UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Teoría tau-inclinante

Tesis

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

Martínez González Luis Armando

DIRECTOR DE LA TESIS

Mendoza Hernández Octavio
Instituto de Matemáticas, UNAM.

Ciudad de México, Abril 2017.

Introducción

Las álgebras de conglomerado fueron concebidas por Fomin y Zelevinsky en [FZ02], como una herramienta para estudiar la positividad total y bases canónicas duales en la Teoría de Lie. Sin embargo, la teoría de álgebras de conglomerado ha adquirido vida propia, por sus conexiones y aplicaciones que han sido descubiertas en diversas áreas de las matemáticas, tales como, teoría de representaciones de álgebras [Ke10], teoría de Techmüller [FG06], geometría tropical [YU15], sistemas integrales [FZ07] y geometría de Poisson [GSV10].

Hablando informalmente, un álgebra de conglomerado A de rango n es un tipo de subanillo de $\mathbb{Q}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$. A diferencia de la mayoría de los anillos conmutativos, un álgebra de conglomerado no tiene un conjunto explícito de generadores y relaciones. Dichos generadores y relaciones, se definen recursivamente a partir de una semilla, que es un conjunto de n generadores llamados variables de conglomerado junto con una matriz de intercambio. A partir de la semilla y la matriz de intercambio se utiliza un proceso iterativo llamado mutación para producir el resto de las variables de conglomerado. En particular, cada variable de conglomerado nueva es un cociente de las variables de conglomerado iniciales. El álgebra de conglomerado es el subanillo de $\mathbb{Q}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ generado por todas las variables de conglomerado. El conjunto de variables de conglomerado tiene estructura de complejo simplicial, llamado complejo de conglomerado.

Los conglomerados están relacionados entre sí por transformaciones birracionales (llamadas mutaciones) definidas de la siguiente forma: para cada conglomerado $\mathbf{x}$ y cada variable de conglomerado $x \in \mathbf{x}$, existe otro conglomerado $\mathbf{x}' := (\mathbf{x} - \{x\}) \cup \{x'\}$, donde la nueva variable de conglomerado x' esta determinada por la siguiente relación de intercambio

$$xx' = y^+ M^+ + y^- M^-,$$

donde y^+ y y^- pertenecen a un semicampo de coeficientes y M^+ y M^- son monomios en los elementos de $\mathbf{x} - \{x\}$. Una de las principales características de la mutación es que es idempotente. En la clase de álgebras de conglomerado, hay dos dinámicas en juego en las relaciones de intercambio: la de los monomios y la de los coeficientes, ambos codificados en la matriz de intercambio.

La mutación da lugar a un carcaj, cuyos vértices son las semillas y las flechas entre ellas están inducidas por sus respectivas mutaciones. Uno de los teoremas fundamentales de la teoría de conglomerado, que la relaciona con la teoría de representaciones es el siguiente: Si A es un álgebra de conglomerado, entonces A tiene una cantidad finita de conglomerados, si y sólo si, el carcaj asociado es una gráfica Dynkin (ver [FZ03]).

Otro concepto esencial en la teoría de álgebras de conglomerado es el carcaj de mutación que se define como sigue: Sea Q un carcaj finito y conexo sin lazos ni 2-ciclos. Para cada vértice i de Q, definimos a partir de Q un nuevo carcaj $\mu_i(Q)$ sin lazos ni 2-ciclos, llamado mutación de Q, de la siguiente forma:

a) para cualquier par de flechas $a : j \to i$ y $b : i \to k$ en Q, creamos una nueva flecha $[ba] : j \to k$,

b) se invierten todas las flechas que comiencen o terminen en i,

c) se elimina un conjunto maximal disjunto de 2-ciclos.

Una forma de estudiar a las álgebras de conglomerado es vía la categorificación de dichas álgebras. Una categorificación de dichas álgebras consiste en encontrar una buena categoría (de módulos, triangulada, etc) $\mathcal{C}$, una clase $\mathcal{X}$ de familias x, todas con el mismo número de elementos, de objetos inescindibles en $\mathcal{C}$ y un proceso ξ que permita pasar de una familia x a otra x' en $\mathcal{X}$. La idea es que $\mathcal{X}$ modele conjuntos de conglomerado, y ξ a la mutación de conjuntos de conglomerado.

En la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de Artin, los módulos inescindibles que son sumandos directos de los pares τ-inclinantes de soporte tienen un comportamiento similar a las variables de conglomerado, ya que los pares τ-inclinantes de soporte tienen el mismo rango que el rango del grupo de Grothendieck del álgebra y hay una operación de mutación. Esto juega un papel importante en la categorificación de álgebras de conglomerado. Lo anterior ha sido una fuerte motivación para el uso de los módulos τ-rígidos, los cuales fueron introducidos por Auslander y Smalø a principios de los años ochenta y son generalizaciones de los módulos inclinantes parciales. También en la teoría inclinante de conglomerado, donde la noción de módulo τ-rígido aparece naturalmente en conexión con los módulos sobre álgebras inclinadas 2-Calabi-Yau.

Para que la mutación siempre sea posible, en la clase de los módulos inclinantes, se tiene que agrandar la clase de módulos inclinantes. Esto es logrado mediante la introducción de módulos τ-inclinantes de soporte.

El Capítulo 1, de ésta tesis, comienza con definiciones y resultados sobre el “folklore” en categorías Krull-Schmidt, pares de torsión, el radical de una categoría, entre otras nociones (ver [Kr15]). La introducción de par de torsión es vital, ya que, como se discutirá a lo largo de la tesis, nos proporcionará una manera de estudiar la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de Artin y una categoría triangulada de Artin a través de las sucesiones exactas y los triángulos distinguidos, respectivamente. También se discuten los módulos τ-rígidos.

En el capítulo 2, se estudian los módulos τ-inclinantes de soporte vistos como la categorificación de los conglomerados en la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de Artin. Se introduce el concepto de módulo τ-inclinante de soporte y pares τ-inclinantes de soporte. Se demuestra la biyección entre las clases de torsión funtorialmente finitas y las clases de isomorfismo de módulos τ-inclinantes de soporte; así como también, varios resultados compatibles con la teoría inclinante clásica, como la completación de Bongartz, la caracterización de módulos τ-inclinantes, entre otros. Se presenta el carcaj de mutación, el cual se puede representar como un carcaj de Hasse y nos sirve para saber, entre otras cosas, si un álgebra admite un número finito de módulos τ-rígidos inescindibles (ver [AIR14]).

En el capítulo 3 dirigimos nuestra atención a las categorías trianguladas de Artin y a sus subcategorías silting (ver [AI12]). Una de las principales características de las subcategorías silting, es que nos permiten estratificar la categoría triangulada a través de la autoequivalencia. Otra propiedad importante, de las subcategorías silting, es que permiten una categorificación de los conglomerados en las categorías trianguladas de Artin. Por otro lado, damos una relación que hay entre los complejos silting de 2-términos de la categoría homotópica sobre los módulos proyectivos finitamente generados y los módulos τ-inclinantes de soporte. Usando la relación anterior, se pueden probar algunos resultados ya conocidos de los módulos τ-inclinantes de soporte, como por ejemplo: todos los complejos silting de 2-términos tienen el mismo rango y la completación de Bongartz. Cabe destacar que dicha relación no sólo se ocupa en la teoría silting, sino que también para la caracterización de las álgebras τ-rígidas finitas (ver [AIR14]).

En el capítulo 4, introducimos la noción de subcategoría n-inclinante de conglomerado en una categoría triangulada de Artin (ver [IY08]) y el funtor de Serre, que son el análogo triangulado de las subcategorías n-maximales ortogonales. En este capítulo, se exhibe la existencia de n-triángulos de Auslander Reiten en una subcategoría n-inclinante de conglomerado; así como también, la existencia de una equivalencia de un cociente de una categoría triángulada de Artin sobre una subcategoría n-inclinante de conglomerado y una categoría abeliana. También se establece la siguiente biyección: sea $X \in \mathcal{C}$ un objeto 2-inclinante de conglomerado. Entonces, hay una biyección entre los objetos 2-inclinantes de conglomerado de $\mathcal{C}$ y los módulos τ-inclinantes de soporte sobre el álgebra opuesta de endomorfismos de X. Después veremos la importancia de esta biyección, con sus consecuencias importantes, entre las cuales está que todos los objetos 2-inclinantes de conglomerado tienen el mismo rango (ver [AIR14]).

Por último, anexamos un apéndice donde resumimos varios resultados fundamentales sobre la teoría de representaciones de álgebras, categorías trianguladas, categorías de funtores, entre otros (ver [ARS95], [ASS06], [GM03], [Au74] y [Au74II]).

Índice general

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este primer capítulo introducimos conceptos y terminología fundamentales para el estudio de esta tesis, como lo son la noción del radical de una categoría, categoría Krull-Schmidt, módulo τ-rígido y la relación entre pares de torsión y módulos inclinantes.

En este capítulo, todas las subcategorías serán plenas y los anillos son asociativos con unidad.

1.1. Categorías Krull-Schmidt

En esta sección, $\mathcal{C}$ denotará una R-categoría aditiva.

El objetivo de esta sección es introducir las categorías Krull-Schimdt y dar una caracterización de ellas. Para un anillo R, usaremos ciertas notaciones básicas que pueden consultarse en la sección de notación y algunas definiciones en el apéndice, también se puede consultar el índice.

Definición 1.1.1. Decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathbf{Krull-Schmidt}$ si

$$X = \oplus_{i=1}^{n} X_i \qquad \forall\ X \in \mathcal{C} - \{0\},$$

donde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ es un anillo local $\forall\ i \in \{1,\ \cdots,\ n\}$.

El Corolario 1.1.17 nos da una fuente inagotable de ejemplos.

Notación 1.1.2. *Sean R un anillo. Denotamos por* :

- $\operatorname{mod}(R)$ *a la categoría de R-módulos finitamente generados.*
- $\operatorname{proj}(R)$ *a la categoría de R-módulos proyectivos finitamente generados.*

Notación 1.1.3. *Sean R un anillo y $M \in \operatorname{mod}(R)$. Denotamos por* :

- $\operatorname{rad}(M) := \cap\{N \leq M \mid N \textit{ es maximal}\}$.
- $\operatorname{top}(M) := M/\operatorname{rad}(M)$.

Proposición 1.1.4. *Sea R un anillo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $R = \oplus_{i=1}^{n} P_i$, *donde* $\operatorname{End}_R(P_i)$ *es un anillo local.*

b) $\operatorname{top}(R)$ *es semisimple y los idempotentes de* $\operatorname{top}(R)$ *se levantan a* R.

c) $\operatorname{proj}(R)$ *es una clase cubriente en* $\operatorname{mod}(R)$.

Demostración. Ver [Wi91, 42.6]. □

Definición 1.1.5. Sea R un anillo. Decimos que R es **semiperfecto** si satisface alguna de las condiciones equivalentes de la Proposición 1.1.4.

Ejemplo 1.1.6. Un anillo artiniano a izquierda es semiperfecto.

Ver [ARS95, Teorema I.4.2].

Notación 1.1.7. *Sea R un anillo semiperfecto y $M \in \operatorname{mod}(R)$. Denotamos por* $\mathrm{P}_0(M)$ *a la cubierta proyectiva de M.*

Notación 1.1.8. *Sea $X \in \mathcal{C}$. Denotamos por $Y \mid X$ si existe $Z \in \mathcal{C}$ tal que $Y \oplus Z = X$.*

Lema 1.1.9. *Sean R un anillo semiperfecto y $P \in \operatorname{proj}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $\operatorname{top}(P)$ *es semisimple.*

b) Si $P \in \operatorname{ind}(R)$, *entonces* $\operatorname{top}(P)$ *es simple.*

Demostración. *a*) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \mid R^n$. Dado que el funtor top es aditivo tenemos que

$$\operatorname{top}(P) \mid \operatorname{top}(R^n) = \operatorname{top}(R)^n,$$

como $\operatorname{top}(R)$ es semisimple, concluimos que $\operatorname{top}(P)$ es semisimple.

b) Supongamos que $P \in \operatorname{ind}(R)$ y $\operatorname{top}(P) = S_1 \oplus S_2$. Puesto que

$$P = \mathrm{P}_0(\operatorname{top}(P)) = \mathrm{P}_0(S_1) \oplus \mathrm{P}_0(S_2),$$

tenemos que $\mathrm{P}_0(S_1) = 0$ o bien $\mathrm{P}_0(S_2) = 0$. Por lo que $S_1 = 0$ o bien $S_2 = 0$. $\square$

Definición 1.1.10. Decimos que los **idempotentes se escinden** en $\mathcal{C}$ si $\forall$ $X \in \mathcal{C}$ y $\forall$ $\phi = \phi^2 \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X)$, existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que $gf = \phi$ y $fg = 1_Y$.

Notación 1.1.11. *Sea $X \in \mathcal{C}$. Denotamos por*

$$\operatorname{add}(X) := \{Y \in \mathcal{C} \mid \exists\ Z \in \mathcal{C} \textit{ tal que } Y \oplus Z = X^n \textit{ para algún } n \in \mathbb{N}^+\}.$$

El siguiente resultado es conocido como el **proceso de proyectivización**.

Proposición 1.1.12. *Sean $X \in \mathcal{C}$ y $\Gamma := \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X)^{op}$. Entonces, el* **funtor de evaluación***,*

$$\mathrm{e}_X := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \operatorname{add}(X) \to \operatorname{proj}(\Gamma),$$

es fiel y pleno. Más aún, si los idempotentes se escinden en $\mathcal{C}$. Entonces, el funtor de evaluación es una R-equivalencia de categorías.

Demostración. Veamos que e_X está bien definido. Sea $X' \in \operatorname{add}(X)$. Así, existe $X'' \in \mathcal{C}$ tal que $X' \oplus X'' = X^n$. Dado que el funtor e_X es aditivo, tenemos que

$$\mathrm{e}_X(X') \oplus \mathrm{e}_X(X'') = \mathrm{e}_X(X' \oplus X'') = \Gamma^n,$$

por lo que $\mathrm{e}_X(X') \in \operatorname{proj}(\Gamma)$.

Ahora, veamos que el funtor e_X es fiel y pleno. En efecto, sean $Y,\ Z \in \operatorname{add}(X)$

y $Y \oplus W = X^m$. Veamos que $\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{e}_X(X^m), \mathrm{e}_X(Z)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m, Z)$. Consideremos los siguientes isomorfismos de

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{e}_X(X^m), \mathrm{e}_X(Z)) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma^m, \mathrm{e}_X(Z)) \cong \mathrm{e}_X(Z)^m \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m, Z).$$

Luego, tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{e}_X(Y), \mathrm{e}_X(Z)) \oplus \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{e}_X(W), \mathrm{e}_X(Z)) &\cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{e}_X(X^m), \mathrm{e}_X(Z)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^m, Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z).\end{aligned}$$

Por lo que e_X es fiel y pleno.

Supongamos que los idempotentes se escinden en $\mathcal{C}$. Sea $P \in \mathrm{proj}(\Gamma)$, con lo cual existe $e^2 = e \in \mathrm{End}_\Gamma(\Gamma^n)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Gamma^n \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Gamma^n \\ & P, \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

y $\pi\iota = 1_P$. Dado que $\mathrm{e}_X : \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^n) \to \mathrm{End}_\Gamma(\Gamma^n)$ es un isomorfismo de anillos, existe $u^2 = u \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X^n)$ tal que $\mathrm{e}_X(u) = e$. Dado que los idempotentes se escinden en $\mathcal{C}$, existen $\pi' : X^n \to Y$ y $\iota' : Y \to X^n$ tales que $u = \iota'\pi'$ y $1_Y = \pi'\iota'$. Veamos que $\mathrm{e}_X(Y) \cong P$. En efecto, consideremos $\pi\mathrm{e}_X(\iota') : \mathrm{e}_X(Y) \to P$ y $\mathrm{e}_X(\pi')\iota : P \to \mathrm{e}_X(Y) \to P$. Entonces,

$$\mathrm{e}_X(\pi')\iota\pi\mathrm{e}_X(\iota') = \mathrm{e}_X(\pi')e\mathrm{e}_X(\iota') = \mathrm{e}_X(\pi'\iota'\pi'\iota') = \mathrm{e}_X(1_Y) = 1_{\mathrm{e}_X(Y)},$$

$$\pi\mathrm{e}_X(\iota')\mathrm{e}_X(\pi')\iota = \pi\mathrm{e}_X(\iota'\pi')\iota = \pi e\iota = \pi\iota\pi\iota = 1_P.$$

□

El siguiente resultado es el Teorema de Krull-Schmidt para R-categorías aditivas.

Teorema 1.1.13. *Sea $X \in \mathcal{C}$. Si X tiene dos factorizaciones en coproducto*

$$\oplus_{i=1}^n X_i = X = \oplus_{j=1}^m Y_j,$$

donde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ y $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Y_j)$ son anillos locales, entonces $m = n$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $X_i \cong Y_{\sigma(i)}$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Demostración. Consideremos $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)^{op}$ y el funtor de evaluación

$$\mathrm{e}_X : \mathrm{add}(X) \to \mathrm{proj}(\Gamma).$$

Por la Proposición 1.1.12 $\mathrm{End}_{\Gamma}(\mathrm{e}_X(X_i)) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$, así que Γ es un anillo semiperfecto. Además, se tiene que

$$\oplus_{i=1}^{n}\mathrm{top}(\mathrm{e}_X(X_i)) = \mathrm{top}(\Gamma) = \oplus_{j=1}^{m}\mathrm{top}(\mathrm{e}_X(Y_j)),$$

es un Γ-módulo semisimple. Por el Lema 1.1.9 y el Teorema de Jordan-Hölder, $n = m$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $\mathrm{top}(\mathrm{e}_X(X_i)) \cong \mathrm{top}(\mathrm{e}_X(Y_{\sigma(i)}))$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$. Puesto que la cubierta proyectiva es única hasta isomorfismo y

$$\mathrm{e}_X(X_i) = \mathrm{P}_0(\mathrm{top}(\mathrm{e}_X(X_i))),$$

tenemos que $\mathrm{e}_X(X_i) \cong \mathrm{e}_X(Y_{\sigma(i)})$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$. Por último, por el proceso de proyectivización, el funtor de evaluación e_X es fiel y pleno, concluimos que $X_i \cong Y_{\sigma(i)}$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$. □

Definición 1.1.14. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schmidt y $0 \neq X \in \mathcal{C}$. Por el Teorema 1.1.13 X tiene una descomposición única (hasta isomorfismos) en suma directa finita de objetos $X_1, \cdots, X_n$, no isomorfos con anillo de endomorfismos local

$$X = X_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus X_r^{n_r}.$$

En el caso anterior, diremos que el **rango** de X es r, y escribiremos

$$\mathrm{rk}(X) := r.$$

Por convención, el rango del objeto cero es 0.

Lema 1.1.15. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schmidt y $X \in \mathcal{C}$, con*

$$\oplus_{i=1}^{n}X_i = X = X' \oplus X'',$$

donde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ *es un anillo local* $\forall$ $1 \leq i \leq n$*. Entonces, existe $t \leq n$ y una función inyectiva $\sigma : \{1, \cdots, t\} \to \{1, \cdots, n\}$ tal que $X' = \oplus_{i=1}^{t}X_{\sigma(i)}$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{C}$ es una categoría Krull-Schmidt, $X' = \oplus_{j=1}^{t}Y_j$ y $X'' = \oplus_{k=1}^{s}Z_k$, donde $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Y_j)$ y $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Z_k)$ son anillos locales. El resultado se sigue del Teorema 1.1.13. □

Lema 1.1.16. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría con cokerneles (kerneles), entonces los idempotentes se se escinden en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Haremos el caso para cuando la categoría $\mathcal{C}$ tenga cokerneles, ya que el otro caso es análogo.

Sea $e^2 = e \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$, con $X \in \mathcal{C}$. Consideremos $g : X \to M$ el cokernel de $1 - e$. Dado que $e(1-e) = 0$, $\exists! f : M \to X$ tal que $e = fg$. Luego

$$gfg = ge = ge + g(1-e) = g,$$

puesto que g es un epimorfismo concluimos que $1_X = gf$. $\square$

Corolario 1.1.17. *$\mathcal{C}$ es una categoría Krull-Schimdt, si y sólo si, los idempotentes se escinden en $\mathcal{C}$ y $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ es un anillo semiperfecto $\forall\ X \in \mathcal{C} - \{0\}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $0 \neq X := \oplus_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{C}$, con $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ un anillo semiperfecto $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Veamos que $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ es semiperfecto. Por el proceso de proyectivización $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i) \cong \mathrm{End}_{\Gamma}(\mathrm{e}(X_i))\ \forall\ 1 \leq i \leq n$. Por lo que Γ es semiperfecto. Ahora, veamos que los idempotentes se escinden. Sea $e^2 = e \in \Gamma$. Consideremos el idempotente $\mathrm{e}_X(e) : \Gamma \to \Gamma$. Dado que $\mathrm{mod}(\Gamma)$ tiene cokerneles, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\mathrm{e}_X(e)"] \arrow[dr, "p"'] & & \Gamma \\ & P, \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde $pi = 1_P$. Por lo que $P \in \mathrm{proj}(\Gamma)$. Por el Lema 1.1.15 y puesto que Γ es semiperfecto, podemos suponer que existe $m \leq n$ tal que existe $f : P \to \oplus_{j=1}^{m} \mathrm{e}_X(X_j)$ isomorfismo. Por el proceso de proyectivización existen $g : X \to \oplus_{j=1}^{m} X_j$ y $h : \oplus_{j=1}^{m} X_j \to X$ tales que $\mathrm{e}_X(g) = fp$ y $\mathrm{e}_X(h) = if^{-1}$. Notemos que

$$\mathrm{e}_X(hg) = \mathrm{e}_X(h)\mathrm{e}_X(g) = ip = \mathrm{e}_X(e)$$

$$\mathrm{e}_X(gh) = \mathrm{e}_X(g)\mathrm{e}_X(h) = fpif^{-1} = 1_{\oplus_{j=1}^{m}\mathrm{e}_X(X_j)} = \mathrm{e}_X(1_{\oplus_{j=1}^{m} X_j}).$$

Por el proceso de proyectivización $hg = e$ y $gh = 1_{\oplus_{j=1}^{m} X_j}$. Por ende, los idempotentes se escinden.

$\Leftarrow$) Sean $0 \neq X \in \mathcal{C}$ y $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)^{op}$. Consideremos una descomposición de Γ en coproducto $\oplus_{i=1}^{n} P_i = \Gamma$, tales que $\mathrm{End}_{\Gamma}(P_i)$ es un anillo local $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Por el proceso de proyectivización X tiene una descomposición en coproducto $\oplus_{i=1}^{n} X_i = X$ tal que $\mathrm{e}(X_i) \cong P_i$ y $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X_i) \cong \mathrm{End}_{\Gamma}(\mathrm{e}_X(X_i)) \cong \mathrm{End}_{\Gamma}(P_i)\ \forall$ $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una categoría Krull-Schimdt. $\square$

Ejemplo 1.1.18. Sea R un anillo artiniano a izquierda. Dado que $\mathrm{End}_R(M)$ es un anillo artiniano $\forall\ M \in \mathrm{mod}(R)$ (en particular semiperfecto) y $\mathrm{mod}(R)$ es una categoría abeliana, por el Lema 1.1.16 y el Corolario 1.1.17, tenemos que $\mathrm{mod}(R)$ es una categoría Krull-Schmidt.

Ejemplo 1.1.19. $\mathrm{mod}(\mathbb{Z})$ no es una categoría Krull-Schmidt, ya que $\mathbb{Z}$ es inescindible y $\mathbb{Z} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ no es local.

1.2. El radical de una categoría

En esta sección $\mathcal{C}$ denotará una R-categoría aditiva.

El objetivo principal de esta sección es introducir el radical de una categoría y ver la relación que hay con los morfismos minimales en una categoría Krull-Schmidt.

Sean $X := \oplus_{i=1}^{n} X_i$, $Y := \oplus_{j=1}^{m} Y_j \in \mathcal{C}$. Cada morfismo $f : X \to Y$ lo podemos denotar por medio de una matriz $f = (f_{ij})$, con

$$f_{ij} := p_i f i_j : X_j \to Y_i,$$

donde i_j es la j-ésima inclusión natural y p_i es la i-ésima proyección natural.

Lema 1.2.1. *Sean I un ideal en $\mathcal{C}$, $X := \oplus_{i=1}^{n} X_i$ y $Y := \oplus_{j=1}^{m} Y_j$. Entonces, $f \in I(X, Y)$, si y sólo si, $f_{ji} \in I(X_i, Y_j)\ \forall\ 1 \leq i \leq n$, $\forall\ 1 \leq j \leq m$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Es clara.

$\Leftarrow$) Se sigue del hecho que $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i_j f_{ji} p_i$ e I es un ideal. $\square$

Definición 1.2.2. El **radical** de $X,\ Y \in \mathcal{C}$ es el siguiente subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y) := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mid fg \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Y)),\ \forall\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\}.$$

El siguiente resultado nos dice que la definición de radical es simétrica.

Lema 1.2.3. *Sean $X,\ Y \in \mathcal{C}$. Entonces,*

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid gf \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)),\ \forall\, g : Y \to X\}.$$

Demostración. $\subseteq$) Sean $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $g : Y \to X$. Por lo que existe $f' \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ tal que $1_Y = f'(1_Y - fg)$ y $1_Y = (1_Y - fg)f'$, con lo cual

$$(1_X - gf)(1_X + gf'f) = 1_X + gf'f - gf - gfgf'f = 1_X + g(f' - 1_Y - fgf')f = 1_X,$$

$$(1_X + gf'f)(1_X - gf) = 1_X - gf + gf'f - gf'fgf = 1_X - g(1_Y - f' + f'fg)f = 1_X.$$

Por lo tanto, $gf \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X))$.

$\supseteq$) Es análoga. $\square$

Proposición 1.2.4. *El radical* $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ *es un ideal en* $\mathcal{C}$ *tal que*

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,X) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)) \qquad \forall\, X \in \mathcal{C}.$$

Más aún, si I es un ideal tal que $I(X,X) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X))$, entonces

$$I = \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}.$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ es un ideal en $\mathcal{C}$. Sean $X,\ Y \in \mathcal{C}$. Puesto que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, se tiene que $\mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)) \trianglelefteq \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$. Sean $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g : Z \to X$ y $h : Y \to W$. Notemos que $fg \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ y por el Lema 1.2.3 $hf \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,W)$.

Ahora, es claro que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,X) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X))\ \forall\, X \in \mathcal{C}$.

Por último, sea I un ideal tal que $I(X,X) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X))\ \forall\ X \in \mathcal{C}$. Entonces por el Lema 1.2.1, $f \in I(X,Y)$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \in I(X \oplus Y, X \oplus Y) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X \oplus Y))$$

si y sólo si $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. □

Por la Proposición 1.2.4 y el Lema 1.2.1, si $X = \oplus_{i=1}^{n} X_i$ y $Y = \oplus_{j=1}^{m} Y_j$, entonces

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \oplus_{i,j}\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

El siguiente resultado es inmediato de la proposición anterior.

Corolario 1.2.5. *Sea $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$. Entonces, $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, si y sólo si, $gfh \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Z))\ \forall\ h : Z \to X$, $g : Y \to Z$.*

El siguiente criterio nos dice cuando un morfismo es un morfismo minimal a derecha o izquierda y es debido a Assem, Beligiannis y Marmaridis.

Lema 1.2.6. [ABM98, *2.5*] *Sea $f : X \to Y$.*

I) *Si $\mathcal{C}$ tiene pseudokerneles. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

  a) f es minimal a derecha.

  b) $\forall\ g : Z \to X$ pseudokernel, $g \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Z,X)$.

  c) Existe $g : Z \to X$ pseudokernel tal que $g \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Z,X)$.

II) *Si $\mathcal{C}$ tiene pseudocokerneles. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

  a) f es minimal a izquierda.

  b) $\forall\ g : Y \to Z$ pseudocokernel, $g \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$.

  c) Existe $g : Y \to Z$ pseudocokernel tal que $g \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$.

Demostración. Sólo probaremos I), ya que la prueba de II) es análoga.

a) $\Rightarrow$ *b*) Sean $g : Z \to X$ un pseudokernel de f y $h : X \to Z$. Entonces, $f(1_X - gh) = f$, con lo cual $1_X - gh$ es un isomorfismo. Por lo que $g \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Z, X)$.

b) $\Rightarrow$ *c*) Es clara.

c) $\Rightarrow$ *a*) Sea $h : X \to X$ tal que $fh = f$, con lo cual $f(1_X - h) = 0$. Así, existe $k : X \to Z$ tal que $1_X - h = gk$. Por hipótesis, $h = 1_X - gk$ es un isomorfismo. $\square$

Definición 1.2.7. Sean $\{f_i : X_i \to Y\}_{i=1}^n$ y $\{g_j : X \to Y_j\}_{j=1}^m$ morfismos en $\mathcal{C}$. Decimos que:

a) $g : X' \to Y$ es **dependiente a derecha** de $\{f_i\}_{i=1}^n$ si existen $\{g_i : X' \to X_i\}_{i=1}^n$ tales que $g = \sum_{i=1}^n f_i g_i$.

b) $g : X' \to Y$ es **independiente a derecha** de $\{f_i\}_{i=1}^n$ si g no es dependiente de $\{f_i\}_{i=1}^n$.

c) $\{f_i : X_i \to Y\}_{i=1}^r$ es **independiente completa a derecha** de $\{f_i\}_{i=1}^n$, si f_i es dependiente de $\{f_i\}_{i=1}^r$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$ y f_k es independiente en $\{f_i\}_{i=1}^r - \{f_k\}$ $\forall\ 1 \leq k \leq r$.

d) $f : X \to Y'$ es **dependiente a izquierda** de $\{g_j\}_{j=1}^m$ si existen $\{f_j : Y_j \to Y'\}_{j=1}^m$ tales que $f = \sum_{j=1}^m f_j g_j$.

e) $f : X \to Y'$ es **independiente a izquierda** de $\{g_j\}_{j=1}^m$ si f no es dependiente de $\{g_j\}_{j=1}^m$.

f) $\{g_j : X \to Y_j\}_{j=1}^s$ es **independiente completa a izquierda** de $\{g_j\}_{j=1}^m$, si g_j es dependiente de $\{g_j\}_{j=1}^s$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$ y g_l es independiente en $\{g_j\}_{j=1}^s - \{g_l\}$ $\forall\ 1 \leq l \leq s$.

El siguiente lema muestra que siempre existen las familias independientes completas a izquierda y derecha.

Lema 1.2.8. *a) Sean $\{f_i : X_i \to Y\}_{i=1}^n$ morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces, existe $\sigma \in S_n$ y $k \leq n$ tal que $\{f_{\sigma(i)}\}_{i=1}^k$ es independiente completa a derecha de $\{f_i\}_{i=1}^n$.*

b) Sean $\{g_j : X \to Y_j\}_{j=1}^{m}$ *morfismos en* $\mathcal{C}$*. Entonces, existe* $\tau \in S_m$ *y* $l \leq m$ *tal que* $\{g_{\tau(j)}\}_{j=1}^{l}$ *es independiente completa a izquierda de* $\{g_j\}_{j=1}^{m}$*.*

Demostración. Sólo haremos la prueba de a), ya que la de b) es análoga.

La prueba la haremos por inducción sobre n.

Si $n = 1$. Es claro.

Para $n+1$. Caso I. Si f_i es independiente en $\{f_j\}_{j=1, j\neq i}^{n+1} - \{f_i\}$ $\forall\, 1 \leq i \leq n+1$. Notemos que $\{f_i : X_i \to Y\}_{i=1}^{n+1}$ es independiente completa a derecha de $\{f_i\}_{i=1}^{n+1}$.

Caso II. Existe $1 \leq j \leq n+1$ tal que f_j es dependiente en $\{f_i\}_{i=1, i\neq j}^{n+1} - \{f_j\}$. Sea $\tau \in S_{n+1}$ tal que $\tau(j) = n+1$, $\tau(n+1) = j$ y $\tau(r) = r$ $\forall\, r \in \{1, \cdots, n+1\} - \{j\}$. Por hipótesis de inducción existe $\tau' \in S_n$ y $k \leq n$ tal que $\{f_{\tau'(i)}\}_{i=1}^{k}$ es independiente completa a derecha en $\{f_{\tau(i)}\}_{i=1, i\neq j}^{n+1}$. Por lo que $\sigma := \tau'\tau$, cumple con lo requerido. $\square$

Veamos el comportamiento del radical en una categoría Krull-Schimdt.

Lema 1.2.9. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría Krull-Schmidt,* X, $Y \in \mathrm{ind}(\mathcal{C})$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{f : X \to Z \mid f\ \textit{no es split} - \textit{mono}\}$.

b) $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Z, Y) = \{f : Z \to Y \mid f\ \textit{no es split} - \textit{epi}\}$.

c) $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f\ \textit{no es isomorfismo}\}$.

Demostración. a) $\subseteq$) Sea $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Supongamos que f es un split-mono, entonces existe $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$, por el Corolario 1.2.5 $1_X \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X))$, lo cual es una contradicción. Por lo que f no es un split-mono.

$\supseteq$) Sea $f \notin \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Por el Lema 1.2.3 existe $g : Z \to X$ tal que

$$gf \notin \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)),$$

puesto que $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ es un anillo local, se tiene que gf es invertible, así existe $k \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ tal que $kgf = 1_X$. Por lo tanto, f es un split-mono.

$b)$ Es análoga a $a)$.

$c)$ Se sigue de $a)$ y $b)$. □

El siguiente resultado se sigue del Lema 1.2.9.

Corolario 1.2.10. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schmidt, X, $Y \in \mathcal{C}$. Entonces,* $\mathrm{add}(X) \cap \mathrm{add}(Y) = 0$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

El siguiente resultado es análogo a [ARS95, Teorema 2.2].

Proposición 1.2.11. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schimdt y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ cerrada por sumandos directos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si $\mathcal{C}$ tiene pseudokerneles y $\mathcal{X}$ es precubriente, entonces $\mathcal{X}$ es cubriente.

b) Si $\mathcal{C}$ tiene pseudocokerneles y $\mathcal{X}$ es preenvolvente, entonces $\mathcal{X}$ es envolvente.

Demostración. Sólo haremos la prueba de $a)$, ya que la prueba de $b)$ es análoga.

Sean $C \in \mathcal{C}$ y $(f_1, \cdots, f_n) : \oplus_{i=1}^n X_i \to C$ una $\mathcal{X}$-precubierta, con $X_i \in \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Por el Lema 1.2.8 podemos suponer que existe $m \leq n$ tal que $\{f_i\}_{i=1}^m$ es independiente completa a derecha de $\{f_i\}_{i=1}^n$.

Veamos que $F := (f_1, \cdots, f_m) : \oplus_{i=1}^m X_i \to C$ es una $\mathcal{X}$-cubierta. En efecto, dado que $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos tenemos que $\oplus_{i=1}^m X_i \in \mathcal{X}$. Luego, $\forall\ 1 \leq i \leq n$ existen $\{g_{ji} : X_i \to X_j\}_{j=1}^m$ tales que $f_i = \sum_{j=1}^m f_j g_{ji}$. Consideremos $G := (g_{ji})_{mn}$, entonces $FG = (f_1, \cdots, f_n)$. Así pues, F es una $\mathcal{X}$-precubierta. Por último, sea $G := (g_{ji})_{mk} : \oplus_{i=1}^k Y_i \to \oplus_{j=1}^m X_j$ un pseudokernel de F, con $Y_i \in \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ $\forall\ 1 \leq i \leq k$. Supongamos que $G \notin \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(\oplus_{i=1}^k Y_i, \oplus_{j=1}^m X_j)$. Por el Lema 1.2.1 existe $g_{ji} : Y_i \to X_j$ tal que $g_{ji} \notin \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y_i, X_j)$, así $0 = \sum_{s=1}^m f_s g_{si}$. Por el Lema 1.2.9 $f_j = \sum_{s=1, s\neq j}^m f_s(-g_{si} g_{ji}^{-1})$.

Lo cual es una contradicción, ya que f_j es independiente a derecha de $\{f_i\}_{i=1,i\neq j}^m$. Por el Lema 1.2.6 F es minimal a derecha. $\square$

1.3. Pares de torsión y módulos inclinantes

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin.

El objetivo principal de esta sección es caracterizar las clases de torsión y libres de torsión funtorialmente finitas. Para ello, necesitaremos varios resultados preliminares debidos a M. Auslander y S. Smalø.

Lema 1.3.1. *Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ una subcategoría aditiva y $\{f_i : M_i \to C_i\}_{i=1}^n$ una familia de $\mathcal{C}$-preenvolventes de M_i. Entonces, $\oplus_{i=1}^n f_i : \oplus_{i=1}^n M_i \to \oplus_{i=1}^n C_i$, es una $\mathcal{C}$-preenvolvente.*

Demostración. Recordemos que $\oplus_{i=1}^n f_i$ está dada por la propiedad universal del coproducto, vía el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\mu_i'"'] & C_i \arrow[r, "\mu_i"] & \oplus_{i=1}^n C_i \\ \oplus_{i=1}^n M_i, \arrow[urr, dashed, "\oplus_{i=1}^n f_i"'] & & \end{tikzcd} \qquad \text{(I)}$$

donde μ_i y μ_i' denotan las inclusiones naturales. Sea $g : \oplus_{i=1}^n M_i \to C'$, con $C' \in \mathcal{C}$. Dado que f_i es una $\mathcal{C}$-preenvolvente, tenemos los siguientes diagramas conmutativos para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\mu_i'"'] & C_i \arrow[ddl, dashed, "\exists\, h_i"] \\ \oplus_{i=1}^n M_i \arrow[d, "g"'] & \\ C'. & \end{tikzcd} \qquad \text{(II)}$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[d, "\mu_i"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ \oplus_{i=1}^n C_i \arrow[r, dashed, "\exists !\, h"'] & C' \end{tikzcd} \qquad \text{(III)}$$

Por último, de los diagramas (I), (II) y (III) tenemos las siguientes igualdades para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{aligned}(h \oplus_{i=1}^n f_i)\mu_i' &= h\mu_i f_i \\ &= h_i f_i \\ &= g\mu_i'.\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la unicidad del coproducto se tiene que $h \oplus_{i=1}^n f_i = g$. $\square$

Notación 1.3.2. *Sea* $M \in \text{mod}(\Lambda)$. *Denotamos por* :

- $\text{gen}(M) := \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \exists\, p : M^n \to X \ epimorfismo\}$.
- $\text{cogen}(M) := \{X \in \text{mod}(\Lambda) \mid \exists\, i : X \to M^n \ monomorfismo\}$.

Proposición 1.3.3. [AS80, *4.5, 4.6*] *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \text{mod}(\Lambda)$ *una subcategoría preenvolvente, aditiva y cerrada por cocientes. Entonces,* $\mathcal{C} = \text{gen}(X)$ *para algún* $X \in \mathcal{C}$.

Demostración. Consideremos $f : \Lambda \to X$ una $\mathcal{C}$-preenvolvente. Aseguramos que $\mathcal{C} = \text{gen}(X)$.

$\subseteq$) Sean $M \in \mathcal{C}$ y $p : \Lambda^n \to M$ un epimorfismo, por el Lema 1.3.1 tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n \arrow[r, "\oplus_{i=1}^n f"] \arrow[d, "p"'] & X^n \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Con lo cual h es un epimorfismo y así $\mathcal{C} \subseteq \text{gen}(X)$.

$\supseteq$) Se sigue del hecho que $\mathcal{C}$ es aditiva y cerrada por cocientes. $\square$

Notación 1.3.4. *Sea* $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{mod}(\Lambda)$. *Denotamos por* :

- $\mathcal{X}^{\perp_i} := \{Y \in \operatorname{mod}(\Lambda) \mid \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}$.
- ${}^{\perp_i}\mathcal{X} := \{Y \in \operatorname{mod}(\Lambda) \mid \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Y, X) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}$.
- $\mathbb{P}(\mathcal{X}) := \bigoplus_{X \in \operatorname{ind}(\mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{X})} X$, *siempre que* $|\operatorname{ind}(\mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{X})| \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{I}(\mathcal{X}) := \bigoplus_{X \in \operatorname{ind}(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp_1})} X$, *siempre que* $|\operatorname{ind}(\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp_1})| \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.3.5. [AIR14, *1.1*] *Sean* $\mathcal{T}$ *una clase de torsión en* $\operatorname{mod}(\Lambda)$ *e* $I := \operatorname{ann}(\mathcal{T})$. *Si* $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ *es un* Λ/I*-módulo inclinante, entonces* $\mathcal{T} = \operatorname{gen}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$.

Demostración. $\subseteq$) Sean $X \in \mathcal{T}$ y $p : (\Lambda/I)^n \to X$ un epimorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas en $\operatorname{mod}(\Lambda/I)$ por medio de push-out

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\Lambda/I)^n \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & (T_0)^n \arrow[r] \arrow[d, "q"] & (T_1)^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & T' \arrow[r] & (T_1)^n \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

con T_0, $T_1 \in \operatorname{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$ y q un epimorfismo. Puesto que la segunda fila del diagrama anterior se escinde, existe un epimorfismo $g : T' \to X$, y así, $X \in \operatorname{gen}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$.

$\supseteq$) Se sigue del hecho que $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \in \mathcal{T}$ y puesto que $\mathcal{T}$ es aditiva y cerrada por epimorfismos. □

Notación 1.3.6. *Sean* $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod}(\Lambda)$ *y* $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. *Denotamos por*

$$t_{\mathcal{C}}(M) := \sum \{\operatorname{Im}(f) \mid f : C \to M, \ \textit{con} \ C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposición 1.3.7. *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod}(\Lambda)$ *aditiva y cerrada por cocientes. Entonces,* $\mathcal{C}$ *es una clase precubriente.*

Demostración. Sea $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Notamos que $t_{\mathcal{C}}(M) \in \mathcal{C}$, con lo cual es fácil ver que la inclusión $i : t_{\mathcal{C}}(M) \to M$ es una $\mathcal{C}$-precubierta. □

Proposición 1.3.8. [AS80, *4.6*] *Sea* $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\operatorname{gen}(M)$ *es una clase preenvolvente.*

Demostración. Sea $P \in \operatorname{proj}(\Lambda)$. Aseguramos que P admite una $\operatorname{gen}(M)$-preenvolvente. En efecto, por la Proposición A.4.19 existe $f : P \to M'$ una $\operatorname{add}(M)$-preenvolvente.

Veamos que f es una $\operatorname{gen}(M)$-preenvolvente. En efecto, sea $p : M^n \to M''$ un epimorfismo y $g : P \to M''$. Dado que P es proyectivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"'] \arrow[d, "g"] \\ M^n \arrow[r, "p"'] & M''. \end{tikzcd}$$

Puesto que f es una $\operatorname{add}(M)$-preenvolvente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M' \arrow[dl, dashed, "\exists\, k"] \\ M^n. & \end{tikzcd}$$

Por lo que, $g = ph = pkf$.

Ahora bien, sea $N \in \operatorname{mod}(\Lambda)$, por lo anterior existe $f : \mathrm{P}_0(N) \to M'$ una $\operatorname{gen}(M)$-preenvolvente. Consideremos el push-out de los morfismos π_0 y f

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}_0(N) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_0"'] & M' \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"'] & M'' \end{tikzcd}$$

Veamos que g es una $\operatorname{gen}(M)$-preenvolvente. En efecto, puesto que π_0 es un epimorfismo, se tiene que h es un epimorfismo, y así, $M'' \in \operatorname{gen}(M)$. Luego, sea $f' : N \to K$, con $K \in \operatorname{gen}(M)$, que induce el siguiente diagrama conmutativo de los hechos de que f es una $\operatorname{gen}(M)$-preenvolvente y el cuadrado anterior es un push-out

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}_0(N) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_0"'] & M' \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend left=60, "g'"] \\
N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & M'' \arrow[dl, dashed, "\exists\, t"'] \\
K, &
\end{tikzcd}$$

donde $g' : M' \to K$. Por lo tanto, g es una $\mathrm{gen}(M)$-preenvolvente. $\square$

Teorema 1.3.9. *Sea $\mathcal{T}$ una clase de torsión. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *$\mathcal{T}$ es funtorialmente finita.*

b) *$\mathcal{T} = \mathrm{gen}(X)$ para algún $X \in \mathcal{T}$.*

c) *$\mathbb{P}(\mathcal{T})$ es un $\Lambda/\mathrm{ann}(\mathcal{T})$-módulo inclinante.*

d) *$\mathcal{T} = \mathrm{gen}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Se sigue de la Proposición 1.3.3.

$b) \Rightarrow c)$ Se sigue del Lema A.6.10.

$c) \Rightarrow d)$ Se sigue de la Proposición 1.3.5.

$d) \Rightarrow a)$ Se sigue de la Proposición 1.3.7 y la Proposición 1.3.8. $\square$

Usando la dualidad $\mathrm{D}_\Lambda : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ tenemos el siguiente resultado del Teorema 1.3.9.

Teorema 1.3.10. *Sea $\mathcal{F}$ una clase libre de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *$\mathcal{F}$ es funtorialmente finita.*

b) *$\mathcal{F} = \mathrm{cogen}(X)$ para algún $X \in \mathcal{F}$.*

c) *$\mathbb{I}(\mathcal{F})$ es un $\Lambda/\mathrm{ann}(\mathcal{F})$-módulo coinclinante.*

d) $\mathcal{F} = \operatorname{cogen}(\mathbb{I}(\mathcal{F}))$.

Demostración. Por el Ejemplo A.6.5 $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}$ es una clase de torsión.

a) $\Rightarrow$ *b)* Si $\mathcal{F}$ es funtorialmente finita, tenemos que $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}$ es funtorialmente finita y por el Teorema 1.3.9 existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F} = \operatorname{gen}(\mathrm{D}_\Lambda X)$, con lo cual, $\mathcal{F} = \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\operatorname{gen}(\mathrm{D}_\Lambda X) = \operatorname{cogen}(X)$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Dado que existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F} = \operatorname{gen}(\mathrm{D}_\Lambda X)$, por el Teorema 1.3.9 $\mathbb{P}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})$ es un $\Lambda^{op}/\operatorname{ann}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})$-módulo inclinante. Notemos que por el Lema A.2.7 $\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\operatorname{ann}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}) = \operatorname{ann}(\mathcal{F})$, además de que

$$\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathbb{P}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}) = \mathbb{I}(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}) = \mathbb{I}(\mathcal{F}),$$

concluimos que $\mathbb{I}(\mathcal{F})$ es un $\Lambda/\operatorname{ann}(\mathcal{F})$-módulo coinclinante.

c) $\Rightarrow$ *d)* Puesto que $\mathrm{D}_\Lambda\mathbb{I}(\mathcal{F}) = \mathbb{P}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})$ es un $\Lambda^{op}/\operatorname{ann}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})$-módulo inclinante, del Teorema 1.3.9, se sigue que $\operatorname{gen}(\mathbb{P}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})) = \mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}$, así

$$\mathcal{F} = \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\operatorname{gen}(\mathbb{P}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})) = \operatorname{cogen}(\mathbb{I}(\mathcal{F})).$$

d) $\Rightarrow$ *a)* Ya que $\operatorname{gen}(\mathbb{P}(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F})) = \mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}$, tenemos del Teorema 1.3.9 que $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}$ es funtorialmente finita. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es funtorialmente finita. □

El Teorema 1.3.9 nos permite dar ejemplos de clases de torsión que no son funtorialmente finitas.

Notación 1.3.11. *Sea $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Denotamos por :*

- $\tilde{\operatorname{proj}}(\Lambda)$ *a la categoría de Λ-módulos preproyectivos.*
- $\tilde{\operatorname{inj}}(\Lambda)$ *a la categoría de Λ-módulos preinyectivos.*
- $\operatorname{SuppHom}_\Lambda(M, -) := \{X \in \operatorname{mod}(\Lambda) \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(M, X) \neq 0\}$.
- $\operatorname{SuppHom}_\Lambda(-, M) := \{X \in \operatorname{mod}(\Lambda) \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(X, M) \neq 0\}$.

Ejemplo 1.3.12. Sea Λ una álgebra hereditaria de tipo de representación infinita. Entonces, $\tilde{\operatorname{inj}}(\Lambda)$ es una clase de torsión que no es funtorialmente finita. En efecto, sea $\eta : 0 \to N \to M \to K \to 0$ una sucesión exacta.

Veamos que $\tilde{\text{inj}}(\Lambda)$ es cerrada por cocientes. Supongamos que $M \in \tilde{\text{inj}}(\Lambda)$. Sea $X \notin \text{SuppHom}_\Lambda(\text{M}, -)$. Aplicando el funtor $\text{Hom}_\Lambda(-, X)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \text{Hom}_\Lambda(K, X) \to \text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0,$$

por lo que $X \notin \text{SuppHom}_\Lambda(K, -)$. Por la Proposición A.4.16 $K \in \tilde{\text{inj}}(\Lambda)$.

Ahora, vemos que $\tilde{\text{inj}}(\Lambda)$ es cerrada por extensiones. Supongamos que $N,\ K \in \tilde{\text{inj}}(\Lambda)$. Sea

$$X \notin (\text{SuppHom}_\Lambda(\text{N}, -) \cap \text{SuppHom}_\Lambda(\text{K}, -)).$$

Aplicando el funtor $\text{Hom}_\Lambda(-, X)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \text{Hom}_\Lambda(K, X) \to \text{Hom}_\Lambda(M, X) \to \text{Hom}_\Lambda(N, X) = 0,$$

por lo que $X \notin \text{SuppHom}_\Lambda(\text{M}, -)$. Por la Proposición A.4.16 $M \in \tilde{\text{inj}}(\Lambda)$.

Por la Proposición A.6.4 $\tilde{\text{inj}}(\Lambda)$ es una clase de torsión.

Por último, aseguramos que $\mathbb{P}(\tilde{\text{inj}}(\Lambda)) = 0$. Sea $X \in \text{ind}(\tilde{\text{inj}}(\Lambda))$, por la Proposición A.4.18 $\tau X \in \text{ind}(\tilde{\text{inj}}(\Lambda))$; por las fórmulas de Auslander-Reiten y la Proposición A.4.9

$$\text{Ext}^1_\Lambda(X, \tau X) \cong \text{D}_R\overline{\text{Hom}}_\Lambda(\tau X, \tau X) \neq 0,$$

así pues, $\mathbb{P}(\tilde{\text{inj}}(\Lambda)) = 0$.

Por el Teorema 1.3.9 $\tilde{\text{inj}}(\Lambda)$ no es funtorialmente finita.

Lema 1.3.13. [Sm84, *0.2*] *Sea* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\text{mod}(\Lambda)$. *Si se tiene que* $\text{ann}(\mathcal{T}) = 0$ $(\text{ann}(\mathcal{F}) = 0)$, *entonces* $\text{inj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{T}$ $(\text{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{F})$.

Demostración. Sea $T := \oplus_{T_i \in \text{ind}(\mathcal{T})} T_i$. Por hipótesis $\text{ann}(T) = 0$, y así, existe un epimorfismo $p : T^{(I)} \to \text{D}_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda)$. Puesto que $\text{D}_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda)$ es finitamente generado, existe un subconjunto finito $\{T_i\}_{i=1}^n \subseteq \text{ind}(\mathcal{T})$, tal que, existe un epimorfismo $q : \oplus_{i=1}^n T_i \to \text{D}_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda)$. Dado que $\mathcal{T}$ es cerrada por cocientes $\text{D}_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda) \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $\text{inj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{T}$, ya que $\text{inj}(\Lambda) = \text{add}(\text{D}_{\Lambda^{\text{op}}}(\Lambda))$ y $\mathcal{T}$ es aditiva y cerrada por sumandos directos.

Si $\mathrm{ann}(\mathcal{F}) = 0$, se prueba dualmente que $\mathrm{proj}(\Lambda) \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

Lema 1.3.14. *Sean* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *una clase libre de torsión e* $I := \mathrm{ann}(\mathcal{F})$. *Entonces,* $\mathcal{F}$ *es una clase libre de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda/I)$. *Más aún, los Ext-proyectivos (Ext-inyectivos) en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *son los Ext-proyectivos (Ext-inyectivos) en* $\mathrm{mod}(\Lambda/I)$.

Demostración. Dado que $\mathrm{ann}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{ann}(N)\ \forall\ N \in \mathcal{F}$, tenemos que

$$\mathcal{F} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda/I).$$

Luego, consideremos el funtor fiel, pleno y exacto

$$F : \mathrm{mod}(\Lambda/I) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$$

$$(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (M \xrightarrow{f} N),$$

si $f : X \to N$ es un monomorfismo en $\mathrm{mod}(\Lambda/I)$, con $N \in \mathcal{F}$, f es un monomorfismo en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, con lo cual, $X \in \mathcal{F}$. Por último, si

$$\eta :\ 0 \to N \to Y \to N' \to 0$$

es una sucesión exacta, con $N,\ N' \in \mathcal{F}$, se tiene que $F(\eta)$ es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Por lo tanto, $Y \in \mathcal{F}$. $\square$

Notación 1.3.15. *Denotamos por* :

- $\mathrm{rkK}_0(\Lambda)$ *al rango del grupo de Grothendieck de* Λ.
- $\mathrm{pd}(M)$ *a la dimensión proyectiva de* M.
- $\mathrm{id}(M)$ *a la dimensión inyectiva de* M.

Teorema 1.3.16. [Sm84] *Sea* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\mathcal{T}$ *es funtorialmente finita, si y sólo si,* $\mathcal{F}$ *es funtorialmente finita.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $I := \mathrm{ann}(\mathcal{F})$. Veamos que $\mathbb{I}(\mathcal{F})$ es un Λ/I-módulo coinclinante. Primero, veamos que $\mathrm{rk}(\mathbb{I}(\mathcal{F})) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda/I)$. Por el Lema 1.3.14 existe $\mathcal{T}' \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda/I)$ tal que $(\mathcal{T}', \mathcal{F})$ es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda/I)$.

Aseguramos que los proyectivos inescindibles en $\operatorname{mod}(\Lambda/I)$ son los Λ-módulos Ext-proyectivos inescindibles en $\mathcal{F}$.

Si $P \in \operatorname{ind}(\operatorname{proj}(\Lambda/I))$, se sigue del Lema 1.3.13 que P es Ext-proyectivo en $\mathcal{F}$.

Recíprocamente, sea X un Ext-proyectivo en $\mathcal{F}$. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(\pi_0) \to \mathrm{P}_0(X) \overset{\pi_0}{\to} X \to 0$$

de Λ/I-módulos. Por el Lema 1.3.13 se tiene que $\mathrm{P}_0(X) \in \mathcal{F}$ y puesto que $\mathcal{F}$ es cerrada por submódulos, tenemos que la sucesión anterior se escinde. Así pues, $X \in \operatorname{proj}(\Lambda/I)$.

Por el Teorema A.6.14, concluimos que $\mathrm{rkK}_0(\Lambda/I) = \mathrm{rk}(\mathbb{P}(\mathcal{F}))$.

Sean n:=$\mathrm{rkK}_0(\Lambda)$, $\{I_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles y $\{I_i\}_{i=1}^r$ un sistema completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles en $\mathcal{F}$. Por la Proposición A.6.9, $\{\mathrm{t}_{\mathcal{T}}(I_j)\}_{j=r+1}^n$ es un sistema completo de Λ-módulos Ext-inyectivos inescindibles en $\mathcal{T}$ y por la Proposición A.6.10 tenemos que $n - r = \mathrm{rk}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. Ahora bien, sea s el número de proyectivos inescindibles no isomorfos en $\mathcal{T}$. Con lo cual hay $n - r - s$ Ext-proyectivos inescindibles, no proyectivos, no isomorfos en $\mathcal{T}$; por la Proposición A.4.8 y la Proposición A.6.9 tenemos $n - r - s$ Ext-inyectivos inescindibles, no inyectivos, no isomorfos en $\mathcal{F}$, de modo que hay $n - s$ Ext-inyectivos inescindibles no isomorfos en $\mathcal{F}$. Por otro lado, de la Proposición A.6.9 se tienen $n - s$ Ext-proyectivos inescindibles no isomorfos en $\mathcal{F}$. Concluimos que $\mathrm{rkK}_0(\Lambda/I) = \mathrm{rk}(\mathbb{P}(\mathcal{F})) = \mathrm{rk}(\mathbb{I}(\mathcal{F}))$.

Es suficiente ver que $\mathrm{id}(\mathbb{I}(\mathcal{F})) \leq 1$. Por la Proposición A.6.9, $\tau^{-1}(\mathbb{I}(\mathcal{F})) \in \mathcal{T}'$, por lo que $\mathrm{Hom}_{\Lambda/I}(\tau^{-1}(\mathbb{I}(\mathcal{F})), \Lambda/I) = 0$. Por la Proposición A.4.9

$$\mathrm{id}(\mathbb{I}(\mathcal{F})) \leq 1.$$

Por lo tanto, por el Teorema A.6.14 $\mathbb{I}(\mathcal{F})$ es un Λ/I-módulo coinclinante, y por el Teorema 1.3.10 $\mathcal{F}$ es funtorialmente finita.

$\Leftarrow$) Consideremos el siguiente par de torsión $(\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}, \mathrm{D}_\Lambda\mathcal{T})$ en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$. Como $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{F}$ es funtorialmente finita, tenemos por $\Rightarrow$) que $\mathrm{D}_\Lambda\mathcal{T}$ es funtorialmente finita. Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es funtorialmente finita. □

1.4. Módulos τ-inclinantes

El objetivo principal de esta sección es introducir los Λ-módulos τ-rígidos y ver su relación con las clases de torsión funtorialmente finitas. La siguiente definición es de gran practicidad para determinar cuando $\mathrm{gen}(M)$ es una clase de torsión.

Definición 1.4.1. Decimos que $M \neq 0 \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es **gen − minimal** si, para toda descomposición $M = M' \oplus M''$, con $M' \neq 0$, $M' \notin \mathrm{gen}(M'')$.

La siguiente proposición junto con el Lema A.6.8 nos da la respuesta de cuando $\mathrm{gen}(M)$ es una clase de torsión.

Proposición 1.4.2. [AS81, *5.8*] *Sean* M, $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau N) = 0$, *si y sólo si,* $N \in {}^{\perp_1}\mathrm{gen}(M)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $f : M' \to \tau N$ y $p : M^n \to M'$ un epimorfismo. Como $fp = 0$ y puesto que p es un epimorfismo, tenemos que $f = 0$. Con lo cual $\mathrm{Hom}_\Lambda(M', \tau N) = 0$ y por las fórmulas de Auslander-Reiten tenemos que

$$0 = \mathrm{D_R}\overline{\mathrm{Hom}_\Lambda}(M', \tau N) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, M').$$

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $f : M \to \tau N$, con $\mathrm{Im}(f) \neq 0$. Aseguramos que la inclusión $i : \mathrm{Im}(f) \to \tau N$ no se factoriza a través de ningún Λ-módulo inyectivo no nulo. En efecto, basta ver que no se factoriza a través de la envolvente inyectiva de $\mathrm{Im}(f)$.

Supongamos lo contrario, entonces existe $g : \mathrm{I}_0(\mathrm{Im}(f)) \to \tau N$ tal que $g\iota_0 = i$. Puesto que ι_0 es un monomorfismo esencial, se tiene que g es un monomorfismo, consecuentemente, $\mathrm{I}_0(\mathrm{Im}(f)) \mid \tau N$. Lo cual es una contradicción, ya que, por la Proposición A.4.8 *a)* y *c)* $\tau N \in \mathrm{mod}_{\mathcal{I}}(\Lambda)$.

Concluimos que $0 \neq i \in \overline{\mathrm{Hom}_\Lambda}(\mathrm{Im}(f), \tau N)$ y por las fórmulas de Auslander-Reiten

$$0 \neq \mathrm{D_R}\overline{\mathrm{Hom}_\Lambda}(\mathrm{Im}(f), \tau N) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, \mathrm{Im}(f)).$$

□

La siguiente definición está inspirada en el resultado anterior.

Definición 1.4.3. Decimos que $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es $\tau-$ **rígido** si

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0.$$

Corolario 1.4.4. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *gen-minimal. Entonces,* $\mathrm{gen}(M)$ *es una clase de torsión, si y sólo si,* M *es* τ*-rígido.*

Demostración. $\Rightarrow$) Se sigue del Lema A.6.8 y la Proposición 1.4.2.

$\Leftarrow$) Se sigue de la Proposición 1.4.2 y el Lema A.6.7. □

Lo anterior nos muestra la importancia de los Λ-módulos τ-rígidos.

Proposición 1.4.5. [AS81, *5.10*] *Sea* M *un* Λ*-módulo* τ*-rígido. Entonces,* $\mathrm{gen}(M)$ *es una clase de torsión y* $M \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(M)))$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.4.2 y del Lema A.6.7. □

Proposición 1.4.6. [AIR14, *1.2*] *Sea* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, con* $\mathcal{T}$ *funtorialmente finita. Entonces,* $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ *es un* Λ*-módulo* τ*-rígido.*

Demostración. Se sigue de la Proposición A.6.9. □

Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.4.7. Decimos que $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ es **rígido** si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, M) = 0$.

Por las fórmulas de Auslander-Reiten, tenemos que todo Λ-módulo τ-rígido es rígido. La siguiente definición nos ayudará a dar ejemplos donde el recíproco no es cierto.

Definición 1.4.8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que Λ es $\mathbf{n-Gorenstein}$ si

$$\mathrm{id}(\Lambda) = n = \mathrm{id}(\Lambda^{op}).$$

Ejemplo 1.4.9. Sea Λ una álgebra n-Gorenstein, con $n \geq 2$. Veamos que $\mathrm{D}_\Lambda(\Lambda)$ es rígido, pero no τ-rígido. En efecto, por la Proposición A.4.9 tenemos que $\mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{D}_\Lambda(\Lambda), \tau\mathrm{D}_\Lambda(\Lambda)) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}\Lambda, \Lambda) \neq 0$.

Sean Λ es hereditaria y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Por las fórmulas de Auslander-Reiten y la Proposición A.4.9, M es rígido, si y sólo si, M es τ-rígido. La pregunta natural es si es cierto el recíproco. El siguiente ejemplo nos muestra que no.

Ejemplo 1.4.10. Sean k un campo, $Q := \circ^1 \overset{\alpha}{\to} \circ^2 \overset{\beta}{\to} \circ^3$ y $A := kQ/\langle\beta\alpha\rangle$. En el Ejemplo ASS06 VI.3.11, se puede ver que todo A-módulo inescindible τ-rígido es rígido, pero pd(S(3))=2. Por lo que A no es hereditaria.

El siguiente resultado es una generalización del Lema de Skowronski [Sk94, Lema 2]. Para el cual necesitaremos unos resultados preliminares.

Lema 1.4.11. *Sean S un anillo, $I \trianglelefteq S$ y $e^2 = e \in S$, con $e \notin I$. Entonces,*

$$\varphi : \mathrm{End}_S(Se) \to \mathrm{End}_{S/I}(Se/I)$$

$$f \mapsto \varphi(f)(se + I) = f(se) + I,$$

es un morfismo suryectivo de anillos.

Demostración. Veamos que φ está bien definida. En efecto, sean $s,\ s \in S$ tales que $se - s'e \in I$. Con lo cual,

$$(se - s'e)f(e) = f((se - s'e)e) = f(se - s'e) = f(se) - f(s'e) \in I.$$

Sean $s,\ t,\ u \in S$. Notemos que se satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\varphi(f)((s+I)(te+I)+(ue+I)) &= \varphi(f)(ste+ue+I)\\ &= f(ste)+f(ue)+I\\ &= sf(te)+f(ue)+I\\ &= sf(te)+I+f(ue)+I\\ &= (s+I)\varphi(f)(te+I)+\varphi(f)(ue+I).\end{aligned}$$

Es claro que φ es un morfismo de anillos. Sea $g \in \mathrm{End}_{S/I}(Se/I)$, entonces $g(se+I) = g'(se)+I$. Veamos que $f : Se \to Se$ $(se \mapsto g'(se))$ es un morfismo de S-módulos. En efecto, sean $s,\ t,\ u \in S$

$$f(ste+ue) = g'(ste+ue) = sg'(te)+g'(ue) = sf(te)+f(ue).$$

Por último, es claro que $\varphi(f) = g$. □

Definición 1.4.12. Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos e $I \trianglelefteq \Lambda$. Decimos que $e = \sum_{e_i \in I} e_i$ es **máximo** en I.

Proposición 1.4.13. *Sean $I \trianglelefteq \Lambda$ un ideal bilateral y $e^2 = e \in I$ máximo. Entonces,* $\mathrm{rkK}_0(\Lambda/I) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda/\langle e\rangle) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - \mathrm{rk}(\Lambda e)$.

Demostración. Sean $J := \{1 \le i \le n \mid e_i \in I\}$ y $e = \sum_{j\in J} e_j$ máximo en I. Dado que Λ es básica, e es máximo en Λe y $\mathrm{rkK}_0(\Lambda) - \mathrm{rk}(\Lambda e) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - |J|$. Luego, por el Lema 1.4.11 $\{e_i + I \mid i \notin J\}$ y $\{e_i + \langle e\rangle \mid i \notin J\}$ son sistemas completos de idempotentes ortogonales primitivos y dado que Λ/I y $\Lambda/\langle e\rangle$ son álgebras básicas, se tiene que

$$\mathrm{rkK}_0(\Lambda/I) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - |J| = \mathrm{rkK}_0(\Lambda/\langle e\rangle).$$

□

Proposición 1.4.14. [AIR14, *1.3*] *Para todo Λ-módulo M τ-rígido, se tiene que* $\mathrm{rk}(M) \le \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$.

Demostración. Sea M un Λ-módulo τ-rígido. Por la Proposición 1.4.5, tenemos que $\mathrm{rk}(M) \le \mathrm{rk}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(M)))$ y por el Teorema 1.3.9, se tiene que

$$\mathrm{rk}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(M))) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda/\mathrm{ann}(M)).$$

Por último, de la Proposición 1.4.13, se sigue que

$$\mathrm{rkK}_0(\Lambda/\mathrm{ann}(M)) \leq \mathrm{rkK}_0(\Lambda).$$

Por lo tanto, $\mathrm{rk}(M) \leq \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$. $\square$

El resultado anterior nos sugiere la siguiente definición.

Definición 1.4.15. Sea M un Λ-módulo τ-rígido. Decimos que M es $\tau -$ **inclinante** (**casi completo** $\tau -$ **inclinante**) si $\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$ $(\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - 1)$.

El siguiente ejemplo muestra que no todo Λ-módulo τ-inclinante es inclinante.

Ejemplo 1.4.16. Sean K un campo, $Q := \circ^1 \xrightarrow{\alpha} \circ^2 \xrightarrow{\beta} \circ^3$, $A := KQ/\langle \beta\alpha \rangle$ y $T := \mathrm{P}(1) \oplus \mathrm{S}(1) \oplus \mathrm{S}(3)$. Notemos que T es un A-módulo τ-inclinante, pero no inclinante, puesto que $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{P}(2), T) = 0$. Por lo que T no es fiel.

Capítulo 2

Módulos τ-inclinantes de soporte

Sea Λ una R-álgebra de Artin básica. La última sección muestra la importancia de considerar para cada $e^2 = e \in \Lambda$ el álgebra $\Lambda/\langle e \rangle$. Por lo que podemos considerar la siguiente definición.

Definición 2.0.1. Decimos que un Λ-módulo M es $\tau -$ **inclinante de soporte** si existe $e^2 = e \in \Lambda$ tal que M es un $\Lambda/\langle e \rangle$-módulo τ-inclinante.

Nuestro objetivo en este capítulo es desarrollar una teoría básica de módulos τ-inclinantes de soporte. Comenzamos discutiendo algunas propiedades básicas de los módulos τ-rígidos, conexiones entre módulos τ-rígidos y clases de torsión funtorialmente fínitas. Como una aplicación, introducimos la completación de Bongartz de los módulos τ-rígidos. Entonces, daremos caracterizaciones de los módulos τ-inclinantes. También damos una dualidad de módulos τ-rígidos a derecha y a izquierda. Además, probamos nuestro principal resultado, que establece que un módulo casi completo τ-inclinante de soporte tiene exactamente dos complementos. Como una aplicación, introducimos la mutación de módulos τ-inclinantes de soporte. Mostramos que la mutación nos da el carcaj de Hasse del conjunto parcialmente ordenado de módulos τ-inclinantes de soporte.

2.1. Propiedades básicas de módulos τ-rígidos

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin básica.

El objetivo principal de esta sección es ver la relación que tienen los Λ-módulos τ-inclinantes de soporte, la teoría inclinante clásica y los pares τ-rígidos.

Lema 2.1.1. *Sea* $e^2 = e \in \Lambda$. *Entonces,* $\mathrm{mod}(\Lambda/\langle e\rangle)$ *es una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cerrada por submódulos, cocientes y extensiones.*

Demostración. Sea $0 \to N \to M \to L \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, -)$ a la sucesión exacta anterior tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde los morfismos verticales son los isomorfismos naturales

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & eN \arrow[r] & eM \arrow[r] & eL \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

El lema se sigue del hecho, de que un Λ-módulo K es un $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo, si y sólo si, $eK = 0$. $\square$

Sea $e^2 = e \in \Lambda$. El siguiente resultado muestra la relación entre los Λ-módulos τ-rígidos y los $\Lambda/\langle e\rangle$-módulos τ-rígidos.

Lema 2.1.2. [AIR, *2.1*] *Sean* $I \trianglelefteq \Lambda$, M, $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *tales que*

$$I \subseteq \mathrm{ann}(M) \cap \mathrm{ann}(N).$$

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

a) Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau N) = 0$, *entonces* $\mathrm{Hom}_{\Lambda/\mathrm{I}}(M, \tau N) = 0$.

b) Si $I := \langle e\rangle$, *con* $e^2 = e \in \Lambda$, *entonces* $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau N) = 0$, *si y sólo si,* $\mathrm{Hom}_{\Lambda/\mathrm{I}}(M, \tau N) = 0$.

Demostración. b) Sea $X \in \mathrm{gen}(M)$, entonces $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, X) = 0$, si y sólo si, para toda sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\eta : 0 \to X \to K \to N \to 0,$$

se escinde, esto equivale por el Lema 2.1.1, para toda sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda/\langle e\rangle)$

$$\eta : 0 \to X \to K \to N \to 0,$$

con $X \in \mathrm{gen}(M)$ se escinde, si y sólo si, $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda/\mathrm{I}}(N, X) = 0$. El resultado se sigue de la Proposición 1.4.2.

a) Es análoga a la prueba de *b*). □

Los siguientes ejemplos muestran que la definición de Λ-módulo inclinante de soporte, tiene significado.

Ejemplo 2.1.3. Sean K un campo, $Q := \circ^1 \xrightarrow{\alpha} \circ^2 \xrightarrow{\beta} \circ^3$, $A := KQ/\langle\beta\alpha\rangle$ y $P := \mathrm{P}(2) \oplus \mathrm{S}(3)$. Puesto que $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{P}(1), P) = 0$, por el Lema 2.1.2 P es un A-módulo τ-inclinante de soporte y no τ-inclinante, ya que

$$\mathrm{rk}(P) = 2 < 3 = \mathrm{rk}\mathrm{K}_0(A).$$

Por último, $\mathrm{P}(2)$ es un A-módulo τ-rígido y dado que $\mathrm{P}(3)=\mathrm{rad}(\mathrm{P}(2))$, se tiene que $\mathrm{P}(2)$ no es un A-módulo τ-inclinante de soporte.

La pregunta natural es ver cuando los Λ-módulos τ-inclinantes son Λ-módulos inclinantes. La siguiente definición nos da la respuesta.

Definición 2.1.4. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Decimos que M es **sincero** si para todo $e^2 = e \in \mathrm{ann}(M)$, se tiene que $e = 0$.

Proposición 2.1.5. [AIR14, *2.2*] *Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) T es τ-inclinante, si y sólo si, T es τ-inclinante de soporte y sincero.

b) T es inclinante, si y sólo si, T es τ-inclinante y fiel.

c) Si T es τ-inclinante de soporte (τ-rígido), entonces T es un $\Lambda/\mathrm{ann}(T)$-módulo inclinante (inclinante parcial).

Demostración. a) $\Rightarrow$) Supongamos que T no es sincero, con lo cual existe $e^2 = e \in \Lambda$ tal que $T \in \mathrm{mod}(\Lambda/\langle e\rangle)$, con $e \neq 0$.

Ahora, veamos que el rango de T como Λ-módulo es igual que $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo. En efecto, sea $T' \in \operatorname{ind}(\Lambda)$ tal que $T' \mid T$. La afirmación se sigue del hecho de que $\operatorname{End}_\Lambda(T') \cong \operatorname{End}_{\Lambda/\langle e\rangle}(T')$.

Por el Lema 2.1.2 T es un $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo τ-rígido; por la Proposición 1.4.14 y la Proposición 1.4.13, tenemos que

$$\mathrm{rkK}_0(\Lambda) = \mathrm{rk}(T) \leq \mathrm{rkK}_0(\Lambda/\langle e\rangle) < \mathrm{rkK}_0(\Lambda).$$

Lo cual es una contradicción, y así, T es sincero.

$\Leftarrow$)Es clara de la definición.

b) $\iff$) Se sigue de la Proposición A.6.12 y el Teorema A.6.14.

c) Si T es τ-inclinante de soporte, el resultado se sigue la Proposición 1.4.13 y el Lema 2.1.2 *a*). Por otro lado, si T es τ-rígido, el resultado se sigue del Lema 2.1.2 y la Proposición A.6.12. □

La siguiente definición nos permite caracterizar a los Λ-módulos τ-inclinantes de soporte en $\operatorname{mod}(\Lambda)$.

Definición 2.1.6. Sean $\mathcal{C}$ una categoría Krull-Schmidt y $X \in \mathcal{C}$. Decimos que X es un objeto **básico** si $X = \oplus_{i=1}^n X_i$, con $\operatorname{End}_\mathcal{C}(X_i)$ es un anillo local $\forall\ 1 \leq i \leq n$ y $\mathrm{rk}(X) = n$.

Definición 2.1.7. Sea (M, P) un par de Λ-módulos, con $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ y $P \in \operatorname{proj}(\Lambda)$. Decimos que:

a) (M, P) es τ-rígido si M es τ-rígido y $\operatorname{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$.

b) el rango de (M, P) es $\mathrm{rk}(M, P) := \mathrm{rk}(M) + \mathrm{rk}(P)$.

c) (M, P) es básico si M y P son Λ-módulos básicos.

d) (M, P) es τ-inclinante de soporte (casi completo τ-inclinante de soporte) si (M, P) es τ-rígido y $\mathrm{rk}(M, P) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$ ($\mathrm{rk}(M, P) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - 1$).

Proposición 2.1.8. [AIR14, *2.3*] *Sean* (M, P) *un par de* Λ*-módulos, con* $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$*,* $P \in \operatorname{proj}(\Lambda)$ *y* $e^2 = e \in \Lambda$ *tales que* $\operatorname{add}(P) = \operatorname{add}(\Lambda e)$*.*

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

a) (M,P) *es* τ*-rígido (*τ*-inclinante de soporte, casi completo* τ*-inclinante de soporte), si y sólo si,* M *es un* $\Lambda/\langle e\rangle$*-módulo* τ*-rígido (*τ*-inclinante, casi completo* τ*-inclinante).*

b) Si (M,P) *y* (M,Q) *son pares* τ*-inclinantes de soporte, entonces*

$$\mathrm{add}(P)=\mathrm{add}(Q).$$

Demostración. Sea $P'\in\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $P'\mid P$. Dado que $P'\in\mathrm{add}(\Lambda)$ se tiene que $P'\mid\Lambda e$. Por lo que $\mathrm{rk}(P)\leq\mathrm{rk}(\Lambda e)$. Análogamente, $\mathrm{rk}(\Lambda e)\leq\mathrm{rk}(P)$.

a) Notemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M)=0$, es equivalente a que,

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e,M)=0.$$

Por lo que el resultado se sigue del Lema 2.1.2 b) y la Proposición 1.4.14, ya que $\mathrm{rkK}_0(\Lambda/\langle e\rangle)=\mathrm{rkK}_0(\Lambda)-\mathrm{rk}(\Lambda e)$.

b) Veamos que existe $f^2=f\in\Lambda$ tal que $\mathrm{add}(Q)=\mathrm{add}(\Lambda f)$. En efecto, sea $Q'\in\mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que $Q\oplus Q'=\Lambda^m$. Sea $\{e_j\}_{j=1}^n$ un sistema de idempotentes ortogonales primitivos, por lo que $\Lambda=\oplus_{j=1}^n\Lambda e_j$. Por el Lema 1.1.15 existe $f^2=f\in\Lambda$ tal que $\mathrm{add}(Q)=\mathrm{add}(\Lambda f)$. Así, $(f+\langle e\rangle)M=0+\langle e\rangle$. Por a) y la Proposición 2.1.5, se tiene que $f\in\langle e\rangle$. Análogamente, $e\in\langle e\rangle$. □

El siguiente resultado es análogo al Lema de Wakamatzu.

Notación 2.1.9. *Sea* $M\in\mathrm{mod}(\Lambda)$*. Denotamos por :*

- $M_{\mathcal{P}}$ *si* $M=M_{\mathcal{P}}\oplus M'$*, donde* $M_{\mathcal{P}}$ *no tiene sumandos directos proyectivos no nulos y* $M'\in\mathrm{proj}(\Lambda)$*.*
- $M_{\mathcal{I}}$ *si* $M=M_{\mathcal{I}}\oplus M'$*, donde* $M_{\mathcal{I}}$ *no tiene sumandos directos inyectivos no nulos y* $M'\in\mathrm{inj}(\Lambda)$*.*

Lema 2.1.10. [AIR14, *2.6*] *Sean* $T\in\mathrm{mod}(\Lambda)$ τ*-rígido y*

$$\eta:0\to Y\to T'\xrightarrow{f}X$$

una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, con* f *una* $\mathrm{add}(T)$*-precubierta. Entonces,* $Y \in {}^{\perp_0}\tau T$*.*

Demostración. Notemos que podemos suponer que f es un epimorfismo, puesto que el morfismo inducido, $f' : T' \to \mathrm{Im}(f)$ es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta. Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \tau(T_p))$ a η y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = {}_{\Lambda}(T', \tau(T_p)) \to {}_{\Lambda}(Y, \tau(T_p)) \to {}_{\Lambda}(X, \tau(T_p)) \overset{{}^{1}_{\Lambda}(f,\tau(T_p))}{\to} {}^{1}_{\Lambda}(T', \tau(T_p)).$$

Ahora bien, veamos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(f, \tau(T_p))$ es un monomorfismo. En efecto, dado que el morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(T_p, f) : \mathrm{Hom}_\Lambda(T_p, T') \to \mathrm{Hom}_\Lambda(T_p, X)$ es un epimorfismo; tenemos que $\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(T_p, f) : \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(T_p, T') \to \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(T_p, X)$ es un epimorfismo y por las fórmulas de Auslander-Reiten y la Proposición A.4.8

$$\mathrm{D_R}\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(T_p, f) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(f, \tau(T_p)) : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X, \tau(T_p)) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T', \tau(T_p)),$$

es un monomorfismo. Por la Proposición A.4.8, concluimos que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Y, \tau T) = 0.$$

□

2.2. Módulos τ-rígidos y clases de torsión

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin básica.

El objetivo principal de esta sección es dar una biyección entre Λ-módulos τ-inclinantes de soporte y las clases de torsión funtorialmente finitas.

Notación 2.2.1. *Denotamos por* :

- $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cuyos objetos son los* Λ*-módulos* τ*-inclinantes de soporte básicos.*

- $\mathrm{f} - \mathrm{tors}(\Lambda)$ *a la clase de todas las clases de torsión funtorialmente finitas en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*.*

Teorema 2.2.2. [AIR14, *2.7*] *Existe una biyección*

$$\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)\longleftrightarrow \mathrm{f}-\mathrm{tors}(\Lambda),$$

dada por $T\in \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)\mapsto \mathrm{gen}(T)$ *y* $\mathcal{T}\in \mathrm{f}-\mathrm{tors}(\Lambda)\mapsto \mathbb{P}(\mathcal{T})$.

Demostración. Sean $T\in \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$ y $e^2=e\in\Lambda$ tal que T es un $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo τ-inclinante. Por el Lema 2.1.2 *a*), la Proposición 1.4.5 y el Teorema 1.3.9 $\mathrm{gen}(T)\in \mathrm{f}-\mathrm{tors}(\Lambda)$ y $T\in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T)))$; por el Lema 2.1.2 *a*) y la Proposición 1.4.6 $\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T))$ es un $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo τ-rígido y por la Proposición 1.4.14

$$\mathrm{rk}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T)))\leq \mathrm{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda/\langle e\rangle)=\mathrm{rk}(T).$$

Por lo tanto, $T=\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T))$.

Recíprocamente, sean $\mathcal{T}\in \mathrm{f}-\mathrm{tors}(\Lambda)$ y $e^2=e\in\mathrm{ann}(\mathcal{T})$ máximo. Por el Teorema 1.3.9 $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ es un $\Lambda/\mathrm{ann}(\mathcal{T})$-módulo inclinante; por la Proposición 1.4.13 $\mathrm{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda/\langle e\rangle)=\mathrm{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda/\mathrm{ann}(\mathcal{T}))$ y por la Proposición 2.1.5 $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ es un $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo τ-inclinante. Se sigue del Teorema 1.3.9 que $\mathcal{T}=\mathrm{gen}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. □

Definición 2.2.3. Sea $\mathcal{C}$ una clase de Λ-módulos. Decimos que:

a) $\mathcal{C}$ es **sincera** si $\forall\ e^2=e\in\mathrm{ann}(\mathcal{C})$, se tiene que $e=0$.

b) $\mathcal{C}$ es **fiel** si $\mathrm{ann}(\mathcal{C})=0$.

El siguiente lema es para probar un resultado debido a Hoshino.

Lema 2.2.4. *Sea* $M\in\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* $\mathrm{ann}(M)=\mathrm{ann}(\mathrm{gen}(M))$.

Demostración. $\supseteq$) Es clara.

$\subseteq$) Sean $M'\in\mathrm{gen}(M)$, $(f_1,\cdots,f_n):M^n\to M'$ un epimorfismo, $a\in\mathrm{ann}(M)$, $m'\in M'$ y $(m_1,\cdots,m_n)\in M^n$ tal que $m'=\sum_{i=1}^n f_i(m_i)$. Dado que,

$$0=\sum_{i=1}^n f_i(am_i)=am',$$

concluimos que $\mathrm{ann}(M)\subseteq\mathrm{ann}(\mathrm{gen}(M))$. □

Notación 2.2.5. *Denotamos por :*

- $\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cuyos objetos son los* Λ*-módulos* τ*-inclinantes básicos.*
- $\mathrm{tilt}(\Lambda)$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cuyos objetos son los* Λ*-módulos inclinantes básicos.*
- $\mathrm{sf}-\mathrm{tors}(\Lambda)$ *a la clase de todas las clases de torsión funtorialmente finitas sinceras.*
- $\mathrm{ff}-\mathrm{tors}(\Lambda)$ *a la clase de todas las clases de torsión funtorialmente finitas fieles.*

Corolario 2.2.6. [AIR14, *2.8*] *La biyección del Teorema 2.2.2 se restringe a las biyecciones*

$$\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda) \longleftrightarrow \mathrm{sf}-\mathrm{tors}(\Lambda)$$

$$\mathrm{tilt}(\Lambda) \longleftrightarrow \mathrm{ff}-\mathrm{tors}(\Lambda).$$

Demostración. Sea $T \in \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$. Entonces, T es τ-inclinante (inclinante), si y sólo si, por la Proposición 2.1.5 T es sincero (fiel) y esto sucede, si y sólo si, por el Lema 2.2.4 $\mathrm{gen}(T)$ es sincera (fiel). □

Los siguientes resultados son para probar un resultado análogo al Lema de Bongartz [Bo81, Lema 2.1], para módulos τ-rígidos.

Proposición 2.2.7. [AIR14, *2.9*] *Sean* $\mathcal{T} \in \mathrm{f}-\mathrm{tors}(\Lambda)$ *y* U *un* Λ*-módulo* τ*-rígido. Entonces,* $U \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$*, si y sólo si,* $\mathrm{gen}(U) \subseteq \mathcal{T} \subseteq {}^{\perp_0}(\tau U)$*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Veamos que $\mathrm{gen}(U) \subseteq \mathcal{T}$. Como $U \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}$ es cerrada por cocientes, se tiene que $\mathrm{gen}(U) \subseteq \mathcal{T}$.

Luego, veamos que $\mathcal{T} \subseteq {}^{\perp_0}(\tau U)$. Sea $T \in \mathcal{T}$, ya que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(U,T) = 0$, concluimos por la Proposición 1.4.2 que $T \in {}^{\perp_0}(\tau U)$.

$\Leftarrow$) Dado que $U \in \mathrm{gen}(U) \subseteq \mathcal{T}$ y $\mathcal{T} \subseteq {}^{\perp_0}(\tau U)$, por la Proposición 1.4.2 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(U,T) = 0 \ \forall \ T \in \mathcal{T}$. Por lo tanto, $U \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. □

Definición 2.2.8. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Decimos que M es $\boldsymbol{\tau^{-1}}$ **− rígido** si $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}M, M) = 0$.

El siguiente lema nos dice que τ^{-1}-rígido es la noción dual de τ-rígido.

Lema 2.2.9. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si M es τ-rígido, entonces τM es τ^{-1}-rígido.

b) M es τ-rígido, si y sólo si, $\mathrm{D}_\Lambda(M)$ es τ^{-1}-rígido.

c) Si M es τ-rígido, entonces $\mathrm{cogen}(\tau M)$ es una clase libre de torsión funtorialmente finita.

Demostración. *a*) Por la Proposición A.4.8, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}\tau M, \tau M) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(M_p, \tau M) = 0.$$

b) M es τ-rígido, si y sólo si,

$$0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(\tau^{-1}\mathrm{D}_\Lambda M, \mathrm{D}_\Lambda M),$$

donde el isomorfismo anterior se da porque $\mathrm{D}_\Lambda : \Lambda \to \Lambda^{op}$ es un isomorfismo y esto sucede, si y sólo si, $\mathrm{D}_\Lambda M$ es τ^{-1}-rígido.

c) Por *a*) y *b*) $\mathrm{Tr}M$ es un Λ^{op}-módulo τ-rígido, por la Proposición 1.4.5 $\mathrm{gen}(\mathrm{Tr}M) \in \mathrm{f-tors}(\Lambda^{\mathrm{op}})$ y así $\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{gen}(\mathrm{Tr}M) = \mathrm{cogen}(\tau M)$ es una clase libre de torsión funtorialmente finita. □

Teorema 2.2.10. [AIR14, *2.10, 2.11*] *Sea U un Λ-módulo τ-rígido. Entonces, $\mathcal{T} := {}^{\perp_0}(\tau U) \in \mathrm{sf-tors}(\Lambda)$, $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \in \tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$ es tal que $U \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$ y ${}^{\perp_0}(\tau\mathbb{P}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{T} \in \mathrm{sf-tors}(\Lambda)$. En efecto, por el Lema 2.2.9 $(\mathcal{T}, \mathrm{cogen}(\tau U))$ es un par de torsión, con $\mathrm{cogen}(\tau U)$ funtorialmente finita. Por el Teorema 1.3.16 $\mathcal{T}$ es funtorialmente finita. Ahora bien, supongamos que $\mathcal{T}$ no es sincera, con lo cual existe $0 \neq e^2 = e \in \Lambda$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M) = 0$ $\forall\ M \in \mathcal{T}$. Por el Lema A.2.12, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}e\Lambda) = 0\ \forall\ M \in \mathcal{T}$.

Así, $\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(e\Lambda) \in \mathrm{cogen}(\tau U)$, por lo que $\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}} e\Lambda \mid \tau U$. Lo cual es una contradicción, ya que por la Proposición A.4.8 $\tau U \in \mathrm{mod}_{\mathcal{I}}(\Lambda)$. Por lo que $\mathcal{T} \in \mathrm{sf}-\mathrm{tors}(\Lambda)$ y por el Corolario 2.2.6 $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \in \tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$.

Ahora bien, veamos que $U \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. Por la Proposición 1.4.2, se tiene que $U \in \mathcal{T}$, así $\mathrm{gen}(U) \subseteq \mathcal{T}$. Por la Proposición 2.2.7, concluimos que $U \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$.

Por último, veamos que ${}^{\perp_0}(\tau\mathbb{P}(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$.

$\supseteq$) Por la Proposición A.6.9, tenemos que $\tau\mathbb{P}(\mathcal{T}) \in \mathrm{cogen}(\tau U)$ y así

$$\mathcal{T} \subseteq {}^{\perp_0}(\tau\mathbb{P}(\mathcal{T})).$$

$\subseteq$) Por la Proposición 1.4.6, tenemos que $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \in {}^{\perp_0}(\tau\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.2 $\mathcal{T} = \mathrm{gen}(\mathbb{P}(\mathcal{T})) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. □

Al Λ-módulo $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ le decimos la **completación de Bongartz** de U. A continuación daremos unas equivalencias para ver cuando un módulo τ-rígido es τ-inclinante.

Teorema 2.2.11. [AIR14, *2.12*] *Sea T un Λ-módulo τ-rígido. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) T es τ-inclinante.

b) Si $T \oplus X$ es τ-rígido, entonces $X \in \mathrm{add}(T)$.

c) ${}^{\perp_0}(\tau T) = \mathrm{gen}(T)$.

d) Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \tau X) = 0$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \tau T) = 0$, entonces $X \in \mathrm{add}(T)$.

Demostración. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Se sigue la Proposición 1.4.14.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sea $T \oplus X$ la completación de Bongartz de T. Luego, por el Teorema 2.2.2 se tiene la primera igualdad y la última se da ya que $X \in \mathrm{add}(T)$

$${}^{\perp_0}(\tau T) = \mathrm{gen}(T \oplus X) = \mathrm{gen}(T).$$

c) $\Rightarrow$ *d*) Por la Proposición 1.4.2, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,T')=0\ \forall\ T'\in \mathrm{gen}(T)$ y dado que $X\in {}^{\perp_0}(\tau T)=\mathrm{gen}(T)$. Concluimos que X es Ext-proyectivo en $\mathrm{gen}(T)$. Luego, consideramos la siguiente sucesión exacta

$$\eta: 0\to N\to T'\xrightarrow{f} X\to 0,$$

con f una $\mathrm{add}(T)$-precubierta, por el Lema 2.1.10 $N\in {}^{\perp_0}(\tau T)=\mathrm{gen}(T)$, con lo cual η se escinde y por lo tanto $X\in\mathrm{add}(T)$.

d) $\Rightarrow$ *a*) Sea $T\oplus X$ la completación de Bongartz de T. Luego, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,\tau(T\oplus X))=0=\mathrm{Hom}_\Lambda(T\oplus X,\tau T)$. Por hipótesis, $T\oplus X\in\mathrm{add}(T)$ y así $\mathrm{rk}(T)=\mathrm{rk}(T\oplus X)=\mathrm{rkK}_0(\Lambda)$. Por lo tanto, T es τ-inclinante. □

La condición *b*) del teorema anterior dice que un Λ-módulo inclinante es un τ-rígido maximal, el cual es un análogo con los Λ-módulos inclinantes ya que estos son inclinantes parciales maximales. Ver [ACPV06, Corolario 3.11]. El siguiente resultado es una versión para los Λ-módulos τ-inclinantes de soporte.

Corolario 2.2.12. [AIR14, *2.13*] *Sea (T,P) un par τ-rígido de Λ-módulos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) (T,P) es τ-inclinante de soporte.

b) Si $(T\oplus X,P)$ es τ-rígido, entonces $X\in\mathrm{add}(T)$.

c) ${}^{\perp_0}(\tau T)\cap P^{\perp_0}=\mathrm{gen}(T)$.

d) Si $\mathrm{Hom}_\Lambda(T,\tau X)=0=\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\tau T)$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,X)=0$, entonces $X\in\mathrm{add}(T)$.

Demostración. Sea $e^2=e\in\Lambda$ tal que $\mathrm{add}(P)=\mathrm{add}(\Lambda e)$.

a) $\Rightarrow$ *b*) Se sigue del Teorema 2.2.11 y el Lema 2.1.2.

b) $\Rightarrow$ *c*) Por el Teorema 2.2.11 ${}^{\perp_0}(\tau T)=\mathrm{gen}(T)$ en $\mathrm{mod}(\Lambda/\langle e\rangle)$. Notemos que los objetos de $\mathrm{gen}(T)$ en $\mathrm{mod}(\Lambda/\langle e\rangle)$, son los mismos que en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y por el Lema 2.1.2 ${}^{\perp_0}(\tau T)$ en $\mathrm{mod}(\Lambda/\langle e\rangle)$ tienen los mismos objetos que ${}^{\perp_0}(\tau T)\cap P^{\perp_0}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

c) $\Rightarrow$ *d*) Por el Lema 2.1.2, tenemos que

$$\operatorname{Hom}_{\Lambda/\langle e\rangle}(T, \tau X) = 0 = \operatorname{Hom}_{\Lambda/\langle e\rangle}(X, \tau T).$$

Por el Teorema 2.2.11, tenemos que $X \in \operatorname{add}(T)$.

d) $\Rightarrow$ *a*) Se sigue del Teorema 2.2.11 y el Lema 2.1.2. □

El siguiente resultado es para ver que hay una biyección entre los conjuntos τ-rigid(Λ) y τ-rigid(Λ^{op}), que se restringe a una biyección entre los conjuntos $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ y $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda^{\mathrm{op}})$.

Lema 2.2.13. *Sean $e^2 = e \in \Lambda$ y $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces, tenemos el siguiente isomorfismo de R-módulos $e\Lambda \otimes_\Lambda M \cong eM$.*

Demostración. Sea $f : eM \to e\Lambda \otimes_\Lambda M$, $(em \mapsto e \otimes m)$. Veamos que la aplicación está bien definida. En efecto, sean $em = en$. Luego,

$$e \otimes m = e \otimes em = e \otimes en = e \otimes n.$$

Es fácil ver que f es un morfismo de R-módulos. Sea $g' : e\Lambda \times \Lambda M \to eM$, $((e\lambda, m) \mapsto e\lambda m)$. Aseguramos que g' es Λ-balanceada. En efecto,

$$g'(e\lambda, m) = e\lambda m = g'(e, \lambda m).$$

Por la propiedad universal del producto tensorial $\exists!$ $g : e\Lambda \otimes_\Lambda M \to eM$, $(e\lambda \otimes m \mapsto e\lambda m)$. Por último, verifiquemos que f y g, son inversas mutuas

$$gf(em) = g(e \otimes m) = em;$$

$$fg(e \otimes m) = f(em) = em.$$

□

Teorema 2.2.14. [AIR14, *2.14*] *Existe una biyección*

$$()^{+} : \tau - \operatorname{rigid}(\Lambda) \longleftrightarrow \tau - \operatorname{rigid}(\Lambda^{\mathrm{op}})$$

$$(M, P) \mapsto (\operatorname{Tr}(M_p) \oplus P^*, (M/M_p)^*).$$

La biyección $()^{+}$ se restringe a una biyección

$$\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda) \longleftrightarrow \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda^{\mathrm{op}}).$$

Demostración. Sea $e^2 = e \in \Lambda$ tal que $\operatorname{add}(P) = \operatorname{add}(\Lambda e)$. Veamos que $(\operatorname{Tr}(M_p) \oplus P^*, (M/M_p)^*) \in \tau - \operatorname{rigid}(\Lambda^{\mathrm{op}})$. En efecto, consideremos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Tr}(M_p), \tau\operatorname{Tr}(M_p)) &\cong \operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Tr}(M_p), \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(M_p)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\Lambda}(M_p, \tau(M_p)) = 0.\end{aligned}$$

Luego, consideramos los siguientes isomorfismos, donde el tercero está dado por la adjunción Hom-tensor y el cuarto, por el Lema 2.2.13

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(P^*, \tau\operatorname{Tr}(M_p)) &\cong \operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(e\Lambda, \mathrm{D}_{\Lambda}(M_p)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(e\Lambda, \operatorname{Hom}_{\mathrm{R}}(M_p, I)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{R}}(e\Lambda \otimes_{\Lambda} M_p, I) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{R}}(eM_p, I) = 0.\end{aligned}$$

Por el Lema A.2.12, tenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}((M/M_p)^*, \operatorname{Tr}(M_p)) &\cong \operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(\operatorname{Tr}(M_p), \mathrm{D}_{\Lambda}(M/M_p)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\Lambda}(M/M_p, \tau(M_p)) = 0.\end{aligned}$$

Además, $\operatorname{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}((M/M_p)^*, P^*) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda}(P, M/M_p) = 0$. Por lo que

$$(\operatorname{Tr}(M_p) \oplus P^*, (M/M_p)^*) \in \tau - \operatorname{rigid}(\Lambda^{\mathrm{op}}).$$

Luego, es claro que $((M,P)^+)^+ = (M,P)$. Por último, supongamos que (M,P) es τ-inclinante de soporte, consideremos $f^2 = f \in \Lambda$ tal que

$$\operatorname{add}(\Lambda f) = \operatorname{add}(M/M_p),$$

por la Proposición 1.4.13, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(\operatorname{Tr}(M_p) \oplus P^*) &= \operatorname{rk}(M_p) + \operatorname{rk}(\Lambda e) \\ &= \operatorname{rk}(M) - \operatorname{rk}(\Lambda f) + \operatorname{rk}(\Lambda e) \\ &= \operatorname{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda) - \operatorname{rk}(\Lambda e) - \operatorname{rk}(\Lambda f) + \operatorname{rk}(\Lambda e) \\ &= \operatorname{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda/\langle f\rangle).\end{aligned}$$

□

2.3. Mutación de módulos τ-inclinantes de soporte

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin básica.

El objetivo principal de esta sección es probar que los pares casi completos τ-inclinantes tienen exactamente dos complementos, que es un resultado análogo al de las variables de conglomerado.

Lema 2.3.1. [AIR14, *2.20*] *Sean* (T, P) *un par* τ*-rígido de* Λ*-módulos y* U *un* Λ*-módulo* τ*-rígido tales que* ${}^{\perp_0}(\tau T) \cap P^{\perp_0} \subseteq {}^{\perp_0}(\tau U)$. *Entonces, existe una sucesión exacta* $U \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} C \to 0$, *que satisface las siguientes condiciones*

a) f *es una* $\mathrm{gen}(T)$*-envolvente.*

b) $T' \in \mathrm{add}(T)$.

c) $C \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T)))$

d) $\mathrm{add}(T') \cap \mathrm{add}(C) = 0$.

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$\eta : U \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} C \to 0,$$

con f una $\mathrm{add}(T)$-envolvente. Veamos que:

c) Es clara.

a) f es una $\mathrm{gen}(T)$-envolvente.

Sea $g : U \to X$, con $X \in \mathrm{gen}(T)$. Por el Lema 2.1.10 existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to Y \to T'' \xrightarrow{h} X \to 0$, con h una $\mathrm{add}(T)$-precubierta y $Y \in {}^{\perp_0}(\tau T)$. Como $T'' \in P^{\perp_0}$, se sigue que $Y \in P^{\perp_0}$ y por hipótesis, se tiene que $Y \in {}^{\perp_0}(\tau U)$. Luego, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(U, -)$ a ξ, por la Proposición 1.4.2, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(U, T'') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(U,h)} \mathrm{Hom}_\Lambda(U, X) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(U, Y) = 0$$

Así pues, existe $s \in \mathrm{Hom}_\Lambda(U, T'')$ tal que $hs = g$. Dado que f es una add(T)-envolvente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & T' \arrow[dl, dashed, "t"] \\ T''. & \end{tikzcd}$$

Así pues, $htf = g$.

b) $C \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T)))$.

Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$\epsilon : 0 \to \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{i} T' \xrightarrow{g} C \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, X)$, con $X \in \mathrm{gen}(T)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta por la Proposición 1.4.2, dado que T es τ-rígido.

$${}_\Lambda(T', X) \xrightarrow{{}_\Lambda(i,X)} {}_\Lambda(\mathrm{Im}(f), X) \to {}^1_\Lambda(C, X) \to {}^1_\Lambda(T', X) = 0.$$

Dado que f es una gen(T)-envolvente, el morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(i, X)$ es un epimorfismo, y así, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, X) = 0$.

d) $\mathrm{add}(T') \cap \mathrm{add}(C) = 0$.

Es suficiente por el Corolario 1.2.10 probar que $\mathrm{Hom}_\Lambda(T', C) = \mathrm{rad}_\Lambda(T', C)$. En efecto, sea $h : T' \to C$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(U, -)$ a ϵ, obtenemos la siguiente sucesión exacta, dado que U es τ-rígido

$${}_\Lambda(U, \mathrm{Im}(f)) \to {}_\Lambda(U, T') \xrightarrow{{}_\Lambda(U,g)} {}_\Lambda(U, C) \to {}^1_\Lambda(U, \mathrm{Im}(f)) = 0.$$

Con lo cual tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "hf"] \arrow[d, dashed, "\exists\, t"'] & C \\ T'. \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, dado que f es una $\mathrm{add}(T)$-envolvente, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"'] & T' \arrow[dl, dashed, "\exists\, k"] \\ T'. & \end{tikzcd}$$

Así pues, tenemos las siguientes igualdades

$$0 = hf - gt = hf - gkf = (h - gk)f.$$

Por la propiedad universal del Cokernel, obtenemos

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & T' \arrow[r, "h-gk"] \arrow[d, "g"'] & C \\ & C. \arrow[ur, dashed, "\exists\, r"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo que, $rg = h - gk$, y así, $h = gk + rg \in \mathrm{rad}_\Lambda(T', C)$, ya que por la Proposición 1.2.6 tenemos que $g \in \mathrm{rad}_\Lambda(T', C)$. □

El siguiente resultado se sigue del Teorema de Jordan-Hölder.

Lema 2.3.2. *Sea* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *una subcategoría plena cerrada por extensiones. Si* $0 \in \mathcal{X}$ *y todo* Λ*-módulo simple* S *se tiene que* $S \in \mathcal{X}$*, entonces* $\mathcal{X} = \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Lema 2.3.3. *Sea* $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *sincero. Entonces,* $({}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T), \mathrm{mod}(\Lambda))$ *es un par de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*. En particular,* ${}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T) = 0$.

Demostración. Consideremos el par de torsión $({}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T), ({}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T))^{\perp_0})$ y

$$0 = T_n \leq \cdots \leq T_0 = T$$

una serie de composición de T. Dado que $T/T_1 \in \mathrm{gen}(T) \subseteq ({}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T))^{\perp_0}$ y tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_{j+2} \arrow[r] \arrow[d] & T_{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & T_{j+1}/T_{j+2} \arrow[r] \arrow[d, "f_j"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_{j+1} \arrow[r] & T_j \arrow[r] & T_j/T_{j+1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Puesto que, $f_j : T_{j+1}/T_{j+2} \to T_j/T_{j+1}$ es un isomorfismo o cero, tenemos que $T_{j+1}/T_{j+2} \in ({}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T))^{\perp_0}$ $\forall\ 0 \leq j \leq n-2$. Por el Lema 2.3.2

$$\mathrm{mod}(\Lambda) = ({}^{\perp_0}\mathrm{gen}(T))^{\perp_0}.$$

$\square$

Lema 2.3.4. [AIR14, *2.21*] *Con las hipótesis del Lema 2.3.1. Si $C = 0$ y T es sincero, entonces $f : U \to T'$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por hipótesis, la siguiente sucesión es exacta

$$\eta : 0 \to \mathrm{Ker}(f) \to U \xrightarrow{f} T' \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, X)$ a η, con $X \in \mathrm{gen}(T)$, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to {}_\Lambda(T', X) \xrightarrow{{}_\Lambda(f,X)} {}_\Lambda(U, X) \to {}_\Lambda(\mathrm{Ker}(f), X) \to {}^1_\Lambda(T'X).$$

Por la Proposición 1.4.2 tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T', X) = 0$ y dado que el morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, X) : \mathrm{Hom}_\Lambda(T', X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(U, X)$ es un epimorfismo. Concluimos que $\mathrm{Ker}(f) \in {}^{\perp_0}(\mathrm{gen}(T))$ y por el Lema 2.3.3 $\mathrm{Ker}(f) = 0$. $\square$

Proposición 2.3.5. [AIR14, *2.22*] *Sea $T = X \oplus U \in \tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$, donde $X \in \mathrm{ind}(\Lambda)$. Entonces, sólo sucede una de las siguientes condiciones.*

- ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau X)$.
- $X \in \mathrm{gen}(U)$.

Demostración. Supongamos que las dos condiciones suceden. Entonces, se sigue del Teorema 2.2.11 que

$$\mathrm{gen}(U) = \mathrm{gen}(T) = {}^{\perp_0}(\tau T) = {}^{\perp_0}(\tau U).$$

Por el Teorema 2.2.11 U es τ-inclinante, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, sea $Y \oplus U$ la completación de Bongartz de U. Por el Teorema 2.2.10 se tienen las siguientes inclusiones

$${}^{\perp_0}(\tau T) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau U) = {}^{\perp_0}(\tau(U \oplus Y)) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau Y).$$

Luego, por la Proposición 2.1.5 se tiene que T es sincero; por el Lema 2.3.1 se tiene una sucesión exacta $Y \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T'' \to 0$, con f una $\mathrm{gen}(T)$-envolvente, $T' \in \mathrm{add}(T)$, $\mathrm{add}(T') \cap \mathrm{add}(T'') = 0$ y por el Teorema 2.2.2

$$T'' \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T))) = \mathrm{add}(T).$$

Notemos que en la siguiente sucesión exacta

$$\eta : Y \oplus U \xrightarrow{f \oplus 1_U} T' \oplus U \to T'' \to 0,$$

$f \oplus 1_U$ es una $\mathrm{gen}(T)$-envolvente. Por el Lema 2.3.1 existe una sucesión exacta $\xi : Y \oplus U \xrightarrow{h} T_1 \to T_0 \to 0$, con h una $\mathrm{gen}(T)$-envolvente, $T_1 \in \mathrm{add}(T)$ y $\mathrm{add}(T_1) \cap \mathrm{add}(T_0) = 0$. Por la minimalidad de $f \oplus 1_U$ y h tenemos que $\eta \cong \xi$. Así, $\mathrm{add}(T' \oplus U) \cap \mathrm{add}(T'') = 0$, por lo que $T'' \in \mathrm{add}(X)$. Tenemos los siguientes casos.

• $T'' \neq 0$. Se tiene que $T'' = X^n$, así $T' \in \mathrm{add}(U)$ y por lo tanto $X \in \mathrm{gen}(U)$.

• $T'' = 0$. Por el Lema 2.3.4 $f \oplus 1_U$ es un isomorfismo, puesto que T es sincero. Entonces, $Y \cong X$ por el Teorema de Krull-Schimdt. Con lo cual ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau Y) = {}^{\perp_0}(\tau X)$. □

Proposición 2.3.6. [AIR14, *2.17*] *Sea $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ τ-rígido básico no τ-inclinante. Entonces, existen al menos dos Λ-módulos τ-inclinantes de soporte básicos que tienen a T como sumando directo.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.10 tenemos que $\mathcal{T} := {}^{\perp_0}(\tau T) \in \mathrm{sf} - \mathrm{tors}(\Lambda)$ y $T \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathcal{T}))$. Luego, por la Proposición 1.4.5 y el Lema

$$\mathrm{gen}(T) \in (\mathrm{f} - \mathrm{tors}(\Lambda) - \mathrm{sf} - \mathrm{tors}(\Lambda))$$

y $T \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T)))$. Por el Teorema 2.2.2 $\mathbb{P}(\mathcal{T})$, $\mathbb{P}(\mathrm{gen}(T)) \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ y por el Teorema 2.2.2 $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \neq \mathbb{P}(\mathrm{gen}(T))$. □

Definición 2.3.7. Sea $(M, P) \in \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda)$. Decimos que (M, P) es sumando directo de $(M', P') \in \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda)$, si $M \mid M'$ y $P \mid P'$. En tal caso, escribimos $(M, P) \mid (M', P')$.

Teorema 2.3.8. [AIR14*, 2.18*] *Un par* (U, Q) *casi completo* τ*-inclinante de soporte básico es sumando directo de dos pares* (T, P)*,* (T', P') τ*-inclinantes de soporte básicos. Más aún,* $\{\mathrm{gen}(T), \mathrm{gen}(T')\} = \{\mathrm{gen}(U), ({}^{\perp_0}\tau U) \cap Q^{\perp_0}\}$.

Demostración. Dividiremos la demostración en dos casos.

• $Q = 0$. Sea $U \oplus X$ un Λ-módulo τ-inclinante de soporte. Por el Teorema 2.2.2 y la Proposición 2.1.8 es suficiente ver que $\mathrm{gen}(U \oplus X) \in \{\mathrm{gen}(U), {}^{\perp_0}(\tau U)\}$. En efecto, si $X = 0$ tenemos que $\mathrm{gen}(U \oplus X) = \mathrm{gen}(U)$.

Si $X \in \mathrm{ind}(\Lambda)$. Por la Proposición 2.3.5, tenemos los siguientes dos casos $X \in \mathrm{gen}(U)$ o bien ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau X)$.

Si $X \in \mathrm{gen}(U)$, se sigue que $\mathrm{gen}(U \oplus X) = \mathrm{gen}(U)$.

Si ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau X)$, se tiene del Teorema 2.2.11 que

$$\mathrm{gen}(U \oplus X) = {}^{\perp_0}\tau(U \oplus X) = {}^{\perp_0}(\tau U).$$

• $Q \neq 0$. Por la Proposición 2.1.8 U es un $\Lambda/\langle e \rangle$-módulo casi completo τ-inclinante, donde $\mathrm{add}(\Lambda e) = \mathrm{add}(Q)$. Por lo anterior U es sumando directo de exactamente de dos $\Lambda/\langle e \rangle$-módulos τ-inclinantes y por la Proposición 2.1.8 estos estan en biyección con los pares τ-inclinantes de soporte que tienen a (U, Q) como sumando directo. $\square$

Definición 2.3.9. Sean (T, P) y (T', P') pares τ-inclinantes de soporte básicos de Λ-módulos. Decimos que (T, P) es una **mutación** de (T', P'), si existe un par (U, Q) casi completo τ-inclinante de soporte básico que es sumando directo de (T, P) y (T', P'). Escribimos $\mu_X(T, P) := (T', P')$, o simplemente $\mu_X(T) := T'$.

En este caso podemos describir la mutación como sigue. Sea (T, P) un par τ-inclinante de soporte básico en Λ. Si $X \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, es tal que $X \mid T$ o bien $X \mid P$, entonces podemos calcular $\mu_X(T, P)$ como sigue.

a) Si $X \mid T$ una de las siguientes condiciones sucede:

- Existe $Y \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ tal que $X \neq Y$ y $\mu_X(T, P) = (T/X \oplus Y, P)$.

- Existe $Q \in \text{ind}(\text{proj}(\Lambda))$ tal que $\mu_X(T,P) = (T/X, P \oplus Q)$.

b) Si $X \mid P$, existe $Y \in \text{ind}(\Lambda)$ tal que $\mu_X(T,P) = (T \oplus Y, P/X)$.

El siguiente resultado es debido a Happel y Unger [HU89, 2.3].

Corolario 2.3.10. [AIR14, *2.24*] *Sea U un Λ-módulo casi completo inclinante básico. Entonces, U es fiel, si y sólo si, U es sumando directo de precisamente dos Λ-módulos inclinantes básicos.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.8 existen Λ-módulos τ-inclinantes de soporte T y T' tales que $T \neq T'$, $U \mid T$, $U \mid T'$, $\text{gen}(U) = \text{gen}(T)$ y

$$^{\perp_0}(\tau U) = \text{gen}(T').$$

$\Rightarrow$) Por la Proposición 1.4.2 $\text{gen}(U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau U)$ y por el Lema 2.2.4 tenemos que $\text{ann}(T') = \text{ann}(\text{gen}(T')) \subseteq \text{ann}(\text{gen}(T)) = \text{ann}(U) = 0$. Por la Proposición 2.1.5 *b*) T' y T son Λ-módulos inclinantes.

$\Leftarrow$) Supongamos que U no es fiel, por el Lema 2.2.4 T no es fiel y por la Proposición 2.1.5 *b*) T no es inclinante. □

2.4. Orden parcial y sucesiones de intercambio

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin básica.

El Teorema 2.3.8 nos va a permitir el carcaj de mutación en sτ-tilt(Λ). El objetivo principal de esta sección es ver la relación que tienen el carcaj de mutación y el carcaj de Hasse a un orden parcial en sτ-tilt(Λ).

Definición 2.4.1. Sean M, $N \in \text{mod}(\Lambda)$. Decimos que M es mayor o igual que N si $\text{gen}(N) \subseteq \text{gen}(M)$. En tal caso, escribimos $N \leq M$.
Lema 2.4.2. [AIR14, *2.25*] *Sean (T,P) y (U,Q) pares τ-inclinantes de soporte de Λ-módulos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $U \leq T$.

b) $\operatorname{Hom}_\Lambda(U_p, \tau(T_p)) = 0$*,* $\operatorname{add}(U/U_p) \subseteq \operatorname{add}(T/T_p)$ *y* $\operatorname{add}(P) \subseteq \operatorname{add}(Q)$*.*

c) $\operatorname{Hom}_\Lambda(U, \tau T) = 0$ *y* $\operatorname{add}(P) \subseteq \operatorname{add}(Q)$*.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ *b)* Veamos que $\operatorname{add}(U/U_p) \subseteq \operatorname{add}(T/T_p)$. Existe un epimorfismo $p : T^n \to U/U_p$. Por lo que $U/U_p \in \operatorname{add}(T/T_p)$, con lo cual $\operatorname{add}(U/U_p) \subseteq \operatorname{add}(T/T_p)$.

Luego, veamos que $\operatorname{Hom}_\Lambda(U_p, \tau(T_p)) = 0$. Por la Proposición 1.4.2 tenemos que $0 = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, U') = \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T_p, U')$ $\forall\ U' \in \operatorname{gen}(U_p) \subseteq \operatorname{gen}(T)$ y por la Proposición 1.4.2 $\operatorname{Hom}_\Lambda(U_p, \tau(T_p)) = 0$.

Por último, veamos que $\operatorname{add}(P) \subseteq \operatorname{add}(Q)$. Sea $q : T^m \to U$ un epimorfismo. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_\Lambda(P, -)$ a la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(q) \to T^m \to U \to 0,$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Hom}_\Lambda(P, T^m) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P, U) \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda(P, \operatorname{Ker}(q)) = 0.$$

Por la Proposición 2.1.5 se tiene que U es un $\Lambda/\langle e \rangle$-módulo sincero, donde $\operatorname{add}(Q) = \operatorname{add}(\Lambda e)$. Por lo tanto, $\operatorname{add}(P) \subseteq \operatorname{add}(Q)$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Por hipótesis y la Proposición 1.4.2 tenemos que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, U') = 0$ $\forall\ U' \in \operatorname{gen}(U)$. Por la Proposición 1.4.2 $\operatorname{Hom}_\Lambda(U, \tau T) = 0$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Dado que $U \in Q^{\perp_0} \subseteq P^{\perp_0}$ y $U \in {}^{\perp_0}(\tau T)$, concluimos por el Corolario 2.2.12 que $U \in ({}^{\perp_0}\tau T) \cap (P^{\perp_0}) = \operatorname{gen}(T)$. $\square$

Proposición 2.4.3. [AIR14, *2.26*] *Sean* T*,* U*,* $V \in s\tau - \operatorname{tilt}(\Lambda)$ *tales que*

$$V \leq U \leq T.$$

Entonces, $\operatorname{add}(T) \cap \operatorname{add}(V) \subseteq \operatorname{add}(U)$*.*

Demostración. Sea $X \in \operatorname{add}(T) \cap \operatorname{gen}(U)$. Veamos que X es Ext-proyectivo en $\operatorname{gen}(U)$. En efecto, por el Lema 2.4.2 *c)* $\operatorname{Hom}_\Lambda(U, \tau X) = 0$ y por la Proposición 1.4.2 $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, U') = 0$ $\forall\ U' \in \operatorname{gen}(U)$. Ahora, por el Teorema 2.2.2

$$X \in \operatorname{add}(\mathbb{P}(\operatorname{gen}(U))) = \operatorname{add}(U).$$

Concluimos que $\mathrm{add}(T) \cap \mathrm{add}(V) \subseteq \mathrm{add}(T) \cap \mathrm{gen}(U) \subseteq \mathrm{add}(U)$. $\square$

Proposición 2.4.4. [AIR14, *2.27*] *La biyección*

$$(-)^+ : \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda) \longleftrightarrow \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda^{\mathrm{op}})$$

en el Teorema 2.2.14 es un antiisomorfismo de órdenes parciales.

Demostración. Sean (T, P) y (U, Q) pares τ-inclinantes de soporte de Λ-módulos. Por el Lema 2.4.2 tenemos que $U \leq T$, si y sólo si,

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(U_p, \tau(T_p)) = 0,$$

$\mathrm{add}(U/U_p) \subseteq \mathrm{add}(T/T_p)$ y $\mathrm{add}(P) \subseteq \mathrm{add}(Q)$. Esto es equivalente a que, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Tr}(T_p), \tau\mathrm{Tr}(U_p)) = 0$, $\mathrm{add}((U/U_p)^*) \subseteq \mathrm{add}((T/T_p)^*)$ y

$$\mathrm{add}(P^*) \subseteq \mathrm{add}(Q^*).$$

Por último, por el Lema 2.4.2 esto sucede, si y sólo si,

$$\mathrm{Tr}(T_p) \oplus P^* \leq \mathrm{Tr}(U_p) \oplus Q^*.$$

$\square$

Definición 2.4.5. Sean $T, T' \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ tales que $T' = \mu_X(T)$. Entonces, por el Teorema 2.3.8 tenemos que $T' < T$ o bien $T < T'$. Decimos que T' es una **mutación izquierda** (**derecha**) de T si $T' < T$ $(T < T')$. En tal caso, escribimos $\mu_X^-(T) := T'$ $(\mu_X^+(T) := T')$.

Proposición 2.4.6. [AIR14, *2.28*] *Sean* $T := X \oplus U$, $T' \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ *tales que* $T' = \mu_X(T)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $\mu_X^-(T) = T'$ $\qquad (\mu_X^+(T) = T')$.

b) ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau X)$ $\qquad ({}^{\perp_0}(\tau U) \not\subseteq {}^{\perp_0}(\tau X))$.

c) $X \notin \mathrm{gen}(U)$ $\qquad (X \in \mathrm{gen}(U))$.

Si T *es* τ*-inclinante, entonces la siguiente condición es equivalente a las anteriores.*

d) T *es la completación de Bongartz de* U $\qquad$ *(*T *no es la completación de Bongartz de* U*).*

Demostración. $a) \iff b) \iff c)$ Se sigue de la Proposición 2.3.5.

Si T es un Λ-módulo τ-inclinante.

$d) \Rightarrow b)$ Por el Teorema 2.2.10 ${}^{\perp_0}(\tau T) = {}^{\perp_0}(\tau U)$. Por lo que ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau X)$.

$c) \Rightarrow d)$ Dado que U es un Λ-módulo casi τ-inclinante, por el Teorema 2.3.8 $\mathrm{gen}(U) \subset \mathrm{gen}(T) = {}^{\perp_0}(\tau U)$. Por el Teorema 2.2.2 $\mathbb{P}({}^{\perp_0}(\tau U)) = T$. □

Definición 2.4.7. El carcaj τ-inclinante de soporte $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$ se define como sigue:

- El conjunto de vértices es $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$.
- Dibujamos, una y sólo una flecha, de U a T si U es una mutación izquierda de T.

El siguiente teorema nos permite calcular las mutaciones izquierdas mediante las siguientes sucesiones de intercambio.

Teorema 2.4.8. [AIR14, *2.30*] *Sean* $U \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *casi completo* τ*-inclinante,* $T = X \oplus U$ *la completación de Bongartz de* U *y* $\eta : X \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{g} Y \to 0$ *una sucesión exacta, con* f *una* $\mathrm{add}(U)$*-envolvente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si U *no es sincero, entonces* $Y = 0$*. En tal caso,* $\mu_X^-(T) = U$ *y*

$$U \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda) - \tau - \mathrm{tilt}(\Lambda).$$

b) Si U *es sincero, entonces* $Y = (Y')^n$*, con* $Y' \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ *y* $Y' \notin \mathrm{add}(T)$*. En este caso,* $\mu_X^-(T) = Y' \oplus U$*.*

Demostración. $a)$ Si U no es sincero, entonces existe $e^2 = e \in \Lambda$ primitivo tal que $eU = 0$. Por el Lema 2.1.2 y la Proposición 1.4.13 se tiene que U es un $\Lambda/\langle e\rangle$-módulo τ-inclinante. Dado que T es la completación de Bongartz de U se sigue de la Proposición 2.4.6 que $U = \mu_X^-(T)$.

$b)$ Si U es sincero. Por la Proposición 2.4.6 se tiene que ${}^{\perp_0}(\tau U) \subseteq {}^{\perp_0}(\tau X)$ y por la Proposición 1.4.2 se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(U, \tau Y) = 0$; por el Lema 2.3.1 se tiene que $Y \in \mathrm{add}(\mathbb{P}(\mathrm{gen}(U)))$. Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \tau(Y \oplus U))$ a η y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, \tau(Y \oplus U)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(U, \tau(Y \oplus U)) = 0.$$

Con lo cual $Y \oplus U$ es τ-rígido. Veamos que g es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta. En efecto, sea $T' \in \mathrm{add}(T)$. Puesto que T' es τ-rígido, por la Proposición 1.4.2 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T', \mathrm{Im}(f)) = 0$. Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(T', -)$ a la siguiente sucesión exacta $0 \to \mathrm{Im}(f) \to U' \overset{g}{\to} Y \to 0$, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(T', U') \overset{\mathrm{Hom}_\Lambda(T', g)}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(T', Y) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T', \mathrm{Im}(f)) = 0.$$

Ahora bien, sea $h : T \to Y$. Dado que g es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta, existe $g' : T' \to U'$ tal que $gg' = h$, por lo que $h \in \mathrm{rad}_\Lambda(T', Y)$ y por el Corolario 1.2.10, concluimos que $\mathrm{add}(T) \cap \mathrm{add}(Y)$.

Por último, supongamos que $Y = 0$. Puesto que U es sincero, por el Lema 2.3.4 se tiene que $X \cong U'$, lo cual es una contradicción ya que X no es un sumando directo de U. Por lo tanto $Y \neq 0$. □

A continuación vamos a dar un método de calcular las mutaciones de un Λ-módulo τ-inclinante de soporte.

Sean T, $T' \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ tales que $\mu_X(T) = T'$.

a) Si $\mu^-_X(T) = T'$, entonces T' puede ser calculado aplicando el Teorema 2.4.8.

b) Si $\mu^+_X(T) = T'$, entonces T' puede ser calculado usando la Proposición 2.4.4 y el Teorema 2.4.8, mediante los siguientes tres pasos

- Calcular T^+.
- Calcular $\mu^-_X(T^+)$.
- Calcular $(\mu^-_X(T^+))^+$.

La demostración del siguiente teorema se dará de manera más general en la siguiente sección.

Teorema 2.4.9. [AIR14, *2.35*] *Sean* U*,* $T \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ *tales que* $T < U$*. Entonces,*

a) existe V *una mutación derecha de* T *tal que* $V \leq U$*.*

b) existe V' *una mutación izquierda de* U *tal que* $T \leq V'$*.*

Demostración. Ver Teorema 2.5.9. □

Teorema 2.4.10. [AIR14, *2.33*] *Para todos* U*,* $T \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) U *es una mutación izquierda de* T*.*

b) T *es una mutación derecha de* U*.*

c) $U < T$ *y no existe* $V \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ *tal que* $U < V < T$*.*

Demostración. Sean (U, Q) y (T, P) pares τ-inclinantes de soporte.

a) $\Rightarrow$ *b)* Por el Teorema 2.3.8 existe un par de Λ-módulos (V, S) casi completo τ-inclinante y $X \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ tales que $(V, S) \mid (T, P)$, $(V, S) \mid (U, Q)$ y

$$\mu_X^-(T) = U.$$

Por lo que existe $Y \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ tal que $Y \mid U$ o bien $Y \mid Q$. Así pues, $\mu_Y(U) = T$. Concluimos que $\mu_Y^+(U) = T$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sean (V, S) un par τ-inclinante de Λ-módulos tales que $U \leq V < T$, (V', S') un par casi completo τ-inclinante de Λ-módulos tal que $(V', S') \mid (T, P)$ y $(V', S') \mid (U, Q)$. Por la Proposición 2.4.3 se tiene que $V' \mid V$ y por el Lema 2.4.2 se tiene que $S' \mid P \mid S$. Con lo cual $(V', S') \mid (V, S)$. Se sigue del Teorema 2.3.8 que $U = V$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Por el Teorema 2.4.9 existe V una mutación izquierda de T tal que $U \leq V < T$. Por hipótesis $U \cong V$. □

Del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.11. [AIR14, *2.34*] *El carcaj τ-inclinante de soporte*

$$\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$$

es el carcaj de Hasse del conjunto parcialmente ordenado $(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda), \leq)$*.*

El siguiente resultado es análogo a [HU05, Corolario 2.2].

Corolario 2.4.12. [AIR14, *2.38*] *Si* $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$ *tiene una componente conexa finita* C*, entonces* $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)) = C$*.*

Demostración. Sea $T \in C$. Por el Teorema 2.4.9 y el Corolario 2.4.11 existe una sucesión $T := T_0 < \cdots < T_i < \cdots$ tal que $T_i \leq \Lambda$ para toda i. Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda = T_n \in C$. Ahora bien, sea T' un Λ-módulo τ-inclinante de soporte. Como $T' \leq \Lambda$, por el Teorema 2.4.9 existe una sucesión de mutaciones $\Lambda \geq M_0 \cdots > M_i > \cdots$ tales que $T' \leq M_i$ para toda i. Ya que C es finita existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T' = M_k \in C$. $\square$

Veamos un ejemplo donde $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$ no tiene una componente conexa finita.

Ejemplo 2.4.13. [Ja15, 2.20]. Sea A el álgebra de Kronecker. Por el Teorema A.3.2 se tiene que $\mathrm{S}(1)$ y $\mathrm{S}(2)$ son los únicos A-módulos τ-rígidos no sinceros. Notemos que $\mathrm{S}(1) = J_0$, $\mathrm{S}(2) = Q_0 \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\mathrm{A})$. Por el Teorema A.3.2 se tiene que $\{Q_n \oplus Q_{n+1}, Q_n \oplus Q_{n-1}\}$ son los únicos A-módulos τ-inclinantes básicos tales que Q_n es sumando directo $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$. Análogamente, por el Teorema A.3.2 $\{J_n \oplus J_{n+1}, J_n \oplus J_{n-1}\}$ son los únicos A-módulos τ-inclinantes básicos tales que J_n es sumando directo $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$. Por el Teorema A.3.2

tenemos descrito el carcaj τ-inclinante de soporte

$$\begin{tikzcd}
Q_0 \arrow[r] & Q_0 \oplus Q_1 \\
& Q_1 \oplus Q_2 \arrow[u] \\
& Q_2 \oplus Q_3 \arrow[u] \\
0 \arrow[uuu] \arrow[ddd] & \vdots \arrow[u] \\
& J_3 \oplus J_2 \arrow[u] \\
& J_2 \oplus J_1 \arrow[u] \\
J_0 \arrow[r] & J_1 \oplus J_0. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

2.5. Álgebras τ-rígidas finitas

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin básica.

El objetivo principal de esta sección es introducir las álgebras τ-rígidas finitas, ver varias equivalencias y dar resultados análogos a las álgebras de tipo de representación finita. El siguiente resultado esta inspirado en el Teorema de Brenner y Butler [HR82, Teorema 2.1].

Proposición 2.5.1. [DIJ, *3.2*] *Sean* $M \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$ *y el funtor de evaluación* $\mathrm{e}_M := \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$. *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si $f : X \to Y$ *es un morfismo en* $\mathrm{gen}(M)$, *tal que* $\mathrm{e}_M(f)$ *es un epimorfismo, entonces* f *es un epimorfismo.*

b) El funtor de evaluación $\mathrm{e}_M : \mathrm{gen}(M) \to \mathrm{cogen}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}} M)$ *es una equivalencia* *de categorías exactas (es decir,* $\eta : 0 \to A \to B \to C$ *es una sucesión exacta en* $\mathrm{gen}(M)$*, si y sólo si,* $\mathrm{e}_M(\eta)$ *es una sucesión exacta en* $\mathrm{sub}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{T})$*).*

c) Si $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(M)$ *es una clase de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, entonces* $\mathrm{e}_M(\mathcal{T})$ *es cerrado por extensiones en* $\mathrm{mod}(\Gamma)$*.*

Demostración. a) Consideremos la factorización de f a través de su imagen $f = if'$. Dado que $\mathrm{e}_M(f) = \mathrm{e}_M(i)\mathrm{e}_M(f')$ es un epimorfismo, se tiene que $\mathrm{e}_M(i)$ es un epimorfismo. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$\eta : 0 \to \mathrm{Im}(f) \overset{i}{\to} Y \to \mathrm{Coker}(f) \to 0.$$

Aplicando el funtor de evaluación e_M a η, por la Proposición 1.4.2 obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{e}_M(\mathrm{Im}(f)) \overset{\mathrm{e}_M(i)}{\to} \mathrm{e}_M(Y) \to \mathrm{e}_M(\mathrm{Coker}(f)) \to 0.$$

Dado que $\mathrm{e}_M(\mathrm{Coker}(f)) = 0$ tenemos que $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

b) Sea $\Gamma' = \mathrm{End}_{\Lambda/\mathrm{ann(M)}}(M)$. Por la Proposición 2.1.5 y el Teorema de Brenner y Butler $\mathrm{e}_M : \mathrm{gen}(M) \to \mathrm{cogen}(\mathrm{D}_{\Gamma'^{\mathrm{op}}}M)$ es una equivalencia de categorías. Sea $\eta : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{gen}(M)$, por la Proposición 1.4.2 se tiene que $\mathrm{e}_M(\eta)$ es una sucesión exacta en $\mathrm{cogen}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}M)$.

Recíprocamente, sea $0 \to \mathrm{e}_M(X) \overset{\mathrm{e}_M(f)}{\to} \mathrm{e}_M(Y) \overset{\mathrm{e}_M(g)}{\to} \mathrm{e}_M(Z) \to 0$ una sucesión exacta, con $X,\ Y,\ Z \in \mathrm{gen}(M)$. Por a), se tiene que g es un epimorfismo. Puesto que $\mathrm{e}_M(gf) = 0$ se tiene que $gf = 0$. Consideremos la siguiente sucesión exacta $\xi : 0 \to \mathrm{Ker}(g) \overset{i}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \to 0$. Por la propiedad universal del Kernel $\exists!\ k : X \to \mathrm{Ker}(g)$. Ahora, aplicando el funtor de evaluación e_M a ξ, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{e}_M(\mathrm{Ker}(g)) \overset{\mathrm{e}_M(i)}{\to} \mathrm{e}_M(Y) \overset{\mathrm{e}_M(g)}{\to} \mathrm{e}_M(Z).$$

Así, $\mathrm{e}_M(i) : \mathrm{e}_M(\mathrm{Ker}(g)) \to \mathrm{e}_M(Y)$ es el Kernel de $\mathrm{e}_M(g)$, con lo cual $\mathrm{e}_M(k)$ es un isomorfismo y por el proceso de proyectivización k es un isomorfismo.

c) Es inmediato de b). $\square$

Definición 2.5.2. Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ una subcategoría plena y $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

a) Decimos que M es $\mathcal{C}-$ **filtrado**, si existe una cadena de submódulos de M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

tal que $M_k/M_{k-1} \in \mathcal{C}\ \forall\ 1 \leq k \leq n$. A esta cadena la llamamos una $\mathcal{C}-$ **filtración**.

b) Si M es $\mathcal{C}$-filtrado, entonces

$$\ell_{\mathcal{C}}(M) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M\ una\ \mathcal{C} - filtración\}$$

es llamada la $\mathcal{C}-$ **longitud** de M.

Notación 2.5.3. *Sean* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *una subcategoría plena. Denotamos por* :

- $\mathrm{Tors}(\mathcal{C}) := \cap_{\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}\subseteq\mathrm{mod}(\Lambda)\ \mid\ \mathcal{T}\text{ clase de torsión}}\mathcal{T}$.
- $\mathrm{Filt}(\mathcal{C})$ *a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *cuyos objetos son* Λ*-módulos* $\mathcal{C}$*-filtrados.*

El siguiente resultado es una caracterización de $\mathrm{Tors}(\mathcal{C})$ a partir de los Λ-módulos $\mathcal{C}$-filtrados.

Proposición 2.5.4. [DIJ, *3.3*] *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$ *una subcategoría plena. Entonces,* $\mathrm{Tors}(\mathcal{C}) = \mathrm{Filt}(\mathrm{gen}(\mathcal{C}))$.

Demostración. Primero, veamos que $\mathrm{Filt}(\mathrm{gen}(\mathcal{C}))$ es una clase de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. En efecto, sea $0 \to N \to M \to K \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, con $N,\ K \in \mathrm{Filt}(\mathrm{gen}(\mathcal{C}))$. Por el Teorema de la correspondencia existen $\mathrm{gen}(\mathcal{C})$-filtraciones $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = N$ y

$$0 = M_n/N \subseteq M_{n+1}/N \subseteq \cdots \subseteq M_r/N = M/N.$$

Por lo que, $0 = M_0 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq M_r/N = M$ es una $\mathrm{gen}(\mathcal{C})$-filtración. Por otro lado, si $M \in \mathrm{Filt}(\mathrm{gen}(\mathcal{C}))$ existe una $\mathrm{gen}(\mathcal{C})$-filtración

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M.$$

Por el tercer Teorema del isomorfismo, se tiene que

$$0 = M_0/N \subseteq M_1/N \subseteq \cdots \subseteq M_n/N = M/N,$$

es una $\mathrm{gen}(\mathcal{C})$-filtración de K.

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ una clase de torsión. Veamos por inducción sobre $\ell_{\mathrm{gen}(\mathcal{C})}(M) = n$ que $M \in \mathcal{T}$.

Si $\ell_{\mathrm{gen}(\mathcal{C})}(M) = 0$, se tiene que $M = 0 \in \mathrm{gen}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}$.

Si $\ell_{\mathrm{gen}(\mathcal{C})}(M) = n + 1$, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M_n \to M \to M/M_n \to 0,$$

donde $\ell_{\mathrm{gen}(\mathcal{C})}(M_n) = n$ y $M/M_n \in \mathrm{gen}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}$. Dado que $\mathcal{T}$ es cerrada por extensiones, concluimos que $M \in \mathcal{T}$. $\square$

Sean M un Λ-módulo τ-inclinante, $\Gamma := (\mathrm{End}_\Lambda(M))^{\mathrm{op}}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(M)$ una clase de torsión. El siguiente resultado caracteriza $\mathrm{e}_M(\mathcal{T})$ en $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Teorema 2.5.5. [DIJ, *3.4*] *Sean* $M \in \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)^{op}$,

$$\mathcal{Y} := \mathrm{cogen}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}T)$$

y $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(M)$ *una clase de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,*

$$\mathrm{e}_M(\mathcal{T}) = \mathcal{Y} \cap \mathrm{Tors}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T})) = \mathcal{Y} \cap \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T})).$$

Demostración. • $\mathcal{Y} \cap \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T})) \subseteq \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$.

Sea $X \in \mathcal{Y} \cap \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$. Por la Proposición 2.5.1 *a*) existen $K \in \mathcal{T}$, $N \in \mathrm{gen}(M)$ y un epimorfismo $\mathrm{e}_M(p) : \mathrm{e}_M(K^n) \to \mathrm{e}_M(N) \cong X$. Por el Teorema 2.5.1 *a*) $p : K^n \to N$ es un epimorfismo. Por lo que $N \in \mathcal{T}$.

• $\mathrm{e}_M(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{Y} \cap \mathrm{Tors}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$.

Es clara.

• $\mathcal{Y} \cap \mathrm{Tors}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{Y} \cap \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$.

Sean $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta, con $X, Z \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Veamos que $Y \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$. En efecto, por la Proposición 2.5.1

$$X \in \mathcal{Y} \cap \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T})) \subseteq \mathrm{e}_M(\mathcal{T}).$$

Sean $p : Z' \to Z$ un epimorfismo, con $Z' \in \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas obtenido mediante un pushout

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "q"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por la Proposición 2.5.1 *c*) $Y' \in \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$, por el Lema de la serpiente tenemos que $Y \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$.

Luego, sea $X \in \mathcal{Y} \cap \mathrm{Tors}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$. Veamos por inducción sobre $n := \ell_{\mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))}(X)$ que $X \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$.

Si $\ell_{\mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))}(X) = 0$, se tiene que $X = 0 \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$.

Si $\ell_{\mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))}(X) = n + 1$, se tiene una sucesión exacta

$$0 \to X_n \to X \to X/X_n \to 0,$$

con $\ell_{\mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))}(X_n) = n$ y $X/X_n \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$. Por hipótesis de inducción y lo anterior, concluimos que $X \in \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$. $\square$

Lema 2.5.6. *Sean* $P \in \mathrm{ind}(\mathrm{proj}(\Lambda))$ *y* $\Lambda/P \xrightarrow{f} P \to C \to 0$ *una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$*, con* $C \neq 0$*. Si* $M \neq 0$ *es un cociente de* C*, entonces* $\mathrm{top}(P) = M$*.*

Demostración. Sea $p : C \to M$ un epimorfismo. Puesto que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda/P, \mathrm{top}(P)) = 0,$$

se tiene de la propiedad universal del Cokernel el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Lambda/P \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{top}(P). \arrow[ur, dashed, "\exists!\, g"'] & & \end{tikzcd}$$

Con lo cual pg es un epimorfismo. Por lo tanto, $\operatorname{top}(P) = M$. $\square$

El siguiente resultado caracteriza a las mutaciones izquierdas en el álgebra de endomorfismo opuesto.

Proposición 2.5.7. [DIJ, *3.6*] *Sean* $M \in \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$, $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(M)^{op}$, $\mathcal{Y} := \operatorname{cogen}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T))$ *y* $X \in \operatorname{ind}(\Lambda)$ *tal que* $X \mid M$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $M > \mu_X(M)$, *si y sólo si,* $S_X := \operatorname{top}(\mathrm{e}_M(X)) \in \mathcal{Y}$.

b) Si $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{gen}(M)$ *es una clase de torsión tal que* $S_X \in \mathcal{Y} - \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$, *entonces* $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{gen}(\mu_X(M)) \subset \operatorname{gen}(M)$.

Demostración. $a)$ Sea $M/X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Lambda)$, con f una $\operatorname{add}(M/X)$-precubierta. Por la Proposición 2.4.6 $M > \mu_X(M)$, si y sólo si, $C \neq 0$.

$\Rightarrow$) Consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \to \operatorname{Im}(f) \to X \xrightarrow{g} C \to 0$. Aplicando el funtor evaluación obtenemos la siguiente sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$ por la Proposición 1.4.2

$$0 \to \mathrm{e}_M(\operatorname{Im}(f)) \to \mathrm{e}_M(X) \xrightarrow{\mathrm{e}_M(g)} \mathrm{e}_M(C) \to 0.$$

Así, la siguiente es una sucesión exacta en $\operatorname{mod}(\Gamma)$

$$\Gamma/\mathrm{e}_M(X) \xrightarrow{\mathrm{e}_M(f)} \mathrm{e}_M(X) \xrightarrow{\mathrm{e}_M(g)} \mathrm{e}_M(C) \to 0.$$

Por el Lema 2.5.6 $\mathrm{e}_M(C) \cong S_X$; por la Proposición 2.5.1 $b)$ $S_X \in \mathcal{Y}$.

$\Leftarrow$) Por la Proposición 2.5.1 $a)$ existe $h : X \to N$ un epimorfismo tal que $\mathrm{e}_M(h) : \mathrm{e}_M(X) \to \mathrm{e}_M(N) = S_X$ es la proyección canónica. Luego, tenemos que $0 = \mathrm{e}_M(hf) : \mathrm{e}_M(M/X) \to S_X$. Puesto que $h \neq 0$, concluimos que f no es un epimorfismo. Por lo que $C \neq 0$.

$b)$ Sea $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{gen}(M)$ una clase de torsión tal que $S_X \in \mathcal{Y} - \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$. Veamos que $\mathrm{e}_M(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{e}_M(\operatorname{gen}(\mu_X(M)))$. En efecto, sea $T \in \mathcal{T}$. Por el Teorema 2.5.5

$\mathcal{Y} - \mathrm{e}_M(\mathcal{T}) = \mathcal{Y} - \mathrm{gen}(\mathrm{e}_M(\mathcal{T}))$, así que $S_X \not| \mathrm{top}(\mathrm{e}_M(T))$. Por lo que existe $q : \Gamma^n/\mathrm{e}_M(X)^n = \mathrm{e}_M(M/X)^n \to \mathrm{e}_M(T)$ un epimorfismo. Por la Proposición 2.5.1 a) se tiene que $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(\mu_X(M))$. □

Lema 2.5.8. [DIJ, *3.7*] *Sean* $M := \oplus_{i=1}^n M_i \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *básico, donde* $M_i \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ *y* $M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \to C_i \to 0$ *sucesiones exactas* $\forall\ 1 \leq i \leq n$, *donde* f_i *una* $\mathrm{add}(M/M_i)$*-precubierta. Entonces,* $M \in \mathrm{Tors}(C := \oplus_{i=1}^n C_i)$.

Demostración. Vamos a definir inductivamente los siguientes Λ-módulos y morfismos. Sea $N_0 := M$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ por el Teorema de Krull-Schmidt $N_i := \oplus_{i=1}^n M_i^{k_i}$. Por lo que definimos las siguientes sucesiones exactas

$$\eta_i := N_{i+1} := \oplus_{i=1}^n (M_i')^{k_i} \overset{g_i := \oplus_{i=1}^n (f_i)^{k_i}}{\to} N_i \xrightarrow{q_i} K_i \to 0.$$

Notemos que $K_i \in \mathrm{add}(C)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{rad}(\mathrm{End}(M))^m = 0$. Por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & N_{m+1} \arrow[r, "g_m"] & N_m \arrow[r, "q_m"] \arrow[d, equal] & K_m \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\, h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f_{m-1}) \arrow[r] & N_m \arrow[r] & \mathrm{Im}(f_{m-1}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\mathrm{Im}(f_{m-1}) \in \mathrm{Tors}(C)$. Considerando la siguiente sucesión exacta $0 \to \mathrm{Im}(f_{m-1}) \to N_{m-1} \to K_{m-1} \to 0$. Así que $N_{m-1} \in \mathrm{Tors}(C)$. Análogamente, $N_j \in \mathrm{Tors}(C)\ \forall\ 0 \leq j \leq m-1$. □

El siguiente resultado nos muestra la importancia de las mutaciones de un Λ-módulo τ-inclinante de soporte M, respecto a las siguientes clases de torsión $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(M)$.

Teorema 2.5.9. [DIJ, *3.1*] *Sean* $M := \oplus_{i=1}^n M_i \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$, *con* $M_i \in \mathrm{ind}(\Lambda)\ \forall\ 1 \leq i \leq n$ *y* $\mathcal{T} \subset \mathrm{gen}(M)$ *una clase de torsión en* $\mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, existe* $1 \leq j \leq n$ *tal que* $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(\mu_{M_j}(M)) \subset \mathrm{gen}(M)$.

Demostración. a) Supongamos que $\forall\ 1 \leq i \leq n$,

$$S_i := \mathrm{top}(\mathrm{e}_M(M_i)) \in \mathrm{e}_M(\mathrm{gen}(M)) =: \mathcal{Y},$$

se tiene que $S_i \in \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$. Consideremos las siguientes sucesiones exactas $M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \to C_i \to 0$, donde f_i es una $\mathrm{add}(M/M_i)$-cubierta. Aplicando el funtor de evaluación a las sucesiones exactas anteriores, obtenemos las siguientes sucesiones exactas en $\mathrm{mod}(\Gamma)$

$$\mathrm{e}_M(M_i') \xrightarrow{\mathrm{e}_M(f_i)} \mathrm{e}_M(M_i) \to \mathrm{e}_M(C_i) \to 0,$$

con $\mathrm{e}_M(f_i)$ una $\mathrm{add}(\Gamma/\mathrm{e}_M(M_i))$-cubierta. Por el proceso de proyectivización y el Lema 2.5.6 tenemos que $\mathrm{e}_M(C_i) = 0$ o $\mathrm{e}_M(C_i) = S_i$. Por hipótesis $S_i \in \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$; por la Proposición 2.5.1 *a)* $C_i \in \mathcal{T}$ y por el Lema 2.5.8 $M \in \mathcal{T}$, lo cual es una contradicción ya que $\mathcal{T} \subset \mathrm{gen}(M)$.

Por último, dado que $\mathcal{T} \subset \mathrm{gen}(M)$ se tiene que $0 \neq \mathrm{gen}(M)$. Por la Proposición 2.5.1 *b)* $0 \neq \mathcal{Y}$, con lo cual existe $S_j \in \mathcal{Y} - \mathrm{e}_M(\mathcal{T})$. Por lo tanto, por la Proposición 2.5.7 $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(\mu_{M_j}(M)) \subset \mathrm{gen}(M)$. □

Definición 2.5.10. Sean Q una gráfica y $x \in Q$ un vértice.

a) Decimos que x tiene grado n, si tiene n flechas incidentes en x. En tal caso, escribimos $\mathrm{d}_Q(x) = n$.

b) Decimos que Q es n-regular, si todos los vérices en Q tienen grado n.

El siguiente resultado es inmediato del Teorema 2.3.8.

Proposición 2.5.11. *El carcaj τ-inclinante de soporte* $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$ *es* $\mathrm{rkK}_0(\Lambda)$*-regular.*

El siguiente resultado caracteriza las álgebras τ-rígidas finitas en términos de clases de torsión funtorialmente finitas y es análogo a un resultado clásico de Auslander-Reiten [AR91, Proposición 1.2].

Teorema 2.5.12. [DIJ*, 2.9, 3.8, 3,9*] *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) El conjunto de los Λ-módulos inescindibles τ-rígidos es finito.

b) El conjunto de los Λ-módulos τ-rígidos básicos es finita.

c) $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ *es un conjunto finito.*

d) $\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ *es un conjunto finito.*

e) Existe una cota superior finita sobre la longitud de las trayectorias en $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$.

f) No existe una trayectoria infinita que términa en Λ *en* $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$.

g) Toda clase de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es funtorialmente finita.*

h) No existe una trayectoria infinita que empieza en 0 en $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$.

i) Toda clase libre de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ *es funtorialmente finita.*

Demostración. Sea $n := \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$.

$a) \Rightarrow b)$ Sea $m := \{M \in \mathrm{ind}(\Lambda) \mid M$ τ-rígido básico$\}$. Dado que $\forall\ P \in \mathrm{ind}(\mathrm{proj}(\Lambda))$ es τ-rígido, tenemos que $n \leq m$. Con lo cual hay a lo más $C_t := m!/(m-t)!t!$ (combinaciones de m elementos tomados de t) Λ-módulos básicos de rango t. Por la Proposición 1.4.14 el rango de un Λ-módulo τ-rígido es a lo más n. Así a lo más hay $\sum_{i=0}^{n} C_i$ Λ-módulos τ-inclinantes de soporte básicos.

$b) \Rightarrow c)$ Se sigue del Lema 2.1.2 que un Λ-módulo τ-inclinante de soporte es τ-rígido básico.

$c) \Rightarrow d), e)$ Son claras.

$d) \Rightarrow a)$ Sea $k := |\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)|$. Por el Teorema 2.2.10 hay a lo más kn Λ-módulos τ-rígidos inescindibles.

$e) \Rightarrow f)$ Es clara.

$f) \Rightarrow g)$ Supongamos que existe una clase de torsión $\mathcal{T}$ en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ que no es funtorialmente finita. Por el Teorema 2.5.9 existen $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$ tal que

$$\mathcal{T} \subset \cdots \mathrm{gen}(M_1) \subset \mathrm{gen}(M_0) \subset \mathrm{mod}(\Lambda) = \mathrm{gen}(\Lambda).$$

Esto nos da una trayectoria infinita que términa en Λ en $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$, lo cual es una contradicción.

$g) \Rightarrow h)$ Supongamos que existe una trayectoria infinita que empieza en 0 en $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$, $0 =: M_0 < \cdots < M_i < \cdots$. Consideremos

$$\mathcal{T} := \mathrm{Tors}(\cup_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}}\mathrm{gen}(M_i)).$$

Por hipótesis existe $N := \oplus_{j=1}^{m} N_i$ tal que $\mathcal{T} = \mathrm{gen}(N)$. Consideremos

$$J_t := \{k \mid M_t < \mu_{N_k}(N) < N\}.$$

Notemos que tenemos la siguiente cadena de contenciones $\cdots \subseteq J_1 \subseteq J_0$. Por el Teorema 2.5.9 tenemos que $\emptyset \neq J := \cap_{i\in\mathbb{N}} J_i$. Sea $j \in J$, con lo cual

$$\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{gen}(M_i) \subset \mathrm{gen}(\mu_{M_j}(M)) \subset \mathcal{T}.$$

Así, $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{gen}(\mu_{M_j}(M))$, lo cual es una contradicción.

$h) \Rightarrow c)$ Sea l la máxima longitud de las trayectorias en $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$ que empiezan en 0. Dado que $\mathrm{Q}(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda))$ es n-regular, se tiene que hay n sucesores inmediatos de 0. Luego, de estos n sucesores hay a lo más n sucesores inmediatos de cada uno. Prosiguiendo de esta manera se tiene que $|\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)| \leq \sum_{i=0}^{l} n^i$.
$g) \iff i)$ Se sigue del Teorema 1.3.16. □

Definición 2.5.13. Decimos que Λ es un **álgebra τ rígida finita** si satisface alguna de las condiciones del Teorema 2.5.12.

En el siguiente capítulo, veremos que las álgebras de tipo de representación finita están contenidas propiamente en las álgebras τ-rígidas finitas.

Capítulo 3

Teoría silting

En este capítulo, estudiamos las propiedades básicas de las subcategorías silting. Mostramos que los objetos inescindibles en cualquier subcategoría silting forman una base del grupo de Grothendieck de la categoría triangulada de Artin. En particular, todos los objetos silting tienen el mismo rango. También introducimos la mutación de subcategorías silting y la relación con los módulos τ-inclinantes de soporte.

En este capítulo $(\mathcal{C}, [1], \triangle)$ denotará una categoría triangulada y todas las subcategorías serán consideradas plenas.

Definición 3.0.1. Sean $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías. Decimos que:

a) $\mathcal{S}$ es presilting, si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$ y $\mathcal{S} = \mathrm{add}(\mathcal{S})$.

b) $\mathcal{S}$ es silting, si $\mathcal{S}$ es presilting y $\mathrm{thick}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$.

c) $\mathcal{T}$ es inclinante, si $\mathcal{T}$ es silting y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{<0}}$.

d) $S \in \mathcal{C}$ es presilting (silting, inclinante), si $\mathrm{add}(S)$ es presilting (silting, inclinante).

3.1. Orden parcial en subcategorías silting

El objetivo principal de ésta sección es introducir un orden parcial en las subcategorías silting y describir la categoría $\mathcal{C}$, cuando ésta tiene una subcategoría silting $\mathcal{S}$.

Notación 3.1.1. *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría. Denotamos por :*

- $\operatorname{smd}(\mathcal{X}) := \{Y \in \mathcal{C} \mid \exists\ X \in \mathcal{X}\ Y \mid X\}$.
- $\mathcal{X}^{\perp_{>n}} := \{Z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z[k]) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}\ \forall\ k > n\}$.
- $\mathcal{X}^{\perp_{<m}} := \{Z \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z[j]) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X} \quad \forall\ j < m\}$.
- $\mathcal{X} * \mathcal{Y} := \{Z \in \mathcal{C} \mid \exists\ X \to Z \to Y \to X[1] \in \triangle\}$.
- $\operatorname{thick}(\mathcal{X})$ *a la subcategoría gruesa mas pequeña de $\mathcal{C}$ que contiene a $\mathcal{X}$.*
- $\operatorname{silt}(\mathcal{C})$ *a la clase de todas las subcategorías silting de $\mathcal{C}$.*
- $\operatorname{tilt}(\mathcal{C})$ *a la clase de todas las subcategorías inclinantes de $\mathcal{C}$.*

Definición 3.1.2. Sean $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$, escribimos $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$ si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$.

Lema 3.1.3. [AI12, *2.15*] *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría no vacía. Tenemos que :*

a) $\operatorname{thick}(\mathcal{X}) = \bigcup_{\substack{0<n \\ \{n_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{Z}}} \operatorname{smd}(\mathcal{X}[n_1] * \cdots * \mathcal{X}[n_l]) =: \mathcal{Y}$.

Más aún, si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_{>0}}$.

b) $\operatorname{thick}(\mathcal{X}) = \bigcup_{0 \leq l} \operatorname{smd}(\mathcal{X}[-l] * \mathcal{X}[1-l] * \cdots * \mathcal{X}[l-1] * \mathcal{X}[l]) =: \mathcal{Z}$.

Demostración. a) Aseguramos que $\mathcal{Y}$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{C}$ que contiene a $\mathcal{X}$. En efecto, es claro que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Sean X, $Y \in \mathcal{Y}$, con lo cual existen $\bar{X}, \bar{Y}$ tal que $X \oplus \bar{X} = X'$, $Y \oplus \bar{Y} = Y'$,

$$Z_1[n_1] \to X' \to Z_2 \to Z[n_1 + 1] \in \triangle$$

y $Z_3[m_1] \to Y' \to Z_4 \to Z_3[m_1 + 1] \in \triangle$, con $Z_1,\ Z_3 \in \mathcal{X}$, $Z_2 \in \mathcal{X}[n_2] * \cdots * \mathcal{X}[n_l]$ y $Z_4 \in \mathcal{X}[m_2] * \cdots * \mathcal{X}[m_r]$. Veamos que las siguientes condiciones se satisfacen.

• $0 \in \mathcal{Y}$. Es claro.

• $X \oplus Y \in \mathcal{Y}$. Consideremos el siguiente triángulo distinguido

$$Z_1[n_1] \oplus Z_3[m_1] \to X' \oplus Y' \to Z_2 \oplus Z_4 \to Z_1[n_1+1] \oplus Z_3[m_1+1].$$

Por la Proposición A.7.6 *a*) tenemos que $Z_2 \to Z_2 \oplus Z_4 \to Z_4 \to Z_2[1] \in \triangle$, por lo que $Z_2 \oplus Z_4 \in \mathcal{X}[n_2] * \cdots * \mathcal{X}[n_l] * \mathcal{X}[m_2] * \cdots * \mathcal{X}[m_r]$. Concluimos que $X \oplus Y \in \operatorname{smd}(\mathcal{X}[n_1] * \cdots * \mathcal{X}[m_r])$, ya que $Z_1[n_1] \oplus Z_3[m_1] \in \mathcal{X}[n_1] * \mathcal{X}[m_1]$.

• $X[\pm 1] \in \mathcal{Y}$. Por el Lema A.7.8 tenemos que

$$X'[\pm 1] \in \mathcal{X}[n_1 \pm 1] * \cdots * \mathcal{X}[n_l \pm 1].$$

Dado que el funtor $[\pm 1]$ es aditivo se sigue que $X'[\pm 1] = X[\pm 1] \oplus \bar{X}[\pm 1]$. Así pues, $X[\pm 1] \in \operatorname{smd}(\mathcal{X}[n_1 \pm 1] * \cdots * \mathcal{X}[n_l \pm 1])$.

• $X \to Y \to Z \to X[1] \in \triangle \Rightarrow\ Z \in \mathcal{Y}$. Por la Proposición A.7.6 *a*) y el axioma *a*) de categoría triangulada obtenemos el siguiente triángulo distinguido $X' \to Y' \to Z \oplus \bar{X}[1] \oplus \bar{Y} \to X'[1]$. Por cambio de cobase tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde todos los triángulos son distinguidos

$$\begin{tikzcd}
 & Z_3[m_1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z_3[m_1] \arrow[d] & \\
X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z \oplus \bar{X}[1] \oplus \bar{Y} \arrow[r] \arrow[d] & X'[1] \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r] & Z_4 \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & X'[1] \\
 & Z_3[m_1+1] \arrow[r, equal] & Z_3[m_1+1]. &
\end{tikzcd}$$

Luego, por cambio de base tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde todos los triángulos son distinguidos

$$\begin{tikzcd}
 & Z_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z_2 \arrow[d] & \\
Z_4 \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d] & Z_1[n_1+1] \arrow[r] \arrow[d] & Z_4[1] \arrow[d, equal] \\
Z_4 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & X'[1] \arrow[r] \arrow[d] & Z_4[1] \\
 & Z_2[1] \arrow[r, equal] & Z_2[1]. &
\end{tikzcd}$$

Con lo cual se tiene que $T \in \mathcal{X}[m_2] * \cdots * \mathcal{X}[m_r] * \mathcal{X}[n_1+1]$ y por el Lema A.7.8 $Q \in \mathcal{X}[m_2] * \cdots * \mathcal{X}[m_r] * \mathcal{X}[n_1+1] * \mathcal{X}[n_2+1] * \cdots * \mathcal{X}[n_l+1]$. Por lo que $Z \oplus \bar{X}[1] \oplus \bar{Y} \in \mathcal{X}[m_1] * \mathcal{X}[m_2] * \cdots * \mathcal{X}[m_r] * \mathcal{X}[n_1+1] * \mathcal{X}[n_2+1] * \cdots * \mathcal{X}[n_l+1]$. Por lo tanto, $Z \in \mathcal{Y}$.

- $Z \mid X \Rightarrow Z \in \mathcal{Y}$. Se sigue de la definición de $\mathcal{Y}$.

De lo anterior tenemos que $\mathrm{thick}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$.

La otra contención es clara.

b) Sean $m \leq n$ y $X[n] \to Y \to X'[m] \xrightarrow{f} X[n+1] \in \triangle$, con $X, X' \in \mathcal{X}$. Ya que $f = 0$ tenemos que $Y = X[n] \oplus X'[m]$, por lo que $\mathcal{X}[n] * \mathcal{X}[m] \subseteq \mathcal{X}[m] * \mathcal{X}[n]$. Por otro lado, sea $X \in \mathrm{thick}(\mathcal{X})$. Por *a)* $X \in \mathrm{smd}(\mathcal{X}[n_1] * \cdots * \mathcal{X}[n_l])$. Sean $r = \max\{|n_i| \mid 1 \leq i \leq l\}$, $\{m_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{Z}$ tales que $-r \leq m_j \leq r$ y $m_j \neq n_i$ y $X'[n_1] \to X'' \to Z \to X'[n_1+1] \in \triangle$, tal que $X \mid X''$, con $X' \in \mathcal{X}$ y $Z \in \mathcal{X}[n_2] * \cdots * \mathcal{X}[n_l]$. Luego, consideramos el siguiente triángulo distinguido

$$X'[n_1] \oplus_{j \in J} X'[m_j] \to X'' \oplus_{j \in J} X'[m_j] \to Z \to X'[n_1+1] \oplus_{j \in J} X'[m_j+1].$$

Por lo anterior, tenemos que $X \in \mathrm{smd}(\mathcal{X}[-r] * \cdots * \mathcal{X}[r])$. □

Lema 3.1.4. [AI12, *2.16*] *Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías y $Z \in \mathrm{smd}(\mathcal{X} * \mathcal{Y})$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos y $Z \in \mathcal{X}^{\perp_0}$, entonces $Z \in \mathcal{Y}$.

b) Si $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos y $Z \in {}^{\perp_0}\mathcal{Y}$, entonces $Z \in \mathcal{X}$.

Demostración. Haremos la prueba de a), ya que la prueba de b) es análoga.

Sean $X \overset{f}{\to} Z' \overset{g}{\to} Y \to X[1] \in \triangle$ tal que $Z \mid Z'$ y $\pi : Z' \to Z$ la proyección canónica. Dado que $\pi f = 0$ y g es un pseudo-Cokernel de f tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Z' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists\, p"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Puesto que π es un split-epi se tiene que p es un split-epi. Como $\mathcal{Y}$ es cerrada por sumandos directos, concluimos que $Z \in Y$. $\square$

Proposición 3.1.5. [AI12*, 2.17*] *Para cada $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$, tenemos que* :

a) $\mathcal{C} = \bigcup_{0 \leq l} \mathrm{smd}(\mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[l])$.

b) $\mathcal{S}^{\perp_{>0}} = \bigcup_{0 \leq l} \mathrm{smd}(\mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[l])$.

Demostración. a) Es clara del Lema 3.1.3 b).

b) Veamos por inducción sobre n que $\bigcup_{0 \leq n} \mathrm{smd}(\mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[n]) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$.

$n = 0$. Es clara.

$n + 1$. Sea $Y \to Z \to S[n+1] \to Y[1] \in \triangle$, con $Y \in \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[n]$. Por hipótesis $Y \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$ y como $S[n+1] \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$, concluimos que $Z \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$. Puesto que $\mathcal{S}^{\perp_{>0}}$ es cerrada por sumandos se cumple la afirmación.

Ahora bien, sea $X \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$. Por a) existe $l \geq 0$ tal que

$$X \in \mathrm{smd}(\mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[l]) \subseteq \mathrm{smd}(\mathcal{S}[-l] * \mathrm{smd}(\mathcal{S}[1-l] * \cdots * \mathcal{S}[l])).$$

Dado que $[1]$ es una equivalencia de categorías tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}[-l], X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, X[l]) = 0.$$

Por el Lema 3.1.4 tenemos que $X \in \mathrm{smd}(\mathcal{S}[-l+1] * \cdots * \mathcal{S}[l])$. Prosiguiendo de la misma forma tenemos que $X \in \mathrm{smd}(\mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[l])$. □

El siguiente resultado dice que las subcategorías silting, son maximales respecto a la contención.

Notación 3.1.6. *Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías. Denotamos por :*

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$*, si*

$$\cup_{X\in\mathcal{X},\, Y\in\mathcal{Y}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \subseteq \cup_{X\in\mathcal{X},\, Z\in\mathcal{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z).$$

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 0$*, si* $\cup_{X\in\mathcal{X},\, Y\in\mathcal{Y}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = 0$.

Teorema 3.1.7. [AI12, *2.18*] *Sean $\mathcal{S},\mathcal{T} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$ tales que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{T}$. Dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ se tiene que $T \in \mathcal{T}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$. Por la Proposición 3.1.5 $b)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T \in \mathrm{smd}(\mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[n])$. Puesto que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \mathcal{S}[1] * \cdots * \mathcal{S}[n]) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \mathcal{T}[1] * \cdots * \mathcal{T}[n]) = 0.$$

Concluimos del Lema 3.1.4 que $T \in \mathcal{S}$. □

El siguiente resultado nos indica que si existe una subcategoría silting de tipo finito, entonces todas las subcategorías silting son de tipo finito.

Proposición 3.1.8. [AI12, *2.20*] *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un objeto silting y $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$. Entonces, existe $S' \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S} = \mathrm{add}(S')$.*

Demostración. Sea $S \in \mathcal{C}$ un objeto silting. Por la Proposición 3.1.5 $a)$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{S_i\}_{i=-n}^{n} \subseteq \mathcal{S}$ tales que $S \in \mathrm{smd}(S_{-n}[-n] * \cdots * S_n[n])$. Veamos que $S' := \oplus_{i=-n}^{n} S_i \in \mathcal{S}$ es tal que $\mathrm{add}(S') = \mathcal{S}$. En efecto, dado que $S' \in \mathcal{S}$, tenemos que $\mathrm{add}(S') \subseteq \mathrm{add}(S')^{\perp_{>0}}$. Por el Lema 3.1.3 $\mathrm{add}(S) \subseteq \mathrm{thick}(S')$. Como S es silting, se sigue que $\mathcal{C} = \mathrm{thick}(S')$. Por lo que S' es silting y por el Teorema 3.1.7 tenemos que $\mathcal{S} = \mathrm{add}(S')$. □

Proposición 3.1.9. [AI12, *2.13*] *Para cada* $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$*, tenemos que*

$$\mathcal{T} := \mathcal{S}^{\perp_{>0}} \cap ({}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1])) = \mathcal{S}.$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$. Luego,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \mathcal{S}[1] * \cdots * \mathcal{S}[n]) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+.$$

De la Proposición 3.1.5 se sigue que $S \in {}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1])$, y así, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Por el Teorema 3.1.7 es suficiente ver que $\mathcal{T} \in \mathrm{silt}(\mathcal{T})$. Sean T, $T' \in \mathcal{T}$. Tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'[n]) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, puesto que $T \in {}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1])$ y $T' \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$. Por último, $\mathcal{C} = \mathrm{thick}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{thick}(\mathcal{T})$. $\square$

Proposición 3.1.10. [AI12, *2.14*] *Sean* $\mathcal{S}$*,* $\mathcal{T} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$*. Entonces,* $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$*, si y sólo si,* $\mathcal{S}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}}$*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Notemos que $\mathcal{S}[n] \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\mathrm{smd}(\mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[n]) \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por la Proposición 3.1.5 tenemos que

$$\mathcal{S}^{\perp_{>0}} = \bigcup_{0 \leq l} \mathrm{smd}(\mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[l]) \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}}.$$

$\Leftarrow$) Se sigue de que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}}$. $\square$

Teorema 3.1.11. [AI12, *2.11*] $(\mathrm{silt}(\mathcal{C}), \leq)$ *es un orden parcial.*

Demostración. Sean $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$.

- Si $\mathcal{U} \leq \mathcal{T}$ y $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$. Por la Proposición 3.1.10, tenemos que

$$\mathcal{U}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}},$$

de nuevo de la Proposición 3.1.10, concluimos que $\mathcal{U} \leq \mathcal{S}$.

- Si $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ y $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$. Por la Proposición 3.1.10, tenemos que $\mathcal{S}^{\perp_{>0}} = \mathcal{T}^{\perp_{>0}}$, con lo cual ${}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1]) = {}^{\perp_0}(\mathcal{T}^{\perp_{>0}}[1])$. Por lo tanto, por la Proposición 3.1.9 que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. $\square$

Para terminar esta sección, veamos una propiedad del orden parcial.

Proposición 3.1.12. [AI12, *2.19*] *Sean* $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$ *tales que*

$$\mathcal{U} \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{S}.$$

Entonces, $\mathcal{U} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Demostración. Por la Proposición 3.1.10, tenemos que $\mathcal{U}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$, y así, ${}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1]) \subseteq {}^{\perp_0}(\mathcal{T}^{\perp_{>0}}[1]) \subseteq {}^{\perp_0}(\mathcal{U}^{\perp_{>0}}[1])$. Por la Proposición 3.1.9, se tiene que $\mathcal{S} \subseteq {}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1])$ y por la Proposición 3.1.9 concluimos que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}^{\perp_{>0}} \cap {}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}[1]) \subseteq \mathcal{T}^{\perp_{>0}} \cap {}^{\perp_0}(\mathcal{T}^{\perp_{>0}}[1]) = \mathcal{T}.$$

$\square$

3.2. Categorías trianguladas Krull-Schmidt

En esta sección $\mathcal{C}$ será considerada Krull-Schmidt.

El objetivo principal de esta sección es ver cómo una subcategoría silting $\mathcal{S}$ es el co-corazón de una co-t-estructura y dar una caracterización análoga a los módulo inclinantes de $\operatorname{rkK}_0(\mathcal{C})$.

Proposición 3.2.1. [IY08, *2.1*] *Sean* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ *subcategorías cerradas por sumandos directos tales que* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$. *Entonces,* $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ *es cerrada por sumandos directos.*

Demostración. Sean $\eta : X \xrightarrow{f} Z \to Y \to X[1] \in \triangle$, con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$ tales que $Z' \mid Z$ y $\pi : Z \to Z'$ la proyección canónica. Veamos que f es una $\mathcal{X}$-precubierta. En efecto, sea $X' \in \mathcal{X}$. Aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -)$ a η y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', f)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) = 0.$$

Luego, sean $g : X' \to Z'$ y $\iota : Z' \to Z$ la inclusión canónica. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"'] \arrow[d, "\iota g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Con lo cual $g = \pi f h$, y así, πf es una $\mathcal{X}$-precubierta. Puesto que $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos, existe $h : X' \to Z'$ una $\mathcal{X}$-cubierta. Consideremos $X' \xrightarrow{h} Z' \to T \to X'[1] \in \triangle$. Dado que h y f son $\mathcal{X}$-precubiertas, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "u"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & T \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u'"'] & X'[1] \arrow[d, "u[1]"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v'"'] & X[1] \arrow[d, "v[1]"] \\ X' \arrow[r, "h"] & Z' \arrow[r] & T \arrow[r] & X'[1]. \end{tikzcd}$$

Dado que $h = hvu$, de la minimalidad de h, tenemos que vu es un isomorfismo. Por lo que $X' \mid X$. Ya que el diagrama anterior es un morfismo de triángulos, concluimos que $v'u'$ es un isomorfismo, por lo que v' es un split-epi. Por lo tanto, $T \mid Y$. □

Definición 3.2.2. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de subcategorías de $\mathcal{C}$ cerradas por sumandos directos. Decimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es:

a) un **par de torsión**, si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ y $\mathcal{X} * \mathcal{Y} = \mathcal{C}$. En este caso, llamamos a $\mathcal{X}$ $(\mathcal{Y})$ la clase de torsión (libre de torsión).

b) una $\mathbf{t-estructura}$, si $(\mathcal{X}[1], \mathcal{Y})$ es un par de torsión y $\mathcal{X}[1] \subseteq \mathcal{X}$. En este caso, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es llamado el corazón.

c) una $\mathbf{co-t-estructura}$, si $(\mathcal{X}[-1], \mathcal{Y})$ es un par de torsión y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}[1]$. En este caso, $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ es llamado el co-corazón.

Definición 3.2.3. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría cerrada por sumandos directos. Decimos que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones si $\mathcal{X} * \mathcal{X} = \mathcal{X}$.

Lema 3.2.4. *Sea $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$. Entonces, $\mathcal{S}$ es cerrada por extensiones.*

Demostración. Sea $S \to X \to S' \overset{f}{\to} S'[1] \in \triangle$, con S, $S' \in \mathcal{S}$. Dado que $\mathcal{S}$ es silting, se tiene que $f = 0$. Por lo tanto, $S \oplus S' = X \in \mathcal{S}$. $\square$

El siguiente resultado, nos da unas propiedades básicas de los pares de torsión.

Proposición 3.2.5. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de torsión en $\mathcal{C}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $\mathcal{X} = {}^{\perp_0}\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_0}$. En particular, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son subcategorías aditivas y cerradas por sumandos directos.

b) $\mathcal{X}$ es una clase cubriente y $\mathcal{Y}$ es una clase envolvente.

c) $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son cerradas por extensiones.

Demostración. a) Sea $Z \in {}^{\perp_0}\mathcal{Y}$. Por hipótesis $Z \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$, por el Lema 3.1.4 $Z \in \mathcal{X}$. Análogamente, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_0}$.

b) Sea $T \in \mathcal{C}$. Por hipótesis, existe $\eta : X \overset{f}{\to} T \to Y \to X[1] \in \triangle$. Veamos que f es una precubierta. En efecto, sea $X' \in \mathcal{X}$, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', f)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', T) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) = 0.$$

Por a) y la Proposición 1.2.11 tenemos que $\mathcal{X}$ es una clase cubriente, puesto de $\mathcal{C}$ tiene pseudokerneles por la el axioma c) de categoría triangulada y la Proposición A.7.6 c). Análogamente, $\mathcal{Y}$ es una clase envolvente.

c) Por a) $\mathcal{X} = {}^{\perp_0}\mathcal{Y}$, con lo cual es cerrada por extensiones. Análogamente, $\mathcal{Y}$ es cerrada por extensiones. $\square$

El siguiente resultado es análogo al Lema de Wakamatzu.

Proposición 3.2.6. [IY08, *2.3*] *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría cerrada por extensiones. Entonces,*

a) si $\mathcal{X}$ es una clase cubriente, entonces $(\mathcal{X}, \mathcal{X}^{\perp_0})$ es un par de torsión en $\mathcal{C}$.

b) si $\mathcal{X}$ es una clase envolvente, entonces $({}^{\perp_0}\mathcal{X}, \mathcal{X})$ es un par de torsión en $\mathcal{C}$.

Demostración. Sólo haremos la prueba de a), ya que la prueba de b) es análoga.

Sea $T \in \mathcal{C}$. Por hipótesis, existe $X \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X[1] \in \triangle$, con f una $\mathcal{X}$-cubierta. Puesto que f es minimal a derecha, por el Lema 1.2.6 tenemos que $h[-1] \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y[-1], X)$, con lo cual $h \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y, X[1])$. Es suficiente ver que $Y \in \mathcal{X}^{\perp_0}$. En efecto, sea $f' : X' \to Y$. Consideremos el cambio de base

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & \\
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & T \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "j"] & X[1] \\
 & Z[1] \arrow[r, equal] & Z[1]. &
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones se tiene que $X'' \in \mathcal{X}$. Sea $p : X'' \to X$ tal que $k = fp$, con lo cual $gk = 0$. Como i es un pseudocokernel de k tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & Y \\
Z[1]. \arrow[ur, dashed, "\exists\, q"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, $(1_Y - qj)g = g - qjg = g - g = 0$. Ahora, dado que h es un pseudocokernel de g existe $k' : X[1] \to Y$ tal que $k'k = 1_Y - qj$. Entonces, $1_Y = k'k - qj$. Puesto que $k'k \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$, concluimos que qj es un isomorfismo. Por lo tanto, j es un split-mono y $f' = 0$. $\square$

Corolario 3.2.7. *La asignación $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\perp_0}$ es una biyección entre subcategorías cubrientes y cerradas por extensiones de $\mathcal{C}$ y subcategorías envolventes y cerradas por extensiones de $\mathcal{C}$, cuya inversa es $\mathcal{Y} \mapsto {}^{\perp_0}\mathcal{Y}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.2.5 y la Proposición 3.2.6. □

Notamos que una clase de torsión (libre de torsión) en $\text{mod}(\Lambda)$ es cubriente (envolvente) y cerrada por extensiones. Sin embargo, $\text{proj}(\Lambda)$ es funtorialmente finita y cerrada por extensiones, pero no es una clase de torsión ni una clase libre de torsión, necesariamente.

Ahora daremos unas aplicaciones de los resultados anteriores a categorías silting.

Proposición 3.2.8. [AI12*, 2.23*] *Para cada $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ subcategoría silting tenemos que :*

a) $\mathcal{C} = \bigcup_{0 \leq l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[l]$.

b) $\mathcal{S}^{\perp_{>0}} = \bigcup_{0 \leq l} \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[l]$.

c) ${}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}) = \bigcup_{0<l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[-1]$.

d) $({}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}), \mathcal{S}^{\perp_{>0}})$ *es un par de torsión en $\mathcal{C}$ y* $(({}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}))[1], \mathcal{S}^{\perp_{>0}})$ *es una co-t-estructura con co-corazón $\mathcal{S}$.*

Demostración. $a), b)$ Se siguen de la Proposición 3.1.5 y la Proposición 3.2.1.

$c), d)$ Por $b)$, tenemos que $\bigcup_{0<l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[-1] \subseteq {}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}})$. Luego, de $a)$ y $b)$, tenemos las siguientes igualdades

$$(\bigcup_{0<l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[-1]) * S^{\perp_{>0}} = (\bigcup_{0<l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[-1]) * (\bigcup_{0 \leq l} \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[l]) = \mathcal{C}.$$

Con lo cual $(\bigcup_{0<l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[-1], \mathcal{S}^{\perp_{>0}})$ es un par de torsión en $\mathcal{C}$ y por la Proposición 3.2.5 ${}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}) = \bigcup_{0<l} \mathcal{S}[-l] * \cdots * \mathcal{S}[-1]$.

Por último, de la Proposición 3.1.9 se tiene que $\mathcal{S}$ es el co-corazón de la co-t-estructura $(({}^{\perp_0}(\mathcal{S}^{\perp_{>0}}))[1], \mathcal{S}^{\perp_{>0}})$. □

Definición 3.2.9. Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría plena y $C \in \mathcal{C}$. Decimos que una sucesión de triángulos distinguidos

$$\eta := \{\eta_i : C_{i+1} \to X_i \to C_i \to C_{i+1}[1] \in \Delta\}_{i=0}^{n}$$

es una $\mathcal{X}-$ **resolución** de C, si $C_{n+1}=0$, $C_0=C$ y $X_i\in\mathcal{X}$ $\forall\ 1\leq i\leq n$.
Proposición 3.2.10. [AI12, *2.24*] *Sea* $\mathcal{S}\in\operatorname{silt}(\mathcal{C})$. *Todo* $X\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[n]$ *admite una* $\mathcal{S}$*-resolución* $\eta=\{\eta_i: X_{i+1}\xrightarrow{g_i}S_i\xrightarrow{f_i}X_i\to X_{i+1}[1]\}_{i=0}^n$, *con* $X_i\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[n-i]$, $f_i:S_i\to X_i$ *es una* $\mathcal{S}$*-cubierta y* $g_i\in\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X_{i+1},S_i)$ $\forall\ 0\leq i\leq n$. *Más aún, si* $X\neq 0$, *entonces* $S_n\neq 0$.

Demostración. Veamos que la proposición se cumple por inducción sobre n.

$n=0$. $\eta_0: 0\to X\xrightarrow{1_X}X\to 0$ cumple la proposición.

$n+1$. Supongamos que $X\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[n+1]$, con lo cual existe

$$\eta_0': X_1'\xrightarrow{g_0'}S_0'\xrightarrow{f_0'}X\to X_1'[1]\in\Delta,$$

con $S_0'\in\mathcal{S}$ y $X_1'\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[n]$. Veamos que f_0' es una $\mathcal{S}$-precubierta. En efecto, sea $S\in\mathcal{S}$, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(S,-)$ a η_0' obtenemos la siguiente sucesión exacta

$${}_{\mathcal{C}}(S,S_0')\xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(S,f_0')}{}_{\mathcal{C}}(S,X)\to{}_{\mathcal{C}}(S,X_1'[1])=0.$$

Por la Proposición 1.2.11, existe $f_0:S_0\to X$ una $\mathcal{S}$-cubierta. Consideremos $\eta_0: X_1\xrightarrow{g_0}S_0\xrightarrow{f_0}X\to X_1[1]$ un triángulo distinguido. Es suficiente probar que $X_1\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[n]$. En efecto, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(S,-)$ a η_0' obtenemos las siguientes sucesiones exactas

$${}_{\mathcal{C}}(S,S_0)\xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(S,f_0)}{}_{\mathcal{C}}(S,X)\to{}_{\mathcal{C}}(S,X_1[1])\to{}_{\mathcal{C}}(S,S_0[1])=0.$$
$$0={}_{\mathcal{C}}(S,X[i])\to{}_{\mathcal{C}}(S,X_1[i+1])\to{}_{\mathcal{C}}(S,S_0[i+1])=0\qquad\forall i\geq 1.$$

Así, $X_1\in\mathcal{S}^{\perp_{>0}}$, por la Proposición 3.2.8 existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$X_1\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[m],$$

aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,S[n+i])$ a η, con $i\in\mathbb{N}^+$, obtenemos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{aligned}0={}_{\mathcal{C}}(S_0,S[n+i])\to{}_{\mathcal{C}}(X_1,S[n+i])\to{}_{\mathcal{C}}(X[-1],S[n+i])&\\ \cong{}_{\mathcal{C}}(X,S[n+1+i])=0.&\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.4 y la Proposición 3.2.1 $X_1\in\mathcal{S}*\cdots*\mathcal{S}[n]$. $\square$

Lema 3.2.11. [AI12, *2.25*] *Sean* $\mathcal{S} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$*,* X*,* $Y \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$*,*

$$\eta = \{\eta_i : X_{i+1} \xrightarrow{g_i} S_i \xrightarrow{f_i} X_i \to X_{i+1}[1]\}_{i=0}^{n},$$

$$\eta' = \{\eta'_j : Y_{j+1} \xrightarrow{g'_j} S'_j \xrightarrow{f'_j} Y_j \to Y_{j+1}[1]\}_{j=0}^{m},$$

$\mathcal{S}$*-resoluciones para* X *e* Y *respectivamente como en la* Proposición 3,2,7*. Si* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[n]) = 0$*, entonces* $\operatorname{add}(S_n) \cap \operatorname{add}(S'_0) = 0$*.*

Demostración. Sea $f : S_n \to S'_0$. Veamos que f está en el radical. En efecto, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ a η_i, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(S_i[k], Y) \to {}_{\mathcal{C}}(X_{i+1}[k], Y) \to {}_{\mathcal{C}}(X_i[k-1], Y) \to {}_{\mathcal{C}}(S_i[k-1], Y) = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^-$. Por lo que tenemos los siguientes isomorfismos

$$0 = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X[-n], Y) \cong \cdots \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1}[-1], Y).$$

Ahora, consideremos el siguiente morfismo de triángulos distinguidos, obtenido del hecho que g'_0 es un pseudokernel de f_0

$$\begin{tikzcd}
X_{n-1}[-1] \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "f"] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & X_{n-1} \arrow[d] \\
Y_1 \arrow[r, "g'_0"'] & S'_0 \arrow[r, "f'_0"'] & Y \arrow[r] & Y_1[1].
\end{tikzcd}$$

Dado que f'_0 es una $\mathcal{S}$-cubierta, existe $h' : S_{n-1} \to S'_0$ tal que $h = f'_0 h'$, con lo cual $f'_0(f - h'g_n) = f'_0 f - hg_n = 0$. Ahora, usando que g'_0 es un pseudokernel de f'_0, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & S_n \arrow[dl, dashed, "\exists\, f'"'] \arrow[d, "f - h'g_n"] \\
Y_1 \arrow[r, "g'_0"'] & S'_0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $g'_0 f' + h' g_n = f \in \operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(S_n, S'_0)$. □

Lema 3.2.12. *Sea* $\mathcal{S} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$*. Entonces,* $\forall\ 0 \neq X \in \mathcal{C}$*,* $\exists!\ n_X \in \mathbb{Z}$ *tal que* $X[n_X] \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$ *y* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, X[n_X]) \neq 0$*.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.8 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \in \mathcal{S}[-m] * \cdots * \mathcal{S}[m]$$

y $X[m] \in \mathcal{S}^{\perp_{>0}}$. Así pues, tenemos los siguientes casos.

Caso I. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, X[m]) \neq 0$. Sea $m := n_X$.

Caso II. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, X[m]) = 0$. Por el Lema 3.1.4 se tiene que $X[m] \in \mathcal{S}[1] * \cdots * \mathcal{S}[2m]$. Veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}[j], X[m]) \neq 0$, para algún $0 \leq j \leq 2m$. En efecto, supongamos que no. Dado que $X[m] \in \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[2m]$, por el Lema 3.1.4 tenemos que $X[m] = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo que, existe $0 \leq j \leq 2m$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, X[m-j]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}[j], X[m]) \neq 0$. Por lo tanto,

$$n_X := \max\{0 \leq k \leq 2m \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}[k], X[m]) \neq 0\}$$

cumple lo requerido. □

Teorema 3.2.13. [AI12, *2.26*] *Sea $S \in \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ silting. Entonces,*

$$\mathrm{silt}(\mathcal{C}) = \{\mathrm{add}(S[i]) \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$. Por la Proposición 3.1.12 existe $S' \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S} = \mathrm{add}(S')$; por el Lema 3.2.12 existe $n_{S'} \in \mathbb{Z}$ tal que $S'[n_{S'}] \in S^{\perp_{>0}}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, S'[n_{S'}]) \neq 0$. Por la Proposición 3.2.10 existe

$$\{\eta_i : S'_{i+1} \xrightarrow{g_i} S_i \xrightarrow{f_i} S'_i \to S_{i+1}[1]\}_{i=0}^{n},$$

una $\mathrm{add}(S)$-resolución triangulada de $S'[n_{S'}]$. Aseguramos que $n = 0$. En efecto, supongamos lo contrario. Observamos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S'[n_{S'}], S'[n_{S'} + n]) = 0,$$

por el Lema 3.2.11, se tiene que $\mathrm{add}(S_n) \cap \mathrm{add}(S_0) = 0$, lo cual es una contradicción a la Proposición 3.2.10. Así pues, $n = 0$. Por lo tanto,

$$S^m = S'[n_{S'}]$$

para algún $m \in \mathbb{N}^+$. □

A continuación definiremos el grupo de Grothendieck de una categoría triangulada.

Definición 3.2.14. Supongamos que $\mathcal{C}$ es esqueléticamente pequeña. Denotamos por:

a) $F(\mathcal{C})$ al grupo abeliano libre con base las isoclases $X \in \mathcal{C}$.

b) $R(\mathcal{C})$ al subgrupo abeliano de $F(\mathcal{C})$ generado por las expresiones

$$[Y] + [Z] - [X],$$

siempre que exista $Y \to X \to Z \to Y[1] \in \triangle$.

c) el grupo de Grothendieck $\mathcal{C}$ $\mathrm{K}_0(\mathcal{C}) := F(\mathcal{C})/R(\mathcal{C})$.

Proposición 3.2.15. *Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías esqueléticamente pequeñas. Entonces, $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ es esqueléticamente pequeña.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ conjuntos de representantes de clases de isomorfismos de objetos en $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente y $Z \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$, por lo que existe $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X[1] \in \triangle$, con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Sean $r : X \to X'$ y $s : Y \to Y'$ isomorfismos, con $X' \in \mathcal{A}$ y $Y' \in \mathcal{B}$. Notemos que tenemos el siguiente isomorfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"] & X[1] \arrow[d, "r[1]"] \\
X' \arrow[r, "fr^{-1}"'] & Z \arrow[r, "sg"'] & Y' \arrow[r, "r[1]hs^{-1}"'] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

Consideremos la asignación

$$\varphi : \{[Z] \mid Z \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}\} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}[1])$$
$$[Z] \mapsto r[1]hs^{-1}.$$

Veamos que está asignación esta bien definida. Sea $\alpha : Z \to Z'$ un isomorfismo. Consideremos el siguiente morfismo de triángulos.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\alpha f"'] & Z' \arrow[r, "g\alpha^{-1}"'] & Y \arrow[r, "h"'] & X[1].
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\varphi[Z'] = r[1]hs^{-1} = \varphi[Z]$.

Por otro lado, consideremos la asignación

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}[1]) \to \{[Z] \mid Z \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}\}$$

$$h \mapsto [Z],$$

donde $X \to Z \to Y \overset{h}{\to} X[1] \in \triangle$. Veamos que está asignación esta bien definida. Sea $X \to Z' \to Y \overset{h}{\to} X[1] \in \triangle$. Por lo que tenemos el siguiente morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Z' \arrow[r] & Y \arrow[r, "h"'] & X[1].
\end{tikzcd}$$

Por lo que α es un isomorfismo. Es claro que

$$\Psi\varphi[Z] = Z \qquad y \qquad \varphi\Psi(h) = h.$$

□

Note que si $\mathcal{C}$ tiene una subcategoría silting esqueléticamente pequeña $\mathcal{S}$. Por la Proposición 3.2.8 y la Proposición 3.2.15 se tiene que $\mathcal{C}$ es esqueléticamente pequeña.

Lema 3.2.16. *Sean X, $Y \in \mathcal{C}$, con $\mathcal{C}$ esqueléticamente pequeña. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen en* $\mathrm{K}_0(\mathcal{C})$.

a) $[X[1]] = -[X]$, $[X[-1]] = -[X]$.

b) $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$.

Demostración. a) Se sigue de que

$$X \to 0 \to X[1] \to X[1],\ X[-1] \to 0 \to X \to X \in \triangle.$$

b) Es consecuencia de que $X \to X \oplus Y \to Y \to X[1] \in \triangle$. □

El siguiente resultado y la prueba están inspirados en un resultado análogo para Λ-módulos inclinantes. Ver [Mi86, Teorema 1.19 y Corolario 1].

Sea $\mathcal{S} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$. Denotamos por $F(\operatorname{ind}(\mathcal{S}))$ el subgrupo de $F(\mathcal{C})$ cuya base es $\operatorname{ind}(\mathcal{S})$. Podemos identificar a los objetos $S \in \mathcal{S} - \{0\}$ en $F(\operatorname{ind}(\mathcal{S}))$ de la siguiente forma. Puesto que $\mathcal{C}$ es una categoría Krull-Schmidt, S tiene una descomposición única en coproducto $S = S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_m^{n_m}$, donde $S_j \in \operatorname{ind}(\mathcal{S})$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$. Definimos $\gamma(S) := \sum_{i=1}^{m} n_i S_i$.

Teorema 3.2.17. [AI12, *2.27*] *Sea* $\mathcal{S} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$ *esqueléticamente pequeña. Entonces,* $\mathrm{K}_0(\mathcal{C})$ *es el grupo abeliano libre con base* $\operatorname{ind}(\mathcal{S})$*.*

Demostración. Sea $\varphi := \pi i : F(\operatorname{ind}(\mathcal{S})) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{C})$, donde

$$i : F(\operatorname{ind}(\mathcal{S})) \to F(\mathcal{C})$$

es la inclusión canónica y $\pi : F(\mathcal{C}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{C})$ es la proyección canónica. Ahora bien, sea $X \in \mathcal{C}$. Entonces, por el Lema 3.2.12 y por la Proposición 3.2.10, podemos considerar la asignación

$$\psi : F(\mathcal{C}) \to F(\operatorname{ind}(\mathcal{S}))$$

$$X \mapsto \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \gamma(S_i) & \text{si } X \neq 0, \\ 0 & \text{si } X = 0, \end{cases}$$

donde $\{\eta_i : X_{i+1} \xrightarrow{g_i} S_i \xrightarrow{f_i} X_i \to X_{i+1}[1]\}_{i=0}^{n}$ es una $\mathcal{S}$-resolución triangulada de $X[n_X]$. Sea $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y[1] \in \triangle$. Veamos que $\psi(X) = \psi(Y) + \psi(Z)$. En efecto, por la Proposición 3.2.8 existen k, $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$Y[k],\ X[k],\ Z[k] \in \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[m].$$

Ya que $\psi(X) = \psi(X[r])\ \forall\ r \in \mathbb{Z}$. Podemos suponer que $k = 0$. Veamos por inducción sobre m que ψ está bien definida.

$m = 0$. Dado que $h = 0$, tenemos que $X = Y \oplus Z$. Por el Lema 3.2.16 $[X] = [Y] + [Z]$, por lo que $\psi(X) = \psi(Y) + \psi(Z)$.

Supongamos que $Y,\ X \in \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[m]$ y $Z \in \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[m+1]$. Sea

$$\{\eta_i : Z_{i+1} \xrightarrow{g_i} S_i \xrightarrow{f_i} Z_i \to X_{i+1}[1]\}_{i=0}^{n+1}$$

una $\mathcal{S}$-resolución triangulada de Z como en la Proposición 3.2.10. Notemos que $\varphi(Z) = \varphi(S_0) - \varphi(Z_1)$. Luego, por cambio de base tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \\
Z_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Z_1[1] \arrow[d, equal] \\
Z_1 \arrow[r] & S_0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Z_1[1] \\
 & Y[1] \arrow[r, equal] & Y[1]. &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_0, Y[1]) = 0$, por el Lema 3.2.4 tenemos que

$$W = Y \oplus S_0 \in \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[m] * \mathcal{S} = \mathcal{S} * \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[m] = \mathcal{S} * \cdots * \mathcal{S}[m].$$

Por hipótesis de inducción $\psi(W) = \psi(Y) + \psi(S_0)$ y $\psi(W) = \psi(Z_1) + \psi(X)$. Por lo tanto

$$\psi(X) = \psi(W) - \psi(Z_1) = \psi(Y) + \psi(S_0) - \psi(Z_1) = \psi(Y) + \psi(Z).$$

Los dos casos restantes son análogos. Con lo cual existe

$$\psi' : \mathrm{K}_0(\mathcal{C}) \to F(\mathrm{ind}(\mathcal{S}))$$

tal que el siguiente diagrama de grupos abelianos conmuta

$$\begin{tikzcd}
F(\mathcal{C}) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathrm{K}_0(\mathcal{C}) \arrow[r, dashed, "\psi'"'] & F(\mathrm{ind}(\mathcal{S}).
\end{tikzcd}$$

Por último es fácil ver que $\psi'\varphi = 1_{F(\mathrm{ind}(\mathcal{S}))}$ y $\varphi\psi' = 1_{\mathrm{K}_0(\mathcal{C})}$. $\square$

Para concluir esta sección tenemos el resultado análogo en módulos inclinantes, que es inmediato del Teorema 3.2.17.

Corolario 3.2.18. [AI12, *2.28*] *Sean* S*,* $T \in \mathcal{C}$ *silting. Entonces,*

$$\mathrm{rk}(S) = \mathrm{rk}(T).$$

3.3. Mutación silting

En esta sección $\mathcal{C}$ será considerada Krull-Schmidt.

El objetivo principal de esta sección es introducir la mutación silting y caracterizar las mutaciones irreducibles (al menos cuando $\mathcal{C}$ es una R-categoría de Artin con un objeto silting $S \in \mathcal{C}$).

Definición 3.3.1. Sean $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$ una clase envolvente en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{S}$ una clase cubriente en $\mathcal{S}$. Para cada $S \in \mathcal{S}$, tenemos los siguientes triángulos distinguidos:

a) $S \overset{f_S}{\to} X \to C_S \to S[1] \in \triangle$, con $f_S : S \to X$ una $\mathcal{X}$-envolvente. Decimos que $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}) := \mathrm{add}(\{\mathcal{X} \cup \{C_S \mid S \in \mathcal{S}\}\})$ es una mutación izquierda de $\mathcal{S}$.

b) $K_S \to Y \overset{g_S}{\to} S \to K_S[1] \in \triangle$, con $g_S : Y \to S$ una $\mathcal{Y}$-cubierta. Decimos que $\mu^+(\mathcal{S}, \mathcal{Y}) := \mathrm{add}(\{\mathcal{Y} \cup \{K_S \mid S \in \mathcal{S}\}\})$ es una mutación derecha de $\mathcal{S}$.

Teorema 3.3.2. [AI12, *2.31*] *Sean* $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$*,* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$ *una clase envolvente en* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{S}$ *una clase cubriente en* $\mathcal{S}$*. Entonces,*

a) $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}) \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$*.*

b) $\mu^+(\mathcal{S}, \mathcal{Y}) \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$*.*

Demostración. *a*) Notemos de la definición que

$$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{thick}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{thick}(\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X})).$$

Sean S, $S' \in \mathcal{S}$, X, $X' \in \mathcal{X}$, $\eta_S : S \overset{f_S}{\to} X_1 \to C_S \to S[1] \in \triangle$,

$$\eta_{S'} : S' \overset{f_{S'}}{\to} X_2 \to C_{S'} \to S'[1] \in \triangle,$$

donde $f_S : S \to X_1$, $f_{S'} : S' \to X_2$ son $\mathcal{X}$-envolventes y $n \in \mathbb{N}^+$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X[n])$ a $\eta_{S'}$, obtenemos la siguiente sucesión exacta dado que $f_{S'}$ es una $\mathcal{X}$-envolvente

$$_{\mathcal{C}}(X_2[1], X[n]) \overset{_{\mathcal{C}}(f_{S'}[1], X[n])}{\to} {}_{\mathcal{C}}(S'[1], X[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, X[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(X_2, X[n]) = 0. \qquad *$$

Por otro lado, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -)$ a η_S, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(X', X_1[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', C_S[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', S[n+1]) = 0.$$

Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S[n+1])$ a $\eta_{S'}$ y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(S'[1], S[n+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, S[n+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X_2, S[n+1]) = 0.$$

Por último, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, -)$ a η_S y obtenemos la siguiente sucesión exacta por (*) y la sucesión exacta anterior

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, X_1[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, C_S[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, S[n+1]) = 0.$$

Por lo tanto, $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}) \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$.

b) Es análogo a *a*). $\square$

En general, la mutación de una subcategoría inclinante no es una subcategoría inclinante. El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y sufucientes para que esto suceda.

Teorema 3.3.3. [AI12, *2.32*] *Sea* $\mathcal{T} \in \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$. *Entonces,*

a) para una clase envolvente $\mathcal{X}$ *de* $\mathcal{T}$*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $\mu^-(\mathcal{T}, \mathcal{X}) \in \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$.

ii) Para cada $T \in \mathcal{T}$, $f_T : T \to X$ es tal que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', f_T[n])$ *es un monomorfismo* $\forall\ X' \in \mathcal{X}$.

b) para una clase cubriente $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{T}$, las siguientes condiciones son equivalentes.

i) $\mu^+(\mathcal{T}, \mathcal{Y}) \in \operatorname{tilt}(\mathcal{C})$.

ii) Para cada $T \in \mathcal{T}$, $g_T : Y \to T$ es tal que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(g_T[n], Y')$ *es un monomorfismo* $\forall\ Y' \in \mathcal{Y}$.

Demostración. Sólo haremos la prueba de a), ya que la prueba de b) es análoga.

$i) \Rightarrow ii)$ Consideramos $\eta : T \overset{f_T}{\to} X \to C_T \to T[1] \in \triangle$ y $X' \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta, puesto que $\mu^-(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ es inclinante

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(X', C_T[-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', T) \overset{{}_{\mathcal{C}}(X', f_T)}{\to} {}_{\mathcal{C}}\,(X', X)$$

$ii) \Rightarrow i)$ Sean $T,\ T' \in \mathcal{S}$, $X,\ X' \in \mathcal{X}$, $\eta_T : T \overset{f_T}{\to} X_1 \to C_T \to T[1] \in \triangle$,

$$\eta_{T'} : T' \overset{f_{T'}}{\to} X_2 \to C_{T'} \to T'[1] \in \triangle$$

y $n \in \mathbb{Z}^-$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X[n])$ a $\eta_{T'}$, obtenemos la siguiente sucesión exacta dado que $f_{T'}[1]$ es una $\mathcal{X}[1]$-envolvente

$$ {}_{\mathcal{C}}(X_2[1], X[n]) \overset{{}_{\mathcal{C}}(f_{T'}[1], X[n])}{\to} {}_{\mathcal{C}}(T'[1], X[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_{T'}, X[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(X_2, X[n]) = 0. \qquad *$$

Por otro lado, aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -)$ a η_T, obtenemos las siguientes sucesiones exactas,

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(X', X_1[n-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', C_T[n-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', T[n]) = 0,$$

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(X', X_1[-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', C_T[-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X', T) \overset{{}_{\mathcal{C}}(X', f_T)}{\to} {}_{\mathcal{C}}\,(X', X_1).$$

Ahora, aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C_T[n-1])$ a $\eta_{T'}$, obtenemos la siguiente sucesión exacta por (*) y la sucesión exacta anterior

$$\begin{aligned} 0 = {}_{\mathcal{C}}(T', C_T[n-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_{T'}[-1], C_T[n-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(X_2[-1], C_T[n-1]) \\ \cong {}_{\mathcal{C}}(X_2, C_T[n]) = 0. \end{aligned}$$

Por último, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_{T'}, -)$ a η_T y obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(T', C_{T'}[n-1]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_T, C_{T'}[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(X_1, T[n]) = 0.$$

Por lo tanto, $\mu^-(\mathcal{T}, \mathcal{X}) \in \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$, ya que por el Teorema 3.3.2

$$\mu^-(\mathcal{T}, \mathcal{X}) \in \mathrm{silt}(\mathcal{C}).$$

□

Proposición 3.3.4. [AI12, *2.33*] *Sean* $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$,

$$\mathcal{X} = \mathrm{add}(\mathcal{X}),\ \mathcal{Y} = \mathrm{add}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{S}.$$

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

a) Para cada clase envolvente $\mathcal{X}$ de $\mathcal{S}$, tenemos que $\mu^+(\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}), \mathcal{X}) = \mathcal{S}$ y $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}) \leq \mathcal{S}$. Más aún, $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}) = \mathcal{S} \iff \mathcal{S} = \mathcal{X}$.

b) Para cada clase cubriente $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{S}$, tenemos que $\mu^-(\mu^+(\mathcal{S}, \mathcal{Y}), \mathcal{Y}) = \mathcal{S}$ y $\mu^+(\mathcal{S}, \mathcal{Y}) \geq \mathcal{S}$. Más aún, $\mu^+(\mathcal{S}, \mathcal{Y}) = \mathcal{S} \iff \mathcal{S} = \mathcal{Y}$.

Demostración. a) Consideramos $\eta : S \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} C_S \to S[1] \in \triangle$. Veamos que g es una $\mathcal{X}$-precubierta. En efecto, sea $X' \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', -)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$${}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(X', g)} {}_{\mathcal{C}}(X', C_S) \to {}_{\mathcal{C}}(X', S[1]) = 0.$$

Con lo cual $\mathcal{X}$ es precubriente en $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X})$. Por la Proposición 1.2.11 tenemos que $\mathcal{X}$ es cubriente en $\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X})$.
Sea $Y \in \mu^+(\mu^-(\mathcal{S}, \mathcal{X}), \mathcal{X})$, con lo cual tenemos dos casos.

Caso 1. Si $Y \in \mathcal{X}$. Entonces, $Y \in \mathcal{S}$.

Caso 2. Si $Y \notin \mathcal{X}$. Existen $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} C_S \xrightarrow{h} Y[1] \in \triangle$ con g una $\mathcal{X}$-cubierta y $S \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{g'} C_S \xrightarrow{h'} Y[1] \in \triangle$, con $S \in \mathcal{S}$. Por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\exists\, t"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\exists\, r"'] & C_S \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & Y[1] \arrow[d, "t[1]"] \\
S \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\exists\, t'"'] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\exists\, r'"'] & C_S \arrow[r, "h'"] \arrow[d, equal] & S[1] \arrow[d, "t'[1]"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, "g"'] & C_S \arrow[r, "h"'] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\mu^+(\mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X}),\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{S}$. Por el Teorema 3.3.2 y el Teorema 3.1.7 $\mu^+(\mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X}),\mathcal{X}) = \mathcal{S}$.

Veamos que $\mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X}) \leq \mathcal{S}$. En efecto, sea $S' \in \mathcal{S}$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S',-)$, obtenemos la siguientes sucesiones exactas dado que $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(S', X[i]) \to {}_{\mathcal{C}}(S', C_S[i]) \to {}_{\mathcal{C}}(S', S[i+1]) = 0 \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}^+.$$

Por lo que $\mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X}) \leq \mathcal{S}$.

Ahora bien, si $\mathcal{X} \neq \mathcal{S}$. Veamos que $\mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X}) < \mathcal{S}$. Consideramos $S' \in \mathcal{S} - \mathcal{X}$ y $S' \overset{f'}{\to} X \overset{g'}{\to} C_{S'} \to S'[1] \in \triangle$, con f' una $\mathcal{X}$-envolvente. Dado que $S' \notin \mathcal{X}$ tenemos que f' no es un split-mono. Con lo cual $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_{S'}, S'[1]) \neq 0$, por lo que $S' \notin \mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X})^{\perp_{>0}}$. Por el Teorema 3.3.2 tenemos que $S' \notin \mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X})$.

Recíprocamente, si $\mathcal{X} = \mathcal{S}$. Sea $S \in \mathcal{S}$, consideremos

$$S \overset{1_S}{\to} S \to 0 \to S[1] \in \triangle,$$

donde $1_S : S \to S$ una $\mathcal{X}$-envolvente. Por lo tanto, $\mu^-(\mathcal{S},\mathcal{X}) = \mathcal{S}$.

b) Es análoga a la prueba de *a*). □

Definición 3.3.5. Sean $\mathcal{S} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$ una subcategoría. Denotamos a la subcategoría $\mu_{\mathcal{X}} = \mathrm{add}(\mu_{\mathcal{X}}) \subseteq \mathcal{S}$, donde $\mathrm{ind}(\mu_{\mathcal{X}}) = \mathrm{ind}(\mathcal{S}) - \mathrm{ind}(\mathcal{X})$. Si $\mu_{\mathcal{X}}$ es una clase envolvente (cubriente) en $\mathcal{S}$, escribimos

$$\mu^-_{\mathcal{X}}(\mathcal{S}) := \mu^-(\mathcal{S},\mu_{\mathcal{X}}) \qquad (\mu^+_{\mathcal{X}}(\mathcal{S}) := \mu^+(\mathcal{S},\mu_{\mathcal{X}})).$$

Decimos que la mutación es irreducible si $|\mathrm{ind}(\mathcal{X})| = 1$.

Proposición 3.3.6. [AI12, *2.36*] *Sean $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S} \in \operatorname{silt}(\mathcal{C})$ tales que $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$.*

a) Si $\forall\ X \in \operatorname{ind}(\mathcal{S})$, μ_X es una clase envolvente en $\mathcal{S}$, entonces existe $\mathcal{Y}$ una mutación izquierda irreducible de $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S}' \leq \mathcal{Y} < \mathcal{S}$.

b) Si $\forall\ X \in \operatorname{ind}(\mathcal{S}')$, μ_X es una clase cubriente en $\mathcal{S}'$, entonces existe $\mathcal{Z}$ una mutación derecha irreducible de $\mathcal{S}'$ tal que $\mathcal{S}' < \mathcal{Z} \leq \mathcal{S}$.

Demostración. Sólo haremos la prueba de a) puesto que b) es análoga.

Veamos que existe $S' \in \mathcal{S}' - \mathcal{S}$. Supongamos que $\forall\ S' \in \mathcal{S}'$ se tiene que $S' \in \mathcal{S}$, con lo cual $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ y por el Teorema 3.1.7 $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, lo cual es una contradicción. Sea $S' \in \mathcal{S}' - \mathcal{S}$. Consideremos

$$\eta = \{\eta_i : S'_{i+1} \overset{g_i}{\to} S_i \overset{f_i}{\to} S'_i \to S'_{i+1}[1]\}_{i=0}^{n}$$

una $\mathcal{S}$-resolución de S' como en la Proposición 3.2.10. Notemos que $n > 0$. Consideremos $X \mid S_n$, con $X \in \operatorname{ind}(\mathcal{C})$. Sea $\mathcal{Y} := \mu_X^-(\mathcal{S})$, dado que

$$\mathcal{Y} = \operatorname{add}((\mathcal{S} - \{X\}) \cup \{C_X\}),$$

donde $\eta : X \overset{f}{\to} M_X \to C_X \to X[1] \in \triangle$ y $f : X \to M_X$ es una μ_X-envolvente. Aseguramos que $\mathcal{S}' \leq \mathcal{Y}$. En efecto, basta probar que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_X, S''[n]) = 0 \qquad \forall\ S'' \in \mathcal{S}', \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, S'')$ a η, obtenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(X, S''[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(C_X, S''[n+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(M_X, S''[n+1]) = 0,$$

$${}_{\mathcal{C}}(M_X, S'') \overset{\mathcal{C}(f,S'')}{\to} {}_{\mathcal{C}}(X, S'') \to {}_{\mathcal{C}}(C_X, S''[1]) \to {}_{\mathcal{C}}(M_X, S''[1]) = 0.$$

Es suficiente ver que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f, S'') : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M_X, S'') \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S'')$ es un epimorfismo. En efecto, sean $g : X \to S''$ y

$$\eta' = \{\eta_i : S''_{i+1} \overset{g'_i}{\to} \bar{S}_i \overset{f'_i}{\to} S''_i \to S''_{i+1}[1]\}_{i=0}^{m}$$

una $\mathcal{S}$-resolución de S'' como en la Proposición 3.2.10. Dado que f_0' es una $\mathcal{S}$-cubierta tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists\, k"'] \arrow[d, "g"] \\ \bar{S}_0 \arrow[r, "f_0'"'] & S''. \end{tikzcd}$$

Ya que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S', S''[n]) = 0$, se tiene del Lema 3.2.11 que

$$\mathrm{add}(S_n) \cap \mathrm{add}(\bar{S}_0) = 0,$$

por lo que existe $k' : M_X \to \bar{S}_0$ tal que $k = k'f$. Por lo tanto,

$$g = f_0 k = f_0 k' f.$$

□

El siguiente resultado caracteriza a las mutaciones irreducibles.

Teorema 3.3.7. [AI12, *2.35*] *Sean $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$ tales que $\forall\ X \in \mathrm{ind}(\mathcal{S})$, μ_X es una clase envolvente en $\mathcal{S}$ y $\forall\ X' \in \mathrm{ind}(\mathcal{S}')$ se tiene que $\mu_{X'}$ es una clase cubriente en $\mathcal{S}'$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathcal{S}'$ es una mutación izquierda irreducible de $\mathcal{S}$.

b) $\mathcal{S}$ es una mutación derecha irreducible de $\mathcal{S}'$.

c) $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$ y no existe $\mathcal{Z} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{S}' < \mathcal{Z} < \mathcal{S}$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ *c)* Sean $\mathcal{S}' = \mu_X^-(\mathcal{S})$, con $X \in \mathrm{ind}(\mathcal{S})$. Supongamos que $\exists\, \mathcal{U} \in \mathrm{silt}(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{S}' < \mathcal{U} < \mathcal{S}$. Por la Proposición 3.3.6 existe $Y \in \mathrm{ind}(\mathcal{S})$ tal que $\mathcal{Y} := \mu_Y^-(\mathcal{S})$ y $\mathcal{U} \leq \mathcal{Y} < \mathcal{S}$. Por el Teorema 3.1.11 $(\mathrm{silt}(\mathcal{C}), \leq)$ es un orden parcial con lo cual $\mathcal{S}' < \mathcal{Y} < \mathcal{S}$. Luego, por la Proposición 3.1.12 se tiene que $\mathrm{ind}(\mu_X(\mathcal{S})) = \mathrm{ind}(\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{ind}(\mu_Y(\mathcal{S}))$. Con lo cual $X = Y$, lo cual es una contradicción.

c) $\Rightarrow$ *a)* Por la Proposición 3.3.6 existe $\mathcal{U}$ una mutación izquierda irreducible de $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S}' \leq \mathcal{U} < \mathcal{S}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}' = \mathcal{U}$.

b) $\iff$ *c)* Es análoga. □

Note que las condiciones anteriores se dan si $\mathcal{C}$ es una R-categoría de Artin con un objeto silting, por la Proposición 3.1.8.

3.4. Un lema tipo Bongartz

En esta sección $\mathcal{C}$ denotará una R-categoría de Artin.

El objetivo principal de esta sección es dar un resultado análogo al Lema de Bongartz.

Proposición 3.4.1. [Ai13, *2.16*] *Sean $S, T \in \mathcal{C}$ un objeto silting y presilting respectivamente tales que $S[1] \leq T \leq S$. Entonces, existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $T \oplus X$ es silting.*

Demostración. Sean $f : T' \to S[1]$ una $\mathrm{add}(T)$-precubierta y

$$\eta : X \to T' \xrightarrow{f} S[1] \to X[1] \in \triangle.$$

Notemos que $\mathcal{C} = \mathrm{thick}(S) \subseteq \mathrm{thick}(X \oplus T)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$_{\mathcal{C}}(T, T') \xrightarrow{\mathcal{C}(T,f)} {}_{\mathcal{C}}(T, S[1]) \to {}_{\mathcal{C}}(T, X[1]) \to {}_{\mathcal{C}}(T, T'[1]) = 0,$$

dado que f es una $\mathrm{add}(T)$-precubierta tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X[1]) = 0$. Ahora, sea $n \in \mathbb{N}^{+}$. Por lo que tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(T, S[n+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(T, X[n+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(T, T'[n+1]) = 0.$$

Luego, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, -)$ a η, con lo cual tenemos la siguiente sucesión exacta, dado que $T \leq S$

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(S, S[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(S, X[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(S, T'[n]) = 0.$$

Ahora bien, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, (T \oplus X)[n])$ a η, obtenemos la siguiente sucesión exacta, por lo anterior

$$\begin{aligned} 0 = {}_{\mathcal{C}}(T', (T \oplus X)[n]) \to {}_{\mathcal{C}}(X, (T \oplus X)[n]) &\to {}_{\mathcal{C}}(S, (T \oplus X)[n]) \\ &\to {}_{\mathcal{C}}(T'[-1], (T \oplus X)[n]) = 0. \end{aligned}$$

De las dos sucesiones exactas anteriores tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,(T\oplus X)[n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S[-1],(T\oplus X)[n]) = 0.$$

Por lo tanto, $T \oplus X$ es silting. $\square$

Teorema 3.4.2. [Ai13, *2.17*] *Sean $S \in \mathcal{C}$ silting y $T \leq S$ presilting. Si existe una cantidad finita de objetos silting $T \leq U \leq S$, entonces existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $T \oplus X$ es silting.*

Demostración. Supongamos que $T \oplus X$ no es silting $\forall\ X \in \mathcal{C}$. Como $T \leq S$, por la Proposición 3.3.6 existe una mutación irreducible izquierda de S tal que $T \leq S_1 < S$. Inductivamente podemos construir una sucesión infinita de mutaciones irreducibles izquierdas $S > S_1 > \cdots > S_n > \cdots$, con $T \leq S_i$. Lo cual es una contradicción. $\square$

3.5. Conexión con teoría τ-inclinante

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin.

El objetivo principal de esta sección es dar una biyección entre los Λ-módulos τ-inclinantes de soporte y complejos silting de dos términos.

Notación 3.5.1. *Denotamos por $\mathcal{K}^{\bullet}(\mathrm{proj}(\Lambda))$ a la categoría homotópica acotada de Λ-módulos proyectivos finitamente generados.*

Definición 3.5.2. Decimos que $P^{\bullet} \in \mathcal{K}^{\bullet}(\mathrm{proj}(\Lambda))$ es un **cocomplejo de dos términos**, si $P^i = 0\ \forall\ i \in \mathbb{Z} - \{0,-1\}$. En tal caso, escribimos

$$P^{\bullet} := P^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} P^0.$$

Veamos que $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ tiene un objeto silting.

Proposición 3.5.3. $0 \to \Lambda$ *es un complejo silting en* $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$.

Demostración. Es suficiente probar que $\forall\ P^{\bullet} \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ tenemos que $P \in \mathrm{thick}(0 \to \Lambda)$. Lo haremos sobre la longitud del complejo $P^{\bullet}$. Podemos suponer que esta concentrado hasta grado 0.

Si $\ell(P^\bullet) = 1$, es claro.

Supongamos que $P^\bullet : \cdots 0 \to P^{-(n+1)} \overset{d^{-(n+1)}}{\to} P^{-n} \to \cdots \to P^0 \to 0 \cdots$. Consideramos el morfismo en $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$

$$\begin{tikzcd} f: & \cdots 0 \arrow[r] & P^{-(n+1)} \arrow[r] \arrow[d, "d^{-(n+1)}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \cdots \\ & \cdots 0 \arrow[r] & P^{-n} \arrow[r] & P^{-(n-1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Dado que $P^\bullet = C(f)$. Por hipótesis de inducción, $P^\bullet \in \mathrm{thick}(\Lambda)$. $\square$

Notemos que $P^\bullet \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ es de dos términos, si y sólo si,

$$(0 \to \Lambda)[1] \leq P^\bullet \leq (0 \to \Lambda).$$

Proposición 3.5.4. [AIR14, *1.6*] *Sea* $P^\bullet \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ *de dos términos presilting. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $P^\bullet$ *es sumando directo de un complejo de dos términos silting.*

b) $P^\bullet$ *es silting, si y sólo si,* $\mathrm{rk}(P^\bullet) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda)$.

Demostración. a) Se sigue la Proposición 3.4.1.

b) $\Rightarrow$) Es consecuencia de la Proposición 3.5.3 y el Teorema 3.2.17.

$\Leftarrow$) Por a) existe $X^\bullet \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ tal que $P^\bullet \oplus X^\bullet$ es silting. Por el Teorema 3.2.17 se tiene que $\mathrm{rk}(P^\bullet) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) = \mathrm{rk}(P^\bullet \oplus X^\bullet)$, con lo que

$$X^\bullet \in \mathrm{add}(P^\bullet).$$

Por lo tanto, $P^\bullet$ es silting. $\square$

Notación 3.5.5. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Denotamos por* :

- $M^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$.
- $\nu(M) := \mathrm{D}_{\Lambda^{op}}(M^*)$.

- $\mathrm{P}_1(M) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M) \overset{\pi_0}{\to} M \to 0$ *a la presentación proyectiva minimal de* M.

Lema 3.5.6. [AIR14, *3.4*] *Sean* $M,\ N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) El morfismo $\mathrm{Hom}_\Lambda(\pi_1, N) : \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_0(M), N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), N)$ *es un epimorfismo.*

b) $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, \tau M) = 0$.

c) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))}(\mathrm{P}_1(M) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M), (\mathrm{P}_1(N) \overset{\pi_1'}{\to} \mathrm{P}_0(N))[1]) = 0$.

En particular, M es τ*-rígido, si y sólo si,* $\mathrm{P}_1(M) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M)$ *es presilting.*

Demostración. $a) \iff b)$ Por la Proposición A.4.11 y la adjunción Hom-tensor tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas, donde los morfismos verticales son isomorfismos.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}_\Lambda(N, \tau M) \arrow[r] & {}_\Lambda(N, \nu \mathrm{P}_1(M)) \arrow[r, "{}_\Lambda(N,\nu(\pi_1))"] \arrow[d] & {}_\Lambda(N, \nu \mathrm{P}_0(M)) \arrow[d] \\ & & \mathrm{D}_{R\Lambda}(\mathrm{P}_1(M), N) \arrow[r, "\mathrm{D}_{R\Lambda}(\pi_1, N)"'] & \mathrm{D}_{R\Lambda}(\mathrm{P}_0(M), N). \end{tikzcd}$$

$a) \Rightarrow c)$ Sean

$$f^\bullet : \quad \begin{tikzcd} & \mathrm{P}_1(M) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{P}_0(M) \\ \mathrm{P}_1(N) \arrow[r, "\pi_1'"'] & \mathrm{P}_0(N) & \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ y $g : \mathrm{P}_0(M) \to N$ tales que $g\pi_1 = \pi_0' f$. Ahora bien, dado que $\mathrm{P}_0(M)$ es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}_0(M) \arrow[dl, dashed, "\exists\, h_0"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{P}_0(N) \arrow[r, "\pi_0'"'] & N. \end{tikzcd}$$

Luego, como $\pi_0'(f - h_0\pi_1) = \pi_0' f - g\pi_1 = 0$ existe $k : \mathrm{P}_1(M) \to \mathrm{Im}(\pi_1')$ tal que $ik = f - h_0\pi_1$, donde $i : \mathrm{Im}(\pi_1') \to \mathrm{P}_0(M)$ es la inclusión canónica. Puesto que $\mathrm{P}_1(M)$ es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}_1(M) \arrow[dl, dashed, "\exists\, h_1"'] \arrow[d, "k"] \\ \mathrm{P}_1(N) \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Im}(\pi_1'), \end{tikzcd}$$

donde p es el epimorfismo canónico, con lo cual $\pi_1' h_1 = ik = f - h_0\pi_1$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Sea $f : \mathrm{P}_1(M) \to N$. Dado que $\mathrm{P}_1(M)$ es proyectivo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}_1(M) \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{P}_0(N) \arrow[r, "\pi_0'"'] & N. \end{tikzcd}$$

Por hipótesis existen $h_0 : \mathrm{P}_0(M) \to \mathrm{P}_0(N)$ y $h_1 : \mathrm{P}_1(M) \to \mathrm{P}_1(N)$ tales que $\pi_1' h_1 + h_0\pi_1 = g$. Por último, tenemos las siguientes igualdades

$$f = \pi_0' g = \pi_0'(\pi_1' h_1 + h_0\pi_1) = \pi_0' h_0 \pi_1.$$

$\square$

Del resultado anterior tenemos la siguiente proposición debida a [DK08].

Proposición 3.5.7. [DK08, *2.2*] *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Si* M *es* τ*-rígido, entonces* $\mathrm{add}(\mathrm{P}_1(M)) \cap \mathrm{add}(\mathrm{P}_0(M)) = 0$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \mathrm{P}_0(M)) = \mathrm{rad}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \mathrm{P}_0(M))$. Sea $f : \mathrm{P}_1(M) \to \mathrm{P}_0(M)$. Por el Lema 3.5.6 existe $g : \mathrm{P}_0(M) \to M$ tal que $\pi_0 f = g\pi_1$. Consideremos $h : \mathrm{P}_0(M) \to \mathrm{P}_0(M)$ tal que $\pi_0 h = g$. Por lo que $0 = \pi_0(f - h\pi_1)$. Ahora, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}_1(M) \arrow[dl, dashed, "\exists\, k"'] \arrow[d, "f-h\pi_1"] & & \\ \mathrm{P}_1(M) \arrow[r, "\pi_1"'] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r, "\pi_0"'] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ya que π_0 es minimal a derecha, por el Lema 1.2.6 tenemos que

$$\pi_1 \in \mathrm{rad}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \mathrm{P}_0(M)).$$

Así pues, $f = \pi_1 k + h\pi_1 \in \mathrm{rad}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), \mathrm{P}_0(M))$. Por lo tanto, por el Corolario 1.2.10 concluimos que $\mathrm{add}(\mathrm{P}_1(M)) \cap \mathrm{add}(\mathrm{P}_0(M)) = 0$. $\square$

Lema 3.5.8. [AIR14, *3.5*] *Sean* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *y* $Q \in \mathrm{proj}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q, M) = 0$.

b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))}(0 \to Q, \mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M)) = 0$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sean

$$f^\bullet : \begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{P}_1(N) \arrow[r, "\pi_1"] & \mathrm{P}_0(N) \end{tikzcd}$$

un morfismo en $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ y $g : Q \to \mathrm{Im}(\pi_1)$ tales que $ig = f$, donde $i : \mathrm{Im}(\pi_1) \to \mathrm{P}_0(M)$ es la inclusión canónica. Ahora, dado que Q es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{P}_1(M) \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Im}(\pi_1), \end{tikzcd}$$

donde p es el epimorfismo canónico, con lo cual $\pi_1 h = iph = ig = f$.

$b) \Rightarrow a)$ Sea $f : Q \to M$. Dado que Q es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "\exists\, g"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{P}_0(M) \arrow[r, "\pi_0"'] & M. \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, existe $k : Q \to \mathrm{P}_1(M)$ tal que $g = \pi_1 k$. Concluimos que $f = \pi_0 g = \pi_0 \pi_1 k = 0$. $\square$

Lema 3.5.9. *Si* $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$, *entonces* $\mathrm{P}_1(M) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M) \in \mathrm{ind}(\mathcal{K}^b(\Lambda))$. *En particular, si* $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *se tiene que* $\mathrm{rk}(N) = \mathrm{rk}(\mathrm{P}_1(N) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(N))$.

Demostración. Sea $P^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} P^0 \oplus P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P'^0 = \mathrm{P}_1(M) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M)$. Notemos que $M = \mathrm{Coker}(\pi_1) = \mathrm{Coker}(d^{-1}) \oplus \mathrm{Coker}(d'^{-1})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathrm{Coker}(d'^{-1}) = 0$. Veamos que $P^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} P^0 \to M \to 0$ es una presentación proyectiva minimal de M. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathrm{mod}(\Lambda)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}_1(M) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f'"'] & P^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "g'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathrm{P}_1(M) \arrow[r, "\pi_1"'] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r, "\pi_0"'] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De la minimalidad a derecha de π_0 y π_1 se sigue que f y g son split-monos. Puesto que $P^{-1} \mid \mathrm{P}_1(M)$ y $P^0 \mid \mathrm{P}_0(M)$, concluimos que f y g son isomorfismos. Por lo tanto, $P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P'^0 = 0 \to 0$. $\square$

Denotamos por

$$2-\mathrm{silt}(\Lambda) := \{P^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} P^0 \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda)) \mid d^{-1} \in \mathrm{rad}_\Lambda(P^{-1}, P^0)\}.$$

El siguiente lema nos dice que la condición del radical no es tan restrictiva.

Lema 3.5.10. *Sea* $P^\bullet = P^{-1} \overset{d_P^{-1}}{\to} P^0 \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ *básico. Entonces, existe* $Q^\bullet = Q^{-1} \overset{d_Q^{-1}}{\to} Q^0 \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ *básico tal que* $d_Q^{-1} \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q^{-1}, Q^0)$ *y*

$$P^\bullet \cong Q^\bullet.$$

Demostración. Haremos el resultado por inducción sobre $n = \mathrm{rk}(P^0)$.

$n = 0$. Se tiene que $P^0 = 0$, con lo cual $d_P^{-1} \in \mathrm{rad}_\Lambda(P^{-1}, P^0)$.

$n+1$. Consideremos $P^\bullet = P^{-1} \overset{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}}{\to} Q \oplus Q'$, con $Q \in \mathrm{ind}(\Lambda)$.

Caso I. Si f es un split-epi. Entonces, $P^\bullet = Q \oplus P' \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g' & g'' \end{pmatrix}}{\to} Q \oplus Q'$. Sea $T^\bullet = P' \overset{g''}{\to} Q'$, veamos que $P^\bullet \cong T^\bullet$. En efecto, consideremos los siguientes morfismos de cocomplejos

$$\begin{tikzcd}
Q \oplus P' \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g' & g'' \end{pmatrix}"] \arrow[d, "(0,1)"'] & Q \oplus Q' \arrow[d, "(0,1)"] \\
P' \arrow[r, "g''"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] & Q' \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] \\
Q \oplus P' \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g' & g'' \end{pmatrix}"'] & Q \oplus Q'.
\end{tikzcd}$$

Dado que los siguientes cuadrados conmutan

$$\begin{tikzcd}
Q \oplus P' \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g' & g'' \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & Q \oplus Q' \arrow[dl, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"] \\
Q \oplus P' \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g' & g'' \end{pmatrix}"'] & Q \oplus Q',
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "1-1=0"'] & Q' \arrow[dl, "0"] \arrow[d, "1-1=0"] \\
P' \arrow[r, "g''"'] & Q'.
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción, existe $Q^\bullet = Q^{-1} \overset{d_Q^{-1}}{\to} Q^0 \in \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))$ básico tal que $d_Q^{-1} \in \mathrm{rad}_\Lambda(Q^{-1}, Q^0)$ y $P^\bullet \cong T^\bullet \cong Q^\bullet$. $\square$

Proposición 3.5.11. [AIR14, *3.6*] *Sea* $P^\bullet = P^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} P^0 \in 2-\mathrm{silt}(\Lambda)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $H^0(P^\bullet) \in \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$.

b) Si f *es minimal a derecha, entonces* $H^0(P^\bullet) \in \tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$.

Demostración. Sea $d^{-1} = (d'^{-1}, 0) : P'^{-1} \oplus P''^{-1} \to P^0$, con d'^{-1} la versión minimal a derecha de d^{-1}. Veamos que $P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P^0 \overset{d'^0}{\to} H^0(P^\bullet) \to 0$ es la presentación proyectiva minimal de $H^0(P^\bullet)$. En efecto, sea $\alpha \in \mathrm{End}_\Lambda(P^0)$ tal que $d'^0 = d'^0\alpha$. Por la propiedad universal del Kernel y puesto que P^0 es proyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\beta"'] \arrow[d, "\alpha-1"] \\ P'^{-1} \arrow[r, "d'^{-1}"'] & P^0. \end{tikzcd}$$

Dado que $-d'^{-1} \in \mathrm{rad}_\Lambda(P'^{-1}, P^0)$, se tiene que $\alpha = 1 - (-d'^{-1}\beta)$ es un isomorfismo. Por lo que $P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P^0 \overset{d'^0}{\to} H^0(P^\bullet) \to 0$ es la presentación proyectiva minimal de $H^0(P^\bullet)$.

a) Veamos que $(H^0(P^\bullet), P''^{-1})$ es un par τ-inclinante de soporte. En efecto, dado que $P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P^0$ es presilting, por el Lema 3.5.6 tenemos que $H^0(P^\bullet)$ es τ-rígido. Dado que $P^\bullet$ es presilting tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\bullet(\mathrm{proj}(\Lambda))}(0 \to P''^{-1}, P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P^0) = 0,$$

por el Lema 3.5.8 se tiene que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P''^{-1}, M) = 0$. Luego, por el Lema 3.5.9 tenemos que $\mathrm{rk}(P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P^0) = \mathrm{rk}(H^0(P^\bullet))$; por la Proposición 3.5.4 tenemos las siguientes igualdades

$$\mathrm{rk}(H^0(P^\bullet)) + \mathrm{rk}(P''^{-1}) = \mathrm{rk}(P'^{-1} \overset{d'^{-1}}{\to} P^0) + \mathrm{rk}(P''^{-1}) = \mathrm{rk}(P^\bullet) = \mathrm{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda).$$

b) Por *a*) $(H^0(P^\bullet), 0)$ es un par τ-inclinante de soporte. $\square$

Proposición 3.5.12. [AIR14, *3.7*] *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si (M, P) es un par τ-inclinante de soporte, entonces

$$\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M) \oplus P \to 0 = \mathrm{P}_1(M) \oplus P \stackrel{(\pi_1,0)}{\to} \mathrm{P}_0(M) \in 2 - \mathrm{silt}(\Lambda).$$

b) Si M es τ-inclinante, entonces $\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M) \in 2 - \mathrm{silt}(\Lambda)$.

Demostración. a) Por el Lema 3.5.6 se tiene que $\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M)$ es presilting; por el Lema 3.5.8 se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\bullet(\mathrm{proj}(\Lambda))}(P \to 0, (\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M))[1]) = 0,$$

con lo cual $\mathrm{P}_1(M) \oplus P \stackrel{(\pi_1,0)}{\to} \mathrm{P}_0(M)$ es presilting. Luego, por el Lema 3.5.9 se sigue que $\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M)$. Dado que (M, P) es un par τ-inclinante de soporte tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}(\mathrm{P}_1(M) \oplus P \stackrel{(\pi_1,0)}{\to} \mathrm{P}_0(M)) &= \mathrm{rk}(\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(M)) + \mathrm{rk}(P) \\
&= \mathrm{rk}(M) + \mathrm{rk}(P) \\
&= \mathrm{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda).
\end{aligned}$$

b) Es inmediato de a). □

El siguiente resultado es inmediato de las dos proposiciones anteriores y es el resultado que da la conexión con la teoría τ-inclinante.

Teorema 3.5.13. [AIR14, *3.2*] *Existe una biyección*

$$2 - \mathrm{silt}(\Lambda) \leftrightarrow \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$$

dada por $P^\bullet \in 2 - \mathrm{silt}(\Lambda) \mapsto \varphi(P^\bullet) := \mathrm{H}^0(P^\bullet)$ *y*

$$(M, P) \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda) \mapsto \varphi((M, P)) := \mathrm{P}_1(M) \oplus P \stackrel{(\pi_1,0)}{\to} \mathrm{P}_0(M).$$

Notemos que $\varphi(P^\bullet \oplus Q^\bullet) = \varphi(P^\bullet) \oplus \varphi(Q^\bullet)$ $\forall$ $P^\bullet$, $Q^\bullet$ presilting de dos términos y $\psi((M, P) \oplus (N, Q)) = \psi((M, P)) \oplus \psi((N, Q))$ $\forall$ (M, P), (N, Q) pares τ-rígidos. De estas observaciones se desprende el siguiente corolario.

Corolario 3.5.14. [AIR14, *3.8*] *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Si $P^\bullet$ es presilting básico de dos términos tal que $\mathrm{rk}(P^\bullet) = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - 1$, *entonces es sumando directo exactamente de dos silting básicos de dos términos.*

b) Sean $P^\bullet, Q^\bullet \in 2-\mathrm{silt}(\Lambda)$. Entonces, $|\mathrm{ind}(P^\bullet) \cap \mathrm{ind}(Q^\bullet)| = \mathrm{rkK}_0(\Lambda) - 1$, *si y sólo si, $\mu^+_{X^\bullet}(P^\bullet) = Q^\bullet$ o $\mu^-_{X^\bullet}(P^\bullet) = Q^\bullet$, con $X^\bullet \in$* $\mathrm{ind}(\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda)))$.

Demostración. a) Se sigue del Teorema 2.3.8 y el Teorema 3.5.13.

b) Se sigue de a). □

Corolario 3.5.15. [AIR14, *3.9*] *La biyección $\varphi : 2-\mathrm{silt}(\Lambda) \to \mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}(\Lambda)$ es un isomorfismo de órdenes parciales, con inversa*

$$\psi : \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda) \to 2 - \mathrm{silt}(\Lambda).$$

Demostración. Sean (M,P), (N,Q) pares τ-inclinantes de soporte básicos. Por el Lema 2.4.2 $N \leq M$, si y sólo si, $\mathrm{Hom}_\Lambda(N,\tau M) = 0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(P,N)$; por el Lema 3.5.6 y el Lema 3.5.8 esto es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\bullet(\mathrm{proj}(\Lambda))}(\mathrm{P}_1(M) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{P}_0(M), (\mathrm{P}_1(N) \xrightarrow{\pi_1'} \mathrm{P}_0(N))[1]) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\bullet(\mathrm{proj}(\Lambda))}(0 \to P, \mathrm{P}_1(N) \xrightarrow{\pi_1'} \mathrm{P}_0(N)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N \leq M \iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(\Lambda))}(\varphi(N), \varphi(M)[1])$. □

Denotamos por $\mathrm{Q}(2-\mathrm{silt}(\Lambda))$ al carcaj de Hasse del orden parcial silting $(2-\mathrm{silt}(\Lambda), \leq)$. Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Corolario 3.5.16. [AIR14, *3.10*] *Si* $\mathrm{Q}(2-\mathrm{silt}(\Lambda))$ *tiene una componente conexa finita C, entonces* $\mathrm{Q}(2-\mathrm{silt}(\Lambda)) = C$.

Demostración. Es inmediato del Corolario 2.4.11 y el Teorema 3.5.13. □

3.6. Caracterizando álgebras τ-rígidas finitas

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin tal que $\mathrm{rad}^2(\Lambda) = 0$.

El objetivo principal de esta sección es caracterizar las álgebras τ-rígidas finitas Λ, donde $\mathrm{rad}^2(\Lambda) = 0$, para dar un ejemplo de un álgebra de tipo de representación infinita que es τ-rígida finita.

Teorema 3.6.1. [A16, *3.2*] *Sean* $F : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\triangle(\Lambda))$ *el funtor de la Proposición A.5.2 y* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,* M *es* τ*-rígido, si y sólo si,* $F(M) \in \mathrm{mod}(\triangle(\Lambda))$ *es* τ*-rígido y* $\mathrm{add}(\mathrm{P}_1(M)) \cap \mathrm{add}(\mathrm{P}_0(M)) = 0$.

Demostración. Sean $i : \mathrm{rad}(M) \to M$, $j : \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \to \mathrm{P}_0(M)$, $l : \mathrm{rad}(\mathrm{P}_1(M)) \to \mathrm{P}_1(M)$ y $p : \mathrm{P}_1(M) \to \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M))$ los morfismos canónicos.

$\Rightarrow$) Sea $f : 0 \oplus \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)) \to F(M)$. Por la Proposición A.5.2 a) existe $f' : \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)) \to \mathrm{rad}(M)$ tal que $f = 0 \oplus f'$; por el Lema 3.5.6 existe $g : \mathrm{P}_0(M) \to M$ tal que $if'p = g\pi_1 = gj\overline{\pi_1}p = ig_1\overline{\pi_1}p$. Por lo que $f' = g_1\overline{\pi_1}$. Así pues, $f = 0 \oplus f' = F(g)(0 \oplus \overline{\pi_1})$. Por ende,

$${}_{\triangle(\Lambda)}(0 \oplus \overline{\pi_1}, F(M)) : {}_{\triangle(\Lambda)}(F(\mathrm{P}_0(M)), F(M)) \to {}_{\triangle(\Lambda)}(\mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)), F(M))$$

es un epimorfismo. Por la Proposición A.5.2 e) y el Lema 3.5.6 $F(M)$ es τ-rígido.

$\Leftarrow$) Sea $f : \mathrm{P}_1(M) \to M$. Veamos que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(M)$. En efecto, por el Lema 3.5.6 existe $g : \mathrm{P}_0(M) \to M$ tal que $f = g\pi_1 \in \mathrm{rad}_\Lambda(\mathrm{P}_1(M), M)$ (Corolario 1.2.10). Por el Lema A.5.1, el Lema 3.5.6 y la Proposición A.5.2 existe $h : \mathrm{P}_0(M) \to M$ tal que $\overline{f} \oplus 0 = F(h)(\overline{\pi_1} \oplus 0)$. Por lo que

$$f = i\overline{f}p = ih_1\overline{\pi_1}p = hj\overline{f}p = h\pi_1.$$

Por lo tanto, por el Lema 3.5.6 M es τ-rígido. $\square$

Para caracterizar las álgebras τ-rígidas finitas, se necesitarán algunos resultados previos.

Lema 3.6.2. *Sean* Λ *un álgebra hereditaria*

$$(\textit{no necesariamente } \operatorname{rad}^2(\Lambda) = 0),$$

$\{e_i\}_{i=1}^n$ *un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos y*

$$\sum_{j=1}^{m} e_j =: e,$$

con $1 \leq m \leq n$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen :*

a) $e\Lambda e$ *es un álgebra hereditaria.*

b) $\operatorname{rk}(e\Lambda e) = m$.

c) sea $Q' \subseteq Q^{\Lambda}$ *el subcarcaj pleno tal que* $Q'_0 = \{\operatorname{top}(\Lambda e_j) := S_j\}_{j=1}^n$, *entonces* $Q^{e\Lambda e} \cong Q'$.

Demostración. a) Podemos suponer que existe $1 \leq r \leq n$ tal que

$$e' := \sum_{j=1}^{r} e_j,$$

con $\operatorname{rad}(\Lambda) = \Lambda e'$. Notemos que

$$\operatorname{rad}(e\Lambda e) = e\operatorname{rad}(\Lambda)e = e\Lambda e' e = e\Lambda e e' \in \operatorname{proj}(e\Lambda e).$$

Por lo que $e\Lambda e$ es hereditaria.

b) Puesto que $\{e_j\}_{j=1}^m$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de $e\Lambda e$ y Λ es básica, concluimos que $\operatorname{rk}(e\Lambda e) = m$.

c) Sea

$$\varphi : Q' \to Q^{e\Lambda e}$$
$$\alpha : S_j \to S_k \ \mapsto \ \overline{\alpha} : \operatorname{top}(e\Lambda e_j) \to \operatorname{top}(e\Lambda e_k).$$

Veamos que φ es un isomorfismo de carcajs. En efecto, es claro que $\{\operatorname{top}(e\Lambda e_j)\}_{j=1}^m$ es un sistema completo de $e\Lambda e$-módulos simples. Notemos que $\forall\ 1 \leq i,\ j \leq m$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^1_\Lambda(S_j, S_i) = 0 &\iff e_i(\operatorname{rad}(\Lambda)/\operatorname{rad}^2(\Lambda))e_j = 0 && \text{[Fl10, Teorema 5.2.3]}\\
&\iff e_i(\operatorname{rad}(e\Lambda e)/\operatorname{rad}^2(e\Lambda e))e_j = 0 && \operatorname{rad}(e\Lambda e) = e\operatorname{rad}(\Lambda)e\\
&\iff \operatorname{Ext}^1_{e\Lambda e}(\operatorname{top}(e\Lambda e_j), \operatorname{top}(e\Lambda e_i)) = 0 && \text{[Fl10, Teorema 5.2.3].}
\end{aligned}$$

Por último, es fácil ver que si $p : \oplus_{k=1}^{n}(\Lambda e_k)^{m_k} \to \mathrm{rad}(\Lambda e_j)$ es la cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}(\Lambda e_j)$, induce una cubierta proyectiva de $\mathrm{rad}(e\Lambda e_j)$,

$$p' : \oplus_{k=1}^{n}(e\Lambda e_k)^{m_k} \to \mathrm{rad}(e\Lambda e_j).$$

Por la Proposición ARS95 III.1.5, se tiene que $v_{Q^{e\Lambda e}} = v_{Q'}$. □

Definición 3.6.3. Sea Q un carcaj. Decimos que un subcarcaj pleno $Q' \subseteq Q_S$ es **sencillo** de Q, si $|Q' \cap \{(i,0),(i,1)\}| \leq 1 \ \forall \ i \in Q_1$.

Sean $Q' \subseteq \Lambda_S$ un subcarcaj sencillo y $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Lambda$ un sistema de idempotentes ortogonales primitivos. Denotamos por:

$$\tau - \mathrm{rigid}(\triangle(\Lambda), Q') := \{X \in \mathrm{mod}(\triangle(\Lambda)) \mid \mathrm{add}(\mathrm{P}_1(X) \oplus \mathrm{P}_0(X)) \subseteq \mathrm{add}(\oplus_{i \in Q'_0} \Lambda e_i)\}.$$

Lema 3.6.4. *Sean $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ y $e^2 = e \in \Lambda$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) El funtor $L_e := \Lambda e_{e\Lambda e} \otimes - : \mathrm{mod}(e\Lambda e) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ es un funtor fiel y pleno y existe un isomorfismo funtorial $R_e L_e \simeq 1_{\mathrm{mod}(e\Lambda e)}$, donde

$$R_e := e- : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(e\Lambda e).$$

Más aún,

$$L_e : \mathrm{mod}(e\Lambda e) \to \{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathrm{add}(\mathrm{P}_1(M) \oplus \mathrm{P}_0(M) \subseteq \mathrm{add}(\Lambda e)\}$$

es una equivalencia de categorías.

b) $M \in \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda)$, si y sólo si, $eM \in \tau - \mathrm{rigid}(e\Lambda e)$.

Demostración. a) Ver [ASS06, Teorema I.6.8].

b) Se sigue de a) y el Lema 3.5.6. □

Teorema 3.6.5. [A16, *3.1*] *Las siguientes condiciones se satisfacen :*

a) el funtor $F : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\triangle(\Lambda))$ induce una biyección

$$F : \mathrm{ind}(\tau - \mathrm{rigid}_p(\Lambda)) \to \bigcup_{Q' \in \mathcal{S}(Q^{\Lambda})} \mathrm{ind}(\tau - \mathrm{rigid}_p(\triangle(\Lambda), Q'))$$

b) Λ es τ-rígida finita, si y sólo si, $\forall \ Q' \in \mathcal{S}(Q^{\Lambda})$ la gráfica subyacente de Q' es la unión disjunta de gráficas Dynkin y $v(\alpha) = (1,1) \ \forall \ \alpha \in Q'$.

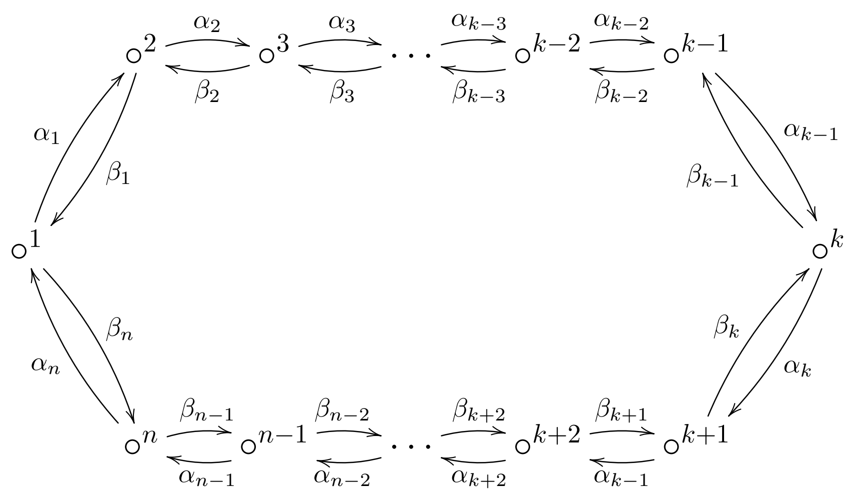
Demostración. Sean $\{e_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos, $M \in \operatorname{ind}(\tau - \operatorname{rigid}_p(\Lambda))$, $\{(m_i, n_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $\mathrm{P}_1(M) = \oplus_{i=1}^n (\Lambda e_i)^{m_i}$, $\mathrm{P}_0(M) = \oplus_{i=1}^n (\Lambda e_i)^{n_i}$ y $Q^M \subseteq \Lambda_S$ el subcarcaj pleno tal que $Q_0^M := \{(\operatorname{top}(\Lambda e_i), 0) \mid m_i \neq 0\} \cup \{(\operatorname{top}(\Lambda e_j), 1) \mid n_j \neq 0\}$ y $e_M := \sum_{\{j \mid m_j \neq 0, n_j \neq 0\}} e_j$.

a) Se sigue del Teorema 3.6.1 que Q^M es un subcarcaj sencillo de Λ_S. Por lo que la biyección se da por la Proposición A.5.2 y el Teorema 3.6.1.

b) Sean $Q' \in \mathcal{S}(Q^\Lambda)$ y $e' := \sum_{i \in Q'_0} e_i$. Por el Lema 3.6.4 tenemos una biyección $\operatorname{ind}(\tau - \operatorname{rigid}(\triangle(\Lambda), Q')) \longleftrightarrow \operatorname{ind}(\tau - \operatorname{rigid}(e' \triangle (\Lambda) e'))$ y por el Lema 3.6.2 se tiene que $Q' \cong Q^{e' \triangle(\Lambda) e'}$. Por lo tanto, por el Teorema de Gabriel Λ es τ-rígida finita, si y sólo si, Q' es la unión disjunta de gráficas Dynkin y $v(\alpha) = (1,1)\ \forall\ \alpha \in Q'$. $\square$

Ejemplo 3.6.6. [A16, 4.5] Sean k un campo,

$Q :=$



y $A := kQ/\operatorname{rad}^2(kQ)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

a) A es de tipo de representación infinita.

b) A es τ-rígida finita, si y sólo si, n es impar.

Demostración. Si n par. Por el Lema ASS06 2.12 tenemos que

$$A_S = R_A \sqcup L_A,$$

donde:

$$
\begin{tikzcd}
 & \circ^{(2,1)} & \circ^{(3,0)} \arrow[l] \arrow[r] & \cdots & \circ^{(k-2,0)} \arrow[l] \arrow[r] & \circ^{(k-1,1)} & \\
L_A := \circ^{(1,0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \circ^{(k,0)} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \circ^{(n,1)} & \circ^{(n-1,0)} \arrow[l] \arrow[r] & \cdots & \circ^{(k+2,0)} \arrow[l] \arrow[r] & \circ^{(k+1,1)} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \circ^{(2,0)} \arrow[r] \arrow[dl] & \circ^{(3,1)} & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \circ^{(k-2,1)} & \circ^{(k-1,0)} \arrow[l] \arrow[dr] & \\
R_A := \circ^{(1,1)} & & & & & & \circ^{(k,1)}. \\
 & \circ^{(n,0)} \arrow[r] \arrow[ul] & \circ^{(n-1,1)} & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \circ^{(k+2,1)} & \circ^{(k+1,0)} \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Si n es impar. Por el Lema ASS06 2.12 tenemos que

$$
\begin{tikzcd}
 & \circ^{(2,1)} & \circ^{(3,0)} \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \circ^{(n-1,1)} & \circ^{(n,0)} \arrow[l] \arrow[dr] & \\
A_S = \circ^{(1,0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \circ^{(1,1)}. \\
 & \circ^{(n,1)} & \circ^{(n-1,0)} \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \circ^{(3,1)} & \circ^{(2,0)} \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

a) Por la descripción de A_S dada anteriormente y el Teorema A.5.7, concluimos que A es de tipo de representación infinita.

b) Si n es par tenemos que $L_A \in \mathcal{S}(Q^A)$ y dado que la gráfica subyacente de L_A no es Dynkin. Por el Teorema 3.6.5 A no es τ-rígida finita. Por otro lado, si n es impar, $\forall\ Q' \in \mathcal{S}(Q^A)$ la gráfica subyacente de Q' es Dynkin. Por lo tanto, por el Teorema 3.6.5 A es τ-rígida finita. $\square$

Capítulo 4

Teoría inclinante de conglomerado

En este capítulo, introduciremos los (n+2)-ángulos en categorías trianguladas y demostramos que siempre existen (n+2)-ángulos de Auslander-Reiten en subcategorías n-inclinantes de conglomerado que son una generalización de triángulos de Auslander-Reiten. Además, esta idea es una herramienta esencial para la clasificación de objetos n-rígidos en una categoría triangulada.

4.1. Subcategorías n-inclinantes de conglomerado

En esta sección $\mathcal{C}$ denotará una categoría triangulada Krull-Schmidt.

El objetivo de esta sección es introducir las subcategorías n-inclinantes de conglomerado, las categorías con funtor de Serre y ver su relación con las R-variedades dualizantes. Por último, ver la existencia de $n+2$-ángulos de Auslander-Reiten para subcategorías n-inclinantes de conglomerado que es un análogo triangulado de las n-sucesiones de Auslander-Reiten.

Definición 4.1.1. Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{N}^+$. Decimos que:

a) $\mathcal{X}$ es $\mathbf{n-}$**rígida** si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}[i]) = 0 \ \forall \ 0 < i < n$.

b) $\mathcal{X}$ es $\mathbf{n-}$ **inclinante de conglomerado** si $\mathcal{X}$ es cubriente, envolvente y

$$\mathcal{X} = \cap_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}[-i]^{\perp_0} = \cap_{i=1}^{n-1} {}^{\perp_0}\mathcal{X}[i].$$

Notemos que si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ es una subcategoría n-inclinante de conglomerado, entonces $\operatorname{add}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Proposición 4.1.2. [IY08, *2.4*] *Sean* $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C}$ *subcategorías cubrientes y cerradas por extensiones tales que* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j[1]) = 0 \ \forall\ i < j$. *Si*

$$\mathcal{Y}_n := \operatorname{add}(\mathcal{X}_1 * \cdots * \mathcal{X}_n) \qquad y \qquad \mathcal{Z}_n := \cap_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i^{\perp_0},$$

entonces $(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Z}_n)$ *es un par de torsión.*

Demostración. Veamos que $(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Z}_n)$ es un par de torsión por inducción sobre n.

$n = 1$. Se sigue la Proposición 3.2.6.

$n + 1$. Es claro que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Y}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+1}) = 0$. Sea $X \in \mathcal{C}$. Por hipótesis de inducción existe un triángulo distinguido $Y_n \to X \to Z_n \to Y_n[1]$, con $Y_n \in \mathcal{Y}_n$ y $Z_n \in \mathcal{Z}_n$. Consideremos $f_{n+1} : X_{n+1} \to Z_n$ una $\mathcal{X}_{n+1}$-cubierta y

$$Z_{n+1}[-1] \to X_{n+1} \overset{f_{n+1}}{\to} Z_n \to Z_{n+1} \in \triangle.$$

Por la Proposición 3.2.6 se tiene que $Z_{n+1} \in \mathcal{X}_{n+1}^{\perp_0}$. Por hipótesis

$$Z_n, X_{n+1}[1] \in \mathcal{Z}_n$$

y por la Proposición 3.2.6 se sigue que $Z_{n+1} \in \mathcal{Z}_n \cap \mathcal{X}_{n+1}^{\perp_0} = \mathcal{Z}_{n+1}$. Aplicando cambio de base tenemos que

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{n+1}[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z_{n+1}[-1] \arrow[d] & \\
Y_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & Y_n[1] \arrow[d, equal] \\
Y_n \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Z_n \arrow[r] \arrow[d] & Y_n[1] \\
 & Z_{n+1} \arrow[r, equal] & Z_{n+1}. &
\end{tikzcd}$$

Así pues, $Y_{n+1} \in \mathcal{Y}_n * \mathcal{X}_{n+1} \subseteq \mathcal{Y}_{n+1}$. Por lo tanto, $(\mathcal{Y}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+1})$ es un par de torsión. $\square$

El siguiente resultado es la contraparte inclinante de conglomerado de la Proposición 3.2.8.

Teorema 4.1.3. [IY08, *3.1*] *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-inclinante de conglomerado. Entonces,*

a) $\mathcal{C} = \mathcal{X} * \cdots * \mathcal{X}[n-1]$.

b) $(\mathcal{X} * \cdots * \mathcal{X}[m-1], \mathcal{X}[m] * \cdots * \mathcal{X}[n-1])$ *es un par de torsión* $\forall\ 0 < m < n$.

Demostración. a) Notemos que $\mathcal{X}[n-1] = \cap_{i=0}^{n-2} \mathcal{X}[i]^{\perp_0}$. Por la Proposición 4.1.2 se tiene que $(\mathcal{X} * \cdots * \mathcal{X}[n-2], \mathcal{X}[n-1])$ es un par de torsión.
b) Se sigue de a) y de que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X} * \cdots * \mathcal{X}[m-1], \mathcal{X}[m] * \cdots * \mathcal{X}[n-1]) = 0$. □

Definición 4.1.4. Sean $\{\eta_i : X_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\to} C_i \overset{g_i}{\to} X_i \to X_{i+1}[1] \in \triangle\}_{i=0}^{n-1}$. Decimos que el complejo $X_n \overset{f_n}{\to} C_{n-1} \overset{g_{n-1}f_{n-1}}{\to} C_{n-2} \to \cdots \to C_0 \overset{g_0}{\to} X_0$ es un $\mathbf{n+2-}$**ángulo** en $\mathcal{C}$.

El siguiente es un resultado es la versión triangulada de [I07, Teorema 2.2.3].

Corolario 4.1.5. [I07, *3.3*] *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-inclinante de conglomerado y $C \in \mathcal{C}$. Entonces, existe un $n+2$-ángulo*

$$0 \to X_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \to C,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, $f_i \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X_i, X_{i-1})\ \forall\ 0 < i < n$.

Demostración. Por el Teorema 4.1.3 se tiene que $C \in \mathcal{X} * \cdots * \mathcal{X}[n-1]$. Así podemos construir una $\mathcal{X}$-resolución de C

$$\eta := \{\eta_i : C_{i+1} \overset{g_i}{\to} X_i \to C_i \to C_{i+1}[1]\}_{i=0}^{n-1},$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ y $g_i \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(C_{i+1}, X_i)\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1$. Pegando los triángulos anteriores se obtiene el $n+2$-ángulo deseado. □

Definición 4.1.6. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Decimos que:

a) f es un **morfismo pozo**, si f es minimal a derecha, $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)}{\to} \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(-, Y) \to 0,$$

es una sucesión exacta de funtores.

b) f es un **morfismo fuente**, si f es minimal a izquierda, $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, -) \to 0,$$

es una sucesión exacta de funtores.

Definición 4.1.7. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-inclinante de conglomerado. Decimos que un $n+2$-ángulo $Z \overset{g_n}{\to} X_{n-1} \overset{f_{n-1}g_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \overset{f_0}{\to} Y$, es de **Auslander − Reiten** si

a) $Y,\ Z,\ X_i \in \mathcal{X}\ \forall\ 1 \leq i \leq n-1$.

b) f_0 es un morfismo pozo y g_n es un morfismo fuente.

c) f_i es una $\mathcal{X}$-cubierta $\forall\ 1 \leq i \leq n-1$.

d) g_j es una $\mathcal{X}$-envolvente $\forall\ 1 \leq i \leq n-1$.

El resto de la sección está destinada a probar que si $\mathcal{X}$ es una subcategoría n-inclinante de conglomerado, entonces para todo objeto C en $\mathcal{C}$ existen $n+2$-ángulos de Auslander-Reiten que empiezan y terminan en C, cuando $\mathcal{C}$ tenga un funtor de Serre $\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Este resultado es un análogo triangulado a [I07, Teorema 3.3.1].

Definición 4.1.8. Sea $\mathcal{C}$ una R-categoría Hom-finita y esqueléticamente pequeña con R un anillo artiniano. Decimos que una R-equivalencia de categorías $\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor de Serre, si existen isomorfismos funtoriales

$$\Phi_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathbb{S}X) \qquad \forall\ X \in \mathcal{C},$$

$$\Psi_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathbb{S}-) \qquad \forall\ Y \in \mathcal{C}.$$

Decimos que $\mathcal{C}$ es **n − Calabi − Yau**, si $\mathbb{S} = [n]$. Denotamos $\mathbb{S}_n := \mathbb{S}[-n]$ y decimos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ es una $\mathbb{S}_{\mathbf{n}}$ **− subcategoría**, si $\mathcal{X} = \mathbb{S}_n(\mathcal{X}) = \mathbb{S}_n^{-1}(\mathcal{X})$.

Lema 4.1.9. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una R-equivalencia de categorías. Entonces, existe un isomorfismo*

$$\varphi(X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), F(X)) \qquad \forall\ X \in \mathcal{C}.$$

Demostración. Sea $X \in \mathcal{C}$. Consideremos los isomorfismos de R-módulos

$$\varphi(X)_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Y), F(X))$$
$$f \mapsto F(f).$$

Sea $f : Y \to Z$. El resultado se sigue de la conmutatividad del diagrama que se muestra a continuación

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \arrow[r, "\varphi(X)_Z"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Z), F(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(f),F(X))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \arrow[r, "\varphi(X)_Y"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(Y), F(X)).
\end{tikzcd}$$

□

El siguiente resultado muestra la relación entre la existencia de funtores de Serre y R-variedades dualizantes que es una generalización de [AR94, Proposición 2.2].

Lema 4.1.10. *Sea $\mathcal{C}$ esqueléticamente pequeña. Entonces, el funtor*

$$\mathrm{D}_R : \mathrm{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{C}^{op})$$

es fiel y pleno.

Demostración. Sean $F, G \in \mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ y

$$\eta := \{\eta_X : \mathrm{D}_R F(X) \to \mathrm{D}_R G(X)\}_{X \in \mathcal{C}} : \mathrm{D}_R F \to \mathrm{D}_R G$$

un morfismo de $\mathcal{C}^{op}$-módulos. Como $\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(R) \to \mathrm{mod}(R)$ es una equivalencia de categorías existen $\{\xi_X : G(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ morfismos en $\mathrm{mod}(R)$ tales que $\mathrm{D}_R(\xi_X) = \eta_X \ \forall \ X \in \mathcal{C}$. Veamos que $\xi := \{\xi_X : G(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ es una transformación natural. En efecto, sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Como η es una transformación natural tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R F(Y) \arrow[r, "\mathrm{D}_R F(f^{op})"] \arrow[d, "\eta_Y"'] & \mathrm{D}_R F(X) \arrow[d, "\eta_X"] \\
\mathrm{D}_R G(Y) \arrow[r, "\mathrm{D}_R G(f^{op})"'] & \mathrm{D}_R G(X).
\end{tikzcd}$$

Con lo cual tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_R(F(f)\xi_X) = \mathrm{D}_R(\xi_X)\mathrm{D}_R F(f) = \eta_X \mathrm{D}_R F(f^{op}) &= \mathrm{D}_R G(f^{op})\eta_Y \\ &= \mathrm{D}_R G(f)\mathrm{D}_R(\xi_Y) \\ &= \mathrm{D}_R(\xi_Y G(f)).\end{aligned}$$

Por lo que $F(f)\xi_X = \xi_Y G(f)$ y así $\xi : G \to F$ es un morfismo de $\mathcal{C}$-módulos. Entonces, $\mathrm{D}_R : \mathrm{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ es pleno, de manera análoga también es fiel. $\square$

Teorema 4.1.11. [IY08, *2.11*] *Sea $\mathcal{C}$ una R-categoría de Artin, esqueléticamente pequeña y con pseudokerneles. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathcal{C}$ es una R-variedad dualizante.

b) Para cada $X \in \mathcal{C}$, existen $\mathbb{S}(X) \in \mathcal{C}$ e isomorfismos

$$\varphi_X : \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathbb{S}(X)).$$

c) $\mathcal{C}$ tiene un funtor de Serre, $\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sea $X \in \mathcal{C}$. Dado que $\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \in \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$, existe una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(f^{op}, -)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y, -) \overset{\Phi}{\to} \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to 0,$$

donde $f^{op} : Y \to X$. Consideremos $Z \overset{g}{\to} X \overset{f}{\to} Y \overset{h}{\to} Z[1] \in \triangle$. Entonces, tenemos la siguientes sucesión exacta

$$\eta : 0 \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Z[1], -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h[1]^{op}, -)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X[1], -).$$

Puesto que $\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una equivalencia de categorías, se tiene que $\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \in \mathrm{inj}(\mathrm{mod}(\mathcal{C}))$. Así que η se escinde, dado que $\mathcal{C}$ es Krull-Schmidt $\exists!\ \mathbb{S}(X) \mid Z[1]$ y un isomorfismo

$$\varphi_X : \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathbb{S}(X)).$$

b) $\Rightarrow$ *c)* Por hipótesis existe un isomorfismo

$$\varphi_X : \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathbb{S}(X)) \qquad \forall\ X \in \mathcal{C}.$$

Sea $f : X \to Y$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_Y)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(Y)) \arrow[d, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Y)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)).
\end{tikzcd}$$

Por el Corolario A.9.4, existe un único morfismo $\mathbb{S}(f) : \mathbb{S}(X) \to \mathbb{S}(Y)$ tal que $\mathrm{D}_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(f))) = \mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Y)$. Veamos que la asignación

$$\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$
$$X \xrightarrow{f} Y \mapsto \mathbb{S}(X) \xrightarrow{\mathbb{S}(f)} \mathbb{S}(Y),$$

es un funtor de Serre. En efecto, sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, con lo cual tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_Z)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(Z)) \arrow[d, "\mathrm{D}_R(\varphi_Y)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Z)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_Y)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(Y)) \arrow[d, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Y)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)).
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_Z)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(gf,-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(Z)) \arrow[d, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(gf,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Z)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)).
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathrm{D}_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(f))) = \mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Y)$ y

$$\mathrm{D}_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(g))) = \mathrm{D}_R(\varphi_Y)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Z).$$

Por lo que

$$\mathrm{D}_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(g)\mathbb{S}(f))) = \mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(gf,-)\mathrm{D}_R(\varphi_Z).$$

Concluimos que $\mathbb{S}(g)\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(gf)$. Luego,

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1_X,-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)) \arrow[d, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1_X,-)\mathrm{D}_R(\varphi_X)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)).
\end{tikzcd}
$$

Puesto que

$$
\begin{aligned}
1_{\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X))} &= \mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1_X,-)\mathrm{D}_R(\varphi_X) \\
&= \mathrm{D}_R(-,1_{\mathbb{S}(X)}),
\end{aligned}
$$

tenemos que $\mathbb{S}(1_X) = 1_{\mathbb{S}(X)}$. Ahora, sea $f : \mathbb{S}(X) \to \mathbb{S}(Y)$. Por hipotésis $\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una equivalencia de categorías y por el Corolario A.9.4 $\exists!\ g : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \arrow[r, "\varphi_Y"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(Y)).
\end{tikzcd}
$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_Y)^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(Y)) \arrow[d, "\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)"] \\
\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)).
\end{tikzcd}
$$

Por lo que $\mathbb{S}(g) = f$. Sea $f : X \to Y$ tal que $\mathbb{S}(f) = 0$. Así pues,

$$\mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-) = 0,$$

con lo cual $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-) = 0$, concluyendo que $f = 0$.

Sea $X \in \mathcal{C}$. Como $\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{C})$ es una equivalencia de categorías tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,-) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-X) \to 0.$$

Consideremos $W \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{h} W[1] \in \triangle$, con lo cual tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,-) \stackrel{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h[-1],-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z[-1],-)$$

y la sucesión anterior se escinde. Por lo que existe $W' \mid W$ y un isomorfismo $\psi_X : \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W',-)$. Así, tenemos la siguiente sucesión de isomorfismos $\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W',-) \stackrel{\mathrm{D}_R(\psi_X)}{\to} \mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-X) \stackrel{\gamma}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-X)$. Por lo que $X = \mathbb{S}(W')$. Notemos que

$$\Phi_X := \mathrm{D}_R(\varphi_X)^{-1}\eta_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{S}(X)),$$

es un isomorfismo. Por último, sea $X \in \mathcal{C}$. Consideremos el isomorfismo del Lema 4.1.9 $\varphi(X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{S}(-),\mathbb{S}(X))$, por lo que

$$\mathrm{D}_R(\varphi(X)) : \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{S}(-),\mathbb{S}(X)) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$$

es un isomorfismo. Concluyendo que

$$\eta_X\mathrm{D}_R\Phi_X\mathrm{D}_R(\varphi(X)) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\mathbb{S}(-))$$

es un isomorfismo, con $\eta_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \to \mathrm{D}_R\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor de Serre.

c) $\Rightarrow$ *a)* Veamos que D_R es denso. En efecto, sea $F' \in \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$. Por lo que existe una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,-) \stackrel{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(f^{op},-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,-) \stackrel{\Phi}{\to} F' \to 0.$$

Notemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,-) \stackrel{\mathcal{C}^{op}(f^{op},-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \stackrel{\mathcal{C}(-,f)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y).$$

Como $\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor de Serre tenemos el siguiente diagrama conmutativo con Ψ_X y Ψ_Y isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,-) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(f^{op},-)"] \arrow[d, "\Psi_X"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,-) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Psi_Y"] & F' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & 0 \\
\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\mathbb{S}-) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\mathbb{S}-)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\mathbb{S}-) \arrow[r, "\mathrm{D}_R(i)"'] & \mathrm{D}_R\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\mathbb{S}-)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Lema del cinco $\Psi : F' \to \mathrm{D}_R\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \mathbb{S}-))$ es un isomorfismo. Por el Lema 4.1.10 $\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una equivalencia de categorías. $\square$

Notación 4.1.12. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Denotamos por :*

- $\mathrm{proj}(\mathcal{A})$ *a los $\mathcal{A}$ objetos proyectivos.*
- $\mathrm{inj}(\mathcal{A})$ *a los $\mathcal{A}$ objetos inyectivos.*

Definición 4.1.13. Sea $\mathcal{A}$ una categoría exacta. Decimos que $\mathcal{A}$ es una **categoría de Frobenius**, si tiene suficientes inyectivos y proyectivos y

$$\mathrm{proj}(\mathcal{A}) = \mathrm{inj}(\mathcal{A}).$$

Corolario 4.1.14. [Kr07, *4.2*] *Si $\mathcal{C}$ es una variedad R-dualizante, entonces* $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ *es una categoría de Frobenius.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.11 $\mathrm{proj}(\mathrm{mod}(\mathcal{C})) = \mathrm{inj}(\mathrm{mod}(\mathcal{C}))$. Análogamente, tenemos que $\mathrm{proj}(\mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})) = \mathrm{inj}(\mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op}))$. Sean $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to \mathrm{D}_R(F) \to 0$ una sucesión exacta. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to F \cong \mathrm{D}_R\mathrm{D}_R(F) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X).$$

Por lo tanto, $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ es una categoría de Frobenius. $\square$

Notemos que si $I \trianglelefteq \mathcal{C}$, el $\mathcal{C}/I$-módulo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X, -)$ es un $\mathcal{C}$-módulo como sigue:

$$Y \xrightarrow{f} Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X,f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X, Z),$$

donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X, f)(g + I(X, Y)) := fg + I(X, Z)$.

Proposición 4.1.15. *Sea $X \in \mathcal{C}$. Entonces,*

a) $\pi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(X, -)$ *es una cubierta proyectiva, donde* $\pi_Y(f) := f + \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

b) $\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(-, X)$ *es una cubierta proyectiva, donde* $\rho_Y(f) := f + \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Demostración. Sólo haremos la prueba de a), ya que la prueba de b) es análoga.

Sólo basta ver que π es minimal a derecha. Sea

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta. Por el Lema A.9.4 existe $f : X \to X$ tal que $\varphi = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)"'] \arrow[drr, "\pi"] & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \arrow[rr, "\pi"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(X,-).
\end{tikzcd}$$

En particular, $1_X - f = h$, con $h \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,X)$. Por lo que $f = 1_X - h$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\pi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(X,-)$ es la cubierta proyectiva. $\square$

Lema 4.1.16. *Sean* $X, Y \in \mathcal{C}$. *Entonces,*

a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(X,-) \in \mathrm{mod}(\mathcal{C})$, *si y sólo si, existe un morfismo fuente*

$$f : X \to Z.$$

b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(-,Y) \in \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$, *si y sólo si, existe un morfismo pozo*

$$g : Z \to Y.$$

Demostración. Sólo haremos la prueba de a), ya que la prueba de b) es análoga.

$\Rightarrow$) Es claro de la definición y de la Proposición 4.1.15.

$\Leftarrow$) Por el Teorema A.9.5 y la Proposición 4.1.15 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(X,-)$ tiene una presentación proyectiva minimal

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \overset{\pi}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(X,-) \to 0.$$

Veamos que $f : X \to Y$ es un morfismo pozo. Es claro que sólo falta ver que f es minimal a izquierda. En efecto, sea $g : Y \to Y$ tal que $gf = f$. Puesto que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)"'] & \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-) \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

y Ψ es minimal a derecha, concluimos que g es un isomorfismo. Por lo tanto, f es un morfismo fuente. $\square$

La siguiente proposición caracteriza los $\mathcal{C}$-módulos coherentes, si $\mathcal{C}$ es una R-variedad dualizante.

Proposición 4.1.17. [AR74, *3.1*] *Sea $F \in \mathrm{Mod}(\mathcal{C})$. Entonces, $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C})$, si y sólo si, F es un $\mathcal{C}$-módulo finitamente generado y $\mathrm{D}_R(F)$ es un $\mathcal{C}^{op}$-módulo finitamente generado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Es clara.

$\Leftarrow$) Dado que $\mathrm{D}_R(F)$ es finitamente generado existe una sucesión exacta $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) \to \mathrm{D}_R(F) \to 0$. Aplicando el funtor D_R, obtenemos la siguiente sucesión exacta $0 \to \mathrm{D}_R\mathrm{D}_R(F) \cong F \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$. Ahora, puesto que F es finitamente generado existe una sucesión exacta $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \to F \to 0$. Así, existe $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ en $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ tal que $\mathrm{Im}(\Phi) = F$. Por lo tanto, $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C})$. $\square$

Notemos de la proposición anterior, el Lema 4.1.16 y la Proposición A.9.6 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.18. [IY08, *2.10*] *Todo objeto en una R-variedad dualizante $\mathcal{C}$ tiene un morfismo fuente y un morfismo pozo.*

Lema 4.1.19. [IY08, *3.6*] *Sean $\{\eta_i : C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{g_i} C_i \to C_{i+1}[1] \in \triangle\}_{i=0}^{n-1}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-rígida y*

$$C_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}f_{n-1}} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \xrightarrow{g_0} C_0$$

el $n+2$*-ángulo asociado, donde* $C_n,\ C_0,\ X_i \in \mathcal{X}\ \forall\ 1 \leq i \leq n-1$. *Consideremos las siguientes sucesiones exactas de* $\mathcal{X}$*-módulos y* $\mathcal{X}^{op}$*-módulos, respectivamente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1},-) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f_n,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_n,-) \to F \to 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X_0) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,g_0)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C_0) \to G \to 0.$$

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

a) Para todo $0 < i < n$*, se tiene que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C_i[j]) \cong \begin{cases} G & si\ j = i, \\ 0 & si\ j \neq i, \end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_{n-i}[-j],-) \cong \begin{cases} F & si\ j = i, \\ 0 & si\ j \neq i, \end{cases}$$

b) Si $\mathcal{X}$ *es una* $\mathbb{S}_n$*-subcategoría, entonces* $F \cong \mathrm{D}_R G \mathbb{S}_n^{-1}$ *y* $G \cong \mathrm{D}_R F \mathbb{S}_n$*.*

Demostración. a) Consideremos las siguientes sucesiones exactas de $\mathcal{X}^{op}$-módulos

$$0 = {}_{\mathcal{C}}(-,X_i[j]) \to {}_{\mathcal{C}}(-,C_i[j]) \to {}_{\mathcal{C}}(-,C_{i+1}[j+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(-,X_i[j+1]) = 0$$

$\forall\ 0 < j < n-1$. Más aun, si $0 < j < i < n$ y $0 < n+j-i < n$, tenemos que

$${}_{\mathcal{C}}(-,C_i[j]) \cong {}_{\mathcal{C}}(-,C_n[n+j-i]) = 0.$$

Luego, si $0 < i \leq j < n$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$${}_{\mathcal{C}}(-,X_0[j-i]) \to {}_{\mathcal{C}}(-,C_0[j-i]) \to {}_{\mathcal{C}}(-,C_1[j-i+1]) \to {}_{\mathcal{C}}(-,X_0[j-i+1]),$$

Por lo que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C_i[j]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C_1[j-i+1]) \cong \begin{cases} G & \text{si } j = i, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,C_0[j-i]) = 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Es análogo el caso de F.

b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas y morfismos verticales isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & \mathrm{D}_R G\mathbb{S}_n^{-1} \arrow[r] & \mathrm{D}_{R\mathcal{C}}(\mathbb{S}_n^{-1}(-), C_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{D}_{R\mathcal{C}}(\mathbb{S}_n^{-1}(-), X_0) \arrow[d] \\
{}_{\mathcal{C}}(X_0[1-n], -) \arrow[r] & {}_{\mathcal{C}}(C_1[1-n], -) \arrow[rr] & & {}_{\mathcal{C}}(C_0[-n], -) \arrow[r] & {}_{\mathcal{C}}(X_0[-n], -).
\end{tikzcd}$$

Caso I. $n = 1$. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to F \to {}_{\mathcal{C}}(C_0[-1], -) \to {}_{\mathcal{C}}(X_0[-1], -).$$

Por lo que se tiene el isomorfismo.

Caso II. $n > 1$. Se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0[1-n], -) = 0$ y el isomorfismo se sigue de a).

El otro isomorfismo se sigue de el isomorfismo anterior. $\square$

Corolario 4.1.20. [IY08 *3.7*] *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-rígida,*

$$\{\eta_i : C_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\to} X_i \overset{g_i}{\to} C_i \to C_{i+1}[1] \in \triangle\}_{i=0}^{n-1}$$

y $C_n \overset{f_n}{\to} X_{n-1} \overset{g_{n-1}f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \overset{g_0}{\to} C_0$ el $n+2$-ángulo asociado, donde $C_n,\ C_0,\ X_i \in \mathcal{X}\ \forall\ 1 \leq i \leq n-1$. Entonces, $g_i : X_i \to C_i$ es una $\mathcal{X}$-precubierta y $f_i : C_i \to X_{i-1}$ es una $\mathcal{X}$-preenvolvente $\forall\ 0 < i \leq n-1$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{X}$. Por el Lema 4.1.19 tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,g_i)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C_{i+1}[1]) = 0.$$

Por lo tanto, g_i es una $\mathcal{X}$-precubierta $\forall\ 0 < i \leq n-1$. Análogamente, f_i es una $\mathcal{X}$-preenvolvente $\forall\ 0 < i \leq n-1$. $\square$

Proposición 4.1.21. [IY08, *3.9*] *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-inclinante de conglomerado, $\eta : Z \overset{g_n}{\to} X_{n-1} \overset{g_{n-1}f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \overset{f_0}{\to} Y$ un $n+2$-ángulo, donde $Y,\ Z,\ X_i \in \mathcal{X}\ \forall\ 1 \leq i \leq n-1$, $h_0 := f_0$, $h_n := g_n$, $h_i := g_i f_i\ \forall\ 0 < i < n$ y $f_i \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}\ \forall\ 0 < i < n$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes :*

a) η *es un* $n+2$*-ángulo de Auslander-Reiten.*

b) $f_0 : X_0 \to Y$ *es un morfismo pozo y* $h_i \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}\ \forall\ 0 \leq i \leq n$*.*

c) $g_n : Z \to X_{n-1}$ *es un morfismo fuente y* $h_i \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}\ \forall\ 0 \leq i \leq n$*.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Se sigue de la definición y la Proposición 1.2.6.

$b) \Rightarrow c)$ Sean $F,\ G : \mathcal{C} \to \mathrm{mod}(R)$ los funtores del Lema 4.1.19. Dado que f_0 es un morfismo pozo, por el Lema 4.1.16 el funtor G es semisiple y por el Lema 4.1.19 $F \cong \mathrm{D}_R G \mathbb{S}_n^{-1}$. Por lo que F es semisimple, y así, por el Lema 4.1.16 g_n es un morfismo pozo.

$c) \Rightarrow a)$ Análogamente a $b) \Rightarrow c)$ se tiene que f_0 es un morfismo pozo. El resultado se sigue del Corolario 4.1.20. □

Proposición 4.1.22. [AS81, *2.1*] *Sean* $\mathcal{C}$ *una* R*-variedad dualizante y* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ *una clase precubriente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen :*

a) $\mathcal{X}$ *tiene pseudokerneles.*

b) si $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$*, entonces* $F\mid_{\mathcal{X}^{op}} \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$*.*

Demostración. $a)$ Sean $f : X \to Y$, $j : K \to X$ un pseudokernel de f y $p : Z \to K$ una $\mathcal{X}$-precubierta. Es fácil ver que jp es un pseudokernel en $\mathcal{X}$.

$b)$ Sea $A \in \mathcal{C}$. Veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)\mid_{\mathcal{X}} \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$. En efecto, sea

$$f : X \to A$$

una $\mathcal{X}$-precubierta. Consideremos la siguiente sucesión de $\mathcal{X}^{op}$-módulos

$$0 \to K \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\mid_{\mathcal{X}} \stackrel{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)\mid_{\mathcal{X}} \to 0.$$

Dado que $K \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)\mid_{\mathcal{X}} \stackrel{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,g)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,B)\mid_{\mathcal{X}} \to K \to 0,$$

donde $g : Y \to B$ es una $\mathcal{X}$-precubierta. Por lo que,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)\mid_{\mathcal{X}^{op}} \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op}).$$

Ahora, sean $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) \to F \to 0$ una sucesión exacta. Dado que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \mid_{\mathcal{X}} \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,f)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) \mid_{\mathcal{X}} \to F \mid_{\mathcal{X}} \to 0$$

es una sucesión exacta. Por lo anterior y la Proposición Au74, 4.2, se tiene que $F \mid_{\mathcal{X}^{op}} \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$. $\square$

De manera dual se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1.23. [AS81, *2.2*] *Sean $\mathcal{C}$ una R-variedad dualizante y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase preenvolvente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen :*

a) $\mathcal{X}$ tiene pseudocokerneles.

b) si $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C})$, entonces $F \mid_{\mathcal{X}} \in \mathrm{mod}(\mathcal{X})$.

Teorema 4.1.24. [AS81, *2.3*] *Sean $\mathcal{C}$ una R-variedad dualizante y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una clase funtorialmente finita. Entonces, $\mathcal{X}$ es una R-variedad dualizante.*

Demostración. Sean $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{X})$,

$$\eta_F := \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X, -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Y, -) \to F \to 0$$

una sucesión exacta. Consideremos

$$\eta_G := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \to G \to 0$$

y $\eta_{G|_{\mathcal{X}}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \mid_{\mathcal{X}} \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \mid_{\mathcal{X}} \to G \mid_{\mathcal{X}} \to 0$. Es inmediato que $\eta_F = \eta_{G|_{\mathcal{X}}}$. Por la Proposición 4.1.22 y lo anterior concluimos que $\mathrm{D}_R(F) = \mathrm{D}_R(G \mid_{\mathcal{X}^{op}}) \cong \mathrm{D}_R(G) \mid_{\mathcal{X}^{op}} \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$. Análogamente,

$$\mathrm{D}_R(G) \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}) \quad \forall\, G \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$$

usando la Proposición 4.1.23. $\square$

Teorema 4.1.25. [IY08, *3.10*] *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con funtor de Serre $\mathbb{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-inclinante de conglomerado, X, $Y \in \mathcal{X}$. Entonces, existen $n + 2$-ángulos de Auslander-Reiten* *a)* $\mathbb{S}_n(X) \overset{f_n}{\to} X_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \overset{f_0}{\to} X.$

b) $Y \overset{g_n}{\to} X_{n-1} \overset{g_{n-1}f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \overset{f_0}{\to} \mathbb{S}_n^{-1}(Y).$

Demostración. Sólo haremos la prueba de a), dado que la prueba de b) es análoga.

Por la Proposición 4.1.18 y el Teorema 4.1.24 tenemos

$$Y_1 \to X_0 \overset{f_0}{\to} X \to Y_1[1] \in \triangle,$$

con f_0 un morfismo pozo en $\mathcal{X}$. Sea $X_n \overset{f_n}{\to} X_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots \to Y_1$ un $n+1$-ángulo, con $X_j \in \mathcal{X}$ y $f_j \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ $\forall\ 2 \leq j \leq n$. Por la Proposición 4.1.21 se tiene qu $X_n \overset{f_n}{\to} X_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \cdots X_1 \overset{f_1}{\to} X_0 \overset{f_0}{\to} X$ es un $n+2$ triángulo de Auslander-Reiten. Por último, sean $F \in \mathrm{mod}(\mathcal{C})$ y $G \in \mathrm{mod}(\mathcal{X}^{op})$ los funtores del Lema 4.1.19. Notemos que $G = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(-, X)$, por el Lema 4.1.19 $F \simeq \mathrm{D}_R G\mathbb{S}_n^{-1} \simeq \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(-, \mathbb{S}_n(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}}(\mathbb{S}_n(X), -)$. Puesto que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1}, -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f_n,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, -) \to F \to 0$ es una sucesión exacta y $f_n \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X_n, X_{n-1})$ tenemos que $X_n = \mathbb{S}_n(X)$. □

4.2. Categorías de cocientes abelianos

En esta sección $\mathcal{C}$ denotará una una categoría triangulada Krull-Schmidt y esqueléticamente pequeña.

El objetivo principal de esta sección es ver que el cociente de una categoría triangulada con una subcategoría n-inclinante de conglomerado es equivalente a una categoría abeliana. Este resultado es una generalización de un Teorema de Keller y Reiten en el contexto de una categoría 2-Calabi Yau [KR07].

Sea $\mathcal{Z}$ una R-categoría de Artin, esqueléticamente pequeña, con pseudokerneles, $\mathcal{X},\ \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías aditivas. Denotamos por:

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(\mathcal{Z}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{F \in \operatorname{mod}(\mathcal{Z}) \mid \textit{existe una sucesión exacta} \\ {}_{\mathcal{Z}}(Y, -) \to {}_{\mathcal{Z}}(X, -) \to F \to 0, \\ \textit{con } X \in \mathcal{X} \textit{ y } Y \in \mathcal{Y}\}.\end{aligned}$$

Definición 4.2.1. Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría aditiva, $\mathcal{A}$ una R-categoría abeliana con suficientes proyectivos, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $F : \mathcal{C}/[\mathcal{X}] \to \mathcal{B}$ contravariante aditivo. Decimos que F preserva la $\mathbf{2}-$**rígidez** si $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(F(B), F(A)) = 0$, siempre que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = 0$.

El siguiente resultado, justifica la definición anterior.

Proposición 4.2.2. [IY08, *6.2*] *Sean $\mathcal{X},\ \mathcal{Y},\ \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías aditivas tales que $\mathcal{X}[1] \oplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}^{\perp_0}$. Entonces, las siguientes condiciones se $satisfacen:$*

a) La correspondencia

$$F : \mathcal{X} * \mathcal{Y}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}[1])$$

$$(T \overset{f+[\mathcal{X}]}{\to} T') \mapsto (\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', -) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)),$$

es una R-dualidad de categorías.

b) $F : \mathcal{X} * \mathcal{Y}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}[1])$ preserva la 2-rígidez.

c) Si $\mathcal{X}[1] = \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$, entonces $F : \mathcal{X} * \mathcal{Y}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{Z})$ es una R-dualidad de categorías. Más aún, si $\mathcal{Y}$ es una clase envolvente, cerrada por extensiones y $\mathcal{X} = {}^{\perp_0}\mathcal{Y}$, entonces $F : \mathcal{C}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{Z})$ es una R-dualidad de categorías.

Demostración. $a)$ Sean $X \overset{f}{\to} T \overset{g}{\to} Y \overset{h}{\to} X[1] \in \triangle$, con $Y \in \mathcal{Y}$ y $X \in \mathcal{X}$. Por lo que tenemos la siguiente sucesión de $\mathcal{Z}$-módulos

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(X[1], -) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(Y, -) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) = 0. \quad (*)$$

Sean $T' \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$, $f : T \to T' \in [\mathcal{X}]$ y $Z \in \mathcal{Z}$. Dado que

$$0 = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z) : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z).$$

Por la propiedad universal de la categoría cociente tenemos que

$$F : \mathcal{X} * \mathcal{Y}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}[1])$$

es un funtor contravariante. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\operatorname{mod}(\mathcal{Z})}(-, F(T'))$ a $(*)$, por el Lema de Yoneda tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos y morfismos verticales isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (F(T), F(T')) \arrow[r] & (\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(Y, -), F(T')) \arrow[r] \arrow[d] & (\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(X[1], -), F(T')) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', X) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', f)"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', T) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', g)"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', Y) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', h)"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', X[1]).
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

Veamos que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', h)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/[\mathcal{X}]}(T', T)$. En efecto, sea

$$\varphi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/[\mathcal{X}]}(T', T) \to \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', h))$$

$$f' + [\mathcal{X}] \mapsto gf'.$$

Sea $f' \in [\mathcal{X}]$. Notemos que $\varphi(f') = 0$. Así, φ está bien definida y es un morfismo de R-módulos. Ahora, consideremos $\pi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', T) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/[\mathcal{X}]}(T', T)$ y

$$\psi : \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', h)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/[\mathcal{X}]}(T', T)$$

$$gf' \mapsto \pi(f')$$

Luego, sea $f' : T' \to T$, entonces

$$\psi\varphi(\pi(f')) = \psi(gf') = \pi(f'),$$

$$\varphi\psi(gf') = \varphi(\pi(f')) = gf'.$$

Por lo que $F : \mathcal{X} * \mathcal{Y}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}[1])$ es fiel y pleno. Sean

$$F' \in \operatorname{mod}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}[1]),$$

$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(X[1], -) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(h,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(Y, -) \to F' \to 0$ una sucesión exacta y

$$X \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X[1] \in \triangle.$$

Así pues, $F' \cong F(T)$.

b) Sean $T \in \mathcal{X} * \mathcal{Y}$,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(X[1], -) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(h,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(Y, -) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -) \to 0$$

y $0 \to K \overset{\varphi}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(Y, -) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -) \to 0$ sucesiones exactas de $\mathcal{Z}$-módulos. Por la propiedad universal del Kernel

$$\exists! \quad \psi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(X[1], -) \to K$$

tal que $\varphi\psi = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(h, -)$. Luego, por $(**)$ de a) tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to (F(T), F(T')) \overset{(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(g,-),F(T'))}{\to} (\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(Y, -), F(T')) \overset{(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(h,-),F(T'))}{\to} (\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(X[1], -), F(T')) \to 0.$$

Por lo que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(\varphi, F(T'))$ es un epimorfismo, con lo cual

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{Z}}(F(T), F(T')) = 0.$$

c) Se sigue de a) y la Proposición 3.2.6. $\square$

Teorema 4.2.3. [IY08, *6.3*] *Sean $n > 1$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría n-inclinante de conglomerado, $\mathcal{C}_i := \mathcal{X} * \cdots * \mathcal{X}[i-1]$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Entonces, $\forall\ 0 < j < n$ el funtor*

$$F_{j+1} : \mathcal{C}_{j+1}/[\mathcal{X}] \to \operatorname{mod}(\mathcal{X}[1] * \cdots * \mathcal{X}[j], \mathcal{X}[1] * \cdots * \mathcal{X}[j], \mathcal{X}[1])$$

$$(T \overset{f+[\mathcal{X}]}{\to} T') \mapsto (\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', -) \overset{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)),$$

es una R-equivalencia de categorías que preserva la 2-rígidez.

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.2.2. $\square$

El siguiente resultado, es debido a Keller y Reiten.

Notación 4.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Denotamos por* $\operatorname{gl.dim}(\mathcal{A}) := \sup\{\operatorname{pd}(A) \mid A \in \mathcal{S}\}$.

Corolario 4.2.5. [IY08, *6.5*] *Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría 2-inclinante de conglomerado y $T \in \mathcal{C}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen :*

a) el funtor

$$F : \mathcal{C}/[\mathcal{X}] \to \mathrm{mod}(\mathcal{X}[1])$$

$$(T \overset{f+[\mathcal{X}]}{\to} T') \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T', -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)),$$

es una R-dualidad de categorías que preserva la 2-rígidez.

b) Si $\mathcal{C}$ *es 2-Calabi-Yau,* $\mathrm{gl.dim}(\mathrm{mod}(\mathcal{X}[1])) \leq 1$ *y* $\mathrm{add}(T) \cap \mathcal{X} = 0$*, entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T[1]) = 0$*, si y sólo si,* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{mod}(\mathcal{X}[1])}(F(T), F(T)) = 0$.

Demostración. a) Se sigue de la Proposición 4.2.3 c).

b) $\Rightarrow$) Se sigue de la Proposición 4.2.3 b).

$\Leftarrow$) Por el Teorema 4.1.3 existe $X \to T \overset{f}{\to} X'[1] \overset{h[1]}{\to} X[1] \in \triangle$, donde $X,\ X' \in \mathcal{X}$. Notemos que tenemos la siguiente sucesión exacta de $\mathcal{X}[1]$-módulos

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}[1]}(X[1], -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}[1]}(X'[1], -) \to F(T) \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}(\mathcal{X}[1])}(-, F(T))$ a la sucesión anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactas y morfismos verticales isomorfismos, por el Lema de Yoneda

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}[1]}(X'[1], -), F(T)) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}[1]}(X[1], -), F(T)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X'[1]) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,h[1])"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T[1]).
\end{tikzcd}$$

Por lo que, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h[1])$ es un epimorfismo. Análogamente, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, T)$ es un epimorfismo. Así pues, $\mathrm{D}_R(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, T))$ es un monomorfismo, con lo que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, h[2])$ es un monomorfismo. Por lo tanto,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T[1]) = 0.$$

□

El siguiente resultado será de utilidad para la siguiente sección.

Teorema 4.2.6. [KR07, *2.1*] *Sea $T \in \mathcal{C}$ 2-inclinante de conglomerado. Entonces, la correspondencia*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -) : \mathcal{C}/[\mathrm{add}(T[1])] \to \mathrm{mod}(\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op})$$

es una R-equivalencia de categorías.

Demostración. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Gamma)$. Por el proceso de proyectivización existe $f : T' \to T''$, con $T',\ T'' \in \mathrm{add}(T)$ y una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T') \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,f)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'') \to M \to 0$$

Sea $T' \overset{f}{\to} T'' \overset{g}{\to} X \overset{h}{\to} T'[1] \in \triangle$. Notemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \cong M$. Ahora, sean $X,\ Y \in \mathcal{C}$ y $t : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$. Por el Teorema 4.1.3 existen

$$T_1 \overset{f}{\to} T_0 \overset{g}{\to} X \overset{h}{\to} T_1[1], \quad T_1' \overset{f'}{\to} T_0' \overset{g'}{\to} Y \overset{h'}{\to} T_1'[1] \in \triangle,$$

con $T_1,\ T_0,\ T_1',\ T_0' \in \mathrm{add}(T)$. Por el proceso de proyectivización existen $j : T_1 \to T_1'$ y $k : T_0 \to T_0'$ tales que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_1) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,f)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,j)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_0) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,g)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,k)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \arrow[r] \arrow[d, "t"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_1') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,f')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_0') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,g')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Proceso de proyectivización tenemos el siguiente morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & T_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists\, l"] & T[1] \arrow[d, "j[1]"] \\
T_1' \arrow[r, "f'"'] & T_0' \arrow[r, "g'"'] & Y \arrow[r, "h'"'] & T'[1].
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del Cokernel, concluimos que $t = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, l)$. Por último, sean $k : X \to Y$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, k) = 0$ y por el Teorema 4.1.3 existe

$$T_1 \overset{f}{\to} T_0 \overset{g}{\to} X \overset{h}{\to} T_1[1] \in \triangle,$$

con $T_1,\ T_0 \in \mathrm{add}(T)$. Por lo que existe $r : T_1[1] \to Y$ tal que $rh = k$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-)"] \arrow[d, "\pi"'] & & \mathrm{mod}(\Gamma) \\ \mathcal{C}/[\mathrm{add}(T[1])], \arrow[urr, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-)"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/[\mathrm{add}(T[1])]$ es la proyección canónica. □

4.3. Conexión con teoría τ-inclinante

En esta sección $\mathcal{C}$ denotará una categoría 2-Calabi-Yau, $T \in \mathcal{C}$ un objeto 2-inclinante de conglomerado y $\Lambda := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$.

El objetivo principal de esta sección es dar una biyección entre los objetos 2-inclinantes de conglomerado de $\mathcal{C}$ y los Λ-módulos τ-inclinantes de soporte.

Lema 4.3.1. [AIR14, *4.2*] *Para las equivalencias de categorías*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-[2]),\ \nu\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-) : \mathrm{add}(T) \to \mathrm{inj}(\Lambda),$$

existe $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-[2]) \to \nu\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-)$ *un isomorfismo natural.*

Demostración. Sean $\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-[2]) \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,T)$ el isomorfismo natural del hecho de que $\mathcal{C}$ es una categoría 2-Calabi-Yau y

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,T) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-),\Lambda)$$

el isomorfismo natural dado por el proceso de proyectivización. Por lo que $\Phi\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-[2]) \to \nu\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,-)$ es un isomorfismo. □

Lema 4.3.2. [Pa08, *3.3*] *Sea* $X \in \mathcal{C}$. *Entonces, los funtores*

$$\mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/[T(1)]}(X,-[1]),\ [T[1]](-,X[1]) : \mathcal{C} \to \mathrm{mod}(R)$$

son isomorfos.

Demostración. Ver [Pa08, Lema 3.3]. □

Proposición 4.3.3. [AIR14, *4.3*] *Sean* X, $Y \in \mathcal{C}$ *tales que*

$$\mathrm{add}(X) \cap \mathrm{add}(T[1]) = 0 = \mathrm{add}(Y) \cap \mathrm{add}(T[1]).$$

Entonces,

a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X[1]) \cong \tau\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ *como* Λ*-módulos.*

b) la siguiente sucesión es una sucesión exacta de R*-módulos*

$$0 \to \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y), \tau\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[1]) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X), \tau\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y)) \to 0.$$

En particular, X *es 2-rígido, si y sólo si,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ *es* τ*-rígido.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.3 existe

$$\eta : T_1 \overset{f}{\to} T_0 \overset{g}{\to} X \overset{h}{\to} T_1[1] \in \triangle,$$

con $T_1 \in \mathrm{add}(T)$ y $g : T_0 \to X$ una $\mathrm{add}(T)$-cubierta. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$ a η, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_1) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,f)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_0) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,g)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \to 0.$$

Por el Corolario 1.2.10 $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, T_1[1])$, por el Lema 1.2.6 f es minimal a derecha. Veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, f)$ es minimal a derecha. En efecto, sea $k : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_1)$. Por el proceso de proyectivización existe $k' : T_1 \to T_1$ tal que $k = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, k')$, por el Teorema 4.2.6 $f - fk = sr$, donde $r : T_1 \to T'[1]$, $s : T'[1] \to T_0$ y $T' \in \mathrm{add}(T)$. Así pues, $f = fk$, por lo que k es un isomorfismo. Análogamente $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, g)$ es minimal a derecha. Por lo que, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \eta)$ es la presentación proyectiva minimal de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$. Por el Lema 4.3.1 tenemos el siguiente diagrama conmuativo con renglones exactos y morfismos verticales isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \arrow[r] & \nu\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T_1) \arrow[r] \arrow[d] & \nu\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T_0) \arrow[d] \\
0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T_0[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T_1[2]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T_0[2]).
\end{tikzcd}$$

$b)$ Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to [T[1]](X, Y[1]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y[1]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/[T(1)]}(X, Y[1]) \to 0.$$

Por el Teorema 4.2.6 y a) tenemos un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/[T(1)]}(X, Y[1]) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, X), \tau\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, Y))$$

Por el Lema 4.3.2 y lo anterior tenemos los siguientes isomorfos

$$[T[1]](X, Y[1]) \cong \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/[T(1)]}(Y, X[1]) \cong \mathrm{D}_R\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, Y), \tau\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, X)).$$

□

Notación 4.3.4. *Sean* $n \in \mathbb{N}^+$. *Denotamos por* :

- $\mathrm{n-rigid}(\mathcal{C}) := \{X \in \mathcal{C} \mid X \textit{ es } n - \textit{rígido}\}.$
- $\mathrm{n-c-tilt}(\mathcal{C}) := \{X \in \mathcal{C} \mid X \textit{ es } n - \textit{inclinantedeconglomerado}\}.$
- $\mathrm{n-c-tilt}_T(\mathcal{C}) := \{X \in \mathrm{c-tilt}(\mathcal{C}) \mid \mathrm{add}(X) \cap \mathrm{add}(T) = 0\}.$

El siguiente resultado es el principal de esta sección.

Teorema 4.3.5. [AIR14, *4.1*] *La asignación*

$$\Psi : 2-\mathrm{rigid}(\mathcal{C}) \to \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda)$$
$$X := X' \oplus T'[1] \mapsto (\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, X'), \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, T')),$$

donde $\mathrm{add}(X') \cap \mathrm{add}(T[1]) = 0$ *y* $T' \in \mathrm{add}(T)$ *es una biyección, que se restringe a las siguientes biyecciones*

$$2-\mathrm{c}-\mathrm{tilt}(\mathcal{C}) \leftrightarrow \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$$

$$2-\mathrm{c}-\mathrm{tilt}_{\mathrm{T}[1]}(\mathcal{C}) \leftrightarrow \tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$$

Demostración. Sea $X := X' \oplus T'[1] \in 2-\mathrm{rigid}(\mathcal{C})$, con $T' \in \mathrm{add}(T)$ y $\mathrm{add}(X') \cap \mathrm{add}(T[1]) = 0$. Veamos que

$$(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, X'), \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, T')) \in \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda).$$

En efecto, por la Proposición 4.3.3 $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, X')$ es τ-rígido. Luego, por el Teorema 4.2.6 y el Lema 4.3.2 tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, T'), \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(T, X')) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/[T[1]]}(T', X') \\ &\cong [T[1]](X'[-1], T'[1]) \\ &= \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X'[-1], T'[1]) = 0.\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X'), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T')) \in \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda)$, por la Proposición 4.3.3 y lo anterior $X \in 2 - \mathrm{rigid}(\mathcal{C})$. Así pues,

$$\Psi : 2 - \mathrm{rigid}(\mathcal{C}) \leftrightarrow \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda)$$

es una biyección por el Teorema 4.2.6.

Ahora, sean $X \in 2 - \mathrm{c} - \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$ e $Y \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ tal que

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X') \oplus Y, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T')) \in \tau - \mathrm{rigid}(\Lambda).$$

Por el Teorema 4.2.6 existe $Y' \in \mathcal{C} - \mathrm{add}(T[1])$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y') = Y$. Por lo anterior $Y' \oplus X$ es 2-rígido, por ende $Y' \mid X'$. Por el Corolario 2.2.12 $\Psi(X) \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$.

Recíprocamente, si $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X'), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T')) \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}(\Lambda)$. Sea $Y \in \mathcal{C}$ tal que $Y \oplus X \in 2 - \mathrm{rigid}(\mathcal{C})$, por la Proposición 1.4.13, Proposición 1.4.14 y el Lema 2.1.2 *b)* tenemos que

$$n = \mathrm{rk}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X'), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T')) \leq \mathrm{rk}(\Psi(Y \oplus X)) \leq n.$$

Por lo tanto, $Y \mid X$.

La última biyección se sigue de la anterior. □

Definición 4.3.6. Sean $X \in 2 - \mathrm{rigid}(\mathcal{C})$ y $\Gamma := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$. Decimos que X es **casi completo 2 inclinante de conglomerado** si $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}\mathrm{K}_0(\Gamma) - 1$.

El siguiente resultado es un análogo a las subcategorías silting.

Corolario 4.3.7. [AIR14, *4.5*] *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría 2 inclinante de conglomerado, entonces existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{add}(X) = \mathcal{X}$.

b) Si $Y \in \mathcal{C}$ es casi completo 2 inclinante de conglomerado, existen Z, $W \in \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ $Z \neq W$ tales que $Y \oplus Z$, $Y \oplus W \in 2 - \mathrm{c} - \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$.

c) Si $X \in 2 - \mathrm{rigid}(\mathcal{C})$, existe $Y \in \mathcal{C}$ tal que $X \oplus Y \in 2 - \mathrm{c} - \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$.

d) [ZZ11, *3.5*] *Si $X \in 2 - \mathrm{rigid}(\mathcal{C})$, entonces $X \in 2 - \mathrm{c} - \mathrm{tilt}(\mathcal{C})$, si y sólo si, $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(T)$.*

Demostración. a) Se sigue del Teorema 4.3.5.

b) Se sigue del Teorema 4.3.5 y el Teorema 2.3.8.

c) Se sigue del Teorema 4.3.5 y el Teorema 2.2.10.

d) Se sigue del Teorema 4.3.5. $\square$

Apéndice A

Teoría de representaciones

En este apéndice introducimos conceptos y terminología fundamentales para el estudio de esta tesis, como lo son la noción de álgebras de Artin, translación de Auslander-Reiten, módulo inclinante, categoría triangulada, categoría homotópica y la categoría de funtores. Cabe resaltar que dicha introducción, en algunos aspectos, es meramente recordatoria y que no pretende ser exhaustiva. Para complementar algunas de las nociones que usaremos libremente en la presente tesis (como por ejemplo, las nociones de módulo proyectivo, equivalencia de categorías y radical) se recomienda consultar [ACPV06], [ARS95] [ASS06] y [GM03].

A.1. Clases cubrientes y envolventes

En este capítulo $\mathcal{C}$ denotará una categoría aditiva y todas las subcategorías serán plenas.

Definición A.1.1. Sea $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$. Decimos que:

a) f es **minimal a izquierda**, si para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

se tiene que h es un isomorfismo.

b) f es **minimal a derecha**, si para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

se tiene que h es un isomorfismo.

Definición A.1.2. Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría y $A \in \mathcal{C}$. Decimos que:

a) $f : A \to X$ es una **$\mathcal{X}$-preenvolvente** de A, si $X \in \mathcal{X}$ y $\forall\ g : A \to X'$ con $X' \in \mathcal{X}$ existe $h : X \to X'$ tal que $g = hf$. Una $\mathcal{X}$-preenvolvente f de A es una **$\mathcal{X}$-envolvente** de A, si f es minimal a izquierda.

b) $t : X \to A$ es una **$\mathcal{X}$-precubierta** de A, si $X \in \mathcal{X}$ y $\forall\ r : X' \to A$ con $X' \in \mathcal{X}$ existe $s : X' \to X$ tal que $r = ts$. Una $\mathcal{X}$-precubierta f de A es una **$\mathcal{X}$-cubierta** de A, si f es minimal a derecha.

Definición A.1.3. Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría. Decimos que:

a) $\mathcal{X}$ es una clase **preenvolvente** (**envolvente**), si todo $C \in \mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{X}$-preenvolvente ($\mathcal{X}$-envolvente).

b) $\mathcal{X}$ es una clase **precubriente** (**cubriente**), si todo $C \in \mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{X}$-precubierta ($\mathcal{X}$-cubierta).

c) $\mathcal{X}$ es **funtorialmente finita**, si es precubriente y preenvolvente.

Definición A.1.4. Sea $X \in \mathcal{C}$. Decimos que:

a) $\pi_0 : \mathrm{P}_0(X) \to X$ es una **cubierta proyectiva**, si π_0 es una $\mathrm{proj}(\mathcal{C})$-cubierta. $\mathrm{P}_1(X) \overset{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(X) \overset{\pi_0}{\to} X \to 0$ es una **presentación proyectiva minimal**, si π_1 es la composición del Kernel de π_0 y la cubierta proyectiva de $\mathrm{Ker}(\pi_0)$

b) $\iota_0 : X \to \mathrm{I}_0(X)$ es una **envolvente inyectiva**, si ι_0 es una $\mathrm{inj}(\mathcal{C})$-envolvente. $0 \to X \overset{\iota_0}{\to} \mathrm{I}_0(X) \overset{\iota_1}{\to} \mathrm{I}_1(X)$ es una **presentación inyectiva minimal**, si ι_1 es la composición del Cokernel de ι_0 y la envolvente inyectiva de $\mathrm{Coker}(\iota_0)$.

A.2. Álgebras de Artin

Definición A.2.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y R un anillo conmutativo. Decimos que $\mathcal{C}$ es una $\mathbf{R}-$ **categoría** si satisface

a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \in \mathrm{Mod}(R) \qquad \forall\ X,\ Y \in \mathcal{C}$.

b) la composición en $\mathcal{C}$ es R-bilineal. Es decir, $(rf+g)h = r(fh)+gh$ y $f(rg+k) = r(fg)+fk$, $\forall\ f,\ g,\ h,\ k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\ \forall\ r \in R$, donde tengan sentido las composiciones anteriores.

Si $R = \mathbb{Z}$ decimos que $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría o bien una categoría preaditiva.
Definición A.2.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **categoría aditiva**, si tiene objeto cero y $\forall\ X,\ Y \in \mathcal{C}$ existe el coproducto $X \oplus Y \in \mathcal{C}$.
Definición A.2.3. Sea Λ una R-álgebra. Decimos que Λ es una $\mathbf{R}-$ **álgebra de Artin**, si R es un anillo artiniano y $\Lambda \in \mathrm{mod}(R)$.
Teorema A.2.4. *Sean Λ una R-álgebra de Artin e $I := \mathrm{I}_0(\mathrm{top}(R))$. Entonces, el funtor*

$$\mathrm{D}_\Lambda := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,I) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$$

es una dualidad de categorías y $\mathrm{D}_{\Lambda^{op}} : \mathrm{mod}(\Lambda^{op}) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ es un casi-inverso, esto es, $\mathrm{D}_\Lambda \circ \mathrm{D}_{\Lambda^{op}} \simeq 1_{\mathrm{mod}(\Lambda^{op})}$ y $\mathrm{D}_{\Lambda^{op}} \circ D_\Lambda \simeq 1_{\mathrm{mod}(\Lambda)}$.

Demostración. Ver [ARS, Teorema II.3.3]. □

Definición A.2.5. Denotamos por:

a) $\mathrm{F}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ al grupo abeliano libre generado por las iso-clases $[M]$ de equivalencias de módulos en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, donde

$$[M] := \{N \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid N \cong M\}.$$

b) $\mathrm{R}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ al subgrupo de $\mathrm{F}(\mathrm{mod}(\Lambda))$ generado por las siguientes expresiones $[N]+[L]-[M]$ siempre que $0 \to N \to M \to L \to 0$ sea una sucesión exacta.

c) El grupo de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\Lambda) := \mathrm{F}(\mathrm{mod}(\Lambda))/\mathrm{R}(\mathrm{mod}(\Lambda))$.

Teorema A.2.6. *Sean Λ un álgebra de Artin y $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ un sistema completo de Λ-módulos simples. Entonces, el grupo $\mathrm{K}_0(\Lambda)$ es abeliano libre con base $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$.*

Demostración. Ver [ARS95, Teorema 1.7]. □

El siguiente resultado nos dice que el anulador del dual de un módulo es el mismo.

Lema A.2.7. *Sean Λ una R-álgebra de Artin. Entonces,*

$$\mathrm{ann}(M) = \mathrm{ann}(\mathrm{D}_\Lambda M) \qquad \forall M \in \mathrm{mod}(\Lambda).$$

Demostración. Ver [Fl, Ejercicio 3.6.7]. □

Definición A.2.8. Sea Λ una R-álgebra de Artin. El **funtor estrella** es

$$()^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda^{\mathrm{op}}).$$

El siguiente resultado nos dice que el funtor estrella se restringe a una equivalencia de categorías.

Proposición A.2.9. *El funtor*

$$()^* : \mathrm{proj}(\Lambda) \to \mathrm{proj}(\Lambda^{\mathrm{op}}),$$

es una equivalencia de categorías, con cuasi-inversa

$$()^* : \mathrm{proj}(\Lambda^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{proj}(\Lambda).$$

Demostración. Ver [ARS, Proposición II.4.3]. □

Definición A.2.10. Sea Λ una R-álgebra de Artin. Decimos que Λ es **básica** si $\Lambda = \oplus_{i=1}^n P_i$, con $P_i \in \mathrm{ind}(\mathrm{proj}(\Lambda))$, entonces $P_i \ncong P_j$ si $i \neq j$.

Proposición A.2.11. *Sea Λ una R-álgebra de Artin. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) Λ *es básica.*

b) $\Lambda/\mathrm{rad}(\Lambda)$ *es básica.*

c) $\Lambda = \oplus_{i=1}^k D_k$*, con* D_k *un anillo con división.*

d) Λ^{op} *es básica.*

Demostración. Ver [ARS, Proposición II.2.7]. □

Lema A.2.12. *Sea* $e^2 = e \in \Lambda$. *Se tiene el siguiente isomorfismo funtorial*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M) \cong \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}} e\Lambda) \qquad \forall\, M \in \mathrm{mod}(\Lambda).$$

Demostración. Ver [ACPV06, Lema I.1.2]. □

A.3. Álgebra de Kronecker

En esta sección k denotará un campo.

En esta sección daremos una descripción de los A-módulos inescindibles del álgebra de Kronecker.

Definición A.3.1. Sea $Q : \circ^1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \circ^2$. El **álgebra de Kronecker** es

$$A := kQ.$$

Las siguientes representaciones nos ayudarán a describir los A-módulos inescindibles. Sean $p \in \mathbb{P}^1(k)$ ($\mathbb{P}^1(k)$ es la recta proyectiva) y $n \in \mathbb{N}$.

$$Q_n := k^n \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{k^n} \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1_{k^n} \\ 0 \end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} k^{n+1},$$

$$J_n := k^{n+1} \underset{(0,1_{k^n})}{\overset{(1_{k^n},0)}{\rightrightarrows}} k^n,$$

$$R_{p,n} := k^n \underset{J_{n,p}}{\overset{1_{k^n}}{\rightrightarrows}} k^n,$$

donde $J_{n,p}$ es el bloque de Jordan correspondiente al valor vector p, de tamaño n. El siguiente resultado nos da una buena visión de la categoría $\mathrm{mod}(A)$, donde A es el álgebra de Kronecker.

Teorema A.3.2. *Sea A el álgebra de Kronecker. Entonces,*

a) $\mathrm{ind}(A) = \{Q_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{J_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{R_{p,i} \mid i \in \mathbb{N}^+ \text{ y } p \in \mathbb{P}^1(k)\}$.

b) $\dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(J_n, J_m) = \max\{0, m-1-n\} = \dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(Q_m, Q_n)$ $\forall\ n,\ m \in \mathbb{N}$.

c) $\dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(Q_n, J_m) = 0 = \dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(Q_n, R_{p,j}) = \dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(R_{p,j}, J_m)$ $\forall\ n,\ m \in \mathbb{N}$, $\forall\ j \in \mathbb{N}^+$, $\forall\ p \in \mathbb{P}^1(k)$.

d) $\dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(J_n, R_{p,j}) = j = \dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(R_{p,j}, Q_n)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ j \in \mathbb{N}^+$, $\forall\ p \in \mathbb{P}^1(k)$.

e) $\delta_{p,q}\min\{i, j\} = \dim_{\mathrm{k}}\mathrm{Ext}^1_A(R_{p,j}, R_{q,i})$ $\forall\ j,\ i \in \mathbb{N}^+$, $\forall\ p,\ q \in \mathbb{P}^1(k)$.

f) $0 \to Q_{n-1} \to Q_n^2 \to Q_{n+1} \to 0$, *es una sucesión exacta* $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$.

g) $0 \to J_{n+1} \to J_n^2 \to J_{n-1} \to 0$, *es una sucesión exacta* $\forall\ n \in \mathbb{N}^+$.

Demostración. Ver [ARS95, Teorema VIII.7.5]. □

A.4. Teoría de Auslander-Reiten

En esta sección Λ denotará una R-álgebra de Artin.

Definición A.4.1. Sea $\mathcal{C}$ una R-categoría aditiva. Un ideal $I \trianglelefteq \mathcal{C}$ es una clase de morfismos $I = \{I(X,Y)\}_{(X,Y)\in\mathcal{C}^2}$ tal que

a) $I(X,Y)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

b) Para toda sucesión $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{C}$, se tiene que, si $f \in I(X,Y)$ entonces $gf \in I(X,Z)$ y $fh \in I(W,Y)$.

Proposición A.4.2. *Sean $\mathcal{C}$ una R-categoría aditiva e $I \trianglelefteq \mathcal{C}$. Entonces, el cociente $\mathcal{C}/I$ es una R-categoría aditiva, donde*

a) $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}/I) := Obj(\mathcal{C})$.

b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/I(X,Y)$ $\forall\ X,\ Y \in \mathcal{C}$.

c) $(f+I(Y,Z))\circ_{\mathcal{C}/I}(g+I(X,Y)) := fg+I(X,Z) \quad \forall\, f : Y \to Z,\, g : X \to Y.$

Demostración. Basta ver que la composición está bien definida para ver que $\mathcal{C}/I$ es una categoría. En efecto, sean $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$ tales que $f_1 + I(X,Y) = f_2 + I(X,Y)$ y $g_1 + I(Y,Z) = g_2 + I(Y,Z)$. Entonces $f_1 - f_2 \in I(X,Y)$, y por definición $g_1(f_1 - f_2) \in I(X,Z)$. Análogamente $(g_1 - g_2)f_2 \in I(X,Z)$, con lo cual $g_1f_1 - g_2f_2 \in I(X,Z)$ porque $I(X,Z)$ es un submódulo de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. Así $g_1f_1 + I(X,Z) = g_2f_2 + I(X,Z)$ y por lo tanto la composición está bien definida. Usando ahora que $\mathcal{C}$ es aditiva, se sigue vía el funtor cociente $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I$, que $\mathcal{C}/I$ es aditiva. $\square$

Definición A.4.3. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría. Decimos que $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se factoriza a través de $\mathcal{X}$ si existen $g : M \to X$, $h : X \to N$, con $X \in \mathcal{X}$, tales que $f = hg$.

Notación A.4.4. *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría. Denotamos por $[\mathcal{X}]$ a los morfismos en $\mathcal{C}$ que se factorizan a través de $\mathcal{X}$.*

Proposición A.4.5. *Sean $\mathcal{C}$ una R-categoría aditiva y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría aditiva. Entonces, $[\mathcal{X}]$ es un ideal en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $f, g : A \to B \in [\mathcal{X}]$ y $r \in R$. Con lo cual existen $f' : A \to X$, $f'' : X \to B$, $g' : A \to X'$ y $g'' : X' \to B$, con $X, X'' \in \mathcal{X}$, tales que $f = f''f'$ y $g = g''g'$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f+rg"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}"'] & & B \\ & X \oplus X' \arrow[ur, "\begin{pmatrix} f'' & rg'' \end{pmatrix}"'] & \end{tikzcd} .$$

Es claro que $[\mathcal{X}]$ satisface la propiedad $b)$ de la definición de ideal. $\square$

Definición A.4.6. Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. El **transpuesto** de M es el Λ^{op}-módulo

$$\mathrm{Tr}(M) := \mathrm{Coker}((\pi_1)^*).$$

Con lo cual, se tiene la siguiente sucesión exacta en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$

$$M^* \to \mathrm{P}_0(M)^* \to \mathrm{P}_1(M)^* \to \mathrm{Tr}(M) \to 0.$$

Proposición A.4.7. *La transpuesta de un módulo, define una equivalencia de categorías*

a)

$$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{\mathrm{op}}),$$

con cuasi-inversa $\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda^{\mathrm{op}}) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$.

b) La composición

$$\tau := \mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$$

es una equivalencia de categorías con cuasi-inversa

$$\tau^{-1} := \mathrm{Tr}\mathrm{D}_{\Lambda} : \overline{\mathrm{mod}}(\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}(\Lambda).$$

Demostración. a) Ver [ARS, Proposición IV.1.6].

b) Ver [ARS, Proposición IV.1.9]. □

A τ, τ^{-1} se les conocen como las **traslaciones de Auslander – Reiten**. A continuación veremos algunas propiedades de estas traslaciones.

Proposición A.4.8. *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) $\tau \oplus_{i=1}^{n} M_i = \oplus_{i=1}^{n} \tau M_i \qquad \forall\ \{M_1, \cdots, M_n\} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$.

b) $\tau M = 0$, *si y sólo si,* $M \in \mathrm{proj}(\Lambda)$.

c) $\tau M \in \mathrm{ind}(\mathrm{mod}_{\mathcal{I}}(\Lambda)) \qquad \forall\ M \in \mathrm{ind}(\Lambda) - \mathrm{proj}(\Lambda)$.

d) $\tau^{-1}\tau M = M_{\mathcal{P}} \qquad \forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

e) $\tau\tau^{-1} M = M_{\mathcal{I}} \qquad \forall\ M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$.

Demostración. Ver [ARS95, Proposición IV.1.10]. □

La siguiente proposición relaciona las traslaciones con la dimensión proyectiva e inyectiva de un Λ-módulo.

Proposición A.4.9. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. *Entonces,*

a) $\mathrm{pd}(M) \leq 1 \iff \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{D}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\Lambda, \tau M) = 0.$

b) $\mathrm{id}(M) \leq 1 \iff \mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}M, \Lambda) = 0.$

Demostración. Ver [ARS95, Proposición IV.1.16]. $\square$

Las siguientes fórmulas son conocidas como las **fórmulas de Auslander – Reiten**.

Teorema A.4.10. *Sean M y $N \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, se tienen los siguientes isomorfismos de R-módulos*

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) \cong \mathrm{D_R}\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(\tau^{-1}N, M) \cong \mathrm{D_R}\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(N, \tau M),$$

los cuales son funtoriales en ambas variables.

Demostración. Ver [ASS06, Teorema IV.2.13]. $\square$

La siguiente sucesión es canónica para el transladado de Auslander-Reiten.

Proposición A.4.11. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \to \tau M \to \nu \mathrm{P}_1(M) \overset{\nu(\pi_1)}{\to} \nu \mathrm{P}_0(M) \overset{\nu(\pi_0)}{\to} \nu M \to 0,$$

donde $\nu := \mathrm{D}_{\Lambda^{op}}\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Lambda)$ *es el* **funtor de Nakayama**.

Demostración. Ver [ASS06, Proposición IV.2.4]. $\square$

Definición A.4.12. Sean $\oplus_{i=1}^n M_i =: M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, donde $M_i \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$ y $N \in \mathrm{ind}(\Lambda)$. Decimos que:

a) N es preinyectivo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^{-n}N \in \mathrm{inj}(\Lambda)$

b) M es **preinyectivo** si M_i es preinyectivo $\forall$ $1 \leq i \leq n$.

c) N es preproyectivo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^n M \in \mathrm{proj}(\Lambda)$.

d) M es **preproyectivo** si M_i es preproyectivo $\forall$ $1 \leq i \leq n$.

Notación A.4.13. *Denotamos por* $\mathrm{gl.dim}(\Lambda) := \sup\{\mathrm{pd}(A) \mid A \in \Lambda\}$.

Definición A.4.14. Decimos que Λ es **hereditaria**, si $\mathrm{gl.dim}(\Lambda) \leq 1$.

La siguiente definición nos permite dar una descripción de los Λ-módulos preinyectivos en álgebras hereditarias.

Definición A.4.15. Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un R-funtor aditivo entre R-categorías Krull-Schmidt. El **soporte del funtor F** es

$$\mathrm{SuppF} := \{X \in \mathrm{ind}(\mathcal{C}) \mid F(X) \neq 0\}.$$

Proposición A.4.16. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces, M es preinyectivo, si y sólo si,* $\mathrm{SuppHom}_\Lambda(\mathrm{M}, -)$ *es finito.*

Demostración. Ver [ARS95, Proposición VIII.1.9]. □

Definición A.4.17. Decimos que Λ es de **tipo de representación finita**, si $|\mathrm{ind}(\Lambda)| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Proposición A.4.18. *Sea Λ hereditaria. Entonces, Λ es de tipo de representación finita, si y sólo si, existe $M \in \mathrm{ind}(\Lambda)$ tal que M es preproyectivo y preinyectivo.*

Demostración. Ver [ARS, Proposición VIII.1.14]. □

Proposición A.4.19. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces* $\mathrm{add}(M)$ *es una clase funtorialmente finita.*

Demostración. Ver [Ma15, Proposición 4.1.13]. □

A.5. Álgebras con radical cuadrado cero

En esta sección Λ denotará una álgebra de Artin tal que $\mathrm{rad}^2(\Lambda) = 0$.

La siguiente álgebra de matriz triangular es importante en el estudio de Λ.

$$\triangle(\Lambda) := \begin{pmatrix} \mathrm{top}(\Lambda) & 0 \\ \mathrm{rad}(\Lambda) & \mathrm{top}(\Lambda) \end{pmatrix}.$$

Lema A.5.1. [A16*, 3.3*] *Sea $f : M \to N$ un morfismo de Λ-módulos no nulo tal que* $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(N)$*. Entonces, existe un único morfismo*

$$\bar{f} : \mathrm{top}(M) \to \mathrm{rad}(N)$$

tal que $f = i\bar{f}p$, *donde* $p : M \to \operatorname{top}(M)$ *es la proyección canónica e* $i : \operatorname{rad}(N) \to N$ *es la inclusión.*

Demostración. Notemos que $f(\operatorname{rad}(M)) \subseteq \operatorname{rad}^2(N) = 0$. Por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{top}(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\, \bar{f}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, equal] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $f = i\bar{f}p$. $\square$

El siguiente resultado nos da la conexión entre las categorías $\operatorname{mod}(\Lambda)$ y $\operatorname{mod}(\triangle(\Lambda))$.

Proposición A.5.2. *Sea* $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. *El funtor*

$$F : \operatorname{mod}(\Lambda) \to \operatorname{mod}(\triangle(\Lambda))$$

$$(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (\operatorname{top}(M) \oplus \operatorname{rad}(M) \xrightarrow{f_2 \oplus f_1} \operatorname{top}(N) \oplus \operatorname{rad}(N)),$$

donde el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{top}(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(N) \arrow[r] & N \arrow[r] & \operatorname{top}(N) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

satisface las siguientes propiedades:

a) F *es pleno.*

b) $M \in \operatorname{ind}(\Lambda)$, *si y sólo si,* $F(M) \in \operatorname{ind}(\triangle(\Lambda))$.

c) $M \in \operatorname{proj}(\Lambda)$, *si y sólo si,* $F(M) \in \operatorname{proj}(\triangle(\Lambda))$.

d) $(\pi_0)_2 \oplus (\pi_0)_1 : F(\mathrm{P}_0(M)) \to F(M)$ *es la cubierta proyectiva de* $F(M)$.

e) F *induce una equivalencia de categorías entre* $\underline{\operatorname{mod}}(\Lambda)$ *y* $\underline{\operatorname{mod}}(\triangle(\Lambda))$. *Más aún,* $\triangle(\Lambda)$ *es hereditaria.*

f) $0 \to 0 \oplus \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)) \overset{0\oplus\overline{\pi_1}}{\to} F(\mathrm{P}_0(M)) \overset{(\pi_0)_2\oplus(\pi_0)_1}{\to} F(M) \to 0$ *es la presentación proyectiva minimal de* $F(M)$.

g) Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ *un sistema completo de* Λ*-módulos simples. Entonces,*

$$\{S_i \oplus 0, 0 \oplus S_j \mid (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2\}$$

es un sistema completo de $\triangle(\Lambda)$*-módulos simples.*

h) $\mathrm{ind}(\mathrm{proj}(\triangle(\Lambda))) = \{0 \oplus \mathrm{top}(P), \mathrm{top}(Q) \oplus \mathrm{rad}(Q) \mid P,\ Q \in \mathrm{ind}(\mathrm{proj}(\Lambda))\}$.

i) $\mathrm{ind}(\mathrm{inj}(\triangle(\Lambda))) = \{\mathrm{soc}(I) \oplus 0, \mathrm{Hom}_{\mathrm{top}(\Lambda)}(\mathrm{rad}(\Lambda), \mathrm{soc}(J)) \oplus \mathrm{soc}(J) \mid I,\ J \in \mathrm{ind}(\mathrm{inj}(\Lambda))\}$.

j) Sea $S \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ *simple no inyectivo. Entonces,* $\tau^{-1}F(S) = F(\tau^{-1}S)$.

Demostración. a) Ver [ARS95, Proposición III.2.2 y Lema X.2.1 (a)].

b) Ver [ARS95, Proposición III.2.2 y Lema X.2.1 (d)].

c) Ver [ARS95, Proposición III.2.2 y Lema X.2.2].

d) Por el Lema de la serpiente se tiene que $(\pi_0)_2 \oplus (\pi_0)_1$ es un epimorfismo. Sea $g : F(\mathrm{P}_0(M)) \to F(\mathrm{P}_0(M))$ tal que $((\pi_0)_2 \oplus (\pi_0)_1)g = (\pi_0)_2 \oplus (\pi_0)_1$. Por a) $g = g_2 \oplus g_1$, donde tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & \mathrm{P}_0(M)/\mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi_0)_1"'] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"] & \mathrm{P}_0(M)/\mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi_0)_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(M) \arrow[r] & M \arrow[r, "q"'] & M/\mathrm{rad}(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Puesto que $(\pi_0)_2$ es un isomorfismo y $(\pi_0)_2 g_2 = (\pi_0)_2$, concluimos que g_2 es un isomorfismo. Ahora, notemos que $q\pi_0 g'$ es un epimorfismo, por lo que $\pi_0 g'$ es un epimorfismo. Así pues, g' es un isomorfismo. Dado que F es un funtor, tenemos que g es un isomorfismo. Por b) $(\pi_0)_2 \oplus (\pi_0)_1 : F(\mathrm{P}_0(M)) \to F(M)$

es la cubierta proyectiva de $F(M)$.

e) Ver [ARS95, Proposición III.2.2 y Teorema X.2.4].

f) Dado que $\mathrm{Ker}(\pi_1) \subseteq \mathrm{rad}(\mathrm{P}_1(M))$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}_1(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}(\pi_0) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\, k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(\mathrm{P}_1(M)) \arrow[r] & \mathrm{P}_1(M) \arrow[r] & \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\ell(\mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M))) \leq \ell(\mathrm{Ker}(\pi_0))$. Consideremos $\pi_1 = i\overline{\pi_1}p$, la descomposición de π_1 como en el Lema A.5.1. Notemos que $0 = \pi_0\pi_1 = i\overline{\pi_1}p$, por lo que $0 = i\overline{\pi_1}$. Así pues, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)) \arrow[r, "\overline{\pi_1}"] \arrow[d, dashed, "\exists\, l"'] & \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Coker}(\overline{\pi_1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi_0) \arrow[r] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r] & \mathrm{top}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el Lema de la serpiente l es un monomorfismo. Por lo que l es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Ker}((\pi_0)_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\pi_0) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi_0)_1"'] & \mathrm{P}_0(M) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"] & \mathrm{top}(\mathrm{P}_0(M)) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi_0)_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{top}(M) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Concluimos que $0 \to \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M) \stackrel{\overline{\pi_1}}{\to} \mathrm{rad}(\mathrm{P}_0(M)) \stackrel{(\pi_0)_1}{\to} \mathrm{rad}(M) \to 0$ es una sucesión exacta. Por *d*) $\triangle(\Lambda)$ es hereditaria y por lo tanto,

$$0 \to 0 \oplus \mathrm{top}(\mathrm{P}_1(M)) \stackrel{0\oplus\overline{\pi_1}}{\to} F(\mathrm{P}_0(M)) \stackrel{(\pi_0)_2\oplus(\pi_0)_1}{\to} F(M) \to 0$$

es la presentación proyectiva minimal de $F(M)$.

g), h) e i) Ver [ARS95, Proposición III.2.5 y Teorema X.2.4].

j) Se sigue de [ARS95, Corolario V.3.5, Teorema X.1.3], e) y f). $\square$

El resultado anterior y las siguientes definiciones nos servirá para decidir cuando Λ es de tipo de representación finita.

Definición A.5.3. Decimos que (Q, v) es un **carcaj valuado**, si Q es un carcaj y $v : Q_1 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una función.

Definición A.5.4. Sea $\{S_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de Λ-módulos simples. El **carcaj valuado de $\boldsymbol{\Lambda}$** (Q^Λ, v_Λ) se define como sigue:

- El conjunto de vértices es $\{S_i\}_{i=1}^n$.
- El conjunto de flechas es $S_i \to S_j$, si $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_i, S_j) \neq 0$.
- Consideremos la valuación

$$v_\Lambda : Q_1^\Lambda \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\alpha : S_i \to S_j \mapsto (\dim_{\mathrm{End}_\Lambda(\mathrm{S_j})}(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_i, S_j)), \dim_{(\mathrm{End}_\Lambda(\mathrm{S_i})^{\mathrm{op}})}(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_i, S_j))).$$

Definición A.5.5. Sea (Q, v) un carcaj valuado. El **carcaj separado** de Q (Q_S, v_Q) se define como sigue:

- El conjunto de vértices es $Q_0 \times \{0, 1\}$.
- El conjunto de flechas es $\{\overline{\alpha} : (i, 0) \to (j, 1) \mid \alpha : i \to j \in Q_1\}$.
- Consideremos la valuación

$$v_Q : Q_{S_1} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\overline{\alpha} : (i, 0) \to (j, 1) \mapsto v(\alpha)$$

El carcaj separado de Λ es $\Lambda_S := (Q_S^\Lambda, v_{Q^\Lambda})$.

Definición A.5.6. Las siguientes gráficas son las **gráficas Dynkin**:

$$A_n := \qquad \bullet_1 \text{———} \bullet_2 \cdots \bullet_{n-1} \text{———} \bullet_n \qquad n \geq 1.$$

$$D_n := \quad \begin{tikzcd} \bullet_1 \arrow[dr, dash] & & & & \\ & \bullet_3 \arrow[r, dash] & \bullet_4 \cdots \bullet_{n-1} \arrow[r, dash] & \bullet_n \\ \bullet_2 \arrow[ur, dash] & & & \end{tikzcd} \qquad n \geq 4.$$

$$E_6 := \quad \begin{tikzcd} & & \bullet_3 \arrow[d, dash] & & \\ \bullet_1 \arrow[r, dash] & \bullet_2 \arrow[r, dash] & \bullet_4 \arrow[r, dash] & \bullet_5 \arrow[r, dash] & \bullet_6 \end{tikzcd}$$

$$E_7 := \quad \begin{tikzcd} & & \bullet_3 \arrow[d, dash] & & & \\ \bullet_1 \arrow[r, dash] & \bullet_2 \arrow[r, dash] & \bullet_4 \arrow[r, dash] & \bullet_5 \arrow[r, dash] & \bullet_6 \arrow[r, dash] & \bullet_7 \end{tikzcd}$$

$$E_8 := \begin{tikzcd} & & & \bullet_3 \arrow[d, dash] & & & \\ \bullet_1 \arrow[r, dash] & \bullet_2 \arrow[r, dash] & \bullet_4 \arrow[r, dash] & \bullet_5 \arrow[r, dash] & \bullet_6 \arrow[r, dash] & \bullet_7 \arrow[r, dash] & \bullet_8. \end{tikzcd}$$

Teorema A.5.7. *Para cada* Λ *tal que* $\operatorname{rad}^2(\Lambda) = 0$ *se tiene que*

a) $\Lambda_S \cong (Q^{\triangle(\Lambda)}, v_{\triangle(\Lambda)})$.

b) Las siguientes condiciones son equivalentes.

- Λ *es de tipo de representación finita.*
- $v_{Q^\Lambda}(\alpha) = (1,1)\ \forall\ \alpha \in (\Lambda_{S_1})$ *y la gráfica subyacente de* Λ_S *es una unión disjunta finita de gráficas Dynkin.*

Demostración. Ver [ARS95, Teorema X.2.6]. $\square$

Por último, el siguiente resultado es debido a P. Gabriel.

Teorema A.5.8. [Ga72] *Sea Λ hereditaria (no necesariamente $\operatorname{rad}^2(\Lambda) = 0$). Entonces, Λ es hereditaria, si y sólo si, la gráfica subyacente de Q^Λ es una unión disjunta de gráficas Dynkin y $v(\alpha) = (1,1)\ \forall\ \alpha \in Q_1^\Lambda$*

Demostración. Ver [ARS95, Teorema VIII.5.4]. □

A.6. Teoría inclinante clásica

En esta sección Λ denotará una álgebra de Artin.

Definición A.6.1. Decimos que $T \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ es **inclinante parcial** si satisface las siguientes condiciones.

TM1) $\operatorname{pd}(T) \leq 1$.

TM2) $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0$.

Si además, T satisface la siguiente propiedad

TM3) Existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T' \to T'' \to 0,$$

con $T',\ T'' \in \operatorname{add}(T)$, decimos que T es **inclinante**.

Definición A.6.2. Decimos que $C \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ es **coinclinante** si $\mathrm{D}_\Lambda C$ es inclinante.

Definición A.6.3. Decimos que un par de subcategorías $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ de $\operatorname{mod}(\Lambda)$ es un **par de torsión**, si $\mathcal{T} = {}^{\perp_0}\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{T}^{\perp_0}$.

Las subcategorías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son llamadas, respectivamente, la **clase de torsión** y la **clase libre de torsión**. La siguiente proposición nos describe las clases de torsión y las clases libres de torsión.

Proposición A.6.4. *a) Sea $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces, $\mathcal{T}$ es una clase de torsión, si y sólo si, $\mathcal{T}$ es cerrada por extensiones y cocientes.*

b) Sea $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{mod}(\Lambda)$. Entonces, $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión, si y sólo si, $\mathcal{F}$ es cerrada por extensiones y submódulos.

Demostración. Ver [ACPV06, Proposición 2.1]. $\square$

El siguiente ejemplo nos dice que la noción de clase de torsión y clase libre de torsión son duales.

Ejemplo A.6.5. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$. Entonces,

$$(\mathrm{D}_\Lambda \mathcal{F}, \mathrm{D}_\Lambda \mathcal{T})$$

es un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda^{op})$.

Ver [ASS06, Ejemplo. VI.1.2].

La siguiente definición nos ayudará a fabricar pares de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

Definición A.6.6. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}(\Lambda)$. Decimos que $\mathcal{C} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{C}$ (respectivamente, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^{\perp_1}$) es la clase de los $\mathbf{Ext-proyectivos}$ (respectivamente, $\mathbf{Ext-inyectivos}$) en $\mathcal{C}$.

Lema A.6.7. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ Ext-proyectivo en $\mathrm{gen}(M)$. Entonces,*

$$(\mathrm{gen}(M), M^{\perp_0})$$

es un par de torsión.

Demostración. Ver [ASS06, Lema IV.1.9]. $\square$

Lema A.6.8. *Sea $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ gen-minimal tal que $\mathrm{gen}(M)$ es una clase de torsión. Entonces, M es Ext-proyectivo en $\mathrm{gen}(M)$.*

Demostración. Ver [ASS06, Lema IV.6.1]. $\square$

La siguiente proposición caracteriza los Λ-módulos Ext-proyectivos y Ext-inyectivos en un par de torsión.

Proposición A.6.9. [Ho82, *1,2*] *Sean $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $M \in \mathrm{ind}(\mathcal{T})$ y $N \in \mathrm{ind}(\mathcal{F})$. Las siguientes condiciones se satisfacen:*

a) M es Ext-proyectivo en $\mathcal{T}$, si y sólo si, $\tau M \in \mathcal{F}$

b) M es Ext-inyectivo en $\mathcal{T}$, si y sólo si, existe $I \in \operatorname{ind}(\operatorname{inj}(\Lambda)) - \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{t}_{\mathcal{T}}(I) \cong M$.

c) N es Ext-inyectivo en $\mathcal{F}$, si y sólo si, $\tau^{-1}N \in \mathcal{T}$.

d) N es Ext-proyectivo en $\mathcal{F}$, si y sólo si, existe $P \in \operatorname{ind}(\operatorname{proj}(\Lambda)) - \mathcal{T}$ tal que $P/\operatorname{t}_{\mathcal{T}}(P) \cong N$.

Demostración. Ver [ASS06, Proposición VI.1.11]. □

Proposición A.6.10. *Sean $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ e $I := \operatorname{ann}(\mathcal{T})$. Entonces,*

$$\mathbb{P}(\operatorname{gen}(M))$$

es un Λ/I-módulo inclinante. Además,

$$\operatorname{rk}(\mathbb{P}(\operatorname{gen}(M))) = \operatorname{rk}\operatorname{K}_0(\Lambda) = \operatorname{rk}(\mathbb{I}(\operatorname{gen}(M))).$$

Demostración. Ver [ASS06, Lema VI.6.4]. □

Definición A.6.11. Sea $M \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Decimos que M es **fiel**, si $\operatorname{ann}(M) = 0$.

Proposición A.6.12. *Sea $T \in \operatorname{mod}(\Lambda)$. Si T es inclinante parcial, entonces $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(T, \tau T) = 0$. Si T es fiel, la recíproca también vale.*

Demostración. Ver [ACPV06, Lema I.2.7]. □

El siguiente resultado es conocido como el **Teorema de Brenner y Butler**.

Teorema A.6.13. *Sean T un Λ-módulo inclinante y $\Gamma := \operatorname{End}_{\Lambda}(T)^{op}$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Los funtores $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(T, -) : \operatorname{gen}(M) \to \operatorname{sub}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{T})$ y

$$T \otimes_{\Gamma} - : \operatorname{sub}(\mathrm{D}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}\mathrm{T}) \to \operatorname{gen}(M)$$

son equivalencias casi-inversas.

b) Los funtores $\operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(T, -) : T^{\perp_0} \to T_{\Gamma}^{\top_0}$ y $\operatorname{Tor}_1^{\Gamma}(T, -) : T_{\Gamma}^{\perp_0} \to T^{\perp_0}$ son equivalencias casi-inversas.

Demostración. Ver [ACPV06, Teorema I.4.7]. □

La siguiente caracterización de módulos inclinantes es una consecuencia del Teorema de Brenner y Butler, la cual es debida a K. Bongartz.

Teorema A.6.14. *Sea* $T \in \operatorname{mod}(\Lambda)$ *inclinante parcial. Entonces,* T *es inclinante, si y sólo si,* $\operatorname{rk}(T) = \operatorname{rk}\mathrm{K}_0(\Lambda)$.

Demostración. Ver [ACPV06, Corolario I.5.6]. □

A.7. Categorías trianguladas

En esta sección $\mathcal{C}$ denotará una R-categoría.

Definición A.7.1. Sea $[1] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una R-equivalencia de categorías.

a) Un triángulo en $\mathcal{C}$ es un diagrama de la siguiente forma

$$\eta : X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1].$$

b) Un morfismo de triángulos es un triple (u, v, w) tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \eta : & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\ \xi : & X' \arrow[r, "f'"'] & Y \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X'[1]. \end{tikzcd}$$

Donde η y ξ son triángulos. Decimos que (u, v, w) es un isomorfismo si u, v, w son isomorfismos. En tal caso, escribimos $\eta \cong \xi$.

Notación A.7.2. *Sean* $n \in \mathbb{N}^+$ *y* $[1] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *una* R*-equivalencia de categorías. Denotamos por :*

- $[n+1] := [n][1]$.
- $[-n-1] := [-n][-1]$.

Definición A.7.3. Decimos que $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ es una categoría triangulada, donde $[1] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una R-equivalencia de categorías y Δ es una familia de triángulos (llamados triángulos distinguidos) en $\mathcal{C}$ si:

a) $X \overset{1_X}{\to} X \to 0 \to X[1] \in \Delta$.

b) Si $\eta \in \Delta$ y $\eta \cong \xi$, entonces $\xi \in \Delta$.

c) Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces existe $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1] \in \Delta$.

d) $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1] \in \Delta$, si y sólo si, $Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1] \overset{-f[1]}{\to} Y[1] \in \Delta$.

e) Si $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1]$, $X' \overset{f'}{\to} Y' \overset{g'}{\to} Z' \overset{h'}{\to} X'[1] \in \Delta$ y existen u, v tales que $vf = f'u$, entonces existe w tal que (u, v, w) es un morfismo de triángulos.

f) El siguiente axioma es llamado el axioma del octaedro. Si $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1]$, $Y \overset{j}{\to} A \overset{k}{\to} B \overset{l}{\to} Y[1]$, $X \overset{jf}{\to} A \overset{t}{\to} C \overset{s}{\to} X[1] \in \Delta$, entonces existen F, G tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\eta$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "F"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "jf"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "G"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, "k"] & B \arrow[r, "l"] \arrow[d, "g[1]l"] & Y[1] \arrow[d, "g[1]"] \\
 & & Z[1] \arrow[r, equal] & Z[1]
\end{tikzcd}$$

y η es un triángulo distinguido.

Proposición A.7.4. *Sea $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ es una categoría triangulada. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

a) Cambio de base. Si $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} X[1], X' \overset{f'}{\to} Y' \overset{g'}{\to} Z \overset{h'}{\to} X'[1] \in \Delta,$

entonces existe un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f'"] & \\
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & Z \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "h'"] & X[1] \\
 & X'[1] \arrow[r, equal] & X'[1], &
\end{tikzcd}
$$

donde todos los triángulos son distinguidos.

b) *Cambio de cobase. Si* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1], X' \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1] \in \Delta$, *entonces existe un diagrama conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'"'] & X' \arrow[d] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "h'"'] & A \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \\
 & X'[1] \arrow[r, equal] & X'[1], &
\end{tikzcd}
$$

donde todos los triángulos son distinguidos.

Demostración. Ver [Ne01, Proposición 1.4.6]. □

Definición A.7.5. Sean $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ una categoría triangulada y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría aditiva. Decimos que $\mathcal{X}$ es un subcategoría triangulada, si satisface las siguientes condiciones:

a) Si $X \in \mathcal{X}$, entonces $X[1] \in \mathcal{X}$ y $X[-1] \in \mathcal{X}$.

b) Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \in \Delta$ y $X, Y \in \mathcal{X}$, entonces existe $Z' \in \mathcal{X}$ tal que $Z \cong Z'$.

Además, si $\mathcal{X}$ es cerrada por sumandos directos, diremos que $\mathcal{X}$ es gruesa.

Veamos algunas propiedades básicas de las categorías trianguladas.

Proposición A.7.6. *Sean* $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ *una categoría triangulada,* $\eta : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1], \xi : X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1] \in \Delta$. *Las siguientes condiciones se satisfacen*

a) $\eta \oplus \xi := X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z' \xrightarrow{h \oplus h'} (X \oplus X')[1] \in \Delta$.

b) f *es un pseudokernel de* g *y* h *es un pseucokernel de* g.

c) Si $(u, v, w) : \eta \to \xi$ *es un morfismo de triángulos y* u, v *son isomorfismos, entonces* w *es un isomorfismo.*

d) Si $h = 0$, *entonces* $Y = X \oplus Z$.

e) Si f *es un split-mono, entonces* $h = 0$.

Demostración. Ver [Fl13, Lema 1.3.6, Lema 1.3.8, Lema 1.3.9] y [GM03, Corolario IV.1.4]. □

Lema A.7.7. *Sean* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ *subcategorías. Entonces,*

$$(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z} = \mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z}).$$

Demostración. $\subseteq$) Sean $V \in (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z}$, $X \xrightarrow{f} U \to Y \to X[1] \in \triangle$ y $U \xrightarrow{g} V \to Z \to U[1] \in \triangle$. Luego, consideramos el siguiente triángulo distinguido $X \xrightarrow{gf} V \to T \to X[1]$. Por el axioma del octaedro tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d] \\
U \arrow[r, "g"'] & V \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \arrow[d] \\
 & & Y[1] \arrow[r, equal] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

y $\eta : Y \to T \to Z \to Y[1] \in \triangle$. Por lo tanto, $V \in \mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z})$.

$\supseteq$) Sea $V \in \mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z})$, $V[-1] \xrightarrow{f} U[-1] \to X \to V \in \triangle$ y $U[-1] \xrightarrow{g} Z[-1] \to Y \to U \in \triangle$. Luego, consideramos el siguiente triángulo distinguido $V[-1] \xrightarrow{gf} Z[-1] \to T \to V$. Por el axioma del octaedro, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V[-1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & U[-1] \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d, dashed] & V[1] \arrow[d, equal] \\
V[-1] \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"'] & Z[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & T \arrow[r] \arrow[d, dashed] & V \arrow[d] \\
U[-1] \arrow[r, "g"'] & Z[-1] \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
& & X[1] \arrow[r, equal] & X[1].
\end{tikzcd}$$

Como $X \to T \to Y \to X[1]$ y $T \to V \to Z \to T[1]$ son triángulos distinguidos se tiene que $V \in (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z}$. □

Lema A.7.8. *Sean $\mathcal{X}_1, \cdots, \mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{C}$ subcategorías. Entonces,*

$$(\mathcal{X}_1 * \cdots * \mathcal{X}_n)[m] = \mathcal{X}_1[m] * \cdots * \mathcal{X}_n[m] \qquad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. La prueba la haremos por inducción sobre n.

$\subseteq$) Sean $X \in \mathcal{X}_1 * \cdots * \mathcal{X}_n * \mathcal{X}_{n+1}$ y $X_1 \to X \to Y \to X_1[1]$ un triángulo distinguido, con $X_1 \in \mathcal{X}_1$ y $Y \in \mathcal{X}_2 * \cdots * \mathcal{X}_{n+1}$. Consideramos el siguiente triángulo distinguido $X_1[m] \to X[m] \to Y[m] \to X_1[m+1]$, con $X_1[m] \in \mathcal{X}_1[m]$ y por hipótesis de inducción

$$Y[m] \in (\mathcal{X}_2 * \cdots * \mathcal{X}_{n+1})[m] = \mathcal{X}_2[m] * \cdots * \mathcal{X}_{n+1}[m].$$

Con lo cual $X[m] \in \mathcal{X}_1[m] * \cdots * \mathcal{X}_{n+1}[m]$.

$\supseteq$) Sean $X \in \mathcal{X}_1[m] * \cdots * \mathcal{X}_{n+1}[m]$ y $X_1[m] \to X \to Y[m] \to X_1[m+1]$ un triángulo distinguido, con $X_1[m] \in \mathcal{X}_1$ y por hipótesis de inducción

$$Y[m] \in \mathcal{X}_2[m] * \cdots * \mathcal{X}_{n+1}[m] = (\mathcal{X}_2 * \cdots * \mathcal{X}_{n+1})[m].$$

Así $Y \in \mathcal{X}_2 * \cdots * \mathcal{X}_{n+1}$ y por lo tanto $X \in (\mathcal{X}_1 * \cdots * \mathcal{X}_{n+1})[m]$. □

Definición A.7.9. Sean $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ una categoría triangulada y $\mathcal{D}$ una categoría abeliana. Decimos que un funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es **cohomológico**, si $F(X) \stackrel{F(f)}{\to} F(Y) \stackrel{F(g)}{\to} F(Z)$ es una sucesión exacta $\forall\ X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z \stackrel{h}{\to} X[1] \in \Delta$.

Proposición A.7.10. *Sea* $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ *una categoría triangulada. Los funtores* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(R)$ *son cohomológicos.*

Demostración. Ver [GM03, Proposición IV.1.3]. □

Definición A.7.11. Sean $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ una categoría triangulada. Decimos que $\mathcal{C}$ es una R-categoría de Artin, si:

a) R es un anillo artiniano.

b) $\mathcal{C}$ es Hom-finita (esto es, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathrm{mod}(R)$) $\forall\ X, Y \in \mathcal{C}$.

Note que toda R-categoría de Artin es Krull-Schimdt (Lema 1.1.16, Corolario 1.1.17).

A.8. La categoría homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$

En esta sección $\mathcal{A}$ denotará una R-categoría abeliana.

Definición A.8.1. Un **cocomplejo** $C^\bullet$ en $\mathcal{C}$ es una sucesión

$$C^\bullet : \cdots \to C^{n-1} \stackrel{d^{n-1}}{\to} C^n \stackrel{d^n}{\to} C^{n+1} \to \cdots$$

de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que $d^n d^{n-1} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$. Decimos que el cocomplejo $C^\bullet$ es **acíclico**, si dicho cocomplejo es una sucesión exacta.

Definición A.8.2. Sean $C^\bullet$ y $D^\bullet$ cocomplejos en $\mathcal{A}$. Una familia

$$\varphi := \{\varphi^i : C^i \to D^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

de morfismos en $\mathcal{A}$ es un **morfismo de complejos** $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$, si $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C^n \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"'] & C^{n+1} \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] \\ D^n \arrow[r, "d_D^n"'] & D^{n+1}. \end{tikzcd}$$

Sean $\varphi : C^\bullet \to D^\bullet$ y $\psi : D^\bullet \to E^\bullet$ morfismos de complejos. La composición de morfismos está dada por

$$\psi \circ \varphi := \{\psi^i \varphi^i : C^i \to E^i\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Ya que los morfismos de complejos son definidos entero a entero, como morfismos en $\mathcal{A}$, es fácil ver que los complejos forman una R-categoría aditiva. Denotaremos por $\mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$ a la categoría de cocomplejos sobre $\mathcal{A}$.

Definición A.8.3. Sea $C^\bullet \in \mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$. La $\mathbf{n}$ **– ésima cohomología** es

$$H^n(C^\bullet) := \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(d^{n-1}) \to \mathrm{Ker}(d^n)).$$

Definición A.8.4. Sean $\varphi, \psi : C^\bullet \to D^\bullet$ en $\mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$. Decimos que φ y ψ son homotópicos en $\mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$, si existe una familia $S = \{S^n : C^n \to D^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfimos en $\mathcal{A}$, llamada homotopía, tal que

$$\varphi^n - \psi^n = d_D^{n-1} S^n + S^{n+1} d_C^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En tal caso, se suele escribir $S : \varphi \sim \psi$ o bien $\varphi \sim \psi$.

El siguiente resultado nos va a poder definir un ideal en $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Proposición A.8.5. *a) La n-ésima cohomología $H^n : \mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ define un R-funtor fiel y pleno.*

b) Si $g, f : C^\bullet \to D^\bullet$ son homotópicos, entonces $H^n(g) = H^n(f)\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Ver [Ro09, Teorema 6.8, Teorema 6.14]. □

Por lo anterior

$$H(C^\bullet, D^\bullet) := \{f \in C^\bullet \to D^\bullet \mid H^n(f) = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}\}$$

es un ideal en $\mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$. Denotamos por $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) := \mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})/H$ a la **categoría homotópica**.

Definición A.8.6. Sea $f : C^\bullet \to D^\bullet \in \mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$. Denotamos por $C[n]^\bullet$ el siguiente cocomplejo en $\mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$.

a) $(C[n]^\bullet)^i := C^{i+n}$ y $d^i_{C[n]^\bullet} := (-1)^i d_{C^\bullet}$.

b) $f[n] : C[n]^\bullet \to D[n]^\bullet$, donde $(f[n])^i := f^{n+i}$.

Notemos que $[n] : \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ define una R-equivalencia de categorías $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Veamos que es el cono de un morfismo $f : C^\bullet \to D^\bullet$.

Definición A.8.7. Sea $f : C^\bullet \to D^\bullet \in \mathrm{Kom}^\bullet(\mathcal{A})$. El **cono de f** es el siguiente cocomplejo $C(f)$

a) $(C(f)^\bullet)^n := C[1]^n \oplus D^n$

b) $d^n_{C(f)} := \begin{pmatrix} d_{C[1]} & 0 \\ f[1] & d_D. \end{pmatrix}$

El siguiente resultado nos dice que $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$ tiene estructura de categoría triangulada.

Teorema A.8.8. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces, $(\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}), [1], \triangle)$ es una categoría triangulada, donde $\triangle$ es la clase de todos los triángulos isomorfos a los de la forma*

$$C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{D^\bullet} \end{pmatrix}} C(f) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{C[1]^\bullet} & 0 \end{pmatrix}} C[1]^\bullet$$

.

Demostración. Ver [GM03, Teorema IV.9]. $\square$

Definición A.8.9. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Definimos las siguientes categorías plenas de $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A})$:

a) $\mathcal{K}^b(\mathcal{A}) := \{C^\bullet \in \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) \mid \exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $C^k = 0\ \forall\ k > |n|\}$.

b) $\mathcal{K}^+(\mathcal{A}) := \{C^\bullet \in \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) \mid \exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $C^k = 0\ \forall\, k < n\}$.

c) $\mathcal{K}^-(\mathcal{A}) := \{C^\bullet \in \mathcal{K}^\bullet(\mathcal{A}) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $C^k = 0\ \forall\, k > n\}$.

Notemos que si $\mathcal{A}$ es una R-categoría abeliana Hom-finita, con R un anillo artiniano. Se tiene que $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ es una R-categoría de Artin.

A.9. La categoría de funtores

En está sección $\mathcal{C}$ denotará una R-categoría de Artin, esqueléticamente pequeña y con pseudokerneles.

Definición A.9.1. Decimos que un R-funtor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{mod}(R)$ es un $\mathcal{C}$ − **módulo**. Denotamos por $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ a la **categoría de** $\mathcal{C}$ − **módulos**, donde los objetos son los $\mathcal{C}$-módulos y los morfismos son las transformaciones naturales. Decimos que $F \in \mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ es **coherente**, si existe una sucesión exacta de $\mathcal{C}$-módulos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \overset{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \to F \to 0.$$

Denotamos por $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ la subcategoría plena de $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ cuyos objetos son los funtores coherentes.

En [Au74] se prueba que $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana, $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ es cerrada por cocientes y extensiones en $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ en general y es cerrada por kerneles, si y sólo si, $\mathcal{C}$ tiene pseudokerneles.

En particular, $\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ es una subcategoría abeliana. Esto justifica porque pedimos que la categoría $\mathcal{C}$ tenga pseudokerneles. Denotamos el funtor

$$\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$$

$$F \overset{\eta}{\to} G \mapsto \mathrm{D}_R G \overset{\mathrm{D}_R\eta}{\to} \mathrm{D}_R F,$$

donde $\mathrm{D}_R F(f^{op}) := \mathrm{D}_R F(f)$, si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$.

Definición A.9.2. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **R − variedad dualizante** si el funtor $\mathrm{D}_R : \mathrm{mod}(\mathcal{C}) \to \mathrm{mod}(\mathcal{C}^{op})$ es una dualidad de R-categorías.

En la sección de subcategorías n-inclinantes de conglomerado, veremos que no todas las categorías son R-variedades dualizantes. El siguiente resultado es conocido como el **Lema de Yoneda**, que es un análogo al proceso de proyectivización en la categoría de funtores.

Teorema A.9.3. *Sean $F : \mathcal{C} \to \operatorname{mod}(R)$ y $X \in \mathcal{C}$. La correspondencia*

$$\pi : \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}(\mathcal{C})}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-), F) \to F(X)$$

$$\varphi \mapsto \varphi_X(1_X),$$

es una biyección.

Demostración. Ver [ASS06, Teorema 6.1]. □

Corolario A.9.4. *Sean X, $Y \in \mathcal{C}$, la correspondencia*

$$\pi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \to \operatorname{Hom}_{\operatorname{mod}(\mathcal{C})}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-), \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-))$$

$$f \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-),$$

es una biyección.

Demostración. Ver [ASS06, Corolario 6.2]. □

El siguiente resultado muestra la existencia de cubiertas proyectivas en la categoría de funtores coherentes.

Teorema A.9.5. [Au74, *4.11,4.13*] *Sea $\mathcal{C}$ con pseudokerneles. Entonces, todo funtor coherente F admite una presentación proyectiva minimal*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) \stackrel{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f,-)}{\to} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \to F \to 0.$$

Demostración. Ver [Au74, Corolario 4.11 y Corolario 4.13]. □

El siguiente resultado caracteriza los $\mathcal{C}$-módulos simples, que es parecida a la categoría de módulos sobre un anillo artiniano, mediante el radical de la categoría.

Proposición A.9.6. [Au74II, *1.6*] *Sea $S \in \operatorname{Mod}(\mathcal{C})$. Entonces, S es simple, si y sólo si, existe $M \in \operatorname{ind}(\mathcal{C})$ tal que $S \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}}(M,-)$.*

Demostración. Ver [Au74II, Corolario 1.6]. $\square$

Índice alfabético

Notación

Para una categoría aditiva $\mathcal{C}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría

$\oplus_{i=1}^{n} X_i$	el coproducto de $\{X_1, \cdots, X_n\}$
X^n	$\oplus_{i=1}^{n} X$
$Y \mid X$	existe $Z \in \mathcal{C}$ tal que $Y \oplus Z = X$
$\mathrm{ind}(\mathcal{C})$	una clase de isomorfía de representantes de objetos inescindibles en $\mathcal{C}$
$\mathrm{add}(\mathcal{X})$	$\{X \in \mathcal{C} \mid \exists\ Y \in \mathcal{C},\ X \oplus Y = (X')^n$ para algún $X' \in \mathcal{X}\}$
$\mathrm{smd}(\mathcal{X})$	$\{Y \in \mathcal{C} \mid \exists\ X \in \mathcal{X}\ Y \mid X\}$
$\mathcal{X}^{\perp_i}$	$\{Y \in \mathcal{C} \mid\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^{i}(X, Y) = 0\ \forall\ X \in \mathcal{X}\}$
${}^{\perp_i}\mathcal{X}$	$\{Y \in \mathcal{C} \mid\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^{i}(Y, X) = 0\ \forall\ X \in \mathcal{X}\}$
$\mathbb{P}(\mathcal{X})$	$\bigoplus_{\substack{X \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{X} \\ X \in \mathcal{C}}} X$
$\mathbb{I}(\mathcal{X})$	$\bigoplus_{\substack{X' \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp_1} \\ X \in \mathcal{C}}} X$
$\mathrm{proj}(\mathcal{C})$	categoría de $\mathcal{C}$-objetos proyectivos
$\mathrm{inj}(\mathcal{C})$	categoría de $\mathcal{C}$-objetos inyectivos
$\pi_0 : \mathrm{P}_0(X) \to X$	cubierta proyectiva de X
$\iota_0 : X \to \mathrm{I}_0(X)$	envolvente inyectiva de X
$\mathrm{P}_1(X) \stackrel{\pi_1}{\to} \mathrm{P}_0(X) \stackrel{\pi_0}{\to} X \to 0$	presentación proyectiva minimal de X
$0 \to X \stackrel{\iota_0}{\to} \mathrm{I}_0(X) \stackrel{\iota_1}{\to} \mathrm{I}_1(X)$	presentación inyectiva minimal de X
$[\mathcal{X}]$	morfismos en $\mathcal{C}$ que se factorizan a través de $\mathcal{X}$

Para una álgebra de Artin $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbf{mod}(\mathbf{\Lambda})$, $\mathbf{S} \in \mathbf{mod}(\mathbf{\Lambda})$ simple, $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{mod}(\mathbf{\Lambda})$ una subcategoría y Q un carcaj

$\mathrm{mod}(\Lambda)$	categoría de módulos finitamente generados
$\mathrm{ind}(\Lambda)$	$\mathrm{ind}(\mathrm{mod}(\Lambda))$
$\mathrm{gen}(M)$	$\{X \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid$ existe un epimorfismo $p : M^n \to X\}$
$\mathrm{cogen}(M)$	$\{X \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid$ existe un monomorfismo $i : X \to M^n\}$
$\mathrm{ann}(M)$	$\{r \in \Lambda \mid rm = 0 \quad \forall\, m \in M\}$
$\mathrm{ann}(\mathcal{C})$	$\cap_{M\in\mathcal{C}}\ \mathrm{ann}(M)$
$t_{\mathcal{C}}(M)$	$\sum\{\mathrm{Im}(f) \mid f : C \to M,\ con\ C \in \mathcal{C}\}$
$\mathrm{proj}(\Lambda)$	$\mathrm{proj}(\mathrm{mod}(\Lambda))$
$\mathrm{inj}(\Lambda)$	$\mathrm{inj}(\mathrm{mod}(\Lambda))$
$\mathrm{pd}(M)$	dimensión proyectiva de M
$\mathrm{id}(M)$	dimensión inyectiva de M
$\mathrm{rad}(M)$	$\cap\{N \leq M \mid N$ es maximal$\}$
$\mathrm{top}(M)$	$M/\mathrm{rad}(M)$
(M)*	Hom_Λ(M,Λ)
$\mathrm{Tr}(M)$	el transpuesto de M
$\underline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$	$\mathrm{mod}(\Lambda)/[\mathrm{proj}(\Lambda)]$
$\overline{\mathrm{mod}}(\Lambda)$	$\mathrm{mod}(\Lambda)/[\mathrm{inj}(\Lambda)]$
$\tau(M)$	$\mathrm{D}_{\Lambda^{op}}\mathrm{Tr}(M)$
$\tau^{-1}(M)$	$\mathrm{Tr}\mathrm{D}_\Lambda(M)$
$M_{\mathcal{P}}$	$M = M_{\mathcal{P}} \oplus M'$, donde $M_{\mathcal{P}}$ no tiene sumandos directos proyectivos no nulos y $M' \in \mathrm{proj}(\Lambda)$
$M_{\mathcal{I}}$	$M = M_{\mathcal{I}} \oplus M'$, donde $M_{\mathcal{I}}$ no tiene sumandos directos inyectivos no nulos y $M' \in \mathrm{inj}(\Lambda)$
$\mathrm{mod}_{\mathcal{P}}(\Lambda)$	$\{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid M = M_{\mathcal{P}}\}$
$\mathrm{mod}_{\mathcal{I}}(\Lambda)$	$\{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid M = M_{\mathcal{I}}\}$
$\widetilde{\mathrm{proj}}(\Lambda)$	$\{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid M$ es preproyectivo$\}$
$\widetilde{\mathrm{inj}}(\Lambda)$	$\{M \in \mathrm{mod}(\Lambda) \mid M$ es preinyectivo$\}$
$\mathrm{gl.dim}(\Lambda)$	dimensión global de Λ
sτ-tilt(Λ)	la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos τ-inclinantes de soporte básicos
τ-tilt(Λ)	la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos τ-inclinantes básicos
tilt(Λ)	la subcategoría plena de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos inclinantes básicos
τ-rigid(Λ)	la clase de isomorfismos de pares τ-rígidos básicos en Λ

f-tors(Λ)	la clase de todas las clases de torsión funtorialmente finitas en mod(Λ)
sf-tors(Λ)	la clase de todas las clases de torsión funtorialmente finitas sinceras
ff-tors(Λ)	la clase de todas las clases de torsión funtorialmente finitas fieles
Tors($\mathcal{C}$)	$\bigcap_{\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}\subseteq \mathrm{mod}(\Lambda) \mid \mathcal{T} \text{ clase de torsión}} \mathcal{T}$
Filt($\mathcal{C}$)	la subcategoría plena de mod(Λ) cuyos objetos son Λ-módulos $\mathcal{C}$-filtrados
$\mathrm{m}_S(\mathrm{M})$	la multiciplidad del simple S en M
$\ell(M)$	longitud de M
$\mathcal{S}(Q)$	el conjunto de los subcarcajs sencillos de Q
$\tau(\mathrm{rigid}(\Lambda))$	la clase de Λ-módulos τ-rígidos
$\tau(\mathrm{rigid}_p(\Lambda))$	la clase de Λ-módulos τ-rígidos no proyectivos

Para una categoría triangulada $(\mathcal{C}, [\mathbf{1}], \mathbf{\Delta})$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ **subcategorías**, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ **y** $\mathbf{T} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{X}^{\perp_{>n}}$	$\{Z \in \mathcal{C} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z[k]) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X} \; \forall \; k > n\}$
$\mathcal{X}^{\perp_{<m}}$	$\{Z \in \mathcal{C} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z[j]) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X} \quad \forall \; j < m\}$
$\mathcal{X} * \mathcal{Y}$	$\{Z \in \mathcal{C} \mid \textit{existe } X \to Z \to Y \to X[1] \in \triangle\}$
thick($\mathcal{X}$)	la subcategoría gruesa mas pequeña de $\mathcal{C}$ que contiene a $\mathcal{X}$
silt($\mathcal{C}$)	la clase de todas las subcategorías silting de $\mathcal{C}$
tilt($\mathcal{C}$)	la clase de todas las subcategorías inclinantes de $\mathcal{C}$
n-rigid($\mathcal{C}$)	$\{X \in \mathcal{C} \mid X$ es n-rígido$\}$
n-c-tilt($\mathcal{C}$)	$\{X \in \mathcal{C} \mid X$ es n-inclinante de conglomerado$\}$
n-c-tilt$_T(\mathcal{C})$	$\{X \in$c-tilt$(\mathcal{C}) \mid \mathrm{add}(X) \cap \mathrm{add}(T) = 0\}$

Para una categoría abeliana $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}$ **subcategorías y** $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}^{\leq n}(\mathcal{C})$	$\{C \in \mathcal{C} \mid \mathrm{pd}(C) \leq n\}$
$\mathcal{I}^{\leq n}(\mathcal{C})$	$\{C \in \mathcal{C} \mid \mathrm{id}(C) \leq n\}$
gl.dim($\mathcal{C}$)	$\max\{\mathrm{pd}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$

Bibliografía

[A16] T. Adachi, *Characterizing τ-Tilting Finite Algebras with Radical Square Zero*. Proc. Amer. Math. Soc. 144, 4673–4685, 2016.

[AIR14] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-Tilting Theory*. Compos. Math. 150, no. 3, 415-452, 2014.

[Ai13] T. Aihara, *Tilting-connected symmetric algebras*. Algebr, Represent, Theory 16, no. 3, 873-894, 2013.

[AI12] T. Aihara, O. Iyama, *Silting Mutation in Triangulated Categories*. J. Lond. Math. Soc. 85, no. 3, 633-668, 2012.

[ABM98] I. Assem, A. Beligianis, N. Marmaris. *Right Triangulated Categories with Right-Equivalences*. Can. Math. Soc. Conf. Proc. Vol. 24, 1998.

[ACPV06] I. Assem, J. Cappa, M. Platzeck, M. Verdecchia, *Módulos Inclinantes y Álgebras inclinadas*. Notas de Álgebra y Análisis, 2006.

[ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 1: Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society, Student Text 65, 2006.

[Au74] M. Auslander, *Representation Theory of Artin Algebras I*. Comm. Algebra 1, 177-268, 1974.

[Au74II] M. Auslander, *Representation Theory of Artin Algebras II*. Comm. Algebra 1, 269-310, 1974.

[AR74] M. Auslander, I. Reiten, *Stable equivalence of Dualizing R-Varieties*. Adv. in Math. 12, 306-366, 1974.

[AR91] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*. Adv. in Math. 86, no. 1, 111-152, 1991.

[AR94] M. Auslander, I. Reiten, *DTr-periodic modules and functors*. Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994). CMS Conf. Proc., vol. 18, 39-50, Am. Math. Soc., 1996.

[ARS95] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995.

[AS80] M. Auslander, S. Smalø, *Preprojective Modules over Artin Algebras*. J. Algebra 66, 61-122, 1980.

[AS81] M. Auslander, S. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*. J. Algebra 69, 426-454, 1981.

[BM08] A. Bondy, U.S.R. Morty, *Graph Theory*. Springer-Verlag London, 2008.

[Bo81] K. Bongartz, *Tilted algebras*. Representation Theory, Proceedings of the Third International Conference on Representations of Algebras Held in Puebla, Mexico, August 4–8 1980, 26-38, 1981.

[DK08] R. Dehy, B. Keller, *On the combinatorics of rigid objects in 2-Calabi-Yau categories*. Int. Math. Res. Not. IMRN, 1-12, 2008.

[DIJ17] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, *τ-tilting finite algebras, bricks and g-vectors*. Int. Math. Res. Not. IMRN, 1-12, 2008, 1-41, 2017.

[Fl10] M. Flores, *Una Introducción a la Teoría de Representaciones de Álgebras*. Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2010.

[Fl13] M. Flores, *Categorías Triánguladas*. Tesina de maestría, UNAM, Instituto de Matemáticas, 2013.

[FG06] V. Fock, A. Goncharov, *Moduli Spaces of Local Systems and Higher Teichmüller Theory*. Publ. Math. Inst. Haut. Et. Sci., no. 103, 1–211, 2006.

[FZ02] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*. J. Amer. Math. Soc. 15, no. 2, 497–529, 2002.

[FZ03] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras II: Finite Type Classification.* Inv. Math. 154, 63–121, 2003.

[FZ07] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV: Coefficients.* Compos. Math. 143, no. 3, 112-164, 2007.

[Ga72] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I.* Man. Math., 6, 71-103, 1972.

[GSV10] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Cluster Algebras and Poisson Geometry.* American Mathematical Soc., 2010.

[GM03] S. I. Gelfand, Y. I. Manin, *Methods of Homological Algebra.* 2d ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[HR82] D. Happel, C. Ringel, *Tilted Algebras.* Trans. Am. Math. Soc. 274, no. 2, 399-443, 1982.

[HU89] D. Happel, L. Unger, *Almost Complete Tilting Modules.* Proc. Amer. Math. Soc 107, no. 3, 603-610, 1989.

[HU05] D. Happel, L. Unger, *On a Partial Order of Tilting Modules.* Algebr, Represent. Theory 8, no. 2, 147-156, 2005.

[Ho82] M. Hoshino, *Tilting Modules and Torsion Theories.* Bull. London. Math. Soc., no. 14, 334-336, 1982.

[I07] O. Iyama, *Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories.* Adv. Math. 210 (1), 22-50, 2007.

[IY08] O. Iyama, Y. Yoshino, *Mutation in Triangulated Categories and Rigid Cohen-Macaulay Modules.* Invent. Math. 172, no. 1, 117-168, 2008.

[Ja15] G. Jasso, *Reduction of τ-tilting modules and torsion pairs.* Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 16, 7190–7237, 2015.

[Ke10] B. Keller, *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories.* Lond. Math. Soc. Lect. Not. Ser., vol. 375, 76-160, 2010.

[KR07] B. Keller, I. Reiten, *Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi–Yau.* Adv. Math. 211, 123–151, 2007.

[Kr07] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability, in: Interactions between homotopy theory and algebra*. Contemp. Math. 436, 101–139, 2007.

[Kr15] H. Krause, *Krull-Schmidt categories and projective covers*. Expo. Math. 33, 535-549, 2015.

[Ma15] L. Martínez, *El Teorema de Brenner y Butler*. Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2015.

[Mi86] Y. Miyashita, *Tilting Modules of Finite Projective Dimension*. Math. Zeits. 193, 113-146, 1986.

[Pa08] Y. Palu, *Cluster Characters for 2-Calabi-Yau Triangulated Categories*. Ann. L'Inst. Four. 58 (6), 2221-2248, 2008.

[Ro09] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. 2d ed., Springer-Verlag New York, 2009.

[Ne01] A. Neeman, *Triangulated categories*. Princeton University Press, 2001.

[Sk94] A. Skowronski, *Regular Auslander–Reiten Components Containing Directing Modules*. Proc. Amer. Math. Soc 120, 19-26, 1994.

[Sm84] S. Smalø, *Torsion Theories and Tilting Modules*. Bull. London. Math. Soc. 16, 518-522, 1984.

[Wi91] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991.

[YU15] T. YU, *Balancing Conditions in Global Tropical Geometry*. Ann. L'Inst. Four. 65 (4), 1647-1667, 2015.

[ZZ11] Y. Zhou, B. Zhu, *Maximal Rigid Subcategories in 2-Calabi-Yau Triangulated Categories*. J. Algebra 348, 49-60, 2011.