} para los laminados LMA-AF y LMA-CF además de los datos calculados con EF con las dos instrumentaciones. La curva analítica de μ_{ou} vs V_{film} para MLA-AF se muestra con una línea continua y la de LMA-CF con una línea punteada. Los

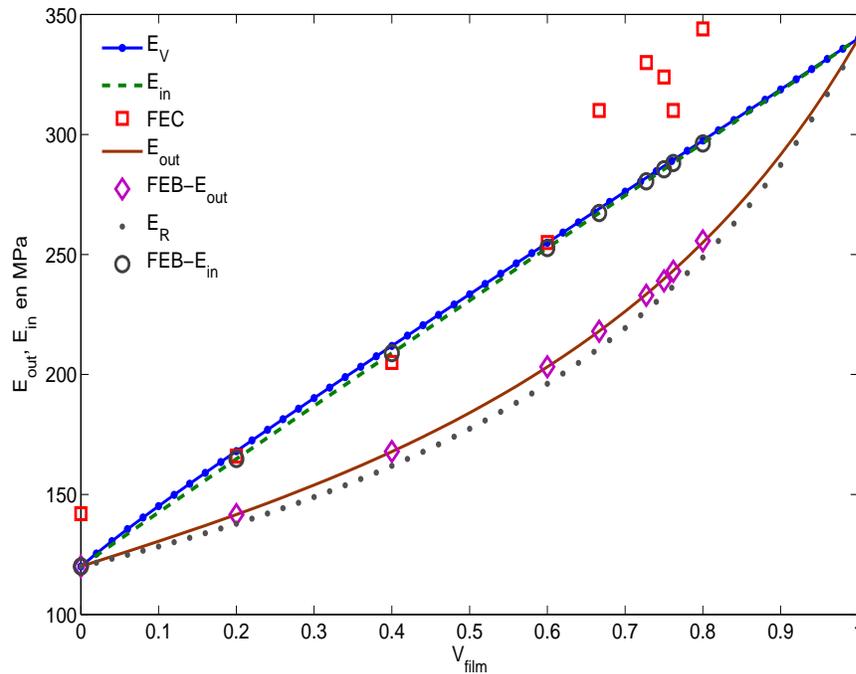


Fig. 5.8: Análogo a la Fig. 5.6 corresponden al caso LMA-CF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.

cálculos dados por C9 en ambos laminados caen por debajo de su respectiva curva analítica μ_R , la cota inferior, por lo tanto estos valores también están mal calculados.

Para complementar las propiedades ingenieriles en las siguientes figuras aparecen v_{out} , v_{in} versus V_{film} usando las fórmulas analíticas junto con los datos obtenidos mediante nuestro EF. En la Fig. 5.12 los cocientes de Poisson que se muestran son los correspondientes a los laminados LMA-AF y HMA-AF. Como se puede observar todos los cálculos hechos con EF caen sobre sus respectivas curvas analíticas. El compuesto LMA-AF tiene una VAX más grande en el plano x_1x_2 pues va desde aproximadamente 0.1 hasta 1 mientras que la del laminado LMA-CF va de 0.3 hasta 1. En el plano perpendicular a este las VAX para los dos compuestos van de 0.5 hasta 1. En conclusión para $V_{film} > 0.5$ los dos laminados son auxéticos.

La Fig. 5.13 muestra v_{in} , v_{out} como función de V_{film} para los compuestos LMA-CF y HMA-CF calculados con las fórmulas analíticas y los calculados mediante EF. Estos últimos caen sobre las curvas analíticas. Los cocientes de Poisson efectivos todos positivos.

Los cálculos obtenidos usando las fórmulas analíticas para las propiedades efectivas coinciden con los obtenidos mediante una correcta instrumentación de elemento finito. Las expresiones analíticas son sencillas y se pueden evaluar fácilmente. Esto da una ventaja sobre el elemento finito.

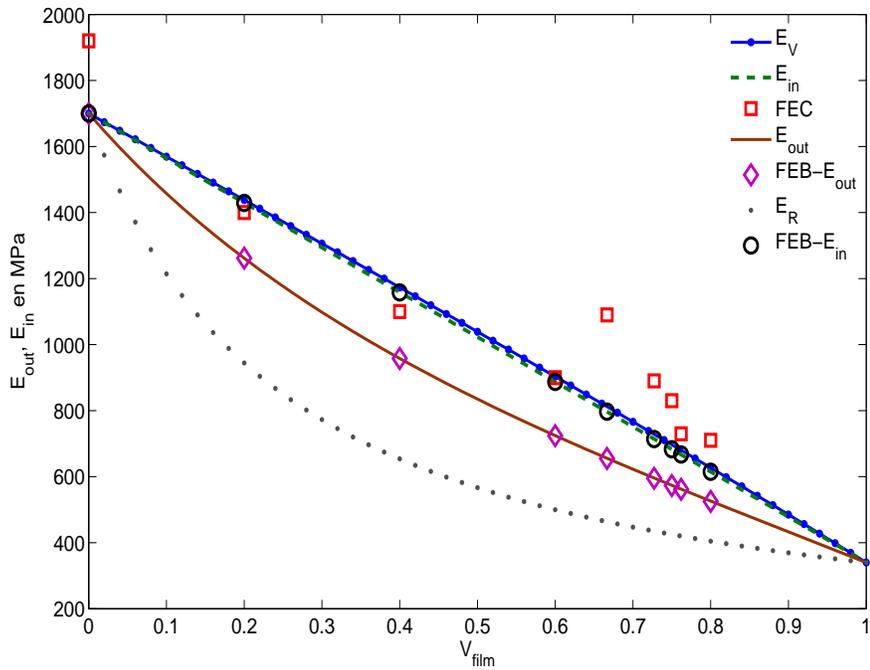


Fig. 5.9: Análogo a la Fig. 5.6. Corresponden al caso HMA-CF. Nótese que algunos de los valores de EF calculados por Chirima et al. (2009) se encuentran fuera de las cotas de Hill mientras que nuestros cálculos de EF están dentro de esas cotas y coinciden con las fórmulas analíticas.

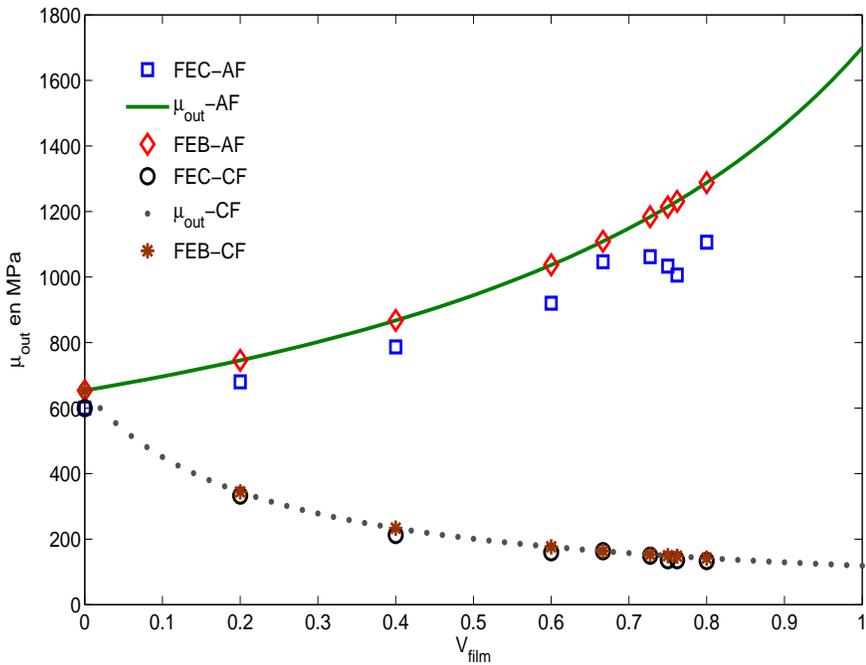


Fig. 5.10: Gráfica de μ_{out} como función de V_{film} para los laminados formados por los constituyentes HMA-AF y HMA-CF.

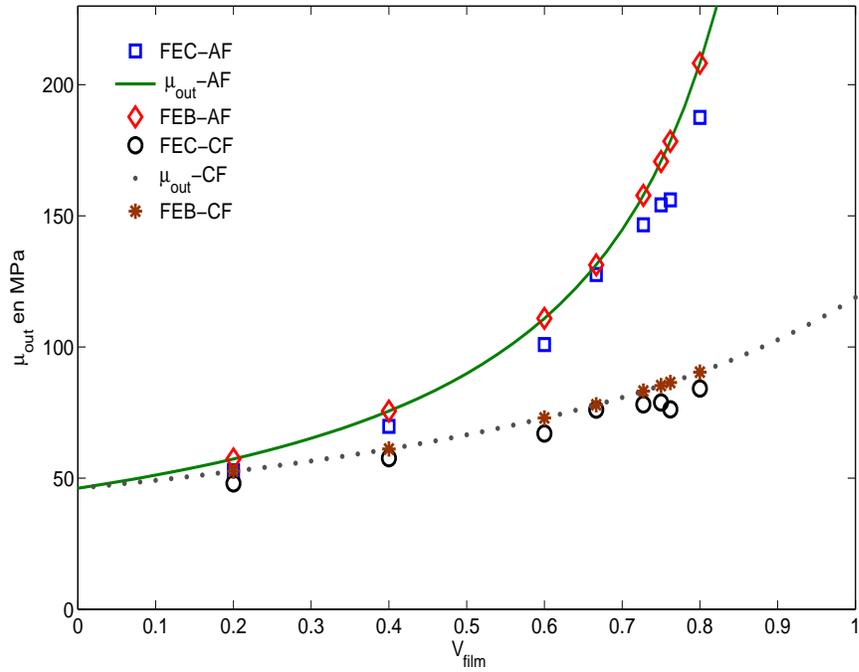


Fig. 5.11: Gráfica de μ_{out} como función de V_{film} para los laminados formados por los constituyentes LMA-AF y LMA-CF

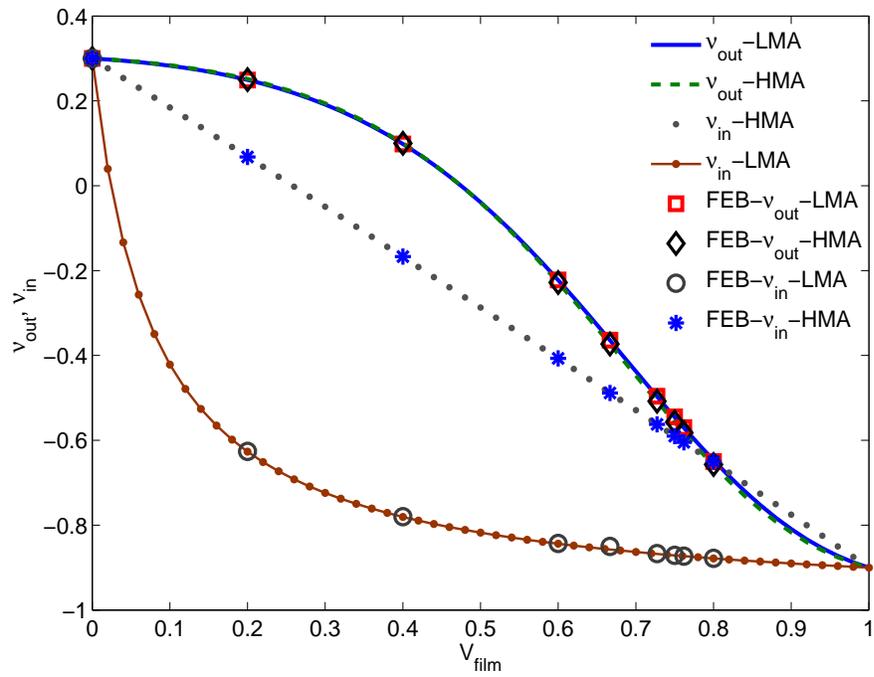


Fig. 5.12: Gráficas de v_{out} y v_{in} como función de V_{film} de LMA-AF y HMA-AF.

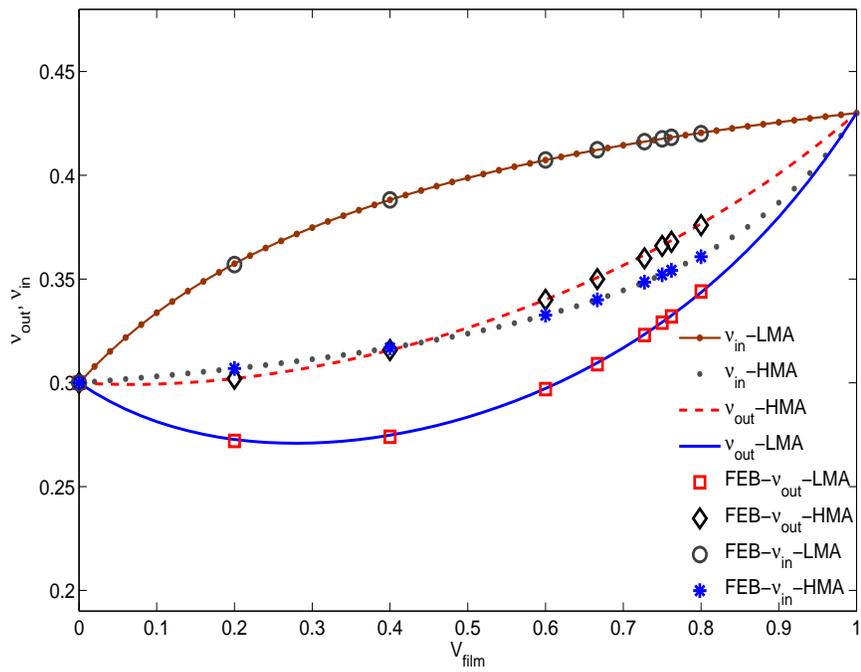


Fig. 5.13: Análogo a la 5.12 pero para CF.

5.1.3. Bilaminados

Por simplicidad haremos $n = 2$ en (5.13b)–(5.16b). Mencionaremos que para el caso de bilaminados, fórmulas para E_{in} , ν_{in} aparecen en Christensen (1979); ν_{out} , en Hsieh and Tuan (2005); para E_{out} , E_{in} , en Lim (2009); Lim and Acharya (2010). Las fórmulas (5.13b)–(5.16b) para $n = 2$ coinciden con las obtenidas por ellos. Las cuales se obtuvieron usando modelos de mecánica simple. Es conocido que E_{out} puede tener un gran aumento relativo a E_1 , la lámina más dura, es decir, $E_{out} > E_1$ (Ramirez y Sabina, 2012) para un bilaminado semiauxético esto es cuando una lámina es auxética y la otra es convencional. Este aumento fue notado previamente por Lim (2009, 2010) y Kocer et al. (2009) lo cual fue llamado aumento de un laminado semiauxético.

Reescribimos (5.13b), (5.14b), (5.15b) y (5.16b) para un bilaminado donde $V_1 + V_2 = 1$.

$$E_{in} = E_1 V_1 + V_2 + \left[\frac{V_2 E_1 V_1 (\nu_1 - \nu_2)^2}{(1 - \nu_1^2)(1 - \nu_2^2)} \right] / \left(\frac{E_1 V_1}{(1 - \nu_1^2)} + \frac{V_2}{(1 - \nu_2^2)} \right), \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{E_{out}} = \frac{V_1}{E_1} + V_2 - 2 \left[\frac{V_1 V_2 E_1}{(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)} \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \nu_2 \right)^2 \right] / \left(\frac{V_1 E_1}{1 - \nu_1} + \frac{V_2}{1 - \nu_2} \right), \quad (5.27)$$

$$\nu_{in} = \left(\frac{V_1 \nu_1 E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{V_2 \nu_2}{1 - \nu_2^2} \right) / \left(\frac{V_1 E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{V_2}{1 - \nu_2^2} \right), \quad (5.28)$$

$$\nu_{out} = E_{out} \left(\frac{V_1 \nu_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{V_2 \nu_2}{1 - \nu_2^2} \right) / \left(\frac{V_1 E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{V_2}{1 - \nu_2^2} \right). \quad (5.29)$$

De (5.26), (5.27) observamos lo siguiente. Si $V_2 = 0$, es decir, sólo hay material 1, $E_{in} = E_{out} = E_1$ y cuando sólo tenemos material 2, $V_1 = 0$, $E_{in} = E_{out} = E_2 = 1$ como debe ser. Una condición necesaria para el aumento de E_{in} o de E_{out} es que su pendiente en $V_2 = 0$ sea positiva, es decir,

$$\frac{\partial E_{in}}{\partial V_2} > 0 \quad \text{en} \quad V_2 = 0. \quad (5.30)$$

En términos de las características de los materiales, (5.30) se convierte en

$$E_1 < 1 + (\nu_1 - \nu_2)^2 / (1 - \nu_2^2). \quad (5.31)$$

Nótese que la condición sólo depende de los cocientes de Poisson ν_1 y ν_2 . Recordemos que estamos usando la notación $E_1 = E_1/E_2$. De (5.31) notamos que si el material más blando es muy auxético el valor máximo de E_1 se incrementa, es decir, la diferencia entre los módulos de Young puede ser mayor y aún así el compuesto presentará un aumento en el módulo de Young en la dirección perpendicular a la del laminado.

De forma similar para la condición de aumento de E_{out}

$$\frac{\partial E_{out}}{\partial V_2} > 0 \quad \text{en} \quad V_2 = 0, \quad (5.32)$$

de la cual se obtiene la desigualdad cuadrática

$$E_1(E_1 - 1)(1 - \nu_2) < 2(\nu_1 - \nu_2 E_1)^2. \quad (5.33)$$

La desigualdad no se cumple para $\nu_1 = E_1 \nu_2$ pues el lado izquierdo de (5.33) no puede ser negativo. Escribiendo la condición (5.33) de la forma

$$\varphi(E_1) = E_1(E_1 - 1)(1 - \nu_2) - 2(\nu_1 - \nu_2 E_1)^2 < 0, \quad (5.34)$$

se tiene que, para cada ν_1, ν_2 dados, $\varphi(E_1)$ es una parábola que se abre hacia arriba con dos raíces reales, una negativa y la otra positiva. La raíz positiva es:

$$E_1^+ = \frac{1 - \nu_2 - 4\nu_1 \nu_2}{2(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)} + \frac{\sqrt{(1 - \nu_2 - 4\nu_1 \nu_2)^2 + 8\nu_1^2(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}}{2(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)}. \quad (5.35)$$

La negativa no interesa porque $E_1 > 1$. En conclusión cada punto (ν_1, ν_2, E_1) que satisface las condiciones

$$\nu_1 \neq \nu_2 E_1, \quad (5.36)$$

$$1 < E_1 < E_1^+ \quad (5.37)$$

representa una familia de laminados con aumento de E_{out} .

Dados los cocientes de Poisson y un valor de módulo de Young que cumpla (5.31), se tendrá un aumento en la dureza del laminado en la dirección perpendicular a la del laminado. Si además E_1 cumple las condiciones (5.36) y (5.37), también se tendrá un aumento en la dureza en la dirección del laminado.

Una consecuencia inmediata de las condiciones (5.31) y (5.35) es que existe una Ventana de Endurecimiento (VE). Esto es, existe un intervalo de fracción volumétrica V_2 donde E_{in} y E_{out} son mayores que E_1 . Para E_{in} está definida como $VE_{\perp} = (0, V_{in}^E)$, donde 0 y V_{in}^E son las raíces reales de la función cuadrática V_2 que resulta cuando hacemos $E_{in} = E_1$ en (5.26). Por lo tanto

$$V_{in}^E = \frac{M}{M + (1 - \nu_1^2)(E_1 - 1)} \leq 1, \quad (5.38)$$

donde

$$M = E_1 [(\nu_1 - \nu_2)^2 - (E_1 - 1)(1 - \nu_2^2)] > 0, \quad (5.39)$$

por (5.31). Análogamente VE_{\parallel} , para E_{out} es $(0, V_{out}^E)$ donde

$$V_{out}^E = \frac{N}{N + (E_1 - 1)(1 - \nu_1)} \leq 1, \quad (5.40)$$

con

$$N = 2(v_1 - v_2 E_1)^2 - E_1(E_1 - 1)(1 - v_2) > 0, \quad (5.41)$$

por (5.35). Lim and Acharya (2010) deducen (5.38), el cual puede ser escrito como su ecuación (17). Una pequeña errata fue encontrada en el numerador de la fracción, donde el cociente de Poisson que aparece en su fórmula debe estar al cuadrado.

Otra vez con una simple inspección de (5.28), (5.29) se muestra que v_{in} y v_{out} pueden ser cero cuando $v_1 v_2 < 0$ revelando la existencia de una ventana de auxeticidad (VAX). Para esto sólo tenemos que encontrar la fracción volumétrica en la cual (5.28), (5.29) es igual a cero. La ventana de auxeticidad en el plano $x_1 x_2$ es $VAX_{\perp} = (0, V_{in}^V)$ donde

$$V_{in}^V = \frac{1}{1 + \frac{1}{E_1} \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \frac{1-v_1^2}{1-v_2^2}}. \quad (5.42)$$

Procediendo de manera análoga obtenemos $VAX_{\parallel} = (0, V_{out}^V)$ con

$$V_{out}^V = \frac{1}{1 + \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \frac{1-v_1}{1-v_2}}, \quad (5.43)$$

el cual es independiente de E_1 y sólo depende de v_1 y v_2 . Es fácil probar que $V_{out}^V < V_{in}^V$ si $v_1 < v_2$ y $V_{in}^V < V_{out}^V$ siempre que $v_2 < v_1$.

5.1.4. Corrección a las gráficas de Lim (2009)

Como se había mencionado antes, Lim (2009) obtuvo una fórmula explícita de E_{out} para un bilaminado, la cual coincide con la obtenida con el método de Backus la (5.27). Su principal interés fue considerar una celda semiauxética, es decir, un bilaminado formado por una lámina auxética y una convencional. Él presenta algunos ejemplos numéricos. Tratamos de reproducir éstos usando la fórmula (5.27). Observamos que las gráficas no correspondían con los valores de entrada. No pudimos averiguar cuál fue la razón del error. Él elige como primeros valores $E_1 = E_2 = 1$, $V_1 = V_2 = 0.5$ y grafica E_{out} contra v_1 y v_2 en el intervalo $-0.5 < v_1, v_2 < 0.5$ (Fig. 2 de Lim). La gráfica correcta para estos valores está dada en la Fig. 5.14, la cual muestra en particular, que el máximo valor de E_{out} es aproximadamente igual a 2; este valor es 36% más grande que el exhibido en su Fig. 2. Otros valores siguen un comportamiento similar. En general sus valores están por debajo de los obtenidos al usar (5.27) con los datos dados por Lim (2009).

Después él fija $v_2 = -v_1 = \sqrt{1}$ y $-v_2 = v_1 = \sqrt{1}$ y da gráficas de E_{out} contra V_2 para $E_1 = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$. Estas gráficas mostradas en la Fig. 5.15 (Figura 3 de Lim) también están en un error. Las correctas están dadas en la Fig. 5.16, la cual muestra el módulo de Young efectivo,

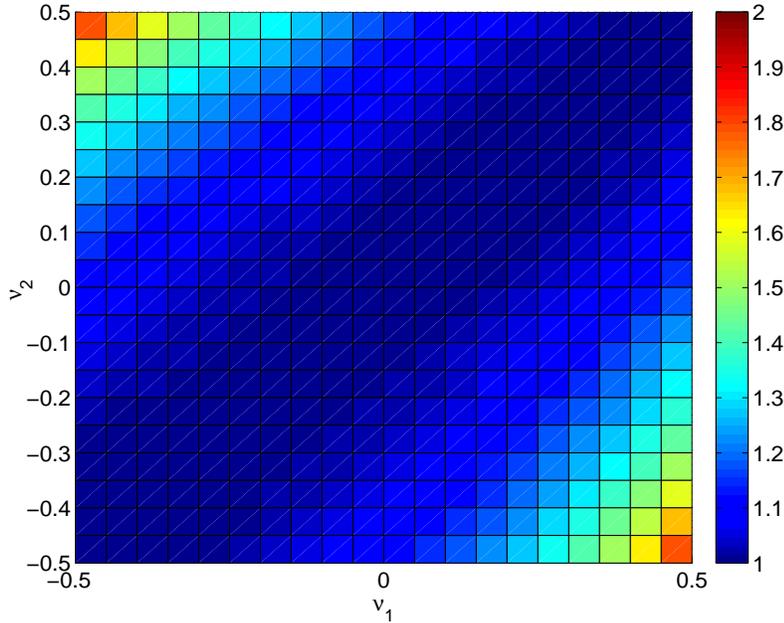


Fig. 5.14: Gráfica de E_{out} como función de los cocientes de Poisson, $-0.5 < v_1, v_2 < 0.5$, $E_1 = E_2 = 1$. Esta figura corrige la Fig. 2 de [Lim \(2009\)](#).

E_{out} graficado contra la fracción volumétrica V_2 con $v_1 = -v_2 = \sqrt{0.1}$ con círculos abiertos y $-v_1 = v_2 = \sqrt{0.1}$, círculos cerrados; la regla simple de mezcla (línea continua) y la reglas inversa de mezcla (línea discontinua) también aparecen ahí para los cuatro valores considerados por [Lim \(2009\)](#) a) $E_1/E_2 = 1.2$, b) $E_1/E_2 = 1.4$, c) $E_1/E_2 = 1.6$ y d) $E_1/E_2 = 1.8$.

Hay cuatro características que destacar: el aumento de E_{out} , el intervalo de fracción volumétrica en el cual tal aumento ocurre, el valor de la fracción volumétrica en el cual las curvas de los laminados con cociente de Poisson intercambiado alcanzan el mismo valor de E_{out} y la relación de E_{out} con las reglas de mezcla.

El valor más grande para E_{out} se da en $v_2 = -v_1 = \sqrt{0.1}$, es decir, cuando el material más duro es auxético, siendo el laminado más duro que el material más duro por 17.85% en la Fig. [5.16\(a\)](#). Hay una gran diferencia relativa a la Fig. 3(a) de [Lim \(2009\)](#) de 15.85%. El aumento decrece como una función de E_1 a 4.35% en la Fig. [5.16\(d\)](#) para $E_1 = 1.8$. Este máximo valor también es mucho más grande que el mostrado en la Fig. 3(d) de [Lim \(2009\)](#), el cual muestra un aumento cercano a 0.4%. Para el caso $-v_2 = v_1 = \sqrt{.1}$ el máximo porcentaje de aumento es 12.89% mientras que el de Lim es cercano a 0.5%, (comparar la Fig. [5.16\(a\)](#) y la Fig. 3(a) de Lim). El aumento al igual que antes también decrece como función de E_1 . Nuestras figuras [5.16\(c\),\(d\)](#) exhiben muy poco aumento o nada de aumento.

Además, el intervalo de fracción volumétrica en el cual E_{out} es más grande que la lámina más

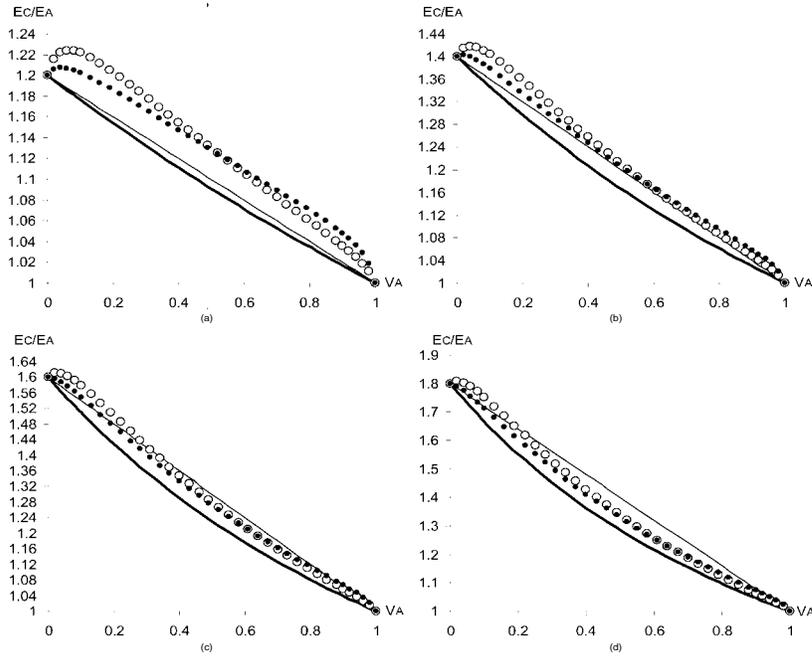


Fig. 5.15: Tomada de la Figura 3 de Lim (2009). Comparar con Fig. 5.16 que muestra las curvas correctas.

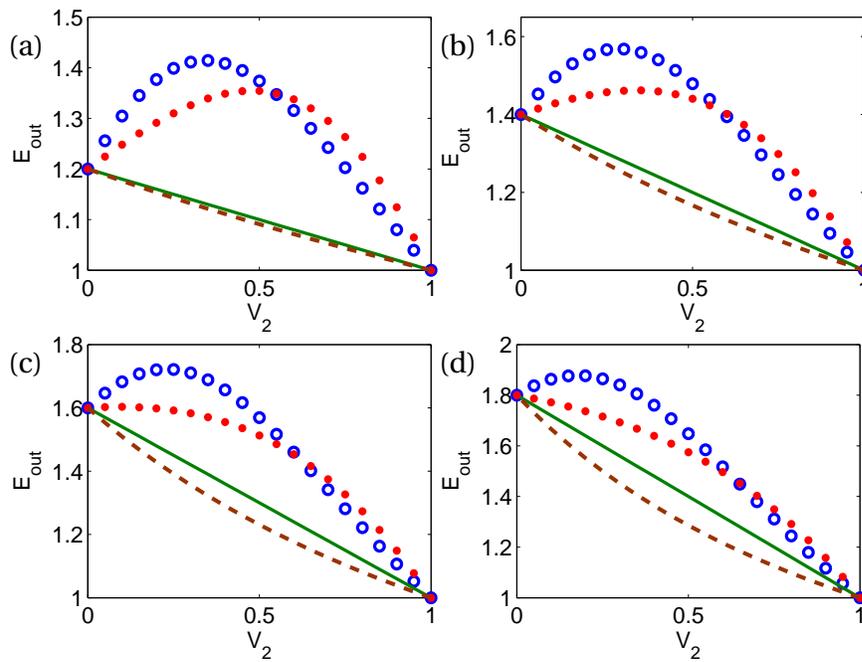


Fig. 5.16: Módulo de Young normalizado E_{out} como función de V_2 para el bilaminado estudiado por Lim (2009), es decir, con $v_1 = -v_2 = \sqrt{0.1}$ (círculos) y $-v_1 = v_2 = \sqrt{0.1}$ (círculos llenos); también se grafican la regla directa de mezcla (línea continua) y la regla inversa de mezcla, (línea discontinua). Estas gráficas corrigen la de Lim (2009) véase Fig. 5.15

dura es mucho más amplio que el mostrado por Lim. Por ejemplo en la Fig. 5.16(a) este intervalo es (0,0.75) que es bastante más amplio que el de Fig. 5.15(a) el cual es (0,0.2).

Usando la expresión de E_{out} (5.27) es fácil encontrar la fracción volumétrica en la cual dos diferentes laminados tienen el mismo módulo de Young efectivo. En los cuatro ejemplos de la Fig. 3 de Lim, hay una única intersección con el intervalo de fracción volumétrica. La cual está dada por la fórmula $E_1(1 + E_1)$. Calculamos E_{out} en esta fracción volumétrica para cada ejemplo. Los módulos de Young efectivos E_{out} para $E_1 = 1.2, 1.4, 1.6$ y 1.8 son 1.35, 1.40, 1.44 y 1.45, respectivamente. En las gráficas de Lim los correspondientes valores están muy por debajo de éstos. Por ejemplo, $E_{out} = 1.12$ cuando $E_1 = 1.2$, lo cual está 17% por debajo de nuestro valor.

En todas las curvas de la Fig. 5.16 E_{out} está muy por encima de las reglas de mezcla. Esto no pasa en todos los casos de Lim, sólo en su Fig. 3(a),(b), E_{out} cae justo por encima o cerca de estos valores.

En conclusión se ha mostrado que el aumento de E_{out} con respecto a la fase más dura de un laminado semiauxético es mucho más grande y se extiende sobre un intervalo de fracción volumétrica más amplio que los mostradas por Lim. Una observación que debemos hacer es que las reglas de mezcla no son una buena aproximación en todos los ejemplos mostrados.

Ahora damos un ejemplo en el cual la diferencia entre los módulos de Young de los constituyentes es grande, ver Fig. 5.17(a), (b) $E_1 = 25, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = -0.4$ $E_1 = 30, \nu_1 = -0.6, \nu_2 = 0.4$, respectivamente. Aquí la regla de mezcla directa coincide con E_{in} . En la Fig. 5.17(a) la regla inversa de mezcla coincide con E_{out} mientras que en la Fig. 5.17(b) sólo es una buena aproximación.

Habiendo encontrado los errores en Lim (2009), procedimos a escribir un artículo en la misma revista señalando sólo las figuras erróneas aconsejados por el editor encargado que nos dijo que se enviarían a Lim para que tuviera oportunidad de réplica. Después de transcurrir un tiempo en el que no hubo la réplica esperada, nuestros resultado fueron publicados en Ramírez, M. and Sabina (2012). Posteriormente apareció publicado en la misma revista, Lim (2013) que señala que errores cometió en Lim (2009). Curiosamente no hizo referencia a Ramírez, M. and Sabina (2012).

5.1.5. Bilaminados auxético-auxético y convencional-convencional

En secciones previas se consideraron dos tipos de bilaminados, el uso de fórmulas analíticas y cálculos numéricos llevan a las propiedades efectivas y efectos como ventanas de endurecimiento para los módulos de Young y ventanas de auxeticidad para las cocientes de Poisson. El primer tipo está formado por una lámina convencional y otra auxética, a la cual nos vamos a referir como PA. El segundo está formado por dos láminas convencionales (cociente de Poisson

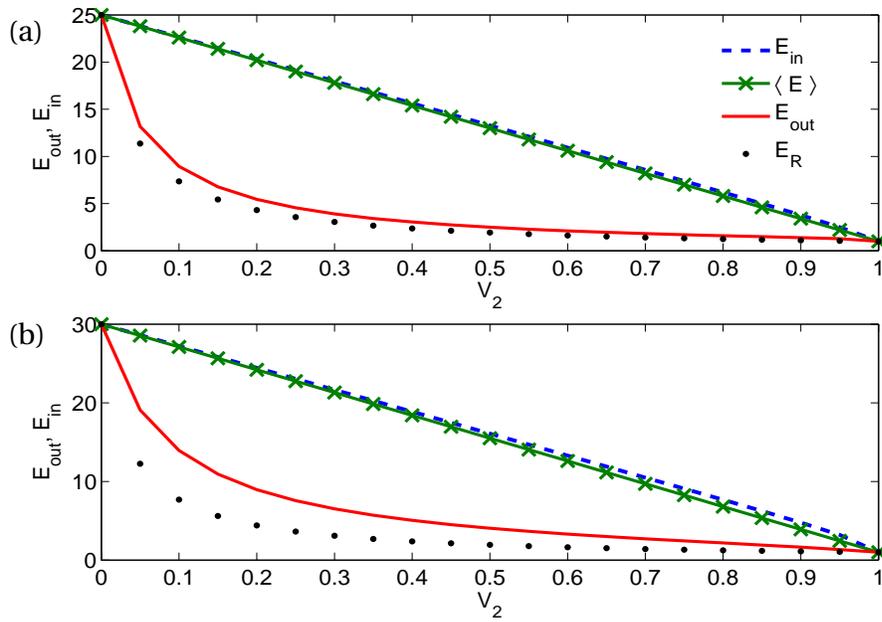


Fig. 5.17: (a) Módulos de Young relativos efectivos, E_{in}, E_{out} como función de V_2 correspondientes a un laminado con datos $E_1 = 25, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = -0.4$, (b) como en (a) pero $E_1 = 30, \nu_1 = -0.6, \nu_2 = 0.4$.

positivo) que designaremos como PP. Además de estos dos casos, analizaremos un tercero que involucra dos fases auxéticas al que referiremos como AA.

En esta sección seguimos usando la notación E_1 para denotar E_1/E_2 , es decir, el módulo de Young del primer constituyente está normalizado con respecto al segundo. Vamos a examinar primero el caso PP. Las propiedades de las fases del bilaminado son $E_1 = 1.2, \nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.49$, nótese que el material 2 es casi incompresible. Las desigualdades (5.31) y (5.35) para el aumento de E_{in} y E_{out} se satisfacen en ambos casos aunque (5.31) marginalmente. Se esperaría tener una VE_{\parallel} para E_{out} . No hay VAX para ν_{in} ni para ν_{out} . La Fig. 5.18(a) muestra la gráfica de E_{out}, E_{in} en función de V_2 . Las líneas continua y discontinua se refieren a E_{out} y E_{in} , respectivamente. Ellas están dentro de las cotas superior e inferior de Hill, que también se muestran como una línea con puntos y una línea punteada, respectivamente. El máximo aumento de E_{out} es aproximadamente 9%. Se muestra un amplio intervalo de endurecimiento. No hay un aumento para E_{in} que es lo que se esperaba pues E_1 es apenas menor que la parte derecha de (5.31). La Fig. 5.18(b) presenta ν_{in}, ν_{out} contra V_2 . Se observa una conducta monótona creciente en ambos cocientes de Poisson. La Fig. 5.19 muestra las gráficas de las constantes elásticas como función de V_2 . Ellas muestran una conducta típica de un compuesto reforzado, coeficientes monótonos crecientes y todas toman valores positivos.

Ahora discutiremos el laminado AA, donde $E_1 = 1.2$ y $\nu_1 = -0.2, \nu_2 = -0.9$. Ambas desigualdades (5.31) y (5.35) se cumplen. Por lo tanto hay VE_{\perp} y VE_{\parallel} ; de hecho estas ventanas son bastantes

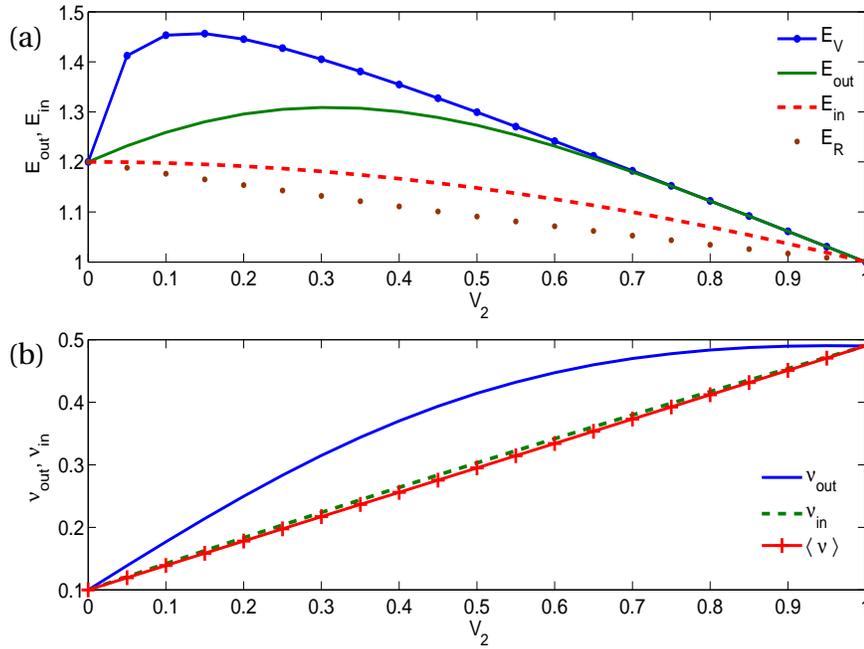


Fig. 5.18: (a) Gráficas de E_{out} y E_{in} relativos como función de V_2 para el laminado PP $E_1 = 1.2, E_2 = 1, v_1 = 0.1$ y $v_2 = 0.49$. (b) Gráficas correspondientes a v_{out} y v_{in} contra V_2 .

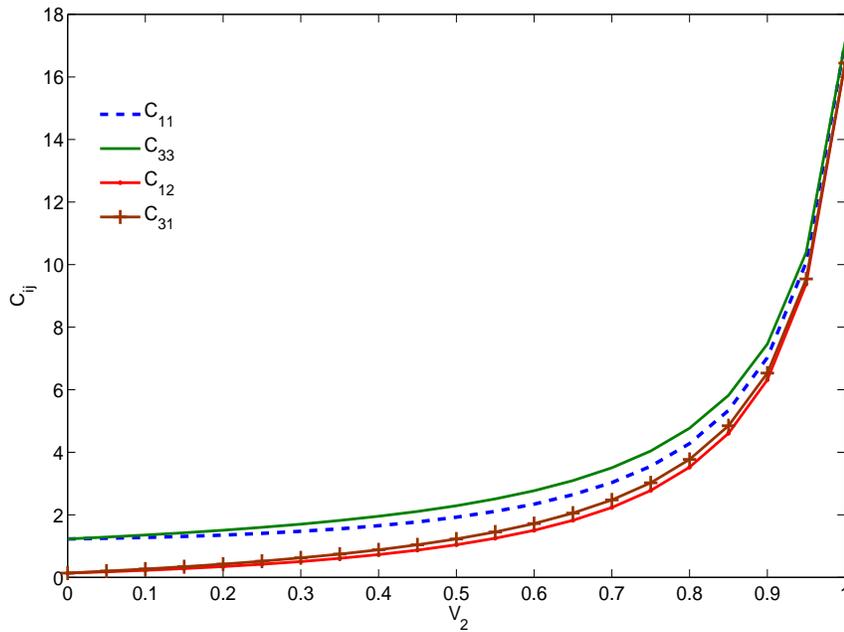


Fig. 5.19: Constantes elásticas C_{11} , C_{33} , C_{12} y C_{31} como función de V_2 correspondiente al laminado AA.

amplias pues van desde $V_2 = 0$ hasta aproximadamente $V_2 = 0.8$ para ambos módulos de Young efectivos como se puede ver en la Fig. 5.20(a) donde se grafican E_{out} y E_{in} como función de V_2 con líneas continua y discontinua, respectivamente. En la Fig. 5.20(b) se muestra v_{in} y v_{out}

como función de V_2 los valores son negativos para toda fracción volumétrica. En conclusión este compuesto es auxético en cualquier plano para todo V_2 y las VE son bastantes amplias en ambas direcciones principales. También se muestran en la Fig. 5.20(a) E_V y E_R acotando a E_{out} y E_{in} . El comportamiento auxético característico de las constantes elásticas se muestra en la Fig. 5.21, es decir, C_{12} y C_{13} son negativas.

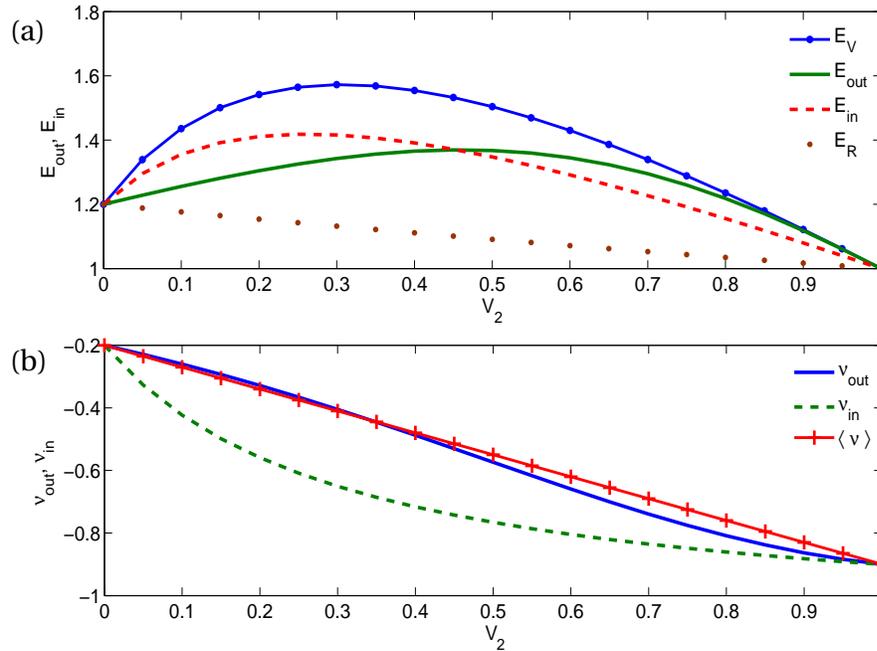


Fig. 5.20: Análogo a la Fig. 5.18 pero para el bilaminado AA.

Como ejemplo final tomamos tres bilaminados PA. Las propiedades son $\nu_1 = 0.45$, $\nu_2 = -0.8$ para los tres laminados y lo que cambia es $E_1 = 1.2, 1.8, 3$. Los curvas obtenidas al usar (5.26)–(5.29) aparecen en la Fig. 5.22(a), (b), (c), (d) las cuales muestran a E_{out} , E_{in} y ν_{out} , ν_{in} como función de V_2 , respectivamente. Las propiedades de cada uno de los laminados se muestran como línea con puntos para $E_1 = 1.2$, línea discontinua para $E_1 = 1.8$ y finalmente para $E_1 = 3$ con una línea continua.

En la Fig. 5.22(a) se puede ver que el aumento en la dureza del laminado en la dirección perpendicular al laminado sólo ocurre para $E_1 = 1.2, 1.8$. Para $E_1 = 1.2$ el aumento máximo es de 52% y de 21% para $E_1 = 1.8$. En la Fig. 5.22(b) se observa que E_{out} exhibe una amplia VE en los tres casos. El aumento máximo de E_{out} para $E_1 = 1.2$ es de 234% y este disminuye conforme E_1 aumenta llegando a 120% para $E_1 = 3$.

La Fig. 5.22(c) muestra la gráfica de ν_{in} como función de V_2 . Observamos que ν_{in} es decreciente como función de E_1 y las VAX_{\perp} son bastante amplias llegando hasta (0,0.9) para $E_1 = 3$. Para ν_{out} , Fig. 5.22(d), no se observa dependencia de E_1 . La VAX es independiente de E_1 de acuerdo con

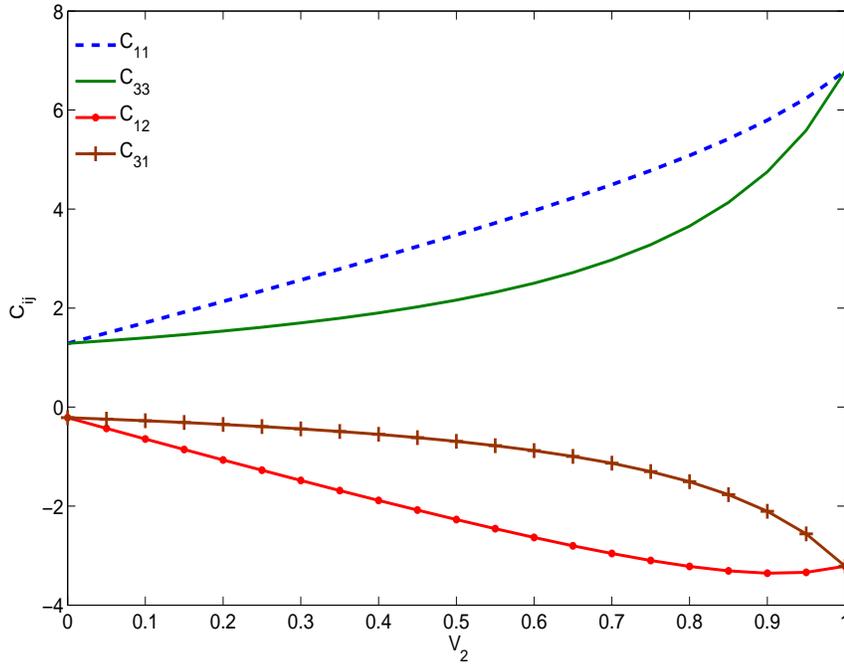


Fig. 5.21: Análogo a la Fig. 5.19 pero para el bilaminado AA con datos $E_1 = 1.2, E_2 = 1, \nu_1 = 0.2$ y $\nu_2 = -0.9$.

(5.43) y es corroborado aquí. Finalmente la Fig. 5.23 muestra C_{11}, C_{33}, C_{12} y C_{13} como función de V_2 . Las dos últimas constantes son negativas en algún intervalo indicando auxeticidad.

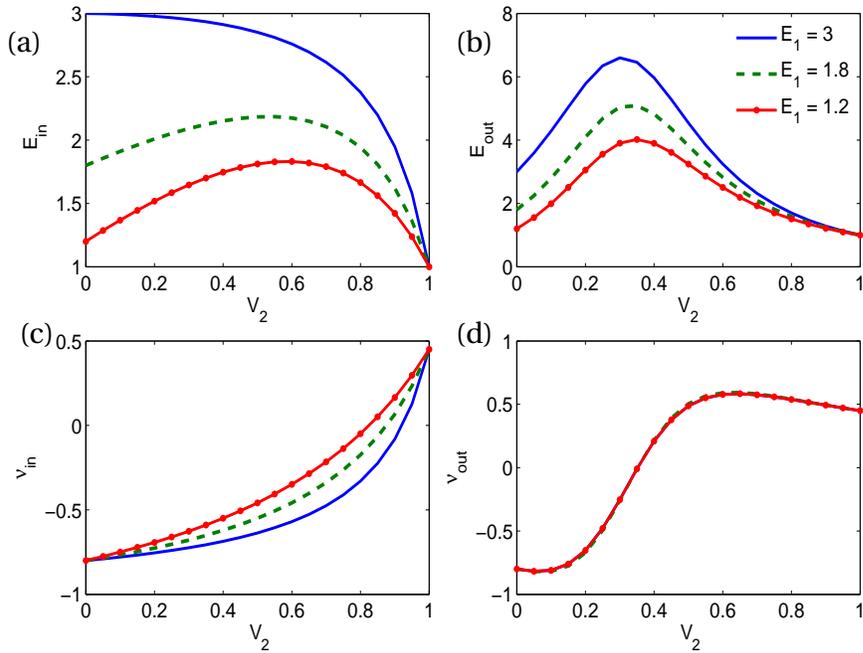


Fig. 5.22: (a) Gráficas de E_{in} contra V_2 para un laminado PA con $\nu_1 = -0.8$, $\nu_2 = 0.45$, $E_1 = 1.2$ (línea continua con puntos), $E_1 = 1.8$ (línea discontinua) y $E_1 = 3$ (línea continua). (b)-(d): Gráficas correspondientes a E_{out} , ν_{in} y ν_{out} , versus V_2 .

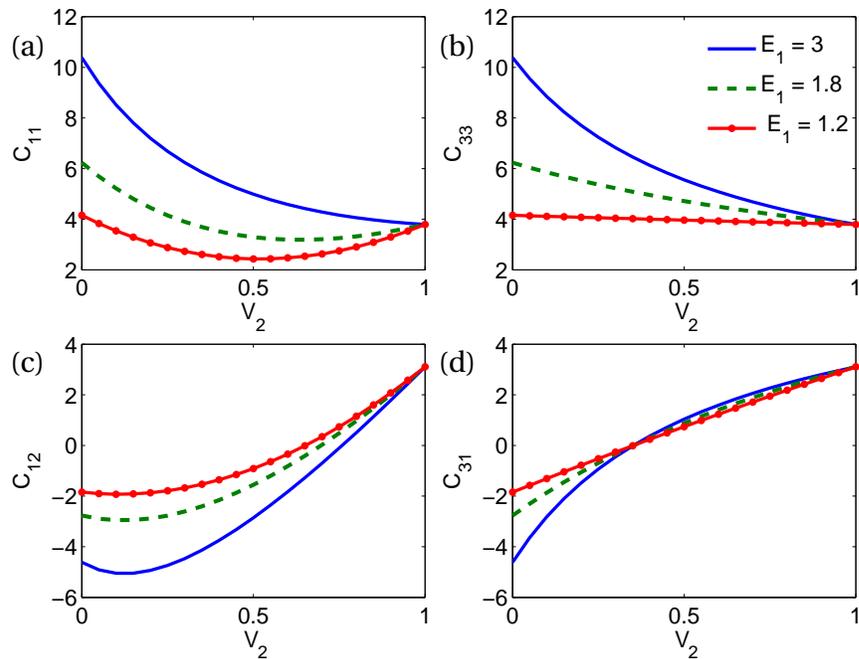


Fig. 5.23: (a) Constante elástica C_{11} vs V_2 de un bilaminado PA con $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -0.8$, $\nu_2 = 0.45$ mostrado con línea continua con puntos, la línea discontinua corresponde a $E_1 = 1.8$ y la línea continua a $E_1 = 3$. (b)-(d) Análogo a (a) pero para C_{33} , C_{12} y C_{31} vs V_2 respectivamente.

5.1.6. Indentación de flexibilidad

La dureza es una propiedad de los sólidos que permite conocer la capacidad de oponer resistencia a ser deformados permanentemente. En los ensayos de dureza se supone la aplicación de una carga controlada (P) sobre el material, mediante un cuerpo rígido (indentador). La carga sobre el material por el dispositivo causa una indentación permanente, la penetración (δ) del dispositivo en el material. La dureza no es una propiedad fundamental puesto que depende del indentador y de la carga aplicada.

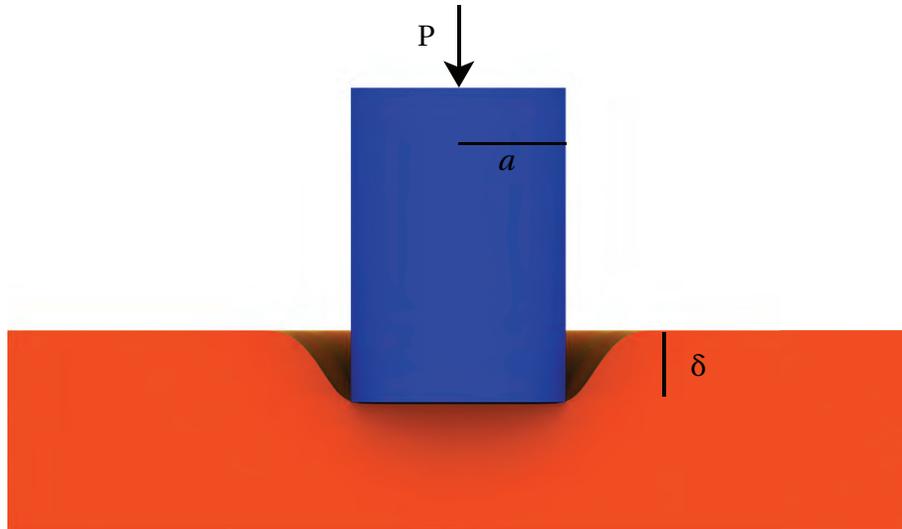


Fig. 5.24: Bilaminado con constituyentes isótropos con un indentador cilíndrico de radio a al que se le aplica una carga P .

La indentación de flexibilidad es una propiedad mecánica que es posible calcular explícitamente para el laminado de este capítulo. En particular, es interesante analizar el caso en el que el laminado tiene una lámina auxética pues la indentación en un semiespacio isótropo está dada por la fórmula $\frac{\delta}{P} = \frac{1-\nu^2}{2Ea}$, que en particular, da un efecto de reforzamiento para un medio auxético con cociente de Poisson cercano a -1. Además hay cálculos de EF dados por (Kocer et al., 2009) con los cuales podemos comparar. Hay que señalar que el laminado equivalente es transversalmente isótropo. La indentación para este tipo de materiales mediante un indentador cilíndrico ha sido estudiada por Fabrikant (1988) en el caso en el que el medio y el indentador están en contacto sin fricción y en el que el están en contacto soldado en Fabrikant (1991). Calculamos la indentación de flexibilidad para estos dos casos y los comparamos con los datos dados por Kocer et al. (2009).

La solución analítica para la indentación de flexibilidad de un medio transversalmente isótropo, el compuesto aquí estudiado, fue dada por Fabrikant (1988) (también Kachanov et al. (2003))

para el primer caso como

$$\frac{\delta}{P} = \frac{\pi H}{2a}, \quad (5.44)$$

donde δ es el desplazamiento vertical del indentador, P la fuerza vertical aplicada, a el radio del indentador y

$$H = \frac{C_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\pi(C_{11}C_{33} - C_{13}^2)}; \quad (5.45)$$

C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{44} , C_{66} son las constantes elásticas de un medio transversalmente isótropo. Los parámetros γ_1 , γ_2 relacionan las constantes elásticas por medio de las fórmulas

$$\gamma_3 = (C_{44}/C_{22})^{1/2}, \quad (5.46)$$

$$\gamma_k^2 = \frac{C_{44} + m_k(C_{13} + C_{44})}{C_{11}} = \frac{m_k C_{33}}{m_k C_{44} + C_{13} + C_{44}}, \quad k = 1, 2. \quad (5.47)$$

La segunda igualdad da lugar a una ecuación cuadrática para m teniendo como raíces conjugadas m_1 , m_2 (de tal forma que $m_1 m_2 = 1$). La primera igualdad fija γ_1 y γ_2 , las cuales son complejas conjugadas se elige de tal forma que $\text{Re}\gamma_k > 0$. La indentación de flexibilidad en el caso de contacto soldado está dado como sigue (Fabrikant, 1991; Kachanov et al., 2003)

$$\frac{\delta}{P} = \frac{H \tanh(\pi\theta)}{2a\theta}, \quad (5.48)$$

donde

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{\gamma_1} \gamma_2 + \alpha}{\sqrt{\gamma_1} \gamma_2 - \alpha} \right), \quad (5.49)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}}{C_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}. \quad (5.50)$$

La Fig. 5.25 es la gráfica de la indentación de flexibilidad δ/P en nm/N contra el cociente del grosor de la lámina auxética y la lámina convencional, $V_2/(1 - V_2)$, para el compuesto efectivo equivalente a $m = 2$ con constituyentes con datos $E_1 = E_2 = 1$, $\nu_1 = -0.9$ y $\nu_2 = 0.4$. Se muestran dos curvas la línea continua corresponde al caso de contacto sin fricción y la discontinua al caso de contacto soldado. Las curvas son monótonas decrecientes. Los valores de la primera son mayores que los del último para todos los cocientes de grosor. Cuando la lámina auxética es muy delgada comparada con la otra, es decir, $V_2/(1 - V_2) \ll 1$ y el caso opuesto cuando $V_2/(1 - V_2) \gg 1$, se alcanzan los límites asintóticos correspondientes de Bousinesq o Mossakovski–Spence para un material isótropo, respectivamente, los cuales son

$$\frac{\delta}{P} = \frac{1 - \nu^2}{2Ea}, \quad (5.51)$$

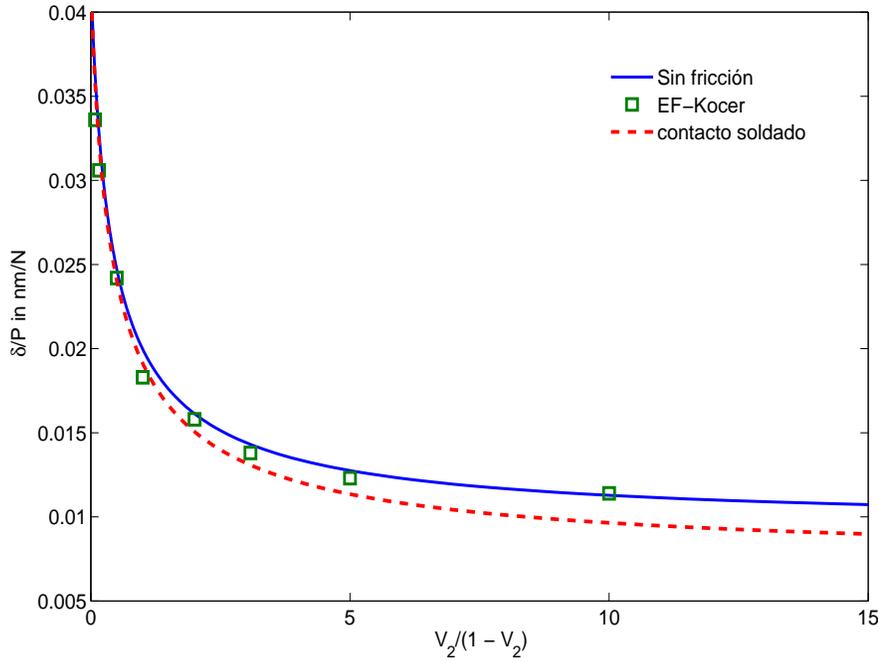


Fig. 5.25: Gráficas de la indentación de flexibilidad δ/P en nm/N contra el cociente del grosor entre las láminas negativas y positivas $V_2/(1 - V_2)$. La línea continua corresponde al caso en el que el indentador y el medio están en contacto sin fricción, la línea discontinua corresponde al caso cuando están en contacto soldado. Los cuadros corresponden a los cálculos hechos mediante EF.

$$\frac{\delta}{P} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2a \ln(2 - 4\nu)}. \quad (5.52)$$

En ambos ejemplos la indentación de flexibilidad crece sin límite cuando $V_2/(1 - V_2) \rightarrow 0$ y alcanza un límite finito cuando $V_2/(1 - V_2) \rightarrow \infty$ para un bilaminado con una fase auxética.

Los resultados de EF de Kocer et al. (2009) para la misma configuración y contacto sin fricción se muestran en la Fig. 5.25. Ellos están muy cerca de la curva teórica calculada con (5.44). O sea que la comparación entre las fórmulas analíticas y los cálculos usando FE es excelente.

Observaciones

Para concluir esta sección hacemos una recapitulación de las observaciones con respecto a un laminado de n láminas hechas hasta ahora como son:

- Las constantes de elasticidad, ingenieriles y la indentación de flexibilidad efectivas no dependen del orden en el cual las láminas son colocadas. Sólo dependen del total de la fracción volumétrica que ocupan.

- Las propiedades efectivas calculadas con las fórmulas cerradas coinciden con las obtenidas mediante una correcta instrumentación de elemento finito.
- Las condiciones para el endurecimiento de un bilaminado son dadas en términos de los módulos de Young y los cocientes de Poisson de los constituyentes.
- Las ventanas de endurecimiento y auxeticidad se pueden predecir fácilmente mediante las fórmulas dadas.
- La ventana de auxeticidad en el plano Ox_1x_3 no depende de los módulos de Young de los constituyentes.
- Las ventanas de auxeticidad muestran subventanas donde los cocientes de Poisson del compuesto puede ser menores que el más pequeño y mayores que el más grande cociente de Poisson de los constituyentes.
- El aumento en la dureza del compuesto es posible si ambas láminas son positivas, auxéticas y si una es auxética y otra positiva.
- La indentación de flexibilidad obtenida con las fórmulas analíticas y las obtenidas mediante elemento finito coinciden.
- La indentación de flexibilidad de un bilaminado semiauxético decrece dramáticamente cuando el cociente de Poisson de una de las láminas tiende a -1, es decir, que la deformación de un material mediante la indentación es más difícil conforme el cociente de Poisson del material se aproxima a -1.
- El hecho de que un laminado tenga un reforzamiento agregado puede tener aplicaciones prácticas de protección contra fuerzas externas, por ejemplo empaquetamiento o cubiertas de materiales delicados.
- Los resultados analíticos que son reportados aquí pueden ser útiles como referencia para otros ejemplos numéricos y experimentales.

5.2. Constituyentes con simetría cúbica

Ahora consideramos un bilaminado cuyos constituyentes poseen simetría cúbica. Nos interesa el efecto de los constituyentes auxéticos. Se presenta además la relación que guardan los ejes de simetría entre sí. Vamos a considerar que el eje x_3 coincide en ambas láminas y que los ejes en el plano del laminado están dispuestos de tal manera que los ejes x_1 de la primera lámina y x'_1 de la segunda forman un ángulo θ , $0 \leq \theta < \pi/4$ donde $x_1 x_2 x_3$ son los ejes de simetría de una de las láminas y $x'_1 x'_2 x'_3$ los de la otra lámina (ver Fig. 5.26).

Vamos a deducir las fórmulas para las propiedades efectivas para este laminado usando el método de Backus para esto primero haremos coincidir los ejes de simetría rotando los ejes de simetría de una de las láminas.

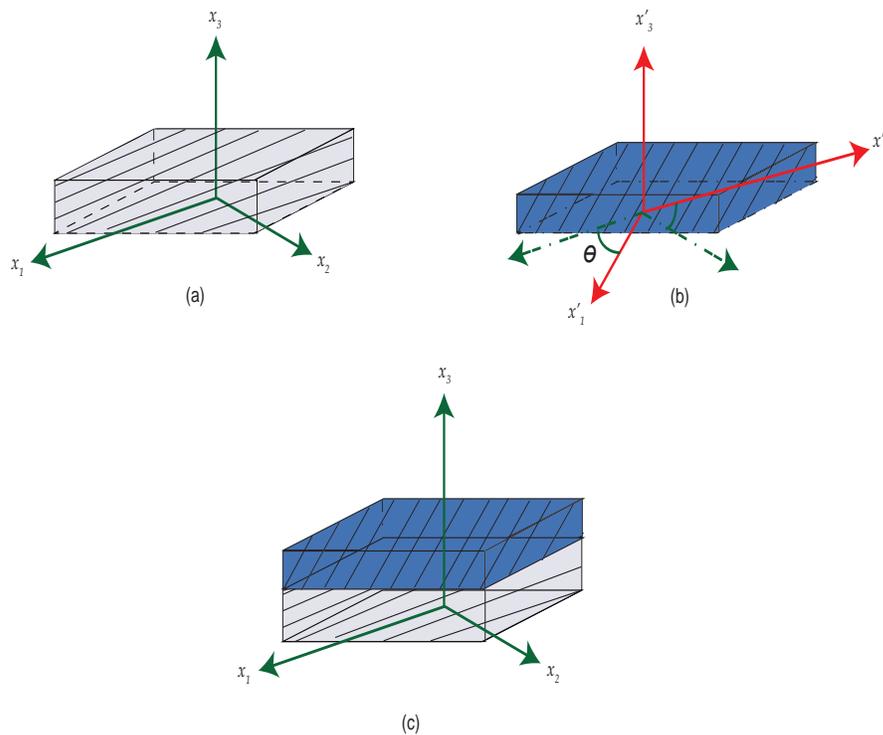


Fig. 5.26: (a) Lámina de simetría cúbica con ejes de simetría $x_1 x_2 x_3$. (b) Lámina de simetría cúbica con ejes de simetría $x'_1 x'_2 x'_3$. Entre los ejes $x_1 x_2$ y los ejes $Ox'_1 x'_2$ hay un ángulo θ . (c) Bilaminado formado por las láminas (a) y (b).

Sean $C_{11}^{(1)}$, $C_{12}^{(1)}$, $C_{44}^{(1)}$ las constantes elásticas del constituyente 1 y sean $E_1^{(1)}$, $\nu_{12}^{(1)}$ y $\mu_{12}^{(1)}$ sus constantes ingenieriles y $C_{11}^{(2)}$, $C_{12}^{(2)}$, $C_{44}^{(2)}$, $E_1^{(2)}$, $\nu_{12}^{(2)}$ y $\mu_{12}^{(2)}$ las correspondientes al constituyente 2. Si rotamos los ejes de la lámina 1 un ángulo θ , las constantes elásticas con respecto a los ejes

principales del material que ocupa la lámina 2 son:

$$C_{11}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[3C_{11}^{(1')} + C_{12}^{(1')} + C_{44}^{(1')} + \left(C_{11}^{(1')} - C_{12}^{(1')} - C_{44}^{(1')} \right) \cos 4\theta \right], \quad (5.53)$$

$$C_{12}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[C_{11}^{(1')} + 3C_{12}^{(1')} - C_{44}^{(1')} + \left(-C_{11}^{(1')} + C_{12}^{(1')} + C_{44}^{(1')} \right) \cos 4\theta \right], \quad (5.54)$$

$$C_{13}^{(1)} = C_{12}^{(1')}, \quad (5.55)$$

$$C_{44}^{(1)} = C_{44}^{(1')}, \quad (5.56)$$

$$C_{66}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[C_{11}^{(1')} - C_{12}^{(1')} + C_{44}^{(1')} + \left(-C_{11}^{(1')} + C_{12}^{(1')} + C_{44}^{(1')} \right) \cos 4\theta \right], \quad (5.57)$$

$$C_{16}^{(1)} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \left(C_{11}^{(1')} - C_{12}^{(1')} - C_{44}^{(1')} \right) \text{sen } 4\theta, \quad (5.58)$$

$$C_{33}^{(1)} = C_{11}^{(1')}. \quad (5.59)$$

Las constantes ingenieriles se transforman en

$$E_1^{(1)} = \frac{4E_1^{(1')} \mu^{(1')}}{E_1^{(1')} - \mu^{(1')} \alpha + \beta \cos(4\theta)}, \quad (5.60)$$

$$E_2^{(1)} = E_3^{(1)} = E_1^{(1')}, \quad (5.61)$$

$$\nu_{12}^{(1)} = 1 + \frac{4\mu^{(1')} (\nu_{12}^{(1')} - 1)}{E_1^{(1')} - \mu^{(1')} \alpha + \beta \cos(4\theta)}, \quad (5.62)$$

$$\nu_{31}^{(1)} = \nu_{12}^{(1')}, \quad (5.63)$$

$$\mu_{44}^{(1)} = \mu_{44}^{(1')}, \quad (5.64)$$

$$\mu_{66}^{(1)} = \frac{2E_1^{(1')} \mu^{(1')}}{E_1^{(1')} + \mu^{(1')} + \mu^{(1')} \nu_{12}^{(1')} - \beta \cos(4\theta)}, \quad (5.65)$$

$$S_{16}^{(1)} = - \left(1/E_1^{(1')} - \frac{\nu_{12}^{(1')}}{E_1^{(1')}} - 1/\mu_{44}^{(1')} \right) \text{sen}(4\theta), \quad (5.66)$$

donde

$$\alpha = -3 + \nu_{12}^{(1')} \quad \text{y} \quad \beta = -E_1^{(1')} + \mu^{(1')} + \mu^{(1')} \nu_{12}^{(1')}. \quad (5.67)$$

Las propiedades relativas a este sistema de coordenadas es la de un material elástico que posee simetría tetragonal y $S_{16}^{(1)}, C_{16}^{(1)} \neq 0$. Notemos que $C_{13}^{(1)}, C_{44}^{(1)}$ y $C_{33}^{(1)}$ son independientes de θ así como $E_2^{(1)}, \nu_{31}^{(1)}$ y $\mu_{44}^{(1)}$. Las componentes restantes son funciones de θ con periodo $\pi/2$. Las constantes

elásticas efectivas para esta clase de laminados son

$$C_{11} = C_{22} = \langle C_{11} - C_{13}^2/C_{33} \rangle + \langle C_{13}/C_{33} \rangle^2 / \langle 1/C_{33} \rangle, \quad (5.68)$$

$$C_{33} = 1 / \langle 1/C_{33} \rangle, \quad (5.69)$$

$$C_{13} = C_{23} = \langle C_{13}/C_{33} \rangle / \langle 1/C_{33} \rangle, \quad (5.70)$$

$$C_{12} = \langle C_{12} - C_{13}^2/C_{33} \rangle + \langle C_{13}/C_{33} \rangle^2 / \langle 1/C_{33} \rangle, \quad (5.71)$$

$$C_{16} = \langle C_{16} \rangle, \quad (5.72)$$

$$C_{44} = C_{55} = \langle 1/C_{44} \rangle^{-1}, \quad (5.73)$$

$$C_{66} = \langle C_{66} \rangle. \quad (5.74)$$

Las fórmulas para las constantes ingenieriles también se pueden calcular pero sus expresiones son muy extensas y no dan información adicional, además sabemos que a partir de las constantes elásticas se pueden calcular las constantes ingenieriles.

Al igual que para el caso de constituyentes isótropos haremos el análisis numérico de un bilaminado con los materiales dados en la tabla [5.2](#).

Material	Módulo de Young	Módulo de corte	Cociente de Poisson
	E en GPa	μ en GPa	ν
Plata	42.79	46.1	0.43
Teluro de estaño	98.26	1.2×10^4	-0.088

Tabla 5.2: Propiedades de los materiales con simetría cúbica usados como constituyentes.

La Fig. [5.27](#) muestra la gráfica del módulo de Young efectivo en la dirección perpendicular a la del laminado, E_1 , en Gpa como función de θ y V_2 de un bilaminado que tiene como constituyentes una lámina de Plata y una lámina de Teluro de estaño (SnTe). Nótese que este último es casi 260 veces más rígido que el primero, además el módulo de Young del segundo material es el doble que el del primero. Podemos ver que hay una dependencia monótona creciente de E_1 con respecto al ángulo de rotación θ que alcanza su máximo en $\theta = \pi/4$.

La Fig. [5.28](#) muestra el módulo de Young en la dirección del laminado, E_3 , como función de θ y V_2 . Vemos que no hay dependencia de θ . Se observa un aumento de aproximadamente 4% de E_3 con respecto al más duro de los materiales, es decir, el compuesto se endurece un 4%.

La Fig. [5.29](#) muestra el cociente de Poisson en el plano perpendicular a la dirección del laminado, ν_{12} , como función de θ y V_2 . Esta propiedad efectiva muestra dependencia de θ , la cual va disminuyendo conforme aumenta V_2 ; ν_{12} es una función decreciente con respecto a θ , alcanza su mínimo en $\theta = \pi/4$.

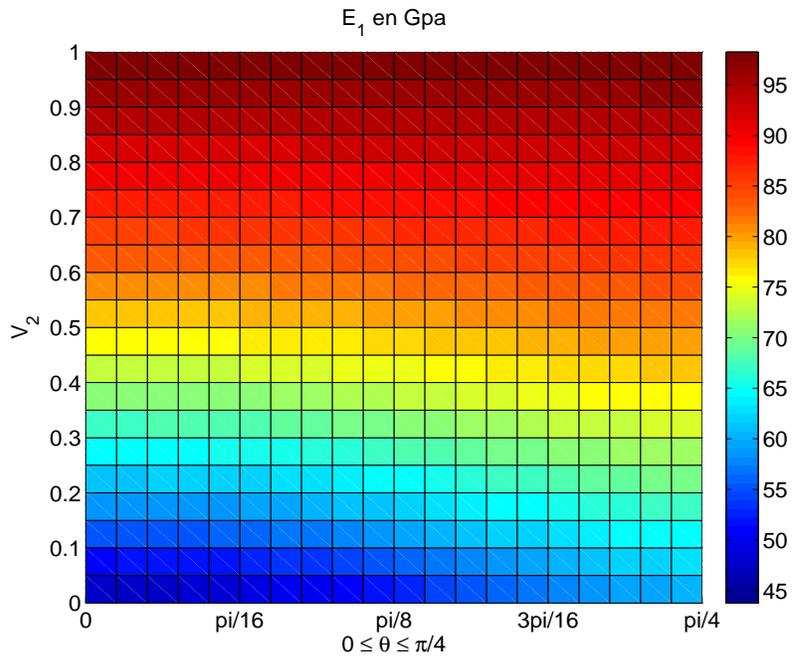


Fig. 5.27: Gráfica de E_1 en GPa como función de θ y V_2 de un bilaminado en el cual las láminas no tienen los mismos ejes de simetría. Los constituyentes son una lámina de Plata y una de Teluro de estaño.

La Fig. 5.30 es la gráfica de ν_{31} como función de θ y V_2 . Al igual que para E_3 para esta propiedad no existe dependencia de θ .

En resumen ν_{12} y E_1 tienen dependencia débil de θ que disminuye conforme V_2 aumenta, lo cual era esperarse pues al aumentar V_2 , la fracción volumétrica de la lámina cuyos ejes de simetría fueron rotados disminuye y por lo tanto su efecto disminuye. De las figuras anteriores sabemos que ν_{12} y E_1 dependen del ángulo de rotación. Para tener más detalles de esta dependencia veamos la Fig. 5.31 la cual muestra gráficas de E_1 como función de θ para diferentes V_2 fijas. Para cada $V_2 = 0.55, 0.60, 0.65, 0.70$ fija, E_1 es creciente como función de θ . Esto quiere decir que si entre los ejes de simetría de las dos láminas hay un ángulo θ , el módulo de Young efectivo E_1 aumenta. Por ejemplo para $V_2 = 0.55$ y $\theta = 0$, es decir, las propiedades están referidas con respecto a los mismos ejes, tenemos el valor de $E_1 = 78.22$ Gpa que va aumentando con respecto a θ hasta alcanzar un aumento máximo de aproximadamente 82.05 Gpa en $\theta = \pi/4$; esto corresponde a un 4.9% de aumento relativo al que se alcanza en $\theta = 0$. Sin embargo, el porcentaje de aumento es una función decreciente con respecto a V_2 . En la Fig. 5.32 se grafica a ν_{12} como función del ángulo θ para los diferentes valores de V_2 , son curvas decrecientes como función de θ . Es interesante notar que para $V_2 = 0.70$, ν_{12} tiene un valor cercano a 0.01 en $\theta = 0$. Conforme θ crece ν_{12} decrece hasta llegar a un valor negativo cercano a -0.017, es decir, el compuesto pasa de tener cociente de Poisson positivo a negativo.

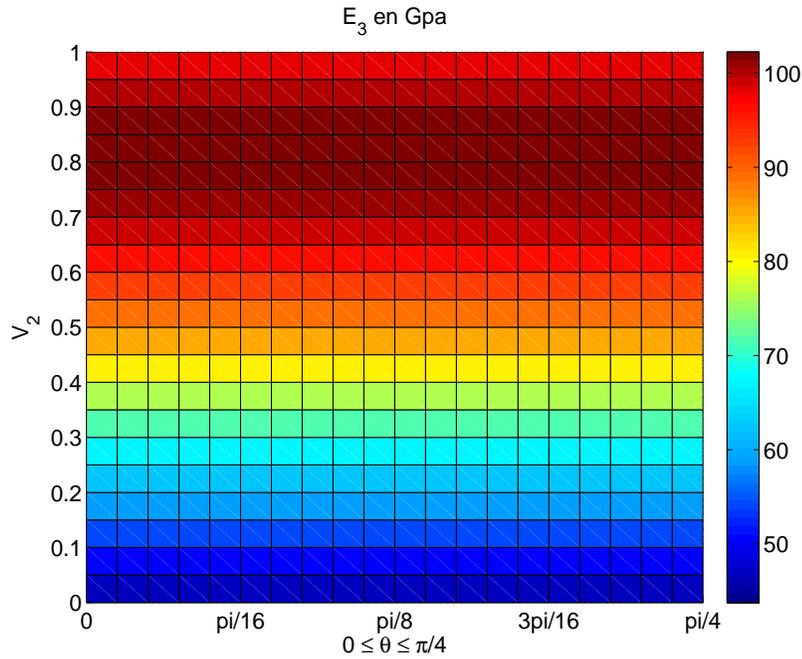


Fig. 5.28: E_3 en GPa contra V_2 y θ del bilaminado compuesto por una lámina de Plata y una de Teluro de estaño.

La Fig. 5.33 (a),(b) muestra las gráficas de E_1 , E_3 como función de V_2 y las gráficas de ν_{12} , ν_{31} como función de V_2 , respectivamente. Aquí los ejes de simetría de las láminas coinciden. Observamos un aumento en la dureza en la dirección x_3 . El cociente de Poisson en el plano x_3x_1 es mayor que el cociente de Poisson más grande de los constituyentes.

Obsevaciones

- La simetría cúbica de una lámina con ejes de simetría rotados con respecto al eje x_3 es tetragonal.
- El módulo de Young y el cociente de Poisson efectivos perpendiculares a la dirección del laminado dependen del ángulo que hay entre los ejes de simetría de las láminas y tienen un periodo de $\pi/2$.
- El módulo de Young efectivo en la dirección perpendicular a la del laminado es creciente como función del ángulo para una fracción volumétrica dada.
- El cociente de Poisson efectivo en el plano perpendicular a la del laminado es decreciente como función del ángulo para una fracción volumétrica dada.
- El módulo de Young en la dirección del laminado y el cociente de Poisson en el plano paralelo a la dirección del laminado no dependen del ángulo entre los ejes de simetría de

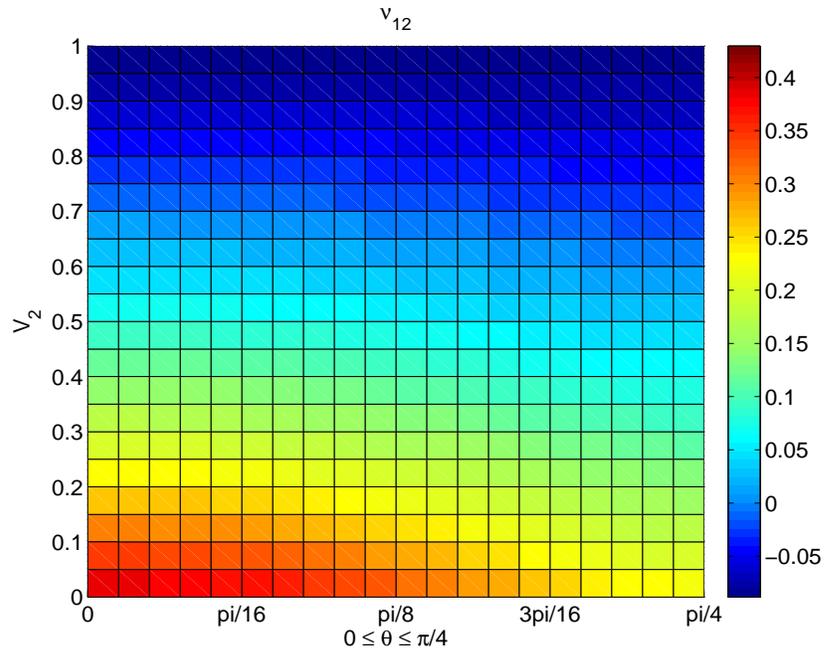


Fig. 5.29: Gráfica de v_{12} como función de V_2 y θ para un bilaminado que tiene como constituyentes Plata y Teluro de estaño.

las láminas.

- Si la fracción volumétrica de la lámina cuyos ejes de simetría son rotados disminuye la dependencia con respecto al ángulo de rotación es menor.
- Se observa que un laminado pasa de tener cociente de Poisson positivo a negativo cuando las láminas no tienen los mismos ejes de simetría.
- El módulo de Young efectivo puede tener un aumento con respecto al módulo de Young más grande de los constituyentes, es decir, hay una ventana de endurecimiento.

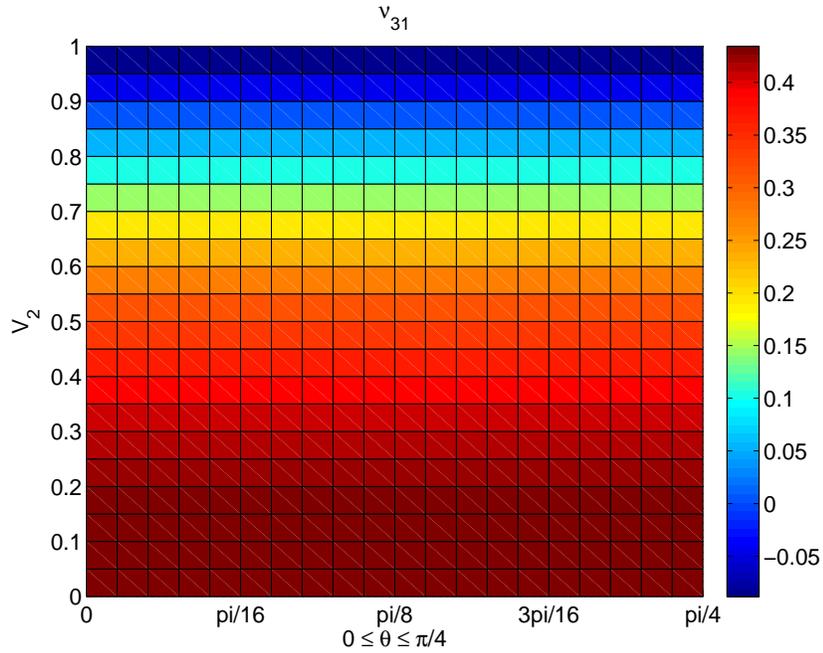


Fig. 5.30: Gráfica de v_{31} como función de V_2 y θ para un bilaminado que tiene como constituyentes Plata y Teluro de estaño.

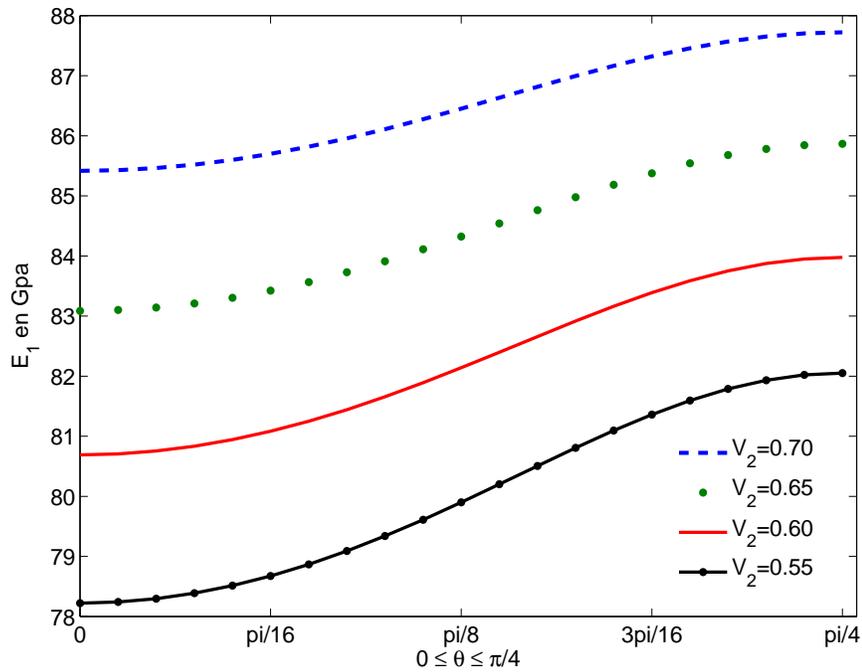


Fig. 5.31: Gráfica de E_1 en GPa como función de θ para diferentes fracciones volumétricas. Nótese para $V_2 = 0.70$ que hay una VAX.

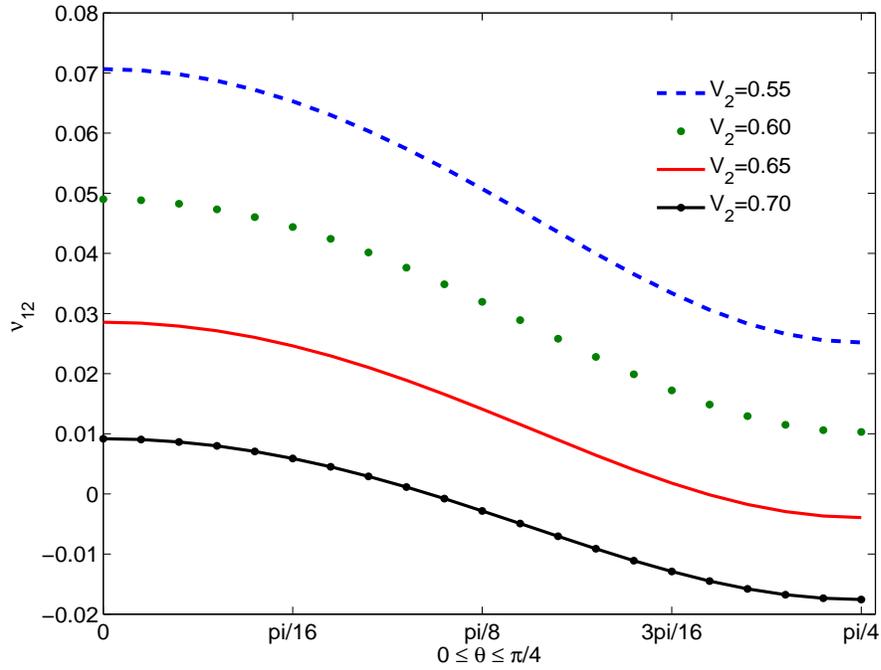


Fig. 5.32: Gráfica de v_{12} como función del ángulo de rotación θ para diferentes fracciones volumétricas, V_2 .

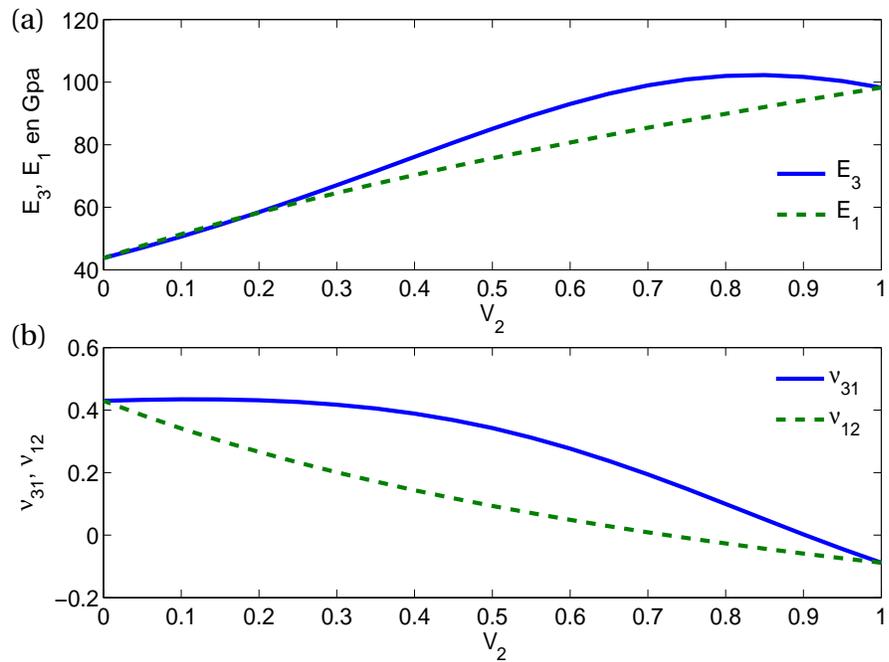


Fig. 5.33: Gráficas de las constantes ingenieriles como función de V_2 de un bilaminado formado por Teluro de estaño y Plata.

5.3. Constituyentes con simetría transversalmente isótropa

En esta sección consideramos un laminado con constituyentes de simetría transversalmente isótropa cuyo eje de simetría es el eje x_1 como se muestra en la Fig. 5.34. La simetría del compuesto resulta ser ortótropa por lo cual tenemos nueve constantes independientes. Sean $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \nu_{12}^{(i)}, \nu_{23}^{(i)}$ y $\mu_{23}^{(i)}$, las cinco constantes ingenieriles independientes del constituyente i y sean $C_{11}^{(i)}, C_{22}^{(i)}, C_{12}^{(i)}, C_{23}^{(i)}$ y $C_{44}^{(i)}$ sus constantes elásticas. Las constantes ingenieriles del compuesto se obtienen sustituyendo las componentes correspondientes a un material transversalmente isótropo en las fórmulas (4.13)–(4.15). Éstas se pueden escribir de la forma,

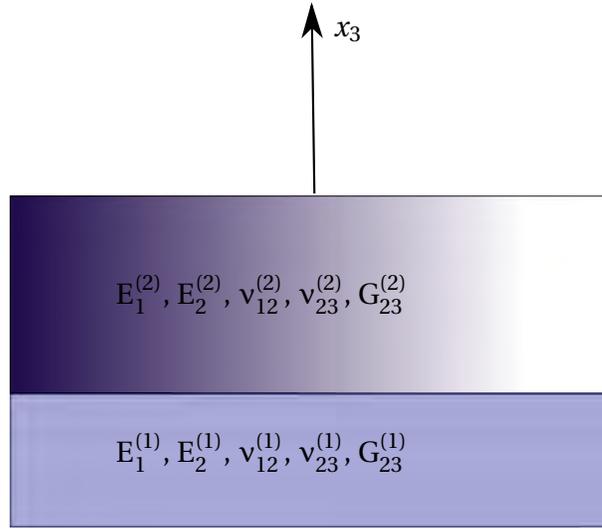


Fig. 5.34: Bilaminado con constituyentes transversalmente isótropos cuyo eje de simetría es el eje x_1 .

$$E_1 = \langle E_1 \rangle + \left\langle \frac{E_1 E_2 \nu_{12}^2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle - \left\langle \frac{E_1 E_2 \nu_{12}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle^2 \left\langle \frac{E_1 E_2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle^{-1}, \quad (5.75)$$

$$E_2 = \langle E_2 \rangle + \left\langle \frac{E_2^2 \nu_{12}^2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle - \left\langle \frac{E_1 E_2 \nu_{12}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle^2 \left\langle \frac{E_1^2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle^{-1}, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} 1/E_3 = & \langle 1/E_2 \rangle + \left\langle \frac{E_2 \nu_{12}^2 + E_1 \nu_{23}^2}{E_2(-E_1 + E_2 \nu_{12}^2)} \right\rangle + \left(\left\langle \frac{E_1 E_2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{E_1 \nu_{12}(1 + \nu_{23})}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle \right)^2 \\ & + 2 \left\langle \frac{E_1 E_2 \nu_{12}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{-E_2 \nu_{12} + E_1 \nu_{23}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle + \left\langle \frac{E_1^2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{-E_2 \nu_{12} + E_1 \nu_{23}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle \\ & \times \left(\left\langle \frac{E_1 E_2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{E_1^2}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle - \left\langle \frac{E_1 E_2 \nu_{12}}{E_1 - E_2 \nu_{12}^2} \right\rangle^2 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$v_{12} = \left\langle \frac{E_1 E_2 v_{12}}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{E_1^2 v_{12}}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle^{-1}, \quad (5.78)$$

$$v_{13} = \left\langle \frac{E_1 v_{12}(1 + v_{23})}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle + \left\langle \frac{E_1 E_2 v_{12}}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{-E_2 v_{12}^2 + E_1 v_{23}}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{E_1 E_2}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle^{-1}, \quad (5.79)$$

$$v_{23} = \left(\left\langle \frac{E_1 E_2 v_{12}}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{E_1 v_{12}(1 + v_{23})}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle + \left\langle \frac{E_1^2}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle \left\langle \frac{E_2 v_{12}^2 + E_1 v_{23}}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle \right) \times \left\langle \frac{E_1^2}{E_1 - E_2 v_{12}^2} \right\rangle^{-1}, \quad (5.80)$$

$$\mu_{12} = \langle \mu_{12} \rangle, \quad (5.81)$$

$$\mu_{13} = \langle 1/\mu_{12} \rangle^{-1}, \quad (5.82)$$

$$\mu_{23} = \langle 1/\mu_{23} \rangle^{-1}. \quad (5.83)$$

Notemos que la cantidad de parámetros en los módulos de Young y los cocientes de Poisson efectivos aumentan conforme la simetría de los constituyentes se complica. Por ejemplo, para dos fases isótropas las constantes efectivas dependen de 5 parámetros: 2 módulos de Young, 2 cocientes de Poisson y la fracción volumétrica. Para materiales transversalmente isótropos dependen de al menos 7; 4 módulos de Young, 2 cocientes de Poisson y la fracción volumétrica, como en (5.75), (5.76), (5.78) y aumentan a 9 para (5.77), (5.79), (5.80) pues éstas también dependen de los otros dos cocientes de Poisson, $v_{23}^{(1)}$ y $v_{23}^{(2)}$.

Las reglas de mezcla son cotas inferiores de los módulos de Young en el plano, es decir,

$$E_1 \geq \sum_{i=1}^n V_i E_1^{(i)}, \quad (5.84)$$

$$E_2 \geq \sum_{i=1}^n V_i E_2^{(i)}, \quad (5.85)$$

esto se sigue del hecho de que el segundo promedio del lado derecho en (5.75) y (5.76) son positivos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Al igual que en las secciones anteriores haremos un análisis de un bilaminado. Primeramente determinamos ventanas de auxeticidad. Para hacer esto necesitamos saber qué valores de V_2 , v_{12} , v_{23} y v_{13} son iguales a cero. Empezamos igualando a cero la parte derecha de (5.78) y sustituimos $V_1 = 1 - V_2$. Así obtenemos una expresión que no depende de V_1 . Despejando V_2 de la ecuación resultante se obtiene el valor de V_2 para el cual $v_{12} = 0$ que denotamos como V_2^{12}

donde

$$V_2^{12} = \left(1 - \frac{E_2^{(1)} E_1^{(1)} \nu_{12}^{(1)} \left[E_1^{(2)} - E_2^{(2)} \left(\nu_{12}^{(2)} \right)^2 \right]}{E_2^{(2)} E_1^{(2)} \nu_{12}^{(2)} \left[E_1^{(1)} - E_2^{(1)} \left(\nu_{12}^{(1)} \right)^2 \right]} \right)^{-1}. \quad (5.86)$$

La ventana de auxeticidad será $(0, V_2^{12})$ si $\nu_{12}^{(1)} < 0$ o $(V_2^{12}, 1)$ si $\nu_{12}^{(2)} < 0$.

Para determinar el valor de V_2 en el cual ν_{13} es cero y así obtener la ventana de auxeticidad, hacemos cero la parte derecha de (5.79) y sustituimos V_1 por $1 - V_2$. Con lo anterior obtenemos un polinomio de segundo grado

$$P_{13} = A_{13} V_2^2 + B_{13} V_2 + D_{13}. \quad (5.87)$$

Los coeficientes A_{13} , B_{13} , D_{13} dependen de los módulos de Young y los cocientes de Poisson de los constituyentes. Entonces las ventanas de auxeticidad están determinadas por la raíces de este polinomio. Para ν_{23} hacemos lo mismo que en (5.79) pero para (5.80) y obtenemos otro polinomio de segundo orden el cual escribimos como

$$P_{23} = A_{23} V_2^2 + B_{23} V_2 + D_{23}. \quad (5.88)$$

Aquí también A_{23} , B_{23} y D_{23} están en función de los módulos de Young y los cocientes de Poisson de los constituyentes. Las fórmulas para los coeficientes son extensas y aparecen en el Apéndice B. Así, las ventanas de auxeticidad en el plano $x_2 x_3$ están determinadas por las raíces de este polinomio. Por lo tanto dadas las propiedades de los constituyentes podemos determinar los valores de V_2 para los cuales el material es auxético en cualquier plano.

A continuación damos unos ejemplos numéricos de la aplicación de las expresiones (5.75)–(5.80) para bilaminados con los constituyentes dados en la Tabla 5.3.

Material	Módulo de Young	Módulo de Young	Módulo de corte	ν_{21}	ν_{32}
	E_1 en GPa	E_2 en GPa	μ_{55} en GPa		
Zinc	36.3	123.84	39.6	0.87	-0.0751
Titanio	146.15	103.95	46.5	0.187	0.485
Hidroxiapatita	117.2	111.7	36.2	0.43	-0.12
Aluminato de Plata	118.1	84.06	34.1	0.23	0.47

Tabla 5.3: Propiedades de los materiales con simetría transversalmente isótropa.

Como primer ejemplo tomamos un bilaminado formado por una lámina de Zinc, y una de Titanio sus propiedades están dadas en la Tabla 5.3. Nótese que el Zinc es auxético en el plano

x_3x_2 . La Fig. 5.35(a) muestra la gráfica del módulo de Young efectivo E_1 como función de la fracción volumétrica V_2 . En esta dirección no se observa un aumento en la dureza. E_1 es una función monótona creciente de V_2 , casi lineal. Las gráficas de los módulos de Young efectivos E_2 y E_3 vs V_2 están en la Fig. 5.35(b). Aquí sí se aprecia un aumento en la dureza con respecto a sus constituyentes. Este compuesto será más duro que sus constituyentes en las direcciones x_2 y x_3 . El máximo aumento para E_3 es de aproximadamente 4.9% el cual se alcanza para V_2 cercano a 0.2. Para E_2 el máximo aumento es de aproximadamente 3.5%; se alcanza en $V_2 = 0.15$. En la Fig. 5.35(c) se presenta el cociente de Poisson ν_{32} contra V_2 . Este cociente crece monótonamente. Observamos que existe una VAX en el plano x_3x_2 aunque ésta es pequeña y es $VAX \approx [0, 0.1]$. En la Fig. 5.35(d) se muestran los cocientes de Poisson ν_{31} y ν_{21} vs V_2 los cuales decrecen monótonamente, los valores son muy cercanos entre sí y son positivos para toda fracción volumétrica.

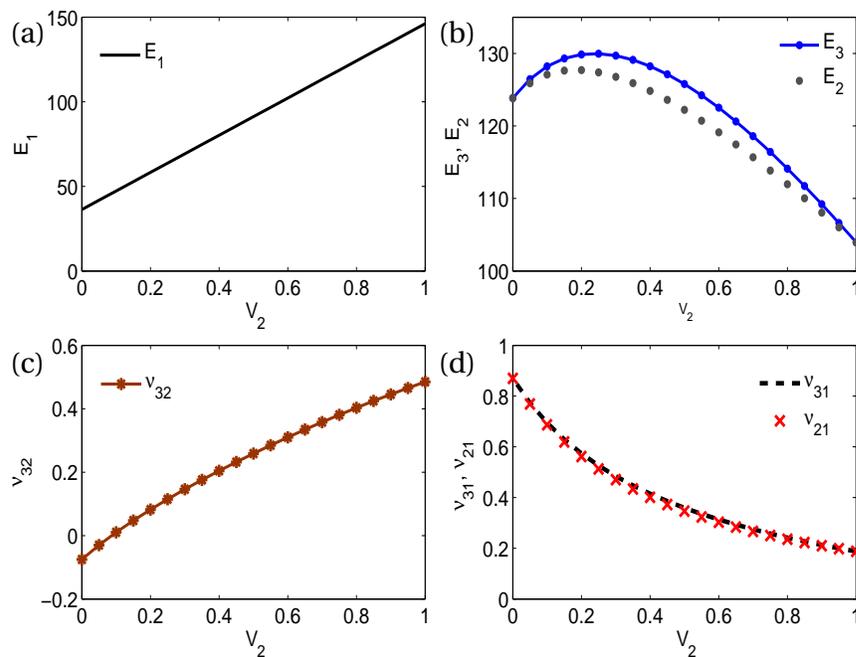


Fig. 5.35: Gráficas de las constantes ingenieriles de un bilaminado con constituyentes Zinc y Titanio. (a) E_1 vs V_2 , (b) E_2, E_3 vs V_2 , (c) ν_{23} vs V_2 , (d) ν_{21}, ν_{31} vs V_2 .

En la Fig. 5.36 aparecen las constantes elásticas del bilaminado formado por Zinc y Titanio. Es interesante notar que C_{22} presenta una concavidad hacia abajo, es decir, hay un intervalo de V_2 en el cual $C_{22} \leq C_{22}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Las otras constantes son monótonas crecientes C_{11} , C_{32} , C_{12} , C_{13} y decreciente C_{33} .

Como segundo ejemplo consideramos como constituyentes una lámina de Hidroxiapatita y una de Aluminato de plata, las propiedades de éstas también están en la Tabla 5.3. La Fig. 5.37(a)

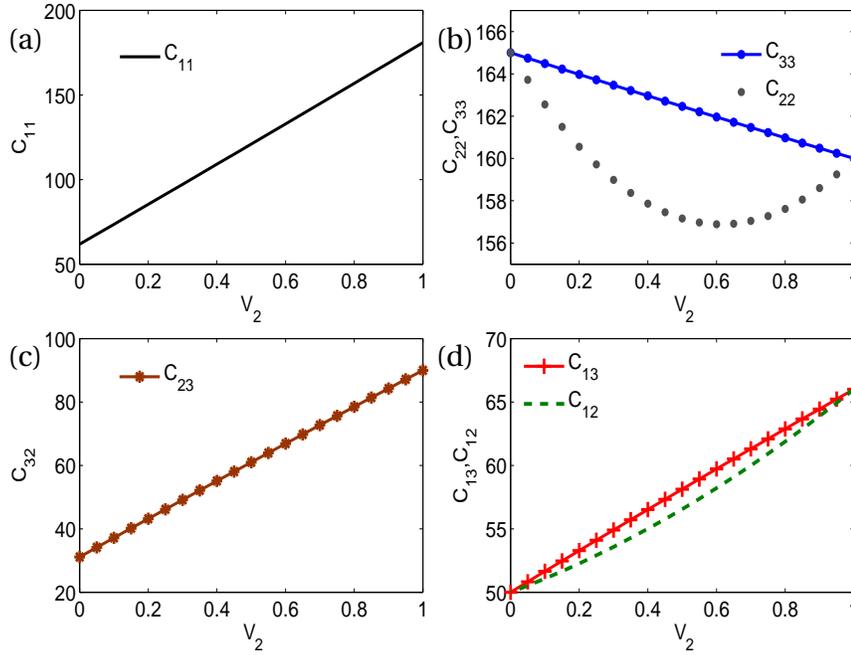


Fig. 5.36: Las constantes elásticas del bilaminado con constituyentes Zinc y Titanio.

muestra el módulo de Young efectivo E_1 como función de V_2 . Se observa un ligero aumento de E_1 en el intervalo $V_2 = [0.7, 1]$. El módulo de Young efectivo E_3 presenta un aumento en $V_2 = [0, 0.25]$ como se aprecia en la Fig. 5.37(b). En la dirección x_2 no existe aumento como lo podemos ver en la gráfica de E_2 vs V_2 en esta misma figura. De las expresiones (5.75) y (5.76) sabemos que tanto E_1 como E_2 sólo dependen de $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, $\nu_{12}^{(i)}$ y V_2 . En este bilaminado $\nu_{12}^{(i)} > 0$. Entonces en este caso tenemos un aumento en la dureza en la dirección x_2 sin la auxeticidad de los constituyentes. Al igual que en el ejemplo anterior los valores de ν_{31} y ν_{21} son monótonos decrecientes y son muy cercanos entre sí como lo podemos ver en la Fig. 5.37(d). El único cociente de Poisson que es negativo es ν_{23} , para un intervalo pequeño de V_2 que va desde 0 hasta 0.2 como lo podemos ver en la Fig. 5.37(c).

De los ejemplos dados podemos concluir que los bilaminados con constituyentes transversalmente isótropos pueden ser más duros que sus constituyentes en cualquier dirección.

La Fig. 5.38 presenta las constantes elásticas correspondientes al bilaminado formado por Aluminato de Plata e Hidroxiapatita. Para este caso C_{11} es monótona creciente como función de V_2 , C_{22} es cóncava hacia abajo y C_{22} , C_{23} , C_{13} y C_{12} son monótonas crecientes. Nótese que en ambos ejemplos C_{22} es cóncava hacia abajo. En el primer caso, C_{11} es decreciente y aquí creciente, C_{33} es creciente en el primer ejemplo y decreciente aquí. Las otras constantes tienen el mismo comportamiento en los dos ejemplos.

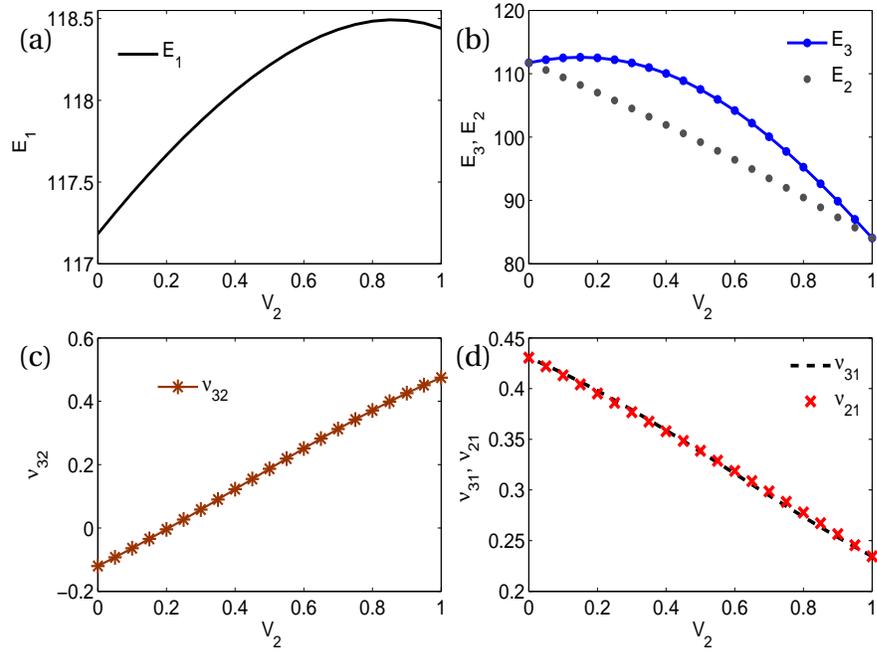


Fig. 5.37: Análogo a Fig. 5.35 para los constituyentes Hidroxiapatita y Aluminato de plata.

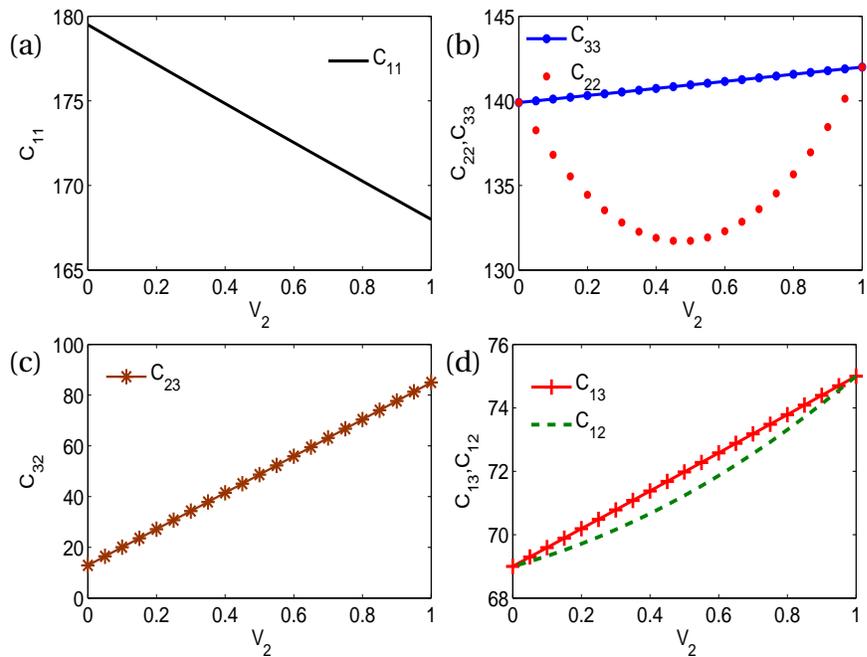


Fig. 5.38: Las gráficas de las constantes elásticas de un bilaminado con constituyentes Hidroxiapatita y Aluminato de plata.

Observaciones

- La regla simple de mezcla de $E_1^{(i)}$ es cota inferior para el módulo de Young efectivo en la dirección x_1 y la regla simple de mezclas de $E_2^{(i)}$ es una cota inferior para el módulo de

Young efectivo en la dirección x_2 .

- El cociente de Poisson efectivo en el plano x_1x_2 es independiente de los cocientes de Poisson de los constituyentes en el plano x_2x_3
- Para encontrar las ventanas de auxeticidad en el plano x_2x_3 y x_3x_1 es necesario determinar las raíces de un polinomio de segundo orden donde los coeficientes dependen de las propiedades de los constituyentes.
- La ventana de auxeticidad en el plano x_1x_2 está dada explícitamente y es independiente de los cocientes de Poisson ν_{23} de los constituyentes.
- El bilaminado puede ser más duro que cualquiera de sus constituyentes en cualquier dirección.
- La constante elástica C_{22} presenta una concavidad hacia abajo y un intervalo de V_2 con un valor menor que cualquiera de los constituyentes, es decir, C_{22} presenta un debilitamiento con respecto a sus constituyentes.

Capítulo 6

Compuestos reforzados de fibras

En este capítulo estudiamos la influencia de un material auxético y la combinación de éste con uno con CET negativo en CRF con dos constituyentes isótropos. La fibra es un cilindro circular muy largo que está inmerso en una matriz distribuida en un arreglo paralelogramico periódico en direcciones paralelas a los lados del paralelogramo. Las propiedades termoelásticas efectivas son las determinadas en la segunda parte del Capítulo 4.

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera analizamos las propiedades elásticas e ingenieriles de un CRF en el cual el ángulo de la celda unidad es $\pi/3$ y $\pi/2$. En la segunda parte analizamos las propiedades térmicas e ingenieriles de un compuesto en arreglo hexagonal, es decir, el ángulo de la celda rómbica es $\pi/3$.

Las propiedades de la matriz se indican con el subíndice 1 y las de la fibra con 2. Aquí regresamos a la notación en la que E_1 se usa para denotar a E_1/E_2 , E_{out} para E_{out}/E_2 , etc., es decir, los módulos de Young están normalizados con respecto al módulo de Young de la fibra. El cociente de Poisson del constituyente i se denota por ν_i . Además en nuestro análisis se considera que los coeficientes de expansión térmica (CET) de cada uno de los constituyentes tienen la misma magnitud y sólo difieren en signo, esto es, $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \alpha$ con $\alpha > 0$; dado esto, vamos a normalizar los CTE con respecto α y denotándolos como $\alpha_1 = \alpha_1/\alpha$, $\alpha_2 = \alpha_2/\alpha$, $\alpha_{in} = \alpha_{in}/\alpha$ y $\alpha_{out} = \alpha_{out}/\alpha$.

Antes de continuar vamos a definir el volumen de percolación, V_p , como la máxima fracción volumétrica que puede ocupar la fibra en el paralelogramo de lados 1 y ángulo ϕ . Este volumen de percolación es $V_p = \pi \text{sen}^2(\phi/2)/\text{sen}\phi$. Por lo tanto, las propiedades efectivas sólo son calculadas para el intervalo de fracción volumétrica $V_2 = [0, V_p]$.

6.1. Compuesto elástico

En esta sección se calculan las propiedades elásticas e ingenieriles efectivas de varios CRF con arreglo rómbico. Primeramente comparamos las propiedades efectivas de CRF en arreglo cuadrado ($\phi = \pi/2$) con las de CRF en arreglo hexagonal ($\phi = \pi/3$). Estos compuestos han sido estudiados previamente por [Guinovart-Díaz et al. \(2005\)](#) pero no en el caso en el que los constituyentes son auxéticos.

Como primer ejemplo elegimos la combinación de constituyentes con las siguientes propiedades: $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -0.3$ y $\nu_2 = 0.3$, porque en el caso de laminados se obtiene un aumento en la dureza. Notemos que la matriz es auxética.

En la Fig. [6.1\(a\)](#) se grafica el módulo de Young en la dirección transversal a los cilindros para el compuesto en arreglo cuadrado $E_{in}(\pi/2)$ (línea con cuadros) y el hexagonal $E_{in}(\pi/3)$ (línea con estrellas) contra la fracción volumétrica de la inclusión V_2 . Se observa que ambos módulos de Young coinciden en $V_2 = 0$, como debe ser (pues en ausencia de inclusión $E_{in} = E_1$), $E_{in}(\pi/2)$ y $E_{in}(\pi/3)$ son casi iguales hasta aproximadamente $V_2 = 0.2$ cuando se aprecia que difieren hasta que alcanzan su respectivo volumen de percolación. Se observa que el compuesto se endurece en ambos casos. La ventana de endurecimiento es aproximadamente $[0, 0.65]$ en ambos compuestos. El aumento máximo en esta dirección es de aproximadamente 12% para el compuesto en arreglo cuadrado y de 11% para el hexagonal. Por lo tanto aquí el compuesto en arreglo cuadrado será ligeramente más duro que el hexagonal en la dirección transversal a los cilindros.

Las gráficas del módulo de Young en la dirección de los cilindros para el arreglo hexagonal $E_{out}(\pi/3)$ (línea con estrellas) y cuadrado $E_{out}(\pi/2)$ (línea con cuadros) como función de V_2 son dadas en la Fig. [6.1\(b\)](#). Las curvas son muy cercanas entre sí para toda fracción volumétrica aunque los valores de $E_{out}(\pi/3)$ son ligeramente mayores que los de $E_{out}(\pi/2)$, es decir, el compuesto en arreglo hexagonal es un poco más duro que el cuadrado a lo largo de los cilindros. La ventana de endurecimiento en esta dirección es $VE = [0, 0.6]$. El máximo aumento en la dureza que se alcanza es de aproximadamente 8.5% en ambos casos. Éste es menor que el alcanzado por E_{in} de aquí que los compuestos son más duros en la dirección transversal a los cilindros.

Las gráficas de $\nu_{in}(\pi/3)$, $\nu_{in}(\pi/2)$ como función de V_2 se presentan en la Fig. [6.1\(c\)](#). Los valores para los dos compuestos son muy cercanos entre sí pero $\nu_{in}(\pi/3) > \nu_{in}(\pi/2)$. El comportamiento es análogo para $\nu_{out}(\pi/3)$ y $\nu_{out}(\pi/2)$. La $VAX = [0, 0.4]$ en el plano de los cilindros, ésta es más amplia que la del plano perpendicular a estos que es $VAX = [0, 0.3]$.

La Fig. [6.2\(a\)](#), (b), (c), (d) muestran las gráficas de las constantes elásticas efectivas C_{11} , C_{33} , C_{12}

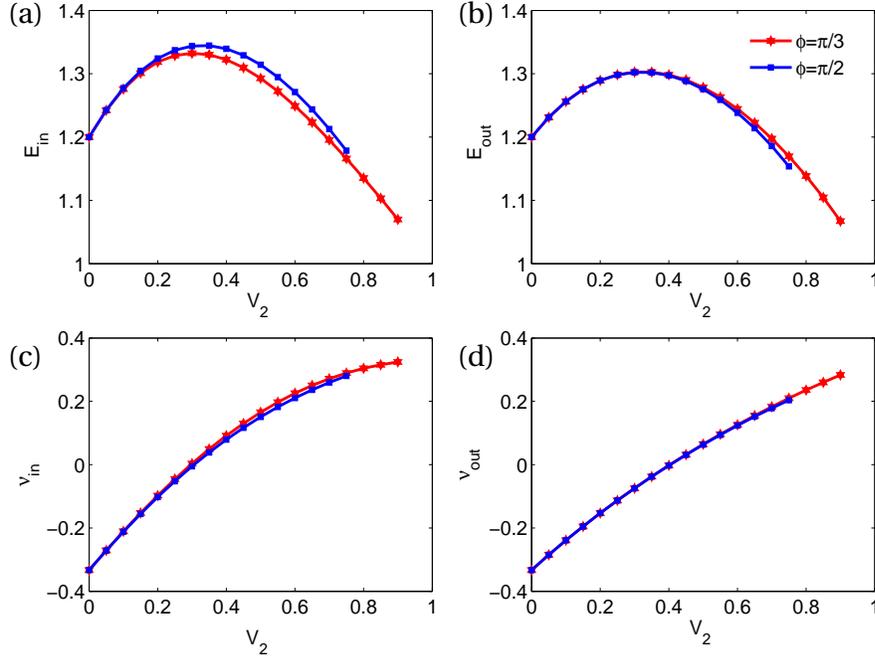


Fig. 6.1: Gráficas de (a) E_{in} vs V_2 , (b) E_{out} vs V_2 , (c) ν_{in} vs V_2 y (d) ν_{out} vs V_2 de un compuesto en arreglo cuadrado (líneas con cuadrados) y uno en arreglo hexagonal (líneas con estrellas) cuyos constituyentes tienen las propiedades $E_1 = 1.2$, $-\nu_1 = \nu_2 = 0.333$.

y C_{23} en GPa como función de la fracción volumétrica de la fibra V_2 , respectivamente, para el arreglo cuadrado (líneas con cuadrados) y el arreglo hexagonal (líneas con estrellas). Se observa en (a) que $C_{11}(\pi/2) > C_{11}(\pi/3)$ mientras que en (b), (c) y (d) se tiene la relación opuesta, e.g., $C_{33}(\pi/3) > C_{33}(\pi/2)$. Es de destacar la dependencia de la concavidad hacia arriba de las gráficas característica de la auxeticidad. El mínimo valor se alcanza en valores cercanos a $V_2 = 0.5$. Las constantes en (c) y (d) son monótonas crecientes y son muy cercanas entre sí.

En las siguientes las gráficas al igual que en este primer ejemplo las propiedades efectivas de CRF en arreglo cuadrado se van a mostrar con línea continua con cuadrados en el intervalo de fracción volumétrica $[0, V_p = 0.78]$. Las de arreglo hexagonal con línea con estrellas en el intervalo es $V_2 = [0, V_p = 0.9]$.

En el siguiente ejemplo se consideran los siguientes valores para las propiedades $\nu_1 = 0.3$ y $\nu_2 = -0.3$ y que $E_1 = 1.2$. Notemos que los cocientes de Poisson son los del ejemplo anterior sólo que aquí la fibra es auxética. En la Fig. 6.3(a) se presentan las gráficas de $E_{in}(\pi/2)$, $E_{in}(\pi/3)$ vs V_2 la diferencia entre ellos es muy pequeña para $V_2 < 0.2$. Ambos módulos de Young alcanzan su máximo en $V_2 = 0.45$ y es de 9% para $E_{in}(\pi/2)$ y 8% para $E_{in}(\pi/3)$. Por lo tanto el compuesto en arreglo cuadrado será un poco más duro que el de arreglo hexagonal. La VE = $[0, V_p]$ en la dirección transversal a los cilindros. En la Fig. 6.3(b) se presentan $E_{out}(\pi/2)$, $E_{out}(\pi/3)$ como

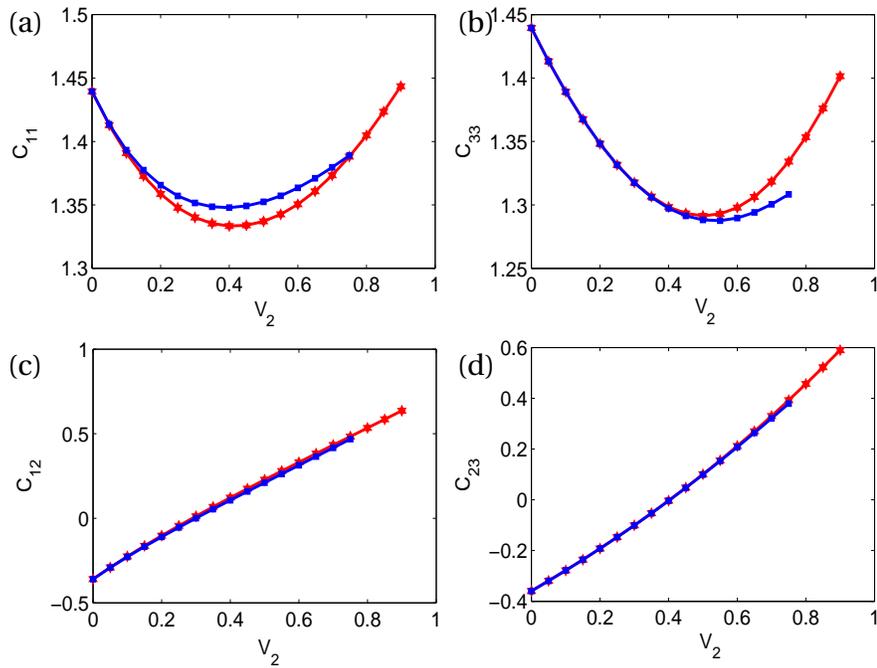


Fig. 6.2: Gráficas de las constantes elásticas efectivas (a) C_{11} , (b) C_{33} , (c) C_{12} y (d) C_{23} como función de V_2 de un compuesto reforzado de fibras con arreglo cuadrado (línea con cuadros) y arreglo hexagonal (línea con estrellas) donde las propiedades de los constituyentes son $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -0.3$ y $\nu_2 = 0.3$.

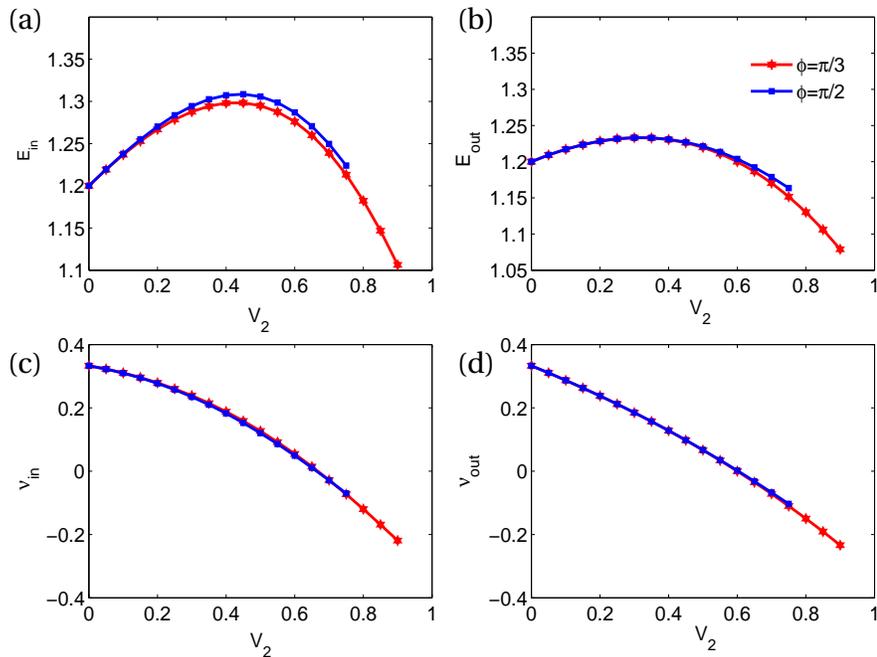


Fig. 6.3: Análogo a Fig. 6.1 con datos $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -\nu_2 = 0.3$.

función de V_2 , al igual que en (a) los valores son muy cercanos entre sí para toda V_2 aunque los del compuesto en arreglo cuadrado son ligeramente mayores que los del hexagonal. Para ambos compuestos la $VE = [0, 0.7]$ y el máximo aumento que se alcanza es aproximadamente de 5% el cual se alcanza en valores cercanos a $V_2 = 0.45$. Notemos que los compuestos son más duros en la dirección transversal a los cilindros.

Las gráficas de $v_{in}(\pi/3)$, $v_{in}(\pi/2)$ vs V_2 son dadas en la Fig. 6.3(c). Los valores son muy similares para toda V_2 . Esto también ocurre con $v_{out}(\pi/3)$, $v_{out}(\pi/2)$ como lo podemos ver en la Fig. 6.3(d). La $VAX = [0.6, V_p]$ en ambos compuestos. y para v_{out} se tiene la $VAX = [0.65, V_p]$ que es un poco más amplia que la de v_{in} .

En la Fig. 6.4(a), (b), (c) y (d) son exhibidas las gráficas de constantes elásticas efectivas C_{11} , C_{33} , C_{12} y C_{23} contra V_2 , respectivamente. Todas las curvas son monótonas decrecientes. En (c) y (d) se observa que C_{12} y C_{23} son negativas para V_2 en $[0.65, V_p]$, esto debido a la auxeticidad de los compuestos. Los valores de $C_{11}(\pi/3)$ y $C_{11}(\pi/2)$ son muy cercanos entre sí al igual que para las constantes efectivas. Se tiene que $C_{12}(\pi/3) > C_{12}(\pi/2)$ y para las otras constantes elásticas la relación entre ellas es opuesta.

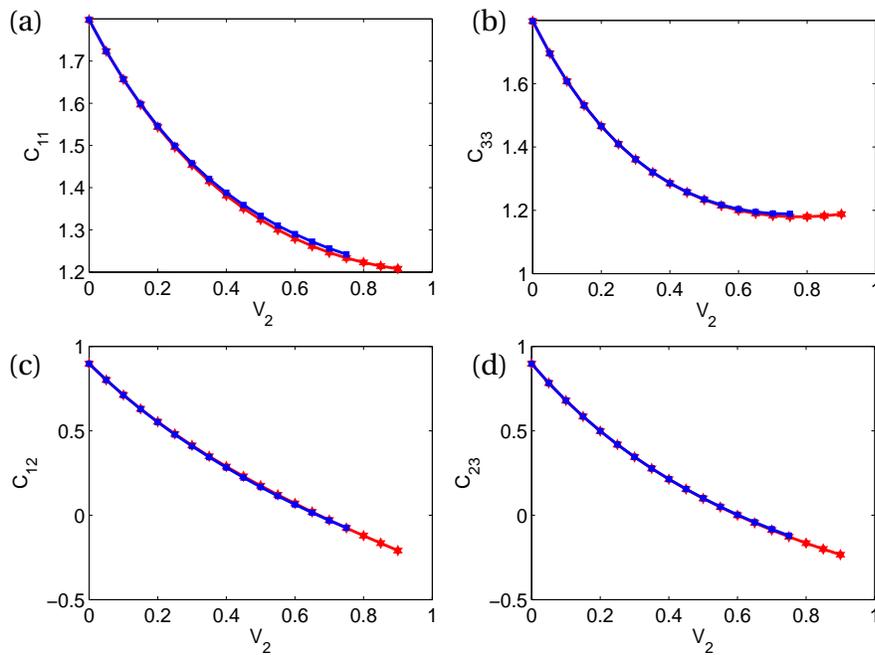


Fig. 6.4: Análogo a Fig. 6.2 con datos $E_1 = 1.2$, $\nu_1 = -\nu_2 = 0.3$.

De los dos ejemplos anteriores observamos que el endurecimiento es mayor si el constituyente auxético es la matriz ya que en este caso éste alcanza hasta un 12% mientras que si la fibra es auxética es de a lo más a 8.5%. La longitud de las ventanas de auxeticidad también es mayor; si la matriz es auxética (Fig. 6.1(c), (d)) las ventanas tienen una longitud de 0.3 para v_{in} y 0.4 para

v_{out} pero si la fibra es la auxética la longitud más grande de éstas es de apenas 0.3 (Fig. 6.3(d)). Por lo tanto las mejoras en los compuestos se incrementan cuando la matriz del compuesto es auxética.

En la siguiente combinación las dos fases son auxéticas con $\nu_1 = -0.9$, $\nu_2 = -0.2$ y módulos de Young iguales, es decir, $E_1 = 1$. En la Fig. 6.5(a) están las gráficas de E_{in} vs V_2 . El endurecimiento ocurre para toda V_2 , es decir, la VE = $[0, V_p]$ en los dos compuestos. El aumento máximo $E_{in}(\pi/2)$ es de aproximadamente 24% y para $E_{in}(\pi/3)$ de 21% por lo tanto el compuesto en arreglo cuadrado es más duro en la dirección transversal a los cilindros aunque para $V_2 < 0.2$ la dureza es casi la misma. En la Fig. 6.5(b) se grafica E_{out} vs V_2 . Aquí también el endurecimiento es para toda V_2 pero el compuesto en arreglo hexagonal es más duro que el de arreglo cuadrado pues el aumento máximo para $E_{out}(\pi/3)$ es de 33% y de 31% para $E_{out}(\pi/2)$. Como conclusión podemos decir que estos compuestos son más duros en la dirección de los cilindros.

En las Fig. 6.5(c) y (d) se muestran ν_{in} y ν_{out} como función de V_2 . Se observa que estos son negativos para toda V_2 por lo tanto los compuestos son totalmente auxéticos. En (c) notamos que $\nu_{in}(\pi/3) > \nu_{in}(\pi/2)$ aunque para $V_2 < 0.3$ los valores son muy similares. En (d) la relación es opuesta, esto es, $\nu_{out}(\pi/2) > \nu_{out}(\pi/3)$ pero la diferencia es tan pequeña que las curvas parecen sobreponerse.

Como último compuesto se elige uno cuyo constituyente tiene las siguientes propiedades: $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ y $\nu_2 = 0.333$. Notemos que la matriz es muy auxética. Las gráficas de E_{in} como función de V_2 se muestran en la Fig. 6.6(a). El aumento máximo de $E_{in}(\pi/2)$ es aproximadamente 90% y para $E_{in}(\pi/3)$ es de 80%, es decir, el compuesto en arreglo cuadrado es más duro que el de arreglo hexagonal en la dirección transversal a los cilindros aunque para $V_2 < 0.2$ tienen casi la misma dureza. En Fig. 6.6(b) se observa que la dureza en la dirección de los cilindros es muy semejante para los dos compuestos para $V_2 < 0.4$. El máximo aumento que se alcanza es de aproximadamente 94% para el compuesto en arreglo hexagonal y de 92% para el de arreglo cuadrado y ambos se alcanzan en un valor cercano a $V_2 = 0.5$. En este ejemplo los compuestos son ligeramente más duros en la dirección de los cilindros.

En la Fig. 6.6(c) se tiene que $\nu_{in}(\pi/2)$ y $\nu_{in}(\pi/3)$ son prácticamente iguales para $V_2 < 0.2$ y para V_2 mayor a este valor $\nu_{in}(\pi/3)$ es ligeramente mayor. La VAX= $[0, 0.4]$ en el plano perpendicular a los cilindros. Las curvas de $\nu_{out}(\pi/2)$ y $\nu_{out}(\pi/3)$ son muy cercanas entre sí que parecen sobreponerse. La VAX= $[0, 0.55]$ en el plano de los cilindros, la cual es un poco más amplia que la de ν_{in} .

La Fig. 6.7 muestra las gráficas de las constantes elásticas efectivas C_{11} , C_{33} , C_{12} y C_{23} como función de V_2 . Los valores para el compuesto con arreglo cuadrado y hexagonal son muy similares en cada una de ellas. Las constantes C_{12} y C_{23} son monótonas decrecientes y son

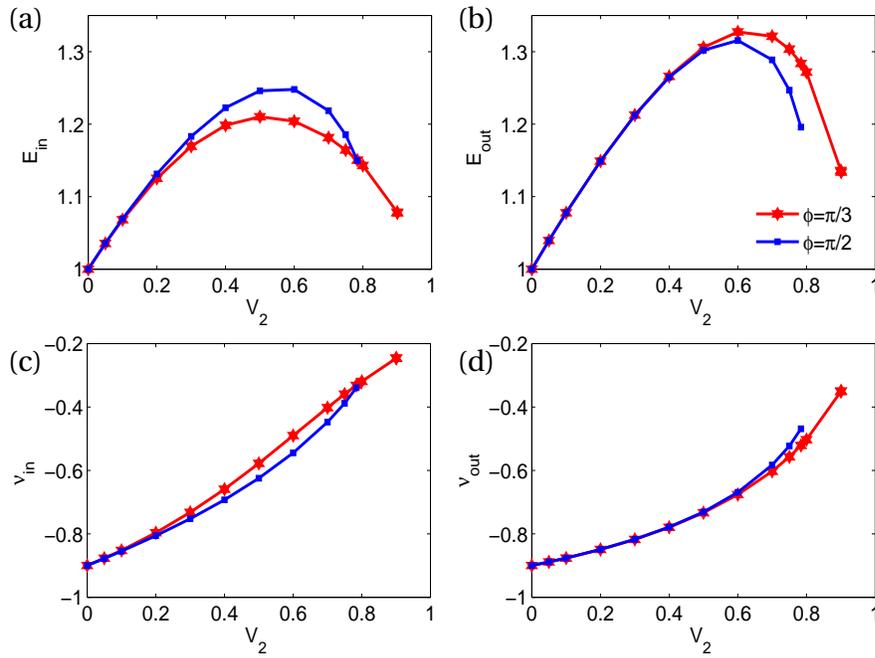


Fig. 6.5: Análogo a Fig. 6.1 con datos $E_1 =$, $v_1 = -0.9$ y $v_2 = -0.2$.

negativas en $V_2 = [0, 0.4]$ para la primera y en $V_2 = [0, 0.5]$ para la segunda. C_{11} , C_{22} son monótonas decrecientes. Los valores de $C_{11}(\pi/2) > C_{11}(\pi/3)$ para las constantes restantes la relación es opuesta.

En las siguientes dos figuras 6.8 y 6.9 se presentan E_{out} y E_{in} como función de V_2 , respectivamente, para compuestos con arreglo rómbico con $\phi = 60^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 90^\circ$.

En la Fig. 6.8 se observa que para una fracción volumétrica menor a 0.4 las curvas de E_{out} vs V_2 son prácticamente las mismas. Si $V_2 > 0.4$ los valores de E_{out} decrecen conforme aumenta el ángulo de la celda ϕ . Por lo tanto la dureza del compuesto a lo largo de los cilindros disminuye conforme el ángulo de la celda crece, esta dureza se da para toda fracción volumétrica.

En la Fig. 6.9 se nota que los valores de E_{in} para $V_2 < 0.3$ son prácticamente iguales. Si $V_2 > 0.3$, este módulo de Young es creciente como función de ϕ esto quiere decir que conforme aumenta el ángulo la celda el compuesto se hace más duro en la dirección perpendicular a los cilindros. La diferencia entre las curvas para los diferentes valores ϕ es más grande que para E_{out} . En esta dirección el aumento en la dureza también ocurre para toda fracción volumétrica.

En resumen de los ejemplos de esta sección concluimos que la dureza de un compuesto de reforzado de fibras en arreglo paralelogramico puede ser mayor que la de sus constituyentes si uno de ellos es auxético y el otro convencional. La dureza es incluso mayor si el material auxético es la denominada matriz. Las propiedades efectivas muestran dependencia del ángulo

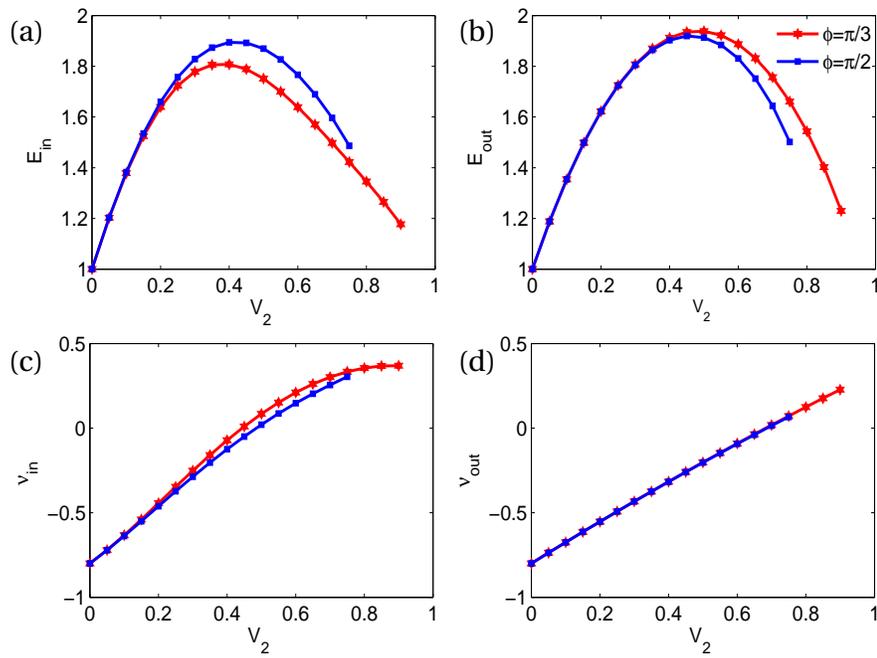


Fig. 6.6: Análogo a Fig. 6.1 con datos $E_1 = 1$, $v_1 = -0.8$ y $v_2 = 0.3$.

del paralelogamo, la celda unidad, para una fracción volumétrica mayor a aproximadamente 0.2. Al igual que los compuestos laminados las ventanas de auxeticidad de estos compuestos pueden ser bastante amplias.

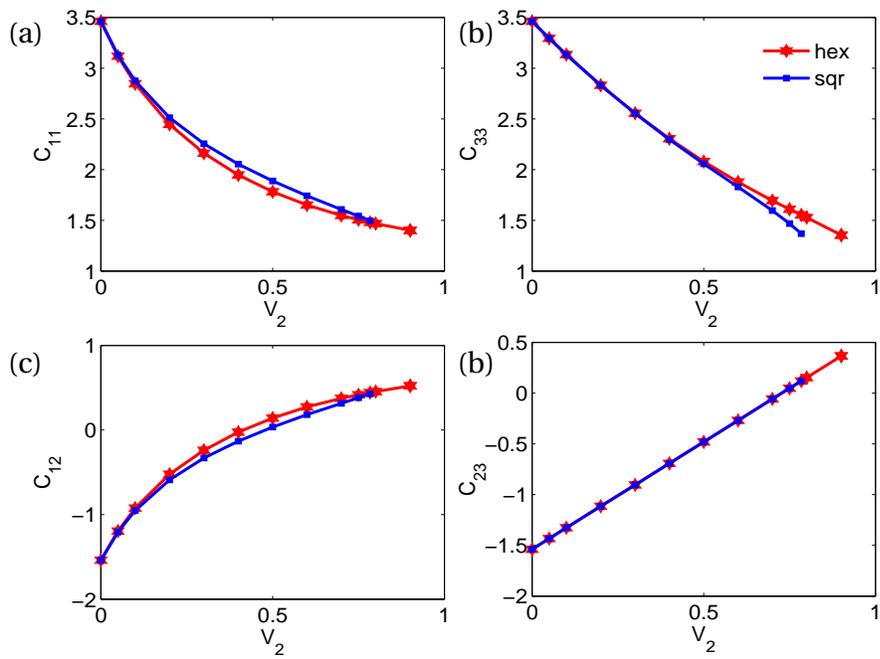


Fig. 6.7: Análogo a Fig. 6.2 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ y $\nu_2 = 0.3$.

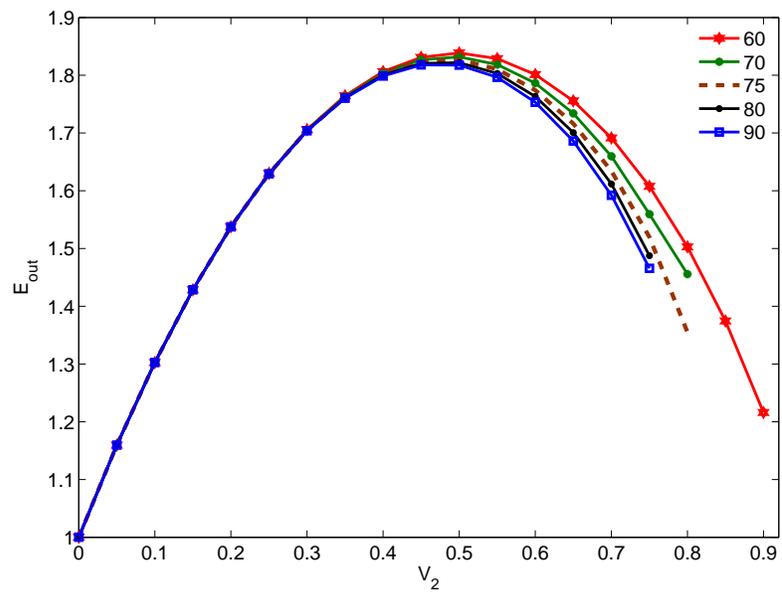


Fig. 6.8: E_{out} como función de V_2 para el compuesto cuyos constituyentes tienen las propiedades $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ y $\nu_2 = 0.3$ en arreglo paralelogramico con $\phi = 60^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 90^\circ$.

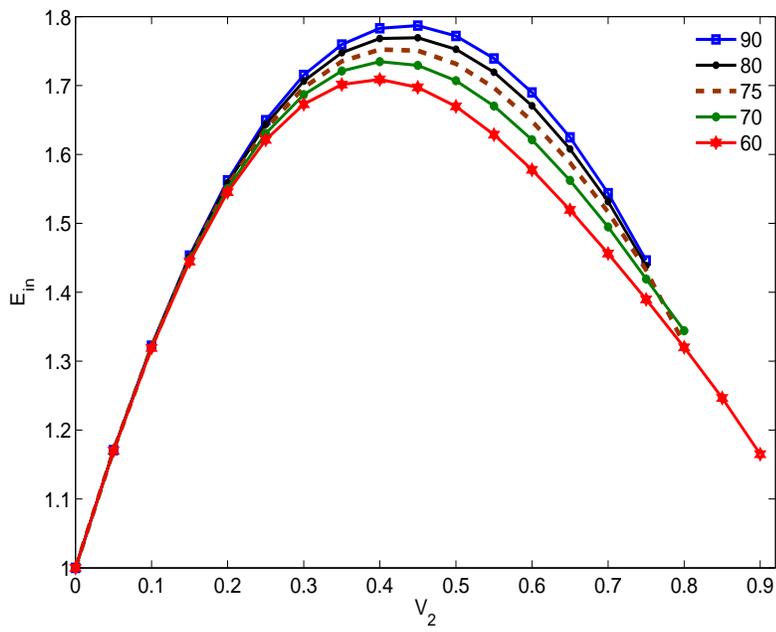


Fig. 6.9: Análogo a la Fig. 6.8 para E_{in}

6.2. Compuesto termoelástico

En esta sección calculamos las propiedades térmicas e ingenieriles efectivas para varios CRF en arreglo hexagonal, es decir, $\phi = \pi/3$. Sólo mostramos los módulos de Young efectivos E_{out} , E_{in} , los cocientes de Poisson efectivos ν_{out} , ν_{in} y los coeficientes de expansión (CET) efectivos α_{in} , α_{out} . La fracción volumétrica máxima que puede ocupar la fibra en este tipo de arreglo es de 0.9 por esta razón las gráficas de las propiedades efectivas se grafican en el intervalo $V_2 = [0, 0.9]$.

Lim (2010) estudió el efecto de auxeticidad combinado con CET negativo en dos compuestos bilaminados. El primero está formado por una lámina auxética cuyo CET es positivo y una convencional con CET negativo; el segundo bilaminado está formado por una lámina auxética que posee CET negativo y la otra es convencional con CET es positivo. Él muestra que los CET efectivos del primer laminado son menores que los del segundo para toda fracción volumétrica. La elección de parámetros la hizo de tal manera que el cociente de Poisson y el CET tienen signos opuestos en el primer bilaminado y signos iguales en el segundo.

Teniendo como referencia lo anterior vamos a hacer una comparación similar con CRF. Primero consideramos un compuesto cuyos constituyentes tienen las siguientes propiedades $E_1=1$, $-\nu_1 = \nu_2 = 0.333$ y $\alpha_1 = -\alpha_2=1$ al que nos referiremos como compuesto de Lim. Usamos la notación $(- - / + +)$ para identificar a este compuesto. Donde indicamos los signos, de ambos, el cociente de Poisson y el CET, en ese orden, de la matriz primero y de la fibra después. El segundo compuesto que consideramos es denotado por $(+ - / - +)$.

En la Fig. 6.10 se muestran las gráficas de los CET efectivos normalizados α_{in} y α_{out} contra V_2 para los compuestos $(+ + / - -)$ y $(+ - / - +)$. En el primer caso α_{in} vs V_2 aparece como una línea discontinua con puntos y α_{out} como una línea continua con puntos. Son las dos curvas superiores de la figura. Se observa que α_{in} es mayor que α_{out} para toda fracción volumétrica. Tanto α_{in} como α_{out} toman valores negativos y positivos. α_{out} es negativo en el intervalo $[0, 0.28]$ y α_{in} lo es en $[0, 0.23]$; este intervalo es ligeramente más pequeño que el de α_{out} . Consideremos ahora el otro compuesto. En éste el cociente de Poisson y el CET tienen signos opuestos en cada constituyente. Las gráficas de α_{in} y α_{out} como función de V_2 se muestran con línea discontinua para la primera y con línea continua para la segunda. Para este compuesto se observa que α_{out} es mayor que α_{in} para toda fracción volumétrica. Aquí también α_{in} y α_{out} toman tanto valores negativos como positivos. $\alpha_{in} < 0$ en $[0, 0.7]$ y $\alpha_{out} < 0$ en $[0, 0.63]$ este intervalo es ligeramente menor que el de α_{in} . Los CET efectivos del compuesto $(+ - / - +)$ son menores que los del compuesto $(- - / + +)$ para toda fracción volumétrica. Además los intervalos de V_2 en los cuales α_{in} y α_{out} son negativos son más amplios que los del compuesto anterior. En conclusión los valores de CET efectivos de un compuesto reforzado de fibras son menores si α_i y ν_i tiene signos opuestos; además el intervalo de fracción volumétrica en el cual el compuesto posee CET

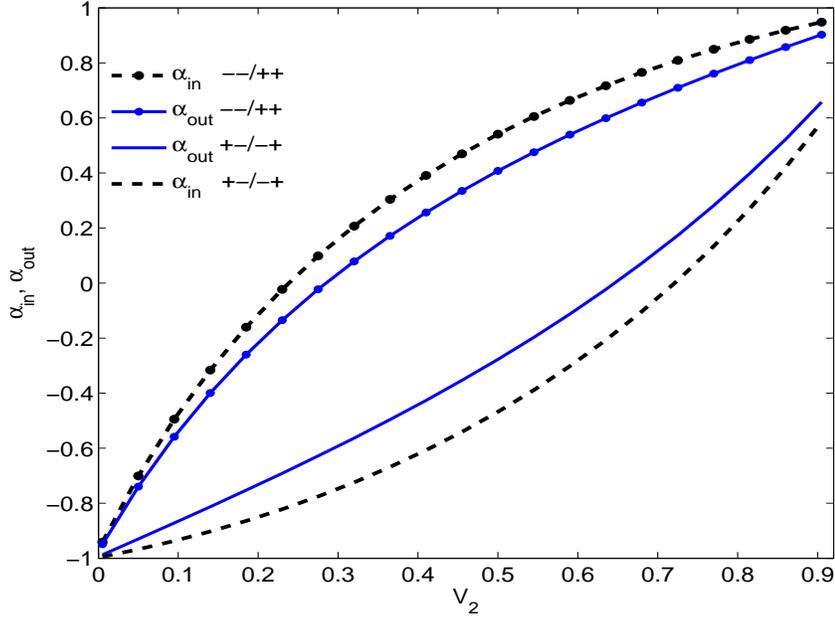


Fig. 6.10: Gráficas de los CET efectivos. Comparación de los coeficientes térmicos efectivos normalizados versus V_2 de un CRF en arreglo hexagonal para los compuestos de Lim ($--/+ +$) y $(+ - / - +)$. En el primer caso se grafica α_{in} vs V_2 (línea discontinua con puntos) y α_{out} vs V_2 (línea continua con puntos). En el segundo caso α_{in} vs V_2 (línea discontinua) y α_{out} vs V_2 (línea continua).

negativos es mayor.

La Fig. 6.11(a) y (b) están dadas las gráficas de módulos de Young efectivos E_{in} y E_{out} versus V_2 y los cocientes de Poisson efectivos ν_{in} y ν_{out} contra la fracción volumétrica V_2 , respectivamente del compuesto $(+ - / - +)$. Las líneas discontinuas están asociadas a E_{in} , ν_{in} y las líneas continuas a E_{out} , ν_{out} . Se observa un aumento de la dureza en ambos módulos para toda V_2 y $E_{in} > E_{out}$, siendo los aumentos máximos de aproximadamente 18% y 10% para E_{in} y E_{out} , respectivamente. Por lo tanto el compuesto es más duro en la dirección de los cilindros. Para toda fracción volumétrica ν_{in} es mayor que ν_{out} . La VAX en el plano perpendicular a los cilindros es (0.7, 0.9); ésta es menor que la del plano paralelo a los cilindros que es VAX= (0.6, 0.9).

Como siguiente ejemplo tenemos un compuesto en el cual la matriz es casi incompresible y la fibra es muy auxética. Consideramos los siguientes valores; $E_1 = 1$, $\nu_1 = 0.45$, $\nu_2 = -0.8$ y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Las gráficas de α_{out} y α_{in} como función de V_2 son dadas en la Fig. 6.12 con línea continua para el primero y con línea discontinua para el segundo. Para toda fracción volumétrica α_{out} es mayor que α_{in} . El intervalo de fracción volumétrica en el que α_{in} y α_{out} son negativos es bastante amplio. Para el primero es $V_2 = [0, 0.83]$, aproximadamente, y para el segundo es un poco menor, $V_2 = [0, 0.73]$. Recordemos que la fibra tiene CET positivo por lo

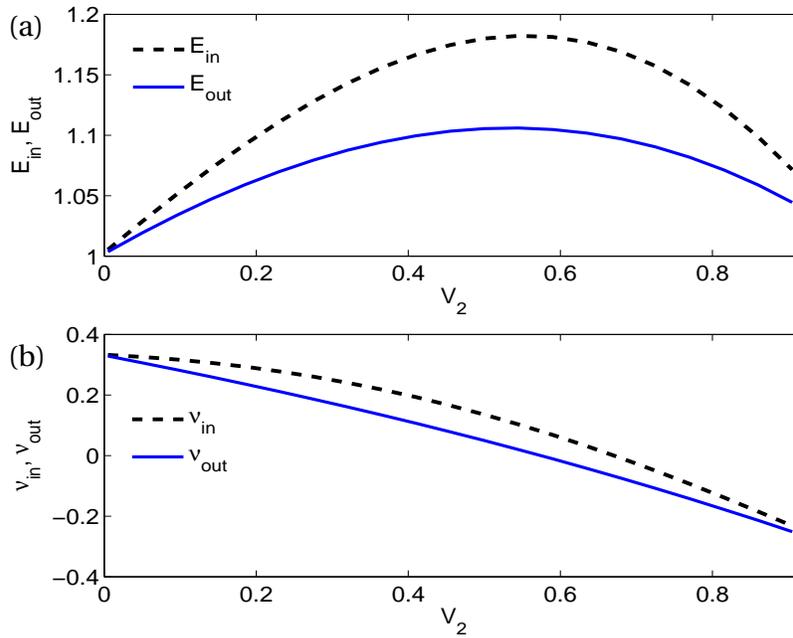


Fig. 6.11: Constantes ingenieriles: (a) E_{in}, E_{out} vs V_2 (líneas discontinua y continua, respectivamente), (b) v_{in}, v_{out} vs V_2 (líneas discontinua y continua, respectivamente), de un compuesto con propiedades $E_1=1, v_1=-v_2=0.333$ y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

tanto aun con un 70% del material con CET positivo el compuesto tendrá CET negativo.

En las Fig. 6.13(a), (b) se presentan las curvas de módulos de Young y los cocientes de Poisson efectivos como función de la fracción volumétrica V_2 . La VE = [0.9], es decir, el compuesto se endurece para toda fracción volumétrica. Se observa que E_{in} tiene un aumento máximo de aproximadamente 100% y lo alcanza en un valor cercano a $V_2 = 0.6$. E_{out} alcanza su aumento máximo en $V_2 = 0.5$ y es de aproximadamente 43%. Este compuesto es más duro en la dirección de los cilindros que en la dirección perpendicular. La ventana de auxeticidad VAX= [0.4,0.9] para v_{out} ésta es mayor que la VAX=[0.4,0.9] para v_{in} . Además $v_{in} > v_1$ en (0, 0.4), v_1 es el valor más alto de los cocientes de Poisson de los constituyentes, es decir, el compuesto se expande lateralmente menos que cada uno de sus constituyentes. El compuesto presenta un endurecimiento anisótropo que puede ser de casi más 40% a lo largo de los cilindros y de casi el doble en la dirección perpendicular a éstos.

En el siguiente ejemplo intercambiamos los constituyentes del ejemplo anterior, es decir, $v_2 = 0.45, v_1 = -0.8; \alpha_1 = -\alpha_2 = 1$ y $E_1 = 1$. La matriz es auxética y la fibra casi incompresible. Para este compuesto las gráficas de α_{in} (línea discontinua) y α_{out} (línea continua) vs V_2 aparecen en la Fig. 6.14. Aquí también hay un gran intervalo de fracción volumétrica en el cual los CET son negativos, $V_2 = [0.1, V_p]$. Al igual que en el ejemplo anterior α_{out} es mayor que α_{in} para toda

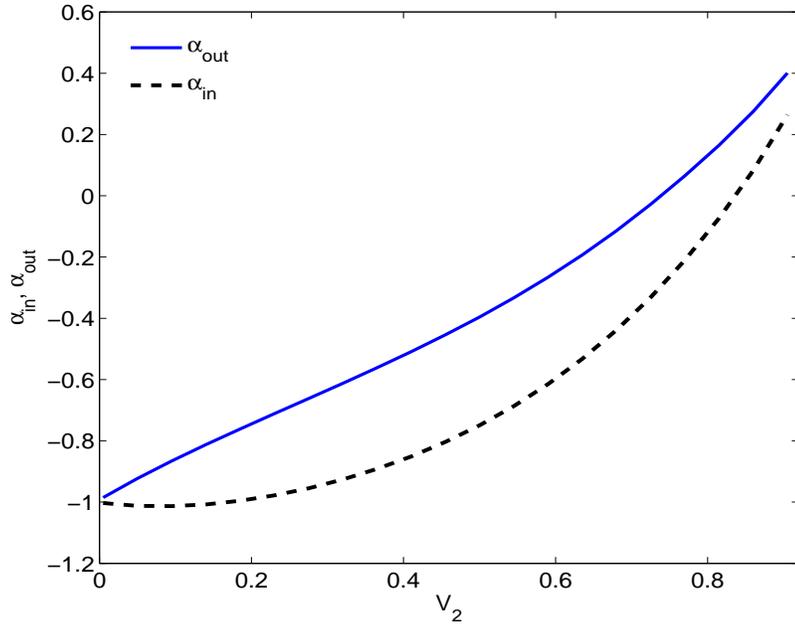


Fig. 6.12: Coeficientes de expansión térmica efectivos: α_{in} vs V_2 (línea discontinua) y α_{out} vs V_2 (línea continua) de un compuesto con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = 0.45$, $\nu_2 = -0.8$, y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

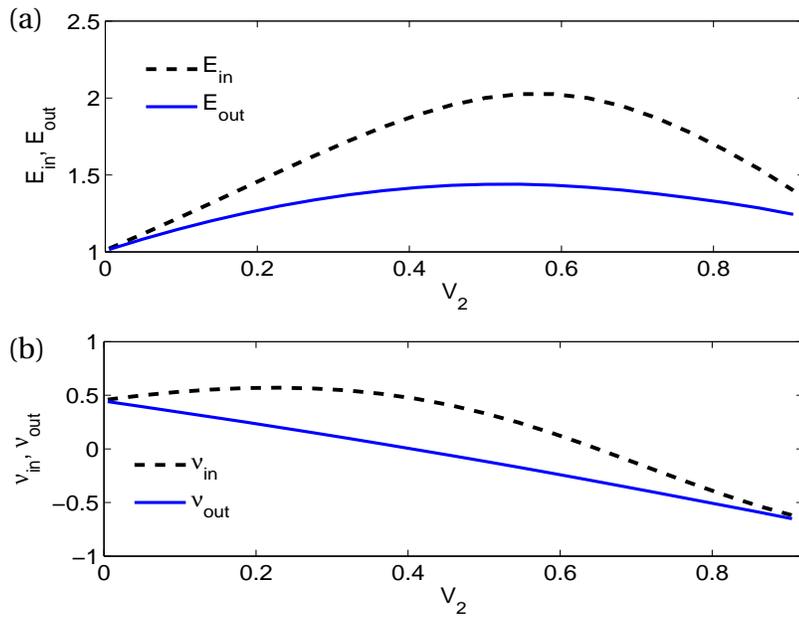


Fig. 6.13: Análogo a Fig. 6.11 con datos E_1 , $\nu_1 = 0.45$, $\nu_2 = -0.8$ y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

fracción volumétrica aunque la diferencia entre α_{in} y α_{out} es menor.

La Fig. 6.15(a) muestra las gráficas de los módulos de Young efectivos contra V_2 los cuales

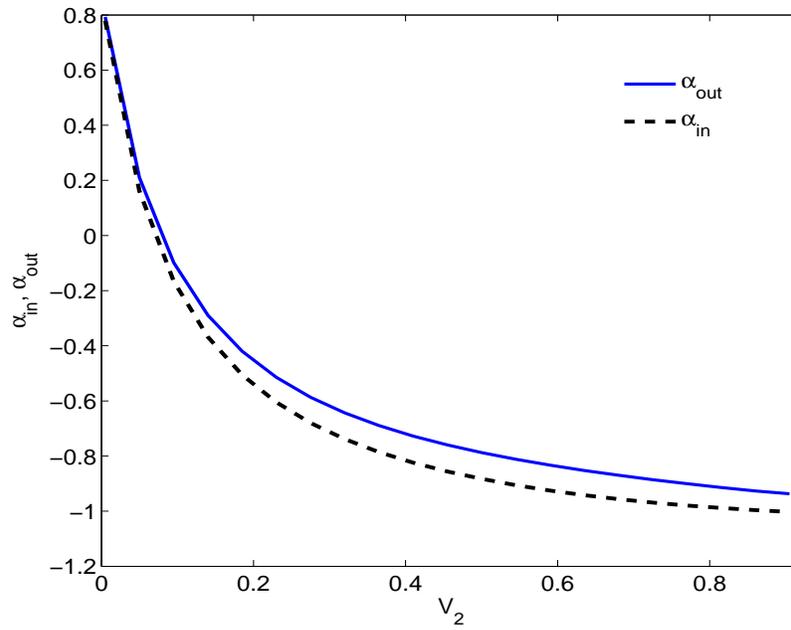


Fig. 6.14: Análogo a Fig. 6.12 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$, $\nu_2 = 0.45$ y $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$.

tienen un aumento máximo de 151% para E_{out} y de 146% para E_{in} . Este compuesto es más duro en la dirección perpendicular a los cilindros para $V_2 < 0.3$ y para $V_2 > 0.3$ es más blando. Este compuesto es más duro para la misma combinación mencionada anteriormente, 55% del material casi incompresible con CET igual -1 y 45% del convencional con CET positivo producen un compuesto más duro en al menos un 100%. En la Fig. 6.15 se presentan ν_{in} y ν_{out} . La VAX=(0,0.7) en el plano perpendicular a los cilindros y la VAX=(0,0.5) para el plano en la dirección de los cilindros.

De la Fig. 6.10 concluimos que los CET de un compuesto en el cual ν_i y α_i tienen signos opuestos son menores que los de un compuesto en el que ν_i y α_i tienen el mismo signo. Ahora en la Fig. 6.12 observamos que si además la matriz es auxética con CET > 0 entonces los CET son aún más pequeños que si la fibra es auxética con CET > 0. Adicionalmente a esto los módulos de Young son más grandes tal y como lo habíamos visto en la sección anterior.

Por lo tanto la mejor combinación de los constituyentes en un compuesto reforzado de fibras será en el cual la matriz sea auxética con CTE positivo y la fibra sea convencional con CET negativo.

En nuestro último ejemplo consideramos un compuesto con dos constituyentes auxéticos uno con CET positivo y el otro con CET negativo con las propiedades de los constituyentes son $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$, $\nu_2 = -0.2$ y $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Las gráficas de α_{in} y α_{out} contra V_2 se muestran en la Fig. 6.16 ambos CET son negativos para una fracción volumétrica menor a 0.4, aproximadamente.

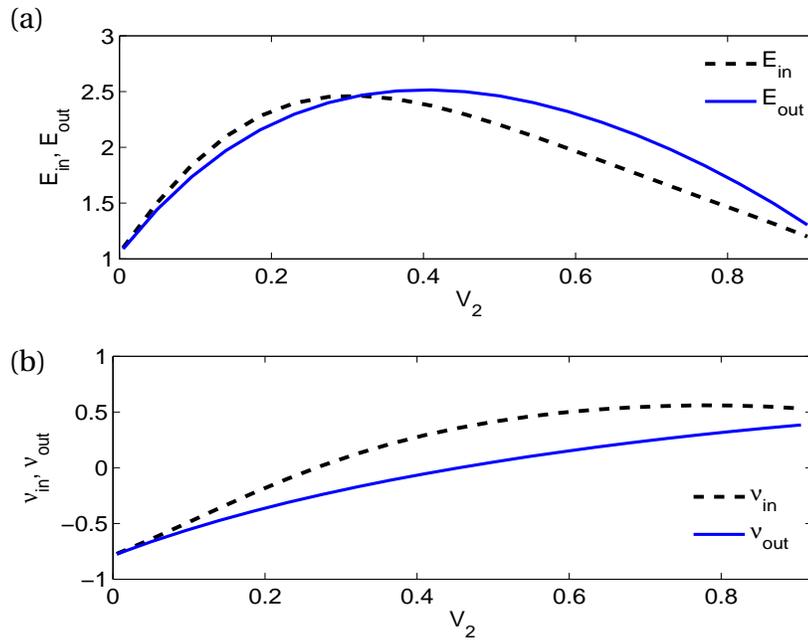


Fig. 6.15: Análogo a Fig. 6.11 datos $E_1 = 1$, $v_1 = -0.8$, $v_2 = 0.45$ y $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$.

Como la matriz tiene $CET < 0$ se requiere por lo menos un 60% del material con CET negativo para que el compuesto también tenga CET negativo.

La Fig. 6.17(a),(b) muestra los módulos de Young E_{in} , E_{out} y los cocientes de Poisson v_{in} , v_{out} . El aumento es de casi 13% para E_{in} y de casi 18% para E_{out} . Este compuesto es más duro en la dirección de los cilindros. Los cocientes de Poisson son negativos para toda fracción volumétrica.

De los ejemplos mostrados en esta sección observamos que los coeficientes de expansión térmica de un compuesto en el cual uno de sus constituyentes es auxético con CET positivo y el otro es convencional con CET negativo son menores que los de un compuesto en el cual el material auxético tiene CET negativo y el convencional CET positivo. Los intervalos de fracción volumétrica en el que los CET efectivos son negativos pueden ser bastante amplios. También observamos que ciertos compuestos muestran un cociente de Poisson mayor que el de sus constituyentes. Por lo cual estos se expanden lateralmente más que sus constituyentes. Aquí también las ventanas de auxeticidad así como las ventanas de aumento son bastante amplias.

Observaciones

Al igual que en el capítulo anterior haremos un resumen de las observaciones hechas acerca de los compuestos estudiados.

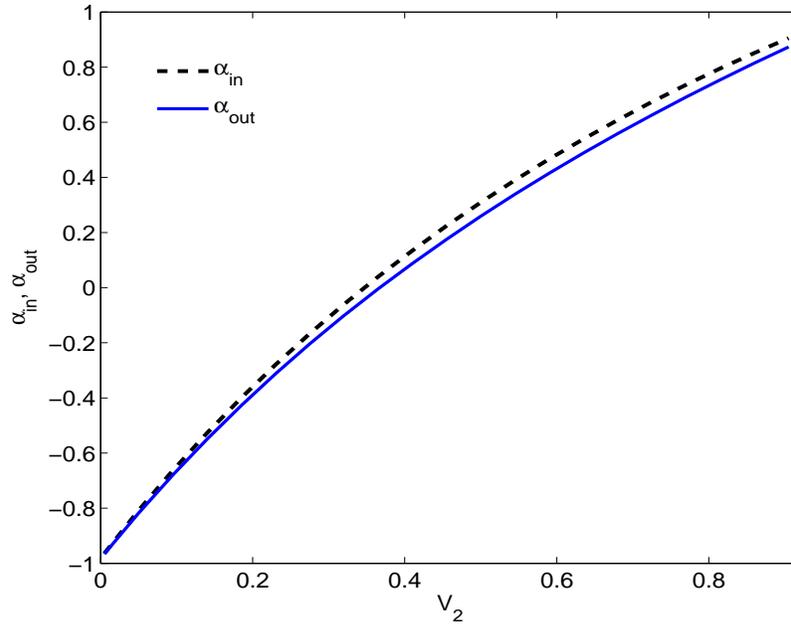


Fig. 6.16: Análogo Fig. 6.12 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ $\nu_2 = -0.2$, $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

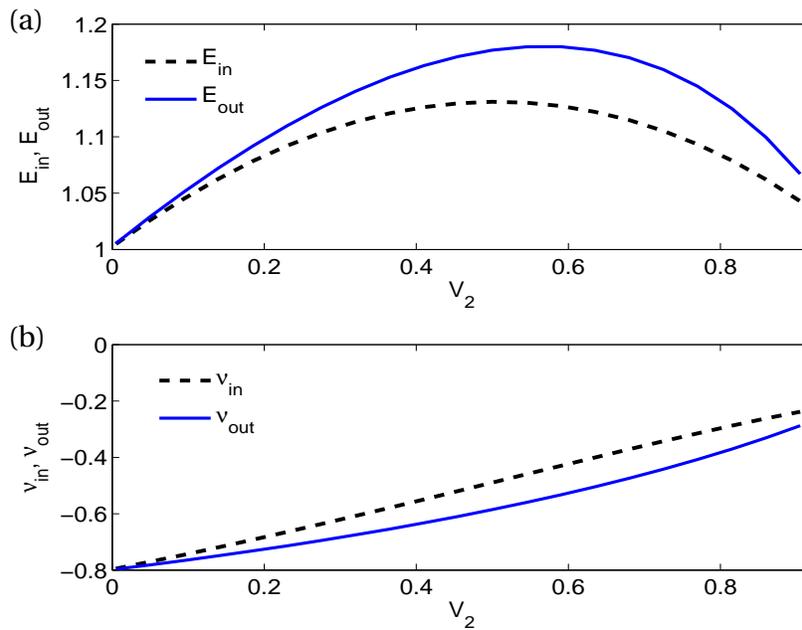


Fig. 6.17: Análogo a la Fig. 6.11 con datos $E_1 = 1$, $\nu_1 = -0.8$ $\nu_2 = -0.2$, $-\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

- Un compuesto reforzado de fibras en arreglo paralelogramico puede ser más duro que sus constituyentes en cualquier dirección.
- El aumento en la dureza es mayor si matriz es un material auxético.

- El aumento en la dureza se puede dar para toda fracción volumétrica.
- Las propiedades efectivas de los compuestos en diferentes arreglos no varían mucho para una fracción volumétrica pequeña, cilindros pequeños.
- Las propiedades efectivas muestran una dependencia del ángulo de la celda paralelográmica para una fracción mayor a 0.2 aproximadamente.
- El cociente de Poisson efectivo puede ser mayor que el de los constituyentes.
- Las ventanas de auxeticidad pueden ser bastantes amplias en cualquier plano.
- Los CET efectivos de un reforzado de fibras bifásico son menores si el cociente de Poisson y el CET de cada constituyente tienen signos opuestos que si ambos tienen el mismo signo.
- El intervalo en el cual los CET son negativos pueden ser bastante amplios.

Capítulo 7

Laminado de fluidos viscosos

[Smith \(2011\)](#) usó el MHA para estudiar el problema de propagación de ondas a lo largo de la dirección normal a un laminado de fluidos ideales (no viscosos) en contacto perfecto en un régimen de baja frecuencia. Las propiedades efectivas encontradas corresponden a un meta fluido con densidad anisótropa y módulo de compresibilidad isótropo. En el caso de frecuencia cercana a la resonancia, el módulo de compresibilidad efectiva del metamaterial también es anisótropo.

El problema de dispersión de ondas acústicas por un arreglo de cilindros elásticos inmersos en un fluido viscoso fue estudiado por [Reyes-Ayona et al. \(2012\)](#) usando la teoría de dispersión a escalas múltiples. La homogeneización de este sistema da como resultado un medio efectivo equivalente en el régimen de baja frecuencia. Este medio se comporta como un cilindro elástico cuyas propiedades son: la densidad efectiva es igual al promedio aritmético de las densidades, el módulo de compresibilidad es el recíproco del promedio geométrico de los módulos de compresibilidad y el módulo de rigidez efectivo es el promedio aritmético de los constituyentes. En las fórmulas finales la viscosidad no está presente pero si en la formulación de las ecuaciones y las condiciones de frontera. Para tratar sistemáticamente con este tipo de problemas aquí vamos a considerar un laminado periódico formado por láminas paralelas, las cuales están ocupadas por fluidos viscosos. En ausencia de viscosidad las fórmulas se deben recuperar. Aquí una onda se propaga a lo largo de la dirección normal del laminado. En el régimen de frecuencia baja el MHA se aplica para obtener las propiedades y ecuación efectiva.

7.1. Formulación del problema

Vamos a considerar un laminado periódico de dos láminas planas y paralelas de periodo l cuya normal es paralela al eje x_1 . Cada lámina D_j , $j = 1, 2$, está ocupada por un fluido viscoso de densidad de masa ρ_i , módulo de compresibilidad κ_i , viscosidad volumétrica K_i y viscosidad cortante η_i . Ver Fig. 7.1. El grosor de cada lámina es h_1 , h_2 , respectivamente. El compuesto se somete a una excitación armónica proporcional a $\exp(-i\omega t)$, donde ω es la frecuencia circular. Las relaciones constitutivas y las ecuaciones de movimiento linealizadas de cada lámina relativas a la presión acústica $p^{(j)}$ y la velocidad $\mathbf{v}^{(j)} = (v_1^{(j)}, v_2^{(j)})$ en cada fluido son dadas por Kinsler et al. (1982),

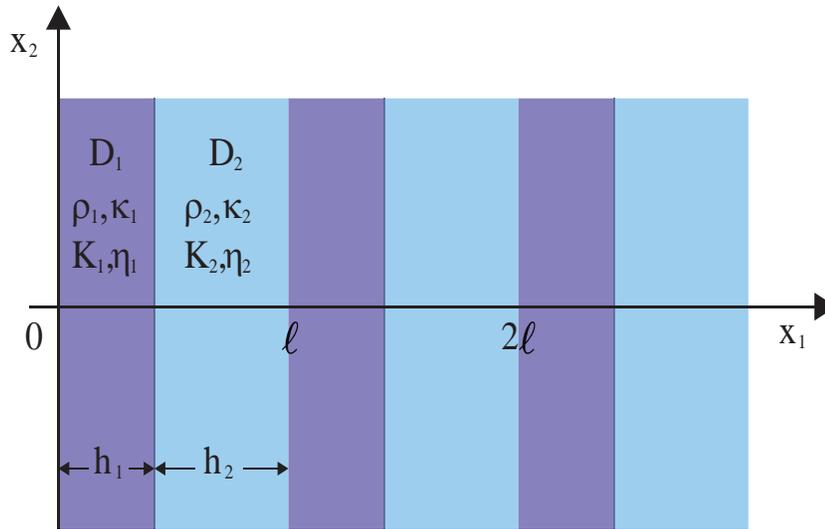


Fig. 7.1: Laminado consistente de dos fluidos viscosos. Un fluido viscoso, que ocupa el dominio D_1 , tiene densidad de masa ρ_1 , módulo de compresibilidad κ_1 , viscosidad volumétrica K_1 y viscosidad cortante η_1 y la lámina tiene un grosor h_1 . El otro fluido viscoso tiene propiedades análogas con subíndice 2. La celda es periódica de período $h_1 + h_2$.

$$p^{(j)} = \frac{\kappa_j}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{v}^{(j)} \quad \text{en } D_j, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{v}^{(j)} = \frac{1}{i\omega\rho_j} \nabla p^{(j)} - \frac{K_j + \frac{4}{3}\eta_j}{i\omega\rho_j} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}^{(j)}) \quad \text{en } D_j, \quad (7.2)$$

para $j = 1, 2$. De (7.1) y (7.2) se obtiene la ecuación de movimiento para $p^{(j)}$, esto es,

$$\Delta p^{(j)} + \frac{\omega^2}{c_j^2} \frac{1}{1 - i\omega\tau_j} p^{(j)} = 0 \quad \text{en } D_j, \quad (7.3)$$

donde $c_j^2 = \kappa_j / \rho_j$ es la velocidad del sonido de la onda plana que se propaga a lo largo del eje x_1 en el medio i . La cantidad

$$v_j = \frac{\kappa_j + \frac{4}{3}\eta_j}{\rho_j} \quad (7.4)$$

es la viscosidad cinemática;

$$\tau_j = \frac{\kappa_j + \frac{4}{3}\eta_j}{\kappa_j} \quad (7.5)$$

es el tiempo de relajación y

$$\delta_j = \left(\frac{2v_j}{\omega} \right)^{1/2} \quad (7.6)$$

es la capa límite del fluido. Se considera que el contacto entre la interfaz de ambos fluidos es perfecto, esto es,

$$\|p\| = 0, \quad (7.7)$$

$$\left\| \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p}{\partial x} \right\| = 0, \quad (7.8)$$

en $x_1 = 0, R, l, \dots$

7.2. Método de homogeneización asintótica

La onda plana que se propaga a lo largo del eje x_1 es

$$p^{(j)} = A_j \exp(i(\mathbf{k}_j x_1 - \omega t)), \quad (7.9)$$

donde el número de onda $\mathbf{k}_j = \frac{\omega}{c_j} \frac{1}{\sqrt{1-i\omega\tau_j}}$ es complejo. Esta onda se atenúa conforme se propaga en la dirección $+x_1$; sea $\mathbf{k}_j = \text{Re}\mathbf{k}_j + i\text{Im}\mathbf{k}_j$.

Cuando la longitud de la onda propagada es mucho más grande que la dimensión de la celda, [Smith \(2011\)](#) obtiene las propiedades efectivas de un sistema análogo constituido por láminas con dos fluidos ideales las cuales se repiten periódicamente. La componente de velocidad v_1 y la presión p son continuas a través de la interfaz entre los fluidos. Él determina las propiedades efectivas mediante el método de homogeneización asintótica (MHA) y muestra que éstas corresponden a un metamaterial con densidad de masa anisótropa y módulo de compresibilidad igual al recíproco del promedio geométrico de las dos fases. Nuestro objetivo en este capítulo es aplicar el MHA a una celda de dos fluidos viscosos y encontrar las

propiedades efectivas del nuevo compuesto. En el caso de viscosidad nula una vez que se hayan deducido los coeficientes efectivos se deben alcanzar los resultados de [Smith \(2011\)](#). Las nuevas variables en la microescala se definen como $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (x_1/h_2, x_2/h_2)$. El parámetro pequeño, se elige relativo a la longitud de onda del fluido 2, esto es $\epsilon = \frac{\omega}{c_2} h_2$ y es muy pequeño, es decir, $\frac{c_2}{\omega} \ll h_2$. Por otro lado la macroescala $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ se elige relativa a la otra escala de longitud k_2 a través de la adimensionalización ϵ , o sea,

$$X_1 = L(\epsilon) \left(\frac{x_1}{h_2} \right), \quad X_2 = L(\epsilon) \left(\frac{x_2}{h_2} \right), \quad (7.10)$$

donde $L(\epsilon)$ es de la forma

$$L(\epsilon) \sim \epsilon + \epsilon^2 L_2 + O(\epsilon^3) \quad \text{conforme } \epsilon \rightarrow 0, \quad (7.11)$$

con L_2 por determinar. En dos dimensiones se sabe que términos asintóticos como $\epsilon \ln \epsilon$ pueden aparecer en el desarrollo asintótico para la ecuación de Helmholtz ([Sabina and Willis, 1975](#)). Así mantendremos $L(\epsilon)$ arbitraria en el desarrollo asintótico. Antes de continuar con la aplicación del MHA, vamos a adimensionalizar las relaciones constitutivas [\(7.1\)](#), [\(7.2\)](#) y la ecuación gobernante [\(7.3\)](#) con respecto al medio 2 de tal forma que

$$m_1 = m = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad m_2 = 1, \quad (7.12)$$

$$\alpha_1 = \alpha = \frac{c_2}{c_1}, \quad \alpha_2 = 1, \quad (7.13)$$

e introducimos la cantidad

$$P_j = \frac{h_2}{\delta_j} \quad (7.14)$$

la cual definimos como la porosidad del medio D_j . Con el reescalamiento hecho, la variable ξ_1 está definida en los intervalos

$$\mathbf{I}_1 \equiv (0, R/h_2), \quad (7.15)$$

$$\mathbf{I}_2 \equiv (R/h_2, l/h_2). \quad (7.16)$$

Ahora se considera que los campos principales $p^{(j)}$ y $\mathbf{v}^{(j)}$ son funciones de la microescala $\boldsymbol{\xi}$ y la macroescala \mathbf{X} . Se procede a sustituirlos en las relaciones constitutivas [\(7.1\)](#), [\(7.2\)](#) y en la ecuación diferencial [\(7.3\)](#). Aplicando la regla de la cadena para las derivadas,

$$\nabla_{\mathbf{X}} = \frac{1}{h_2} (\nabla_{\boldsymbol{\xi}} + L(\epsilon) \nabla_{\mathbf{X}}), \quad (7.17)$$

donde $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)$ y $\nabla_{\mathbf{X}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2} \right)$, la ecuación [\(7.1\)](#) toma la forma

$$p^{(j)} = \frac{m_j \rho_2 c_2}{i \epsilon \alpha_j^2} \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{v}^{(j)} + L(\epsilon) \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{v}^{(j)} \right); \quad (7.18)$$

(7.2) ahora es

$$\mathbf{v}^{(j)} = \frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 P_j^{-1} \alpha_j^2}{i\epsilon m_j \rho_2 c_2} \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} p^{(j)} + L(\epsilon) \nabla_{\mathbf{X}} p^{(j)} \right). \quad (7.19)$$

La ecuación de movimiento adimensionalizada está dada por

$$\Delta_{\boldsymbol{\xi}} p^{(j)} + 2L(\epsilon) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p^{(j)} + L(\epsilon)^2 \Delta_{\mathbf{X}} p^{(j)} + \epsilon^2 \alpha_j^2 \frac{1}{1 - i\omega\tau_j} p^{(j)} = 0, \quad (7.20)$$

donde $\Delta_{\boldsymbol{\xi}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$, $\Delta_{\mathbf{X}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2}$. Al hacer la expansión de $(1 - i\omega\tau_j)^{-1}$

$$\begin{aligned} (1 - i\omega\tau_j)^{-1} &= 1 + i\omega\tau_j - (\omega\tau_j)^2 + \dots, \\ &= 1 + \frac{i\epsilon^2}{2P_j^2} \alpha_j^2 + \dots, \end{aligned} \quad (7.21)$$

tenemos que la ecuación de movimiento adimensionalizada es de la forma

$$\Delta_{\boldsymbol{\xi}} p^{(j)} + 2L(\epsilon) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p^{(j)} + L(\epsilon)^2 \Delta_{\mathbf{X}} p^{(j)} + \epsilon^2 \alpha_j^2 \left(1 + \frac{i\epsilon^2}{2P_j^2} \alpha_j^2 + \dots \right) p^{(j)} = 0, \quad (7.22)$$

Se propone el siguiente Ansatz para la presión y la velocidad en el fluido

$$p^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = p_0^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \epsilon p_1^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \epsilon^2 p_2^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \dots, \quad (7.23)$$

$$\mathbf{v}^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \mathbf{v}_0^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \epsilon \mathbf{v}_1^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \epsilon^2 \mathbf{v}_2^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \dots. \quad (7.24)$$

Para obtener las ecuaciones que satisfacen las funciones $p_0^{(j)}$, $p_1^{(j)}$, $p_2^{(j)}$, etc., se sustituye el Ansatz (7.23) en las ecuaciones (7.22), (7.7) y (7.8) y se agrupa en potencias de ϵ . El término dominante a $O(\epsilon^0)$ es el siguiente sistema

$$\Delta_{\mathbf{X}} p_0^{(j)} = 0 \quad \text{en } D_j, \quad (7.25)$$

$$\|p_0\| = 0, \quad (7.26)$$

$$\left. \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \right|_{\partial D_1} = m \left. \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \right|_{\partial D_2}, \quad (7.27)$$

donde ∂D_1 y ∂D_2 son las fronteras de D_1 y D_2 , respectivamente. A este orden el sistema coincide con el obtenido por Smith (2011). Se obtiene inmediatamente que la solución está dada por

$$p_0^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = A(\mathbf{X}) \quad (7.28)$$

con $A(\mathbf{X})$, una función arbitraria. O sea, que la presión a orden cero es independiente de la variable rápida.

A $O(\epsilon)$ las ecuaciones son las mismas que las dadas en [Smith \(2011\)](#), éstas son

$$\frac{\partial^2 p_1^{(j)}}{\partial \xi_1^2} = -2\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(j)} \quad \text{en } D_j, \quad (7.29)$$

$$\|p_1\| = 0, \quad (7.30)$$

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0}{\partial X_1} \right) \Big|_{\partial D_1} = m \left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0}{\partial X_1} \right) \Big|_{\partial D_2}. \quad (7.31)$$

Dado que el lado derecho de [\(7.29\)](#) es una combinación lineal de $\nabla_{\mathbf{X}} A$, se propone que la solución sea de la forma de producto:

$$p_1^{(1)} = (b_0 + b_1 \xi_1, a) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} A + B_1(\mathbf{X}) \quad \text{en } D_1, \quad (7.32)$$

$$p_1^{(2)} = (d_0 + d_1 \xi_1, a) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} A + B_2(\mathbf{X}) \quad \text{en } D_2. \quad (7.33)$$

De la continuidad en la interfaz se tiene

$$B_1(\mathbf{X}) = B_2(\mathbf{X}), \quad b_0 + b_1 r = d_0 + d_1 r, \quad (7.34)$$

además de la periodicidad resulta también que

$$b_0 = d_0 + d_1 l / h_2. \quad (7.35)$$

Por lo tanto b_1 y d_1 son

$$b_1 = \frac{(m-1)(r-1)}{(r-1) - rm}, \quad (7.36)$$

$$d_1 = \frac{r(1-m)}{rm + (1-r)}, \quad (7.37)$$

donde $r = R/l$. A este orden ϵ la solución p_1 tiene tres constantes arbitrarias a , d_0 y b_0 y la función arbitraria $B(\mathbf{X})$.

A $O(\epsilon^2)$ la ecuación diferencial es

$$\frac{\partial^2 p_2^{(j)}}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial X} + 2L_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial p_0^{(j)}}{\partial X} + \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(j)} + \alpha_j^2 p_0^{(j)} = 0 \quad \text{en } D_j, \quad (7.38)$$

con las siguientes condiciones en la interfaz

$$\|p_2(\xi, \mathbf{X})\| = 0, \quad (7.39)$$

$$\left\| \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_1}{\partial X} + L_2 \frac{\partial p_0}{\partial X} \right) \right\| = 0. \quad (7.40)$$

Debemos notar que hasta este orden el término de porosidad no ha aparecido. Por lo tanto estas ecuaciones son válidas para cualquier porosidad y son las mismas que las obtenidas para fluidos

inviscidos. Usaremos la ecuación (7.38). Para determinar la ecuación homogeneizada para esto la escribimos de la forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial p_2^{(j)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial X} + L_2 \frac{\partial p_0^{(j)}}{\partial X} \right] = - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial X} + L_2 \frac{\partial p_0^{(j)}}{\partial X} \right] - \Delta_{\mathbf{X}} p_0^{(j)} - \alpha_j^2 p_0^{(j)}. \quad (7.41)$$

Ahora integramos (7.40) sobre I_1 y le sumamos m veces la integral de esa misma ecuación sobre I_2 . El lado izquierdo de la ecuación resultante es

$$\int_{I_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial X} + L_2 \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial X} \right] d\xi_1 + m \int_{I_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial p_2^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial X} + L_2 \frac{\partial p_0^{(2)}}{\partial X} \right] d\xi_1.$$

Al aplicar el teorema de la divergencia y usando la ecuación (7.40) se sigue que esta integral se anula. El lado derecho de la ecuación resultante también se anula y se escribe como sigue

$$- \int_{I_1} \left[\frac{\partial^2 p_1^{(1)}}{\partial \xi_1^2} + \Delta_{\mathbf{X}} A(\mathbf{X}) + \alpha^2 A(\mathbf{X}) \right] d\xi_1 - m \int_{I_2} \left[\frac{\partial^2 p_1^{(2)}}{\partial \xi_1^2} + \Delta_{\mathbf{X}} A(\mathbf{X}) + A(\mathbf{X}) \right] d\xi_1 = 0. \quad (7.42)$$

Después de reemplazar las expresiones de $p_1^{(j)}$ y usar las condiciones de continuidad en la interfaz, (7.39) y (7.40), se obtiene la ecuación homogeneizada para la presión media $P_0 = A(\mathbf{X})$:

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{X})}{\partial X_1^2} [r b_1 + m(1-r) d_1] + \Delta_{\mathbf{X}} A(\mathbf{X}) [r + m(1-r)] + [r \alpha_1^2 + m(1-r)] A(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2, \quad (7.43)$$

si multiplicamos (7.43) por ρ_2

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A(\mathbf{X})}{\partial X_1^2} [r b_1 \rho_2 + \rho_1 (1-r) d_1] + \Delta_{\mathbf{X}} A(\mathbf{X}) [\rho_2 r + \rho_1 (1-r)] \\ & + [r \rho_2 \alpha_1^2 + \rho_1 (1-r)] A(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Esta ecuación es la misma que la obtenida por Smith (2011). Se sigue por lo tanto que las viscosidades de los fluidos no tienen efecto a este orden.

Para determinar las propiedades efectivas retomamos las relaciones constitutivas (7.18) y (7.19). Primeramente de (7.19) definimos

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 P_j^{-2} \alpha_j^2}{i \epsilon m_j \rho_2 c_2} \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} p^{(j)} + L(\epsilon) \nabla_{\mathbf{X}} p^{(j)} \right). \quad (7.45)$$

Se supone que la velocidad es de la forma

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{v} = \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \epsilon \mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \epsilon^2 \mathbf{V}_2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) + \dots. \quad (7.46)$$

El Ansatz (7.23) se sustituye en (7.45) y se igualan los términos similares de ϵ en (7.46) con lo que se obtiene

$$\mathbf{V}_0^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{im_j \rho_2 c_2} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p_0^{(j)}, \quad (7.47)$$

$$\mathbf{V}_1^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{im_j \rho_2 c_2} \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} p_1^{(j)} + \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(j)} \right), \quad (7.48)$$

$$\mathbf{V}_2^{(j)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = \frac{1}{im_j \rho_2 c_2} \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} p_2^{(j)} + \nabla_{\mathbf{X}} p_1^{(j)} + L_2 \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(j)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_j^2}{P_j^2} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p_0^{(j)} \right). \quad (7.49)$$

El término de la porosidad sólo aparece en la última ecuación, pero, para determinar las velocidades efectivas, este término no es necesaria pues la presión y la velocidad promedio están dadas por

$$\hat{p}(\mathbf{X}) = \int_{I_1 \cup I_2} p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\xi_1 \sim A(\mathbf{X}) + O(\epsilon), \quad (7.50)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) = \int_{I_1 \cup I_2} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\xi_1 \sim \int_{I_1 \cup I_2} \mathbf{V}_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\xi_1 + O(\epsilon), \quad (7.51)$$

respectivamente. Para determinar las velocidades efectivas sólo usaremos la ecuación (7.48). Procedemos a esto tomando el promedio de esta ecuación sobre la celda

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) &\sim \int_{I_1 \cup I_2} \mathbf{V}_1 d\xi_1 = \int_{I_1} \frac{1}{ic_2 m_1 \rho_2} \left[(b_1 + 1) \frac{\partial A}{\partial X_1}, \frac{\partial A}{\partial X_2} \right] d\xi_1 + \int_{I_2} \frac{1}{i\rho_2 c_2} \left[(d_1 + 1) \frac{\partial A}{\partial X_1}, \frac{\partial A}{\partial X_2} \right] d\xi_1 \\ &= \frac{1}{imc_2 \rho_2} \left[(b_1 + 1) \frac{\partial A}{\partial X_1} r, \frac{\partial A}{\partial X_2} r \right] + \frac{1}{im_2 c_2 \rho_2} \left[(d_1 + 1)(1 - r) \frac{\partial A}{\partial X_1}, \frac{\partial A}{\partial X_2} (1 - r) \right]. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Entonces cada componente de la velocidad promedio está dada por

$$\hat{v}_1 \sim \left[\frac{1}{im_1 c_2 \rho_2} (b_1 + 1)r + \frac{1}{im_2 \rho_2 c_2} (d_1 + 1)(1 - r) \right] \frac{\partial A}{\partial X_1}, \quad (7.53)$$

$$\hat{v}_2 \sim \left[r \frac{1}{im_1 c_2 \rho_2} + (1 - r) \frac{1}{ic_2 \rho_2} \right] \frac{\partial A}{\partial X_2}, \quad (7.54)$$

lo cual se reescribe de una manera más conveniente como

$$\hat{v}_1 \sim \frac{1}{ic_2 [(1 - r)\rho_2 + \rho_1 r]} \frac{\partial A}{\partial X_1}, \quad (7.55)$$

$$\hat{v}_2 \sim \frac{r\rho_2 + (1 - r)\rho_1}{ic_2 \rho_1 \rho_2} \frac{\partial A}{\partial X_2}. \quad (7.56)$$

De (7.55) y (7.56) se concluye que el compuesto tiene una densidad anisótropa dada por

$$\rho_{x_1} = (1 - r)\rho_2 + \rho_1 r, \quad (7.57)$$

$$\rho_{x_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{r\rho_2 + (1 - r)\rho_1}. \quad (7.58)$$

Las densidades efectivas son iguales a las de un bilaminado de fluidos inviscidos. Esto quiere decir que las viscosidades no tienen influencia en las densidades efectivas. Hay que notar que la densidad efectiva en la dirección x_1 es el promedio aritmético de las densidades de los constituyentes y en la dirección x_2 es el inverso del promedio geométrico.

Para determinar la compresibilidad efectiva se hace uso de la relación constitutiva (7.18)

$$\begin{aligned} p^{(j)} &= \frac{m_i \rho_2 c_2}{i \alpha_i^2} \left(\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(j)} + L(\epsilon) \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{v}^{(j)} \right) \\ &= \frac{m_j \rho_2 c_2}{i \epsilon^2 \alpha_j^2} \left[\nabla_{\xi} \cdot \left(\mathbf{V}_0^{(j)} + \epsilon \mathbf{V}_1^{(j)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_2^{(j)} + \dots \right) + L(\epsilon \nabla_{\mathbf{X}}) \left(\mathbf{V}_0^{(j)} + \epsilon \mathbf{V}_1^{(j)} + \epsilon^2 \mathbf{V}_2^{(j)} + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Una vez más se sustituyen $p^{(j)}$ y $\mathbf{v}^{(j)}$ por las expresiones dadas en sus Ansatz (7.23) y (7.46), respectivamente, en la ecuación anterior. Ordenando en términos de potencias de ϵ obtenemos

$$0 = \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{V}_0, \quad (7.60)$$

$$0 = \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{V}_1 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V}_0, \quad (7.61)$$

$$p_0 = \frac{m_j \rho_2 c_2}{i \alpha_j^2} \left[\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{V}_2 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V}_1 + L_2 \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V}_0 \right]. \quad (7.62)$$

Estas ecuaciones son iguales a las obtenidas por Smith (2011). Por lo tanto la relación constitutiva efectiva será la dada por él en su ecuación (2.33) la cual es

$$\hat{p} \sim A(\mathbf{X}) \sim \frac{1}{i c_2} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{r \kappa_2 + (1-r) \kappa_1} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{v}}; \quad (7.63)$$

por lo tanto la compresibilidad efectiva es

$$\kappa = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{r \kappa_2 + (1-r) \kappa_1}. \quad (7.64)$$

Entonces la compresibilidad efectiva es el inverso del promedio geométrico de las compresibilidades de los constituyentes. En conclusión el bilaminado de fluidos viscosos es un metamaterial con densidad de masa anisótropa y módulo de compresibilidad isótropo. Las propiedades efectivas no muestran dependencia de las viscosidades de los fluidos.

7.2.1. Caso localmente resonante

Vamos a considerar el caso localmente resonante en el que $c_1 \ll c_2$ y $k_2 \ll h_2$. Para esto hacemos

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\epsilon}, \quad \alpha_2 = 1. \quad (7.65)$$

Además $L(\epsilon) = \epsilon$ pues en el caso anterior el término ϵ^2 no tuvo efecto en las ecuaciones obtenidas.

Sea

$$\alpha = \alpha_n(1 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots), \quad (7.66)$$

con $\alpha_n = 2n\pi/r$, entonces la ecuación diferencial (7.22) en D_1 toma la forma

$$\begin{aligned} & \Delta_{\xi} p^{(1)} + 2\epsilon \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p^{(1)} + \epsilon^2 \Delta_{\mathbf{X}} p^{(1)} + \epsilon^2 \alpha_n (1 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots) \\ & \times \left(1 + \frac{i\epsilon^2}{2P_j^2} \alpha_n (1 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots) + \dots \right) p^{(1)} = 0 \quad \text{en } D_1 \end{aligned} \quad (7.67)$$

la cual se escribe como

$$\begin{aligned} & \Delta_{\xi} p^{(1)} + 2\epsilon \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p^{(1)} + \epsilon^2 \Delta_{\mathbf{X}} p^{(1)} \left[\alpha_n^2 \left(1 + \frac{i\alpha_n^2}{2P_1^2} \right) + \epsilon a_1^2 \left(\alpha_n^2 + i \frac{\alpha_n^2}{P_j^2} \right) \right. \\ & \left. + \epsilon^2 \alpha_n^2 \left(a_2^2 + \frac{i\alpha_n^2}{P_1^2} a_2^2 \right) + \epsilon^2 \frac{i\alpha_n^4}{2P_j^2} (a_1^4 + 2a_2^2) + \dots \right] p^{(1)} = 0 \quad \text{en } D_1. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Se sustituye el Ansatz (7.23) en la ecuación anterior y se ordena en términos de ϵ con lo cual se obtiene la siguiente sucesión de problemas

$$\Delta_{\xi} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 \left(1 + \frac{i\alpha_n^2}{2P_1^2} \right) p_0^{(1)} = 0, \quad (7.69)$$

$$\Delta_{\xi} p_1^{(1)} + 2\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 a_1^2 \left(1 + i \frac{\alpha_n^2}{P_j^2} \right) p_0^{(1)} + \alpha_n^2 \left(1 + i \frac{\alpha_n^2}{P_j^2} \right) p_1^{(1)} = 0, \quad (7.70)$$

$$\Delta_{\xi} p_2^{(1)} + 2\nabla_{\xi} \nabla_{\mathbf{X}} p_1^{(1)} + \Delta_{\mathbf{X}} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 \left(1 + \frac{i\alpha_n^2}{2P_1^2} \right) p_2^{(1)} + \alpha_n^2 a_2^2 \left(1 + \frac{i\alpha_n^2}{P_1^2} \right) p_0^{(1)} = 0. \quad (7.71)$$

Recordemos que las porosidades son pequeñas, es decir, $P_j^{-1} \ll 1$ entonces las ecuaciones (7.69)–(7.71) se reducen a

$$\Delta_{\xi} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 p_0^{(1)} = 0, \quad (7.72)$$

$$\Delta_{\xi} p_1^{(1)} + 2\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 a_1^2 p_0^{(1)} + \alpha_n^2 p_1^{(1)} = 0, \quad (7.73)$$

$$\Delta_{\xi} p_2^{(1)} + 2\nabla_{\xi} \nabla_{\mathbf{X}} p_1^{(1)} + \Delta_{\mathbf{X}} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 p_2^{(1)} + \alpha_n^2 a_2^2 p_0^{(1)} = 0. \quad (7.74)$$

En el medio D_2 la ecuación es (7.22) con $j = 2$,

$$\Delta_{\xi} p^{(2)} + \epsilon \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} p^{(2)} + \epsilon^2 \Delta_{\mathbf{X}} p^{(2)} + \epsilon^2 \left(1 + \frac{i\epsilon^2}{2P_2^2} + \dots \right) p^{(2)} = 0. \quad (7.75)$$

Para determinar p_0 necesitamos resolver el siguiente sistema

$$\Delta_{\xi} p_0^{(1)} + \alpha_n^2 p_0^{(1)} = 0 \quad \text{en } D_1, \quad (7.76)$$

$$\Delta_{\xi} p_0^{(2)} = 0 \quad \text{en } D_2, \quad (7.77)$$

con condiciones en la interfaz

$$\|p_0\| = 0, \quad (7.78)$$

$$\left. \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \xi_1} \right|_{\partial D_1} = m \left. \frac{\partial p_0^{(2)}}{\partial \xi_1} \right|_{\partial D_2}. \quad (7.79)$$

Se encuentra que la solución está fácilmente dada por

$$p_0(\xi, \mathbf{X}) = \begin{cases} A(\mathbf{X}) \cos(\alpha_n \xi) & \text{en } D_1, \\ A(\mathbf{X}) & \text{en } D_2. \end{cases} \quad (7.80)$$

A $O(\epsilon)$ el sistema a resolver para $p^{(1)}$ es:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial X_1} \right) + \alpha_n^2 p_1^{(1)} + \frac{\partial^2 p_0^{(1)}}{\partial X_1 \partial \xi_1} = -\alpha_n^2 a_1^2 p_0^{(1)} \quad \text{en } D_1, \quad (7.81)$$

$$\frac{\partial^2 p_1^{(2)}}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1 X_1} = 0 \quad \text{en } D_2. \quad (7.82)$$

Si se multiplica (7.81) por $\cos(\alpha_n)$ y se integra sobre el medio 1 se obtiene

$$\left[\cos(\alpha_n) \left(\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial X_1} \right) \right]_0^{R/h_2} + \left[\sin(\alpha_n) \alpha_n p_1^{(1)} \right]_0^{R/h_2} = -a_1^2 \int_{I_1} \cos(\alpha_n)^2 d\xi_1. \quad (7.83)$$

Al integrar la ecuación (7.82) sobre el medio 2

$$\left[\frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0^{(2)}}{\partial X_1} \right]_{R/h_2}^{l/h_2} + \left[p_1 \alpha_n \sin(\alpha_n) \right]_{R/h_2}^{l/h_2} = 0. \quad (7.84)$$

La suma de la ecuación (7.83) con m veces (7.84) da como resultado

$$\left[\cos(\alpha_n) \left(\frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial X_1} \right) \right]_0^{R/h_2} + m \left[\frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0}{\partial X_1} \right]_{R/h_2}^{l/h_2} = -a_1^2. \quad (7.85)$$

Por la condición (7.31) junto con la periodicidad de p_1 y p_0 se tiene

$$0 = -\alpha_n^2 a_1^2, \quad (7.86)$$

por lo tanto $a_1 \equiv 0$. Así la ecuación (7.81) se reduce a

$$\frac{\partial^2 p_1^{(1)}}{\partial \xi_1^2} + \alpha_n^2 p_1^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 p_0^{(1)}}{\partial \xi_1 \partial X_1} \quad (7.87)$$

con las siguientes condiciones en la interfaz

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0}{\partial X_1} \right) \Big|_{\partial D_1} = m \left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial p_0}{\partial X_1} \right) \Big|_{\partial D_2}, \quad (7.88)$$

$$\|p_1\| = 0. \quad (7.89)$$

Se puede verificar que la solución de este sistema es

$$p_1^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = C(\mathbf{X}) \cos(\alpha_n \xi_1) + \frac{m}{\alpha_n(1-r)} \operatorname{sen}(\alpha_n \xi_1) - \frac{\partial A}{\partial X_1} \xi_1 \cos(\alpha_n \xi_1) \quad \text{en } D_1, \quad (7.90)$$

$$p_1^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = C(\mathbf{X}) - \frac{r}{1-r} \frac{\partial A}{\partial X_1} + \frac{r \xi_1}{1-r} \frac{\partial A}{\partial X_1} \quad \text{en } D_2. \quad (7.91)$$

donde $C(\mathbf{X})$ es una función arbitraria.

Al siguiente orden, ϵ^2 se tienen las siguientes ecuaciones para p_2

$$\frac{\partial^2 p_2^{(1)}}{\partial \xi_1^2} + \alpha_n^2 p_2^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 p_1^{(1)}}{\partial X_1 \partial \xi_1} - \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(1)} - \alpha_n^2 a_2^2 p_0^{(1)} \quad \text{en } D_1, \quad (7.92)$$

$$\frac{\partial p_2^{(2)}}{\partial \xi_1^2} = -2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial X_1} - \nabla_{\mathbf{X}} p_0^{(2)} - p_0^{(2)} \quad \text{en } D_2. \quad (7.93)$$

las condiciones en la interfaz se deducen de (7.39) y (7.40) haciendo la sustitución de los desarrollos (7.23) y (7.24). La solución de este sistema está dada por

$$p_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = D(\mathbf{X}) \cos(\alpha_n \xi_1) + E(\mathbf{X}) \operatorname{sen}(\alpha_n \xi_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial X_1} \cos(\alpha_n \xi_1) - \frac{\partial C}{\partial X_1} \xi_1 \cos(\alpha_n \xi_1) + \frac{1}{2\alpha_n} \mathcal{L}_1 \xi_1 \operatorname{sen}(\alpha_n \xi_1), \quad (7.94)$$

$$p_2^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = G(\mathbf{X}) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 \xi_1^2 - \left(\frac{r}{1-r} \frac{\partial C}{\partial X_1} - \frac{1}{2(1-r)} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \frac{1}{2} (1+r) \mathcal{L}_2 \right) \xi_1, \quad (7.95)$$

donde

$$\mathcal{L}_1 = \left(1 - \frac{2m}{1-r} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - \nabla_{\mathbf{X}}^2 A - \alpha_n^2 a_2^2 A, \quad (7.96)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{2r}{1-r} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \nabla_{\mathbf{X}} A + A, \quad (7.97)$$

$D(\mathbf{X})$, $E(\mathbf{X})$, $G(\mathbf{X})$ son funciones arbitrarias de \mathbf{X} . Para determinar las propiedades efectivas retomamos las relaciones constitutivas (7.18) y (7.19) usando $\alpha = \alpha_n(1 + \epsilon^2 a_2 + \dots)$ en las ecuaciones del medio D_1 .

Se reemplazan $p^{(1)}$ y \mathbf{V} por sus respectivos Ansatz (7.23) y (7.46) en la relación constitutiva (7.19)

para $j = 1$ e igualando las potencias de ϵ se obtiene a cada orden de ϵ^n , $n = 0, 1, 2$

$$\mathbf{V}_0^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_n^2}{P_1^2}\right) p_0^{(1)}, \quad (7.98)$$

$$\mathbf{V}_1^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_n^2}{P_1^2}\right) \left[\nabla_{\xi} p_1^{(1)} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot p_0^{(1)} \right], \quad (7.99)$$

$$\mathbf{V}_2^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_n^2}{P_1^2}\right) \left[\nabla_{\xi} p_2^{(1)} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot p_1^{(1)} \right] + \frac{1}{2} \frac{a_2^2}{P_1^2} \nabla_{\xi} \cdot p_0^{(1)}. \quad (7.100)$$

Para obtener la relación constitutiva del compuesto se integra sobre el medio D_1 la igualdad (7.100) y se suma la integral de (7.48) sobre el medio D_2 . Al considerar $P_1^{-1} \ll 1$ y sustituir las expresiones de $p_0^{(j)}$ y $p_1^{(j)}$ obtenemos las velocidades efectivas:

$$\hat{v}_1 = \frac{m-r}{i\rho_2 c_2 m(1-r)} \frac{\partial \hat{p}}{\partial X_1}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{i\rho_2 c_2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial X_1}. \quad (7.101)$$

De (7.101) tenemos que las densidades efectivas están dadas por

$$\rho_{x_1} = \frac{1-r}{1/\rho_2 - r/\rho_1}, \quad \rho_{x_2} = \rho_2. \quad (7.102)$$

En este caso la densidad en la dirección x_2 es la misma densidad del medio 2. De la relación constitutiva (7.18) y los Ansatz (7.23) y (7.46) se obtiene la siguiente sucesión de relaciones para el medio D_1

$$-i m_1 \rho_2 c_2 \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{V}_0^{(1)} = p_0^{(1)}, \quad (7.103)$$

$$-i m_1 \rho_2 c_2 (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V}_0^{(1)} + \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{V}_1^{(1)}) = p_1^{(1)}, \quad (7.104)$$

$$-i m_1 \rho_2 c_2 (\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{V}_2^{(1)} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V}_1^{(1)}) = \alpha_n^2 p_2^{(1)} + a_2^2 p_0^{(1)}. \quad (7.105)$$

Estas ecuaciones son las mismas que las obtenidas por Smith (2011), es decir, son válidas para cualquier porosidad, P_j .

Enseguida vamos a obtener la compresibilidad efectiva. Primeramente la igualdad (7.104) se integra sobre el medio D_1 :

$$i \alpha_n^2 \int_{I_1} p_2^{(1)} d\xi_1 = m \rho_2 c_2 \left(V_{21} \Big|_0^{R/h_2} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \int_{I_1} \mathbf{V}_1 d\xi_1 \right), \quad (7.106)$$

y se le suma la igualdad correspondiente en el medio D_2 , que es

$$i \int_{I_2} p_0^{(2)} d\xi_1 = i \hat{p} = \rho_2 c_2 \left(V_{21} \Big|_{R/h_2}^{l/h_2} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \int_{I_2} \mathbf{V}_1 d\xi_1 \right), \quad (7.107)$$

donde V_{21} denota la primer componente de la velocidad V_2 . De la continuidad de V_2 en la interfaz se sigue que

$$\hat{\mathbf{v}} = \int_{I_1} \mathbf{V}_1 d\xi_1 = \frac{i}{\rho_2 c_2} \left(\hat{p} + \frac{r}{m} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - \frac{\mathcal{L}_1}{2} \right] \right). \quad (7.108)$$

Al considerar la expresión de \mathcal{L}_1 y las velocidades efectivas (7.101), se obtiene finalmente la siguiente relación constitutiva para el compuesto

$$\hat{p} = \frac{\kappa_2}{i c_2 \rho_2 [m(1-r) + r \alpha_n^2 a_2^2 / 2]} \left\{ \frac{m}{1-r/m} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial X_1} + (m(1-r) + r/2) \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial X_2} \right\}, \quad (7.109)$$

$$= \frac{\kappa_1 \kappa_2}{i c_2 [\kappa_1(1-r) + r \kappa_2 \alpha_n^2 a_2^2 / 2]} \left\{ \frac{m}{m-r} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial X_1} + \left(1-r + \frac{r}{2m}\right) \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial X_2} \right\}. \quad (7.110)$$

A diferencia del caso anterior aquí la compresibilidad efectiva también es anisótropa.

La ecuación homogeneizada se obtiene a partir de las relaciones constitutivas (7.101) y (7.109) quedando de la siguiente forma

$$\frac{m}{m-r} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + [m(1-r) + r/2] \frac{\partial^2 A}{\partial X_2^2} + [m(1-r) + a_2^2 \alpha_n^2 / 2] A(\mathbf{X}) = 0, \quad (7.111)$$

lo cual reescribimos en términos de las densidades de masa de los constituyentes

$$\frac{1}{\rho_1 - r \rho_2} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \left[\frac{r}{2\rho_1} + \frac{1-r}{\rho_2} \right] \frac{\partial^2 A}{\partial X_2^2} + \left[\frac{1-r}{\rho_2} + \frac{a_2^2 (2\pi n)^2}{2\rho_1} \right] A(\mathbf{X}) = 0. \quad (7.112)$$

7.2.2. Observaciones

El laminado de fluidos viscosos estudiado en este capítulo es un metamaterial cuyas propiedades y ecuaciones de movimiento homogeneizadas no dependen de las viscosidades de los fluidos, es decir, son las mismas propiedades y ecuaciones de movimiento que las de un laminado de fluidos ideales. Los casos resonante y no resonante analizados presentan diferentes características las cuales mencionamos a continuación.

- El laminado de fluidos viscosos en el caso no resonante
 - Posee una densidad anisótropa y una compresibilidad isotropa.
 - La densidad en la dirección paralela al laminado es el promedio aritmético de las densidades de los constituyentes.
 - La densidad en la dirección perpendicular al laminado es el recíproco del promedio geométrico de las densidades de los constituyentes.
 - La compresibilidad efectiva es el recíproco del promedio geométrico de las compresibilidades de los constituyentes.

- Los resultados son independientes de la relación entre la capa límite del fluido y el grosor de la lámina.
- El laminado de fluidos viscosos en el caso localmente resonante
 - Posee densidad y compresibilidad anisótropas.
 - La densidad efectiva en la dirección perpendicular al laminado es la densidad del medio 2.
 - Los resultados son válidos si la capa límite del fluido es muy pequeña comparada con el grosor de la lámina.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis se da respuesta al problema fundamental de la teoría de materiales compuestos de predicción de propiedades efectivas de dos clases de compuestos periódicos cuando se conocen las propiedades físicas de sus fases, su fracción de llenado y su microestructura. Se estudian aquellos llamados **compuestos laminados** (CL), cuya celda periódica es una lámina infinita de espesor constante que está formada a su vez por dos o más constituyentes. Éstos pueden ser materiales elásticos o fluidos viscosos. Y los llamados **compuestos reforzados de fibras** (CRF) cuya celda periódica es un prisma recto de sección transversal paralelogramica que cubre todo el espacio. El prisma está formado por dos materiales termoelásticos. Uno, el reforzamiento, llena un cilindro infinito de sección circular y eje de simetría paralelo al eje del prisma; el otro, la matriz, ocupa su complemento en el prisma. Los materiales termoelásticos que estudiamos son auxéticos y/o con coeficiente de expansión térmica (CET) negativo.

Se estudian dos clases de CL: los CL formados por n láminas hechas de materiales elásticos con tres diferentes anisotropías, que están en contacto perfecto, es decir, el desplazamiento y la tracción son continuos a través de la interfaz entre las láminas; y CL constituidos por dos fluidos viscosos. Se considera que la capa límite del fluido es muy pequeña en comparación con el grosor de la lámina y que la velocidad en la dirección del laminado y la presión son continuas en la interfaz entre las láminas.

En el caso de CRF se considera que están constituidos por dos constituyentes isótropos termoelásticos. Aquí también se supone que los materiales están en contacto perfecto.

En los compuestos existen dos escalas de longitud, la microescala asociada a las heterogeneidades del compuesto y la longitud de la onda acústica que se propaga en el medio, la cual se supone menor o igual a la escala macroscópica característica del medio. En los compuestos estudiados las heterogeneidades son muy pequeñas comparadas con la escala característica del

medio por lo cual es posible aplicar métodos de homogeneización para determinar ecuaciones y propiedades efectivas del compuesto. En este trabajo se utilizaron dos técnicas de homogeneización, el método de homogeneización asintótica (MHA) aplicado a los CRF y al CL de fluidos viscosos. La segunda técnica que se utiliza es el método de Backus el cual se aplica al CL de materiales elásticos por su simplicidad. Las propiedades de los laminados también se pueden deducir mediante el MHA pero se eligió el método basado en la idea de Backus porque éste es mucho más sencillo de aplicar.

Compuestos laminados elásticos

Se estudiaron CL de constituyentes elásticos para tres diferentes anisotropías: isotrópica, cúbica y transversalmente isotrópica. Se determinaron las propiedades ingenieriles efectivas usando el método de Backus en la relación constitutiva entre la deformación y el esfuerzo $e = \sigma \epsilon$. Las expresiones que se obtuvieron para las propiedades efectivas de los laminados son expresiones algebraicas sencillas. Se escriben como promedios que involucran las propiedades de las fases y la fracción volumétrica que ocupa cada una de ellas (5.13a) - (5.16a). Una consecuencia inmediata de este hecho es que las propiedades efectivas son independientes del orden en que las láminas son colocadas.

Primeramente discutiremos los resultados obtenidos para CL con materiales de simetría isotrópica. De las expresiones analíticas de los módulos de Young efectivos (5.13b), (5.14b) se deduce que el promedio aritmético de los módulos de Young de los constituyentes es una cota inferior del módulo de Young del compuesto en la dirección perpendicular a la del laminado, es decir, $E_{in} \geq \sum_{i=1}^n E_i V_i$. Así mismo el recíproco promedio geométrico de los módulos de Young es una cota inferior para el módulo de Young del compuesto fuera del plano, esto es, $E_{out} \leq (\sum_{i=1}^n E_i / V_i)^{-1}$. De aquí que estos promedios, también llamados regla de mezclas, no son una buena aproximación en el caso de laminados como usualmente se supone. En cambio, para el módulo de rigidez efectivo en la dirección del laminado y en la dirección perpendicular a éste son el recíproco del promedio geométrico y el promedio aritmético de los módulos de rigidez de los constituyentes, respectivamente.

Las expresiones analíticas de las propiedades efectivas se validaron realizando una comparación con EF. Los valores obtenidos con la fórmula del módulo de Young en la dirección del laminado se compararon con los obtenidos numéricamente mediante tres diferentes instrumentaciones de EF. Una de ellas es la reportada por Kocer et al. (2009), una segunda está basada en la guía general reportada por Berger et al. (2005) la cual fue programada en ANSYS y la tercera es la reportada por Chirima et al. (2009) cuya instrumentación usando ANSYS mostraba errores.

Todos los datos de las dos primeras coinciden perfectamente y están dentro del intervalo de validez de las cotas de Hill que como se sabe son cotas válidas para compuestos bifásicos con cualquier geometría. Es importante señalar que [Kocer et al. \(2009\)](#) modelan laminados con dos constituyentes y los alternan para tener laminados con diferentes número de láminas esto viene a confirmar que las propiedades no dependen del orden en que las láminas se toman sino de la fracción volumétrica total de cada constituyente. La instrumentación de EF de [Chirima et al. \(2009\)](#) deja mucho que desear pues sus cálculos dan valores de módulos de Young y módulos de rigidez que están fuera del intervalo de validez de las cotas de Hill. Lo anterior muestra que diferentes instrumentaciones del mismo problema puede dar resultados diferentes. Las fórmulas analíticas tienen la ventaja sobre el elemento finito que éstas son sencillas y rápidas de calcular.

Se encontraron nuevos resultados, que son contraintuitivos, para CL. Se dedujo el intervalo de fracción volumétrica VE en el cual el compuesto se endurece, relativo al módulo de Young, que puede ser tanto en la dirección del laminado VE_{\parallel} (5.38) y en la dirección perpendicular a él VE_{\perp} (5.40). Es decir, el compuesto resulta más duro que sus constituyentes bajo ciertas condiciones. Estas están en función de los módulos de Young y cocientes de Poisson de las fases. Por otro lado, se determinaron fórmulas para el intervalo de fracción volumétrica VAX, respecto a componentes auxéticos, en el que el compuesto es auxético. Igualmente se tiene VAX_{\parallel} (5.43) y VAX_{\perp} (5.42) para denotar los respectivos intervalos de auxeticidad en el plano paralelo y ortogonal al laminado. La VAX_{\perp} depende de los módulos de Young y de los cocientes de Poisson de los constituyentes. En cambio la VAX_{\parallel} no depende de los módulos de Young. Es importante determinar las ventanas de auxeticidad ya que como sabemos los materiales auxéticos son poco comunes y estos tienen posibles aplicaciones médicas e industriales. Cálculos numéricos muestran que las ventanas de aumento y de auxeticidad pueden ser bastante amplias. También se encontraron intervalos de la fracción volumétrica en los cuales los cocientes de Poisson pueden ser más pequeños que el más pequeño de los constituyentes y más grande que el más grande de ellos, es decir, el compuesto se ensancha o adelgaza en mayor medida que el mayor o en menor medida que sus constituyentes.

Se calculó la indentación de flexibilidad (IF) de un bilaminado de constituyentes isótropos para dos casos. En el primero el indentador y el medio están en contacto sin fricción y en el segundo están en contacto soldado. Para los cálculos se usaron las fórmulas dadas por [Fabrikant \(1988, 1991\)](#) (5.44, 5.48) y los datos obtenidos mediante las fórmulas analíticas de las propiedades ingenieriles efectivas. Los datos obtenidos coinciden con los calculados mediante de EF por [Kocer et al. \(2009\)](#) y estos coinciden. Se observa que si la lámina auxética es mucho más gruesa que la no auxética, la IF es menor, es decir, la penetración del indentador en el laminado disminuye y, por lo tanto, es más difícil deformar el compuesto. Además en el caso límite en el que el grosor de una de las láminas tiende a cero, la IF del bilaminado coincide con la del

respectivo material isótropo.

Se estudiaron CL con dos constituyentes de simetría cúbica. Los ejes de simetría de uno de ellos están rotados un ángulo θ alrededor de la dirección perpendicular al plano con respecto a los ejes de simetría de la segunda lámina. En este caso se determinaron las constantes elásticas efectivas de CL (5.68-5.74). Después se calcularon las propiedades ingenieriles usando la relación entre éstas y las constantes elásticas. Esto se hizo porque estas fórmulas son mucho más fáciles de manejar y hacerlo para las constantes ingenieriles no nos daría mucha más información. Para calcular las propiedades efectivas primero rotamos los ejes de simetría para hacer que coincidieran en los dos laminados. Al rotar los ejes de simetría el material pasa de tener simetría cúbica a tetragonal con respecto a los ejes de la otra lámina. El módulo de Young en la dirección x_1 , el cociente de Poisson del plano x_1x_2 , el módulo de rigidez en la dirección x_1x_2 y S_{16} dependen del ángulo de rotación. El resto de las propiedades es independiente de θ .

Los ejemplos numéricos muestran que el módulo de Young efectivo en la dirección perpendicular a la del laminado y el cociente de Poisson efectivo del plano perpendicular a éste dependen del ángulo θ . En cambio el módulo de Young efectivo en la dirección paralela al laminado y el cociente de Poisson en el plano x_1x_3 no dependen de este ángulo de rotación. Las propiedades efectivas son funciones $\pi/2$ periódicas como función de θ . El módulo de Young en la dirección del plano es creciente como función de θ , es decir, entre mayor es el ángulo el laminado será más duro en la dirección x_3 . El cociente de Poisson muestra ser decreciente como función del ángulo entonces entre mayor sea el ángulo más pequeño será el cociente de Poisson en el plano x_1x_2 .

Para CL con constituyentes transversalmente isótropos se determinaron expresiones analíticas de las propiedades ingenieriles efectivas: módulos de Young, cocientes de Poisson y módulos de rigidez (5.75-5.83). De éstas se deduce que el promedio aritmético de los módulos de Young de los constituyentes en la dirección x_1 es una cota inferior para el módulo de Young efectivo en esa misma dirección (5.84). Al igual que el promedio aritmético de los módulos de Young de los constituyentes en la dirección x_2 es una cota inferior para el módulo de Young en esa misma dirección (5.85). Este compuesto posee simetría ortótropa y sólo uno de sus módulos de Young y dos de sus cocientes de Poisson efectivos dependen de los dos módulos de Young y de los dos cocientes de Poisson de los constituyentes. El cociente de Poisson en el plano x_1x_2 , los módulos de Young en las direcciones x_1 y x_2 que no depende de los cocientes de Poisson en la dirección x_2x_3 de los constituyentes. Por esta razón la ventana de auxeticidad en ese plano se puede dar explícitamente en una fórmula sencilla (5.86). Para determinar las ventanas de auxeticidad en los otros planos es necesario encontrar las raíces de un polinomio de segundo orden cuyos coeficientes dependen de las propiedades de los constituyentes.

Para los tres tipos de constituyentes los CL estudiados pueden presentar un aumento en la

dureza en cualquier dirección aún si las láminas no son auxéticas pero el aumento es más notable si una de las láminas es auxética y este aumento se incrementa conforme la lámina es más auxética. El aumento se puede presentar en un amplio intervalo de fracción volumétrica. También en los tres casos los cocientes de Poisson pueden ser más grandes o más pequeños que los respectivos de los constituyentes.

Compuestos reforzado de fibras

Ahora pasamos a discutir los resultados sobre CRF. Las expresiones para las propiedades efectivas como mencionamos anteriormente se determinaron usando el MHA. Al aplicar este método se obtiene una sucesión de ecuaciones diferenciales parciales elípticas las cuales se resuelven usando la teoría de funciones elípticas doblemente periódicas debidas a Weierstrass. Las expresiones de las propiedades efectivas (4.124, 4.125, 4.206) son más complicadas que las de los laminados. Son fórmulas cerradas pero fácilmente programables. Ellas muestran una dependencia explícita de las propiedades termoelásticas de los constituyentes, la fracción volumétrica que ocupan, la geometría del compuesto (el ángulo de la celda paralelográmica) a través de y de la solución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales en la celda unidad, los llamados los problemas locales. Resolver los problemas lleva a determinar la solución de un sistema infinito regular de ecuaciones lineales para obtener la solución. Las propiedades efectivas dependen de los primeros coeficientes del sistema. Dado que el sistema es regular éste se puede resolver mediante aproximaciones sucesivas. En general para los sistemas obtenidos para los diferentes problemas no se requiere resolver más allá de un sistemas de 12 ecuaciones para que la solución converja.

Se calcularon numéricamente las propiedades efectivas de varios compuestos bifásicos. Observamos que al igual que en el caso de CL en CRF existe un aumento en la dureza con respecto a los constituyentes si uno de ellos es auxético. Esto ocurre en un amplio intervalo de fracción volumétrica. El endurecimiento es mayor si el material auxético es la matriz. Al igual que en CL se observa que los cocientes de Poisson efectivos pueden ser más grandes o más pequeños que los de los constituyentes. Las ventanas de auxeticidad también pueden ser bastante amplias.

Las propiedades ingenieriles muestran dependencia del ángulo de la celda paralelográmica para una fracción volumétrica mayor a aproximadamente 0.2.

En un compuesto formado por constituyentes de la misma dureza y cuya matriz es muy auxética con $\nu_1 = -0.8$ y la fibra tiene $\nu_2 = 0.3$ observamos que el módulo de Young efectivo en la dirección de los cilindros decrece cómo función del ángulo, es decir, el compuesto será más

blando conforme aumente el ángulo de la celda unidad. Lo opuesto sucede con el módulo de Young efectivo en la dirección perpendicular a los cilindros, este crece como función del ángulo. Por lo tanto el compuesto es más duro en esa dirección conforme aumenta el ángulo de la celda. Como ya mencionamos la dependencia del ángulo se aprecia para una fracción volumétrica menor a 0.2. Para una fracción volumétrica menor las propiedades efectivas son muy cercanas entre sí. Esto es físicamente esperable pues para cilindros pequeños la configuración de un compuesto en arreglo paralelogramático con ángulo θ no varía mucho a la de otro compuesto con diferente ángulo.

El aumento en la dureza en varios ejemplos se da para toda fracción volumétrica tanto en la dirección ortogonal como en la paralela a los cilindros para materiales de igual dureza.

Consideramos dos CRF en arreglo hexagonal con constituyentes termoelásticos. En el primero una de las fases es auxética con CET negativo y la otra tiene cociente de Poisson positivo con CET positivo. El segundo compuesto está formado por un material auxético con CET positivo y uno con cociente de Poisson positivo con CTE negativo. Los CET efectivos del segundo compuestos son menores que los del primero. Además el intervalo de fracción volumétrica en el cual estos son negativos es más amplio. En un CRF en el que los módulos de Young de los constituyentes son iguales, uno es muy auxético y el otro casi incompresible. Se observa que si la fibra tiene CET negativo entonces con sólo un 10% de ésta el compuesto también tendrá CET negativo en las dos direcciones principales mientras que si la matriz es la que tiene CET negativo entonces es necesario al menos un 20% para que el compuesto tenga CET negativo.

De los ejemplos de CRF concluimos que si la matriz es auxética con CET positivo y la fibra es convencional con CET negativo las propiedades efectivas son mejores que para cualquier otra combinación de CET y cociente de Poisson.

En general el uso de materiales auxéticos y/o con CET negativo en un compuesto mejora las propiedades de éste tales como dureza, indentación de flexibilidad y expansión térmica. Estas mejoras son más notables conforme las propiedades de los constituyentes se vuelven más negativas.

El hecho de que la combinación de materiales con propiedades negativas con materiales usuales tenga como resultado materiales con propiedades negativas es importante pues como es bien sabido estos materiales son poco usuales. Y se sabe que estos materiales pueden tener importantes aplicaciones. En el caso de materiales auxéticos como protección de fuerzas externas entre otras. En el caso de materiales con CET negativo como control de expansión térmica.

Compuestos laminados de fluidos viscosos

Para el estudio de un laminado de fluidos viscosos se usó el MHA para determinar la ecuación de onda efectiva para la presión y las relaciones constitutivas efectivas entre la presión y la velocidad de fluido. De este estudio se desprende que el medio efectivo es un metamaterial con densidad anisótropa y compresibilidad isótropa. Si las propiedades son tales que en una de las láminas hay un efecto resonante, el metamaterial también presenta una compresibilidad anisótropa. Las propiedades efectivas y la ecuación homogeneizada no dependen de las viscosidades de los fluidos constituyentes, es decir, el laminado posee las mismas propiedades que las de uno constituido por fluidos ideales. En el caso no resonante esto sucede independientemente de la relación entre la capa límite y el grosor de la lámina que se supuso pequeña en un principio.

Problemas abiertos

El estudio de CL se puede extender para constituyentes con otras simetrías como: ortótropa, monoclinica e incluso para materiales totalmente anisótropos usando las expresiones de los bloques efectivos (4.13)–(4.15) del Capítulo 4. Sólo hay que sustituir los valores correspondientes en los bloques de los constituyentes que aparecen en (4.8). Las expresiones de las propiedades efectivas dependerán de un mayor número de parámetros conforme la simetría de los constituyentes aumenta. Las expresiones se pueden programar en MATLAB para realizar un análisis numérico sobre la existencia de endurecimiento del compuesto en las direcciones paralela y ortogonal del laminado, ventanas de endurecimiento y ventanas de auxeticidad del compuesto.

En el caso de CRF el siguiente paso es realizar un análisis de sus propiedades térmicas efectivas para un arreglo diferente al hexagonal, es decir, cuando la celda paralelogramática tiene un ángulo diferente a $\pi/3$, el único caso que se tomó aquí. Un segundo interés con respecto a estos compuestos es considerar como constituyentes materiales con simetría transversalmente isótropa. En especial, tomar una combinación de materiales en la cual uno de ellos no sea auxético en todos los planos y en el otro el material tenga CET negativo pero no en todas las direcciones. Queremos analizar si el comportamiento será similar al caso de constituyentes isótropos, esto es, seguirá existiendo un aumento en los módulos de Young al combinar estos materiales y en qué direcciones este aumento ocurrirá; ver qué tan amplias son las ventanas de auxeticidad y los intervalos donde el CET efectivo será negativo.

Por último, haciendo referencia a los resultados obtenidos para CL de dos fluidos viscosos tanto el caso resonante como en el que no lo es, es de interés combinar, primero, en un trilaminado

periódico formado por dos láminas con constituyentes fluidos viscosos y la tercera una lámina hecha de un medio elástico en contacto perfecto. Un segundo problema de interés es considerar la geometría propia de un CRF, esto es, un cilindro elástico rodeado de dos fluidos viscosos en contacto perfecto. En ambos compuestos habría que analizar el caso de resonancia y el caso sin resonancia usando MHA.

Apéndice A

Condiciones de positividad de C y S

En el Capítulo 2 escribimos las constantes elásticas y de flexibilidad diferentes de cero de los tensor de rigidez y flexibilidad, las restricciones entre ellas debidas a la termodinámica para los materiales con simetría isotrópica, cúbica, transversalmente isotrópica y tetragonal. En este apéndice escribimos la representación matricial de los tensores correspondientes a los materiales y deducimos cómo es que se llega a esas relaciones.

Como dijimos en el Capítulo 2 para la estabilidad del sistema, la energía de deformación, U_e así como la de esfuerzo, U_σ , deben ser positivas, es decir,

$$U_e = e(x)C(x)e(x) > 0, \quad U_\sigma = \sigma(x)S(x)\sigma(x) > 0. \quad (\text{A.1})$$

Para que esto suceda la matriz de rigidez y flexibilidad deben ser definidas positivas. Sabemos que para que una matriz sea definida positiva se deben cumplir una de las siguientes tres condiciones:

- Los menores principales son estrictamente positivos,
- Los determinantes de los menores deben ser positivos,
- Todos los valores propios deben ser positivos.

Vamos a hacer uso de la tercera condición para encontrar las restricciones que deben cumplir las constantes elásticas. Las condiciones para las constantes de flexibilidad son idénticas.

Primeramente escribimos el tensor de rigidez C para un material con simetría isotrópica.

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ & & & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ & & & & & (C_{11} - C_{12})/2 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz los valores propios son $(C_{11} - C_{12})/2$ y C_{11} que deben ser positivos, por lo tanto, las condiciones que deben cumplir las dos constantes independientes son

$$C_{11} - C_{12} > 0, \quad (\text{A.2})$$

$$C_{11} > 0. \quad (\text{A.3})$$

Para materiales con simetría cúbica su representación matricial es

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios asociados a esta matriz son $C_{11} - C_{12}$, $C_{11} + 2C_{12}$ y C_{44} , que deben cumplir las siguientes restricciones:

$$C_{11} - C_{12} > 0, \quad (\text{A.4})$$

$$C_{11} + 2C_{12} > 0, \quad (\text{A.5})$$

$$C_{44} > 0. \quad (\text{A.6})$$

Para un material transversalmente isotrópico con eje de simetría Ox_1 , la matriz de rigidez C está dada como;

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Cuyos valores propios son

$$\begin{aligned} & C_{22} - C_{23}, \\ & (C_{22} - C_{23})/2, \\ & C_{11} + C_{22} + C_{23} \pm \sqrt{[C_{11} - (C_{22} + C_{23})]^2 + 8C_{12}^2}. \end{aligned}$$

Del tercer valor propio tenemos que $[C_{11} - (C_{22} + C_{23})]^2 + 8C_{12}^2 > 0$ para que el valor sea real. Además tenemos la condición $C_{11} + C_{22} + C_{23} \pm \sqrt{[C_{11} - (C_{22} + C_{23})]^2 + 8C_{12}^2} > 0$.

Que se puede escribir como

$$(C_{11} + C_{22} + C_{23})^2 > [C_{11} - (C_{22} + C_{23})]^2 + 8C_{12}^2; \quad (\text{A.7})$$

haciendo la expansión de los cuadrados y agrupando términos se obtiene la desigualdad

$$4(-2C_{12}^2 + C_{11}(C_{22} + C_{23})) > 0. \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto tenemos que las restricciones sobre las constantes deben ser:

$$[C_{11} - (C_{22} + C_{23})]^2 + 8C_{12}^2 > 0, \quad (\text{A.9})$$

$$4(-2C_{12}^2 + C_{11}(C_{22} + C_{23})) > 0, \quad (\text{A.10})$$

$$C_{22} - C_{23} > 0. \quad (\text{A.11})$$

Por último damos la representación del tensor de rigidez C de un material con simetría tetragonal:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son

$$1/2 \left(C_{11} + C_{12} + C_{33} \pm \sqrt{[C_{11} + (C_{12} - C_{33})]^2 + 8C_{13}^2} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$1/2 \left(C_{11} - C_{12} + C_{66} \pm \sqrt{[C_{11} - (C_{12} + C_{66})]^2 + 8C_{16}^2} \right), \quad (\text{A.13})$$

$$C_{44}. \quad (\text{A.14})$$

A fin de que los dos primeros sean números reales, tenemos que

$$[C_{11} + (C_{12} - C_{33})]^2 + 8C_{13}^2 > 0,$$

$$[C_{11} - (C_{12} + C_{66})]^2 + 8C_{16}^2 > 0.$$

Finalmente como los valores propios deben ser positivos, lo cual ocurre siempre que se cumplan las siguientes desigualdades,

$$(C_{11} + C_{12} + C_{33})^2 > [C_{11} + (C_{12} - C_{33})]^2 + 8C_{13}^2; \quad (\text{A.15})$$

$$(C_{11} - C_{12} + C_{66})^2 > [C_{11} - (C_{12} + C_{66})]^2 + 8C_{16}^2; \quad (\text{A.16})$$

se tiene las siguientes desigualdades

$$C_{33}(C_{12} + C_{11}) - 2C_{13} > 0, \quad (\text{A.17})$$

$$(C_{11} - C_{12})C_{66} - 2C_{16}^2 > 0. \quad (\text{A.18})$$

Por lo tanto las restricciones de las constantes elásticas son

$$[C_{11} + (C_{12} - C_{33})]^2 + 8C_{13}^2 > 0, \quad (\text{A.19})$$

$$[C_{11} - (C_{12} + C_{66})]^2 + 8C_{16}^2 > 0. \quad (\text{A.20})$$

$$C_{33}(C_{12} + C_{11}) - 2C_{13} > 0, \quad (\text{A.21})$$

$$(C_{11} - C_{12})C_{66} - 2C_{16}^2 > 0, \quad (\text{A.22})$$

$$C_{44} > 0. \quad (\text{A.23})$$

Apéndice B

Ventanas de auxeticidad

En este apéndice escribimos los coeficientes del polinomio de segundo grado que determinan las ventanas de auxeticidad para laminados con constituyentes transversalmente isotropos. Para el cociente de Poisson ν_{13} tenemos que el polinomio se escribió de la forma

$$P_{13} = A_{13}V_2^2 + B_{13}V_2 + D_{13} \quad (\text{B.1})$$

con

$$A_{13} = \frac{E_1^{(1)}E_1^{(2)}\left(\nu_{12}^{(1)} - \nu_{12}^{(2)}\right)\left[-E_2^{(2)}\left(1 + \nu_{23}^{(1)}\right) + E_2^{(1)}\left(1 + \nu_{23}^{(2)}\right)\right]}{D}, \quad (\text{B.2})$$

$$B_{13} = \frac{-E_1^{(2)}E_2^{(1)}E_2^{(2)}\left(\nu_{12}^{(1)}\right)^2\nu_{12}^{(2)} + E_1^{(1)}\left[E_2^{(1)}E_2^{(2)}\nu_{12}^{(1)}\left(\nu_{12}^{(2)}\right)^2\right]}{D} \quad (\text{B.3})$$

$$+ \frac{E_1^{(1)}E_1^{(2)}\left[E_2^{(2)}\left(\nu_{12}^{(1)} + \nu_{12}^{(1)}\nu_{23}^{(1)} - \nu_{12}^{(2)}\nu_{23}^{(1)}\right) + E_2^{(1)}\left(\nu_{12}^{(2)}\left(1 + \nu_{23}^{(2)}\right) - \nu_{12}^{(1)}\left(2 + \nu_{23}^{(2)}\right)\right)\right]}{D} \quad (\text{B.4})$$

$$D_{13} = \left(E_1^{(1)}E_2^{(1)}\nu_{12}^{(1)}\right) / \left(E_1^{(1)} - E_2^{(1)}\left(\nu_{12}^{(1)}\right)^2\right) \quad (\text{B.5})$$

Para ν_{23} el polinomio es

$$P_{23} = A_{23}V_2^2 + B_{23}V_2 + D_{23} \quad (\text{B.6})$$

donde

$$A_{23} = \left[-a + b + c - (E_1^{(2)})^2(E_1^{(1)}(\nu_{23}^{(1)} - \nu_{23}^{(2)})) + E_2^{(1)}(\nu_{12}^{(1)})^2(1 + \nu_{23}^{(2)}) + E_1^{(1)}(\nu_{23}^{(1)} - \nu_{23}^{(2)})\right] D^{-1} \quad (\text{B.7})$$

$$B_{23} = \left[a - b + c + (E_1^{(2)})^2(E_2^{(1)}\left(\nu_{12}^{(1)}\right)^2 + E_1^{(1)}\nu_{23}^{(1)}) + E_1^{(1)}(2\nu_{23}^{(1)} - \nu_{23}^{(2)})\right] D^{-1} \quad (\text{B.8})$$

$$D_{23} = \left[(E_1^{(1)})^2\nu_{23}^{(1)}\right] / \left[E_1^{(1)} - E_2^{(1)}\left(\nu_{12}^{(1)}\right)^2\right] \quad (\text{B.9})$$

donde

$$a = \left(E_1^{(1)}\right)^2 E_2^{(2)} \left(v_{12}^{(2)}\right)^2 \left(1 + v_{23}^{(1)}\right), \quad (\text{B.10})$$

$$b = E_1^{(1)} E_1^{(2)} E_2^{(2)} v_{12}^{(1)} \left(v_{12}^{(2)} 1 + v_{23}^{(1)}\right), \quad (\text{B.11})$$

$$c = E_2^{(1)} v_{12}^{(1)} v_{12}^{(2)} \left(1 + v_{23}^{(2)}\right), \quad (\text{B.12})$$

$$D = \left(E_1^{(1)} - E_2^{(1)} (v_{12}^{(1)})^2\right) \left(E_1^{(2)} - E_2^{(2)} (v_{12}^{(2)})^2\right). \quad (\text{B.13})$$

Bibliografía

- Alderson, A. and Alderson, K. L. (2007). Auxetic materials, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* **221**(4): 565–575.
- Alderson, K. L., Fitzgerald, A. and Evans, K. E. (2000). The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene., *Materials Science* **35**: 4039–4047.
- Alderson, K. L., Pickles, A. and Evans, K. (1994). Auxetic polyethylene: The effect of a negative Poisson's ratio on hardness., *Acta Metallica Materials* **42**: 2261–2266.
- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering, *Journal of Geophysical Research* **67**: 4427–4440.
- Bakhvalov, A. N. and Panasenko, G. (1989). *Homogenisation: Averaging Process in Periodic Media*, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Ballato, A. (2010). Poisson's ratio of auxetic and other technological materials, *IEEE transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* **57**: 7–15.
- Bensoussan, A., Lions, J. and Papanicolau, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam: North-Holland.
- Berger, H., Kari, S., Gabbert, U., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J. and Guinovart-Díaz, R. (2005). Calculation of effective coefficients for piezoelectric fiber composites based on a general numerical homogenization technique, *Composite Structures* **71**: 397–400.
- Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Otero-Hernández, J. A. and Rodríguez-Ramos, R. (1997). Electromechanical properties of continuous fibre-reinforced piezoelectric composites, *Mechanics of Composite Materials* **33**(5): 475–482.
- Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Sabina, F. J. and Rodríguez-Ramos, R. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents II. piezoelectric and square symmetry, *Mechanics of Materials* **33**(4): 237–248.

- Bravo-Castillero, J., Otero, J. A., Rodríguez-Ramos, R. and Bourgeat, A. (1998). Asymptotic homogenization of laminated piezocomposite materials, *International Journal of Solids and Structures* **35**: 527 – 541.
- Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Mechkour, H., Otero, J. A., Hernández-Cabanas, J., L. M. Sixto, R. G. D. and Sabina, F. J. (2009). Homogenization and effective properties of periodic thermomagnetoelastic composites, *Journal of Mechanics and Structures* **4**(5): 819–836.
- Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Mechkour, H., Otero, J. A. and Sabina, F. J. (2008). Homogenization of magneto-electro-elastic multilaminated materials, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **61**: 312–332.
- Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13**(4): 223–227.
- Burns, T. and Cherkaev, A. (1997). Optimal distribution of multimaterial composites for torsional beams, *Structural optimization* **13**(1): 4–11.
- Chan, N. and Evans, K. (1997). Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams, *Journal of Materials Science* **32**: 5725–5736.
- Cherkaev, A. V. (2000). *Variational Methods for Structural Optimization*, Berlin: Springer-Verlag.
- Chirima, G. T., Zeid, K. M., Ravirala, N., Alderson, K. L. and Alderson, A. (2009). Numerical and analytical modelling of multilayer adhesive-film interface systems, *Physica Status Solidi B* **249**: 2072–2082.
- Choi, J. and Lakes, R. (1992). Non-linear properties of metallic cellular materials with a negative poisson's ratio, *Journal of Materials Science* **27**(19): 5375–5381.
- Christensen, R. M. (1979). *Mechanics of Composite Materials*, Malabar, Florida: Krieger Publishing Company.
- Cole, K. C., Noel, D. and Hechler, J. J. (1988). Applications of diffuse reflectance fourier transform infrared spectroscopy to fiber-reinforced composites, *Polymer Composites* **9**(6): 395–403.
- Einstein, A. (1905). Eine neue bestimmung der molekuldimensionen (german). A new determination of molecular dimensions., *Annalen der Physik* **19**: 289–306.
- Evans, K. E. and Alderson, A. (2000). Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking!, *Advanced Materials* **12**(9): 617–628.

- Evans, K. E., Nkansah, M. A. ., Hutchinson, I. J. and Rogers, S. C. (1991). Molecular network design, *Nature* **353**: 124.
- Fabrikant, V. I. (1988). Elastic field around a circular punch, *Journal of Applied Mechanics* **55**: 604–610.
- Fabrikant, V. I. (1991). *Mixed Boundary Value Problems of Potential Theory and their Applications in Engineering*, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Ge, Z., Hu, H. and Liu, Y. (2013). A finite element analysis of a 3d auxetic textile structure for composite reinforcement, *Smart Materials and Structures* **22**(8).
- Glazzard, M. and Breedon, P. (2014). Weft-knitted auxetic textile design, *Physica Status Solidi B* **251**(2): 267–272.
- Grima, J. N., Ellul, B., Attard, D., Gatt, R. and Attard, M. (2010). Composites with needle-like inclusions exhibiting negative thermal expansion: A preliminary investigation, *Composites Science and Technology* **70**(16): 2248 – 2252.
- Grima, J. N., Farrugia, P. S., Gatt, R. and Zammit, V. (2007). A system with adjustable positive or negative thermal expansion, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* **463**: 1585–1596.
- Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R. and Sabina, F. J. (2001). Closed-form expressions of fibre-reinforced constituents I: Elastic and hexagonal symmetry., *Journal of the Mechanics and Physics Solids* **49**(7): 1445–1462.
- Guinovart-Díaz, R., López-Realpozo, J., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., **Ramírez, M.**, Camacho-Montes, H. and Sabina, F. J. (2011). Influence of paralelogram cell in the axial behavior of fibrous composite., *International Journal of Engineering Science* **49**: 75–84.
- Guinovart-Díaz, R., Rodriguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., Sabina, F. J. and Maugin, G. A. (2005). Closed-form thermoelastic moduli of a periodic three-phase fiber-reinforced composite, *Journal of Thermal Stresses* **28**: 1067–1093.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **10**(4): 343 – 352.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **11**(2): 127 – 140.
- Hershey, A. (1954). The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME* **21**(3): 236–240.

- Hill, R. (1952). The elastic behavior of a crystalline aggregate, *Proceedings of the Physical Society A* **65**: 249–355.
- Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **11**: 357–372.
- Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13**(4): 213 – 222.
- Homand-Etienne, F. and Houpert, R. (1989). Thermally induced microcracking in granites: characterization and analysis, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* **26**(2): 125 – 134.
- Howell, B., Prendegast, P. and L., H. (1994). Examination of negative Poisson's ratio materials, *Applied Acoustics* **43**: 141–148.
- Hsieh, C. L. and Tuan, W. H. (2005). Poisson's ratio of two-phase composite, *Materials Science and Engineering A* **396**: 202–205.
- Kachanov, M., Shafiro, B. and Tsukrov, I. (2003). *Handbook of Elasticity Solutions*, Dordrecht, Kluwer.
- Kanaun, S. and Levin, V. (2008). *Self-Consistent Methods for Composites Vol.1: Static Problems*, Springer Netherlands.
- Kelly, A., Stearn, R. and McCartney, L. (2006). Composite materials of controlled thermal expansion, *Composites Science and Technology* **66**(2): 154 – 159. Experimental Techniques and Design in Composite Materials Experimental Techniques and Design in Composite Materials.
- Kerner, E. (1956). The elastic and thermo-elastic properties of composite media, *Proceedings of the Physical Society. Section B* **69**(8): 808.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B. and Sanders, J. V. (1982). *Fundamentals of Acoustics*, New York: Wiley.
- Kocer, C., Mckenzie, D. and Mckenzi, D. R. (2009). Elastic properties of material composed of alternating layers of negative and positive poisson's ratio, *Materials Science and Engineering A* **505**: 111–115.
- Kroner, E. (1958). Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls, *Zeitschrift fur Physik* **151**(4): 504–518.
- Lakes, R. (1987a). Foam structure with negative Poisson's ratio, *Science* **235**: 1038–1040.

- Lakes, R. (1987b). Negative poisson's ratio materials, *Science* **238**: 551.
- Lim, T. (2011). Coefficient of thermal expansion of stacked auxetic and negative thermal expansion laminates, *Physica Status Solidi B* **248**(1): 140–147.
- Lim, T. C. (2009). Out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates, *European Journal of Mechanics A/Solids* **28**: 752–756.
- Lim, T. C. (2010). In-plane stiffness of semi-auxetic laminates, *Journal of Engineering Mechanics* **136**: 1176–1180.
- Lim, T. C. (2013). Corrigendum to out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates [Eur. J. Mech. A/Solid. 28 (4) (2009) 752-756], *European Journal of Mechanics A/Solids* **37**: 37–380.
- Lim, T. C. and Acharya, U. R. (2010). Counterintuitive modulus from semi-auxetic laminates, *Physica Status Solidi B* **248**: 60–65.
- Lipsett, A. W. and Beltzer, A. (1988). Reexamination of dynamic problems of elasticity for negative Poisson's ratio, *Journal of the Acoustical Society of America* **84**: 2179–2186.
- Liu, Y. and Hu, H. (2010). A review on auxetic structures and polymeric materials, *Scientific Research and Essays* **5**: 1052–1063.
- Loureuro, M. A. and Lakes, R. S. (1997). Scale-up of transformation of negative Poisson's ratio foam : Slabs, *Cellular polymers* **16**(5): 349–363.
- Love, A. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4 edn, New York : Dover Publications.
- Matthews, F., Davies, G., Hitchings, D. and Soutis, C. (2000). *Finite Element Modelling of Composite Materials and Structures*, Boca Raton Florida: CRC Press.
- Maxwell, J. C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, United Kingdom: Clarendon Press. Article 314.
- Meguid, S. and Kalamkarov, A. (1994). Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure, *International Journal of Solids and Structures* **31**(3): 303–316.
- Miller, W., Mackenzie, D. S., Smith, C. and Evans, K. E. (2008). A generalised scale-independent mechanism for tailoring of thermal expansivity: Positive and negative., *Mechanics of Materials* **40**: 351–361.
- Milton, G. W. (2002). *The Theory of Composites*, Cambridge: University Press.

- Namburi, A., Rao, H. and Thiagarajan, C. (2010). Composite material for turbine support structure. US Patent 7,824,763.
- Nowinski, J. L. (1978). *Theory of Thermoelasticity with Applications*, Alphen Aan der Rijn, the Netherlands : Sijthoff & Noordhoff.
- Nur, A. and Simmons, G. (1969). The effect of saturation on velocity in low porosity rocks., *Earth and Planetary Science Letters* **7**: 183–193.
- Parton, V. Z. and Kudryavtsev, B. A. (1993). *Engineering Mechanics of Composite Structures*, Boca Raton Florida: CRC Press.
- Paul, B. (1960). Prediction of elastic constant of multiphase materials, *Transactions of The Metallurgical Society of AIME* **218**: 36–41.
- Pobedria, B. (1984). *Mecanica de Materiales Compuestos*, Universidad Estatal de Moscú, (en ruso).
- Postma, G. W. (1955). Wave propagation in a stratified medium, *Geophysics* **20**: 780–806.
- Ramírez, M.** , Nava-Gomez, G. G., Sabina, F. J., Camacho-Montes, H., Guinovart-Diaz, R., Rodriguez-Ramos, R. and Bravo-Castillero, J. (2012). Enhancement of Young's moduli and auxetic windows in laminates with isotropic constituents, *International Journal of Engineering Science* **58**: 95–114.
- Ramírez, M.** and Sabina, F. J. (2012). Correction to “ out-of-plane modulus of semi-auxetic laminates by T. C. Lim. Eur. J. Mech. A/Sol. 28 (2009) 752-756”, *European Journal of Mechanics A/Solids* **32**: 59–61.
- Ravirala, N., Alderson, A., Alderson, K. and Davies, P. (2005a). Auxetic polypropylene films, *Polymer Engineering Science* **45**(4): 517–528.
- Ravirala, N., Alderson, A., Alderson, K. and Davies, P. (2005b). Expanding the range of auxetic polymeric products using a novel meltspinning route, *Physica Status Solidi B* **242**(3): 653–664.
- Rayleigh, L. (1892). On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium, *Philosophical Magazine* **3**: 481–502.
- Reyes-Ayona, E., Torrent, D. and Dehesa, J. S. (2012). Homogenization theory for periodic distributions of elastic cylinders embedded in a viscous fluid, *The Journal of the Acoustical Society of America* **132**(4): 2896–2908.

- Rodríguez-Ramos, R., Otero, J. A., Bravo-Castillero, J. and Sabina, F. J. (1996). Electromechanical properties of laminated piezoelectric composites, *Mechanics of Composite Materials* **32**: 410–417.
- Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F. J., Guinovart-Díaz, R. and Bravo-Castillero, J. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents I. Elastic and square symmetry, *Mechanics of Materials* **33**(4): 223 – 235.
- Sabina, F. J., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J. and Guinovart-Díaz, R. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents II: Piezoelectric and hexagonal symmetry, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **49**(7): 1463 – 1479.
- Sabina, F. J. and Willis, J. R. (1975). Scattering of SH waves by a rough half-space of arbitrary slope, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **42**(2): 685–703.
- Scarpa, F., Bollough, W. A. and Lumley, P. (2004). Trends in acoustic properties of iron particle seeded auxetic polyurethane foam., *Journal of Mechanical Engineering Science* **128**: 241–244.
- Shokrieh, M., Daneshvar, A. and Akbari, S. (2014). Reduction of thermal residual stresses of laminated polymer composites by addition of carbon nanotubes, *Materials & Design* **53**: 209 – 216.
- Sleight, A. W. (1998). Negative thermal expansion materials, *Current Opinion in Solid State and Materials Science* **3**(2): 128 – 131.
- Smith, J. D. (2011). Application of the method of asymptotic homogenization to an acoustic metafluid, *Proceedings of the Royal Society A* **467**: 3318–3331.
- Suquet, P. a. (1987). *Elements of Homogenization for Inelastic Solids Mechanics*. In: Sánchez-Palencia, E., Zaoui, A. *Homogenization Techniques for Composite Media.*, Berlin: Springer.
- Ting, T. (2004). Very large Poisson's ratio with a bounded transverse strain in anisotropic elastic materials, *Journal of Elasticity* **77**(2): 163–176.
- Torquato, S. (2001). *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties.*, Berlin: Springer-Verlag.
- Veronda, D. and Westmann, R. (1970). Mechanical characterization of skin-finite deformations, *Journal of Biomechanics* **3**(1): 111 – 124.

- Wang, Y. C. and Lakes, R. (2002). Analytical parametric analysis of the contact problem of human buttocks and negative Poisson's ratio foam cushions, *International Journal of Solids and Structures* **39**(18): 4825 – 4838.
- Wei, G. and Edwards, S. F. (1998). Auxeticity windows for composites, *Physica A* **258**: 5–10.
- Wu, Y., Wang, M., Chen, Z., Ma, N. and Wang, H. W. (2013). The effect of phase transformation on the thermal expansion property in Al/ZrW₂O₈ composites, *Journal of Materials Science* **48**(7): 2928–2933.
- Yang, S., Qi, C., Wang, D., Gao, R., Hu, H. and Shu, J. (2013). A comparative study of ballistic resistance of sandwich panels with aluminum foam and auxetic honeycomb cores, *Advances in Mechanical Engineering* **2013**: 1–15.
- Yang, W., Li, Z. M., Shi, W., Xie, B. and Yang, M. (2004). Review on auxetic materials., *Journal of Materials Science* **39**: 3269–3279.