Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ALGUNOS ASPECTOS DEL PERFIL DE INYECTIVIDAD DE UN ANILLO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

IRVIN ARELLANO ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2017

1. Datos del alumno
Arellano
Rosas
Irvin
5532659345
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
412052592

2. Datos del tutor
Dr.
Alejandro
Alvarado
García

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Iván Fernando
Vilchis
Montalvo

5. Datos del sinodal 3
Mat.
José Gabriel
Ocampo
Márquez

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Rodrígo
Domínguez
López

7. Datos del trabajo escrito
Algunos Aspectos del Perfil de Inyectividad de un Anillo
104 p
2017

A mi familia ausente: Marina y Alejandro
A mi primer familia: Rodolfo, Judith y Carlos
A mi nueva familia: Carlos, Elias, Martha, Albino y Valeria

AGRADECIMIENTOS

En este espacio me gustaría compartir algunas palabras para todas aquellas personas que me acompañaron a lo largo de esta etapa tan importante de mi vida.

Desde luego mi familia es un parte importante de mí, soy muy afortunado al poder ser parte de ella. En verdad no existen símbolos capaces de expresar la infinita gratitud, orgullo, admiración y amor que siento por cada uno de ustedes. ¡Gracias por estar siempre ahí!

Probablemente hubiera abandonado la carrera si no hubiera conocido el primer año de la licenciatura al Dr. Alejandro Alvarado García, mi director de tesis. Durante los años que he sido su alumno me ha enseñado muchísimas cosas: me mostró la exuberante belleza del Álgebra, me mostró la elegancia intrínseca de los razonamientos más básicos y la manera de combinarlos para dominar hasta las más caprichosas afirmaciones, me mostró paisajes imposibles y el modo de moverme en ellos, me mostró que el infinito se puede hallar detrás de unas cuantas lineas precedidas por la frase "definición", me mostró que existe un bien que entre más se comparte más crece y también me mostró que por más difícil que parezca un camino, al final uno siempre puede llegar al final. No tengo forma de retribuirle todo lo que ha hecho por mí, por siempre estaré agradecido con usted. ¡Gracias por dar sentido a mi vida académica, por ser un gran profesor y por ser una gran persona!

Todos mis sinodales han marcado mi vida de forma significativa, por ello también quiero expresar mi agradecimiento a ellos en estas lineas. Parte del legado que el Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía ha dejado en la matemática, vive en los libros de texto que ha escrito; la claridad de sus pensamientos, la originalidad de sus ideas, el rigor de sus argumentos, la elegancia de sus demostraciones y la sinceridad de su visión, son algunas de sus cualidades que se reflejan en sus libros, los cuales me apoyaron, e inspiraron, a lo largo de la carrera y en los que siempre aprecié el destacado trabajo de su autor, al cual agradezco su esfuerzo, dedicación y ejemplo. La paciencia, el buen humor y la cercanía con sus alumnos, son las virtudes que el Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo siempre manifestó en cada clase que atendí; ciertamente el trabajar con una sonrisa en el rostro y dejar respirar a sus estudiantes de vez en cuando, fueron factores determinantes para que Fernando lograra convencernos, a mí y a mis otros compañeros de clase, de las bondades que puede ofrecer el álgebra si uno le dedica tiempo y atención suficiente. Uno de los mayores ejemplos de dedicación, vocación, amabilidad y compromiso social, lo tuve del Mat. José Gabriel Ocampo Márquez; con el excepcional orden, riqueza, naturalidad, fluidez y alegría de cada una de sus clases, Gabriel ha hecho que muchos de sus alumnos (entre ellos yo mismo) refuercen su sentido de pertenencia en la licenciatura, confíen en sus capacidades,

continúen con sus sueños y, sobre todo, entiendan que estudiar matemáticas es una actividad cooperativa. La energía que expresaba el M. en C. Rodrígo Domínguez López en cada clase, era, para mí, un signo claro de su deseo de compartir con sus alumnos las cosas que conocía; no exagero al decir que Rodrígo se convirtió en un ejemplo a seguir para nosotros, pues su juventud contrastaba con la increíble destreza que poseía, la destreza de un verdadero algebrista. ¡Gracias a cada uno de mis sinodales por todo lo que han compartido conmigo!

Durante la carrera he conocido a muchas personas increíbles, cada una con cualidades únicas. En verdad soy afortunado al poder decir que hice muchos amigos en la Facultad, pero desafortunado al no poder darle las gracias a cada uno de ellos por todo lo que compartieron conmigo, ya que con el tiempo he dejado de tener contacto con algunos; aunque omito sus nombres (por temor a olvidar alguno), su influencia no puede ser omitida, pues han moldeado mi vida y por ello siempre estarán presentes en ella. ¡Gracias a todas aquellas personas que me ofrecieron su amistad!

INTRODUCCIÓN

En este proyecto se pretende desarrollar con el mayor rigor posible la primera mitad del artículo *Characterizing Rings in Terms of the Extent of the Injectivity and Projectivity of their Modules* escrito por Sergio R. López-Permouth y José E. Simental en el año 2012. Tal empresa se materializa en el último capítulo del presente escrito.

La tesis se compone de cinco capítulos, en estos se desarrollan los resultados necesarios para que puedan fluir los conceptos involucrados en el artículo mencionado. El primer capítulo sirve como presentación de las herramientas con las cuales vamos a trabajar en los capítulos subsecuentes. En el segundo capítulo se hallan los ingredientes primordiales para la demostración de un Teorema de Osofsky-Smith, el cual es una pieza fundamental para que el capítulo siguiente funcione; pues en el tercer capítulo se estudian las propiedades generales de los dominios de inyectividad para llegar, entre otras cosas, a motivar la definición de "módulo pobre", cuya existencia descansa fuertemente en el Teorema de Osofsy-Smith. El cuarto capítulo es el escenario en donde se construyen cuatro retículas y se demuestra que son isomorfas, un resultado esencial para poder apreciar el "perfil de inyectividad de un anillo". Finalmente, en el quinto capítulo usamos lo obtenido en los capítulos anteriores para definir *el perfil de inyectividad de un anillo* y conseguir distintas interpretaciones de este que nos ayudarán a entender un poco más su naturaleza; es aquí en donde el influjo de los primeros cuatro capítulos se manifiesta y se expresa en la descripción de ciertas verdades alcanzados por López-Permouth y Simental en el artículo antes citado.

Básicamente el contenido del capítulo 5 es el objetivo primario de la tesis. Este capítulo está conformado por cuatro secciones. En la sección 5.1 se observa que el perfil de inyectividad de un anillo es una retícula, y que a su vez está relacionada con todas las retículas del capítulo 4. La sección 5.2 contiene algunas propiedades retículares del perfil de inyectividad de un anillo, se demuestra por ejemplo que tal retícula es siempre modular y coatómica; también se muestra que para anillos particulares el perfil de inyectividad puede tener una estructura más compleja, pues en algunos casos sucede que el perfil de inyetividad es una retícula distributiva, o que es una retícula atómica, o que es una retícula con un único coatómo, o que es un conjunto numerable, o que es una retícula artiniana, o que es una retícula neteriana, o que es un conjunto linealmente ordenado, etc. Se introduce la noción de "anillo sin clase media" en la sección 5.3 y se exhiben algunos resultados acerca de estos anillos. Esta tesis llega a su fin en la sección 5.4, en donde se muestra que el perfil de un anillo puede ser un conjunto linealmente ordenado y se analizan algunas implicaciones de este hecho.

ÍNDICE

1. PRELIMINARES

1.1 Notación y Convenciones Generales

En el presente escrito se trabajara únicamente con anillos unitarios asociativos, por lo que al decir "R es un anillo" se entiende que R tiene elemento unitario y es asociativo. De hecho, a lo largo de la tesis, R va a denotar un anillo. Así mismo R-Mod denotará a la categoría de R-módulos izquierdos unitarios y $\mathsf{Hom}_R(A,B)$ denota al conjunto de R-morfismos que van del R-módulo A al R-módulo B. Con la intención de optimizar la lectura, cuando sea claro que estamos trabajando en R-Mod, en lugar de decir R-morfismo y R-módulo, a veces simplemente diremos morfismo y módulo, respectivamente. También llamaremos R-SSMod a la subclase de R-Mod que contiene a los módulos semisimples, mientras que R-Simp representa a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples y ξ denota a la clase de todos los módulos inyectivos. En ocasiones, si f y g son funciones, en vez de escribir $f \circ g$ sólo escribiremos fg. Hablando de funciones, nos reservaremos el término "función" sólo para las asignaciones cuyo dominio y contradominio sean conjuntos; mientras que emplearemos el término "funcional" para referirnos a asignaciones que se comporten como funciones pero que su dominio y/o contradominio sean (posiblemente) una clase propia. No obstante, seremos menos exigentes con los símbolos $\in$ y $\subseteq$, pues los usaremos sin reserva tanto en conjuntos como en clases propias. Así mismo nos valdremos de la notación conjuntista para describir algunas clases propias, esto con la intención de hacer más cómoda la notación.

Puesto que usaremos muchos símbolos que no están del todo universalmente aceptados, los pondremos en una lista. Sean X un conjunto, R y S anillos, $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía en R-Mod, $f \in \mathsf{Hom}_R(A,B)$ y $A, B, C \in$ R-Mod con C un submódulo de A.

$\mathcal{P}(X)$	:	Conjunto Potencia de X
${}_RM$	:	M es un R-módulo izquierdo
M_R	:	M es un R-módulo derecho
${}_RM_S$	:	${}_RM$, M_S y $\forall r \in R, \forall m \in M, \forall s \in S\big((rm)s = r(ms)\big)$
$A \leqslant B$	:	A es submódulo de B
$A \subseteq_e B$	:	A es esencial en B
$A \ll B$	:	A es superfluo en B
$A \underset{máx}{\leqslant} B$	:	A es un submódulo máximo de B
$A \cong B$	:	A y B son isomorfos
$A \oplus B$	:	A es un sumando directo de B
$E(A)$	:	$E(A)$ es una cápsula inyectiva de A que contiene a A
$\mathtt{J}(R)$	:	Radical de Jacobson de R, i.e. $\mathtt{J}(R) = \mathtt{Rad}({}_RR) = \mathtt{Rad}(R_R)$

$A \overset{f}{\cong} B$	:	f es un isomorfismo que va de A a B
$Ker(f)$	:	Núcleo de f
$Im(f)$	:	Imagen de f
$f : A \rightarrowtail B$	:	f es monomorfismo
$f : A \twoheadrightarrow B$	:	f es epimorfismo
$f : A \hookrightarrow B$	:	f es una inclusión
$i : C \to A$	:	Morfismo inclusión
$\pi : A \to A/C$	:	Epimorfismo natural
$\eta_i : M_i \rightarrowtail \bigoplus_{i\in I} M_i$	:	Monomorfismo canónico
$\pi_i : \prod_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow M_i$	:	Epimorfismo canónico

1.2 Un Poco de Teoría de Módulos

Aunque, por desgracia, no es posible escribir todos los conceptos y resultados que usaremos, en esta sección al menos dejamos un resumen de las definiciones y teoremas, de Teoría de Módulos, que se usan con mayor frecuencia ó bien que son la base de alguna demostración. Para obtener detalles de los teoremas que aquí aparecen se puede consultar [1], [2], [3] y [24].

Lema (1.1.1)
Sea $M \in R$-Mod y sea N un subgrupo de M. Si I es un ideal de R contenido en $\mathcal{A}nn(M) \doteq \{r \in R \mid \forall m \in M(rm = 0)\}$, entonces N es un R-submódulo de M si y sólo si N es un (R/I)-submódulo de M.

Lema (1.1.2)
Sean $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$ y $\alpha \in \mathsf{Hom}_R(M, L)$. Si α es un epimorfismo y además $Ker(\alpha) \subseteq Ker(\varphi)$, entonces existe un único $\beta \in \mathsf{Hom}_R(L, N)$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, two heads, "\alpha"'] & N \\ & L \arrow[u, dashed, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, β es un monomorfismo si y sólo si $Ker(\alpha) = Ker(\varphi)$, y β es un epimorfismo si y sólo si φ es un epimorfismo.

Lema (1.1.3)
Sea $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de R-morfismos. Existe un único morfismo $\bigoplus f_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$ tal que, para cada $j \in I$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, tail, "\eta_j"] & N_j \arrow[d, tail, "\overline{\eta}_j"] \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, dashed, "\bigoplus f_i"] & \bigoplus_{i\in I} N_i \end{tikzcd}$$

conmuta. Además $Im(\bigoplus f_i) = \bigoplus_{i\in I} Im(f_i)$ y $Ker(\bigoplus f_i) = \bigoplus_{i\in I} Ker(f_i)$.

Lema (1.1.4)
Sea $\{g_i : M_i \to N_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de R-morfismos. Existe un único morfismo $\prod g_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$ tal que, para cada $j \in I$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "g_j"] & N_j \\ \prod_{i \in I} M_i \arrow[u, two heads, "\pi_j"] \arrow[r, dashed, "\prod g_i"] & \prod_{i \in I} N_i \arrow[u, two heads, "\overline{\pi}_j"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Además $Im(\prod g_i) = \prod_{i \in I} Im(g_i)$ y $Ker(\prod g_i) = \prod_{i \in I} Ker(g_i)$.

Lema (1.1.5)
Sea $\{h_i : M_i \to N\}_{i \in I}$ una familia no vacía de R-morfismos. Existe un único morfismo $\bigoplus_{i \in I} h_i : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow N$ tal que, para cada $j \in I$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, "h_j"] \arrow[d, tail, "\eta_j"'] & N \\ \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[ur, dashed, "\bigoplus_{i \in I} h_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Además $Im(\bigoplus_{i \in I} h_i) = \sum_{i \in I} Im(h_i)$.

Lema (1.1.6)
Sea $\{f_i : M \to N_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de R-morfismos. Existe un único morfismo $\prod_{i \in I} f_i : M \longrightarrow \prod_{i \in I} N_i$ tal que, para cada $j \in I$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, dashed, "\prod_{i \in I} f_i"'] & N_j \\ & \prod_{i \in I} N_i \arrow[u, two heads, "\pi_j"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Además $Ker(\prod_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} Ker(f_i)$.

Definición
Sean $A, B, M, N, X \in$ R-Mod, sea $\alpha \in \mathsf{Hom}_R(A, B)$ y sea $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(A, M)$. Si $\beta \in \mathsf{Hom}_R(B, N)$ y $\psi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$ son tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, decimos que (ψ, β) *es el pushout de* (φ, α) si para cada par (ψ', α') con $\psi' \in \mathsf{Hom}_R(M, X)$, $\alpha' \in \mathsf{Hom}_R(B, X)$ y $\psi'\varphi = \beta'\alpha$ hay exactamente un $\sigma \in \mathsf{Hom}_R(N, X)$ tal que $\psi' = \sigma\psi$ y $\beta' = \sigma\beta$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, "\psi'"'] & N \arrow[dr, dashed, "\sigma"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

Lema (1.1.7)
Sean $A, B, M \in$ R-Mod, $\alpha \in \mathsf{Hom}_R(A, B)$ y $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(A, M)$. Si tomamos $N \doteqdot (M \oplus B)/U$ con $U \doteqdot \{(\varphi(a), -\alpha(a)) \mid a \in A\}$ y definimos

$$M \xrightarrow{\psi} N \qquad\qquad B \xrightarrow{\beta} N$$

$$m \mapsto (m, 0) + U \qquad\qquad b \mapsto (0, b) + U,$$

se tiene que (ψ, β) es un pushout de (φ, α).

Lema (1.1.8)
Sean $A, B, M \in$ R-Mod, $\alpha \in \mathsf{Hom}_R(A, B)$ y $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(A, M)$. Si (ψ, β) es un pushout de (φ, α), los siguientes enunciados son ciertos:

(1) Si α es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo), entonces ψ es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo).
(2) Si φ es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo), entonces β es un monomorfismo (respectivamente epimorfismo).

Definición
Sea $M \in$ R-Mod y sea

$$\mathcal{N}: \ 0 = B_0 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant \cdots \leqslant N_{k-1} \leqslant N_k = M$$

una cadena finita de submódulos de M. La cadena $\mathcal{N}$ se llama *serie de composición* de M si N_i/N_{i-1} es un módulo simple para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Decimos que M es de *longitud finita* si $M = 0$ ó M tiene una serie de composición.

Lema (1.1.9)
Sea $0 \to K \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta de R-módulos. Entonces M tiene longitud finita si y sólo si K y N tienen longitud finita.

Lema (1.1.10)
Para $M \in$ R-SSMod los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) M es una suma directa finita de módulos simples.
(2) M tiene longitud finita.
(3) M es finitamente generado.

Lema (1.1.11)
Si $M \in$ R-Mod y $A \leqslant M$, entonces $A \subseteq_e M$ si y sólo si para todo $0 \neq m \in M$ existe $r \in R$ de modo que $0 \neq rm \in A$.

Lema (1.1.12)
Sean K, L, M, $N \in$R-Mod. Si $K \leqslant L \leqslant M \leqslant N$ y $K \subseteq_e N$, entonces $L \subseteq_e M$.

Lema (1.1.13)
Si $K, N, M \in$ R-Mod y $K \leqslant N \leqslant M$, entonces $K \subseteq_e M$ si y sólo si $K \subseteq_e N$ y $N \subseteq_e M$.

Lema (1.1.14)
Si $M, N \in$ R-Mod, $B \subseteq_e N$ y $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, entonces $\varphi^{-1}(B) \subseteq_e M$.

Lema (1.1.15)
Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de R-módulos. Si $M \doteqdot \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $A_i \subseteq_e M_i$ para cada $i \in I$, entonces $A \doteqdot \sum_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} A_i$ y $A \subseteq_e M$.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod y sean $L, N \leqslant M$. Decimos que L *es un seudocomplemento de* N *en* M si L es máximo (en la retícula de submódulos de M) con la propiedad de que $L \cap N = 0$.

Lema (1.1.16)
Sean $M \in$R-Mod y $L, N \leqslant M$. Si $M = L \oplus N$, entonces L es un seudocomplemento de N en M.

Lema (1.1.17)
Sea $M \in$ R-Mod y sean $A, B \leqslant M$ de modo que $A \cap B = 0$. Entonces, existe A' un seudocomplemento de A en M tal que $B \subseteq A'$, y consecuentemente existe A'' un seudocomplemento de A' en M tal que $A \subseteq A''$.

Lema (1.1.18)
Sea $M \in$ R-Mod y sean $A, B \leqslant M$ tales que $A \cap B = 0$. Entonces, B es un seudocomplemento de A en M si y sólo si $(A + B)/B \subseteq_e M/B$.

Lema (1.1.19)
Si $M \in$ R-Mod y $N \leqslant M$, entonces N tiene seudocomplementos en M.

Definición
Sean $M \in$ R-Mod y $N \leqslant M$. Una *extensión esencial de* N *en* M es un submódulo L de M tal que $N \subseteq_e L$.

Definición
Si $M \in$ R-Mod y $N \leqslant M$, diremos que N es *cerrado*, ó que es *esencialmente cerrado, en* M si N no tiene extensiones esenciales, distintas de N, en M.

Definición
Sean $M \in$ R-Mod y $L \leqslant M$. Diremos que L es un *seudocomplemento en* M si existe $N \leqslant M$ tal que L es un seudocomplemento de N en M.

Lema (1.1.20)
Sea $M \in$R-Mod. Si $N \leqslant M$, entonces N es cerrado en M si y sólo si N es un seudocomplemento en M.

Lema (1.1.21)
Sean $M, N, L \in$R-Mod. Si L es cerrado en N y N es cerrado en M, entonces L es cerrado en M.

Lema (1.1.22) [Criterio de Baer]
Si R es un anillo y $M \in$ R-Mod, entonces M es inyectivo si y sólo si M es ${}_RR$-inyectivo.

Lema (1.1.23)
Si $M, N \in$ R-Mod y $N \subseteq_e M$, entonces $E(N) = E(M)$.

Lema (1.1.24)
Si I es un conjunto finito no vacío y $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos, entonces $E\big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big) = \bigoplus_{i\in I} E(M_i)$.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Decimos que M es *inescindible* si $M \neq 0$ y sus únicos sumandos directos son 0 y M.

Lema (1.1.25)
Si $Q \in$ R-Mod es inyectivo y distinto de cero, son equivalentes:

(1) Q es inescindible.
(2) Si $L \leqslant Q$ y $L \neq 0$, entonces $E(L) = Q$.
(3) Si $L \leqslant Q$ y $L \neq 0$, entonces L es uniforme.

Lema (1.1.26)
Sea $M \in$ R-Mod y sea $A \leqslant M$. Son equivalentes:

(1) M es artiniano.
(2) A y M/A son artinianos.
(3) Toda cadena descendente de submódulos de M se estaciona.
(4) Todo cociente de M es finitamente cogenerado.
(5) En cualquier conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$ no vacío de submódulos de M, existe un subconjunto finito $\{A_i \mid i \in I_0\}$ con la propiedad de que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I_0} A_i$.

Lema (1.1.27)
Sea $M \in$ R-Mod y sea $A \leqslant M$. Son equivalentes:

(1) M es neteriano.
(2) A y M/A son neterianos.
(3) Toda cadena ascendente de submódulos de M se estaciona.
(4) Todo submódulo de M es finitamente generado.
(5) En cualquier conjunto $\{A_i \mid i \in I\}$ no vacío de submódulos de M, existe un subconjunto finito $\{A_i \mid i \in I_0\}$ con la propiedad de que $\sum\limits_{i\in I} A_i = \sum\limits_{i\in I_0} A_i$.

Lema (1.1.28)
Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:

(1) R es neteriano izquierdo.
(2) Toda suma directa de R-módulos izquierdos inyectivos es inyectivo.
(3) Cualquier suma directa numerable de cápsulas inyectivas de R-módulos izquierdos simples es inyectivo.

Lema (1.1.29) [Lema de Nakayama]
Sea R un anillo y M un R-módulo derecho (respectivamente izquierdo). Si M es finitamente generado y A es un submódulo derecho (respectivamente izquierdo) de $\mathtt{J}(\mathrm{R})$, entonces $MA \ll M$ (respectivamente $AM \ll M$).

Lema (1.1.30)
Sea $M \in$ R-Mod. M es artiniano izquierdo y $\mathtt{Rad}(M) = 0$ si y sólo si M es semisimple y M es finitamente generado.

Lema (1.1.31)
Si $M \in$ R-Mod es artiniano izquierdo, entonces ${}_R\,(M/\mathtt{Rad}(M))$ es semisimple.

Lema (1.1.32)
Si R es un anillo tal que ${}_R\,(R/\mathtt{J}(R))$ es semisimple, entonces cada R-módulo izquierdo simple es isomorfo a un submódulo de ${}_R\,(R/\mathtt{J}(R))$.

Lema (1.1.33)
Si R es un anillo artiniano izquierdo (respectivamente neteriano izquierdo) y ${}_RM$ es finitamente generado, entonces ${}_RM$ es artiniano izquierdo (respectivamente neteriano izquierdo).

Definición
Sea $M \in$ R-Mod y sea $U \leqslant M$. Decimos que U es un *submódulo irreducible* si $U \neq M$ y para cualesquiera $A, B \leqslant M$ tales que $U \lneqq A$ y $U \lneqq B$ se tiene que $A \cap B \neq U$.

Lema (1.1.34)
Si R es un anillo, entonces R es neteriano izquierdo si y sólo si todo R-módulo izquierdo inyectivo es una suma directa de R-módulos izquierdos inyectivos inescindibles.

Lema (1.1.35)
Sea R un anillo y sea $A \doteqdot \{r \in \mathrm{R} \mid r \text{ no es invertible}\}$. Decimos que *R es local* si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) A es un ideal bilateral de R.
(2) A es el mayor ideal izquierdo (derecho) propio de R.
(3) $\mathtt{J}(\mathrm{R}) = A$.
(4) $\mathtt{J}(\mathrm{R})$ es un ideal izquierdo (derecho) máximo de R.
(5) R tiene un único ideal máximo.

Lema (1.1.36)
Si ${}_RR$ es un anillo artiniano izquierdo y ${}_RM$ es artiniano izquierdo (respectivamente neteriano izquierdo), entonces ${}_RM$ es neteriano izquierdo (respectivamente artiniano izquierdo).

Lema (1.1.37)
Son equivalentes para un anillo R:

(1) ${}_RR$ es semisimple.
(2) Todo módulo ${}_RM$ es semisimple.
(3) Todo módulo ${}_RM$ es inyectivo.

Definición
Sea $\zeta \subseteq$ R-Mod y supongamos que $A \in \zeta$. Decimos que ζ es cerrada bajo:

1.- *Isomorfismos*, si siempre que $B \in$ R-Mod y $B \cong A$ se sigue que $B \in \zeta$.
2.- *Submódulos*, si para todo $B \leqslant A$ se tiene que $B \in \zeta$.
3.- *Cocientes*, si ocurre que $A/B \in \zeta$ para cualquier $B \leqslant A$.
4.- *Sumas directas arbitrarias*, si para toda familia no vacía $\{B_i\}_{i \in I}$ de módulos en ζ sucede que $\bigoplus_{i \in I} B_i \in \zeta$.

Definición
Sea ζ una familia de R-módulos no vacía. Si ζ es cerrada bajo isomorfismos y submódulos, se dice que ζ es *hereditaria*. Cuando ζ sea cerrada bajo isomorfismos, cocientes y sumas directas arbitrarias, diremos que ζ es de *pretorsión*. Mientras que ζ se llamará de *pretorsión hereditaria*, si es hereditaría y de pretorsión.

1.3 Sobre Retículas y Clases

En esta sección se suponen conocidos los conceptos y resultados básicos de Teoría de Conjuntos, aunque nunca está de más tener a la mano alguna referencia, por ejemplo [4] es un excelente material de consulta. La presente sección contiene únicamente los conceptos de Teoría de Retículas necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos, puesto que en realidad necesitamos muy pocas cosas de Teoría de Retículas; citamos a [5], [6] y [7] como referencias para profundizar en esta y en otras áreas más. La sección termina con el enunciado del Axioma de Elección para Clases, el cual utilizaremos más adelante.

A menudo vamos a introducir conceptos que involucren tanto a conjuntos como a clases propias, con la intención de optimizar la lectura las futuras definiciones y resultados sólo se enunciarán para conjuntos; sin embargo, se entiende que todas ellas también aplican para clases propias si uno cambia las palabras "conjunto" por "clase" y "función" por "funcional".

Definición
Sean $(P,\leq)$ y $(Q,\sqsubseteq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Decimos que una función $\phi : P \to Q$ es un *morfismo (anti-morfismo) de orden* si para cualesquiera $a, b \in P$ tales que $a \leq b$, se tiene que $\phi(a) \sqsubseteq \phi(b)$ $(\phi(b) \sqsubseteq \phi(a))$.

Definición
Sean $(P,\leq)$ y $(Q,\sqsubseteq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Si $\phi : P \to Q$ es un morfismo (anti-morfismo) de orden biyectivo, diremos que ϕ es un *isomorfismo (anti-isomorfismo) de orden* si ϕ^{-1} es un morfismo (anti-morfismo) de orden. En este caso diremos que $(P,\leq)$ y $(Q,\sqsubseteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados isomorfos (anti-isomorfos).

Si ϕ es un morfismo (anti-morfismo) de orden , es costumbre decir que ϕ respeta (invierte) el orden. Notamos que una función biyectiva $\phi : P \to Q$, donde $(P,\leq)$ y $(Q,\sqsubseteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados, es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de orden si y sólo si para cualesquiera $a, b \in P$ se cumple que: $a \leq b \Leftrightarrow \phi(a) \sqsubseteq \phi(b)$ $\big(a \leq b \Leftrightarrow \phi(b) \sqsubseteq \phi(a)\big)$.

Definición
Una retícula es una cuarteta ordenada $(P,\leq,\wedge,\vee)$ tal que $(P,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, donde para cualesquiera $a, b \in P$ se se tiene que $a \wedge b$ es el ínfimo y $a \vee b$ es el supremo de $\{a, b\}$ en $(P,\leq)$, respectivamente.

Cuando $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula y P una clase propia, se dice que $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es una *gran retícula*. Las próximas definiciones, notaciones y propiedades que tengan que ver con retículas aplican también para grandes retículas, por lo que en los enunciados de estas sólo se escribirá la palabra "retícula" pero se entenderá que se tienen también para grandes retículas.

Definición
Sean $(P, \leq, \wedge_P, \vee_P)$ y $(Q, \sqsubseteq, \wedge_Q, \vee_Q)$ dos retículas. Una función $\phi : P \to Q$ se llama *morfismo (anti-morfismo) de retículas* si para cualesquiera $a, b \in P$ se cumple que $\phi(a \wedge_P b) = \phi(a) \wedge_Q \phi(b)$ $\big(\phi(a \wedge_P b) = \phi(a) \vee_Q \phi(b)\big)$ y que $\phi(a \vee_P b) = \phi(a) \vee_Q \phi(b)$ $\big(\phi(a \vee_P b) = \phi(a) \wedge_Q \phi(b)\big)$.

Como una retícula es en particular un conjunto parcialmente ordenado, uno podría esperar que los morfismos (anti-morfismos) de orden y de retículas se relacionen de alguna forma.

Lema (1.3.1)
Si $\phi : P \longrightarrow Q$ es un morfismo (anti-morfismo) de retículas, entonces ϕ es un morfismo (anti-morfismo) de orden.

Demostración:
Sean $(P, \leq, \wedge_P, \vee_P)$ y $(Q, \sqsubseteq, \wedge_Q, \vee_Q)$ retículas. Supongamos que $\phi : P \to Q$ es un morfismo (anti-morfismo) de retículas. Tomemos $a, b \in P$ de modo que $a \leq b$, buscamos mostrar que $\phi(a) \sqsubseteq \phi(b)$ $\big(\phi(b) \sqsubseteq \phi(a)\big)$. Como $a \wedge_P b = a$, entonces $\phi(a) = \phi(a \wedge_P b)$. Por otro lado $\phi(a \wedge_P b) = \phi(a) \wedge_Q \phi(b) \sqsubseteq \phi(b)$ $\big(\phi(b) \sqsubseteq \phi(a) \vee_Q \phi(b) = \phi(a \wedge_P b)\big)$, pues ϕ preserva (invierte) el orden. Así que $\phi(a) \sqsubseteq \phi(b)$ $\big(\phi(b) \sqsubseteq \phi(a)\big)$. ■

En adelante omitiremos las pruebas de los resultados que involucren a anti-morfismos, debido a que dichas demostraciones son análogas a las que se hacen para morfismos.

Definición
Un *isomorfismo (anti-isomorfismo) de retículas* es un morfismo (anti-morfismo) de retículas que es biyectivo.

Los isomorfismos (anti-isomorfismos) de retículas son menos exigentes que los isomorfismos (anti-isomorfismos) de orden, no obstante, como veremos después del lema siguiente, de igual fuerza cuando relacionan retículas.

Lema (1.3.2)
Si $\phi : P \longrightarrow Q$ es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de retículas, también lo es ϕ^{-1}.

Demostración:
Consideremos las retículas $(P, \leq, \wedge_P, \vee_P)$ y $(Q, \sqsubseteq, \wedge_Q, \vee_Q)$, y supongamos que son isomorfas a través de $\phi : P \longrightarrow Q$. Puesto que ϕ^{-1} es biyectiva, sólo resta probar que es un morfismo de retículas. Sean $a', b' \in Q$. Entonces hay únicos $a, b \in P$ tales que $\phi(a) = a'$ y $\phi(b) = b'$. Notamos que:

$$\phi^{-1}(a' \wedge_Q b') = \phi^{-1}\big(\phi(a) \wedge_Q \phi(b)\big)$$

$$\begin{aligned}&= \phi^{-1}\big(\phi(a \wedge_P b)\big)\\ &= a \wedge_P b\\ &= \phi^{-1}(a') \wedge_P \phi^{-1}(b')\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi^{-1}(a' \wedge_Q b') = \phi^{-1}(a') \wedge_P \phi^{-1}(b')$. De forma completamente análoga se ve que $\phi^{-1}(a' \vee_Q b') = \phi^{-1}(a') \vee_P \phi^{-1}(b')$. ■

Proposición (1.3.3)
Sea $\phi : P \longrightarrow Q$ una función, con $(P, \leq, \wedge_P, \vee_P)$ y $(Q, \sqsubseteq, \wedge_Q, \vee_Q)$ retículas. Entonces, ϕ es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de retículas si y sólo si ϕ es un isomorfismo (anti-isomorfismo) de orden.

Demostración:
$\Rightarrow$] Supongamos que ϕ es un isomorfismo de retículas. Por el Lema 1.3.2 tenemos que ϕ^{-1} es un morfismo de retículas también, luego del Lema 1.3.1 se desprende que tanto ϕ como ϕ^{-1} son morfismos de orden.

$\Leftarrow$] Si ϕ es un isomorfismo de orden, ocurre que ϕ y ϕ^{-1} son morfismos de orden. Ahora, sean $a, b \in P$. Puesto que $a \wedge_P b \leq a, b$ y ϕ preserva el orden, tenemos que $\phi(a \wedge_P b) \sqsubseteq \phi(a), \phi(b)$; por lo tanto $\phi(a \wedge_P b)$ es una cota inferior de $\{\phi(a), \phi(b)\}$ en $(Q, \sqsubseteq)$, debemos ver que es la mayor. Sea c' una cota inferior de $\{\phi(a), \phi(b)\}$ en $(Q, \sqsubseteq)$. Supongamos que c es el único elemento de P que bajo ϕ es c'. Como $c' \sqsubseteq \phi(a), \phi(b)$ y ϕ^{-1} respeta el orden, obtenemos que $c{=}\phi(c') \leq \phi^{-1}(\phi(a)) = a, \phi^{-1}(\phi(b)) = b$; de aquí que c es una cota inferior de $\{a, b\}$ en $(P, \leq)$, por lo que $c \leq a \wedge_P b$. Del hecho de que ϕ respeta el orden y $c \leq a \wedge_P b$, se sigue que $c' = \phi(c) \sqsubseteq \phi(a \wedge_P b)$. Así que $\phi(a \wedge_P b)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{\phi(a), \phi(b)\}$ en $(Q, \sqsubseteq)$; llegando de este modo a que $\phi(a \wedge_P b) = \phi(a) \wedge_Q \phi(b)$. Un razonamiento similar nos lleva a que $\phi(a \vee_P b) = \phi(a) \vee_Q \phi(b)$. ■

Así como hay conjuntos parcialmente ordenados cuya relación de orden los dota de propiedades y elementos especiales, también en retículas hay comportamientos de los ínfimos y supremos que hacen más rica su estructura y hay elementos que se destacan por su particular forma de relacionarse con los demás.

Definición
Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con elemento mayor $\hat{1}$ y con elemento menor $\hat{0}$. Si $a \in P \backslash \{\hat{0}\}$ y $b \in P \backslash \{\hat{1}\}$, entonces diremos que:

1.- a es un *átomo*, si no existe $z \in P$ tal que $\hat{0} < z < a$.
2.- b es un *coátomo*, si no existe $z \in P$ tal que $b < z < \hat{1}$.

En la definición anterior se tiene que a es un átomo si a es un elemento mínimo de $P \backslash \{\hat{0}\}$ en el orden $\leq$, y que b es un coátomo si b es máximo en $(P \backslash \{\hat{1}\}, \leq)$. Si $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula y X un subconjunto de P, es costumbre escribir $\wedge X$ y $\vee X$ para referirnos, si es que existen, al ínfimo y al supremo, respectivamente, de X en $(P, \leq)$.

Definición
Sean $(P, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula y $a, b, c \in P$. Decimos que $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es:

1.- *Completa*, si para todo $X \subseteq P$ existen $\wedge X$ y $\vee X$.
2.- *Distributiva*, si $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

3.- *Modular*, si siempre que $b \leq a$ ocurre que $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.
4.- *Artiniana*, si todo subconjunto no vacío de P tiene un elemento mínimo.
5.- *Neteriana*, si todo subconjunto no vacío de P tiene un elemento máximo.
Si $(P, \leq)$ tiene elemento mayor $\hat{1}$ y elemento menor $\hat{0}$:
6.- *Atómica*, si para cada $x \in P \backslash \{\hat{0}\}$ existe un átomo $a \in P$ de modo que $a \leq x$.
7.- *Coatómica*, si para cada $x \in P \backslash \{\hat{1}\}$ existe un coátomo $c \in P$ tal que $x \leq c$.

Lema (1.3.4)
Si $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula artiniana, entonces es atómica.

Demostración:
Supongamos que $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es artiniana. Para que $(P, \leq)$ sea atómica, en principio debe de tener elemento menor; pues bien, como $\varnothing \neq P \subseteq P$, por hipótesis P tiene un elemento mínimo, digamos m. Hacemos $m \doteqdot \hat{0}$.

Afirmación: m es el elemento menor de $(P, \leq)$.

Demostración: Sea $x \in P$. Puesto que $m \wedge x \in P$ y $m \wedge x \leq m$, la elección de m asegura que $m \wedge x = m$, por consiguiente $m \leq x$. □

Tomemos un $x \in P \backslash \{\hat{0}\}$. Consideremos al conjunto $A \doteqdot \{a \in P \backslash \{\hat{0}\} \mid a \leq x\}$. Debido a que $x \in A$ y $A \subseteq P$, la hipótesis nos garantiza que A tiene un elemento mínimo, al cual llamaremos a. Notamos que si $b \in P \backslash \{\hat{0}\}$ y $b \leq a$, del hecho de que $a \in A$ se seguiría que $b \leq x$, entonces $b \in A$ y $b \leq a$; sin embargo a es un elemento mínimo de A, así que $b = a$. Por lo tanto a es mínimo en $(P \backslash \{\hat{0}\}, \leq)$. Resumiendo, a es un átomo tal que $a \leq x$. ■

Definición
Sea $(P, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula y sea $\varnothing \neq L \subseteq P$. Si $a \wedge b \in L$ y $a \vee b \in L$ para cualesquiera $a, b \in L$, diremos que L es una *subretícula de* P. En el caso en que $(P, \leq, \wedge, \vee)$ sea una retícula completa, L se llamará *subretícula completa de* P si $\wedge X \in L$ y $\vee X \in L$ para todo $X \subseteq L$.

No es difícil ver que si L es una subretícula (completa) de $(P, \leq, \wedge, \vee)$, entonces $(L, \leq|_L, \wedge, \vee)$ es una retícula (completa). Sin embargo, un subconjunto arbitrario no vacío de una retícula puede tener estructura de retícula sin ser, necesariamente, una subretícula de la retícula original.

Definición
Si $(P, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula y $x, y \in P$ son tales que $x \leq y$, al conjunto $[x, y] \doteqdot \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ le llamaremos *intervalo de x a y en P*.

Lema (1.3.5)
Sea $(P, \leq, \wedge, \vee)$ una retícula y sean $x, y \in P$ tales que $x \leq y$. Entonces $[x, y]$ es una subretícula de P.

El Axioma de Elección está presente en gran variedad de resultados del Álgebra, ya sea en Teoría de Conjuntos para demostrar que toda función suprayectiva tiene inversa derecha como en Teoría de Módulos para probar que los grupos abelianos inyectivos son exactamente los divisibles[1]. Conforme ha avanzado la

[1] De hecho en [8] se prueba que el Axioma de Elección es equivalente a que todo $\mathbb{Z}$-módulo divisible es inyectivo.

matemática ha sido necesario recurrir a sistemas axiomáticos que admiten mayor generalidad y en los cuales no se pierden los resultados obtenidos con ZFC; por ejemplo, NBG (von Neumann-Bernays-Gödel)[2]. En NBG existe el Axioma de Elección (para Clases), y ya que en el capítulo 4 se hace uso de este axioma, lo enunciamos a continuación.

Axioma de Elección para Clases
Para cada funcional F existe una funcional G de modo que para cada C, si $C \in dom(F)$ y $F(C) \neq \emptyset$, entonces $G(C) \in F(C)$.

[2] Para detalles se puede ver [9].

2. UN TEOREMA DE OSOFSKY-SMITH

El objetivo de este capítulo es meramente llegar a demostrar el Teorema de Osofsky-Smith, tal teorema lo usaremos por primera y única vez en el capítulo 3. Así que puede parecer en principio que este teorema no tiene demasiadas implicaciones; sin embargo esto no es así, ya que, por ejemplo, con este teorema se puede probar que:

(1) Un anillo R es semisimple si y sólo si cada R-módulo cíclico es inyectivo.

(2) Si R es un anillo tal que cada R-módulo cíclico (respectivamente finitamente generado) es CS, entonces cada R-módulo cíclico (respectivamente finitamente generado) es una suma directa finita de R-módulos uniformes.

(3) Si R es un anillo y $N \in$ R-Mod es tal que todo cociente de cada submódulo cíclico de N es inyectivo, entonces N es semisimple.

Los detalles de las tres afirmaciones de arriba se encuentran en [10]. Para indagar más acerca del teorema de Osofsky-Smith se pueden consultar [11], [10], [13] y [14].

2.1 Módulos Uniformes

Como el titulo de la presente sección anuncia, introduciremos aquí los *módulos uniformes*, de los cuales estudiaremos algunas de sus propiedades básicas. Luego veremos que la longitud de una suma directa de submódulos no cero, de un módulo dado, está acotada por la longitud que pueda llegar a tener una cierta suma directa de submódulos uniformes del módulo en cuestión; lo que vendrá a motivar la definición de *dimensión uniforme* de un módulo. Para un estudio más amplio de los módulo uniformes, se sugiere ver [11] y [10].

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Diremos que M es un módulo *uniforme* si $M \neq 0$ y para todo $0 \neq A \leqslant M$ ocurre que $A \subseteq_e M$.

Antes de que veamos algunos ejemplos de módulos uniformes, observemos que de la definición anterior se obtiene de inmediato el siguiente lema.

Lema (2.1.1)
Sea $M \in$ R-Mod distinto de cero. Son equivalentes:

(1) M es uniforme.

(2) $\forall A \leqslant M, \forall B \leqslant M \Big((A \neq 0 \text{ y } B \neq 0) \Rightarrow A \cap B \neq 0 \Big)$.

Como primeros ejemplos de módulos uniformes tenemos: cualquier módulo simple, submódulos no cero de un módulo uniforme, los $\mathbb{Z}$-módulos cíclicos $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

(donde p es un número primo y n un entero positivo) y los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (para cualquier primo p). De hecho, el siguiente lema nos proveerá de más ejemplos.

Lema (2.1.2)
Sea $0 \neq M \in$ R-Mod tal que no contiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero. Entonces, cada submódulo no cero de M contiene un módulo uniforme (en partícular M debe tener un submódulo uniforme).

Demostración:

Supongamos que existe $N \leqslant M$ tal que $N \neq 0$ y N no contiene submódulos uniformes. Entonces N no es uniforme, por lo que deben haber $A_1, N_1 \leqslant N$ tales que $A_1 \neq 0 \neq N_1$ y $A_1 \cap N_1 = 0$. Como N_1 no es uniforme, podemos nuevamente encontrar $A_2, N_2 \leqslant N_1$ tales que $A_2 \neq 0 \neq N_2$ y $A_2 \cap N_2 = 0$. Notamos que si hubiese un $0 \neq x \in A_1 \cap A_2$, entonces $0 \neq x \in A_1 \cap N_1$, lo que es imposible; por lo tanto $A_1 \oplus A_2 = A_1 + A_2 \leqslant M$. Ahora, como N_2 tampoco es uniforme, existen $A_3, N_3 \leqslant N_2$ de modo que $A_3 \neq 0 \neq N_3$ y $A_3 \cap N_3 = 0$. En este punto observamos que $A_1 + A_2 + A_3 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \leqslant M$. Como este proceso nunca termina, se llega a que M contiene una suma directa infinita de A_i's, donde cada A_i es un submódulo de M distinto de cero; lo cual contradice la hipótesis. ■

Corolario (2.1.3)
Si $M \in$ R-Mod es distinto de cero y neteriano, entonces M contiene un módulo uniforme.

Demostración:

Sea $M \in$ R-Mod distinto de cero y neteriano. Como M es neteriano, para cada familia no vacía $\{A_i\}_{i \in I}$ de submódulos de M ocurre que existe un subconjunto finito I_0 de I de modo que $\sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I_0} A_i$ (Lema 1.1.27); por lo tanto M no contiene sumas (directas) infinitas de submódulos distintos de cero, del Lema 2.1.2 concluimos que M tiene un submódulo uniforme. ■

Lema (2.1.4)
Sea $M \in$R-Mod y sea U un submódulo uniforme de M. Si $K \leqslant M$ y $U \subseteq_e K$, entonces K es uniforme.

Demostración:

Supongamos $U \subseteq_e K \leqslant M$. Sean $A, B \leqslant K$ distintos de cero. Como $U \subseteq_e K$ y $0 \neq A \leqslant K$, entonces $A \cap U \neq 0$; de forma análoga se llega a que $B \cap U \neq 0$. Así $A \cap U$ y $B \cap U$ son submódulos distintos de cero de U, y ya que U es uniforme se sigue que $(A \cap B) \cap U \neq 0$; en particular $A \cap B \neq 0$. ■

Ahora bien, la proposición siguiente muestra que los módulos no triviales tales que cualquier submódulo no cero contiene un módulo uniforme (por ejemplo los módulos que satisfacen la hipótesis del Lema 2.1.2) tienen un submódulo esencial bastante particular.

Proposición (2.1.5)
Sea $0 \neq M \in$ R-Mod tal que cada submódulo no cero de M tiene un submódulo uniforme. Entonces, M contiene un módulo esencial U que es una suma directa de submódulos uniformes de M.

Demostración:

Sea Λ la familia de familias independientes no vacías de submódulos uniformes de M. Es inmediato comprobar que Λ es de carácter finito, por lo que del Lema de Tukey se infiere la existencia de una familia independiente máxima de submódulos uniformes de M; digamos $\{U_i \mid i \in \lambda\}$. Sea $U \doteq \oplus_{i\in\lambda} U_i$. Si $0 \neq N \leqslant M$, por hipótesis existe $V \leqslant N$ uniforme.

Caso 1] $V \in \{U_i \mid i \in \lambda\}$.

Bajo las hipótesis actuales se tiene que $U \cap V = V$, y como $V \neq 0$ (pues V es uniforme) llegamos a que $U \cap V \neq 0$. Luego $U \cap N \neq 0$.

Caso 2] $V \notin \{U_i \mid i \in \lambda\}$.

En este caso, la elección de la familia $\{U_i \mid i \in \lambda\}$ nos dice que $\{U_i \mid i \in \lambda\} \cup V$ no es independiente; de aquí que $U \cap V \neq 0$, y por lo tanto $U \cap N \neq 0$.

En ambos casos obtuvimos $U \cap N \neq 0$, lo cual conduce a que $U \subseteq_e M$. ■

Corolario (2.1.6)
Sea $0 \neq M \in$ R-Mod tal que no contiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero. Entonces, M contiene un módulo esencial U el cual es una suma directa finita de submódulos uniformes de M.

Demostración:

Por el Lema 2.1.2, M satisface las hipótesis de la Proposición 2.1.5; así que existe $U \subseteq_e M$ de modo que $U = \oplus_{i\in\lambda} U_i$, para algún conjunto no vacío λ, donde cada U_i es uniforme. Como M no contiene sumas directas infinitas de submódulos no cero, concluimos que λ es finito. ■

A continuación nos encontraremos con que el hecho de que un módulo contenga un submódulo esencial que sea una suma directa de submódulos uniformes nos brinda una caracterización interesante de sus submódulos esenciales. Además, si la anterior suma directa de submódulos uniformes es finita, obtendremos que la "longitud" de cualquier suma directa de submódulos no cero queda acotada por la longitud de esta suma directa de submódulos uniformes.

Lema (2.1.7)
Sea $M \in$ R-Mod tal que existe $U \subseteq_e M$ de modo que $U = \sum_{i\in I} U_i = \bigoplus_{i\in I} U_i$ con $U_i \leqslant M$ uniforme para cada $i \in I$. Si $N \leqslant M$, entonces $N \subseteq_e M$ si y sólo si $N \cap U_i \neq 0$ para cada $i \in I$.

Demostración:

$\Rightarrow$] Supongamos $N \subseteq_e M$. Si $N \cap U_i = 0$ para algún $i \in I$, entonces $U_i = 0$, lo cual es imposible debido a que U_i es uniforme.

$\Leftarrow$] Recíprocamente, supongamos ahora que $N \cap U_i \neq 0$ para cada $i \in I$.

Afirmación: $N \cap U \subseteq_e U$.

Demostración: Cada elemento de U es una suma finita de elementos en algunos U_i's, así por el Lema 1.1.11 basta mostrar que $N \cap \oplus_{i\in I_0} U_i \subseteq_e \oplus_{i\in I_0} U_i$ para cada subconjunto finito, no vacío, I_0 de I. Sea pues $I_0 \subseteq I$ de modo que $|I_0| = n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Sin perdida de generalidad es posible suponer que $I_0 = \{1, ..., n\}$. Haciendo inducción sobre n demostremos que $N \cap \oplus_{i=1}^n U_i \subseteq_e \oplus_{i=1}^n U_i$.

Base de Inducción] Como $0 \neq N \cap U_1 \leqslant U_1$ y U_1 es un módulo uniforme, concluimos que $N \cap U_1 \subseteq_e U_1$.

Hipótesis de Inducción] Supongamos $\{1, ..., k\} \subseteq I$ y $N \cap \bigoplus_{i=1}^{k} U_i \subseteq_e \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$.

Paso Inductivo] Supongamos que $\{1, \ldots, k, k+1\} \subseteq I$ y demostremos que $N \cap \oplus_{i=1}^{k+1} U_i \subseteq_e \oplus_{i=1}^{k+1} U_i$. Tomamos $0 \neq K \leqslant \oplus_{i=1}^{k+1} U_i$. Debemos mostrar que $K \cap \left(N \cap \oplus_{i=1}^{k+1} U_i\right) \neq 0$, lo que equivale a probar que $K \cap N \neq 0$. Ahora bien, como $K \neq 0$, sea $x \in K \backslash \{0\}$. Entonces $x = u_1 + \cdots + u_{k+1}$ para algunos $u_i \in U_i$, para cada $i \in \{1, ..., k+1\}$, y con $u_j \neq 0$ para algún $j \in \{1, ..., k+1\}$. Supongamos, sin perder generalidad, que $u_{k+1} \neq 0$. Debido a que $N \cap U_{k+1}$ y Ru_{k+1} son submódulos no cero del módulo uniforme U_{k+1}, se sigue que $N \cap Ru_{k+1} = \left(N \cap U_{k+1}\right) \cap Ru_{k+1} \neq 0$. Así que hay un $r \in R$ de modo que $0 \neq ru_{k+1} \in N$. Hagamos $y \doteq ru_1 + ... + ru_k$. Luego $0 \neq rx = y + ru_{k+1}$. Ahora consideramos los siguientes casos:

Caso 1] $y = 0$.
En este caso se tendría que $rx = ru_{k+1} \in N \cap K$, por lo tanto $N \cap K \neq 0$.

Caso 2] $y \neq 0$.
Aquí ocurre que $Ry \neq 0$. Así, como $Ry \leqslant \oplus_{i=1}^{k} U_i$, la hipótesis de inducción nos lleva a que $Ry \cap N = Ry \cap (N \cap \oplus_{i=1}^{k} U_i) \neq 0$. Entonces hay un $s \in R$ de modo que $0 \neq sy \in N$. Puesto que $sy, s(ru_{k+1}) \in N$ y $(sr)x \in K$, concluimos que $0 \neq s(rx) = sy + sru_{k+1} \in N \cap K$.

En ambos casos resulta $N \cap K \neq 0$, por lo que $N \cap \bigoplus_{i=1}^{k+1} U_i \subseteq_e \bigoplus_{i=1}^{k+1} U_i$. Por lo tanto $N \cap \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \subseteq_e \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ para cada $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, de este modo llegamos a que $N \cap U \subseteq_e U$. ❑

Como $N \cap U \subseteq_e U \subseteq_e M$, el Lema 1.1.13 nos dice que $N \cap U \subseteq_e M$; de donde, por el Lema 1.1.12, obtenemos que $N \subseteq_e M$. ■

Proposición (2.1.8)
Sea $M \in$ R-Mod tal que existe $U \subseteq_e M$ de modo que $U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ con $U_i \leqslant M$ uniforme para cada $i \in \{1, ..., n\}$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, cualquier suma directa de submódulos distintos de cero de M tiene a lo más n sumandos.

Demostración:

Asumamos que existe una familia independiente $\{K_i\}_{i \in \{1, \ldots, n, n+1\}}$ de $n+1$ submódulos no cero de M. Como $K_1 \cap \left(K_2 \oplus \cdots \oplus K_{n+1}\right) = 0$ y $K_1 \neq 0$, deducimos que $K_2 \oplus \cdots \oplus K_{n+1} \nsubseteq_e M$; del Lema 2.1.7 se infiere que existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\left(K_2 \oplus \cdots \oplus K_{n+1}\right) \cap U_{i_0} = 0$. Sin perder generalidad podemos suponer que $i_0 = 1$. Entonces $U_1 + K_2 + K_3 + \cdots + K_{n+1}$ es directa y por ello $K_2 \cap \left(U_1 \oplus K_3 \oplus \cdots \oplus K_{n+1}\right) = 0$. Puesto que $K_2 \neq 0$, se sigue que $U_1 \oplus K_3 \oplus \cdots \oplus K_{n+1} \nsubseteq_e M$. Nuevamente, del Lema 2.1.7, se desprende la existencia un $j_0 \in \{2, \ldots, n\}$ de modo que $\left(U_1 \oplus K_3 \oplus \cdots \oplus K_{n+1}\right) \cap U_{j_0} = 0$; digamos $j_0 = 2$. Luego $U_1 + U_2 + K_3 + \cdots + K_{n+1}$ es directa. Siguiendo el procedimiento anterior se llega a que $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + K_{n+1}$ es directa y por lo tanto a que $K_{n+1} \cap \bigoplus_{i=1}^{n} U_i = 0$. Sin embargo $K_{n+1} \neq 0$, así debe ocurrir que $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \nsubseteq_e M$, lo cual es imposible. ■

La proposición anterior nos provee, entre otras cosas, de una herramienta para "medir" a un módulo a través de sus submódulos uniformes; esto lo esclarecemos, y formalizamos, en el siguiente corolario (cuya demostración omitimos debido a que es un resultado directo de la Proposición 2.1.8) y en la definición que de él se obtiene.

Corolario (2.1.9) [Teorema de Reemplazo de Steinitz]
Si $M \in$R-Mod y existen $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m \leqslant M$ uniformes de modo que $\sum_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$, $\sum_{j=1}^{m} V_j = \bigoplus_{j=1}^{m} V_i$ y ambas sumas son esenciales en M, entonces $n = m$.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Diremos que M tiene *dimensión uniforme* n, lo cual se denotará por $u.dim(M) = n$, si $n \in \mathbb{N}$ y existe $U \subseteq_e M$ de modo que U es una suma directa de n submódulos uniformes de M. Si no hay tal n, entonces escribiremos $u.dim(M) = \infty$.

El Corolario 2.1.9 asegura que la definición de dimensión uniforme de un módulo está bien definida en el caso en que ésta es finita. Así, los módulos con dimensión uniforme 1 son exactamente los uniformes, mientras que $u.dim(M) = 0$ si y sólo si M es el R-módulo cero. De hecho, ya teniendo a mano la definición de dimensión uniforme, podemos parafrasear la Proposición 2.1.8 como:

Proposición (2.1.8')
Sea $0 \neq M \in$R-Mod. Si $u.dim(M) = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces toda suma directa de submódulos distintos de cero de M tiene a lo más n sumandos.

Nuestro próximo resultado justifica que escribamos $u.dim(M) = \infty$ cuando la dimensión uniforme de M no es un número natural. De hecho, ya hemos probado una parte considerable de la proposición siguiente.

Proposición (2.1.10)
Sea $0 \neq M \in$ R-Mod. Entonces $u.dim(M) = \infty$ si y sólo si M contiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero.

Demostración:

$\Leftarrow$] Es la contrapositiva de la Proposición 2.1.8'.

$\Rightarrow$] Supongamos que M no contiene una suma directa infinita de submódulos no cero. Entonces cada submódulo no cero de M contiene un módulo uniforme (esto es por la Proposición 2.1.2), en particular M mismo. Así que podemos tomar un $U_1 \leqslant M$ uniforme. Si $U_1 \nsubseteq_e M$, existe un $0 \neq U_2 \leqslant M$, que, por la Proposición 2.1.2, podemos suponer uniforme, tal que $U_1 \cap U_2 = 0$. Así $U_1 \oplus U_2 \leqslant M$. Si ocurre que $U_1 \oplus U_2 \nsubseteq_e M$, entonces hay un $0 \neq U_3 \leqslant M$ uniforme tal que $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = 0$. Luego $U_1 + U_2 + U_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \leqslant M$. En vista de la hipótesis, el procedimiento anterior tiene que parar en algún momento, por lo que debe de existir un $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tal que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \subseteq_e M$, donde cada U_i es un submóulo uniforme de M. Luego $u.dim(M) = n$. ■

Corolario (2.1.11)
Sea $0 \neq M \in$ R-Mod. Entonces $u.dim(M) = n$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, si y sólo si M no contiene sumas directas infinitas de submódulos distintos de cero.

A continuación veremos que la dimensión uniforme de un submódulo de un módulo dado se comporta como uno esperaría que lo hiciera.

Corolario (2.1.12)
Sean $M, N \in$ R-Mod distintos de cero tales que $N \leqslant M$. Entonces, (con las convenciones usuales sobre el símbolo ∞) es cierto que:
(1) $u.dim(N) \leq u.dim(M)$.
(2) Si $N \subseteq_e M$, entonces $u.dim(N) = u.dim(M)$.
(3) Si $N \nsubseteq_e M$, entonces $u.dim(N) < u.dim(M)$ (salvo en el caso en que $u.dim(N)$ y $u.dim(M)$ no son finitas).

Demostración:

[1] Sea $u.dim(M) = \kappa$.

Caso 1] $\kappa \in \mathbb{Z}^+$.
Si $u.dim(N) = \infty$, por la Proposición 2.1.10 tendríamos que N contiene una familia independiente infinita de submódulos distintos de cero; y así M también contendría a dicha familia, lo cual, según el Corolario 2.1.11, no puede ocurrir (en este caso). Por lo tanto $u.dim(N) = n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces N tiene un submódulo esencial que es una suma directa de n módulos uniformes, luego M contiene una suma directa con n sumandos distintos de cero; la Proposición 2.1.8' nos lleva a que $n \leq \kappa$.

Caso 2] $\kappa = \infty$.
Bajo la hipótesis de este caso, siempre se tiene que $u.dim(N) \leq u.dim(M)$ sin importar el valor de $u.dim(N)$.

$\therefore u.dim(N) \leq u.dim(M)$.

[2] Supongamos que $N \subseteq_e M$.

Caso 1] $u.dim(N) = \infty$.
De la Proposición 2.1.10 se sigue que N contiene una suma directa infinita de submódulos no cero, por lo que M también contiene a dicha suma; y así, usando de nuevo la Proposición 2.1.10, llegamos a que $u.dim(M) = \infty$.

Caso 2] $u.dim(N) = n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.
En este caso existen n submódulos uniformes N_i de N tales que su suma es directa y esencial en N. Entonces $\oplus_{i=1}^n N_i \subseteq_e N \subseteq_e M$, de donde se deduce, por el Lema 1.1.13, que $\oplus_{i=1}^n N_i \subseteq_e M$ y por tanto que $u.dim(M)=n$.

$\therefore u.dim(N) = u.dim(M)$.

[3] Supongamos que $N \nsubseteq_e M$. Si $u.dim(N) = \infty$, procediendo exactamente como en la prueba del Caso 1 de la demostración del inciso anterior llegamos a que $u.dim(M) = \infty$. Supongamos entonces que $u.dim(N) = n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, por lo tanto existen n submódulos uniformes N_i de N de modo que $\sum_{i=1}^n N_i = \oplus_{i=1}^n N_i \subseteq_e N$. Puesto que $N \nsubseteq_e M$, el Lema 1.1.12 asegura que $\oplus_{i=1}^n N_i \nsubseteq_e M$; así $N_0 \cap (\oplus_{i=1}^n N_i) = 0$ para algún $0 \neq N_0 \leqslant M$, de aquí que $\sum_{i=0}^n N_i$ es directa. Ya que $N_i \neq 0$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $\oplus_{i=0}^n N_i \leqslant M$, ya sea por la Proposición 2.1.8' si $u.dim(M)$ es finito ó bien por las convenciones adoptadas para el símbolo ∞ en el caso en que $u.dim(M) = \infty$, es posible concluir que $u.dim(M) \geq n + 1 > n$.

$\therefore u.dim(N) < u.dim(M)$. ■

2.2 Módulos CS

Comenzamos esta sección dando la definición de un módulo CS y la concluimos empleando dichos módulos para la demostración del teorema de Osofsky-Smith. Quizá vale la pena decir desde ahora que la demostración de este teorema no es sencilla ni tampoco corta, pero no por eso deja de ser una prueba memorable, tanto por su rigor como por su belleza.

Proposición (2.2.1)
Sea $M \in$ R-Mod. Son equivalentes:

(1) Si L es un seudocomplemento en M, entonces $L \oplus M$.
(2) Para todo $A \leqslant M$ existe $C \leqslant M$ tal que $C \oplus M$ y $A \subseteq_e C$.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea $A \leqslant M$. Tomemos $C \leqslant M$ una extensión esencial máxima de A en M.

Afirmación: C es un seudocomplemento en M.

Demostración: Por el Lema 1.1.20 basta probar que C es cerrado en M. Sea entonces $L \leqslant M$ de modo que $C \subseteq_e L$, y demostremos que $L = C$. Debido a que $A \subseteq_e C \subseteq_e L$, del Lema 1.1.13 se sigue que $A \subseteq_e L$. Puesto que C es máximo, en la retícula de submódulos de M, con la propiedad de que $A \subseteq_e C$, del hecho de que $C \leqslant L \leqslant M$ y $A \subseteq_e L$ se sigue que $L = C$. ❑

Habiendo probado que C es un seudocomplemento en M, el inciso (1) conduce a que $C \oplus M$. Obteniendo así que C es un submódulo de M de modo que $C \oplus M$ y $A \subseteq_e C$.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Sea L un seudocomplemento en M. Asumiendo (2) debe de haber un submódulo de M, digamos C, tal que $C \oplus M$ y $L \subseteq_e C$. Sin embargo el Lema 1.1.20 nos dice que L es cerrado en M, así que L no tiene extensiones esenciales (distintas de sí mismo) en M; por lo tanto $L = C$ y así $L \oplus M$. ■

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Si M satisface alguno de los incisos de la Proposición 2.2.1 diremos que M *es CS*. Mientras que M se llamará *completamente CS*, ó bien simplemente diremos que *es CCS*, si todo cociente de M es un módulo *CS*.

En el lema de abajo se pueden encontrar algunos ejemplos de módulos CS, de hecho, en el siguiente capítulo obtendremos varios ejemplos más.

Lema (2.2.2)
Sean $M, M' \in$ R-Mod.
(1) Si M es uniforme, entonces M es CS.
(1) Si M es semisimple, entonces M es CS.
(3) Si M es CS y N es un submódulo cerrado de M, entonces N es CS.
(4) Si M es CS y $M' \cong M$, entonces M' es CS.

Demostración:

[1] Asumamos que M es uniforme. Sea $L \leqslant M$ un seudocomplemento en M y veamos que $L \oplus M$. Si $L = 0$ claramente ocurre que $L \oplus M$, supongamos entonces $L \neq 0$. Como M es uniforme y $0 \neq L \leqslant M$, se tiene $L \subseteq_e M$. Ahora,

ya que L es un seudocomplemento en M, por el Lema 1.1.20 L es cerrado en M; así que $L = M$, y desde luego se cumple que $L \oplus M$.

[2] Si M es semisimple y $L \leqslant M$, entonces $L \oplus M$; esto ocurre para el caso particular en el que L es un seudocomplemento en M.

[3] Supongamos que M es CS y que $N \leqslant M$ es cerrado en M. Tomemos un seudocomplemento en N, digamos L, y mostremos que $L \oplus N$. Por el Lema 1.1.20 L es cerrado en N, luego del el Lema 1.1.21 se deduce que L es cerrado en M; como M es CS se sigue que $M = L \oplus K$ para algún $K \leqslant M$.

Afirmación: $N = L \oplus (K \cap N)$.

Demostración: Debido a que $L \leqslant N$, por la Ley Modular se tiene que

$$L + (K \cap N) = (L + K) \cap N.$$

Pero $L+K = M$ y $N \leqslant M$, así que $L+(K \cap N) = N$. Además $L \cap (K \cap N)=0$ debido a que $L \cap K = 0$. Entonces $N = L \oplus (K \cap N)$. ❑

Por supuesto de la afirmación anterior obtenemos que $L \oplus N$.

[4] Supongamos que M es CS y que $M' \overset{\varphi}{\cong} M$. Veremos que M' satisface el inciso 2 de la Proposición 2.2.1. Sea $A' \leqslant M'$. El que M sea CS implica que existen $C, D \leqslant M$ de modo que $M = C \oplus D$ y $\varphi(A') \subseteq_e C$. Ahora, del hecho de que $\varphi|_{\varphi^{-1}(C)} \in \mathsf{Hom}_R\left(\varphi^{-1}(C), C\right)$ y $\varphi|_{\varphi^{-1}(C)}(A') = \varphi(A') \subseteq_e C$, se desprende, al usar el Lema 1.1.14, que $A' \subseteq_e \varphi^{-1}(C)$. Por otro lado, no es difícil ver que $M' = \varphi^{-1}(C) \oplus \varphi^{-1}(D)$. Así $\varphi^{-1}(C) \oplus M'$ y $A' \subseteq_e \varphi^{-1}(C)$. ■

Por el Corolario 2.1.11 sabemos que un módulo no cero tiene dimensión uniforme finita si y sólo si tal módulo no contiene sumas directas infinitas de módulos no triviales, bueno pues a continuación veremos que en el caso en el que dicho módulo sea CS se obtiene una mejor descripción del módulo en cuestión.

Lema (2.2.3)
Sea $M \in$ R-Mod un módulo CS. Entonces, $u.dim(M) \in \mathbb{N}$ si y sólo si M es una suma directa finita de módulos uniformes.

Demostración:

$\Leftarrow$] Si $n \in \mathbb{N}$ y M es una suma directa de n módulos uniformes, del hecho de que $M \subseteq_e M$, se sigue que $u.dim(M) = n$.

$\Rightarrow$] Si $u.dim(M) = 0$, entonces $M = 0$ y así, en este caso, M es la suma directa de cero módulos uniformes. Supongamos entonces $u.dim(M) \in \mathbb{Z}^+$ (de donde se obtiene en particular que $M \neq 0$), y por inducción sobre $u.dim(M)$ mostremos que M es una suma directa finita de módulos uniformes.

Base de Inducción] Si $u.dim(M) = 1$, entonces M es uniforme y no hay nada más que probar.

Hipótesis de Inducción] Supongamos que para todo R-módulo $\bar{M}$ que sea un módulo CS y tal que $u.dim(\bar{M}) \leq k$, se tiene $\bar{M}$ es una suma directa finita de módulos uniformes.

Paso Inductivo] Asumamos que $u.dim(M) = k + 1$. Por el Corolario 2.1.11 M no contiene sumas directas infinitas de submódulos distintos de cero, así que, como consecuencia del Lema 2.1.2, todo submódulo no cero de M tiene un submódulo uniforme; entonces podemos tomar un $A \leqslant M$ uniforme. Ya que M es CS, por la Proposición 2.2.1 inciso 2 hay $U_0, M' \leqslant M$ tales que $M = U_0 \oplus M'$ y $A \subseteq_e U_0$. Usando el Lema 2.1.4 obtenemos que U_0 es uniforme. Ahora bien, los Lemas 1.1.16 y 1.1.20 implican que M' es cerrado en M, pero M es CS; así que, por el Lema 2.2.2 inciso 3, M' es CS también. Notamos que si $M' \subseteq_e M$, como $U_0 \cap M' = 0$, entonces $U_0 = 0$; lo cual es absurdo debido a que U_0 es uniforme. Luego $M' \nsubseteq_e M$, y así de la Proposición 2.1.12 inciso 3 se deprende que $u.dim(M') < u.dim(M)$. Hemos llegado así a que M' es CS y $u.dim(M') \leq k$, empleando la Hipótesis de Inducción se tiene entonces que existe $t \in \mathbb{N}$ y existen $U_1, \ldots, U_t \leqslant M'$ uniformes tales que $M' = \bigoplus_{i=1}^t U_i$. Por lo tanto $M = \bigoplus_{i=0}^t U_i$, para un cierto $t \in \mathbb{N}$, donde $U_0, U_1, \ldots, U_t \leqslant M$ son todos uniformes. ■

Antes de ir al teorema de Osofsky-Smith introducimos una clase de módulos a la cual, en vista de que de ella se obtienen resultados significativos al aplicar el teorema de Osofsy-Smith, le llamaremos *Clase de Osofsky-Smith*, o, para abreviar, simplemente *Clase OS*.

Definición

Sea P una clase de R-módulos finitamente generados tal que satisface las siguientes propiedades (en adelante por "P-*submódulo*" entenderemos "*submódulo que pertenece a* P"):

(P_1) Si $N \in$ R-Mod y $N \cong M/M'$ para algún $M \in \mathsf{P}$, entonces $N \in P$.
(P_2) Si $M \in \mathsf{P}$ y N es un P-submódulo de un cociente de M, digamos de M/M', entonces existe N' un P-submódulo de M tal que, si $\pi : M \to M/M'$ es el epimorfismo natural, $\pi(N') = N$.

A una clase de R-módulos finitamente generados que tenga las propiedades de la clase P se le llamará *Clase OS*.

Cualquier clase de módulos finitamente generados que sea cerrada bajo isomorfismos, submódulos y cocientes, es una clase OS. Así la clase de módulos semisimples finitamente generados es una clase OS, también la clase de todos los módulos finitamente generados es OS y así mismo es una clase OS la clase de todos los módulos cíclicos; de hecho estaremos interesados en esta última clase, por lo que establecemos con todo detalle dicha afirmación a continuación.

Lema (2.2.4)

Si P es la clase de los R-módulos cíclicos, entonces P es una Clase OS.

Demostración:

[P_1] Sea $M \in$ R-Mod tal que $M = Rx$ para algún $x \in M$. Si $M' \leqslant M$, entonces ${}_R(M/M')$ es cíclico, pues la clase $x + M'$ lo genera; luego, si $N \in$ R-Mod y $\varphi : M/M' \to N$ es un isomorfismo, entonces $\varphi(x)$ genera a ${}_RN$, por lo que N es cíclico.
[P_2] Tomamos $M \in$ R-Mod tal que $M = Rx$ para algún $x \in M$, $M' \leqslant M$ y $N \leqslant M/M'$. Si N es cíclico, entonces hay un $y + M' \in M/M'$ de modo que $N = R(y + M')$, y observamos que Ry es un submódulo cíclico de M con la propiedad de que $\pi(Ry) = N$. ■

Concluimos este capítulo con la demostración del tan citado teorema de Osofsky-Smith, que aunque el siguiente teorema no es la versión original de dicho teorema, al tomar la clase de los módulos cíclicos éste engloba el resultado obtenido por Barbara Osofsky y Patrick Smith en *Cyclic Modules Whose Quotients Have All Complement Submodules Direct Summands* publicado en el año 1991.

Teorema (2.2.5) [Osofsky-Smith]
Sean P una Clase OS de R-módulos y $M \in \mathsf{P}$. Si todo P-submódulo de M es CCS, entonces M es una suma directa finita de módulo uniformes.

Demostración:

Asumamos que cualquier P-submódulo de M es CCS. De la hipótesis se deduce que M es CCS, y por lo tanto M resulta ser un módulo CS; llegando así, gracias al Lema 2.2.3, a que es suficiente probar que $u.dim(M) \in \mathbb{N}$ para asegurar la afirmación del teorema. Supongamos que $u.dim(M) = \infty$ (entonces $M \neq 0$). Así las cosas, por la Proposición 2.1.10, deducimos que M debe contener una suma directa infinita de submódulos distintos de cero, supongamos que $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}^+} M_i$ es dicha suma. Al ser M un módulo CS, el que M_1 sea un submódulo de M implica la existencia de $A_1, B_1 \leqslant M$ tales que $M_1 \subseteq_e A_1$ y $M = A_1 \oplus B_1$. Notamos que $M_1 \cap (A_1 \cap \oplus_{i=2}^{\infty} M_i) = 0$, así, del hecho de que $M_1 \subseteq_e A_1$, se tiene entonces que $A_1 \cap \oplus_{i=2}^{\infty} M_i = 0$; de esto y de consiconsiderar al morfismo

$$\begin{aligned} \pi_2 : A_1 \oplus B_1 &\to B_1 \\ a + b &\longmapsto b \end{aligned}$$

se obtiene que $Ker\left(\pi_2|_{\oplus_{i=2}^{\infty} M_i}\right) = Ker(\pi_2) \cap \oplus_{i=2}^{\infty} M_i = A_1 \cap \oplus_{i=2}^{\infty} M_i = 0$, entonces $\pi_2|_{\oplus_{i=2}^{\infty} M_i}$ es inyectiva y es así que podemos suponer $\oplus_{i=2}^{\infty} M_i \subseteq B_1$. Como B_1 es un seudocomplemento en M (por el Lema 1.1.16) y M es CS, el Lema 1.1.20 y el Lema 2.2.2 inciso 3 implican que B_1 es CS. Teniendo en cuenta que $M_2 \leqslant B_1$ y que B_1 es CS, se deriva la existencia de $A_2, B_2 \leqslant B_1$ con la propiedad de que $B_1 = A_2 \oplus B_2$ y $M_2 \subseteq_e A_2$; procediendo como antes se llega a que $\oplus_{i=3}^{\infty} M_i \subseteq B_2$. Siguiendo la línea de razonamiento anterior es posible obtener una familia $\{A_n, B_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de submódulos no cero de M con la peculiaridad de que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ lo siguiente es cierto:

[1] $M = A_1 \oplus B_1$.

[2] $B_n = A_{n+1} \oplus B_{n+1}$.

[3] $M_n \subseteq_e A_n$.

[4] $\oplus_{i=n+1}^{\infty} M_i \subseteq B_n$.

[5] $M = (\oplus_{i=1}^{n} A_i) \oplus B_n$.

Además, como $M \in \mathsf{P}$ y $A_1 \cong M/B_1$ (por [1]), la propiedad P_1 de la clase P nos dice que $A_1 \in \mathsf{P}$; de manera análoga se obtiene que $B_1 \in \mathsf{P}$. Ahora bien, puesto que $B_2 \cong B_1/A_2$ (a causa de [2]) y $B_1 \in \mathsf{P}$, por la propiedad P_1 ocurre que $B_2 \in \mathsf{P}$; de forma similar se llega a que $A_2 \in \mathsf{P}$. Un razonamiento inductivo nos lleva a inferir que:

[6] $\forall n \in \mathbb{Z}^+ (A_n, B_n \in \mathsf{P})$.

Por otro lado, recordando que P es una clase de módulos finitamente generados, los puntos [3] y [6] implican que cada A_n es un módulo distinto de cero finitamente generado, así que:

[7] $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \exists C_n \leqslant A_n (C_n$ es un submódulo máximo de $A_n)$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ tomamos un $C_n \leqslant A_n$ máximo y hacemos $S_n \doteqdot A_n/C_n$. Se ve que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} C_n$ es directa y que cada S_n es simple. Si $\bar{M} \doteqdot M/\oplus_{n\in\mathbb{Z}^+} C_n$, entonces $\bar{M}$ es CS debido a que M es CCS. De [5] y haciendo inducción sobre n, no es difícil notar que:

$$[8]\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \left(\bar{M} = \frac{(\bigoplus_{i=1}^n A_i) \oplus B_n}{(\bigoplus_{i=1}^n C_i) \bigoplus (\bigoplus_{i=n+1}^\infty C_i)} \cong (\bigoplus_{i=1}^n S_i) \bigoplus \left(\frac{B_n}{\bigoplus_{i=n+1}^\infty C_i} \right) \right).$$

Como cada S_n es un módulo simple, $\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} S_i$ es semisimple; de esto y de [8] se sigue que $\bar{M}$ contiene un submódulo semisimple, digamos S, isomorfo a $\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} S_i$. Con la finalidad de agilizar el desarrollo de esta demostración y, a la vez, de hacer más amigable la notación asumiremos que $\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} S_i \doteqdot S \leqslant \bar{M}$. Sea N una extensión esencial máxima de S en $\bar{M}$. Observamos que N es cerrado en $\bar{M}$: Si $L \leqslant \bar{M}$ es tal que $N \subseteq_e L$, entonces $S \subseteq_e N \subseteq_e L$ y así (en virtud del Lema 1.1.12) $S \subseteq_e L$, luego la elección de N obliga a que $L \subseteq N$ y es por esto que $L = N$. Ya que N es cerrado en $\bar{M}$ y $\bar{M}$ es CS, ocurre que $N \oplus \bar{M}$. En este punto hacemos las siguientes observaciones:

Afirmación 1] $N \in \mathsf{P}$ y N es CCS.

Demostración: Debido a que $N \oplus \bar{M}$ y $\bar{M} = M/\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i$, se sigue que

$$N \cong (M/\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i) / \left(N''/\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i\right) \cong M/N''$$

para algún $N'' \leqslant M$ de modo que $\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i \leqslant N''$. Entonces $N \cong M/N''$, y así la propiedad P_1 nos lleva a concluir que $N \in \mathsf{P}$. Ahora, como $N \cong M/N''$, todo cociente de N será isomorfo a un cociente de M; usando que M es CCS y considerando al Lema 2.2.2 inciso 4 se sigue que toda copia de cada cociente de M es CS, así cualquier cociente de N resulta ser CS y por lo tanto N es un módulo CCS. ❑

Afirmación 2] Todo P-submódulo de N es CCS.

Demostración: Sea A un P-submódulo de N. Como $N \leqslant \bar{M} = M/\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i$, A es un P-submódulo de $M/\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i$; así la propiedad P_2 asegura que hay un P-submódulo de M (el cual, por hipótesis, será CCS), digamos A', tal que, si $\pi : M \to M/\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} C_i$ es el epimorfismo canónico, $\pi(A') = A$. Entonces $A'/Ker(\pi|_{A'}) \cong A$ y así todo cociente de A es isomorfo a un cociente de A', al tener en cuenta el Lema 2.2.2 inciso 4 y que A' es CCS, notamos que esto se traduce en que cada cociente de A es CS. ❑

Afirmación 3] Si $T \leqslant S$ y T es finitamente generado, entonces $T \oplus N$.

Demostración: Sea $T \leqslant S$ de modo que T es finitamente generado. Debido a que $T \leqslant S$ y a que S es semisimple, T es semisimple también. Entonces T es semisimple y finitamente generado, por lo que T es una suma directa finita de módulos simples. Por otro lado, en vista de que $T \leqslant S{=}\oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} S_i$, se tiene que $T \cong \oplus_{j\in J} S_j$ para algún $J \subseteq \mathbb{Z}^+$; pero como T es una suma directa finita de módulos simples, debe ocurrir que J es finito, entonces T es isomorfo a un sumando directo de $\oplus_{i=1}^n S_i$ para un cierto $n \in \mathbb{Z}^+$ y así, de [8], se infiere que $\bar{M} = T \oplus T'$ para algún $T' \leqslant \bar{M}$. En resumen $\bar{M} = T \oplus T'$ y $T \leqslant N \leqslant \bar{M}$, por lo tanto $N = T \oplus (T' \cap N)$. ❑

Expresemos a $\mathbb{Z}^+$ como una unión ajena de $\aleph_0$ subconjuntos de cardinalidad

$\aleph_0$ cada uno[1], sea $\mathbb{Z}^+ = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^+} Z_j$ una expresión de tal tipo. Para cada $j \in \mathbb{Z}^+$ definimos $S'_j \doteqdot \oplus_{i\in Z_j} S_i$. Entonces $S = \oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} S'_j$. Ahora, si $j \in \mathbb{Z}^+$, tomemos N_j una extensión esencial máxima de S'_j en N. Se puede mostrar, justo como antes hicimos, que cualquier N_j es cerrado en N; por consiguiente, debido a que N es CS por la Afirmación 1, sucede que $N_j \oplus N$. Ahora bien, la Afirmación 1 asegura que $N \in \mathsf{P}$, entonces usando la propiedad P_1 y que todo N_j es tal que $N_j \oplus N$, llegamos a que $N_j \in \mathsf{P}$ para cada $j \in \mathbb{Z}^+$.

Afirmación 4] $S \cap N_j = S'_j$ para cada $j \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $j \in \mathbb{Z}^+$. Siempre ocurre que $S'_j \subseteq S \cap N_j$, por ello únicamente debemos probar que $S \cap N_j \subseteq S'_j$. Tomemos pues un $0 \neq x_1 \in S \cap N_j$. Como $x_1 \in S = \oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} S'_i$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$, existen distintos $S'_{i1}, \cdots, S'_{in} \leqslant S$ y existen $0 \neq a_{ik} \in S'_{ik}$, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, de modo que

$$\underbrace{x_1 = a_{i1} + \cdots + a_{in}}_{(*)}$$

Debido a que $S'_j \subseteq_e N_j$ y $x_1 \in N_j$, del Lema 1.1.11 se deriva que existe $r \in$R tal que $0 \neq rx_1 \in S'_j$. Entonces $(*)$ y la definición de S'_j nos llevan a concluir que $ra_{ik} \in S'_{ik} \cap S'_j$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ya que $S'_l \cap S'_j = \{0\}$ para todo $l \neq j$ y $0 \neq rx_1 = ra_{i1} + \cdots + ra_{in}$, debe de haber un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $ik = j$ y por consiguiente $a_{ik} \in S'_j$; sin perdida de generalidad podemos suponer que $a_{i1} \in S'_j$. Luego $0 \neq x_2 \doteqdot (x_1 - a_{i1}) = \sum_{t=2}^{n} a_{it} \in S \cap N_j$. Avanzando con x_2 de la misma manera en que hicimos con x_1 podemos conseguir que $a_{i2} \in S'_j$. Entonces, por inducción finita, se ve que $a_{ik} \in S'_j$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$; por lo tanto $x_1 \in S'_j$. ◻

Para cada $j \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $S'_j \subseteq_e N_j \leqslant N$, como $\sum_{j\in\mathbb{Z}^+} S'_j = \oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} S'_j = S$, el Lema 1.1.15 nos lleva a que $S \leqslant \oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} N_j \leqslant N$ y así $(\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} N_j)/S \leqslant N/S$; pero N/S es CS a causa de la Afirmación 1, entonces existe $N'/S \oplus N/S$ tal que

$$\left(\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} N_j\right)/S \subseteq_e N'/S.$$

Como $N \in \mathsf{P}$ (por Afirmación 1), de la propiedad P_1 se deriva que $N/S \in \mathsf{P}$, lo cual, usando que $N'/S \oplus N/S$ y, nuevamente, la propiedad P_1, conduce a que $N'/S \in \mathsf{P}$. Así $N \in \mathsf{P}$ y N'/S es un P-submódulo de N/S, entonces la propiedad P_2 implica que existe A un P-submódulo de N tal que $\pi(A) = N'/S$ (donde $\pi : N \longrightarrow N/S$ es el epimorfismo natural); de aquí que $A + S = N'$.

Afirmación 5] $A \cap S'_j \neq 0$ para cada $j \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $j \in \mathbb{Z}^+$. Como $A \cap S \leqslant S$ y S es semisimple, se tiene que $S = (A \cap S) \oplus V$ para algún $V \leqslant S$. Ahora, no es difícil ver que $A \cap V = 0$ ni que $A \oplus V = A + S$, entonces $S'_j \leqslant (A + S =) A \oplus V$. Si consideramos al epimorfismo

$$\begin{aligned} \pi_1 : A \oplus V &\to V \\ a + v &\longmapsto v \end{aligned}$$

obtenemos: $Ker(\pi_1|_{S'_j}) = A \cap S'_j$. Supongamos $A \cap S'_j = 0$. Como $S'_j = S \cap N_j$ (por la Afirmación 4), llegamos entonces a que

$$S'_j \cong \pi_1(S'_j) = \pi_1(S \cap N_j) \leqslant \pi_1(S) \cap \pi_1(N_j) \leqslant \pi_1(N_j).$$

[1] Por ejemplo, si hacemos $\mathsf{I}_0 \doteqdot \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}$ y definimos $\mathsf{I}_n \doteqdot \{2^n \cdot x \mid x \in \mathsf{I}_0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, entonces $|\mathsf{I}_n| = \aleph_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{I}_n \cap \mathsf{I}_m = \varnothing$ si $n \neq m$ y $\mathbb{Z}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{I}_n$.

Por definición S'_j es una suma directa infinita de módulos simples, del Lema 1.1.10 se sigue que S'_j no tiene longitud finita. Ahora, sabemos que $N_j \in \mathsf{P}$, por ello N_j es finitamente generado y por consiguiente $\pi_1(N_j)$ también lo es, entonces $\pi_1(N_j)$ es semisimple (pues $\pi_1(N_j) \leqslant V \leqslant S$ y S es semisimple) y finitamente generado; por lo tanto $\pi_1(N_j)$ es de longitud finita (Lema 1.1.10) y así cualquiera de sus submódulos también (esto por el Lema 1.1.9), en particular $\pi_1(S'_j)$ debe tener longitud finita. En vista de que $\pi_1(S'_j)$ tiene longitud finita y $S'_j \cong \pi_1(S'_j)$, del Lema 1.1.9 se obtiene que S'_j tiene longitud finita, lo cual, según vimos, es imposible. ❑

De la Afirmación 5 se obtiene que $A \cap S'_j$ es un módulo semisimple distinto de cero para cualquier $j \in \mathbb{Z}^+$, entonces, para cada $j \in \mathbb{Z}^+$, podemos tomar un T_j submódulo simple de $A \cap S'_j$; de este modo $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j$ es un submódulo semisimple de A. Por otra parte, como A es un P-submódulo de N, la Afirmación 2 dice que A es CCS y por lo tanto A es CS; ya que $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j \leqslant A$, debe de existir entonces un $Y \oplus A$ tal que $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j \subseteq_e Y$.

Afirmación 6] $Y \nsubseteq S$.

Demostración: Supongamos que $Y \subseteq S$. Entonces $Y \leqslant S$, por lo tanto Y es semisimple. Ahora, como $A \in \mathsf{P}$ y $Y \oplus A$, la propiedad P_1 nos lleva a que $Y \in \mathsf{P}$ y por lo tanto a que Y es finitamente generado. Luego Y es semisimple y finitamente generado, así que Y tiene longitud finita (Lema 1.1.10); como $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j \leqslant Y$, se sigue que $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j$ tiene longitud finita también. Entonces $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j$ es semisimple y de longitud finita, de este modo el Lema 1.1.10 conduce a que $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j$ es una suma directa finita de módulos simples, lo que es absurdo. ❑

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, del Lema 1.1.10 se obtiene que $\oplus_{i=1}^n T_i$ es finitamente generado y de este modo la Afirmación 3 nos lleva a concluir que $\oplus_{i=1}^n T_i \oplus N$.

Afirmación 7] $Y \cap S \cap \bigoplus_{i=1}^n N_i = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $\oplus_{i=1}^n T_i \subseteq Y \cap S \cap \oplus_{i=1}^n N_i$, sólo mostraremos que $Y \cap S \cap \oplus_{i=1}^n N_i \subseteq \oplus_{i=1}^n T_i$. Del hecho de que $S = \oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} S'_i \leqslant \oplus_{i\in\mathbb{Z}^+} N_i$ y de que $S'_i \subseteq N_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que $S \cap \oplus_{i=1}^n N_i \subseteq \oplus_{i=1}^n S'_i$, por lo tanto $Y \cap S \cap \oplus_{i=1}^n N_i \subseteq Y \cap \oplus_{i=1}^n S'_i$. Veremos que $Y \cap \oplus_{i=1}^n S'_i \subseteq \oplus_{i=1}^n T_i$, para ello sea $x \in Y \cap \oplus_{i=1}^n S'_i$. Por un lado $x \in \oplus_{i=1}^n S'_i$, así que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $x_i \in S'_i$ de modo que

$$x = x_1 + \cdots + x_n.$$

Por otro lado, si $i \in \{1, \dots, n\}$, como $T_i \leqslant S'_i$ y S'_i es semisimple, sucede que $S'_i = T_i \oplus V_i$ para algún $V_i \leqslant S'_i$; de aquí que $x_i = t_i + v_i$ para ciertos $t_i \in T_i$ y $v_i \in V_i$. Luego $x - (t_1 + \cdots + t_n) = (v_1 + \cdots + v_n) \in Y$. Si $v_1 + \cdots + v_n \neq 0$, como $\oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j \subseteq_e Y$, por el Lema 1.1.11 tendría que haber un $r \in \mathsf{R}$ tal que $0 \neq r(v_1 + \cdots + v_n) \in \oplus_{j\in\mathbb{Z}^+} T_j$, entonces $0 \neq rv_w \in V_w \cap T_{k_w} \subseteq S'_w \cap S'_{k_w}$ para algún $w \in \{1, \dots, n\}$; pero $S'_k \cap S'_l = \{0\}$ si $k \neq l$, por lo tanto $k_w = w$ y así $V_w \cap T_w \neq 0$, lo cual es absurdo. Entonces $v_1 + \cdots + v_n = 0$ y por consiguiente $v_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, llegando así a que $x \in \oplus_{i=1}^n T_i$. ❑

En virtud de la Afirmación 7 el hecho de que $\oplus_{i=1}^n T_i \oplus N$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se traduce en que $N = (S \cap Y \cap \oplus_{i=1}^n N_i) \oplus L_n$ para algún $L_n \leqslant N$; sin embargo $S \subseteq_e N$, por lo tanto $Y \cap \oplus_{i=1}^{n} N_i \cap L_n = \{0\}$.

Afirmación 8] $Y \cap \bigoplus_{i=1}^{n} N_i \subseteq S$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Supongamos que existe $x \in Y \cap \oplus_{i=1}^{n} N_i$ tal que $x \notin S$. Como $N = (S \cap Y \cap \oplus_{i=1}^{n} N_i) \oplus L_n$, debe de haber un $a \in S \cap Y \cap \oplus_{i=1}^{n} N_i$ y un $b \in L_n$, donde $b \neq 0$ a causa de que $x \notin S$, tales que $x = a + b$. De esta manera $0 \neq b = x - a \in (Y \cap \oplus_{i=1}^{n} N_i) \cap L_n$, cosa que no puede suceder. ❐

De la Afirmación 8 es inmediato que $Y \cap \oplus_{i \in \mathbb{Z}^+} N_i \subseteq S$. Ahora, por la Afirmación 6 podemos tomar un $y \in Y \backslash S$, recordamos que $Y \leqslant A \leqslant A + S = N'$, entonces $S \neq y + S \in N'/S$; sin embargo $(\oplus_{i \in \mathbb{Z}^+} N_i)/S \subseteq_e N'/S$, usando el Lema 1.1.11 se sigue que existe un $r \in \mathrm{R}$ tal que $S \neq ry + S \in (\oplus_{i \in \mathbb{Z}^+} N_i)/S$. Hemos llegado de este modo a que $ry \notin S$ y $ry \in Y \cap (\oplus_{i \in \mathbb{Z}^+} N_i) \subseteq S$, lo que desde luego es absurdo. ■

3. DOMINIOS DE INYECTIVIDAD

Uno de los resultados más interesantes en Teoría de Módulos es el hecho de que cada módulo es un submódulo de algún inyectivo. Lo anterior hace ver que los R-módulos inyectivos son objetos destacados de R-Mod, ya que cualquier módulo es parte de algún inyectivo. Es precisamente esta propiedad singular de los inyectivos la que nos lleva a querer capturar, de alguna manera, su comportamiento y de esta suerte nos preguntamos: Dado $U \in$ R-Mod, ¿"qué tan inyectivo" es U?

3.1 Módulos M-inyectivos

Con la finalidad de erradicar la ambigüedad de nuestra última pregunta, y para comenzar a organizar ideas, introducimos la siguiente definición.

Definición
Sean $M, U \in$ R-Mod. Diremos que U *es M-inyectivo* si para cada monomorfismo $f \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$ y cada morfismo $g \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$ existe un morfismo $\bar{g} \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ tal que $g = \bar{g}f$; es decir, $\bar{g}$ hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Podemos decir que la definición anterior se traduce en que U es M-inyectivo si U se porta como un módulo inyectivo con respecto a M. Ahora que ya tenemos una manera de definir inyectividad localmente, lo que sigue es poder decir qué tan inyectivo resulta ser un módulo; pero antes veamos algunas equivalencias, muy útiles todas ellas, de ser M-inyectivo.

Proposición (3.1.1)
Sean $M, U \in$ R-Mod. Los siguientes enunciados son equivalentes:
(1) U es M-inyectivo.
(2) Para todo morfismo $\psi \in \mathsf{Hom}_R\big(M, E(U)\big)$ ocurre que $Im(\psi) \subseteq U$.
(3) Para cualquier $K \leqslant M$ y cualquier morfismo $h \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$, existe un morfismo $\bar{h} \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ que extiende a h; esto es $\bar{h}|_K = h$, ó lo que es lo lo mismo, $\bar{h}$ es tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración:
(1)⇒(2)] Tomamos $\psi \in \mathsf{Hom}_R\big(M, E(U)\big)$ y hacemos $X \doteq \{\, m \in M \mid \psi(m) \in U\}$. Notamos que $X \neq \varnothing$, de hecho $X \leqslant M$. Si U es M-inyectivo, como $X \leqslant M$ y $\psi|_X \in \mathsf{Hom}_R(X, U)$ por definición de X, entonces existe $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\psi|_X"'] & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ U & \end{tikzcd}$$

conmuta, así $\psi|_X = \varphi|_X$. Observemos que:

$$\begin{aligned} x \in U \cap Im(\varphi - \psi) &\Rightarrow \varphi(m) - \psi(m) = x \in U \quad \text{para algún } m \in M \\ &\Rightarrow \psi(m) = \underbrace{\varphi(m)}_{\in U} - \underbrace{x}_{\in U} \in U \\ &\Rightarrow m \in X \\ &\Rightarrow \varphi(m) = \psi(m), \end{aligned}$$

por lo tanto $U \cap Im(\varphi - \psi) = 0$. Como $Im(\varphi - \psi) \leqslant E(U)$ (pues $U \leqslant E(U)$), $U \cap Im(\varphi - \psi) = 0$ y $U \subseteq_e E(U)$, deducimos que $Im(\varphi - \psi) = 0$; obteniendo con esto que $Im(\psi) = Im(\varphi)$. Pero $Im(\varphi) \subseteq U$, de aquí que $Im(\psi) \subseteq U$.
(2)⇒(3)] Sean $K \leqslant M$ y $h \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$. Como $E(U)$ es inyectivo, hay un $\bar{h} \in \mathsf{Hom}_R\big(M, E(U)\big)$ de modo que

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\bar{h}"] \\ U \arrow[d, hook, "i_2"'] & \\ E(U) & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Sin embargo, por hipótesis, $Im(\bar{h}) \subseteq U$. Así que $\bar{h} \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$, y además tiene la propiedad de que $h = \bar{h}|_K$.
(3)⇒(1)] Supongamos cierto el enunciado del inciso (3). Sea $f \in \mathsf{Hom}_R(N, M)$ un monomorfismo y sea $g \in \mathsf{Hom}_R(N, U)$. Tomando $K \doteq Im(f)$ se obtiene que $K \overset{h}{\cong} N$, de esta manera surge el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & M \\ N \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Así $i = fh$. Por otro lado, como $i : K \hookrightarrow M$ es un monomorfismo y además $gh \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$, de la hipótesis se sigue que existe un $\bar{g} \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ de modo que $gh = \bar{g}|_K$. Entonces $gh = \bar{g}|_K = \bar{g}i = \bar{g}(fh) = \bar{g}fh$, como h es un isomorfismo, se infiere que $g = \bar{g}f$. Por lo tanto U es M-inyectivo. ■

La proposición anterior pone a nuestra disposición varias formas de interpretar la inyectividad con respecto a un módulo dado. A continuación dotamos de un nombre a la clase de módulos dentro de la cual un módulo es tan parecido como puede ser a un módulo inyectivo.

Definición
Sea $U \in$ R-Mod. Llamamos *dominio de inyectividad de* U a la clase de todos los R-módulos izquierdos M tales que U es M-inyectivo y la denotamos por $\mathcal{I}n^{-1}(U)$. En símbolos $\mathcal{I}n^{-1}(U) \doteqdot \{M \in \text{R-Mod} \mid U \text{ es } M\text{-inyectivo}\}$.

El dominio de inyectividad de un módulo U se puede pensar como la parte de R-Mod dentro de la cual U "es inyectivo". Observamos que si U es cualquier módulo, $\mathcal{I}n^{-1}(U) \neq \varnothing$ ya que $\{_R0\} \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$. Ahora, si U es inyectivo, entonces $\mathcal{I}n^{-1}(U) = $ R-Mod; es decir su dominio de inyectividad posee la mayor cantidad de objetos que en el universo de R-Mod se pueda llegar a tener, por consiguiente podríamos decir que U es "muy inyectivo". Es así como surge la siguiente interrogante: ¿cuándo podemos decir que un módulo es "muy poco inyectivo", pues bien, a ese problema nos enfrentaremos en la siguiente sección. Por ahora, lo que sigue es mostrar algunas propiedades de los dominios de inyectividad, aunque a decir verdad, únicamente nos centraremos en las propiedades que vamos a necesitar a lo largo de este escrito; si se quieren revisar más propiedades de los dominios de inyectividad, [12] es una buena referencia.

Lema (3.1.2)
Sean $U, M \in$ R-Mod. Si $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ y $N \cong M$, entonces $N \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$.
Demostración:
Supongamos $N \overset{f_2}{\cong} M$. Si $h \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$ y $f_1 \in \mathsf{Hom}_R(K, N)$ es un monomorfismo, debido a que $f_2 \in \mathsf{Hom}_R(N, M)$ es en particular un monomorfismo se tiene que $f_2 f_1$ también lo es. Ahora, por hipótesis U es M-inyectivo, así que existe $g \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ tal que $h = g(f_2 f_1)$; luego $h = \bar{h} f_1$, con $\bar{h} \doteqdot g f_2$, y entonces ocurre que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{h}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto $N \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$. $\blacksquare$

Lema (3.1.3)
Sean $U, M \in$ R-Mod. Si $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ y $N \leqslant M$, entonces $N \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$.
Demostración:
Sean $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ y $N \leqslant M$. Tomamos $h \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$ y $f \in \mathsf{Hom}_R(K, N)$ un monomorfismo. Puesto que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ y $if \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$ es un monomorfismo, existe $g \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ de modo que $h = g(if)$. Haciendo $\bar{h} = gi$ tenemos que $h = \bar{h} f$, entonces $N \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$. $\blacksquare$

Lema (3.1.4)
Sea $U \in$ R-Mod. Si $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ y $N \leqslant M$, entonces $M/N \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$.
Demostración:
Tomamos $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ y sea $N \leqslant M$. Para mostrar que U es M/N-inyectivo, sean $K/N \leqslant M/N$ y $\varphi \in \mathsf{Hom}_R(K/N, U)$; lleguemos a que $\varphi = \beta|_{K/N}$ para algún $\beta \in \mathsf{Hom}_R(M/N, U)$. Bien, consideremos el epimorfismo natural $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$ y hagamos $\pi' \doteqdot \pi|_K$. Debido a que $\varphi\pi' \in \mathsf{Hom}_R(K, U)$ y U es M-inyectivo, debe de existir un $\bar{\varphi} \in \mathsf{Hom}_R(M, U)$ que hace conmutativo a

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\
K/N \arrow[d, "\varphi"'] & \\
U &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{\varphi}(N) = \varphi\pi'(N) = \varphi(\bar{0}) = 0$, de aquí que $Ker(\pi) = N \subseteq Ker(\bar{\varphi})$; del Lema 1.1.2 se sigue que existe $\beta \in \mathsf{Hom}_R(M/N, U)$ tal que $\bar{\varphi} = \beta\pi$, de aquí que para cualquier $x \in K$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\beta(x+N) &= \beta\pi(x) \\
&= \bar{\varphi}(x) \\
&= \varphi\pi'(x) \\
&= \varphi(x+N),
\end{aligned}$$

obteniendo con esto que $\varphi = \beta|_{K/N}$. ■

Lema (3.1.5)
Sean $U \in$ R-Mod y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía e independiente de R-módulos. Entonces, $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ si y sólo si $M_i \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ para cada $i \in I$.
Demostración:
$\Rightarrow$] Si $\oplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$, como $M_i \leqslant \oplus_{i\in I} M_i$ para cada $i \in I$, tenemos que $M_i \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$ para cada $i \in I$ en virtud del Lema 3.1.3.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(U)$. Para aminorar la notación, hagamos $M \doteqdot \oplus_{i\in I} M_i$. Queremos ver que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$, por lo que tomamos un $N \leqslant M$ y un $f \in \mathsf{Hom}_R(N, U)$. Consideremos al siguiente conjunto:

$$\mathcal{F} \doteqdot \big\{h \in Hom_R(L, U) \mid N \leqslant L \leqslant M \text{ y } h|_N = f\big\}.$$

Observamos que $f \in \mathcal{F}$. Ahora, sean $h_1{:}L_1 \longrightarrow U$ y $h_2{:}L_2 \longrightarrow U$ elementos de $\mathcal{F}$, definimos una relación $\lesssim$ en $\mathcal{F}$ mediante:

$$h_1 \lesssim h_2 \overset{..}{\Longleftrightarrow} L_1 \leqslant L_2 \text{ y } h_2|_{L_1} = h_1.$$

No es difícil probar que $(\mathcal{F}, \lesssim)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ una $\lesssim$-cadena. Tomamos $\mathsf{g} \doteqdot \bigcup \mathcal{C}$.

Afirmación 1: $\forall h_1 \in \mathcal{C}, \forall h_2 \in \mathcal{C}\big(x \in dom(h_1) \cap dom(h_2) \Rightarrow h_1(x) = h_2(x)\big)$.

Demostración: Sean $h_1, h_2 \in \mathcal{C}$. Al ser $\mathcal{C}$ una cadena, sin perder generalidad podemos suponer $h_1 \lesssim h_2$. Sea $x \in dom(h_1) \cap dom(h_2)$. Como $x \in dom(h_1)$ (pues $dom(h_1) \leqslant dom(h_2)$), entonces $h_1(x) = h_2|_{dom(h_1)}(x) = h_2(x)$. □

Si $x \in \bigcup\{dom(h_j) | h_j \in \mathcal{C}\}$, entonces $x \in dom(h_j)$ para algún $h_j \in \mathcal{C}$, se define $\mathsf{g}(x) \doteqdot h_j(x)$. De la afirmación 1 se sigue que $\mathsf{g} : \bigcup_{h_j\in\mathcal{C}} dom(h_j) \longrightarrow U$ es una función. Además g extiende a cada $h_j \in \mathcal{C}$.

Afirmación 2: $\mathsf{g} : \bigcup\limits_{h_j\in\mathcal{C}} dom(h_j) \longrightarrow U$ es un R-morfismo.

Demostración: Si $x \in dom(\mathsf{g})$, entonces $x \in dom(h_j)$ para algún $h_j \in \mathcal{C}$; pero $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, por lo tanto $dom(h_j) \leqslant M$ y así $x \in M$. Luego $dom(\mathsf{g}) \subseteq M$. Más aún, si $r \in R$ y $x, y \in dom(\mathsf{g})$, entonces $x \in dom(h_i)$ y $y \in dom(h_j)$ para algunos $h_i, h_j \in \mathcal{C}$. Supongamos, sin perder generalidad, que $h_i \lesssim h_j$. Entonces $dom(h_i) \leqslant dom(h_j)$, luego $x, y \in dom(h_j)$. Como $dom(h_j)$ es un módulo, tenemos que $rx, x+y \in dom(h_j)$, y así $rx, x+y \in dom(\mathsf{g})$. Luego $dom(\mathsf{g})$ es un R-módulo. El que g sea un R-morfismo se sigue de cómo definimos a dicha función. $\square$

Afirmación 3: $\mathsf{g} \in \mathcal{F}$.

Demostración: En la prueba de la afirmación 2 vimos que $dom(\mathsf{g}) \leqslant M$. Como $N \leqslant dom(h_i)$ para cada $h_i \in \mathcal{C}$, tenemos que $N \leqslant dom(\mathsf{g})$. Además, si $n \in N$, $\mathsf{g}(n) = h_i(n)$ para algún $h_i \in \mathcal{C}$; como $h_i|_N = f$ obtenemos que $\mathsf{g}(n) = f(n)$. Por lo tanto $\mathsf{g}|_N = f$. $\square$

Ya que $\mathsf{g} \in \mathcal{F}$ y $h_i \lesssim g$ para cada $h_i \in \mathcal{C}$, concluimos que $\mathcal{C}$ está acotada superiormente. Por el Lema de Zorn existe $h_0 \in \mathcal{F}$ un elemento máximo. Si tomamos $L_0 \doteqdot dom(h_0)$, lo que mostraremos es que $L_0 = M$. Notamos que $L_0 \subseteq M$ porque $h_0 \in \mathcal{F}$, menos inmediato es ver que $M \subseteq L_0$; para lograrlo basta probar que $M_i \subseteq L_0$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Sea $i \in \mathcal{I}$, tomemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \cap L_0 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i_2"'] & M_i \\ L_0 \arrow[d, "h_0"'] & \\ U & \end{tikzcd}$$

Como $M_i \in \mathcal{I}n^{-1}(U)$, entonces existe un morfismo $f_i : M_i \longrightarrow U$ de modo que $f_i|_{M_i \cap L_0} = (h_0 i_2)$; es decir $f_i|_{M_i \cap L_0} = h_0|_{M_i \cap L_0}$. Ahora definimos

$$\begin{aligned} \hat{h} : M_i + L_0 &\longrightarrow U \\ m_i + l &\longmapsto f_i(m_i) + h_0(l) \end{aligned}$$

Observamos que $\hat{h}$ está bien definida, pues si $0 = m_i + l \in M_i + L_0$, entonces $m_i = -l \in M_i \cap L_0$, y como $f_i|_{M_i \cap L_0} = h_0|_{M_i \cap L_0}$, llegamos a que

$$\hat{h}(m_i + l) = f_i(m_i) + h_0(i) = f(-l) + h_0(l) = h_0(-l) + h_0(l) = 0.$$

Así mismo notamos que como f_i y h_0 son R-morfismos, también $\hat{h}$ resulta ser un R-morfismo. Puesto que $N \leqslant M_i + L_0 \leqslant M$ y para cualquier $n \in N$ sucede que $\hat{h}(n) = \hat{h}(0 + n) = f_i(0) + h_0(n) = h_0(n) = f(n)$, obtenemos que $\hat{h} \in \mathcal{C}$. Es inmediato ver que $h_0 \lesssim \hat{h}$, debido a la naturaleza de h_0 conseguimos con esto que $h_0 = \hat{h}$. En particular $M_i + L_0 = L_0$, de aquí que $M_i \leqslant L_0$. Por lo tanto $M_i \subseteq L_0$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Entonces h_0 hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "h_0"] \\ U & \end{tikzcd}$$

conmute. $\blacksquare$

De los Lemas 3.1.5 y 3.1.2, se sigue que $\mathcal{I}n^{-1}(U)$ es una clase cerrada bajo sumas directas arbitrarias; de esto y de los Lemas 3.1.3 y 3.1.4 se obtiene el siguiente teorema.

Teorema (3.1.6)
Si $U \in$ R-Mod, entonces $\mathcal{I}n^{-1}(U)$ es una clase de pretorsión hereditaria.

Si bien el Teorema 3.1.6 es el resultado más importante de esta sección, cerramos analizando algunas propiedades más de los dominios de inyectividad, de hecho, tales propiedades van a ser de mucha utilidad en la sección siguiente, por lo que también debemos de tenerlas en cuenta.

Lema (3.1.7)
Sea $M \in$ R-Mod y sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. Entonces, $\prod_{i\in I} N_i$ es M-inyectivo y sólo si N_i es M-inyectivo para cada $i \in I$.

Demostración:

$\Rightarrow]$ Supongamos que $\prod_{i\in I} N_i$ es M-inyectivo. Tomemos un $j \in I$, un $K \leqslant M$ y un morfismo $f : K \to N_j$. Ahora, si consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \\
N_j \arrow[d, "\eta_j"'] & \\
\prod_{i\in I} N_i &
\end{tikzcd}$$

notamos que de la hipótesis se sigue que hay un morfismo $\bar{f} : M \to \prod_{i\in I} N_i$ tal que $\eta_j \circ f = \bar{f} \circ i$. Entonces $f = (\pi_j \circ \eta_j) \circ f = \pi_j \circ (\eta_j \circ f) = \pi_j \circ \big(\bar{f} \circ i\big)$. Por lo tanto $f = \big(\pi_j \circ \bar{f}\big)|_K$ y así N_j resulta ser M-inyectivo.

$\Leftarrow]$ Supongamos que N_j es M-inyectivo para cada $j \in I$. Sea $K \leqslant M$ y sea $f : K \to \prod_{i\in I} N_i$ un morfismo. Por hipótesis, para cada $j \in I$ existe un morfismo $g_j : M \to N_j$ de modo que

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[ddl, dashed, "g_j"] \\
\prod_{i\in I} N_i \arrow[d, "\pi_j"'] & \\
N_j &
\end{tikzcd}$$

conmuta; del Lema 1.1.6 se sigue que hay un morfismo $\prod_{i\in I} g_i : M \to \prod_{i\in I} N_i$ tal que $g_j = \pi_j \circ \prod_{i\in I} g_i$ para todo $j \in I$. Entonces $\pi_j \circ f = (\pi_j \circ \prod_{i\in I} g_i) \circ i$ para cada $j \in I$, de aquí que $f = \prod_{i\in I} g_i \circ i$. ■

Como veremos más adelante, resulta bastante conveniente reescribir el Lema 3.1.7 en la siguiente forma.

Corolario (3.1.8)
Sea R un anillo y sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de R-módulos. Entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{I}n^{-1}(N_i) = \mathcal{I}n^{-1}\left(\prod_{i\in I} N_i\right)$.

Si dos módulos son isomorfos, uno esperaría que sus dominios de inyectividad estuvieran estrechamente relacionados, por ello el próximo lema no nos ha de tomar por sorpresa.

Lema (3.1.9)
Sean $M, N \in$ R-Mod tales que $M \cong N$. Entonces, $\mathcal{I}n^{-1}(M) = \mathcal{I}n^{-1}(N)$.

Demostración:
Supongamos $N \overset{\varphi}{\cong} M$. Sea $L \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$. Probaremos que $L \in \mathcal{I}n^{-1}(N)$, es decir que N es L-inyectivo, para ello tomamos un $K \leqslant L$ y un $f : K \longrightarrow N$ morfismo. Por la elección de L, existe un morfismo $\bar{\varphi} : L \to M$ de modo que que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[ddl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\
N \arrow[d, "\varphi"'] & \\
M &
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $\varphi \circ f = \bar{\varphi} \circ i$; de aquí, y del hecho de que φ es un isomorfismo, se sigue que $f = \left(\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}\right)|_K$. Entonces $\mathcal{I}n^{-1}(M) \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(N)$. De manera análoga se obtiene la otra inclusión. ■

Llegamos al final de esta sección con una condición suficiente para que un submódulo sea un sumando directo.

Lema (3.1.10)
Sean $M, N \in$ R-Mod. Si $M \in \mathcal{I}n^{-1}(N)$ y $N \leqslant M$, entonces $N \mathbin{\bigcirc\mkern-15mu\mid} M$.

Demostración:
Supongamos que $N \leqslant M$ y que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(N)$. Como N es M-inyectivo, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "Id_N"'] & M \\
N &
\end{tikzcd}$$

puede ser completado mediante un morfismo $f : M \longrightarrow N$ de tal modo que $Id_N = f \circ i$. Por un lado se tiene que $Im(Id_N) = Im(f \circ i) = f\,(Im(i))$, entonces $f^{-1}\big(Im(Id_N)\big) = f^{-1}\big(f\,(Im(i))\,\big) = Im(i) + Ker(f)$, por lo tanto $M = N + Ker(f)$. Por otra parte $Ker(Id_N) = Ker(f \circ i) = i^{-1}\,(Ker(f))$, así que $i\big(Ker(Id_N)\big) = i\big(i^{-1}\,(Ker(f))\,\big) = Ker(f) \cap Im(i)$ y por consiguiente $\{0\} = Ker(f) \cap N$. En resumen $M = N \oplus Ker(f)$. ■

3.2 Módulos Pobres

Los R-módulos inyectivos son los elementos de R-Mod cuyo dominio de inyectividad poseé la mayor cantidad posible de objetos que un dominio de inyectividad pueda tener, en este sentido, si uno piensa al dominio de inyectividad de un módulo como la colección que contiene a todos los bienes de dicho módulo, podríamos decir que un módulo inyectivo es "rico", debido a que la cantidad de bienes que tiene es la mayor que se puede tener en el universo de R-Mod. En esta línea de pensamiento, ahora nos podríamos preguntar por la situación inversa, esto es, ¿cuándo diríamos que un módulo es "pobre"? Con el ánimo de encontrar una respuesta a nuestra última pregunta, comenzamos por analizar el dominio de inyectividad de cada módulo esperando encontrar bienes en común para intentar, en principio, saber cuál es la menor cantidad de bienes que un módulo tiene. Pues bien, el siguiente lema nos dice que en los bienes de cualquier módulo siempre podemos encontrar a los módulos semisimples.

Lema (3.2.1)
Si $M \in$ R-Mod, entonces R-SSMod $\subseteq \mathcal{I}n^{-1}(M)$.

Demostración:

Sean $M, S \in$ R-Mod y supongamos que S es semisimple. Queremos ver que M es S-inyectivo, por lo que tomamos un $K \leqslant S$ y un morfismo $f : K \to M$. Como S es semisimple, ocurre que $S = K \oplus K'$ para algún $K' \leqslant S$, entonces si consideramos al morfismo

$$\begin{array}{rcl} K \oplus K' & \xrightarrow{\bar{f}} & M \\ k + k' & \longmapsto & \bar{f}(k + k') \doteqdot f(k) \end{array}$$

se obtiene que $f = \bar{f}|_k$ y por lo tanto $S \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$. ■

La siguiente proposición muestra que los módulos semisimples son los bienes que todos los módulos comparten, esto nos da, en cierto modo, un "parámetro" para medir la pobreza en R-Mod.

Proposición (3.2.2)
Para cualquier anillo R ocurre que $\bigcap_{M \in \text{R-Mod}} \mathcal{I}n^{-1}(M) =$ R-SSMod.

Demostración:

Sea R un anillo. Por una lado, como consecuencia directa del Lema 3.2.1 se tiene que R-SSMod $\subseteq \bigcap_{M \in \text{R-Mod}} \mathcal{I}n^{-1}(M)$. Entonces sólo resta probar la otra inclusión. Tomemos pues un $N \in \bigcap_{M \in \text{R-Mod}} \mathcal{I}n^{-1}(M)$ y veamos que es semisimple, para ello sea $K \leqslant N$. Por la elección de N sucede en particular que $N \in \mathcal{I}n^{-1}(K)$, luego el Lema 3.1.10 nos lleva a concluir que $K \oplus N$. ■

En vista de la proposición anterior, un módulo será pobre si su dominio de inyectividad es precisamente la clase de los módulos semisimples. No obstante, aunque sabemos que los inyectivos son los módulos ricos, de momento no sabemos si hay módulos pobres. De cualquier forma, y aunque aún no sabemos que tales objetos existan, vale la pena registrar la (posible) condición de los módulos "menos afortunados" de R-Mod.

Definición
Sea R un anillo. Si $M \in$ R-Mod y $\mathcal{I}n^{-1}(M) =$ R-SSMod, diremos que M *es pobre*.

Cuando uno se encuentra por primera vez ante una definición, por lo regular es fácil encontrar ejemplos sencillos de objetos que cumplan dicha definición, de hecho, casi siempre ocurre que el módulo cero satisface las condiciones de cualquier definición; por ello es natural pensar que para cualquier anillo R, el R-módulo $\{0\}$ es pobre, pero ¿en verdad esto ocurre siempre?. Echemos un vistazo a tal situación.

Proposición (3.2.3)
Sea R un anillo. Los siguientes enunciados son equivalentes:
(1) ${}_R\{0\}$ es pobre.
(2) Existe un R-módulo inyectivo que es pobre.
(3) Todo R-módulo es pobre.
(4) ${}_RR$ es semisimple.

Demostración:

(1)⇒(2)] Si ${}_R\{0\}$ es pobre, entonces ${}_R\{0\}$ es un inyectivo que es pobre.

(2)⇒(3)] Supongamos que $E \in$ R-Mod es un inyectivo que es pobre. Como ${}_RE$ es inyectivo, entonces $\mathcal{I}n^{-1}(E) =$ R-Mod; empero ${}_RE$ es pobre también, así que $\mathcal{I}n^{-1}(E) =$ R-SSMod. Luego R-Mod = R-SSMod. Si $M \in$ R-Mod, debido a que R-SSMod $\subseteq \mathcal{I}n^{-1}(M)$ por el Lema 3.2.1, $\mathcal{I}n^{-1}(M) \subseteq$ R-Mod por definición y R-Mod = R-SSMod, se sigue que $\mathcal{I}n^{-1}(M) =$ R-SSMod.

(3)⇒(4)] Si todo R-módulo es pobre, en particular lo es cualquier inyectivo; entonces si ${}_RE$ es inyectivo, ocurre que R-Mod = $\mathcal{I}n^{-1}(E) =$ R-SSMod. De aquí que todo R-módulo es semsimple, en particular ${}_RR$.

(4)⇒(1)] Si ${}_RR$ es semisimple, todo módulo ${}_RM$ es semisimple (Lema 1.1.37) y por ello R-Mod = RSSMod. Puesto que $\mathcal{I}n^{-1}(\{0\}) =$ R-Mod, por ser ${}_R\{0\}$ inyectivo, usando que R-Mod = RSSMod deducimos que ${}_R\{0\}$ es pobre. ■

Así, al menos para anillos semisimples, sabemos que los módulos pobres existen. De hecho se puede probar que para ciertos tipos de anillos hay módulos pobres particulares, no obstante, si queremos probar con todo rigor cada afirmación utilizada en las pruebas, se necesitan algunos resultados preliminares que escapan de nuestro estudio actual; por ejemplo, si R es un anillo primo hereditario[1] y neteriano, usando los siguientes hechos:

(1) Cualquier R-módulo de torsión[2] finitamente generado es una suma directa finita de R-módulos con la propiedad de que tienen una única serie de composición de longitud finta.

(2) Si $M \in$ R-Mod y si $x \in M$ es un elemento de torsión, entonces Rx es un módulo de torsión.

(ambos resultados se pueden encontrar en [15]) es posible demostrar el siguiente enunciado:

Sea R un dominio conmutativo hereditario y neteriano. Si $M \in$ R-SSMod es tal que contiene exactamente una copia de cada R-módulo simple, entonces M es pobre ó bien M es inyectivo.

[1] Un anillo R se llama ***hereditario*** (izquierdo) si todo ideal (izquierdo) es proyectivo.
[2] Si R es un anillo y $M \in$ R-Mod, decimos que un elemento x de M es de ***torsión*** si existe un $r \in R\backslash\{0\}$, que no es divisor de cero, tal que $rx = 0$. Mientras que un módulo es de ***torsión*** si todos sus elementos son de torsión.

Así, por ejemplo, el $\mathbb{Z}$-módulo $\bigoplus_{p\ primo} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ resulta ser pobre. Para ver diversos resultados relacionados con módulos pobres sobre anillos particulares se puede consultar [16]. Lo que sí podríamos ver sin mayores dificultades, es que sobre un anillo artiniano artiniano izquierdo, hay un módulo pobre especial; sin embargo, antes de continuar conviene notar la siguiente equivalencia.

Lema (3.2.4)
Sea $M \in$ R-Mod. Son equivalentes:

(1) M es pobre.
(2) $\forall N \in \mathcal{I}n^{-1}(M)\big(N$ cíclico $\Rightarrow N$ semisimple$\big)$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2)] Si M es pobre, entonces $\mathcal{I}n^{-1}(M) =$ R-SSMod, así $N \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$ implica que N es semisimple.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Supongamos cierto el enunciado del inciso (2). En vista del Lema 3.2.1 sólo debemos mostrar que $\mathcal{I}n^{-1}(M) \subseteq$ R-SSMod. Sea $K \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$. Si $a \in K$, la Proposición 1.3.1 asegura que $Ra \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$, entonces Ra es semisimple por el inciso (2); luego $K(= \sum_{a\in K} Ra)$ es semisimple. ■

Como primera aplicación del lema anterior se tiene que si ${}_RR$ es artiniano, entonces en R-Mod se halla un módulo pobre particular.

Lema (3.2.5)
Sea R un anillo artiniano izquierdo. Entonces, ${}_R\,(R/\mathtt{J}(R))$ es pobre.

Demostración:
Nos apoyaremos en el Lema 3.2.4, por ello tomamos un $C \in \mathcal{I}n^{-1}\,(R/\mathtt{J}(R))$ cíclico distinto de cero y nos proponemos llegar a concluir que C es semisimple. Como ${}_RR$ es artiniano y ${}_RC$ es finitamente generado, del Lema 1.1.33 deducimos que C, y por lo tanto cualquiera de sus submódulos, es artiniano izquierdo, de aquí que cualquier submódulo no cero de C contiene simples. Sea S_0 un submódulo simple de C. Por el Lema 1.1.32 existe un $L \leqslant R/\mathtt{J}(R)$ tal que $S_0 \cong L$, además $R/\mathtt{J}(R)$ es semisimple por el Lema 1.1.31, entonces $R/\mathtt{J}(R) = L \oplus \bar{L}$ para algún $\bar{L} \leqslant R/\mathtt{J}(R)$. Del Corolario 3.1.8 y Lema 3.1.9 deducimos que $\mathcal{I}n^{-1}(L \oplus \bar{L}) = \mathcal{I}n^{-1}(L) \cap \mathcal{I}n^{-1}(\bar{L})$, en particular se tiene que $C \in \mathcal{I}n^{-1}(L)$; sin embargo $\mathcal{I}n^{-1}(L) = \mathcal{I}n^{-1}(S_0)$ por el Lema 3.1.9, así $C \in \mathcal{I}n^{-1}(S_0)$ y por consiguiente $C = S_0 \oplus K_1$ para algún $K_1 \leqslant C$ (esto por el Lema 3.1.10). Si $K_1 = 0$, entonces $C(= S_0)$ es semisimple. Si $K_1 \neq 0$, sea S_1 un submódulo simple de K_1; argumentando como antes lo hicimos se llega a que $K_1 = S_1 \oplus K_2$ para algún $K_2 \leqslant K_1$, así $C = S_0 \oplus S_1 \oplus K_2$ con $S_0 \oplus S_1$ semisimple y $K_1 \supseteq K_2$. Siguiente este proceso obtenemos una cadena descendente $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ de submódulos de C, la cual se estaciona debido a que C es artiniano izquierdo, así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C = S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ con S_i simple para cada $i \in \{1, ..., n\}$. ■

A pesar de que hasta ahora sólo hemos asegurado la existencia de módulo pobres sobre ciertos tipos de anillos, la realidad es que cualquier anillo tiene módulos pobres; justamente en este punto nos dirigimos a probar tal afirmación, no obstante, la demostración requiere de algunos resultados preliminares.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Si $M \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$, diremos que M es *cuasi-inyectivo.*

Proposición (3.2.6)
Si $M \in$ R-Mod, entonces M es cuasi-inyectivo si y sólo si $f(M) \subseteq M$ para cada $f \in \mathsf{End}_R\big(E(M)\big)$.

Demostración:

Sea $M \in$ R-Mod.
$\Rightarrow]$ Supongamos que M es cuasi-inyectivo y tomemos un $f \in \mathsf{End}_R\big(E(M)\big)$. Consideremos al conjunto $L \doteqdot \{m \in M \mid f(m) \in M\}$. Se ve que $L \leqslant M$ y así $f|_L{:}L \to M$. Como M un es M-inyectivo, existe $g \in \mathsf{End}_R(M)$ de modo que

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|_L"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, por lo tanto $f|_L = g|_L$; de hecho observamos aquí que, si $\bar{i}$ es la inclusión de M en $E(M)$, como $E(M)$ es inyectivo hay un morfismo $\bar{g} : E(M) \longrightarrow E(M)$ que hace conmutar al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "\bar{i}"] \arrow[d, "g"'] & E(M) \arrow[ddl, dashed, "\bar{g}"] \\ M \arrow[d, hook, "\bar{i}"'] & \\ E(M) & \end{tikzcd}$$

consiguiendo así que $\bar{g}|_M = g$, entonces para optimizar la notación supondremos que $g \in \mathsf{End}_R\big(E(M)\big)$.

Afirmación: $\big(g - f\big)(M) = 0$.

Demostración: Supongamos que $(g - f)(M) \neq 0$. Como $(g - f)(M)$ y M son submódulos de $E(M)$ y $M \subseteq_e E(M)$, se sigue que $M \cap (g - f)(M) \neq 0$; entonces existen $m, m' \in M$ tales que $g(m) - f(m) = m' \neq 0$. Sin embargo $f(m) \in M$ debido a que $g(m), m' \in M$, así que $m \in L$; pero $g|_L = f|_L$, entonces hemos llegado a que $g(m) - f(m) = 0$, lo cual es absurdo. $\square$

Por lo tanto $\big(g - f\big)(M) = 0$ y así $f(M) = g(M)$, pero $g(M) \subseteq M$; de aquí que $f(M) \subseteq M$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $f(M) \subseteq M$ para cada $f \in \mathsf{End}_R\big(E(M)\big)$. Para mostrar que M es quasi-inyectivo tomamos un $L \leqslant M$ y un $f : L \to M$ morfismo, y nos proponemos encontrar un morfismo $h : M \to M$ que extienda a f. Pues bien, si $\bar{i}$ denota la inclusión de M en $E(M)$, como $E(M)$ es inyectivo, hay un morfismo $g : E(M) \longrightarrow E(M)$ tal que

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, hook, "\bar{i}"] & E(M) \arrow[ddll, dashed, "g"] \\ M \arrow[d, hook, "\bar{i}"'] & & \\ E(M) & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Como $g \in \mathsf{End}_R\big(E(M)\big)$, de la hipótesis se sigue que $g(M) \subseteq M$; luego $h \doteqdot g|_M : M \to M$ hace que

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

sea un diagrama conmutativo. ■

Lema (3.2.7)
Sea $M \in$ R-Mod. Si M es cuasi-inyectivo y $E(M) = A_1 \oplus A_2$, entonces ocurre que $M = (M \cap A_1) \oplus (M \cap A_2)$.

Demostración:

Supongamos M cuasi-inyectivo y $E(M) = A_1 \oplus A_2$. Como $A_1 \cap A_2 = 0$, es claro que $(M \cap A_1) \oplus (M \cap A_2) \subseteq M$. Por otro lado, ya que $E(M) = A_1 \oplus A_2$, para $j \in \{1, 2\}$, los morfismos

$$\begin{aligned} \pi_j : A_1 \oplus A_2 &\longrightarrow A_j \\ a_1 + a_2 &\longmapsto a_j \end{aligned}$$

son endomorfismos de $E(M)$; que puesto que M es quasi-inyectivo, la Proposición 3.2.6 nos dice, en particular, que $\pi_j(M) \subseteq M$ para toda $j \in \{1, 2\}$. Ahora notamos que, como $M \subseteq E(M) = A_1 \oplus A_2$, para cada $m \in M$ existen $m_1 \in A_1$ y $m_2 \in A_2$ de tal forma que $m = m_1 + m_2$; y como $\pi_j(M) \subseteq M$, se sigue que $m_j = \pi_j(m) \in M$ para cada $j \in \{1, 2\}$, de donde se concluye que $m = m_1 + m_2 \in (M \cap A_1) \oplus (M \cap A_2)$ y así $M \subseteq (M \cap A_1) \oplus (M \cap A_2)$. ■

En el siguiente corolario encontramos nuevos ejemplos de módulos CS, en particular se obtiene que todo módulo inyectivo es CS.

Corolario (3.2.8)
Si $M \in$ R-Mod es cuasi-inyectivo, entonces M es CS.

Demostración:

Supongamos que $M \in$ R-Mod es cuasi-inyectivo. Pare ver que M es CS tomamos un $N \leqslant M$ y mostraremos que $N \subseteq_e A$ para algún $A \oplus M$. Sea N' un seudocomplemento de N en M, entonces $N + N'/N' \subseteq_e M/N'$ por el Lema 1.1.18; considerando al epimorfismo natural $\pi : M \longrightarrow M/N'$ y usando el Lema 1.1.14, ocurre que $N + N' = \pi^{-1}(N + N'/N') \subseteq_e M$. Del hecho de que $N \oplus N' \subseteq_e M$, se obtiene, del Lema 1.1.23, que $E(M) = E(N \oplus N')$. Sin embargo $E(N \oplus N') = E(N) \oplus E(N')$ en virtud del Lema 1.1.24, así que $E(M) = E(N) \oplus E(N')$; y como M es cuasi-inyectivo, del Lema 3.2.7 se desprende que $M = \big(M \cap E(N)\big) \oplus \big(M \cap E(N')\big)$, concluyendo con esto que $\big(M \cap E(N)\big) \oplus M$. Finalmente observamos que $N \leqslant M \cap E(N) \leqslant E(N)$ y $N \subseteq_e E(N)$, por lo tanto, debido al Lema 1.1.12, $N \subseteq_e M \cap E(N)$. En resumen $N \subseteq_e \big(M \cap E(N)\big)$ y $\big(M \cap E(N)\big) \oplus M$. ■

Como un resultado previo para la demostración de la existencia de módulos pobres tenemos a una de las consecuencias más sorprendentes del Teorema de Osofsky-Smith, pues nos brinda otra manera de entender a los módulos semisimples, además este resultado será la columna vertebral del teorema que buscamos.

Si R es un anillo y $M, N \in$ R-Mod, diremos que N *es un subfactor de* M si $N \cong A/B$ para algunos $A, B \leqslant M$ tales que $B \leqslant A$.

Teorema (3.2.9)
Sea $M \in$ R-Mod. Son equivalentes:
(1) Cada subfactor cíclico de M es M-inyectivo.
(2) M es semisimple.

Demostración:

(2) $\Rightarrow$ (1)] Si N es un subfactor cíclico de M y M es semisimple, debido a que R-SSMod $\subseteq \mathcal{I}n^{-1}(N)$ por el Lema 3.2.1, se obtiene que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(N)$ y así N es M-inyectivo.

(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos verdadero el inciso (1). Si logramos probar que todo submódulo cíclico de M es semisimple, del hecho de que $M = \sum_{x \in M} Rx$ y de que sumas arbitrarias de módulos semisimples son semisimples, se tendría que M es semisimple. Entonces tomamos un $0 \neq N \leqslant M$ cíclico y nos proponemos mostrar que N es semisimple.

Afirmación: Todo submódulo cíclico de N es CCS.

Demostración: Sea A un submódulo cíclico de N. Consideremos un $B \leqslant A$ y probemos que A/B es CS. Como A es cíclico, entonces A/B es un subfactor cíclico de M, de la hipótesis se obtiene que A/B es M-inyectivo; es decir, $M \in \mathcal{I}n^{-1}(A/B)$. Se sigue, de los Lemas 3.1.3 y 3.1.4, que $A/B \in \mathcal{I}n^{-1}(A/B)$. Así A/B es cuasi-inyectivo, del Corolario 3.2.8 se sigue que A/B es CS. ❏

Si P denota a la clase de los R-módulos cíclicos, entonces P es una clase OS (por el Lema 2.2.4) y $N \in$ P; así la afirmación anterior se parafrasea en que todo P-submódulo de N es CCS, de este modo el Teorema de Osofsky-Smith asegura que

$$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$$

para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ y para ciertos N_i's submódulos uniformes de N. Ahora, si $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $0 \neq n_i \in N_i$, entonces Rn_i es un subfactor cíclico de M y por hipótesis ocurre que Rn_i es M-inyectivo, o bien que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(Rn_i)$; de aquí, y del Lema 3.1.3, se llega a que $N_i \in \mathcal{I}n^{-1}(Rn_i)$. El Lema 3.1.10 nos lleva a concluir que $Rn_i \oplus N_i$, sin embargo $Rn_i \subseteq_e N_i$ debido a que $Rn_i \neq 0$ y N_i es uniforme, llegando así a que $N_i = Rn_i$ y de este modo a que N_i es un módulo simple. ■

Es momento de dejar de lado la utopía de anillos sin módulos pobres, ya que, como el siguiente teorema muestra, para cualquier anillo R siempre ocurre que en R-Mod hay pobres.

Teorema (3.2.10)
Sea R un anillo y Γ un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos cíclicos (izquierdos). Entonces, $M \doteq \prod_{N \in \Gamma} N$ es un R-módulo (izquierdo) pobre.

Demostración:

Sea $0 \neq A \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$. Queremos probar que A es semisimple, en virtud del Teorema 3.2.9 basta tomar un subfactor cíclico arbitrario de A, digamos $\bar{A}$, y mostrar que es A-inyectivo. Como $A \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$ y $M = \prod_{N \in \Gamma} N$, del Lema 3.1.7 se sigue que $A \in \mathcal{I}n^{-1}(N)$ para cada $N \in \Gamma$, y ya que $\bar{A}$ es un módulo cíclico, en particular se tiene que $A \in \mathcal{I}n^{-1}(N_0)$ para algún $N_0 \in \Gamma$ tal que $N_0 \cong \bar{A}$; luego del Lema 3.1.9 es inmediato que $A \in \mathcal{I}n^{-1}(\bar{A})$. ■

Puesto que ya tenemos certeza de que, para cualquier anillo R, en R-Mod hay, al menos, un pobre, podemos tratar de construir otro módulo pobre a partir de uno dado; es justo de esta manera que llegamos a la conclusión, según el lema de abajo, de que cualquier módulo que contenga un sumando directo pobre, debe de ser pobre también. Entonces la clase de los R-módulos pobres es propia.

Lema (3.2.11)
Sea R un anillo y sea $M \in$ R-Mod un pobre. Si $N \in$ R-Mod, entonces $N \oplus M$ es un módulo pobre.

Demostración:

Si $N \in$ R-Mod, entonces $\mathcal{I}n^{-1}(N \oplus M) = \mathcal{I}n^{-1}(N) \cap \mathcal{I}n^{-1}(M)$ a causa del Corolario 3.1.8, como $\mathcal{I}n^{-1}(M) =$ R-SSMod y R-SSMod$\subseteq \mathcal{I}n^{-1}(N)$ por el Lema 3.2.1, se sigue que $\mathcal{I}n^{-1}(N) \cap \mathcal{I}n^{-1}(M) =$ R-SSMod; luego $N \oplus M$ es pobre. ■

4. ALGUNAS RETÍCULAS ISOMORFAS

Como indica el titulo de este capítulo, nos ocuparemos en construir cuatro retículas (completas) que, aunque parezcan tremendamente diferentes unas de otras, resultaran ser todas ellas isomorfas. El tener la posibilidad de estudiar un objeto desde cuatro puntos de vista distintos, es algo que pocas veces se ve, y por esto mismo debe ser sumamente productivo tener estas cuatro retículas a nuestra disposición y poder disfrutar de las bondades que cada una de ellas nos ofrece.

4.1 Clases de Wisbauer

En el capítulo pasado vimos que el dominio de inyectividad de cualquier R-módulo es una clase de pretorsión hereditaria (Teorema 3.1.6), en esta sección veremos que las clases de pretorsión hereditarias tienen, de hecho, una forma genérica. Además veremos que la clase de todas las clases de pretorsión hereditarias, es en realidad un conjunto; lo cual va a ser de vital importancia en el último capítulo.

Definición
Sean $M, N, K \in$ R-Mod. Decimos que:

1.- *K es generado por M* (ó M-generado) si existe un conjunto A de modo que K es isomorfo a un cociente de $M^{(A)}$.
2.- *N es subgenerado por M* (ó M-subgenerado) si N es isomorfo a un submódulo de un módulo generado por M.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. A la clase de todos los R-módulos subgenerados por M le llamaremos *clase de Wisbauer* y la denotaremos por $\sigma[M]$.

Como primeras observaciones se tienen que $\sigma[M]$ es no vacío para cualquier R-módulo M, ya que M es subgenerado por sí mismo y así $M \in \sigma[M]$. Además, si consideramos a cualquier anillo R como módulo sobre sí mismo, obtenemos que $\sigma[R] =$ R-Mod; debido a que todo R-módulo es cociente de un libre. En las proposiciones siguientes exploramos un poco las propiedades básicas que poseen las clases de Wisbauer.

Lema (4.1.1)
Sea $M \in$ R-Mod. Entonces,

$\sigma[M]=\{{}_RN | \exists_R K \ \exists f \in \mathsf{Hom}_R(N,K)\big(K \text{ es } M\text{-generado y } f \text{ es inyectiva}\big)\}$.

Demostración:

Sea $\Lambda \doteqdot \{N \in \text{R-Mod} | \exists K \in \text{R-Mod } M\text{-generado y } \exists N \overset{f}{\rightarrowtail} K \text{ monomorfismo}\}$ y veamos que $\Lambda = \sigma[M]$. Si $N \in \Lambda$, entonces hay un $f \in \mathsf{Hom}_R(N,K)$ monomorfismo para algún $K \in$ R-Mod generado por M, así $N \cong Im(f)$, y como $Im(f) \leqslant K$, obtenemos que N es isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado; de aquí que $N \in \sigma[M]$. Ahora, $N \in \sigma[M]$ implica que existe $f \in \mathsf{Hom}_R(N, L)$ un isomorfismo para algún $L \leqslant K$, con K generado por M, luego $if : N \longrightarrow K$ es un monomorfismo; entonces $N \in \Lambda$. ■

Entonces, dado $M \in$ R-Mod, los R-módulos subgenerados por M son aquellos que se sumergen en un módulo M-generado. Puesto que la clase $\sigma[M]$ es no vacía, uno podría comenzar a deducir ciertas "propiedades de cerradura" con base en la observación hecha en el Lema 4.1.1, esto lo precisamos en la siguiente proposición.

Proposición (4.1.2)
Sea $M \in$ R-Mod. La clase $\sigma[M]$ es de pretorsión hereditaria.

Demostración:
$\cong$] Supongamos que $N \in \sigma[M]$ y que ${}_RL \overset{g}{\cong} {}_RN$. Como $N \in \sigma[M]$, existe un $f \in \mathsf{Hom}_R(N, K)$ monomorfismo para un cierto $K \in$R-Mod generado por M. Así $fg : L \to K$ es un monomorfismo y K es M-generado, luego $L \in \sigma[M]$.

$\leqslant$] Sea $N \in \sigma[M]$ y sea $L \leqslant N$. Entonces, existe un módulo K generado por M y un monomorfismo $f \in \mathsf{Hom}_R(N, K)$. Si $i : L \hookrightarrow N$ es la inclusión, se tiene que $fi \in \mathsf{Hom}_R(L, K)$ es un monomorfismo, de aquí que $L \in \sigma[M]$.

$/$] Tomamos $N \in \sigma[M]$ y un $L \leqslant N$. Debido a que $N \in \sigma[M]$, tenemos que $N \overset{f}{\rightarrowtail} K \overset{g}{\cong} M^{(A)}/S$ para algún módulo K, monomorfismo f, conjunto A y submódulo S de $M^{(A)}$. Como $N \overset{gf}{\rightarrowtail} M^{(A)}/S$ es un monomorfismo, $N \overset{h}{\cong} T/S$ para algún $T \leqslant M^{(A)}$ que contiene a S. Luego, al considerar $i : L \hookrightarrow N$, tenemos que $L \overset{hi}{\rightarrowtail} T/S$ es un monomorfismo, llegando con ello a que $L \cong U/S$ para algún $U \leqslant T$ tal que $S \leqslant U$. Entonces $N/L \cong T/S\Big/U/S \cong T/U$ y $T/U \leqslant M^{(A)}/U$, así N/L es isomorfo a un submódulo de un módulo generado por M; por consiguiente $N/L \in \sigma[M]$.

$\bigoplus$] Consideramos una familia $\{N_i\}_{i\in I}$ en $\sigma[M]$. En vista de que $N_i \in \sigma[M]$ para cada $i \in I$, tenemos que existe una familia $\{f_i : N_i \rightarrowtail K_i\}_{i\in I}$ de monomorfismos y una familia $\{g_i : M^{(A_i)} \twoheadrightarrow K_i\}_{i\in I}$ de epimorfismos, para algunos módulos K_i y conjuntos A_i para cada $i \in I$. Por el Lema 1.1.3 existe un monomorfismo $\oplus_{i\in I} f_i{:}\oplus_{i\in I} N_i \rightarrowtail \oplus_{i\in I} K_i$ y existe $\oplus_{i\in I} g_i{:}\oplus_{i\in I} M^{(A_i)} \twoheadrightarrow \oplus_{i\in I} K_i$ un epimorfismo. Como $\oplus_{i\in I} M^{(A_i)} = M^{(A)}$ para un cierto conjunto A, entonces $\oplus_{i\in I} K_i$ es isomorfo a un cociente de $M^{(A)}$. Resumiendo, $\oplus_{i\in I} K_i$ es es M-generado y $\oplus_{i\in I} f_i : \oplus_{i\in I} N_i \rightarrowtail \oplus_{i\in I} K_i$ es un monomorfismo. Así que $\oplus_{i\in I} N_i \in \sigma[M]$. ■

El siguiente teorema muestra que la Proposición 4.1.2 esconde un hecho mucho más profundo del que aparenta.

Teorema (4.1.3)
Las clases de Wisbauer coinciden con las clases de pretorsión hereditarias.

Demostración:
En vista de la proposición anterior, basta ver que cualquier clase de pretorsión hereditaria es de Wisbauer. Sean R un anillo y ω una clase de R-módulos que es de pretorsión hereditaria. Tomamos $\{C_i\}_{i\in I}$ un conjunto completo de

representantes de clases de isomorfismo de R-módulos cíclicos en ω. Veamos que el R-módulo $M \doteq \oplus_{i \in I} C_i$ es tal que $\omega = \sigma[M]$.

$\subseteq$] Notamos que cada C_i es isomorfo a un cociente de M, entonces $C_i \in \sigma[M]$ para cada $i \in I$. Ahora sea $N \in \omega$. Si $x \in N$, como ω es hereditaria, entonces Rx es isomorfo a algún C_i; pero cada C_i es un elemento de $\sigma[M]$ y esta clase es cerrada bajo isomorfismos, así que $Rx \in \sigma[M]$ para cada $x \in N$. Usando que $\sigma[M]$ es cerrada bajo sumas directas concluimos que $\oplus_{x \in N} Rx \in \sigma[M]$. Por otro lado, si consideramos a la familia $\{i_x : Rx \hookrightarrow N\}_{x \in N}$ de R-morfismos, en donde i_x es el morfismo inclusión, obtenemos del Lema 1.1.5 un morfismo $f \doteq \oplus_{x \in N} i_x : \oplus_{x \in N} Rx \longrightarrow N$ con la propiedad, en particular, de que

$$\begin{aligned} Im(f) &= \textstyle\sum_{x \in N} Im(i_x) \\ &= \textstyle\sum_{x \in N} Rx \\ &= N. \end{aligned}$$

Puesto que $\oplus_{x \in N} Rx \in \sigma[M]$ y N es isomorfo a un cociente de $\oplus_{x \in N} Rx$, del hecho de que $\sigma[M]$ es cerrada bajo cocientes e isomorfismos se concluye que $N \in \sigma[M]$.
$\supseteq$] Observamos que como $C_i \in \omega$ para cada $i \in I$, de la definición de M y la elección de ω se sigue que $M \in \omega$, y así $M^{(A)} \in \omega$ para cualquier conjunto A; luego todo cociente de $M^{(A)}$ está en ω para cualquier A conjunto. Por otro lado, sea $N \in \sigma[M]$. Entonces N es isomorfo a un cociente de $M^{(A)}$ para un cierto conjunto A, por las observaciones precedentes y de recordar que ω es cerrada bajo isomorfismos, concluimos que $N \in \omega$. ■

En vista del teorema anterior, a partir de aquí diremos clase de Wisbauer en lugar de decir clase de pretorsión hereditaria. Además denotaremos a la clase de todas las clases de R-módulos que son Wisbauer por R-Wis. A pesar de que en principio no se aprecia, en breve veremos que R-Wis es un conjunto. Pero antes notemos que toda clase de Wisbauer está determinada por sus módulos cíclicos.

Lema (4.1.4)
Sean $N \in$ R-Mod y $\omega \subseteq$ R-Mod una clase de Wisbauer. Entonces, $N \in \omega$ si y sólo si $Rx \in \omega$ para cada $x \in N$.

Demostración:
$\Rightarrow$] Si $N \in \omega$ y $x \in N$, entonces $Rx \in \omega$ porque $Rx \leqslant N$ y ω es cerrada bajo submódulos.
$\Leftarrow$] Procedemos como en la prueba del Toerema 4.1.3. Si $Rx \in \omega$ para cada $x \in N$, entonces $\oplus_{x \in N} Rx \in \omega$. De la familia $\{i_x : Rx \hookrightarrow N\}_{x \in N}$ de morfismos se obtiene, por el Lema 1.1.5, el morfismo $\oplus_{i_x} i_x : \oplus_{x \in N} Rx \longrightarrow N$, cuya imagen es N. Así N es isomorfo a un cociente de $\oplus_{x \in N} Rx$, y como ω es cerrado bajo isomorfismos y cocientes, deducimos entonces que $N \in \omega$. ■

Si W es una clase y logramos establecer una correspondencia biyectiva entre W y un conjunto, digamos κ, tendríamos que W tiene el mismo cardinal que κ y que por lo tanto W no llega a ser tan grande como para convertirse en una clase propia; esto es, W es un conjunto. En este caso decimos que la clase W *es cardinable.*

Proposición (4.1.5)
Para cualquier anillo R ocurre que R-Wis es cardinable.

Demostración:
Tomemos un anillo R y hagamos $\mathfrak{A} \doteqdot \{R/I \mid {}_RI \leqslant {}_RR\}$. Notamos que $\mathfrak{A}$ es un conjunto, pues de hecho $|\mathfrak{A}| \leqslant |\mathcal{P}(R)|$. Establecemos una correspondencia entre R-Wis y el conjunto $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{R-Wis} &\xrightarrow{\Theta} \mathcal{P}(\mathfrak{A}) \\ \omega &\longmapsto \{R/I \in \mathfrak{A} \mid R/I \in \omega\} \end{aligned}$$

No es difícil mostrar que Θ es un funcional.

Afirmación: Θ es inyectiva.

Demostración: Sean $\omega, \vartheta \in$ R-Wis tales que $\omega \neq \vartheta$. Sin perder generalidad es posible suponer que $\omega \nsubseteq \vartheta$. Entonces, existe $N \in \omega$ tal que $N \notin \vartheta$. Por el Lema 4.1.4 debe de existir un $x \in N$ de modo que $Rx \in \omega$ y $Rx \notin \vartheta$. Debido a que $Rx \cong R/(0:x) \in \mathfrak{A}$ y tanto ω como ϑ son cerradas bajo isomorfismos, entonces $R/(0{:}x) \in \Theta(\omega)$ y $R/(0{:}x) \notin \Theta(\vartheta)$. Por lo tanto $\Theta(\omega) \neq \Theta(\vartheta)$. □

De la afirmación se sigue que R-Wis es equipotente a algún subconjunto de $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$, luego R-Wis es cardinable. ■

Las ventajas que se obtienen de saber que R-Wis no es un clase propia se apreciaran más adelante, por ahora nos ocuparemos en mostrar que a R-Wis se le puede dotar de una estructura reticular.

Definición
Si $X \subseteq$R-Wis, denotamos por $\bigwedge X$ a la clase $\{M \in \text{R-Mod} \mid \forall \zeta \in X\,(M \in \zeta)\}$.

Observamos que $\bigwedge \varnothing =$ R-Mod y que $\bigwedge$R-Wis $= \{{}_R0\}$. El siguiente lema muestra que el que tanto $\bigwedge \varnothing$ como $\bigwedge$R-Wis resulten ser clases de Wisbauer no es un hecho aislado.

Lema (4.1.6)
Si $X \subseteq$ R-Wis, entonces $\bigwedge X \in$ R-Wis.

Demostración:
Sean $X \subseteq$R-Wis, $N \in$ R-Mod y $M \in \bigwedge X$. Entonces $M \in \zeta$ para cada $\zeta \in X$.
$\cong$] Supongamos que $N \cong M$. Debido a que $X \subseteq$ R-Wis, en particular cada ζ es cerrada bajo isomorfismo; así $N \in \zeta$ para cada $\zeta \in X$, ó bien $N \in \bigwedge X$.

$\leqslant$] Si $N \leqslant M$, del hecho de que cada ζ es cerrada bajo tomar submódulos se tiene que $N \in \zeta$ para cada $\zeta \in X$.

$/$] Dado $N \leqslant M$, obtenemos que $M/N \in \zeta$ para toda $\zeta \in X$, ya que cada ζ es cerrada bajo cocientes y $M \in \bigwedge X$.

$\bigoplus$] Tomamos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos en $\bigwedge X$. Entonces para cada $i{\in}I$ tenemos que $M_i \in \zeta$ para toda $\zeta \in X$; de aquí que $\oplus_{i\in I} M_i \in \zeta$ para cualquier $\zeta \in X$, pues cada ζ es cerrada bajo sumas directas e isomorfismos. ■

Lo anterior motiva la siguiente definición, que en función de los objetos que ahí se definen se puede inferir hacia donde nos dirigimos.

Definición
Sea $X \subseteq$ R-Wis. Diremos que $\bigwedge X$ es el *ínfimo de* X, mientras que a la clase $\bigvee X \doteqdot \bigwedge \{\vartheta \in \text{R-Wis} \mid \forall \zeta \in X\,(\zeta \subseteq \vartheta)\}$ le llamaremos el *supremo de* X.

Notamos que $(\text{R-Wis}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, así teniendo un orden en R-Wis establecido y sabiendo, por el Lema 4.1.6, que tanto $\bigwedge X$ como $\bigvee X$ son clases de Wisbauer para cualquier $X \subseteq$ R-Wis, los términos utilizados en la última definición adquieren el sentido que uno esperaría que tuvieran según el siguiente lema.

Lema (4.1.7)
Sea $X \subseteq$R-Wis. Entonces, $\bigwedge X$ es la mayor de las cotas inferiores y $\bigvee X$ es la menor de las cotas superiores de X en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$.

Demostración:
Si $X = \varnothing$, las afirmaciones se siguen de ver que $\bigvee \varnothing = \bigwedge \text{R-Wis} = \{_R0\}$ y de ver que $\bigvee \text{R-Wis} = \bigwedge \{\text{R-Mod}\} = \text{R-Mod} = \bigwedge \varnothing$. Entonces vamos a suponer que $X \neq \varnothing$.

Afirmación: $\bigwedge X$ es la mayor de las cotas inferiores de X.

El que $\bigwedge X$ sea cota inferior de X se tiene por cómo definimos a $\bigwedge X$. Por otro lado, sea $\vartheta \in$ R-Wis una cota inferior de X en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$; ocurre que $\vartheta \subseteq \zeta$ para cada $\zeta \in X$. Si $M \in \vartheta$, entonces $M \in \zeta$ para cada $\zeta \in X$, esto es: $M \in \bigwedge X$. Por lo tanto $\vartheta \subseteq \bigwedge X$. De aquí que $\bigwedge X$ sea la mayor de las cotas inferiores de X en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$.

Afirmación: $\bigvee X$ es la menor de las cotas superiores de X.

Sea $\zeta \in X$ y hagamos $\Delta \doteq \{\vartheta \in \text{R-Wis} \mid \forall \zeta \in X\, (\zeta \subseteq \vartheta)\}$. Entonces $\zeta \subseteq \vartheta$ para cada $\vartheta \in \Delta$. De aquí que $M \in \zeta$ implica $M \in \vartheta$ para cada $\vartheta \in \Delta$; es decir, $M \in \bigwedge \Delta = \bigvee X$. Así $\zeta \subseteq \bigvee X$. Por lo tanto para cada $\zeta \in X$ tenemos que $\zeta \subseteq \bigvee X$, esto nos dice que $\bigvee X$ es, efectivamente, una cota superior de X. Por último vemos que si ϑ es una cota superior de X en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$, entonces $\vartheta \in \Delta$, de donde conseguimos que $\bigvee X = \bigwedge \Delta \subseteq \vartheta$. Así $\bigvee X$ es la menor de las cotas superiores de X en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$. ■

Si $\vartheta \in$ R-Wis y $M \in \vartheta$, como $0 \leqslant M$, tenemos que $0 \in \vartheta$. Derivando esto en que $\{_R0\}$ es el menor elemento de R-Wis en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$. Por otra parte, al tener que cada clase de Wisbauer es una colección de R-módulos, obtenemos que R-Mod es el elemento mayor de R-Wis en $(\text{R-Wis}, \subseteq)$. En el siguiente teorema recopilamos los últimos resultados que hemos obtenido.

Teorema (4.1.8)
Sea R un anillo. Entonces, $(\text{R-Wis}, \subseteq, \bigwedge, \bigvee, \{_R0\}, \text{R-Mod})$ es una retícula completa.

4.2 Prerradicales Exactos Izquierdos

En esta sección introducimos a los prerradicales[1] y analizamos algunas de sus propiedades generales. Luego fijaremos nuestra atención en una subclase especial de los prerradicales de R-Mod y la relacionaremos con R-Wis, obteniendo de dicha relación una nueva forma de entender a R-Wis. Para conocer otras relaciones entre algunas clases de módulos y ciertas clases de funtores se puede ver [18].

[1] Como referencia para un estudio profundo de los prerradicales se tiene [17].

Definición

Sea R un anillo. Un *prerradical de R-Mod* es un funcional $\mathtt{r}$:R-Mod→R-Mod tal que:

1.- Si M es un R-módulo, entonces $\mathtt{r}(M) \leqslant M$.

2.- Si $f \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, entonces $f\big(\mathtt{r}(M)\big) \subseteq \mathtt{r}(N)$.

Notamos que la condición 2 de la definición anterior nos dice que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ f\ } & N \\ {\scriptstyle i}\big\uparrow & & {\scriptstyle i}\big\uparrow \\ \mathtt{r}(M) & \xrightarrow{\ f|\ } & \mathtt{r}(N) \end{array}$$

Ahora bien, veamos algunos ejemplos de prerradicales.

Ejemplos

(1) Sea R un anillo y ς una clase de R-módulos. Definimos el funcional

$$\begin{array}{l} \text{R-Mod} \xrightarrow{\mathtt{tr}_\varsigma} \text{R-Mod} \\ \quad M \longmapsto \sum \big\{Im(g)\big|\ g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\big\} \end{array}$$

Veamos que $\mathtt{tr}_\varsigma$ es un prerradical de R-Mod:

1] Si $M \in$ R-Mod, como $\{Im(g)|g \in \mathsf{Hom}_R(U, M)$ y $U \in \varsigma\}$ es una familia de submódulos de M, ocurre que $\sum\{Im(g)|g \in \mathsf{Hom}_R(U, M)$ y $U \in \varsigma\} \leqslant M$.

2] Si $f \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$, observamos que

$$\begin{aligned} f\big(\mathtt{tr}_\varsigma(M)\big) &= f\big(\textstyle\sum\{Im(g)|\ g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\}\big) \\ &= \textstyle\sum\big\{f\big(Im(g)\big)|\ g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\big\} \\ &= \textstyle\sum\big\{Im\big(fg\big)|\ g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\big\} \\ &\subseteq \textstyle\sum\{Im(h)|\ h \in \mathsf{Hom}_R(U, N) \text{ y } U \in \varsigma\} \\ &= \mathtt{tr}_\varsigma(N). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathtt{tr}_\varsigma$ es un prerradical. Llamamos a $\mathtt{tr}_\varsigma(M)$ *la traza de* ς *en* M.

(2) Sea R es un anillo. La asignación

$$\begin{array}{l} \text{R-Mod} \xrightarrow{\mathtt{Zoc}} \text{R-Mod} \\ \quad M \longmapsto \sum\{N \mid N \leqslant M \text{ y } N \text{ es simple}\}. \end{array}$$

es un prerradical:

1] Sea $M \in$ R-Mod. Por definición $\mathtt{Zoc}(M)$=$\sum\{N \leqslant M|N$ es simple$\} \leqslant M$.

2] Tomemos un $f \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$. Como $\mathtt{Zoc}(M)$ es una suma de módulos simples, $\mathtt{Zoc}(M)$ es semisimple, de hecho, puesto que $\mathtt{Zoc}(M)$ contiene a cada suma de submódulos simples de M, $\mathtt{Zoc}(M)$ es el mayor submódulo semisimple de M. Ahora, en vista de que imágenes (bajo morfismos) de módulos semisimples son semisimples, se tiene que $f\big(\mathtt{Zoc}(M)\big)$ es un submódulo semisimple de N, por lo tanto $f\big(\mathtt{Zoc}(M)\big) \subseteq \mathtt{Zoc}(N)$.

Si $M \in$R-Mod, decimos que $\mathtt{Zoc}(M)$ es *el zoclo de M.*

(3) Si R es un anillo, definimos el funcional $\mathtt{Sing}$ como:

$$\begin{array}{l} \text{R-Mod} \xrightarrow{\mathtt{Sing}} \text{R-Mod} \\ \quad M \longmapsto \{m \in M \mid (0 : m) \subseteq_e {}_RR\} \end{array}$$

Tal asignación es un prerradical de R-Mod:

1] Sea $M \in$ R-Mod. De la definición es inmediato que $\mathtt{Sing}(M) \subseteq M$ y que $0 \in \mathtt{Sing}(M)$. Si $m_1, m_2 \in \mathtt{Sing}(M)$, entonces $(0{:}m_1), (0{:}m_2) \subseteq_e {}_RR$ y por consiguiente $(0{:}m_1) \cap (0{:}m_2) \subseteq_e {}_RR$, como $(0{:}m_1) \cap (0{:}m_2) \subseteq (0{:}m_1 + m_2)$, del Lema 1.1.12 se sigue que $(0{:}m_1 + m_2) \subseteq_e {}_RR$; luego $m_1 + m_2 \in \mathtt{Sing}(M)$. Por otro lado, sean $m \in \mathtt{Sing}(M)$ y $r \in R$. Para mostrar que $rm \in \mathtt{Sing}(M)$ necesitamos llegar a que $(0{:}rm) \subseteq_e {}_RR$, para lograrlo nos apoyaremos en el Lema 1.1.11. Sea pues $0 \neq s \in R$. Si $s \in (0{:}rm)$ no hay nada que probar, supongamos entonces que $s \notin (0{:}rm)$. Así $s(rm) \neq 0$ y por lo tanto $0 \neq sr \in$R, ya que $(0{:}m) \subseteq_e {}_RR$ por la elección de m, del Lema 1.1.11 se infiere la existencia de un $t \in$ R de modo que $0 \neq t(sr) \in (0{:}m)$; luego $0 \neq ts \in (0{:}rm)$, de esto, y del Lema 1.1.11, se sigue que $(0{:}rm) \subseteq_e {}_RR$

2] Sea $f \in \mathsf{Hom}_R(M, N)$. Si $x \in f\big(\mathtt{Sing}(M)\big)$, entonces $x = f(y)$ para algún $y \in M$ tal que $(0{:}y) \subseteq_e {}_RR$. Del hecho de que f es un R-morfismo se obtiene que $(0{:}y) \subseteq (0{:}f(y))$, luego el Lema 1.1.12 mplica que $(0{:}f(y)) \subseteq_e {}_RR$, y así $x = f(y) \in \mathtt{Sing}(N)$.

(4) Consideremos un anillo R. El funcional

$$\begin{aligned} \text{R-Mod} &\xrightarrow{\mathtt{Rad}} \text{R-Mod} \\ M &\longmapsto \bigcap\{N \mid N \underset{máx}{\leqslant} M\} \end{aligned}$$

resulta ser un prerradical. Al R-módulo $\mathtt{Rad}(M)$ se le llama *el radical de M.*

(5) Sea R un anillo. Definimos a las asignaciones $\underline{1}$ y $\underline{0}$ como:

$$\begin{aligned} \text{R-Mod} &\xrightarrow{\underline{1}} \text{R-Mod} \\ M &\longmapsto M \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{R-Mod} &\xrightarrow{\underline{0}} \text{R-Mod} \\ M &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

respectivamente. Ambas asignaciones son prerradicales de R-Mod.

(6) Sea R un anillo. Cada ${}_RI \leqslant {}_RR$ induce la siguiente asignación

$$\begin{aligned} \text{R-Mod} &\xrightarrow{I\cdot} \text{R-Mod} \\ M &\longmapsto I \cdot \_(M) \doteqdot IM \end{aligned}$$

la cual es, también, un prerradical de R-Mod.[2]

Dado R un anillo, a la clase de de todos los prerradicales de R-Mod la vamos a denotar por R-Pr. Con esta notación, se tiene por ejemplo que $\mathtt{tr}_\varsigma, \mathtt{Zoc}, \mathtt{Rad}$, $\underline{0}$, $\underline{1}\in$R-Pr. Introducimos ahora una nueva definición.

Definición
Sea X una familia en R-Pr. Si X es no vacía, definimos la asignación

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge_{Pr} X{:}\text{R-Mod} &\longrightarrow \text{R-Mod} \\ M &\longmapsto \bigcap\{\mathtt{r}(M) \mid \mathtt{r} \in X\} \end{aligned}$$

Si $X = \varnothing$, definimos $\bigwedge_{Pr} X \doteqdot \underline{1}$.

[2] Si ${}_RI \leqslant {}_RR$ y $M \in$ R-Mod, entonces $IM \doteqdot \{\sum_{i=1}^n a_i m_i | a_i \in I, m_i \in M$ y $n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Aún en el caso en que la familia X no sea un conjunto, la colección $\{\mathtt{r}(M)|\mathtt{r} \in X\}$ sí lo es, pues de hecho $\{\mathtt{r}(M)|\mathtt{r} \in X\} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Por este motivo, $\bigwedge_{Pr} X$ tiene sentido. Por otro lado, ya vimos que la asignación $\bigwedge_{Pr} \varnothing$ es un prerradical; pero también se puede ver que $\bigwedge_{Pr}$R-Pr$= \underline{0}$, así $\bigwedge_{Pr}$R-Pr resulta ser de nuevo un prerradical.

Lema (4.2.1)
Sea X una familia en R-Pr. Entonces, $\bigwedge_{Pr} X \in$ R-Pr.

Demostración:
Supongamos $X \neq \varnothing$. Sea M un R-módulo y sea $f \in \mathsf{Hom}_R(M,N)$.

1] De la definición se verifica que $\bigwedge_{Pr} X(M) \leqslant M$.

2] Notemos que

$$\begin{aligned} f\big(\textstyle\bigwedge_{Pr} X(M)\big) &= f\left(\bigcap\{\mathtt{r}(M)|\mathtt{r} \in X\}\right) \\ &\subseteq \bigcap\{f\big(\mathtt{r}(M)\big)|\mathtt{r} \in X\} \\ &\subseteq \bigcap\{\mathtt{r}(N)|\mathtt{r} \in X\} \\ &= \textstyle\bigwedge_{Pr} X(N). \end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente $\bigwedge_{Pr} X$ es un prerradical. ■

Tal como hicimos con R-Wis, dotamos a R-Pr de un orden. Tal relación de orden concederá a R-Pr una estructura particular, de la cual nos apoyaremos para encontrar el vínculo entre R-Wis y R-Pr prometido al inicio de esta sección.

Definición
Dados $\mathtt{r}, \mathtt{s} \in$ R-Pr, escribiremos $\mathtt{r} \preceq \mathtt{s}$ siempre que ocurra que $\mathtt{r}(M) \leqslant \mathtt{s}(M)$ para cualquier $M \in$ R-Mod.

No es difícil ver que $\big($R-Pr, $\preceq\big)$ es una clase parcialmente ordenada y que los prerradicales $\underline{0}$ y $\underline{1}$ son el elemento menor y el elemento mayor, respectivamente, de R-Pr con respecto al orden $\preceq$. De hecho veremos que la estructura de R-Pr, como clase ordenada, es mucho más rica y bondadosa de lo que uno en principio supone.

Definición
Si $X \subseteq$ R-Pr, definimos $\bigvee_{Pr} X \doteqdot \bigwedge_{Pr} \{\mathtt{s} \in \text{R-Pr} \mid \forall \mathtt{r} \in X\big(\mathtt{r} \preceq \mathtt{s}\big)\}$

De la definición y del Lema 4.2.1 uno obtiene que $\bigvee_{Pr} X \in$R-Pr para cualquier $X \subseteq$R-Pr, pues incluso sucede que $\bigvee_{Pr} \varnothing = \bigwedge_{Pr}$ R-Pr $= \underline{0}$ y $\bigvee_{Pr}$ R-Pr $= \underline{1}$. Si logramos probar que para cualquier $X \subseteq$ R-Pr, el prerradical $\bigwedge_{Pr} X$ es el ínfimo y el prerradical $\bigvee_{Pr} X$ es el supremo, respectivamente, de X, tendríamos entonces que (R-Pr, $\preceq$) tiene estructura de retícula completa.

Lema (4.2.2)
Si X es una familia en R-Pr, entonces $\bigwedge_{Pr} X$ es el ínfimo de X y $\bigvee_{Pr} X$ es el supremo de X en $\big($R-Pr, $\preceq\big)$.

Demostración:
Tomamos una familia de prerradicales X. Si $X = \varnothing$, las afirmaciones son ciertas. Supongamos entonces que $X \neq \varnothing$.

Afirmación: $\bigwedge_{Pr} X$ es la mayor de las cotas inferiores de X en (R-Pr, $\preceq$).

Sea $\mathtt{r} \in X$. Entonces $\bigwedge_{Pr} X(M) = \bigcap\{\mathtt{r}(M)|\mathtt{r} \in X\} \leqslant \mathtt{r}(M)$ para cada módulo M. Por lo tanto $\bigwedge_{Pr} X \preceq \mathtt{r}$ para cada $\mathtt{r} \in X$. De aquí que $\bigwedge_{Pr} X$ es cota inferior de X. Ahora, si $\mathtt{q}$ es una cota inferior de X en (R-Pr, $\preceq$) y M un módulo, sucede que $\mathtt{q}(M) \leqslant \mathtt{r}(M)$ para cada $\mathtt{r} \in X$; obteniendo con esto que $\mathtt{q}(M) \leqslant \bigcap \{\mathtt{r}(M) | \mathtt{r} \in X\}$, por consiguiente $\mathtt{q} \preceq \bigwedge_{Pr} X$. Así $\bigwedge_{Pr} X$ es la mayor de las cotas inferiores.

Afirmación: $\bigvee_{Pr} X$ es la menor de las cotas superior de X en (R-Pr, $\preceq$). Hacemos $\Lambda \doteqdot \{\mathtt{s} \in \text{R-Pr} | \forall \mathtt{r} \in X (\mathtt{r} \preceq \mathtt{s})\}$ y tomamos $M \in$R-Mod. Sea $\mathtt{r} \in X$. Como $\mathtt{r}(M) \leqslant \mathtt{s}(M)$ para todo $\mathtt{s} \in \Lambda$, se tiene que $\mathtt{r}(M) \leqslant \bigcap\{\mathtt{s}(M) | \mathtt{s} \in \Lambda\}$, así $\mathtt{r}(M) \leqslant \bigvee_{Pr} X(M)$. Luego $\mathtt{r} \preceq \bigvee_{Pr} X$ para cada $\mathtt{r} \in X$. Además, si $\mathtt{t}$ es un prerradical tal que $\mathtt{r}(M) \leqslant \mathtt{t}(M)$ para cada $\mathtt{r} \in X$, entonces $\mathtt{t} \in \Lambda$ y por ello $\bigvee_{Pr}(M) = \bigcap\{\mathtt{s}(M) \mid \mathtt{s} \in \Lambda\} \leqslant \mathtt{t}(M)$. Por lo tanto $\bigvee_{Pr} X$ es la menor de las cotas superiores de X en (R-Pr, $\preceq$). ■

Las propiedades de la clase ordenada (R-Pr, $\preceq$) que resalta el lema anterior nos llevan a concluir directamente el siguiente resultado.

Teorema (4.2.3)
Si R es un anillo, entonces $\left(\text{R-Pr}, \preceq, \bigwedge_{Pr}, \bigvee_{Pr}, \underline{0}, \underline{1}\right)$ es una gran retícula completa.

Entonces R-Pr admite una estructura de retícula completa al igual que lo hacer R-Wis, de este modo vamos poco a poco encontrando similitudes entre estas dos retículas. En lo que sigue construiremos los peldaños necesarios para llegar a relacionar estrechamente, aunque sea en parte, a las retículas R-Wis y R-Pr.

Lema (4.2.4)
Sea $\mathtt{r} \in$ R-Pr y sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq$ R-Mod. Entonces, $\mathtt{r}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \mathtt{r}(M_i)$.
Demostración:
Por definición de prerradical tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[r, two heads, "\pi_j"] & M_j \\ \mathtt{r}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\pi_j|"] & \mathtt{r}(M_j) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $j \in I$. De este modo, si $(x_i) \in \mathtt{r}(\oplus_{i \in I} M_i)$, ocurre entonces que $x_j = \pi_j((x_i)) \in \mathtt{r}(M_j)$ para cada $j \in I$; luego $(x_i) \in \oplus_{i \in I} \mathtt{r}(M_i)$. Por lo tanto $\mathtt{r}(\oplus_{i \in I} M_i) \subseteq \oplus_{i \in I} \mathtt{r}(M_i)$. Por otro lado tenemos, para cada $j \in I$, que

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r, tail, "\eta_j"] & \bigoplus_{i \in I} M_i \\ \mathtt{r}(M_j) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\eta_j|"] & \mathtt{r}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. De la familia $\{\eta_i| : \mathtt{r}(M_i) \to \mathtt{r}(\oplus_{i \in I} M_i)\}_{i \in I}$ de morfismos se obtiene el morfismo $\oplus_{i \in I} (\eta_i|) : \oplus_{i \in I} \mathtt{r}(M_i) \to \mathtt{r}(\oplus_{i \in I} M_i)$ por el Lema 1.1.5, el cual, para cada $j \in I$, hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{r}\,(M_j) \arrow[r, "\eta_j|"] \arrow[d, tail, "\eta'_j"'] & \mathtt{r}\left(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i\right) \\
\bigoplus\limits_{i\in I} \mathtt{r}(M_i) \arrow[ur, "\bigoplus\limits_{i\in I}(\eta_i|)"'] &
\end{tikzcd}$$

conmute; de aquí que si $(x_i) \in \oplus_{i\in I}\mathtt{r}(M_i)$, entonces $\oplus_{i\in I}(\eta_i|)\big((x_i)\big) = (x_i)$. Pero $\oplus_{i\in I}(\eta_i|)\big((x_i)\big) \in \mathtt{r}\,(\oplus_{i\in I}M_i)$, así que $\mathtt{r}\,(\oplus_{i\in I}M_i) \supseteq \oplus_{i\in I}\mathtt{r}(M_i)$. ■

Ahora veamos que a cada prerradical se le puede asociar una clase módulos con propiedades particulares. Después nos ocuparemos de la situación inversa.

Definición
Sea $\mathtt{r} \in$ R-Pr. Definimos, $\mathcal{T}_{\mathtt{r}} \doteqdot \{M \in \text{R-Mod} \mid \mathtt{r}(M) = M\}$.

Lema (4.2.5)
Para cada $\mathtt{r} \in$ R-Pr se tiene que $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ es una clase de pretorsión.

Demostración:
Sean $M, N \in$R-Mod y $\mathtt{r} \in$R-Pr.

$\cong$] Supongamos que $M \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ y que $M \overset{f}{\cong} N$. Como $\mathtt{r}$ es prerradical, entonces $f\big(\mathtt{r}(M)\big) \subseteq \mathtt{r}(N) \subseteq N$. Puesto que $M \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$, entonces $f\big(M\big) = f\big(\mathtt{r}(M)\big)$. Y ya que $f(M) = N$, concluimos que $N \subseteq \mathtt{r}(N) \subseteq N$. Por lo tanto $\mathtt{r}(N) = N$, obteniendo con esto que $N \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$.

$/$] Si $N \leqslant M$ y $M \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$, procediendo parecido al paso anterior, tenemos que $M/N{=}\pi(M){=}\pi\big(\mathtt{r}(M)\big) \subseteq \mathtt{r}(M/N) \subseteq M/N$. Luego $M/N \subseteq \mathtt{r}(M/N) \subseteq M/N$ y así $M/N \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$.

$\bigoplus$] Tomemos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía en $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. Entonces $\mathtt{r}(M_i) = M_i$ para cada $i \in I$, de esto y del Lema 4.2.4 se sigue que $\mathtt{r}(\oplus_{i\in I}M_i) = \oplus_{i\in I}\mathtt{r}(M_i)$ $= \oplus_{i\in I}M_i$. Por lo tanto $\oplus_{i\in I}M_i \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. ■

El Lema 4.2.5 sugiere un buen nombre para la clase $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. Si $\mathtt{r} \in$R-Pr, llamaremos *clase de pretorsión de* $\mathtt{r}$ a la clase $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. Por otra parte, hay prerradicales que se destacan de otros por sus propiedades particulares, por ello le pondremos nombre a los prerradicales que cumplen una cierta propiedad, el valor del comportamiento de tales prerradicales se apreciará en los próximos resultados.

Definición
Sea $\mathtt{r} \in$R-Pr. Decimos que:
1.- $\mathtt{r}$ es *idempotente* si $\mathtt{r} \circ \mathtt{r} = \mathtt{r}$.
2.- $\mathtt{r}$ es *exacto izquierdo* si para toda sucesión exacta en R-Mod

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathtt{r}(A) \xrightarrow{f|} \mathtt{r}(B) \xrightarrow{g|} \mathtt{r}(C)$$

es una sucesión exacta en R-Mod.

Si $\mathtt{r} \in$R-Pr y $M \in$R-Mod, entonces $\mathtt{r}(N) \subseteq \mathtt{r}(M) \cap N$ para cualquier $N \leqslant M$. Las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathtt{r}$ nos provea la igualdad en la contención anterior será nuestro siguiente resultado, pero antes necesitamos un lema.

Lema (4.2.6)

Sean $\mathtt{r} \in$R-Pr y $A, B \in$R-Mod tales que $A \overset{\varphi}{\cong} B$. Entonces, $\mathtt{r}(A) \overset{\varphi|}{\cong} \mathtt{r}(B)$.

Demostración:

Por hipótesis los dos diagramas

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & B & \xrightarrow{\quad\varphi^{-1}\quad} & A \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & {\scriptstyle i}\uparrow & & {\scriptstyle i}\uparrow \\ \mathtt{r}(A) & \xrightarrow{\varphi|} & \mathtt{r}(B) & \xrightarrow{\varphi^{-1}|} & \mathtt{r}(A) \end{array}$$

son conmutativos. Por ser $\varphi|$ la restricción de un monomorfismo, vuelve a ser un monomorfismo. Ahora, si $y \in \mathtt{r}(B)$, se tiene que $\varphi^{-1}|(y) \in \mathtt{r}(A)$. Así $\varphi^{-1}|(y) \in \mathtt{r}(A)$ es tal que $\varphi(\varphi^{-1}|(y))=y$. Por lo tanto $\varphi|$ es isomorfismo. ■

Proposición (4.2.7)

Sea $\mathtt{r} \in$R-Pr. Entonces $\mathtt{r}$ es exacto izquierdo si y sólo si para todo $M \in$R-Mod se tiene que $\mathtt{r}(N) = \mathtt{r}(M) \cap N$ para cada $N \leqslant M$.

Demostración:

$\Rightarrow]$ Sean $M \in$R-Mod, $N \leqslant M$ y $L \doteq M/N$. Al considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{\pi}{\longrightarrow} L \longrightarrow 0$$

se obtiene que

$$0 \longrightarrow \mathtt{r}(N) \overset{i|}{\hookrightarrow} \mathtt{r}(M) \overset{\pi|}{\longrightarrow} \mathtt{r}(L)$$

es exacta. Entonces $Im(i|) = Ker(\pi|)$. Ahora, por un lado $Im(i|) = \mathtt{r}(N)$, y por otro $Ker(\pi|) = \mathtt{r}(M) \cap Ker(\pi)$. Pero $Ker(\pi) = Im(i) = N$. Así que $\mathtt{r}(N) = Im(i|) = Ker(\pi|) = \mathtt{r}(M) \cap N$.

$\Leftarrow]$ Consideremos

$$0 \longrightarrow A \overset{f}{\longrightarrow} B \overset{g}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en R-Mod. Queremos probar que

$$0 \longrightarrow \mathtt{r}(A) \overset{f|}{\longrightarrow} \mathtt{r}(B) \overset{g|}{\longrightarrow} \mathtt{r}(C)$$

es exacta, entonces veremos que $f|$ es monomorfismo y que $Im(f|)=Ker(g|)$. Como f es un monomorfismo, también lo será $f|$. Por otra parte observamos que $g \circ f = \hat{0}$, por ello $g| \circ f| = \big(g \circ f\big)\big| = \big(\hat{0}\big)\big| = \hat{0}$; consiguiendo de este modo que $Im(f|) \subseteq Ker(g|)$. Para mostrar la otra contención, sea $x \in Ker(g|)$. Ya que $Ker(g|)=\mathtt{r}(B) \cap Ker(g)$ y $Ker(g)=Im(f)$, entonces $x \in \mathtt{r}(B) \cap Im(f)$. Como $Im(f) \leqslant B$, por hipótesis obtenemos que $\mathtt{r}\big(Im(f)\big) = \mathtt{r}(B) \cap Im(f)$. Entonces $x \in \mathtt{r}\big(Im(f)\big)$. Ahora, como hay un isomorfismo $\varphi : A \to Im(f)$, tenemos, gracias al Lema 4.2.6, que $\varphi| : \mathtt{r}(A) \to \mathtt{r}\big(Im(f)\big)$ es un isomorfismo. Saliendo un poco de contexto notemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Im(f) & \overset{i_1}{\hookrightarrow} & B \\ {\scriptstyle \varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id} \\ A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ {\scriptstyle i_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_3} \\ \mathtt{r}(A) & \xrightarrow{\quad f| \quad} & \mathtt{r}(B) \end{array}$$

conmuta. Entonces $i_1 \circ \varphi \circ i_2 = id \circ i_3 \circ f|$. Al retomar que $x \in \mathtt{r}\big(Im(f)\big)$ y

$\mathtt{r}(A) \overset{\varphi|}{\cong} \mathtt{r}\big(Im(f)\big)$, se desprende que hay un (único) $y \in \mathtt{r}(A)$ tal que $\varphi(y)=x$. De esta suerte llegamos a que $x = \varphi(y) = i_1 \circ \varphi \circ i_2(y) = id \circ i_3 \circ f|(y) = f(y)$. Por lo tanto $x = f(y)$ para algún $y \in \mathtt{r}(A)$, esto es; $x \in Im(f|)$. Concluimos de este modo que $Im(f|) \supseteq Ker(g|)$. ■

Usaremos la proposición anterior para dar algunos ejemplos de prerradicales exactos izquierdos. De hecho los siguientes prerradicales nos van a ser muy útiles en el próximo capítulo.

Ejemplos

(1) El prerradical $\mathtt{Zoc}$: R-Mod → R-Mod es exacto izquierdo.
Prueba: Sean $M, N \in$ R-Mod tales de $N \leqslant M$. Como $\mathtt{Zoc} \in$ R-Pr, se tiene que $\mathtt{Zoc}(N) \subseteq N \cap \mathtt{Zoc}(M)$. Ahora bien, puesto que $N \cap \mathtt{Zoc}(M) \leqslant \mathtt{Zoc}(M)$ y $\mathtt{Zoc}(M)$ es semisimple, $N \cap \mathtt{Zoc}(M)$ debe de ser un módulo semisimple; debido a que $\mathtt{Zoc}(N)$ es el mayor submódulo semisimple de N, concluimos que $N \cap \mathtt{Zoc}(M) \subseteq \mathtt{Zoc}(N)$. Luego $\mathtt{Zoc}(N) = N \cap \mathtt{Zoc}(M)$.

(2) $\mathtt{Sing}$: R-Mod → R-Mod es un prerradical exacto izquiedo.
Prueba: Sean $M, N \in$ R-Mod tales de $N \leqslant M$. En vista de que $\mathtt{Sing} \in$ R-Pr, sabemos que $\mathtt{Sing}(N) \subseteq N \cap \mathtt{Sing}(M)$. Por otro lado, si $x \in N \cap \mathtt{Sing}(M)$, entonces $x \in N$ y $(0{:}x) \subseteq_e {}_R R$, de aquí que $x \in \mathtt{Sing}(N)$. En resumen, sucede que $\mathtt{Sing}(N) = N \cap \mathtt{Sing}(M)$.

(3) Los prerradicales $\underline{1}$:R-Mod → R-Mod y $\underline{0}$:R-Mod → R-Mod son exactos izquierdos.

De hecho también es posible caracterizar a los prerradicales exactos izquierdos a través de su clase de pretorsión y comportamiento con respecto a la composición.

Proposición (4.2.8)
Sea $\mathtt{r} \in$R-Pr. Entonces, $\mathtt{r}$ es exacto izquierdo si y sólo si $\mathtt{r}$ es idempotente y la clase $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ es hereditaria.

Demostración:
⇒] Si $M \in$ R-Mod, ya que $\mathtt{r}(M) \leqslant M$, entonces $\mathtt{r}\big(\mathtt{r}(M)\big) = \mathtt{r}(M) \cap \mathtt{r}(M)$ por ser $\mathtt{r}$ exacto izquierdo. Luego $\mathtt{r}\big(\mathtt{r}(M)\big) = \mathtt{r}(M)$ para cada $M \in$ R-Mod. Por lo tanto $\mathtt{r} \circ \mathtt{r} = \mathtt{r}$. Ahora veamos que $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ es hereditaria. Sea $M \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ y sea $N \leqslant M$. Por la exactitud izquierda de $\mathtt{r}$ tenemos que $\mathtt{r}(N) = \mathtt{r}(M) \cap N$. Pero $\mathtt{r}(M) = M$, así que $\mathtt{r}(N) = M \cap N = N$. Entonces $N \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$.

⇐] Tomamos $M \in$R-Mod y $N \leqslant M$. Probemos que $\mathtt{r}(N) = \mathtt{r}(M) \cap N$, para ello basta con mostrar que $\mathtt{r}(M) \cap N \subseteq \mathtt{r}(N)$. Como $\mathtt{r}$ es idempotente, se obtiene que $\mathtt{r}\big(\mathtt{r}(M)\big) = \mathtt{r}(M)$; así $\mathtt{r}(M) \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. Ya que $N \cap \mathtt{r}(M) \leqslant \mathtt{r}(M)$ y $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ es hereditaria, llegamos a que $N \cap \mathtt{r}(M) \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. Entonces

$$\begin{tikzcd} N \cap \mathtt{r}(M) \arrow[r, hook, "i"] & N \\ N \cap \mathtt{r}(M) = \mathtt{r}\big(N \cap \mathtt{r}(M)\big) \arrow[u, hook] \arrow[r, "i|"] & \mathtt{r}(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto $\mathtt{r}(M) \cap N \subseteq \mathtt{r}(N)$. ■

Dado R un anillo, a la clase de todos *los prerradicales idempotentes de R-Mod le llamaremos R-Prid* y a la clase de *los prerradicales exactos izquierdos de R-Mod la denotaremos por R-Prei.*

Corolario (4.2.9)
Las siguientes contenciones de clases son ciertas: R-Prei $\subseteq$ R-Prid $\subseteq$ R-Pr.

Si R es un anillo, a la clase de las clases de R-módulos que son de pretorsión la vamos a denotar por R-PTor. Entonces R-Wis $\subseteq$ R-PTor y, por el Lema 4.2.5, $\mathcal{T}_{\mathtt{r}}$ $\in$R-PTor para cada prerradical $\mathtt{r}$ de R-Mod.

Lema (4.2.10)
Sean $\varsigma \in$ R-PTor y $M \in$ R-Mod. Entonces, $\mathtt{tr}_\varsigma(M)$ es el mayor submódulo de M que pertenece a ς.

Demostración:
Si $U \in \varsigma$ y $g \in \mathsf{Hom}_R(U, M)$, entonces $g(U) \in \varsigma$ por ser ς cerrada bajo cocientes e isomorfismos. Así $\{g(U) | g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\} \subseteq \varsigma$. Ahora, como ς es cerrada bajo sumas directas, $\oplus\{g(U) \mid g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\} \in \varsigma$. Luego $\mathtt{tr}_\varsigma(M) = \sum\{g(U) \mid g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\} \in \varsigma$, nuevamente por ser ς cerrada bajo cocientes e isomorfismos. Entonces $\mathtt{tr}_\varsigma(M)$ es un submódulo de M que pertenece a ς, para ver que es el mayor con la propiedad tomemos $N \leqslant M$ de modo que $N \in \varsigma$. Como $i{:}N \hookrightarrow M$ es un R-morfismo, se obtiene que $i(N) \leqslant \sum\{g(U) | g \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\} = \mathtt{tr}_\varsigma(M)$. Por lo tanto $N \leqslant \mathtt{tr}_\varsigma(M)$. ■

Corolario (4.2.11)
Si $\varsigma \in$ R-PTor, entonces $\mathtt{tr}_\varsigma \in$ R-Prid.

Demostración:
Sean $\varsigma \in$ R-PTor y $M \in$ R-Mod. Ya que $\mathtt{tr}_\varsigma(M) \in \varsigma$ y, por el lema anterior, $\mathtt{tr}_\varsigma(\mathtt{tr}_\varsigma(M))$ es el mayor submódulo de $\mathtt{tr}_\varsigma(M)$ que pertenece a ς, tenemos que $\mathtt{tr}_\varsigma(\mathtt{tr}_\varsigma(M)) = \mathtt{tr}_\varsigma(M)$. ■

Es momento de establecer una correspondencia parcial entre R-Wis y R-Pr, tal correspondencia involucra a subclases, de las respectivas clases, y a la restricción de las relaciones de orden que en cada clase se tienen. Esta correspondencia nos acerca a la relación que queremos construir de R-Wis en -una subclase de- R-Pr.

Proposición (4.2.12)
Las clases ordenadas $(\text{R-PTor}, \subseteq)$ y $(\text{R-Prid}, \preceq)$ son isomorfas.

Demostración:
Consideremos las asignaciones

$$\begin{aligned} \text{R-PTor} &\xrightarrow{\mathtt{tr}_{(\ )}} \text{R-Prid} \\ \varsigma &\longmapsto \mathtt{tr}_\varsigma \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{R-Prid} &\xrightarrow{\mathcal{T}_{(\ )}} \text{R-PTor} \\ \mathtt{r} &\longmapsto \mathcal{T}_{\mathtt{r}} \end{aligned}$$

Ya vimos (Corolario 4.2.11) que si $\varsigma \in$ R-PTor, entonces $\mathtt{tr}_\varsigma$ $\in$R-Prid. También mostramos (Lema 4.2.5) que si $\mathtt{r} \in$ R-Pr, entonces $\mathcal{T}_{\mathtt{r}} \in$ R-PTor. Por lo tanto estas asignaciones tienen sentido. De hecho no es difícil ver que ambas asignaciones están bien definidas.

Afirmación 1: $\mathtt{tr}_{(\ )}$ es biyectiva y $(\mathtt{tr}_{(\ )})^{-1} = \mathcal{T}_{(\ )}$.

Demostración: Mostremos primero que $\mathcal{T}_{(\ )} \circ \mathtt{tr}_{(\ )} = Id_{\text{R-PTor}}$, para ello sea $\varsigma \in$ R-PTor. Veamos que $\mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_\varsigma)} = \varsigma$. Si $M \in \mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_\varsigma)}$, entonces $M = \mathtt{tr}_\varsigma(M) \in \varsigma$ debido al Lema 4.2.10, por lo tanto $\mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_\varsigma)} \subseteq \varsigma$. Ahora, $M \in \varsigma$ implica que $\mathtt{tr}_\varsigma(M) = M$ (Lema 4.2.10), luego $M \in \mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_\varsigma)}$, y así $\mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_\varsigma)} \supseteq \varsigma$. Probemos ahora que $\mathtt{tr}_{(\ )} \circ \mathcal{T}_{(\ )} = Id_{\text{R-Prid}}$. Tomamos un $\mathtt{r} \in$ R-Prid. Debemos ver que $\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})} = \mathtt{r}$. Sea $M \in$ R-Mod. Como $\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)$ (es el mayor submódulo de M que) pertenece a $\mathcal{T}_\mathtt{r}$, en particular $\mathtt{r}\big(\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)\big) = \mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)$; usando la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)) \arrow[r, hook, "i"] & M \\
\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M) = \mathtt{r}\big(\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)\big) \arrow[u, hook] \arrow[r, "i|"] & \mathtt{r}(M) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

se sigue que $\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M) \leqslant \mathtt{r}(M)$. Por lo tanto $\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})} \preceq \mathtt{r}$. Por otro lado, como $\mathtt{r}\big(\mathtt{r}(M)\big) = \mathtt{r}(M)$ por ser $\mathtt{r}$ idempotente, se infiere que $\mathtt{r}(M) \in \mathcal{T}_\mathtt{r}$ y así $\mathtt{r}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)$ (pues $\mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}(M)$ es el mayor submódulo de M que está en $\mathcal{T}_\mathtt{r}$). Entonces $\mathtt{r} \preceq \mathtt{tr}_{(\mathcal{T}_\mathtt{r})}$. ❐

Afirmación 2: Tanto $\mathtt{tr}_{(\ )}$ como $(\mathtt{tr}_{(\ )})^{-1}$ son morfismos de orden.

Demostración: Sean $\varsigma, \vartheta \in$ R-PTor tales que $\varsigma \subseteq \vartheta$. Veamos que $\mathtt{tr}_\varsigma \preceq \mathtt{tr}_\vartheta$. Si M es un R-módulo, entonces

$$\begin{aligned}
\mathtt{tr}_\varsigma(M) &= \textstyle\sum \{Im(f) \mid f \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \varsigma\} \\
&\leqslant \textstyle\sum \{Im(g) \mid g \in \mathsf{Hom}_R(V, M) \text{ y } V \in \vartheta\} \\
&= \mathtt{tr}_\vartheta(M).
\end{aligned}$$

Luego $\mathtt{tr}_\varsigma \preceq \mathtt{tr}_\vartheta$, y por lo tanto $\mathtt{tr}_{(\ )}$ preserva, en efecto, el orden. Ahora, sean $\mathtt{r}, \mathtt{s} \in$ R-Prid de modo que $\mathtt{r} \preceq \mathtt{s}$. Mostraremos que $\mathcal{T}_\mathtt{r} \subseteq \mathcal{T}_\mathtt{s}$. Si $M \in \mathcal{T}_\mathtt{r}$, entonces $\mathtt{r}(M) = M$, pero como $\mathtt{r} \preceq \mathtt{s}$, también tenemos que $\mathtt{r}(M) \leqslant \mathtt{s}(M)$; así que $M \leqslant \mathtt{s}(M) \leqslant M$, de aquí que $M \in \mathcal{T}_\mathtt{s}$. Obtenemos con esto que $\mathcal{T}_{(\ )}$ preserva orden. ❐

De la afirmación 1 y 2 concluimos que $\mathtt{tr}_{(\ )}$ es un isomorfismo de orden, de aquí que $\big(\text{R-PTor}, \subseteq\big) \cong \big(\text{R-Prid}, \preceq\big)$. ■

Es inmediato comprobar que los prerradicales $\underline{0}$ y $\underline{1}$ son exactos izquierdos. Así la clase ordenada $\big(\text{R-Prei}, \preceq\big)$ tiene por elemento mayor y por elemento menor a los mismos de la retícula completa $\big(\text{R-Pr}, \preceq\big)$. Veamos que de hecho la clase ordenada $\big(\text{R-Prei}, \preceq\big)$ admite una estructura de retícula completa.

Lema (4.2.13)
Si $X \subseteq$ R-Prei, entonces $\bigwedge_{Pr} X \in$ R-Prei.

Demostración:
Sea $X \subseteq$ R-Prei y supongamos que X es distinto del vacío. Ahora tomemos un $M \in$ R-Mod y un $N \leqslant M$. Debido a que $\bigwedge_{Pr} X \in$ R-Pr y

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_{Pr} X(N) &= \bigcap \{\mathtt{r}(N) | \mathtt{r} \in X\} \\ &= \bigcap \{\mathtt{r}(M) \cap N | \mathtt{r} \in X\} \\ &= \bigcap \{\mathtt{r}(M) | \mathtt{r} \in X\} \cap N \\ &= \bigwedge\nolimits_{Pr} X(M) \cap N,\end{aligned}$$

entonces $\bigwedge_{Pr} X \in$ R-Prei. ■

Con el fin de hacer amigable la notación, escribiremos $\bigwedge_{Pr} X \doteq \bigwedge_{Pr_{ei}} X$ siempre que X sea una familia en R-Prei. Aprovechemos el lema anterior introduciendo una definición.

Definición
Si $X \subseteq$ R-Prei, definimos $\bigvee_{Pr_{ei}} X \doteq \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\mathtt{s} \in \text{R-Prei} | \forall \mathtt{r} \in X (\mathtt{r} \preceq \mathtt{s})\}$.

Del mismo modo en como hicimos con R-Pr, se puede ver que, los prerradicales exactos izquierodos de R-Mod, $\bigwedge_{Pr_{ei}} X$ y $\bigvee_{Pr_{ei}} X$ son el ínfimo y el supremo, respectivamente, de cualquier $X \subseteq$R-Prei en $(\text{R-Prei}, \preceq)$. Con esto llegamos a nuestro siguiente resultado, que, a decir verdad, falta refinar.

Corolario (4.2.14)
Si R es un anillo, entonces $(\text{R-Prei}, \preceq, \bigwedge_{Pr_{ei}}, \bigvee_{Pr_{ei}}, \underline{0}, \underline{1})$ es una “gran” retícula completa.

Ahora es momento de establecer la tan deseada relación entre R-Wis y R-Pr, no obstante, en realidad sólo estamos interesados en relacionar a R-Wis con una “parte” de R-Pr, para ser más precisos, con R-Prei. Esto lo hacemos en el siguiente teorema, con el cual, básicamente, cerramos también esta sección.

Teorema (4.2.15)
Las retículas $\left(\text{R-Wis}, \leqslant, \bigwedge, \bigvee\right)$ y $\left(\text{R-Prei}, \preceq, \bigwedge_{Pr_{ei}}, \bigvee_{Pr_{ei}}\right)$ son isomorfas para cualquier anillo R.

Demostración:
Debido a la Proposición 4.2.12 y al Corolario 4.2.9 sabemos que

$$\begin{array}{ccc} \text{R-PTor} & \underset{\mathcal{T}_{(\ )}}{\overset{\mathtt{tr}_{(\ )}}{\rightleftarrows}} & \text{R-Prid} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{R-Wis} & & \text{R-Prei,} \end{array}$$

donde $(\text{R-PTor}, \subseteq) \cong (\text{R-Prid}, \preceq)$ mediante las asignaciones arriba indicadas; lo cual quiere decir que ambas son morfismos de orden y que de hecho $\left(\mathtt{tr}_{(\ )}\right)^{-1} = \mathcal{T}_{(\ )}$. Entonces, para segurar la afirmación del teorema que nos ocupa, basta ver (usando el Teorema 4.1.8, el Corolario 4.2.14 y la Proposición 1.3.3) que las asignaciones $\mathtt{tr}_{(\ )}$ y $\mathcal{T}_{(\ )}$ se restringen bien.

Afirmación 1: $\mathtt{tr}_{(\ )}\big| :$ R-Wis $\longrightarrow$ R-Prei

Demostración: Sea $\varsigma \in$ R-Wis. Debemos ver que $\mathtt{tr}_{(\varsigma)} \in$ R-Prei, no obstante la Proposición 4.2.8 nos dice que es suficiente probar que $\mathtt{tr}_{(\varsigma)} \in$ R-Prid y que $\mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_{(\varsigma)})}$ es hereditaria. Desde luego $\mathtt{tr}_{(\varsigma)} \in$ R-Prid. Además $\mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_{(\varsigma)})} = \varsigma$, obteniendo con esto, en particular, que $\mathcal{T}_{(\mathtt{tr}_{(\varsigma)})}$ es hereditaria. □

Afirmación 2: $\mathcal{T}_{(\ )}\big|$: R-Prei $\longrightarrow$ R-Wis.

Demostración: Sea $\mathtt{r} \in$ R-Prei y veamos que $\mathcal{T}_{(\mathtt{r})} \in$ R-Wis. Como $\mathtt{r} \in$ R-Prei, entonces, en virtud de la Proposición 4.2.8, $\mathcal{T}_{(\mathtt{r})}$ es hereditaria. Recordando que $\mathcal{T}_{(\mathtt{r})}$ es siempre una clase de pretorsión (Lema 4.2.5), lo anterior nos lleva a concluir que $\mathcal{T}_{(\mathtt{r})} \in$ R-Wis. ❑

Las dos afirmaciones se resumen en que $\mathtt{tr}_{(\ )}\big|$ es un isomorfismo de orden, con inversa $\mathcal{T}_{(\ )}\big|$, entre $\big(\text{R-Wis}, \leqslant\big)$ y $\big(\text{R-Prei}, \preceq\big)$. De la Proposición 1.3.3 se sigue que $\mathtt{tr}_{(\ )}\big|$ es un isomorfismo de retículas, entonces $\big(\text{R-Wis}, \leqslant, \wedge, \vee\big)$ es isomorfa a $\big(\text{R-Prei}, \preceq, \wedge_{Pr_{ei}}, \vee_{Pr_{ei}}\big)$. ■

Puesto que R-Wis es un conjunto (Proposición 4.1.5), la correspondencia biyectiva que establece el teorema anterior entre R-Wis y R-Prei nos asegura que R-Prei es en realidad un conjunto. Como este hecho lo vamos a emplear en la demostración del Teorema 4.4.14, conviene enunciarlo como corolario.

Corolario (4.2.16)
La clase R-Prei es un conjunto para cualquier anillo R.

4.3 Filtros de Ideales Izquierdos

En esta sección estudiaremos algunas propiedades básicas de los filtros de ideales izquierdos[3] que nos guiaran, entre otras cosas, a establecer una relación con las retículas de las secciones anteriores. Dicha relación la construiremos de manera parecida a como hicimos con R-Prei y R-Wis.

Definición
Sea R un anillo y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de ideales izquierdos de R. Diremos que $\mathcal{F}$ *es un filtro lineal de ideales izquierdos* siempre que cumpla las siguientes propiedades:

1.- Si $I \in \mathcal{F}$ y J es un ideal izquierdo de R tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{F}$.
2.- Si $I, J \in \mathcal{F}$, entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$.
3.- Si $I \in \mathcal{F}$ y $a \in$R, entonces $(I : a) \doteqdot \{r \in \text{R} \mid ra \in I\} \in \mathcal{F}$.

En adelante, si R es un anilo y $\mathcal{F}$ es un filtro lineal de ideales izquierdos de R, cuando no exista riesgo de confusión simplemente diremos que $\mathcal{F}$ es un filtro. Denotaremos a la familia de todos los filtros de R por R-Fil, en símbolos

$$\text{R-Fil} \doteqdot \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\text{R})\big) \mid \mathcal{F} \text{ es un filtro}\big\}$$

y de este modo es evidente que R-Fil es un conjunto. Así $\big(\text{R-Fil}, \subseteq\big)$ resulta ser un conjunto parcialmente ordenado.

Definición
Si I es un ideal bilateral de R, definimos $\eta[I] \doteqdot \{{}_RJ \leqslant {}_RR \mid I \subseteq J\}$.

De la definición se tiene que $R \in \eta[I]$ para cualquier ideal I de R, entonces $\eta[I]$ es una familia no vacía de ideales izquierdos de R, pero más que ser no vacía, $\eta[I]$ es un filtro según el siguiente lema.

[3] Para un estudio más profundo de los filtros de ideales izquierdos se puede consultar [19].

Lema (4.3.1)
Sea ${}_R I_R \leqslant {}_R R_R$. Entonces, $\eta[I] \in$ R-Fil.

Demostración:
1] Tomamos $J \in \eta[I]$ y ${}_R K \leqslant {}_R R$ de modo que $J \subseteq K$. Luego $I \subseteq J \subseteq K$, así que $I \subseteq K$ y por tanto $K \in \eta[I]$.
2] Dados $J, K \in \eta[I]$, se sigue $J \cap K$ es un ideal izquierdo de R que contiene a I. Entonces $J \cap K \in \eta[I]$.
3] Finalmente, sean $J \in \eta[I]$ y $a \in R$. Como $I \subseteq J$ y $xa \in I$ para cada $x \in I$ (por ser I, en particular, ideal derecho), se tiene $xa \in J$ para cada $x \in I$; de aquí que $I \subseteq \{r \in \mathrm{R} \mid ra \in J\} = (J : a)$, y así $(J : a) \in \eta[I]$. ∎

Observamos que $\eta[0] = \{J \subseteq R | J \leqslant {}_R R\}$ y $\eta[R] = \{R\}$, ya que cualquier filtro contiene a $\{R\}$ y todo filtro es una colección de ideales izquierdos, tenemos entonces que $\eta[R]$ es el elemento menor y $\eta[0]$ es el elemento mayor de R-Fil en $(\text{R-Fil}, \subseteq)$. La ruta a seguir de aquí hasta obtener la correspondencia de R-Fil con R-Wis, será muy parecida a la que recorrimos con R-Prei; hecho que por cierto se aprecia enseguida.

Definición
Sea $X \subseteq$ R-Fil. Entonces, $\bigwedge_{Fil} X \doteq \{I \in \eta[0] \mid \forall \mathcal{F} \in X (I \in \mathcal{F})\}$.

Lema (4.3.2)
Si $X \subseteq$ R-Fil, entonces $\bigwedge_{Fil} X \in$ R-Fil.

Demostración:
Si $X = \varnothing$, se tiene que $\bigwedge_{Fil} X = \eta[0]$. Supongamos entonces que $X \neq \varnothing$.
1] Sean $I \in \bigwedge_{Fil} X$ y ${}_R J \leqslant {}_R R$ tal que $I \subseteq J$. Entonces $I \in \mathcal{F}$ y $I \subseteq J$ para cada $\mathcal{F} \in X$, así que $J \in \mathcal{F}$ para cada $\mathcal{F} \in X$; es decir, $J \in \bigcap X$.
2] Si $I, J \in \bigwedge_{Fil} X$, tenemos que $I, J \in \mathcal{F}$ para cada $\mathcal{F} \in X$; así que $I \cap J \in \mathcal{F}$ para cada $\mathcal{F} \in X$.
3] Sean $I \in \bigwedge_{Fil} X$ y $a \in$R. Como $I \in \mathcal{F}$ para cada $I \in X$, entonces $(I{:}a) \in \mathcal{F}$ para cada $\mathcal{F} \in X$. ∎

Definición
Sea $X \subseteq$R-Fil. Al conjunto $\bigwedge_{Fil} \{\mathcal{G} \in \text{R-Fil} \mid \forall \mathcal{F} \in X (\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G})\}$ le llamaremos $\bigvee_{Fil} X$.

Del Lema 4.3.2 se obtiene que $\bigwedge_{Fil} X$ y $\bigvee_{Fil} X$ pertenecen a R-Fil para cualquier $X \subseteq$ R-Fil, podemos observar que incluso en los casos extremos esto ocurre: $\bigwedge_{Fil}$ R-Fil $= \eta[R] = \bigvee_{Fil} \varnothing$ y $\bigwedge_{Fil} \varnothing = \eta[0] = \bigvee_{Fil}$R-Fil. De hecho no es difícil probar que si $X \subseteq$ R-Fil, entonces $\bigwedge_{Fil} X$ es el ínfimo y $\bigvee_{Fil} X$ es el supremo, respectivamente, de X en $(\text{R-Fil}, \subseteq)$. De estas observaciones se desprende el siguiente teorema.

Teorema (4.3.3)
Si R es un anillo, entonces $(\text{R-Fil}, \subseteq, \bigwedge_{Fil}, \bigvee_{Fil}, \eta[\mathrm{R}], \eta[0])$ es una retícula completa.

Ahora asociamos una clase particular de módulos a cada filtro, la Proposición 4.3.4 asegurará que tal clase de módulos es de Wisbauer. Recíprocamente, a cada clase de Wisbauer le haremos corresponder una colección de ideales izquierdos; dicha familia de ideales será un filtro, como mostraremos en la Proposición 4.3.5.

Definición
Sea $\mathcal{F} \in$ R-Fil. Si $M \in$ R-Mod, decimos que M *es de $\mathcal{F}$-torsión* si para cada $m \in M$ se tiene que $(0 : m) \in \mathcal{F}$. A la clase de todos lo R-módulos que son de $\mathcal{F}$-torsión la denotaremos por $\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$.

Proposición (4.3.4)
Si $\mathcal{F} \in$ R-Fil, entonces $\mathsf{T}_{\mathcal{F}} \in$ R-Wis.

Demostración:
Sean $\mathcal{F} \in$ R-Fil y $M, N \in$R-Mod. Se ve que $\mathsf{T}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, pues el R-módulo cero es de de $\mathcal{F}$-torsión para cualquier $\mathcal{F} \in$ R-Fil.

$\cong$] Supongamos $M \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ y $M \overset{f}{\cong} N$. Queremos ver que $N \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$, por lo que tomamos un $n \in N$ y probaremos que $(0 : n) \in \mathcal{F}$. Como f es un isomorfismo, hay un (único) $m_n \in M$ tal que $f(m_n) = n$, pero además ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} r \in \big(0 : f(m_n)\big) &\Leftrightarrow rf(m_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(rm_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow rm_n = 0 \\ &\Leftrightarrow r \in (0 : m_n), \end{aligned}$$

y ya que M es de $\mathcal{F}$-torsión concluimos que $\big(0 : f(m_n)\big) = (0 : m_n) \in \mathcal{F}$. Sin embargo $(0 : n) = \big(0 : f(m_n)\big)$, así que $(0 : n) \in \mathcal{F}$.

$\leqslant$] Si $M \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ y $N \leqslant M$, entonces $n \in N$ implica $n \in M$; lo cual implica a su vez que $(0 : n) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto N es de $\mathcal{F}$-torsión.

$/$] Supongamos $N \leqslant M$ y $M \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$. Sea $\overline{m} \in M/N$ y veamos que $(\overline{0}{:}\overline{m}) \in \mathcal{F}$. Como $(\overline{0}{:}\overline{m}) = (N{:}m + N) = \{r \in R | r(m+N) = N\} = \{r \in R | rm \in N\} = (N : m)$ y $(0 : m) = \{r \in R | rm = 0\} \subseteq \{r \in R | rm \in N\} = (N : m)$, entonces tenemos que $(0{:}m) \subseteq (\overline{0}{:}\overline{m})$. Pero $(0{:}m) \in \mathcal{F}$, por ser M de $\mathcal{F}$-torisión, y $(\overline{0}{:}\overline{m}) \leqslant {}_RR$; así que $(\overline{0} : \overline{m}) \in \mathcal{F}$ por el inciso uno de la definición de filtro.

$\bigoplus$] Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ y $(x_i) \in \oplus_{i\in I} M_i$. Supongamos que I_0 es el subconjunto finito de I que contiene a los indices de todos los términos distintos de cero de (x_i). Debido a que $(0_i : x_i) \in \mathcal{F}$ para cada $i \in I_0$, el inciso dos de la definición de filtro arroja que $\bigcap\limits_{i\in I_0} (0_i : x_i) \in \mathcal{F}$. No obstante

$$\begin{aligned} \big((0_i) : (x_i)\big) &= \big\{r \in R | r(x_i) = (0_i)\big\} \\ &= \big\{r \in R | \forall i \in I (rx_i = 0_i)\big\} \\ &= \big\{r \in R | \forall i \in I_0 (rx_i = 0_i)\big\} \\ &= \big\{r \in R | \forall i \in I_0 \big(r \in (0_i : x_i)\big)\big\} = \bigcap_{i\in I_0} (0_i : x_i), \end{aligned}$$

así que $\big((0_i) : (x_i)\big) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\oplus_{i\in I} M_i \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$. ■

Definición
Si $\varsigma \in$ R-Wis, entonces $\mathsf{F}_{\varsigma} \doteqdot \big\{{}_RI \leqslant {}_RR \mid R/I \in \varsigma\big\}$.

Proposición (4.3.5)
Sea $\varsigma \in$ R-Wis. Entonces, $\mathsf{F}_{\varsigma} \in$ R-Fil.

Demostración:
Notamos que $R \in \mathsf{F}_\varsigma$, así F_ς es distinto del vacío. Sean ${}_RI, {}_RJ \leqslant {}_RR$ y $a \in R$.
1] Supongamos que $I \in \mathsf{F}_\varsigma$ y $I \subseteq J$. Entonces $R/I \in \varsigma$, luego $(R/I)/(J/I) \in \varsigma$ (pues ς es cerrada baja cocientes) y así, como $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ y ς es cerrada bajo isomorfismos, obtenemos $R/J \in \varsigma$; de aquí que $J \in \mathsf{F}_\varsigma$.

2] Si $I, J \in \mathsf{F}_\varsigma$, entonces $R/I \in \varsigma$ y $R/J \in \varsigma$. Usando que ς es cerrada bajo sumas directas, obtenemos que $R/I \oplus R/J \in \varsigma$. Fijándonos en el morfismo

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{\varphi} R/I \oplus R/J \\ r &\mapsto (r+I, r+J) \end{aligned}$$

vemos que podemos construir el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & R/I \oplus R/J \\ & R/(I \cap J) \end{tikzcd}$$

El cual es tal que $Ker(\pi) = I \cap J = Ker(\varphi)$, por este motivo (y gracias al Lema 1.1.2) existe un monomorfismo $\beta : R/(I \cap J) \rightarrowtail R/I \oplus R/J$ que hace conmutar dicho diagrama. Así que $R/(I \cap J) \cong Im(\beta) \leqslant R/I \oplus R/J$, pero $R/I \oplus R/J \in \varsigma$ y ς es cerrada bajo submódulos e isomorfismos; por consiguiente $R/(I \cap J) \in \varsigma$ y por este motivo $I \cap J \in \mathsf{F}_\varsigma$.

3] Supongamos que $I \in \mathsf{F}_\varsigma$. Al considerar el R-morfismo

$$\begin{aligned} \_ \cdot (a+I) : R &\longrightarrow R/I \\ r &\longmapsto r(a+I) \end{aligned}$$

conseguimos que $Ker\big(\_ \cdot (a+I)\big) = (\overline{0} : a+I)$. Pero como observamos en la demostración de la Proposición 4.3.4, sucede que $(I : a) = (\overline{0} : a+I)$. Entonces $R/(I{:}a) \cong Im\big(\_ \cdot (a+I)\big) \leqslant R/I$. Sin embargo $R/I \in \varsigma$ y ς es una clase cerrada bajo submódulos y copias isomorfas, así que $(I : a) \in \mathsf{F}_\varsigma$. ■

Las proposiciones 4.3.4 y 4.3.5 nos permiten establecer una correspondencia biyectiva entre R-Wis y R-Fil que además respeta su estructura como retículas.

Teorema (4.3.6)
Sea R un anillo. Entonces, $\big(\text{R-Wis}, \subseteq, \bigwedge, \bigvee\big)$ y $\big(\text{R-Fil}, \subseteq, \bigwedge_{Fil}, \bigvee_{Fil}\big)$ son retículas isomorfas.

Demostración:
Tengamos en cuenta la asignación

$$\begin{aligned} \text{R-Fil} &\xrightarrow{\mathsf{T}} \text{R-Wis} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathsf{T}_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

y la asignación

$$\begin{aligned} \text{R-Wis} &\xrightarrow{\mathsf{F}} \text{R-Fil} \\ \varsigma &\longmapsto \mathsf{F}_\varsigma \end{aligned}$$

Ambas asignaciones tienen sentido debido a las Proposiciones 4.3.4 y 4.3.5, además no es difícil probar que las dos son funciones. Pero más aún, notamos que se tienen las siguientes dos afirmaciones.

Afirmación 1: $\mathsf{F} \circ \mathsf{T} = Id_{R-Fil}$.

Demostración: Sea $\mathcal{F} \in$ R-Fil. Queremos mostrar que $\mathsf{F}_{\mathsf{T}_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$, por lo cual procedemos a demostrar ambas contenciones de conjuntos. Primero probaremos que $\mathsf{F}_{\mathsf{T}_{\mathcal{F}}} \subseteq \mathcal{F}$, así que tomamos un $I \in \mathsf{F}_{\mathsf{T}_{\mathcal{F}}}$. Por definición tenemos que $R/I \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$, así que $(\overline{0} : a+I) \in \mathcal{F}$ para cada $a+I \in R/I$, en particular $(\overline{0} : 1+I) \in \mathcal{F}$. En este momento recordamos que $(\overline{0} : 1+I) = (I : 1)$ y notamos que $(I : 1) = I$, por consiguiente $I \in \mathcal{F}$. Para ver la otra contención tomamos un $J \in \mathcal{F}$. De la definición de filtro tenemos que $(J : a) \in \mathcal{F}$ para toda $a \in R$; como $(J : a) = (\overline{0} : a+J)$, lo anterior nos dice que $(\overline{0} : a+J) \in \mathcal{F}$ para cada $a+J \in R/J$, consiguiendo con esto que $R/J \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ y por lo tanto que $J \in \mathsf{F}_{\mathsf{T}_{\mathcal{F}}}$. ❐

Afirmación 2: $\mathsf{T} \circ \mathsf{F} = Id_{R-Wis}$

Demostración: Tomamos $\varsigma \in$ R-Wis y lleguemos a que $\mathsf{T}_{\mathsf{F}_{\varsigma}} = \varsigma$. Sea $M \in \mathsf{T}_{\mathsf{F}_{\varsigma}}$. Luego $(0{:}m) \in \mathsf{F}_{\varsigma}$ para cada $m \in M$, es decir, $R/(0{:}m) \in \varsigma$ para cada $m \in M$. Como $R/(0 : m) \cong Rm = Im(\_ \cdot m)$ y ς es una clase cerrada bajo isomorfismos, se sigue que $Rm \in \varsigma$ para todo $m \in M$. Pero ς es cerrada también bajo sumas directas y cocientes, entonces $M = \sum_{m \in M} Rm \in \varsigma$. Recíprocamente, sea $N \in \varsigma$. Entonces $Rn \in \varsigma$ para cada $n \in N$ (por ser ς cerrada bajo submódulos), y, a causa de que $R/(0 : n) \cong Rn$ para toda $n \in N$ y de que ς es cerrada bajo isomorfismos, llegamos así a que $R/(0{:}n) \in \varsigma$ para cada $n{\in}N$; concluyendo de esto último que $N \in \mathsf{T}_{\mathsf{F}_{\varsigma}}$. ❐

De las afirmaciones deducimos que T es biyectiva y que $\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{F}$. Si logramos ver que T es un isomorfismo de orden, en virtud de la Proposición 1.3.3 tendríamos que R-Wis y R-Fil son retículas isomorfas.

Afirmación 3: Las asignaciones T y T^{-1} son morfismos de orden.

Demostración: Para comenzar, tomamos $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$ R-Fil de modo que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$; tenemos que demostrar que $\mathsf{T}(\mathcal{F}) \subseteq \mathsf{T}(\mathcal{G})$. Si $M \in \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$, entonces $(0 : m) \in \mathcal{F}$ para todo $m \in M$; así que $(0 : m) \in \mathcal{G}$ para cada $m \in M$, es decir $M \in \mathsf{T}_{\mathcal{G}}$. Únicamente nos resta demostrar que F también preserva el orden. Sean pues $\varsigma, \vartheta \in$ R-Wis tales que $\varsigma \subseteq \vartheta$. Por definición, $I \in \mathsf{F}_{\varsigma}$ implica $R/I \in \varsigma$, de aquí que $R/I \in \vartheta$ y por ello $I \in \mathsf{F}_{\vartheta}$; entonces $\mathsf{F}(\varsigma) \subseteq \mathsf{F}(\vartheta)$. ❐

De la Afirmación 3, el Teorema 4.1.8, el Teorema 4.3.3 y la Proposición 1.3.3 se deriva que $(\text{R-Wis}, \subseteq, \wedge, \vee) \cong (\text{R-Fil}, \subseteq, \wedge_{Fil}, \vee_{Fil})$. ■

Corolario (4.3.7)
Sea R un anillo. Las siguientes retículas son isomorfas:

1.- $\left(\text{R-Wis}, \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$.
2.- $\left(\text{R-Fil}, \subseteq, \bigwedge_{Fil}, \bigvee_{Fil}\right)$.
3.- $\left(\text{R-Prei}, \preceq, \bigwedge_{Pr_{ei}}, \bigvee_{Pr_{ei}}\right)$.

4.4 Submódulos F.I. de un Inyectivo Principal

Esta sección es diferente a las anteriores, ya que aquí abordaremos una nueva familia de prerradicales pero no con el fin de estudiarla, sino con la intención de utilizarla para introducir una familia de módulos particular: los módulos inyectivos principales. Lo que se pretende es, sin embargo, relacionar a cierta clase de submódulos de un inyectivo principal con las retículas anteriores; por lo que no exploraremos demasiado a los inyectivos principales, pero si se quiere indagar más al respecto se puede consultar [20].

Definición
Sea $M \in$R-Mod y sea $N \leqslant M$. Decimos que N es un *submódulo fuertemente invariante de* M, si para cada $f \in \mathsf{End}_R(M)$ se tiene que $f(N) \subseteq N$.

Para abreviar, el que N sea un submódulo fuertemente invariante de M será denotado por $N \leqslant_{fi} M$. Entonces:

$$N \leqslant_{fi} M \quad \text{si y sólo si} \quad \forall f \in \mathsf{End}_R(M)\big(f|_N \in \mathsf{End}_R(N)\big).$$

El siguiente lema muestra que, si miramos con cuidado, ya hemos trabajado con submódulos fuertemente invariantes.

Lema (4.4.1)
Sea $M \in$ R-Mod. Para cada $\mathtt{r} \in$ R-Pr se tiene que $\mathtt{r}(M) \leqslant_{fi} M$.

Demostración:
Si $\mathtt{r} \in$ R-Pr y $f \in \mathsf{End}_R(M)$, entonces $\mathtt{r}(M) \leqslant M$ y $f\big(\mathtt{r}(M)\big) \subseteq M$. ■

A partir de los submódulos fuertemente invariantes de un módulo vamos a construir una familia muy especial de prerradicales, a lo cuales llamaremos *prerradicales omega*; estos prerradicales serán piezas fundamentales en nuestro estudio. Comenzamos con la definición.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod y sea $N \leqslant_{fi} M$. Definimos la asignación ω_N^M como sigue:

$$\begin{aligned} \text{R-Mod} &\xrightarrow{\omega_N^M} \text{R-Mod} \\ K &\longmapsto \bigcap \big\{f^{-1}(N) \mid f \in \mathsf{Hom}_R(K, M)\big\} \end{aligned}$$

Desde luego el primer paso es notar que la asignación arriba definida es efectivamente un prerradical, luego analizaremos algunas de sus propiedades y comprobaremos su cardinal importancia.

Lema (4.4.2)
Si $M \in$ R-Mod y $N \leqslant_{fi} M$, entonces $\omega_N^M \in$ R-Pr.

Demostración:
Sean $M, K \in$ R-Mod, $N \leqslant_{fi} M$ y $g \in \mathsf{Hom}_R(U, V)$. De la definición se sigue que $\omega_N^M(K) \leqslant K$. Entonces sólo resta mostrar que $g(\omega_N^M(U)) \subseteq \omega_N^M(V)$, lo cual, por definición de $\omega_N^M(V)$, equivale a probar que $g(\omega_N^M(U)) \subseteq f^{-1}(N)$ para cualquier $f \in \mathsf{Hom}_R(V, M)$; ó bien a que $f\big(g(\omega_N^M(U))\big) \subseteq N$ para todo $f \in \mathsf{Hom}_R(V, M)$. Sean pues $f \in \mathsf{Hom}_R(V, M)$ y $a \in f\big(g(\omega_N^M(U))\big)$. Entonces $a = fg(b)$ para algún $b \in \omega_N^M(U)$. Como $b \in \omega_N^M(U)$, se tiene que $h(b) \in N$ para cada $h \in \mathsf{Hom}_R(U, M)$; en particular esto debe ocurrir para fg, por lo tanto $a = fg(b) \in N$. ■

Proposición (4.4.3)
Sean $M \in$ R-Mod y $N \leqslant_{fi} M$. Entonces, $\omega_N^M(M) = N$.

Demostración:
$\subseteq$] Si $a \in \omega_N^M(M)$, entonces $a \in f^{-1}(N)$ para toda $f \in \mathsf{End}_R(M)$, en particular $a \in Id_M^{-1}(N) = N$.
$\supseteq$] Si $a \in N$, como $N \leqslant_{fi} M$, para todo $f \in \mathsf{End}_R(M)$ se tiene que $f(a) \in N$, o lo que es lo mismo, $a \in f^{-1}(N)$; en resumen $N \subseteq f^{-1}(N)$ para cualquier $f \in \mathsf{End}_R(M)$, luego $N \subseteq \bigcap\{f^{-1}(N) | f \in \mathsf{End}_R(M)\} = \omega_N^M(M)$. ■

Ahora podemos caracterizar a los submódulos fuertemente invariantes de un módulo dado apoyándonos en los prerradicales omega.

Corolario (4.4.4)
Sean $M \in$R-Mod y $N \leqslant M$. Entonces, $N \leqslant_{fi} M$ si y sólo si $\mathtt{r}(M) = N$ para algún $\mathtt{r} \in$ R-Pr.
Demostración:
$\Rightarrow$] Si $N \leqslant_{fi} M$, del Lema 4.4.2 se obtiene que $\omega_N^M \in$R-Pr, y por la Proposición 4.4.3 concluimos que $\omega_N^M(M) = N$.
$\Leftarrow$] Si $\mathtt{r} \in$R-Pr y $\mathtt{r}(M) = N$, entonces $N \leqslant_{fi} M$ por el Lema 4.4.1. ■

Del corolario anterior se deriva, como presume el siguiente corolario, que los sumbódulos fuertemente invariantes de un anillo R son exactamente sus ideales bilaterales.

Corolario (4.4.5)
Sea ${}_RI \leqslant {}_RR$. Entonces, $I \leqslant_{fi} R$ si y sólo si I es un ideal bilateral de R.
Demostración:
$\Rightarrow$] Si $I \leqslant_{fi} R$, para cada $r \in R$, al considerar el endomorfismo

$$\begin{aligned} \_ \cdot r : R &\longrightarrow R \\ a &\longmapsto ar \end{aligned}$$

se obtiene que $Ir = \_ \cdot r(I) \subseteq I$; entonces $IR = \sum_{r \in R} Ir \subseteq I$. Por lo tanto $IR = I$, como IR es un ideal derecho de R concluimos de este modo que I es un ideal bilateral.

$\Leftarrow$] Si I es bilateral, entonces $IR = R$. Ya que I induce el prerradical $I \cdot \_$, el que IR sea igual a R nos dice que $I \cdot \_(R) = R$; así, del Corolario 4.4.4, se desprende que $I \leqslant_{fi} R$. ■

A continuación demostraremos que la familia de los prerradicales omega contiene prerradicales exactos izquierdos. Aunque esto lo haremos asociando a cada R-módulo inyectivo un prerradical omega, del hecho de que la clase R-Prei es un conjunto y la clase de todos los R-módulos inyectivos una clase propia, tal correspondencia no será unívoca.

Proposición (4.4.6)
Sean $\mathtt{r} \in$ R-Pr y $E \in$ R-Mod un inyectivo. Entonces, $\omega_{\mathtt{r}(E)}^E \in$ R-Prei.
Demostración:
Dados $M \in$ R-Mod y $N \leqslant M$, debemos de ver que $\omega_{\mathtt{r}(E)}^E(N) = \omega_{\mathtt{r}(E)}^E(M) \cap N$, aunque en realidad basta con demostrar que $\omega_{\mathtt{r}(E)}^E(N) \supseteq \omega_{\mathtt{r}(E)}^E(M) \cap N$, pues la otra contención se tiene siempre. Sea $x \in \omega_{\mathtt{r}(E)}^E(M) \cap N$. Entonces $x \in N$

y $f(x) \in \mathtt{r}(E)$ para cada $f \in \mathsf{Hom}_R(M,E)$. Si $g \in \mathsf{Hom}_R(N,E)$, por ser E inyectivo se tiene que existe un $f \in \mathsf{Hom}_R(M,E)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\ E & \end{tikzcd}$$

conmuta. Así que $g(x)=f(x) \in \mathtt{r}(E)$. Por lo tanto $x \in g^{-1}\big(\mathtt{r}(E)\big)$ para cada $g \in \mathsf{Hom}_R(N,E)$, luego $x \in \bigcap\{g^{-1}\big(\mathtt{r}(E)\big) | g \in \mathsf{Hom}_R(N,E)\} = \omega^{E}_{\mathtt{r}(E)}(N)$. ■

Corolario (4.4.7)
Sea $\hat{E} \in$ R-Mod un inyectivo y sea $K \leqslant_{fi} \hat{E}$. Entonces, $\omega^{\hat{E}}_{K} \in$ R-Prei.

Demostración:
Como $K \leqslant_{fi} \hat{E}$, del Corolario 4.4.4 deducimos la existencia de un $\mathtt{r} \in$ R-Pr tal que $\mathtt{r}(\hat{E}) = K$. Así $\omega^{\hat{E}}_{K} = \omega^{\hat{E}}_{\mathtt{r}(\hat{E})}$. Usando la Proposición 4.4.6 concluimos que $\omega^{\hat{E}}_{K} \in$ R-Prei. ■

Nuestro próximo resultado muestra que existe una íntima relación entre los prerradicales exactos izquierdos y una cierta subfamilia de los prerradicales omega, pero antes de establecer tal relación necesitamos un lema; aunque el lema es más bien para reducir la longitud de la demostración del resultado que buscamos.

Lema (4.4.8)
Sean $\mathtt{r} \in$ R-Pr, $M \in$ R-Mod y $N \leqslant M$. Si $\mathtt{r}(M) = N$, entonces $N \leqslant_{fi} M$ y $\mathtt{r} \preceq \omega^{M}_{N}$.

Demostración:
Supongamos $\mathtt{r}(M) = N$. Por el Corolario 4.4.4 tenemos que $N \leqslant_{fi} M$. Por otro lado, sea $K \in$R-Mod, veamos que $\mathtt{r}(K) \leqslant \omega^{M}_{N}(K)$; para esto basta tomar un $f \in \mathsf{Hom}_R(K,M)$ y probar que $\mathtt{r}(K) \subseteq f^{-1}(N)$, ó, equivalentemente, que $f\big(\mathtt{r}(K)\big) \subseteq N$. Sin embargo, ya tenemos que $f\big(\mathtt{r}(K)\big) \subseteq \mathtt{r}(M)$ por ser $\mathtt{r}$ un prerradical, y, por hipótesis, también tenemos que $\mathtt{r}(M) = N$. ■

Corolario (4.4.9)
Sea $\mathtt{r} \in$ R-Pr. Entonces, $\mathtt{r} \in$ R-Prei si y sólo si $\mathtt{r} = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi\}$.

Demostración:
$\Leftarrow$] Se sigue de que $\{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi\} \subseteq$ R-Prei por la Proposición 4.4.6.
$\Rightarrow$] Asumamos que $\mathtt{r} \in$ R-Prei. Si $E \in \xi$, al tomar $M \doteq E$ y $N \doteq \mathtt{r}(E)$ en el Lema 4.4.8, obtenemos que $\mathtt{r} \preceq \omega^{E}_{\mathtt{r}(E)}$; pero $\mathtt{r} \in$ R-Prei y $\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} \in$ R-Prei para cada $E \in \xi$ (Proposición 4.4.6), entonces $\mathtt{r} \preceq \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} | E \in \xi\}$. Ahora, sea $K \in$ R-Mod y lleguemos a que $\bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} | E \in \xi\}(K) \leqslant \mathtt{r}(K)$. Si consideramos al morfismo inclusión $i : K \hookrightarrow E(K)$ y usamos que $\mathtt{r}\big(E(K)\big)$ es un subconjunto de $E(K)$, obtenemos que $i^{-1}\big(\mathtt{r}\big(E(K)\big)\big) = \mathtt{r}\big(E(K)\big) \cap K$; sin embargo $\mathtt{r}(K) = \mathtt{r}\big(E(K)\big) \cap K$ debido a que $\mathtt{r} \in$ R-Prei, por consiguiente $i^{-1}\big(\mathtt{r}\big(E(K)\big)\big) = \mathtt{r}(K)$ y así

$$\bigcap \Big\{ f^{-1}\big(\mathtt{r}\big(E(K)\big)\big) \mid f \in \mathsf{Hom}_R\big(K, E(K)\big) \Big\} \leqslant \mathtt{r}(K),$$

es decir $\omega^{E(K)}_{\mathtt{r}(E(K))}(K) \leqslant \mathtt{r}(K)$. Puesto que ${}_RE(K)$ es inyectivo tenemos que $\omega^{E(K)}_{\mathtt{r}(E(K))} \in \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\}$, entonces $\bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\}(K) \leqslant \omega^{E(K)}_{\mathtt{r}(E(K))}(K)$ y por lo tanto $\bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi\}(K) \leqslant \mathtt{r}(K)$. ■

Del Corolario 4.4.9 se tiene que si $\mathtt{r} \in$ R-Prei, entonces $\mathtt{r} = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\}$. La siguiente proposición nos dice que no hace falta tomar el ínfimo de la familia $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\}$ para obtener a $\mathtt{r}$, que existe una subclase de ξ lo bastante pequeña como para ser un conjunto y aún así poder expresar a $\mathtt{r}$ como ínfimo de una familia de prerradicales omega indizada por dicho conjunto.

Proposición (4.4.10)
Para cada $\mathtt{r} \in$ R-Prei existe un conjunto $\xi_\mathtt{r}$ de R-módulos inyectivos tal que $\mathtt{r} = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi_\mathtt{r}\}$.

Demostración:
Sea $\mathtt{r} \in$R-Prei. Dados $E, F \in \xi$ definimos: $E \approx F$ si y sólo si $\omega^E_{\mathtt{r}(E)} = \omega^F_{\mathtt{r}(F)}$. Se ve que $\approx$ es un relación de equivalencia en ξ. Para $E \in \xi$ tenemos entonces que $\bar{E} \doteqdot [E]_\approx = \{Q \in \xi | \omega^Q_{\mathtt{r}(Q)} = \omega^E_{\mathtt{r}(E)}\}$, y así $\bar{\xi} \doteqdot \xi/\approx\, = \{\bar{E}|E \in \xi\}$. Al considerar el funcional $Id_{\bar{\xi}}$ se deriva del Axioma de Elección para Clases que existe un funcional $C : \bar{\xi} \longrightarrow \xi$ tal que para cada $\bar{E} \in \bar{\xi}$, $C(\bar{E}) \in \bar{E} \subseteq \xi$. De esta forma para cualesquiera $\bar{E}, \bar{F} \in \bar{\xi}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\omega^{C(\bar{E})}_{\mathtt{r}(C(\bar{E}))} = \omega^{C(\bar{F})}_{\mathtt{r}(C(\bar{F}))} &\Rightarrow C(\bar{E}) \approx C(\bar{F}) \\ &\Rightarrow C(\bar{E}) \in \bar{E} \cap \bar{F} \;\text{ y }\; C(\bar{F}) \in \bar{E} \cap \bar{F} \\ &\Rightarrow \bar{E} \cap \bar{F} \neq \varnothing \\ &\Rightarrow E \approx F \\ &\Rightarrow \bar{E} = \bar{F} \\ &\Rightarrow C(\bar{E}) = C(\bar{F}).\end{aligned}$$

Por lo tanto $C(\bar{E}) = C(\bar{F})$ si y sólo si $\omega^{C(\bar{E})}_{\mathtt{r}(C(\bar{E}))} = \omega^{C(\bar{F})}_{\mathtt{r}(C(\bar{F}))}$. Ahora, como R-Prei es un conjunto y $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\} \subseteq$R-Prei, se deduce que $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}| E \in \xi\}$ es conjunto. Fijándonos en la subclase $\xi_\mathtt{r} \doteqdot \{C(\bar{E}) \mid \bar{E} \in \bar{\xi}\}$ de ξ se obtiene que $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi\} = \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi_\mathtt{r}\}$, por lo que $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)} \mid E \in \xi_\mathtt{r}\}$ es un conjunto también; así que existe un conjunto κ y una función biyectiva φ de $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi_\mathtt{r}\}$ en κ. Usamos a φ para definir una nueva asignación ψ como:

$$\begin{aligned}\xi_\mathtt{r} &\xrightarrow{\psi} \kappa \\ E &\longmapsto \varphi\Big(\omega^E_{\mathtt{r}(E)}\Big)\end{aligned}$$

Observamos que si $C(\bar{E}) \in \xi_\mathtt{r}$ y $C(\bar{F}) \in \xi_\mathtt{r}$, entonces

$$C(\bar{E}) = C(\bar{F}) \Leftrightarrow \omega^{C(\bar{E})}_{\mathtt{r}(C(\bar{E}))} = \omega^{C(\bar{F})}_{\mathtt{r}(C(\bar{F}))} \Leftrightarrow \varphi\Big(\omega^{C(\bar{E})}_{\mathtt{r}(C(\bar{E}))}\Big) = \varphi\Big(\omega^{C(\bar{F})}_{\mathtt{r}(C(\bar{F}))}\Big).$$

Así ψ es inyectiva y por lo tanto la clase $\xi_\mathtt{r}$ resulta ser conjunto. Puesto que $\mathtt{r} = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\}$ y $\{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi\} = \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi_\mathtt{r}\}$, deducimos que $\xi_\mathtt{r}$ es un conjunto con la propiedad de que $\mathtt{r} = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^E_{\mathtt{r}(E)}|E \in \xi_\mathtt{r}\}$. ■

Dado $\mathtt{r} \in$ R-Prei, $\xi_\mathtt{r}$ *denotará un conjunto fijo de R-módulos inyectivos con la propiedad descrita en la Proposición 4.4.10.*

Aunque parezca difícil de creer, veremos que la proposición anterior puede ser optimizada aún más, sin embargo necesitamos un par de lemas antes.

Lema (4.4.11)
Sean $M', N', M, N \in$ R-Mod tales que $N' \leqslant_{fi} M'$ y $N \leqslant_{fi} M$. Supongamos que $f_1 \in \mathsf{Hom}_R(M, M')$ y $f_2 \in \mathsf{Hom}_R(N, N')$ son isomorfismos tales que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads, "f_1"] & M' \\ N \arrow[u, hook, "i_1"] \arrow[r, tail, two heads, "f_2"] & N' \arrow[u, hook, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $\omega_N^M = \omega_{N'}^{M'}$.

Demostración:
Tomamos un $K \in$R-Mod y mostraremos que $\omega_N^M(K) = \omega_{N'}^{M'}(K)$.
$\subseteq$] Basta demostrar que $\omega_N^M(K) \subseteq g^{-1}(N')$ para cada $g \in \mathsf{Hom}_R(K, M')$.
Sea $g \in \mathsf{Hom}_R(K, M')$. Como $\omega_N^M(K) = \bigcap \{f^{-1}(N) | f \in \mathsf{Hom}_R(K, M)\}$ y $f_1 g \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$, se ve que $\omega_N^M(K) \subseteq (f_1 g)^{-1}(N)$. Puesto que

$$\begin{aligned} (f_1 g)^{-1}(N) &= g^{-1}\big(f_1(N)\big) \\ &= g^{-1}\big(f_1 i_1(N)\big) \\ &= g^{-1}\big(i_2 f_2(N)\big) \\ &= g^{-1}\big(N'\big), \end{aligned}$$

llegamos a que $\omega_N^M(K) \subseteq g^{-1}(N')$.
$\supseteq$] Análogamente, sea $f \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$. Como $\omega_{N'}^{M'}(K) \subseteq (f_1 f)^{-1}(N')$ y

$$\begin{aligned} (f_1 f)^{-1}(N') &= f^{-1}\big(f_1^{-1}(N')\big) \\ &= f^{-1}\big(f_1^{-1}(i_2 f_2(N))\big) \\ &= f^{-1}\big(i_1(N)\big) \\ &= f^{-1}\big(N\big), \end{aligned}$$

entonces $\omega_{N'}^{M'}(K) \subseteq f^{-1}\big(N\big)$ para cada $f \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$. ■

Lema (4.4.12)
Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de R-módulos y sea N_i un submódulo de M_i para cada $i \in I$.
(1) Si $M = \prod_{i \in I} M_i$, $N = \prod_{i \in I} N_i$ y $N \leqslant_{fi} M$, entonces:
(1.1) $\forall i \in I\big(N_i \leqslant_{fi} M_i\big)$.
(2.1) $\omega_N^M = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega_{N_i}^{M_i} | i \in I\}$.
(2) Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ y $N \leqslant_{fi} M$, entonces:
(2.1) $\forall i \in I\big(N_i \leqslant_{fi} M_i\big)$.
(2.2.) $\omega_N^M = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega_{N_i}^{M_i} | i \in I\}$.

Demostración:
1.1] Tomamos un $i \in I$ y un $f_i \in \mathsf{End}_R(M_i)$. Si $x \in N_i$, debemos probar que $f_i(x) \in N_i$. Nos fijamos en $\{g_j \in \mathsf{End}_R(M_j) \mid g_i = f_i$ y $g_j = \hat{0}$ si $j \neq i\}_{j \in I}$, el Lema 1.1.4 nos garantiza que existe un $\Pi_{j \in I} g_j \in \mathsf{Hom}_R\left(\Pi_{j \in I} M_j,\ \Pi_{j \in I} M_j\right)$ de modo que, para cada $j \in I$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M=\prod_{j\in I}M_j & \xrightarrow{\prod_{j\in I}g_j} & M=\prod_{j\in I}M_j \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_j} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_j} \\ M_j & \xrightarrow{\quad g_j \quad} & M_j \end{array}$$

conmuta; de aquí que $g_j \circ \pi_j = \pi_j \circ \Pi_{j\in I} g_j$ para cada $j \in I$. De esta manera tenemos que $g_j = g_j(Id_{M_j}) = g_j(\pi_j\eta_j) = (g_j\pi_j)\eta_j = (\pi_j\Pi_{j\in I}g_j)\,\eta_j$ para cada $j \in I$. Como $\eta_i(x) \in N$ y $N \leqslant_{fi} M$, entonces $\Pi_{j\in I}g_j(\eta_i(x)) \in N$; por tanto $f_i(x) = g_i(x) = \pi_i\big(\Pi_{j\in I}g_j(\eta_i(x))\big) \in N_i$.

1.2] Sea K ∈R-Mod. Probaremos que $\omega_N^M(K) = \bigcap\{\omega_{N_i}^{M_i}(K)|i \in I\}$.

[$\subseteq$] Dado $i \in I$ mostremos que $\omega_N^M(K) \subseteq \omega_{N_i}^{M_i}(K)$, para hacerlo basta tomar un $f_i \in \mathsf{Hom}_R(K, M_i)$ y ver que $\omega_N^M(K) \subseteq f_i^{-1}(N_i)$. Si $f_i \in \mathsf{Hom}_R(K, M_i)$, como $\eta_i f_i \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$, entonces $\omega_N^M(K) \subseteq (\eta_i f_i)^{-1}(N)$; luego

$$\begin{aligned} \omega_N^M(K) &\subseteq (\eta_i f_i)^{-1}(N) \\ &= f_i^{-1}\big(\eta_i^{-1}(N)\big) \\ &= f_i^{-1}(N_i). \end{aligned}$$

[$\supseteq$] Es suficiente demostrar que $\bigcap\{\omega_{N_i}^{M_i}(K) \mid i \in I\} \subseteq g^{-1}(N)$ para cualquier $g \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$. Tomamos entonces un $g \in \mathsf{Hom}_R(K, M)$. En vista de que $\pi_i g \in \mathsf{Hom}_R(K, M_i)$, se tiene que $\omega_{N_i}^{M_i}(K) \subseteq (\pi_i g)^{-1}(N_i)$ para todo $i \in I$; de aquí que $\bigcap\{\omega_{N_i}^{M_i}(K)|i \in I\} \subseteq \bigcap\{(\pi_i g)^{-1}(N_i)|i \in I\}$. Sin embargo tenemos:

$$\begin{aligned} \bigcap\{(\pi_i g)^{-1}(N_i)|i \in I\} &= \bigcap\{g^{-1}\big(\pi_i^{-1}(N_i)\big)|i \in I\} \\ &= g^{-1}\big(\bigcap\{\pi_i^{-1}(N_i)|i \in I\}\big) \\ &= g^{-1}(N), \end{aligned}$$

concluyendo de esta manera que $\bigcap\{\omega_{N_i}^{M_i}(K)|i \in I\} \subseteq g^{-1}(N)$.

2.1] Sean $i \in I$ y $f_i \in \mathsf{End}_R(M_i)$. Tomemos $x \in N_i$, lleguemos a que $f(x) \in N_i$. De la familia $\{g_j \in \mathsf{End}_R(M_j) \mid g_i = f_i \text{ y } g_j = \hat{0} \text{ si } j \neq i\}_{j\in I}$ se desprende la existencia, por el Lema 1.1.3, de un único morfismo $\oplus_{i\in I}g_i{:}\oplus_{i\in I}M_i \to \oplus_{i\in I}M_i$ tal que, para cada $j \in I$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{\quad g_j \quad} & M_j \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_j} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_j} \\ \bigoplus_{i\in I}M_i & \xrightarrow{\oplus_{i\in I}g_i} & \bigoplus_{i\in I}M_i \end{array}$$

es conmutativo; así $g_j = (\pi_j\eta_j)g_j = \pi_j(\eta_j g_j) = \pi_j\left((\oplus_{i\in I}g_i)\eta_j\right)$ para cada $j \in I$. Ya que $\eta_i(x) \in N$ y $N \leqslant_{fi} M$, ocurre que $\oplus_{i\in I}g_i(\eta_i(x)) \in N$; entonces $f_i(x) = g_i(x) = \pi_j\big(\oplus_{i\in I}\, g_i(\eta_i(x))\big) \in N_i$.

2.2] La misma prueba del inciso (1.2) funciona aquí. ■

Proposición (4.4.13)
Si $\mathtt{r} \in$ R-Prei, existe un R-módulo inyectivo $E_{\mathtt{r}}$ tal que $\mathtt{r} = \omega_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})}^{E_{\mathtt{r}}}$.

Demostración:
Consideremos $\mathtt{r}$ ∈R-Prei y $E_{\mathtt{r}} \doteqdot \prod_{E\in\xi_{\mathtt{r}}} E$. Ya que $\mathtt{r} = \bigwedge_{Prei}\{\omega_{\mathtt{r}(E)}^{E}|E \in \xi\}$ (por el Corolario 4.4.9) y $E_{\mathtt{r}} \in \xi$, se tiene que $\mathtt{r} \preceq \omega_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})}^{E_{\mathtt{r}}}$. Por otro lado notamos que $E_{\mathtt{r}}$ contiene una copia de cada inyectivo en $\xi_{\mathtt{r}}$; así que si $E \in \xi_{\mathtt{r}}$, entonces $A \overset{\alpha}{\cong} E$ para algún $A \leqslant E_{\mathtt{r}}$, obteniendo con esto el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads, tail, "\alpha"'] & E_{\mathtt{r}} \\ E & \end{tikzcd}$$

Como α es un epimorfismo y $Ker(\alpha) = Ker(i)$, se deduce (del Lema 1.1.2) que existe un monomorfismo $\beta : E \to E_{\mathtt{r}}$ de modo que hace conmutar al diagrama anterior. Puesto que E es inyectivo y β un monomorfismo, obtenemos que $Im(\beta) \oplus E_{\mathtt{r}}$; como $Im(\beta) \cong E$, llegamos a que $E_{\mathtt{r}} \overset{\varphi}{\cong} E \oplus Q$ para algún $Q \in \xi$, luego $\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}}) \overset{\varphi|}{\cong} \mathtt{r}(E \oplus Q)$ por el Lema 4.2.6. Con ayuda del último par de lemas se deduce que

$$\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} = \omega^{E\oplus Q}_{\mathtt{r}(E\oplus Q)} = \omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} \wedge_{Pr_{ei}} \omega^{Q}_{\mathtt{r}(Q)},$$

consiguiendo con esto, en particular, que $\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} \preceq \omega^{E}_{\mathtt{r}(E)}$. Luego para cada $E \in \xi_{\mathtt{r}}$ ocurre que $\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} \preceq \omega^{E}_{\mathtt{r}(E)}$, entonces $\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} \preceq \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} | E \in \xi_{\mathtt{r}}\}$; no obstante, la Proposición 4.4.10 nos dice que $\bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} | E \in \xi_{\mathtt{r}}\} = \mathtt{r}$, por lo tanto $\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} \preceq \mathtt{r}$. ■

Si prestamos atención a la prueba anterior, notaremos que cualquier módulo inyectivo $\hat{E}$ que contenga una copia de cada elemento de $\xi_{\mathtt{r}}$ va a satisfacer que $\mathtt{r} = \omega^{\hat{E}}_{\mathtt{r}(\hat{E})}$. Sin embargo, de ahora en adelante, si $\mathtt{r} \in$R-Prid, denotaremos por $E_{\mathtt{r}}$ al R-módulo $\prod_{E\in\xi_{\mathtt{r}}} E$; que, como vimos, cumple lo citado en la Proposición 4.4.13. Es momento de introducir la definición principal de está sección.

Definición
Sea $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo. Decimos que $\bar{E}$ es *inyectivo principal* si ocurre que $\mathtt{r} = \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}$ para cada $\mathtt{r} \in$ R-Prei.

Naturalmente lo que procede es demostrar que los inyectivos principales existen. De hecho probaremos que cualquier módulo inyectivo que contenga una copia de $E_{\mathtt{r}}$, para cada $\mathtt{r} \in$R-Prei, es un inyectivo principal.

Teorema (4.4.14)
Sea R un anillo. Existen R-módulos que son inyectivos principales.

Demostración:
Sea $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo que contiene una copia de $E_{\mathtt{r}}$ para cada prerradical exacto izquierdo $\mathtt{r}$ de R-Mod, digamos $\bar{E} \doteq \prod_{\mathtt{r}\in\text{R-Prei}} E_{\mathtt{r}}$. Ahora tomamos un $\mathtt{r} \in$ R-Prei, y nos proponemos demostrar que $\mathtt{r} = \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}$.

$\preceq$] Como $\mathtt{r} \in$R-Prei, del Corolario 4.4.9 se tiene que $\mathtt{r}=\bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} | E \in \xi\}$; de aquí que $\mathtt{r} \preceq \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}$.

$\succeq$] Ya que $\bar{E}$ contiene una copia de $E_{\mathtt{r}}$, procediendo como en la prueba anterior, llegamos a que $\bar{E} \cong E_{\mathtt{r}} \oplus Q$ para algún $Q \in \xi$. De los dos lemas pasados se sigue que $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}=\omega^{E_{\mathtt{r}}\oplus Q}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}}\oplus Q)}=\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} \bigwedge_{Pr_{ei}} \omega^{Q}_{\mathtt{r}Q)}$. Por lo tanto $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})} \preceq \omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})}$. Pero $\omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} = \mathtt{r}$ según la Proposición 4.4.13. Entonces $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})} \preceq \mathtt{r}$. ■

Si bien ahora sabemos que para cualquier anillo R siempre podemos encontrar en R-Mod un inyectivo principal, la siguiente proposición muestra que la clase de los inyectivos principales es, por cierto, propia.

Proposición (4.4.15)
Sea $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo principal. Si $\bar{\bar{E}}$ es un R-módulo inyectivo que contiene una copia de $\bar{E}$, entonces $\bar{\bar{E}}$ es principal.

Demostración:
La demostración es análoga a la anterior. Sea $\mathtt{r} \in$ R-Prei. Puesto que $\bar{\bar{E}} \in \xi$ y $\mathtt{r} = \bigwedge_{Pr_{ei}} \{\omega^{E}_{\mathtt{r}(E)} | E \in \xi\}$, entonces $\mathtt{r} \preceq \omega^{\bar{\bar{E}}}_{\mathtt{r}(\bar{\bar{E}})}$. Por otro lado, debido a que $\bar{\bar{E}}$ contiene una copia de $\bar{E}$, tenemos que $\bar{\bar{E}} \cong \bar{E} \oplus Q$ para algún $Q \in \xi$. Del par de lemas anterior se deriva que $\omega^{\bar{\bar{E}}}_{\mathtt{r}(\bar{\bar{E}})} = \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})} \bigwedge_{Pr_{ei}} \omega^{Q}_{\mathtt{r}Q)}$. Por ser $\bar{E}$ un inyectivo principal se tiene que $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})} = \mathtt{r}$. Luego $\omega^{\bar{\bar{E}}}_{\mathtt{r}(\bar{\bar{E}})} \preceq \mathtt{r}$. ■

Dado $M \in$ R-Mod, *denotaremos al conjunto de todos los submódulos fuertemente invariantes de M por* $\mathsf{S}_{fi}(M)$. Veremos que dicha familia se comporta bien con respecto a las operaciones de módulos, lo cual nos permitirá establecer una cierta estructura en tal conjunto.

Lema (4.4.16)
Sea $M \in$ R-Mod y sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en $\mathsf{S}_{fi}(M)$. Entonces $\bigcap_{i \in I} N_i$ y $\sum_{i \in I} N_i$ pertenecen a $\mathsf{S}_{fi}(M)$.

Demostración:
Sea $f \in \mathsf{End}_R(M)$. Como $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \mathsf{S}_{fi}(M)$, entonces $f(N_i) \subseteq N_i$ para cada $i \in I$; por lo que $\bigcap_{i \in I} f(N_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} N_i$ y $\sum_{i \in I} f(N_i) \subseteq \sum_{i \in I} N_i$. En vista de que $f\big(\bigcap_{i \in I} N_i\big) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(N_i)$ y $f\big(\sum_{i \in I} N_i\big) = \sum_{i \in I} f(N_i)$, llegamos a la conclusión de que $f\big(\bigcap_{i \in I} N_i\big) \subseteq \bigcap_{i \in I} N_i$ y $f\big(\sum_{i \in I} N_i\big) \subseteq \sum_{i \in I} N_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i \in I} N_i, \sum_{i \in I} N_i \in \mathsf{S}_{fi}(M)$. ■

Corolario (4.4.17)
Para cualquier $M \in$ R-Mod se tiene que $\big(\mathsf{S}_{fi}(M),\ \leqslant,\ \bigcap,\ \sum,\ 0,\ M\big)$ es una retícula completa.

Si bien para cada $M \in$ R-Mod ocurre que $(\mathsf{S}_{fi}(M), \leqslant)$ es una retícula completa, cuando tomamos un $\bar{E} \in$ R-Mod inyectivo principal, la retícula $\big(\mathsf{S}_{fi}(\bar{E}), \leqslant, \cap, \Sigma\big)$ adquiere un valor mucho más tangible.

Teorema (4.4.18)
Si $\bar{E} \in$ R-Mod es un inyectivo principal, entonces $\big(\text{R-Prei}, \preceq, \bigwedge_{Pr_{ei}}, \bigvee_{Pr_{ei}}\big)$ y $\big(\mathsf{S}_{fi}(\bar{E}), \leqslant, \bigcap, \sum\big)$ son retículas isomorfas.

Demostración:
Sea $\bar{E}$ un R-módulo inyectivo principal. Para empezar, fijemos nuestra atención en la función

$$\begin{aligned} \text{R-Prei} &\xrightarrow{\Theta} \mathsf{S}_{fi}(\bar{E}) \\ \mathtt{r} &\longmapsto \mathtt{r}(\bar{E}) \end{aligned}$$

y en la función

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_{fi}(\bar{E}) &\xrightarrow{\Phi} \text{R-Prei} \\ N &\longmapsto \omega_N^{\bar{E}} \end{aligned}$$

La primera función tiene sentido por el Lema 4.4.1, mientras que la segunda se tiene por el Corolario 4.4.7. Notamos ahora que si $N \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})$, entonces $(\Theta \circ \Phi)(N) = \Theta(\omega_N^{\bar{E}}) = \omega_N^{\bar{E}}(\bar{E})$, pero $\omega_N^{\bar{E}}(\bar{E}){=}N$ por la Proposición 4.4.3; así que $(\Theta \circ \Phi)(N) = N$. Además si $\mathtt{r} \in$ R-Prei, $(\Phi \circ \Theta)(\mathtt{r}) = \Phi\big(\mathtt{r}(\bar{E})\big) = \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}$; pero $\bar{E}$ es inyectivo principal, así que $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})} = \mathtt{r}$ y por lo tanto $(\Phi \circ \Theta)(\mathtt{r}) = \mathtt{r}$. Luego Θ es biyectiva y $\Theta^{-1}{=}\ \Phi$. Ahora hacemos la siguiente observación.

Afirmación: Tanto Θ como Φ son morfismos de orden.

Demostración: Sean $\mathtt{r}, \mathtt{s} \in$ R-Prei de modo que $\mathtt{r} \preceq \mathtt{s}$. Como $\mathtt{r}(\bar{E}) \leqslant \mathtt{s}(\bar{E})$, entonces Θ preserva el orden. Ahora, sean $N, K \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})$ tales que $N \leqslant K$. Debemos demostrar que $\omega_N^{\bar{E}} \preceq \omega_K^{\bar{E}}$, para ello sea $L \in$ R-Mod y probemos que $\omega_N^{\bar{E}}(L) \leqslant \omega_K^{\bar{E}}(L)$. Sea $g \in \mathsf{Hom}_R(L, \bar{E})$ y lleguemos a que $\omega_N^{\bar{E}}(L) \subseteq g^{-1}(K)$; lo cual no es difícil de hacer puesto que $N \subseteq K$ implica $g^{-1}(N) \subseteq g^{-1}(K)$, y como $\omega_N^{\bar{E}}(L) \subseteq g^{-1}(N)$, se ve que efectivamente $\omega_N^{\bar{E}}(L) \subseteq g^{-1}(K)$. Por lo tanto Φ es un morfismo de orden también. ❑

De la afirmación se obtiene que Θ y Θ^{-1} son morfismos de orden, de aquí que Θ es un isomorfismo de orden entre dos retículas (Corolario 4.2.14 y Corolario 4.4.17), lo cual, según la Proposición 1.3.3, asegura que Θ es un isomorfismo de retículas. ■

Cerramos esta sección, y con ella el capítulo entero, con un resumen de los resultados más importantes que obtuvimos a lo largo del capítulo: este lo plasmamos a continuación en forma de corolario.

Corolario (4.4.19)
Sea R un anillo. Si $\bar{E} \in$ R-Mod es inyectivo principal, entonces las siguientes retículas son isomorfas:

1.- $\big(\mathsf{S}_{fi}(\bar{E}),\ \leqslant,\ \bigcap,\ \sum\big)$.
2.- $\big(\text{R-Wis},\ \subseteq,\ \bigwedge,\ \bigvee\big)$.
3.- $\big(\text{R-Fil},\ \subseteq,\ \bigwedge_{Fil},\ \bigvee_{Fil}\big)$.
4.- $\big(\text{R-Prei},\ \preceq,\ \bigwedge_{Pr_{ei}},\ \bigvee_{Pr_{ei}}\big)$.

5. SOBRE EL PERFIL DE INYECTIVIDAD DE UN ANILLO

El perfil de inyectividad de un anillo es un concepto que surgió a través de los trabajos de Sergio R. López-Permouth, en colaboración con diversos matemáticos, entre los años 2010 y 2012, tal concepto nació en [16] y básicamente lo que se pretende hacer en este capítulo es estudiar la primera mitad de [21]. Es aquí en donde nos valdremos de los isomorfismos de retículas conseguidos en el capítulo anterior para obtener distintas interpretaciones del perfil de inyectividad de un anillo R en función de las interpretaciones que obtuvimos de R-Wis en el Corolario 4.4.19, comprobaremos que cada una de las retículas que aparece en dicho corolario nos va a brindar cierta capacidad de inferir algunos aspectos, no poco interesantes, de la estructura retícular del perfil de inyectividad de R.

5.1 El Perfil de Inyectividad de un Anillo

Iniciamos el capítulo final con la definición del concepto principal de la tesis: El perfil de inyectividad de un anillo. En esta sección descubriremos que el perfil de inyectividad de un anillo R es una subretícula de R-Wis. Puesto que en particular el perfil de inyectividad de R será un subconjunto de R-Wis, es natural preguntarse cuál es la imagen de dicho subconjunto bajo los isomorfismos de retículas que dimos en el Capítulo 4; tal cuestionamiento también lo abordaremos en esta sección.

> ***Definición***
> Sea R un anillo. Si $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos izquierdos, diremos que $\mathcal{A}$ es una *i-carpeta* si existe un $M \in$ R-Mod de modo que $\mathcal{A} = \mathcal{I}n^{-1}(M)$. Mientras que a la clase $\{\mathcal{A} \subseteq \text{R-Mod} \mid \mathcal{A} \text{ es una i-carpeta}\}$ le llamaremos *perfil izquierdo de inyectividad de R* y la denotaremos por $i\mathcal{P}_i(R)$. Análogamente se define el *perfil derecho de inyectividad de R*, a éste lo denotamos por $i\mathcal{P}_d(R)$.

Cuando no haya riesgo de confusión, en vez de decir "perfil izquierdo de inyectividad de R" sólo diremos "perfil de inyectividad de R" y escribiremos "$i\mathcal{P}(R)$". Por otra parte notamos que $i\mathcal{P}(R) = \{\mathcal{I}n^{-1}(M) \subseteq \text{R-Mod} \mid M \in \text{R-Mod}\}$, entonces del Teorema 3.1.6 se obtiene que $i\mathcal{P}(R) \subseteq$ R-Wis, y como R-Wis es un conjunto (Proposición 4.1.5) concluimos que $i\mathcal{P}(R)$ es un conjunto también; el cual nunca será vacío debido a que R-Mod es una i-carpeta.

> ***Lema (5.1.1)***
> Sea R un anillo. Si $X \subseteq i\mathcal{P}(R)$, entonces $\bigwedge X \in i\mathcal{P}(R)$.
>
> *Demostración:*
> Sea $X \subseteq i\mathcal{P}(R)$. Recordemos que $\bigwedge X = \{M \in \text{R-Mod} \mid \forall \mathcal{A} \in X (M \in \mathcal{A})\}$.
> Si $X = \varnothing$, entonces $\bigwedge X =$ R-Mod, y como R-Mod es el dominio de inyec-

tividad de cualquier módulo inyectivo, se cumple que $\bigwedge X \in i\mathcal{P}(R)$. Supongamos que $X \neq \varnothing$. Para cada $\mathcal{A} \in X$ tomemos un módulo $M_{\mathcal{A}}$ con la propiedad de que $\mathcal{A} = \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}})$. Entonces $\bigwedge X = \bigcap_{\mathcal{A} \in X} \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}})$, sin embargo $\bigcap_{\mathcal{A} \in X} \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}}) = \mathcal{I}n^{-1}\left(\prod_{\mathcal{A} \in X} M_{\mathcal{A}}\right)$ debido al Corolario 3.1.8, por lo tanto $\bigwedge X$ es en efecto una i-carpeta. ■

En vista del lema anterior, si X es cualquier subconjunto de $i\mathcal{P}(R)$, uno podría definir $\bar{\bigvee} X \doteq \bigwedge \{\mathcal{C} \in i\mathcal{P}(R) \mid \forall \mathcal{A} \in X\, (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C})\}$ y probar, de manera análoga a cómo hicimos en el Lema 4.1.7, que a través de $\bigwedge$ y $\bar{\bigvee}$ el conjunto $i\mathcal{P}(R)$ admite una estructura de retícula completa. De hecho, como el Lema 3.2.1 asegura que cualquier i-carpeta contiene a R-SSMod y R-SSMod es el dominio de inyectividad de cualquier módulo pobre (los cuales, como vimos en el Teorema 3.2.10, siempre existen), el elemento menor de $i\mathcal{P}(R)$ sería R-SSMod y el elemento mayor sería R-Mod. Resumimos estas observaciones en el siguiente corolario.

Corolario (5.1.2)
Si R es un anillo, entonces $\left(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bar{\bigvee}, \text{R-SSMod}, \text{R-Mod}\right)$ es una retícula completa.

Con todo, debido a que $i\mathcal{P}(R) \subseteq$ R-Wis y R-Wis es una retícula completa (Teorema 4.1.8), podríamos preguntarnos si $i\mathcal{P}(R)$ es una subretícula de R-Wis ó podríamos pensar incluso en la posibilidad de que $i\mathcal{P}(R)$ sea una subretícula completa de R-Wis. Notamos, sin embargo, que $i\mathcal{P}(R)$ no puede ser una subretícula completa de R-Wis, pues si lo fuera debería de ser cierto que la clase $\bigvee \varnothing = \{{}_R 0\}$ es una i-carpeta, lo cual es imposible debido a que toda i-carpeta contiene a R-SSMod (Lema 3.2.1). Entonces ahora sólo podemos aspirar a que $i\mathcal{P}(R)$ sea una subretícula de R-Wis, hecho que va a ser verdad y el cual nos ocupará en seguida, no obstante, necesitamos algunos resultados preliminares.

Definición
Sean $M, N \in$ R-Mod. Diremos que M *asciende a* N, lo cual será denotado por $M \uparrow N$, si todo R-módulo M-inyectivo es N-inyectivo.

Notamos que, en símbolos, la definición anterior se puede parafrasear como sigue: $M \uparrow N \Leftrightarrow \forall X \in \text{R-Mod}\big(M \in \mathcal{I}n^{-1}(X) \Rightarrow N \in \mathcal{I}n^{-1}(X)\big)$.

Lema (5.1.3)
Sean $M, N \in$ R-Mod. Si $N \in \sigma[M]$, entonces $M \uparrow N$.

Demostración:
Supongamos que $N \in \sigma[M]$ y que $X \in$ R-Mod es tal que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$. Del hecho de que $N \in \sigma[M]$, usando el Lema 4.1.1, se sigue que existe un monomorfismo $h : N \rightarrowtail M^{(A)}/L$ para algún conjunto A y para algún $L \leqslant M^{(A)}$, entonces $N \cong h(N) \leqslant M^{(A)}/L$; como $M \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$ y $\mathcal{I}n^{-1}(X)$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes, submódulos e isomorfismos (Teorema 3.1.6), concluimos de aquí que $N \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$. ■

Como acabamos de ver, una condición suficiente para que $M \uparrow N$ es que N sea M-subgenerado. Ahora estamos interesados en encontrar una condición necesaria para que $M \uparrow N$.

Lema (5.1.4)
Sean $N, K \in$ R-Mod tales que $K \leqslant N$. Entonces, $N \uparrow K$.

Demostración:
Como $N \in \sigma[N]$ y $\sigma[N]$ es cerrada bajo submódulos (Proposición 4.1.2) se tiene que $K \in \sigma[N]$. Del Lema 5.1.3 es inmediato que $N \uparrow K$. ■

Lema (5.1.5)
Sean $M, N, K \in$ R-Mod. Si $M \uparrow N$ y $N \uparrow K$, entonces $M \uparrow K$.

Demostración:
Supongamos que $M \uparrow N$ y $N \uparrow K$. Tomemos un $X \in$ R-Mod de modo que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$. Como $M \uparrow N$, entonces $N \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$, sin embargo $N \uparrow K$, así que $K \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$. ■

Corolario (5.1.6)
Sean $M, N, K \in$ R-Mod donde $K \leqslant N$. Si $M \uparrow N$, entonces $M \uparrow K$.

Demostración:
Usando que $K \leqslant N$, del Lema 5.1.4 se sigue que $N \uparrow K$. Entonces si $M \uparrow N$, el Lema 5.1.5 implica que $M \uparrow K$. ■

Lema (5.1.7)
Sean $M, S \in$ R-Mod. Si S es semisimple, entonces $M \uparrow S$.

Demostración:
Supongamos que $S \in$ R-SSMod. Si X es un R-módulo tal que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$, de tan sólo recordar que R-SSMod $\subseteq \mathcal{I}n^{-1}(X)$ por el Lema 3.2.1, obtenemos que $S \in \mathcal{I}n^{-1}(X)$. ■

En vista del lema anterior, conjeturamos que: ($M \uparrow N \Rightarrow N \in \sigma[M]$) sólo si M subgenera a cada semisimple. Tal conjetura será cierta, pero para probarla necesitamos un lema más.

Lema (5.1.8)
Sean $M, N \in$ R-Mod tales que $M \uparrow N$. Entonces, o bien N es semisimple ó $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) \neq 0$.

Demostración:
Supongamos que N no es semisimple y que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) = 0$. Como N no es semisimple, existe un $K \leqslant N$ de modo que K <u>no</u> es un sumando directo de N. Ahora, si nos fijamos en el morfismo inclusión $i{:}K \hookrightarrow N$ y consideramos que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}$ es un prerradical, llegamos a que $i\big(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(K)\big) \subseteq \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N)$; de donde, usando que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) = 0$, podemos concluir que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(K) = 0$.

Afirmación: K es M-inyectivo.

Demostración: Sea $L \leqslant M$ y sea $f \in \mathsf{Hom}_R(L, K)$. Puesto que $M \in \sigma[M]$ y $\sigma[M]$ es cerrada bajo submódulos (Proposición 4.1.2), ocurre que $L \in \sigma[M]$, entonces $f(L) \leqslant \sum\{f(U) \mid f \in \mathsf{Hom}_R(U, K) \text{ y } U \in \sigma[M]\} = \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(K) = 0$, de aquí que $f(L) = 0$. Así, definiendo $\bar{f} : M \to K$ como $\bar{f}(m) \doteq 0$ para todo $m \in M$, obtenemos que $f = \bar{f}|_L$. Luego $M \in \mathcal{I}n^{-1}(K)$. □

Como $\mathcal{I}n^{-1}(K)$ es cerrado bajo submódulos (Lema 3.1.3), de la afirmación se sigue que $N \in \mathcal{I}n^{-1}(K)$; luego $K \oplus N$ (Lema 3.1.10), lo cual es absurdo. ■

Teorema (5.1.9)
Sean $M, N \in$ R-Mod. Si cada R-módulo semisimple es subgenerado por M, entonces $M \uparrow N$ si y sólo si $N \in \sigma[M]$.
Demostración:
Supongamos que R-SSMod $\subseteq \sigma[M]$.
$\Leftarrow]$ Esta implicación es el Lema 5.1.3.

$\Rightarrow]$ Asumamos que $M \uparrow N$. Si N es semisimple, por hipótesis es cierto que $N \in \sigma[M]$. Supongamos entonces que N no es semisimple.
Afirmación 1: $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) \subseteq_e N$.
Demostración: Tomamos un $0 \neq T \leqslant N$. Puesto que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]} \in$ R-Pr, ocurre que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(T) \subseteq T \cap \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N)$. Así, para probar que $T \cap \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) \neq 0$, es suficiente mostrar que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(T) \neq 0$. Si $T \in$R-SSMod, entonces $T \in \sigma[M]$ por hipótesis, pero $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(T)$ es el mayor submódulo de T que pertenece a $\sigma[M]$ (Lema 4.2.10), así que $T \leqslant \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(T)$; luego $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(T) = T \neq 0$. Por otro lado, en vista de que $M \uparrow T$ por el Corolario 5.1.6, si $T \notin$ R-SSMod, del Lema 5.1.8 es inmediato que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(T) \neq 0$. ❑

De la afirmación anterior deducimos que $E(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N)) = E(N)$, por consiguiente $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) \subseteq_e E(N)$, sin embargo, del hecho de que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}$ es un prerradical, se tiene que $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(N) \leqslant \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N)) \leqslant E(N)$; por lo tanto $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N)) \subseteq_e E(N)$ (Lema 1.1.12), entonces $E\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))\right) = E(N)$.
Afirmación 2: $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))$ es M-inyectivo.
Demostración: Para mostrar que $M \in \mathcal{I}n^{-1}\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))\right)$ usaremos el inciso (2) de la Proposición 3.1.1. Sea $f \in \mathsf{Hom}_R(M, E(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))))$ y probemos que $f(M) \leqslant \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))$. Como $E\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))\right) = E(N)$, sucede que $f \in \mathsf{Hom}_R(M, E(N))$, entonces, debido a que $M \in \sigma[M]$, llegamos a que $f(M) \leqslant \sum\{f(U) \mid f \in \mathsf{Hom}_R(U, E(N)) \text{ y } U \in \sigma[M]\} = \mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))$. Por lo tanto $M \in \mathcal{I}n^{-1}\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))\right)$. ❑

Como $M \uparrow N$, la Afirmación 2 implica que $N \in \mathcal{I}n^{-1}\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))\right)$, así el inciso (2) de la Porposición 3.1.1 nos garantiza que:

$$\forall f \in \mathsf{Hom}_R\Big(N, E\big(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}\,(E(N))\,\big)\Big)\Bigg(f(N) \leqslant \mathtt{tr}_{\sigma[M]}\,(E(N))\Bigg).$$

Debido a que $E\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}(E(N))\right) = E(N)$, si $i : N \hookrightarrow E(N)$ es el morfismo inclusión, ocurre que $i \in \mathsf{Hom}_R\left(N, E\left(\mathtt{tr}_{\sigma[M]}\,(E(N))\right)\right)$, entonces debe ser cierto que $N = i(N) \leqslant \mathtt{tr}_{\sigma[M]}\,(E(N))$; no obstante $\mathtt{tr}_{\sigma[M]}\,(E(N)) \in \sigma[M]$ (Proposición 4.2.10) y $\sigma[M]$ es cerrada bajo submódulos (Proposición 4.1.2), por lo tanto $N \in \sigma[M]$. ■

Ha llegado el momento de empezar a utilizar los resultados hasta ahora obtenidos para construir un argumento sólido del por qué $i\mathcal{P}(R)$ es una subretícula de R-Wis. Comenzamos con la siguiente proposición, la cual es por cierto la base del resultado que buscamos.

Proposición (5.1.10)
Sea R un anillo y sea $\mathcal{W} \in$ R-Wis de modo que R-SSMod $\subseteq \mathcal{W}$. Entonces, $\mathcal{W} \in i\mathcal{P}(R)$.

Demostración:
Como $\mathcal{W} \in$ R-Wis, entonces $\mathcal{W} = \sigma[M]$ para algún $M \in$ R-Mod. Consideremos al conjunto $X \doteqdot \{\mathcal{A} \in i\mathcal{P}(R) \mid M \in \mathcal{A}\}$.

Afirmación: $\sigma[M] = \bigwedge X$.

Demostración: $[\subseteq]$ Sea $N \in \sigma[M]$. Por el Lema 5.1.3 ocurre que $M \uparrow N$, entonces si $\mathcal{A} \in X$, como $M \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}})$ para algún $M_{\mathcal{A}} \in$ R-Mod, se tiene que $N \in \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}$. Por consiguiente $N \in \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in X$. $[\supseteq]$ Sea $N \in$ R-Mod$\backslash\sigma[M]$. Por hipótesis R-SSMod $\subseteq \mathcal{W} = \sigma[M]$, usando el Teorema 5.1.9 y el hecho de que$N \notin \sigma[M]$, se sigue que M no asciende a N; entonces debe de existir un $L \in$ R-Mod tal que $M \in \mathcal{I}n^{-1}(L)$ y $N \notin \mathcal{I}n^{-1}(L)$, por lo tanto $\mathcal{I}n^{-1}(L) \in X$ y $N \notin \mathcal{I}n^{-1}(L)$, luego $N \in$ R-Mod$\backslash \bigwedge X$. □

Puesto que $\bigwedge X \in i\mathcal{P}(R)$ por el Lema 5.1.1, de la afirmación obtenemos que $\mathcal{W}$ es una i-carpeta. ■

Corolario (5.1.11)
Para cualquier anillo R se tiene que $\left(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$ es una subretícula de $\left(\text{R-Wis}, \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$.

Demostración:
Ya vimos que $i\mathcal{P}(R) \subseteq$ R-Wis y que $\bigwedge X \in i\mathcal{P}(R)$ para cualquier $X \subseteq i\mathcal{P}(R)$ (Lema 5.1.1), entonces sólo necesitamos probar que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ es una i-carpeta para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in i\mathcal{P}(R)$. Tomemos entonces $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in i\mathcal{P}(R)$. Recodamos que habíamos definido $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \doteqdot \bigwedge\{\vartheta \in \text{R-Wis} \mid \mathcal{A} \subseteq \vartheta \text{ y } \mathcal{B} \subseteq \vartheta\}$ y probado que tal familia es el supremo de $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ en R-Wis (Lema 4.1.7), por lo tanto $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in$ R-Wis y, si $M_{\mathcal{A}} \in$ R-mod es tal que $\mathcal{A} = \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}})$, en particular $\mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$; sin embargo R-SSMod $\subseteq \mathcal{I}n^{-1}(M_{\mathcal{A}})$ debido al Lema 3.2.1, así que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in$ R-Wis y R-SSMod $\subseteq \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, de donde, gracias a la Proposición 5.1.10, se concluye que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in i\mathcal{P}(R)$. ■

Ahora ya sabemos que $i\mathcal{P}(R)$ es una subretícula de R-Wis, pero de hecho sabemos algo más, pues, al contener todo elemento de $i\mathcal{P}(R)$ a la i-carpeta R-SSMod y al ser cada i-carpeta una colección de R-módulos, en realidad $i\mathcal{P}(R)$ es una subretícula de la subretícula [R-SSMod, R-Mod] de R-Wis; además en virtud de la Proposición 5.1.10 se tiene que [R-SSMod, R-Mod] $\subseteq i\mathcal{P}(R)$, por lo tanto $i\mathcal{P}(R)$ es la subretícula [R-SSMod, R-Mod] de R-Wis.

Corolario (5.1.12)
Sea R un anillo. Si [R-SSMod, R-Mod] es el intervalo de R-SSMod a R-Mod en R-Wis, entonces $i\mathcal{P}(R) =$ [R-SSMod, R-Mod].

Una vez que hemos conseguido ubicar perfectamente a $i\mathcal{P}(R)$ dentro de R-Wis, nos vamos a valer de las distintas "interpretaciones" que obtuvimos de R-Wis en el Corolario 4.4.19 para determinar algunas propiedades retículares de $i\mathcal{P}(R)$.

Definición
Sea R un anillo y $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo principal. Definimos:

(1) R-Prei* $\doteqdot \{\mathtt{r} \in \text{R-Prei} \mid \mathtt{Zoc} \preceq \mathtt{r}\}$.
(2) $\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^* \doteqdot \{N \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E}) \mid \mathtt{Zoc}(\bar{E}) \leqslant N\}$.
(3) R-Fil* $\doteqdot \{\mathcal{F} \in \text{R-Fil} \mid I \in \mathcal{F} \text{ para cada } I \text{ ideal izquierdo máximo de R}\}$.

Sin mayor problema se puede probar que los conjuntos definidos en los incisos (1), (2) y (3) son subretículas de R-Prei, $\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})$ y R-Fil, respectivamente, por lo tanto cada uno de ellos tiene por sí mismo estructura de retícula. Resumamos estas observaciones en el siguiente lema.

Lema (5.1.13)
Si R es un anillo y $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo principal, entonces:
(1) R-Prei* es una subretícula de $\big(\text{R-Prei}, \preceq, \bigwedge_{Pr_{ei}}, \bigvee_{Pr_{ei}}\big)$.
(2) R-Fil* es una subretícula de $\big(\text{R-Fil}, \subseteq, \bigwedge_{Fil}, \bigvee_{Fil}\big)$.
(3) $\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$ es una subretícula de $\big(\mathsf{S}_{fi}(\bar{E}), \leqslant, \bigcap, \sum\big)$.

Por supuesto el que hayamos detenido nuestra atención en las retículas del lema anterior no es ninguna casualidad, pues las retículas arriba definidas son en realidad las distintas maneras en las que se puede entender el perfil de inyectividad de un anillo (limitando nuestra comprensión, desde luego, al uso de las herramientas que hasta aquí hemos construido); de forma más concisa, tenemos el siguiente resultado.

Proposición (5.1.14)
Sea R un anillo y sea $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo principal. Las siguientes retículas son isomorfas:
(1) $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\big)$.
(2) $\big(\text{R-Prei}^*, \preceq, \bigwedge_{Pr_{ei}}, \bigvee_{Pr_{ei}}\big)$.
(3) $\big(\text{R-Fil}^*, \subseteq, \bigwedge_{Fil}, \bigvee_{Fil}\big)$.
(4) $\big(\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*, \leqslant, \bigcap, \sum\big)$.
Demostración:
(1) $\cong$ (2)] En la prueba del Teorema 4.2.15 vimos que las siguientes asignaciones son morfismos de orden:

$$\begin{array}{ccc} \text{R-Wis} \xrightarrow{\mathtt{tr}_{(\ )}} \text{R-Prei} & \qquad & \text{R-Prei} \xrightarrow{\mathtt{tr}^{-1}_{(\ )}} \text{R-Wis} \\ \mathcal{W} \longmapsto \mathtt{tr}_{\mathcal{W}} & & \mathtt{r} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathtt{r}} \end{array}$$

Si restringimos ambos asignaciones a subconjuntos particulares de sus dominios, entonces tales restricciones van a seguir preservando el orden, de aquí que $\mathtt{tr}_{(\ )}|_{i\mathcal{P}(R)}$ y $\mathtt{tr}^{-1}_{(\ )}|_{R-Prei*}$ serán morfimos de orden.

Afirmación 1: $\forall \mathcal{A} \in i\mathcal{P}(R)\big(\mathtt{tr}_{\mathcal{A}} \in \text{R-Prei}^*\big)$.

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in i\mathcal{P}(R)$. Queremos mostrar que $\mathsf{Zoc} \preceq \mathtt{tr}_{\mathcal{A}}$, entonces tomemos un $M \in$ R-Mod y lleguemos a que $\mathsf{Zoc}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{\mathcal{A}}(M)$. Como $\mathtt{tr}_{(\ )}$ es un morfismo de orden y R-SSMod $\subseteq \mathcal{A}$, entonces $\mathtt{tr}_{R-SSMod} \preceq \mathtt{tr}_{\mathcal{A}}$, en particular se obtiene que $\mathtt{tr}_{R-SSMod}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{\mathcal{A}}(M)$.

Afirmación 1.1: $\mathsf{Zoc}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{R-SSMod}(M)$. [1]

Demostración: Recordemos que $\mathsf{Zoc}(M) = \sum\{N \leqslant M | N \text{ es simple}\}$ y que $\mathtt{tr}_{R-SSMod}(M) = \sum\{f(U) | f \in \mathsf{Hom}_R(U, M) \text{ y } U \in \text{R-SSMod}\}$. De la definición se sigue que $\mathsf{Zoc}(M) \in$ R-SSMod. Entonces al considerar el morfismo

[1] De hecho se puede probar que $\mathsf{Zoc}(M) = \mathtt{tr}_{R-SSMod}(M)$, pues, del hecho de que imágenes de módulos semisimples bajo morfismos son nuevamente semisimples y que por consiguiente sumas arbitrarias de módulos semisimples son semisimples, sucede que $\mathtt{tr}_{R-SSMod}(M)$ es un submódulo semisimple de M, por lo tanto es una suma de submódulos simples de M; de donde se concluye que $\mathtt{tr}_{R-SSMod}(M) \leqslant \mathsf{Zoc}(M)$.

inclusión $i : \mathtt{Zoc}(M) \hookrightarrow M$ se obtiene que el módulo $i(\mathtt{Zoc}(M))$ pertenece a $\mathsf{Hom}_R(U, M)$ y $U \in$ R-SSMod$\}$, pero $i(\mathtt{Zoc}(M)) = \mathtt{Zoc}(M)$; por lo tanto $\mathtt{Zoc}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{R-SSMod}(M)$. ❑

Usando que $\mathtt{tr}_{R-SSMod}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{\mathcal{A}}(M)$, de la Afirmación 1.1 es inmediato que $\mathtt{Zoc}(M) \leqslant \mathtt{tr}_{\mathcal{A}}(M)$. ❑

Afirmación 2: $\forall \mathtt{r} \in$ R-Prei$^*\big(\mathcal{T}_{\mathtt{r}} \in i\mathcal{P}(R)\big)$.

Demostración: Sea $\mathtt{r} \in$ R-Prei*. Debido a que $i\mathcal{P}(R) =$ [R-SSMod, R-Mod] (Corolario 5.1.12), sólo tenemos que demostrar que R-SSMod$\subseteq \mathcal{T}_{\mathtt{r}} \subseteq$R-Mod, no obstante, recordemos que $\mathcal{T}_{\mathtt{r}} = \{M \in \text{R-Mod} \mid \mathtt{r}(M) = M\}$, por lo tanto todo se reduce a ver que R-SSMod $\subseteq \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. Sea pues $S \in$ R-SSMod. De la elección de $\mathtt{r}$ se sigue que $\mathtt{Zoc}(M) \leqslant \mathtt{r}(M)$ para todo $M \in$ R-Mod, en particular $\mathtt{Zoc}(S) \leqslant \mathtt{r}(S)$, pero $S = \mathtt{Zoc}(S)$ y $\mathtt{r}(S) \leqslant S$, entonces $\mathtt{r}(S) = S$. Por consiguiente $S \in \mathcal{T}_{\mathtt{r}}$. ❑

De las afirmaciones 1 y 2 se desprende que $\mathtt{tr}_{(\ )}|_{i\mathcal{P}(R)} : i\mathcal{P}(R) \longrightarrow$ R-Prei* es un isomorfismo de orden, y ya que tanto (R-Prei$^*, \preceq, \wedge_{Prei}, \vee_{Prei}$) como $(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \wedge, \vee)$ son retículas (Lema 5.1.13 y Corolario 5.1.11), la Proposición 1.3.3 nos garantiza que $\mathtt{tr}_{(\ )}|_{i\mathcal{P}(R)}$ es un isomorfismo de retículas.

(1) $\cong$ (3)] En vista de que la función

$$\begin{aligned} \text{R-Wis} &\xrightarrow{\mathsf{F}_{(\ )}} \text{R-Fil} \\ \mathcal{W} &\longmapsto \mathsf{F}_{\mathcal{W}} \doteqdot \big\{{}_R I \leqslant {}_R R \mid R/I \in \mathcal{W}\big\} \end{aligned}$$

y su inversa

$$\begin{aligned} \text{R-Fil} &\xrightarrow{\mathsf{F}^{-1}_{(\ )}} \text{R-Wis} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathsf{T}_{\mathcal{F}} \doteqdot \big\{M \in \text{R-Mod} \mid \forall m \in M\big((0:m) \in \mathcal{F}\big)\big\} \end{aligned}$$

son morfismos de orden (Teorema 4.3.6), del hecho de que $i\mathcal{P}(R)$ y R-Fil* son subretículas de R-Wis y R-Fil (Lema 5.1.13 y Corolario 5.1.11), respectivamente, se sigue de la Proposición 1.3.3 que $i\mathcal{P}(R)$ y R-Fil* van a ser retículas isomorfas si tales morfismos se restringen bien.

Afirmación 1: $\forall \mathcal{A} \in i\mathcal{P}(R)\big(\mathsf{F}_{\mathcal{A}} \in \text{R-Fil}^*\big)$.

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in i\mathcal{P}(R)$. Para ver que $\mathsf{F}_{\mathcal{A}} \in$ R-Fil* sólo debemos tomar un ideal izquierdo máximo de R, digamos I, y ver que $I \in \mathsf{F}_{\mathcal{A}}$; por lo tanto buscamos poder concluir que $R/I \in \mathcal{A}$. Por fortuna, al ser I un ideal izquierdo máximo de R, se tiene que R/I es un R-módulo simple; de aquí que R/I es semisimple, y como R-SSMod $\subseteq \mathcal{A}$, entonces $R/I \in \mathcal{A}$. ❑

Afirmación 2: $\forall \mathcal{F} \in \text{R-Fil}^*\big(\mathsf{T}_{\mathcal{F}} \in i\mathcal{P}(R)\big)$.

Demostración: Sea $\mathcal{F} \in$ R-Fil*. Por el Corolario 5.1.12 y la definición de $\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$, sólo tendíamos que demostrar que R-SSMod $\subseteq \mathsf{T}_{\mathcal{F}}$, sin embargo $\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ es una clase de Wisbauer, así que en particular es cerrada bajo sumas directas arbitrarias; de aquí que sólo necesitamos mostrar que $\mathsf{T}_{\mathcal{F}}$ contiene a cualquier R-módulo simple. Entonces sea $S \in$ R-Mod un simple y sea $0 \neq m \in S$. Demostraremos que $R/(0:m)$ es un R-módulo simple, pues si así fuera ocurriría que $(0:m)$ es un ideal izquierdo máximo de R y por la elección de $\mathcal{F}$ tendríamos que $(0{:}m) \in \mathcal{F}$. Tomemos pues un $\bar{0} \neq l + (0{:}m) \in R/(0{:}m)$. Con la finalidad de llegar a que $R/(0{:}m) \subseteq R\big(l + (0{:}m)\big)$, sea $\bar{0} \neq t + (0{:}m) \in R/(0{:}m)$. Como $lm \neq 0 \neq tm$, entonces $R(lm) = S = R(tm)$, así que $tm = r(lm)$ para algún $r \in R$; de aquí que $(t - rl)m = 0$ y por consiguiente $t - rl \in (0 : m)$, luego $t + (0{:}m) = rl + (0{:}m) \in R\big(l + (0{:}m)\big)$. ❑

Las afirmaciones anteriores implican que $\mathsf{F}_{(\ )}|_{i\mathcal{P}(R)} : i\mathcal{P}(R) \longrightarrow$ R-Fil* es un isomorfismo de retículas.

(2) $\cong$ (4)] En la prueba del Teorema 4.4.18 observamos que las funciones

$$\begin{array}{rcl} \text{R-Prei} & \xrightarrow{\Theta} & \mathsf{S}_{fi}(\bar{E}) \\ \mathtt{r} & \longmapsto & \mathtt{r}(\bar{E}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathsf{S}_{fi}(\bar{E}) & \xrightarrow{\Theta^{-1}} & \text{R-Prei} \\ N & \longmapsto & \omega_N^{\bar{E}} \end{array}$$

son morfismos de orden. Siguiendo la línea de razonamiento que hemos mantenido a lo largo de toda la demostración, para asegurar que (R-Prei$^*, \preceq$) y $(\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*, \leqslant)$ son retículas isomorfas basta ver que $Im\big(\Theta|_{R-Prei^*}\big) = \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$.

Afirmación 1: $\forall \mathtt{r} \in$ R-Prei$^*\Big(\mathtt{r}(\bar{E}) \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*\Big)$.

Demostración: Si $\mathtt{r} \in$ R-Prei*, entonces $\mathtt{Zoc} \preceq \mathtt{r}$ y así $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \leqslant \mathtt{r}(\bar{E})$; de aquí que $\mathtt{r}(\bar{E}) \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$. ❑

Afirmación 2: $\forall N \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*\big(\omega_N^{\bar{E}} \in \mathtt{r} \in$ R-Prei$^*\big)$.

Demostración: Sea $N \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$. Por un lado, de la definición de $\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$ se tiene que $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \leqslant N$. Ahora, como Θ^{-1} preserva el orden y $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \leqslant N$, sucede que $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{Zoc}(\bar{E})} \preceq \omega_N^{\bar{E}}$; pero $\mathtt{Zoc} \in$ R-Prei y $\bar{E}$ es un inyectivo principal, entonces $\omega^{\bar{E}}_{\mathtt{Zoc}(\bar{E})} = \mathtt{Zoc}$. Luego $\omega_N^{\bar{E}} \in$ R-Prei y $\mathtt{Zoc} \preceq \omega_N^{\bar{E}}$. ❑

Por lo tanto $\big(\text{R-Prei}^*, \preceq, \wedge_{Pr_{ei}}, \vee_{Pr_{ei}}\big) \cong (\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*, \leqslant, \cap, \Sigma)$. ■

5.2 *Algunos Aspectos la Retícula $i\mathcal{P}(R)$*

Si $M \in$ R-Mod y $\mathcal{L}(M)$ es el conjunto de todos los submódulos de M, sabemos que $(\mathcal{L}(M), \subseteq, \cap, \Sigma)$ es siempre una retícula modular, entonces cualquiera de sus subretículas también debe serlo, en particular se tiene que $(\mathsf{S}_{fi}(M)^*, \subseteq, \cap, \Sigma)$ es modular; por lo tanto toda retícula isomorfa a $(\mathsf{S}_{fi}(M)^*, \subseteq, \cap, \Sigma)$ será modular. Como consecuencia de estas observaciones y del isomorfismo retícular entre los incisos (1) y (4) de la Proposición 5.1.14, conseguimos el siguiente corolario.

Corolario (5.2.1)
Si R es un anillo, entonces $(i\mathcal{P}(R),\ \subseteq,\ \bigwedge,\ \bigvee)$ es una retícula modular.

De la misma manera en que deducimos el corolario anterior, en adelante nos apoyaremos en las retículas involucradas en la Proposición 5.1.14 para inferir ciertas propiedades reticulares del perfil de inyectividad de un anillo; propiedades que en primera instancia no son fáciles de apreciar, pero que al enfocar a $i\mathcal{P}(R)$ con los distintos lentes que ofrece la Proposición 5.1.14, estas relucen de forma espectacular.

Proposición (5.2.2)
Sea R un anillo. La retícula $(i\mathcal{P}(R),\ \subseteq,\ \bigwedge,\ \bigvee)$ es coatómica.

Demostración:
Para establecer que $i\mathcal{P}(R)$ es coatómica, es suficiente mostrar que una de las retículas de la Proposición 5.1.14 lo es; pues dicha propiedad se hereda bajo

isomorfismos de retículas. Mostraremos que R-Fil* tiene la propiedad.

Afirmación: Si $\mathcal{F} \in$ R-Fil*$\backslash\{\eta[0]\}$ y $[\mathcal{F}, \eta[0]) \doteq \{\mathcal{G} \in$ R-Fil*$\mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subsetneq \eta[0]\}$, entonces $[\mathcal{F}, \eta[0])$ tiene un elemento $\subseteq$-máximo.

Demostración: Sean $\mathcal{F}$ y $[\mathcal{F}, \eta[0])$ como en el enunciado. Tomemos una cadena en $\big([\mathcal{F}, \eta[0]), \subseteq\big)$, digamos $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\Gamma}$. Hagamos $\mathcal{G} \doteq \bigcup_{i\in\Gamma} \mathcal{C}_i$ y veamos que $\mathcal{G} \in$ R-Fil*.

1] Sea $I \in \mathcal{G}$ y sea J un ideal izquierdo de R tal que $I \subseteq J$. Como $I \in \mathcal{C}_i$ para algún $i \in \Gamma$ y $\mathcal{C}_i$ es un filtro, sucede que $J \in \mathcal{C}_i$; luego $J \in \mathcal{G}$.
2] Sean $I, J \in \mathcal{G}$. Entonces $I \in \mathcal{C}_i$ y $J \in \mathcal{C}_j$ para algunos $i, j \in \Gamma$, como $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\Gamma}$ es una cadena, sin perder generalidad podemos suponer $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_j$; de aquí que $I \cap J \in \mathcal{C}_j$ y así $I \cap J \in \mathcal{G}$.
3] Si $I \in \mathcal{G}$ y $r \in$ R, entonces $I \in \mathcal{C}_i$ para algún $i \in \Gamma$, pero $\mathcal{C}_i$ es un filtro, así que $(I : r) \in \mathcal{C}_i$ y por consiguiente $(I : r) \in \mathcal{G}$.
4] Sea I un ideal izquierdo máximo de R. Puesto que, en particular, $I \in \mathcal{H}$ para todo $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}, \eta[0])$, se tiene que $I \in \mathcal{C}_i$ para cada $i \in \Gamma$; entonces $I \in \mathcal{G}$.

Lo anterior asegura que $\mathcal{G} \in$ R-Fil*. Ahora, como $\{C_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq [\mathcal{F}, \eta[0])$, para cada $i \in \Gamma$ existe un $I_i \in \eta[0]$ de modo que $I_i \notin \mathcal{C}_i$. Si $\mathcal{G} = \eta[0]$, se tendría que $\bigcap_{i\in\Gamma} I_i \in \mathcal{G}$, luego $\bigcap_{i\in\Gamma} I_i \in \mathcal{C}_j$ para algún $j \in \Gamma$; como I_j es un ideal izquierdo de R tal que $\bigcap_{i\in\Gamma} I_i \subseteq I_j$ y $\mathcal{C}_j$ es un filtro, entonces $I_j \in \mathcal{C}_j$, lo cual no sucede. De esto se sigue que $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}, \eta[0])$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es una cota superior de $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in\Gamma}$ en $[\mathcal{F}, \eta[0])$, luego el Lema de Zorn nos garantiza que $[\mathcal{F}, \eta[0])$ tiene un elemento máximo. □

La afirmación se interpreta como que para cada $\mathcal{F} \in$ R-Fil*$\backslash\{\eta[0]\}$ existe un $\mathcal{M} \in$ R-Fil*$\backslash\{\eta[0]\}$ de modo que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ y con la propiedad de que no existe $\mathcal{Z} \in$ R-Fil* tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{Z} \subsetneq \eta[0]$. En resumen, (R-Fil*$, \subseteq, \wedge_{Fil}, \vee_{Fil}$) es una retícula coatómica. ■

En el capítulo 4 vimos que el prerradical $\texttt{Sing}$: R-Mod → R-Mod, definido como $\texttt{Sing}(M) \doteq \{m \in M|(0 : m) \subseteq_e {}_RR\}$, es exacto izquierdo, por lo que del Lema 4.2.5 y la Proposición 4.2.8 se sigue que $\mathcal{T}_{\texttt{Sing}} \doteq \{M \in \text{R-Mod} \mid \texttt{Sing}(M) = M\}$ es una clase de Wisbauer; a tal clase la denotaremos por R-Sing. Pongamos estas observaciones en un lema para futuras referencias y concedamos un nombre a los elementos de R-Sing.

Definición
Sea $M \in$ R-Mod. Diremos que M es *singular* si $\texttt{Sing}(M) = M$. En caso de que $\texttt{Sing}(M) = 0$, M se llamará *no-singular*.

Lema (5.2.3)
Si R es un anillo, entonces R-Sing $\doteq \{M \in \text{R-Mod}|M \text{ es singular}\} \in$ R-Wis.

A continuación veremos que R-Sing es una clase de Wisbauer especial si R tiene propiedades particulares, pero antes recordemos que un anillo R es uniforme izquierdo si como R-módulo izquierdo es uniforme.

Lema (5.2.4)
Si R es un anillo uniforme izquierdo, entonces R-Sing $\in i\mathcal{P}(R)$.

Demostración:

Asumamos que ${}_RR$ es uniforme. Sea M un R-módulo no-singular que no es inyectivo. Demostremos que $\mathcal{I}n^{-1}(M) = $ R-Sing:

[$\subseteq$] Sea $N \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$. Para llegar a que N es singular, tomemos un $n \in N$ arbitrario y mostremos que $(0:n) \subseteq_e R$. Como ${}_RR$ es uniforme, para probar que $(0{:}n) \subseteq_e R$, basta ver que $(0{:}n) \neq 0$. Si $(0{:}n) = 0$, entonces $R \cong R/(0{:}n)$, no obstante $R/(0{:}n) \cong Rn \leqslant N$, de esto, y del hecho de que $N \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$ y $\mathcal{I}n^{-1}(M)$ es una clase de Wisbauer, se sigue que $R \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$; de donde el Criterio de Baer nos lleva a concluir que M es inyectivo, cosa que no puede suceder. Por lo tanto $(0:n) \neq 0$ y así $\mathtt{Sing}(N) = N$.

[$\supseteq$] Sea $N \in$ R-Sing. Con la intención de mostrar que M es N-inyectivo, sea $K \leqslant N$ y sea $f{:}K \to M$ un R-morfismo. Como $N \in$ R-Sing y R-sing es cerrada bajo submódulos (Lema 5.2.3), se tiene que $K \in$ R-Sing. Ahora bien, tenemos entonces que $\mathtt{Sing}(K) = K$, $\mathtt{Sing}(M) = 0$ y $\mathtt{Sing} \in$ R-Pr, por lo tanto $f(K) = f\big(\mathtt{Sing}(K)\big) \subseteq \mathtt{Sing}(M) = 0$, luego f es el morfimos cero. De este modo, si definimos $\bar{f} : N \to M$ como $\bar{f}(N) = 0$ para todo $n \in N$, ocurre que $f = \bar{f}|_K$, entonces $N \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$. ■

Ahora ya sabemos que, si R es como en el enunciado del Lema 5.2.4, la clase R-Sing es una i-carpeta. Mostraremos, en este caso, que de hecho R-Sing es un elemento destacado de la retícula $i\mathcal{P}(R)$.

Proposición (5.2.5)

Si R es un anillo uniforme izquierdo, la retícula $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\big)$ tiene a R-Sing como único coatómo.

Demostración:

Supongamos ${}_RR$ uniforme izquierdo. Recordemos que en la demostración de la Proposición 5.1.14 vimos que

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{(\ )}| : i\mathcal{P}(R) &\longrightarrow \text{R-Fil}^* \\ \mathcal{C} &\longmapsto \mathsf{F}_{\mathcal{C}} \doteq \big\{{}_RI \leqslant {}_RR \mid R/I \in \mathcal{C}\big\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de retículas. Si conseguimos probar que R-Fil* tiene un único coatómo, digamos $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, por ser $\mathsf{F}_{(\ )}|$ un isomorfismo retícular, se tendría que $\big(\mathsf{F}_{(\ )}|\big)^{-1}\big(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}\big)$ es un coatómo de $i\mathcal{P}(R)$ y que éste es el único. Pues bien, esta será la ruta que nos guiará a la conclusión de la proposición que en este momento nos ocupa.

Afirmación: $\{{}_RI \leqslant {}_RR \mid R/I \in \text{R-Sing}\} = \{{}_RI \leqslant {}_RR \mid I \neq 0\}$.

Demostración: Por hipótesis ${}_RR$ es uniforme, así que $R \in \{{}_RI \leqslant {}_RR | I \neq 0\}$.

[$\subseteq$] Tomemos un $I \in \{{}_RI \leqslant {}_RR \mid R/I \in \text{R-Sing}\}$. Si $I = 0$, entonces $R/I \cong R$, pero R-Sing es cerrada bajo isomorfismos (Lema 5.2.3), así que $R \in$ R-Sing, luego $(0:r) \subseteq_e R$ para cada $r \in R$; en particular $0 = (0:1) \subseteq_e R$, por lo tanto $R = 0$, lo cual es imposible debido a que R es uniforme. Obteniendo con esto que $I \neq 0$.

[$\supseteq$] Sea $I \neq 0$ un ideal izquierdo de R. Queremos llegar a que $R/I \in$ R-Sing, para ello tomamos un $a + I \in R/I$ y mostraremos que $(\bar{0} : a + I) \subseteq_e R$; cosa que, bajo la hipótesis de que ${}_RR$ de uniforme, equivale a ver que $(\bar{0}{:}a{+}I) \neq 0$. Si $a \in I$, entonces $(\bar{0} : a{+}I) = R \neq 0$. Supongamos que $a \notin I$, en particular $a \neq 0$. Debido a que tanto Ra como I son ideales izquierdos de R distintos de cero y ${}_RR$ es uniforme, se tiene $Ra \cap I \neq 0$, así existe un $r \in R$ tal que $0 \neq ra \in I$; de aquí que $r \neq 0$ y $r \in \{r \in R | ra \in I\} = (I : a) = (\bar{0} : a{+}I)$. □

Notamos que $\mathsf{F}_{(\ )}|(\text{R-Sing}) = \mathsf{F}_{R-Sing} = \{_RI \leqslant {}_RR \mid R/I \in \text{R-Sing}\}$, por lo que de la afirmación conseguimos que $\mathsf{F}_{(\ )}|(\text{R-Sing}) = \{_RI \leqslant {}_RR \mid I \neq 0\}$ y por consiguiente que $\{_RI \leqslant {}_RR \mid I \neq 0\} \in \text{R-Fil}^*$. Como $\eta[0] = \{_RI \leqslant {}_RR\}$ es el elemento mayor de R-Fil*, tenemos que $\{_RI \leqslant {}_RR \mid I \neq 0\}$ es un coatómo de R-Fil*, y además, por construcción, éste es el único. Así R-Sing es el único coatómo de $i\mathcal{P}(R)$. ■

Como se aprecia en la Proposición 5.2.5, si un anillo R tiene propiedades especiales, entonces obtendremos que la estructura retícular de $i\mathcal{P}(R)$ se vuelve más rica. En lo que sigue justamente analizaremos qué sucede con el perfil de inyectividad de algunos tipos de anillos, sin embargo necesitamos probar algunos resultados preliminares.

Definición
Un anillo R se llama *cuasi-inyectivo izquierdo* si todo R-módulo izquierdo cuasi-inyectivo es inyectivo.

Definición
Si R es un anillo, decimos que R es un *V-anillo izquierdo* si todo R-módulo izquierdo simple es inyectivo.

Lema (5.2.6)
Si R es un anillo tal que todo R-módulo izquierdo semisimple es inyectivo, entonces R es neteriano izquierdo.

Demostración:
Para hacer esta demostración usaremos el Lema 1.1.28. Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ un conjunto numerable de módulos simples. Entonces $\{S_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de semisimples, de la hipótesis se obtiene que $\{S_i\}_{i\in I}$ es una familia de inyectivos, de este modo $E(S_i) = S_i$ para cada $i \in I$; por lo tanto $\oplus_{i\in I}E(S_i) = \oplus_{i\in I}S_i$ y así $\oplus_{i\in I}E(S_i)$ es semisimple, luego la hipótesis nos lleva a la conclusión de que $\oplus_{i\in I}E(S_i)$ es inyectivo. ■

Corolario (5.2.7)
Si R es un anillo cuasi-inyectivo izquierdo, entonces R es un V-anillo izquierdo y es neteriano izquierdo.

Demostración:
Sea $S \in$ R-Mod un simple. Entonces S es semisimple y por el Lema 3.2.1 es cuasi-inyectivo, de donde por hipótesis se llega a que S es inyectivo. Por lo tanto R es un V-anillo. Ahora bien, notamos que si $C \in$ R-SSMod, C es un R-módulo cuasi-inyectivo, luego la hipótesis implica que C es inyectivo; de esto y del Lema 5.2.6 concluimos que $_RR$ es neteriano. ■

Lema (5.2.8)
Sea $M \in$R-Mod tal que $M = \oplus_{i\in I}M_i$. Si $L \leqslant_{fi} M$, entonces $L = \oplus_{i\in I}(L \cap M_i)$ y $L \cap M_i \leqslant_{fi} M_i$ para cada $i \in I$.
Demostración:
Sea $L \leqslant_{fi} M$. Es inmediato que $\Sigma_{i\in I}(L \cap M_i) \subseteq L$. Por otro lado, para cada $j \in I$ consideremos el morfismo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i\in I} M_i & \xrightarrow{\pi_j} & M_i & \overset{i_j}{\hookrightarrow} & \bigoplus_{i\in I} M_i \\ m_1 + \ldots + m_n & \mapsto & m_j & \longmapsto & m_j \end{array}$$

Como $L \leqslant_{fi} M$, en particular se tiene que $i_j\pi_j(L) \subseteq L$ para cada $j \in I$. Si $x \in L$, existe $\{i1, ..., in\} \subseteq I$ de modo que $x = m_{i1} + \cdots + m_{in}$ para algunos $m_{ik} \in M_{ik}$; entonces $m_{ik} = i_{ik}\pi_{ik}(x) \in L \cap M_{ik}$ para cada $ik \in \{i1, ..., in\}$ y por consiguiente $x \in \Sigma_{i\in I}(L \cap M_i)$. En resumen $L \subseteq \Sigma_{i\in I}(L \cap M_i)$. Además $(L \cap M_j) \cap \big(\Sigma_{i\in I\setminus\{j\}}(L \cap M_i)\big) \subseteq M_j \cap \big(\Sigma_{i\in I\setminus\{j\}} M_i\big) = \{0\}$ para cada $j \in I$, así que $L = \oplus_{i\in I}(L \cap M_i)$. Usando el Lema 4.4.12 inciso (2) deducimos que $L \cap M_i \leqslant_{fi} M_i$ para cada $i \in I$, finalizando con esto la demostración. ■

Lema (5.2.9)
Sea R un anillo cuasi-inyectivo izquierdo y sean $N, E \in$ R-Mod, donde E es un inyectivo inescindible. Si $N \leqslant_{fi} E$, entonces $N = 0$ ó $N = E$.

Demostración:
Supongamos $N \leqslant_{fi} E$. Digamos que $N \neq 0$ y probemos que $N = E$.

Afirmación: $N \in \mathcal{I}n^{-1}(N)$.

Demostración: Sea $K \leqslant N$ y sea $f \in \mathsf{Hom}_R(K, N)$. Si i_1 es la inclusión de K en N e i_2 la inclusión de N en E, como E es inyectivo hay un $g \in \mathsf{Hom}_R(E, E)$ tal que

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, hook, "i_2"] & E \arrow[ddll, dashed, "g"] \\ N \arrow[d, hook, "i_2"'] & & \\ E & & \end{tikzcd}$$

es diagrama conmutativo. Como $N \leqslant_{fi} E$, debe suceder que $g(N) \subseteq N$, así $f = (g|_N)|_K$; por lo tanto N es N-inyectivo. □

Por la afirmación anterior N es quasi-inyectivo, puesto que R es cuasi-inyectivo por hipótesis, se sigue que N es inyectivo. Ahora, del hecho de que E es un inyectivo inescindible y de que $0 \neq N \leqslant E$, usando el Lema 1.1.25 concluimos que $E = E(N)$; usando que N es inyectivo obtenemos de esta manera que $E = E(N) = N$. ■

Consideremos un R anillo neteriano izquierdo y un $E \in$ R-Mod inyectivo. Sea Ii un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos izquierdos inyectivos inescindibles.[2] El Lema 1.1.34 asegura que $E \cong \oplus_{Q\in\daleth} Q$ para algún $\daleth \subseteq$ Ii; no obstante, puede aparecer en $\oplus_{Q\in\daleth} Q$ un mismo factor más de una vez, digamos que $\check{Q}$ aparece $\kappa_{\check{Q}}$ veces, entonces $E \cong \check{Q}^{(\kappa_{\check{Q}})} \oplus \big(\oplus_{Q\in\daleth\setminus\{\check{Q}\}} Q\big)$. Luego en $\oplus_{Q\in\daleth\setminus\{\check{Q}\}} Q$ puede suceder lo mismo: repetirse un factor más de una vez. Así podemos encontrar una familia de cardinales $\{\kappa_Q\}_{Q\in\daleth}$ tal que κ_Q son las veces que Q aparece en $\oplus_{Q\in\daleth} Q$; de este modo $E \cong \oplus_{Q\in\daleth} Q^{(\kappa_Q)}$, y en esta descomposición de E ya no se repiten factores. Siguiendo esta idea, podemos incluso hacer que en la descomposición de E "aparezcan" todos los inyectivos

[2] En [25] Matlis demuestra, para un anillo arbitrario R, que: $_RM$ es inyectivo inescindible si y sólo si $M \cong E(R/I)$ para algún $_RI \leqslant {_RR}$ irreducible. Entonces para cualquier anillo R se tiene que hay a lo más $|\mathcal{P}(R)|$ módulos inyectivos inescindibles no isomorfos.

inescindibles, ya que si existe $I \in \mathrm{Ii}\backslash \beth$, entonces podemos poner $\kappa_I = \varnothing$ y aún así tener que $E \cong \oplus_{Q \in \beth \cup \{I\}} Q^{(\kappa_Q)}$ debido a que $I^{(\kappa_I)} = 0$. De estas observaciones se obtiene el siguiente corolario.

Corolario (5.2.10)
Sea R un anillo neteriano izquierdo. Si $E \in$ R-Mod es inyectivo, existe una familia de cardinales $\{\kappa_Q\}_{Q \in \mathrm{Ii}}$ con la propiedad de que $E \cong \bigoplus_{Q \in \mathrm{Ii}} Q^{(\kappa_Q)}$.

Lema (5.2.11)
Sea R un anillo neteriano izquierdo. Entonces, ${}_R\left(\bigoplus_{Q \in \mathrm{Ii}} Q\right)$ es inyectivo principal.

Demostración:
Hagamos $\bar{E} \doteq \oplus_{Q \in Ii} Q$. Comenzamos notando que $\bar{E}$ es inyectivo por el Lema 1.1.28. Ahora bien, tomemos un $\mathtt{r} \in$ R-Prei arbitrario y lleguemos a que $\mathtt{r} = \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}$. La Proposición 4.4.13 garantiza la existencia de un inyectivo $E_{\mathtt{r}}$ con la propiedad de que $\mathtt{r} = \omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})}$. Mientras que del Corolario 5.2.10 se obtiene una familia de cardinales $\{\kappa_Q\}_{Q \in Ii}$ tal que $E_{\mathtt{r}} \cong \oplus_{Q \in Ii} Q^{(\kappa_Q)}$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathtt{r} &= \omega^{E_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}(E_{\mathtt{r}})} && \\
&= \omega^{\bigoplus_{Q \in Ii} Q^{(\kappa_Q)}}_{\mathtt{r}(\bigoplus_{Q \in Ii} Q^{(\kappa_Q)})} && \text{(Lema 4.4.11)} \\
&= \omega^{\bigoplus_{Q \in Ii} Q^{(\kappa_Q)}}_{\bigoplus_{Q \in Ii} \mathtt{r}(Q^{(\kappa_Q)})} && \text{(Lema 4.2.4)} \\
&= \bigwedge\nolimits_{Q \in Ii} \omega^{Q^{(\kappa_Q)}}_{\mathtt{r}(Q^{(\kappa_Q)})} && \text{(Lema 4.4.12 inciso (2))} \\
&= \bigwedge\nolimits_{Q \in Ii} \omega^{Q^{(\kappa_Q)}}_{\mathtt{r}(Q)^{(\kappa_Q)}} && \text{(Lema 4.2.4)} \\
&= \bigwedge\nolimits_{Q \in Ii} \left(\bigwedge\nolimits_{\kappa_Q} \omega^{Q}_{\mathtt{r}(Q)}\right) && \text{(Lema 4.4.12 inciso (2))} \\
&= \bigwedge\nolimits_{Q \in Ii} \omega^{Q}_{\mathtt{r}(Q)} && \\
&= \omega^{\oplus_{Q \in Ii} Q}_{\oplus_{Q \in Ii} \mathtt{r}(Q)} && \text{(Lema 4.4.12 inciso (2))} \\
&= \omega^{\oplus_{Q \in Ii} Q}_{\mathtt{r}(\oplus_{Q \in Ii} Q)} && \text{(Lema 4.2.4)} \\
&= \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{r}(\bar{E})}. && \text{(Definición de } \bar{E})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en efecto, $\bar{E}$ es un módulo inyectivo principal. ■

En este punto ya estamos preparados para establecer un nuevo resultado concerniente al perfil de inyectividad. Nuestro siguiente teorema relaciona de una manera sensacional las observaciones precedentes y muestra la importancia de tener una función entre dos estructuras que respete su naturaleza interna.

Teorema (5.2.12)
Sea R un anillo cuasi-inyectivo izquierdo. La retícula $\left(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$ es distributiva.

Demostración:
Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos (izquierdos) inyectivos inescindibles. Por el Corolario 5.2.7 sabemos que ${}_RR$ es neteriano, por consiguiente del Lema 5.2.11 se tiene que $E \doteq \bigoplus_{i\in I} E_i$ es un inyectivo principal. Observemos que si $S \in$ R-Mod es un simple, como R es un V-anillo (Corolario 5.2.7) S es inyectivo; sin embargo sus únicos submódulos son 0 y S, así que S es un inyectivo inescindible. Por lo tanto todo simple es inyectivo inescindible, de aquí que existe un $I' \subseteq I$ de modo que $\{E_i\}_{i\in I'}$ es un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos simples. Tomemos $J \doteq I\backslash I'$, $E_1 \doteq \bigoplus_{i\in I'} E_i$ y $E_2 \doteq \bigoplus_{j\in J} E_j$.

Afirmación 1: Existe $\varphi : \mathsf{S}_{fi}(E)^* \longrightarrow \mathsf{S}_{fi}(E_2)$ un isomorfismo de orden.

Demostración: Observamos que en el conjunto $\{E_j\}_{j\in J}$ no hay simples; pues si hubiera algún simple ahí este tendría que ser isomorfo a algún elemento de $\{E_i\}_{i\in I'}$, obteniendo de este modo que el conjunto $\{E_i\}_{i\in I}$ tiene dos elementos distintos e isomorfos, lo cual no es posible. Por lo tanto $\mathsf{Zoc}(E) = E_1$. De esta manera $\mathsf{S}_{fi}(E)^* = \{A \in \mathsf{S}_{fi}(E) \mid E_1 \leqslant A\}$. Ahora, $E = E_1 \oplus E_2$, entonces si $A \in \mathsf{S}_{fi}(E)^*$ ocurre que $A = (A\cap E_1)\oplus(A\cap E_2)$ con $A\cap E_1 \leqslant_{fi} E_1$ y $A \cap E_2 \leqslant_{fi} E_2$ (Lema 5.2.8), pero $E_1 \leqslant A$, entonces $A \cap E_1 = E_1$; de aquí que $A = E_1 \oplus (A \cap E_2)$, donde $A \cap E_2 \leqslant_{fi} E_2$. Así que podemos definir:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_{fi}(E)^* &\xrightarrow{\varphi} \mathsf{S}_{fi}(E_2) \\ E_1 \oplus (A \cap E_2) &\mapsto A \cap E_2 \end{aligned}$$

Sean $A, B \in \mathsf{S}_{fi}(E)^*$. Si $A = B$, entonces $A\cap E_2 = B\cap E_2$. Si $\varphi(A) = \varphi(B)$, entonces $A \cap E_2 = B \cap E_2$, pero $A = E_1 \oplus (A \cap E_2)$ y $B = E_1 \oplus (B \cap E_2)$, así que $A = B$. Por lo tanto φ es una función inyectiva.

Afirmación 1.1: φ es suprayectiva.

Demostración: Sea $N \in \mathsf{S}_{fi}(E_2)$. Queremos probar que $E_1 + N \leqslant_{fi} E$. Sean $f \in \mathsf{End}_R(E)$ y $e+n \in E_1+N$. Como $f(e)+f(n) = f(e+n) \in E = E_1\oplus E_2$, entonces $f(e) + f(n) = a + b$ para algún $a \in E_1$ y algún $b \in E_2$. Notamos que $\mathsf{Zoc}(E) \leqslant_{fi} E$ (Lema 4.4.1), así $E_1 \leqslant_{fi} E$ y por consiguiente $f(e) \in E_1$. Luego $f(n) = x + b$, donde $x = (a - f(e)) \in E_1$ y $b \in E_2$. Si consideramos a

$$E_2 \xrightarrow{f|_{E_2}} E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{\pi_2} E_2$$

se obtiene que $\pi_2 \circ f|_{E_2}(n) \in N$, pues $N \leqslant_{fi} E_2$ y $\pi_2 \circ f|_{E_2} \in \mathsf{End}_R(E_2)$. Sin embargo $\pi_2 \circ f|_{E_2}(n) = \pi_2(f(n)) = \pi_2(x + b) = b$, por lo tanto $b \in N$. Así $f(e + n) = f(e) + f(n) = a + b \in E_1 + N$. De aquí que $E_1 + N \leqslant_{fi} E$. Entonces $E_1 + N \in \mathsf{S}_{fi}(E)^*$. Además $(E_1 + N) \cap E_2 = (E_1 \cap E_2) + N$ por la Ley Módular, así que $\varphi(E_1 + N) = (E_1 + N) \cap E_2 = (E_1 \cap E_2) + N = N$. Por lo tanto $E_1 + N \in \mathsf{S}_{fi}(E)^*$ y $\varphi(E_1 + N) = N$. ❏

De este modo φ es una función biyectiva. Por otro lado, si $A, B \in \mathsf{S}_{fi}(E)^*$, no es difícil notar que $A \leqslant B$ si y sólo si $A \cap E_2 \leqslant B \cap E_2$. Luego φ es un isomorfismo de orden. ❏

Afirmación 2: Existe $\psi : \mathsf{S}_{fi}(E_2) \longrightarrow \mathcal{P}(J)$ morfismo de orden inyectivo.

Demostración: Si $N \in \mathsf{S}_{fi}(E_2)$, recordando que $E_2 = \oplus_{j\in J}E_j$, del Lema 5.2.8 se sigue que $N = \oplus_{j\in J}(N \cap E_j)$ con $N \cap E_j \leqslant_{fi} E_j$ para cada $j \in J$; de donde, a su vez, el Lema 5.2.9 asegura que para cada $j \in J$ ó bien $N \cap E_j = 0$ ó $N \cap E_j = E_j$. Entonces tiene sentido definir:

$$\begin{array}{c} \mathsf{S}_{fi}(E_2) \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}(J) \\ \bigoplus_{j\in J}(N \cap E_j) \longmapsto \{j \in J \mid N \cap E_j = E_j\} \end{array}$$

Sean $K, N \in \mathsf{S}_{fi}(E_2)$. Si $K = N$, entonces $K \cap E_j = N \cap E_j$ para cualquier $j \in J$, así que $\psi(K) = \psi(N)$. Si $\psi(K) = \psi(N)$, los conjuntos $\{K \cap E_j\}_{j\in J}$ y $\{N \cap E_j\}_{j\in J}$ son iguales, luego $K = \oplus_{j\in J}(K \cap E_j) = \oplus_{j\in J}(N \cap E_j) = N$. Ahora asumamos que $K \leqslant N$; si $j \in \psi(K)$, entonces $K \cap E_j = E_j$, así $N \cap (E_j) = N \cap (K \cap E_j) = K \cap E_j = E_j$, por lo que $j \in \psi(N)$. Concluimos con esto que ψ es una función inyectiva que preserva el orden. ❑

Sea ψ es como en la prueba de la afirmación 2 y sean $K, N \in \mathsf{S}_{fi}(E_2)$. Supongamos que $\psi(K) \subseteq \psi(N)$, como $\{j \in J \mid N \cap E_j = E_j\}$ contiene a los índices de todos los factores de $\oplus_{j\in J}(N \cap E_j)$ que son distintos de cero, la contención $\{j \in J \mid K \cap E_j = E_j\} \subseteq \{j \in J \mid N \cap E_j = E_j\}$ quiere decir que los factores de $\oplus_{j\in J}(K \cap E_j)$ distintos de cero son algunos de los que hay en $\oplus_{j\in J}(N \cap E_j)$, por esta razón $\oplus_{j\in J}(K \cap E_j) \subseteq \oplus_{j\in J}(N \cap E_j)$ y por lo tanto $K \leqslant N$. De la afirmación 2 y de estas observaciones se deriva que

$$\psi| : \mathsf{S}_{fi}(E_2) \longrightarrow Im(\psi)$$

es un isomorfismo de orden. Pero más aún, por un lado notamos que

$$\begin{aligned} j \in \psi(K \cap N) &\Leftrightarrow (K \cap N) \cap E_j = E_j \\ &\Leftrightarrow E_j \subseteq K \cap N \\ &\Leftrightarrow E_j \subseteq K \text{ y } E_j \subseteq N \\ &\Leftrightarrow K \cap E_j = E_j \text{ y } N \cap E_j = E_j \\ &\Leftrightarrow j \in \psi(K) \cap \psi(N), \end{aligned}$$

entonces $\psi(K \cap N) = \psi(K) \cap \psi(N)$; mientras que por otra parte

$$\begin{aligned} j \notin \psi(K + N) &\Rightarrow (K + N) \cap E_j = 0 \\ &\Rightarrow (K \cap E_j) + (N \cap E_j) \subseteq (K + N) \cap E_j = 0 \\ &\Rightarrow (K \cap E_j) + (N \cap E_j) = 0 \\ &\Rightarrow K \cap E_j = 0 \text{ y } N \cap E_j = 0 \\ &\Rightarrow j \notin \psi(K) \cup \psi(N), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} j \notin \psi(K) \cup \psi(N) &\Rightarrow K \cap E_j = 0 \text{ y } N \cap E_j = 0 \\ &\Rightarrow \forall L \in \{K, N\} \Big(\bigoplus_{i\in J}(L \cap E_i) = \bigoplus_{i\in J\setminus\{j\}}(L \cap E_i) \Big) \\ &\Rightarrow \forall L \in \{K, N\} \Big(L = \bigoplus_{i\in J\setminus\{j\}}(L \cap E_i) \Big) \\ &\Rightarrow \forall L \in \{K, N\} \Big(L \subseteq \textstyle\sum_{i\in J\setminus\{j\}} E_i \Big) \\ &\Rightarrow K + N \subseteq \textstyle\sum_{i\in J\setminus\{j\}} E_i \\ &\Rightarrow (K + N) \cap E_j \subseteq \Big(\textstyle\sum_{i\in J\setminus\{j\}} E_i \Big) \cap E_j = \{0\} \\ &\Rightarrow (K + N) \cap E_j = 0 \\ &\Rightarrow j \notin \psi(K + N), \end{aligned}$$

así que $\psi(K+N) = \psi(K) \cup \psi(N)$. En resumen, acabamos de probar que para cualesquiera $k, n \in Im(\psi)$ se tiene que $k \cap n \in Im(\psi)$ y $k \cup n \in Im(\psi)$; de esto y del hecho de que $\varnothing \neq Im(\psi) \subseteq \mathcal{P}(J)$, se sigue que $(Im(\psi), \subseteq, \cap, \cup)$ es una subretícula de $(\mathcal{P}(J), \subseteq, \cap, \cup)$. Así $\psi| : \mathsf{S}_{fi}(E_2) \longrightarrow Im(\psi)$ es un isomorfismo de orden entre retículas, de donde la Proposición 1.3.3 implica que $(\mathsf{S}_{fi}(E_2), \leqslant, \cap, \Sigma)$ y $(Im(\psi), \subseteq, \cap, \cup)$ son retículas isomorfas; luego la afirmación 1 conduce a que $(\mathsf{S}_{fi}(E)^*, \leqslant, \cap, \Sigma)$ y $(Im(\psi), \subseteq, \cap, \cup)$ son isomorfas. Finalmente, como $(Im(\psi), \subseteq, \cap, \cup)$ es subretícula de $(\mathcal{P}(J), \subseteq, \cap, \cup)$ y $(\mathcal{P}(J), \subseteq, \cap, \cup)$ es distributiva, $(Im(\psi), \subseteq, \cap, \cup)$ es distributiva; dicha propiedad se preserva bajo isomorfismos de retículas, así que $(\mathsf{S}_{fi}(E)^*, \leqslant, \cap, \Sigma)$ será distributiva también. Es el influjo de la Proposición 5.1.14 el que nos fuerza a deducir que $(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \wedge, \vee)$ es una retícula distributiva. ■

Como pudimos apreciar en la demostración del teorema anterior, era necesario demostrar algunos resultados extras para obtener bases sólidas en las cuales pudiéramos cimentar nuestros razonamientos. Este proceso, el de trabajar con varios resultados preliminares antes de poder deducir algo del perfil de inyectividad de un anillo, será una constante en lo que resta del trabajo.

Definición
Sea R un anillo. Decimos que R es *uniserial izquierdo* si el conjunto de todos sus ideales izquierdos está linealmente ordenado por la inclusión.

Definición
Si R es un anillo y P un ideal bilateral propio de R, decimos que P es *fuertemente primo* si satisface lo siguiente: $\forall x, y \in \mathrm{R}(xy \in P \Rightarrow x \in P$ ó $y \in P)$.

Lema (5.2.13)
Si R es un anillo uniserial izquierdo no cero, entonces R es local.

Demostración:
Sea R como en el enunciado. Mostremos que R satisface el inciso (4) del Lema 1.1.35, a saber, que $\mathtt{J}(R)$ es un ideal izquierdo máximo de R. Puesto que $\mathtt{J}(R) = \mathtt{Rad}({}_RR) = \bigcap\{I \mid I \underset{máx}{\leqslant} {}_RR\}$, se tiene $\mathtt{J}(R) \lneq {}_RR$. Ahora bien, sea $I \leqslant {}_RR$ tal que $\mathtt{J}(R) \subsetneq I$. Entonces existe $a \in I \backslash \mathtt{J}(R)$, por lo que $a \notin K$ para algún $K \underset{máx}{\leqslant} {}_RR$, así $I \nsubseteq K$; como R es un anillo uniserial izquierdo debe suceder que $K \subsetneq I$, usando que K es un ideal izquierdo máximo de R se sigue que $I = R$. Por lo tanto $\mathtt{J}(R) \underset{máx}{\leqslant} {}_RR$. ■

Sea R un anillo uniserial izquierdo distinto de cero y hagamos $\mathtt{J}(R) \doteq \mathtt{J}$. Por el Lema 5.2.13 R es local, así el Lema 1.1.35 asegura que $R/\mathtt{J}$ es un anillo con división. Usando que R es uniserial izquierdo no es difícil probar que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ es un R-módulo uniserial izquierdo. Ahora bien, puesto que ${}_R\mathtt{J}_R \leqslant {}_RR_R$ y $\mathtt{J} \subseteq \mathcal{A}nn\left(\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}\right) = \{r \in R | \forall \bar{m} \in \mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}\,(r\bar{m} = \bar{0})\}$, del Lema 1.1.1 deducimos que $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ es un $(R/\mathtt{J})$-módulo; como $R/\mathtt{J}$ es un anillo con división, $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ resulta ser un $(R/\mathtt{J})$-módulo semisimple, de donde, nuevamente por Lema 1.1.1, se deduce que $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ es un R-módulo semisimple. Como los R-submódulos de $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ están linealmente ordenados por la inclusión, del hecho de que $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ es una suma de R-módulos simples se sigue que $\mathtt{J}^n/\mathtt{J}^{n+1}$ es un R-módulo simple ó es cero; esto nos dice que entre $\mathtt{J}^n$ y $\mathtt{J}^{n+1}$ no hay ideales izquierdos propios contenidos. En resumen, los únicos ideales izquierdos de R que contienen a $\mathtt{J}^n$ son los elementos del conjunto $\{\mathtt{J}^k \mid k \in \{0,1,...,n\}\}$. Conviene poner estas observaciones en forma de corolario.

Corolario (5.2.14)
Sea R un anillo uniserial izquierdo. Si $A \leqslant {}_RR$ es tal que $\mathtt{J}(R)^n \subseteq A$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A \in \{\mathtt{J}(R)^k \mid k \in \{0,1,...,n\}\}$.

Lema (5.2.15)
Sea R un anillo uniserial izquierdo distinto de cero. Para P y A ideales bilaterales propios de R, los siguientes enunciado son ciertos:

(1) P es fuertemente primo si y sólo si $\forall x \in P(x^2 \in P \Rightarrow x \in P)$.
(2) Si $A \neq 0$ y $A^2 = A$, entonces A es fuertemente primo.
(3) Si A no es nilpotente, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} A^n$ es fuertemente primo.
(4) Si P es fuertemente primo y $x \in R\backslash P$, entonces $P = Px$.
(5) Si P es fuertemente primo y finitamente generado, entonces $P = \mathtt{J}(\mathrm{R})$ ó $P = 0$.

Demostración:
[1] La propiedad "$\mathrm{P}_1 : \forall x \in P(x^2 \in P \Rightarrow x \in P)$" es necesaria para que P sea fuertemente primo por definición, entonces sólo resta ver que tal propiedad es suficiente. Sean $x, y \in R$ tales que $xy \in P$. Como R es uniserial izquierdo $Rx \subseteq Ry$ o bien $Ry \subseteq Rx$. Si $Rx \subseteq Ry$, hay un $s \in R$ tal que $x = sy$, ya que $P \leqslant {}_RR_R$ y $xy \in P$, ocurre que $(yx)^2 = y(xy)x \in P$; luego $yx \in P$ por P_1 y así $x^2 = (sy)x = s(yx) \in P$, de donde de P_1 implica que $x \in P$. Si $Ry \subseteq Rx$, existiría un $t \in R$ de modo que $y = tx$, sin embargo $xy \in P \leqslant {}_RR$, entonces $y^2 = (tx)y = t(xy) \in P$ y de esta manera P_1 asegura que $y \in P$. Por lo tanto $x \in P$ ó $y \in P$.

[2] Asumamos que $A \neq 0$ y $A^2 = A$. Por (1) basta tomar un $x \in R$ de modo que $x^2 \in A$ y mostrar que $x \in A$. Supongamos $x \notin A$. Como $Rx \nsubseteq A$ y R es uniserial izquierdo, debe de ser cierto que $A \subseteq Rx$; luego $AA \subseteq ARx$, pero $A^2 = A$ y $A \leqslant R_R$ por hipótesis, así que $A = AA \subseteq ARx = Ax$.

Afirmación: $A \subseteq \mathtt{J}(R)x$.

Demostración: Sea $a \in A$. Como $A \subseteq Rx$, existe $r \in R$ tal que $a = rx$. Si r fuera una unidad, con inverso r^{-1}, se tendría que $x = r^{-1}a \in A$, lo cual va en contra de nuestra suposición inicial. Entonces $r \in \{r \in R \mid r \text{ no es unidad}\}$, sin embargo el Lema 5.2.13 asegura que $\{r \in R | r \text{ no es unidad}\} = \mathtt{J}(R)$ (esto por el Lema 1.1.35 inciso 3), así que $a = rx \in \mathtt{J}(R)x$. □

De la afirmación anterior deducimos que $Ax \subseteq \mathtt{J}(R)x^2$, no obstante $A \subseteq Ax$, entonces $A \subseteq \mathtt{J}(R)x^2$. Como $\mathtt{J}(R)$ es el conjunto de los elementos no invertibles de R (Lema 5.2.13 y Lema 1.1.35), entonces $\mathtt{J}(R)x^2 \subsetneq Rx^2$. Ahora, como $x^2 \in A \leqslant {}_RR$, se tiene $Rx^2 \subseteq A$; por lo tanto $A \subseteq \mathtt{J}(R)x^2 \subsetneq Rx^2 \subseteq A$, lo cual es absurdo. De este modo concluimos que $x \in A$.

[3] Hagamos $Q \doteqdot \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} A^n$ y supongamos que A no es nilpotente. Como A es un ideal propio de R, Q también será un ideal (bilateral) propio de R.

Afirmación 1: Si $Q = A^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, Q es fuertemente primo.

Demostración: Supongamos que $Q = A^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Por un lado $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} A^n \subseteq A^{2n} = A^nA^n$, mientras que por otro $A^nA^n \subseteq A^n = Q$;

de aquí que $A^nA^n = Q$. Luego $Q^2 = A^nA^n = Q$ y por (2) Q es fuertemente primo. $\square$

Afirmación 2: Si $Q \subsetneq A^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, Q es fuertemente primo.

Demostración: Por el contrario, supongamos que $Q \subsetneq A^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y que Q no es fuertemente primo. Debido a que Q no es fuertemente primo, el inciso (1) garantiza la existencia de un $x \in R$ de modo que $x^2 \in Q$ y $x \notin Q$. Puesto que $x \notin Q = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} A^n$, debe de haber un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x \notin A^m$; por consiguiente $Rx \nsubseteq A^m$, pero R es uniserial, entonces $A^m \subseteq Rx$. Luego $A^mA^m \subseteq A^mRx$ y $A^mx \subseteq Rx^2$, además no es difícil ver que $A^mRx = A^mx$, por lo tanto $A^mA^m \subseteq Rx^2$. Finalmente, como $x^2 \in Q$, sucede que $Rx^2 \subseteq Q$, pero $Q \subsetneq A^{2m}$ por la suposición inicial, entonces $Rx^2 \subsetneq A^{2m} = A^mA^m$. Resumiendo, hemos llegado a que $Rx^2 \subsetneq A^mA^m \subseteq Rx^2$, una contradicción. Por lo tanto Q es fuertemente primo. $\square$

Como los casos posibles para Q se contemplan en las dos afirmaciones anteriores y en ambas se concluye lo mismo, la prueba ha terminado.

[4] Supongamos P fuertemente primo. Se $x \in R\backslash P$. La elección de x nos dice que $Rx \nsubseteq P$, de donde la hipótesis general implica que $P \subseteq Rx$; luego

$$\begin{aligned} p \in P &\Rightarrow p = rx \text{ para algún } r \in R \\ &\Rightarrow rx \in P \\ &\Rightarrow r \in P \text{ ó } x \in P \qquad (P \text{ es fuertemente primo}) \\ &\Rightarrow r \in P \qquad\qquad\quad\; (x \notin P) \\ &\Rightarrow rx \in Px \\ &\Rightarrow p \in Px. \end{aligned}$$

Entonces $P \subseteq Px$. Como $Px \subseteq P$ por ser P ideal izquierdo de R, obtenemos la igualdad deseada.

[5] Sea P fuertemente primo y finitamente generado. Puesto que R es local (Lema 5.2.13), $\mathtt{J}(R)$ es el mayor ideal izquierdo propio de R (Lema 1.1.35), así que $P \subseteq \mathtt{J}(R)$. Supongamos $P \subsetneq \mathtt{J}(R)$. Entonces existe $x \in \mathtt{J}(R)$ tal que $x \notin P$, así $x \in R\backslash P$; de (4) se sigue que $P = Px$, pero $Px \subseteq P\mathtt{J}(R)$, por lo tanto $P \subseteq P\mathtt{J}(R)$. Sin embargo $P\mathtt{J}(R) \subseteq P$ ya que $P \leqslant {}_RR$, de esta forma obtenemos que $P\mathtt{J}(R) = P$. Como P es finitamente generado por hipótesis, el Lema de Nakayama (Lema 1.1.29) asegura que $P\mathtt{J}(R) \ll P$; de esto y del hecho de que $P\mathtt{J}(R) = P$ concluimos que $P \ll P$, por consiguiente $P = 0$. ■

Proposición (5.2.16)

Sea R un anillo uniserial izquierdo. Si R es neteriano izquierdo, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(\mathrm{R})^n = 0$.

Demostración:

Supongamos $R \neq 0$ y ${}_RR$ neteriano. Si P es un ideal fuertemente primo de R, en particular $P \leqslant {}_RR$, así que P es finitamente generado (pues ${}_RR$ es neteriano); por el inciso (5) del Lema 5.2.15 deducimos que $P{=}\mathtt{J}(R)$ ó $P{=}0$. Entonces los únicos ideales fuertemente primos de R son $\mathtt{J}(R)$ y 0. Por otro lado, si $\mathtt{J}(R)$ es nilpotente por supuesto ocurre que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n = 0$; por lo tanto supondremos que $\mathtt{J}(R)$ <u>no</u> es nilpotente. En vista de que $\mathtt{J}(R)$ no es nilpotente, el inciso (3) del Lema 5.2.15 asegura que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n$ es fuertemente primo, así $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n = \mathtt{J}(R)$ ó $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n = 0$ según nuestras últimas observaciones. Si $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n = \mathtt{J}(R)$, entonces $\mathtt{J}(R) \subseteq \mathtt{J}(R)^n$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, por lo que $\mathtt{J}(R) = \mathtt{J}(R)^n$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$; como $\mathtt{J}(R)$ es finitamente generado, porque ${}_RR$ es neteriano, el Lema (1.1.29) de Nakayama conduce a que $\mathtt{J}(R)^2 \ll \mathtt{J}(R)$, luego $\mathtt{J}(R) \ll \mathtt{J}(R)$ y por consiguiente $\mathtt{J}(R) = 0$, lo cual contradice que $\mathtt{J}(R)$ no es nilpotente. Así $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n = 0$. ■

Corolario (5.2.17)
Sea R un anillo que es tanto uniserial como neteriano izquierdo. Si A es un ideal izquierdo de R, entonces $A = 0$ ó $A = \mathtt{J}(\mathrm{R})^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración:
Supongamos que $R \neq 0$. Sea $0 \neq A \leqslant {}_RR$. Como $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathtt{J}(R)^n = 0$ por la Proposición 5.2.16, del hecho de que $A \neq 0$ se sigue que hay $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $A \nsubseteq \mathtt{J}(R)^m$; entonces $\mathtt{J}(R)^m \subseteq A$ (ya que R es uniserial izquierdo). Del Corolario 5.2.14 se sigue que $A \in \{\mathtt{J}(R)^n \mid k \in \{1, ..., m\}\}$. ■

Si bien el camino que recorrimos al probar todos los resultados preliminares ha sido un poco largo, la recompensa que se avecina bien vale todo lo anterior.

Teorema (5.2.18)
Sea R un anillo uniserial neteriano izquierdo que no es artiniano izquierdo. Entonces, $\left(i\mathcal{P}(R), \subseteq\right)$ es un conjunto linealmente ordenado y numerable.

Demostración:
Como R es uniserial neteriano izquierdo, el Corolario 5.2.17 asegura que todos los ideales izquierdos de R son los siguientes:

$$\underbrace{R \supseteq \mathtt{J}(R) \supseteq \mathtt{J}(R)^2 \supseteq \mathtt{J}(R)^3 \supseteq \cdots \supseteq \mathtt{J}(R)^n \supseteq \mathtt{J}(R)^{n+1} \supseteq \cdots \supseteq 0.}_{\mathcal{C}}$$

Por lo tanto toda cadena de ideales izquierdos de R es una subcadena de $\mathcal{C}$, de este modo si $\mathtt{J}(R)^n = 0$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\mathcal{C}$ sería finita y por consiguiente cualquier cadena descendente de ideales izquierdos se estaciona, es decir, R sería artiniano izquierdo, cosa que no sucede. Así que $\mathtt{J}(R)^n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $\mathtt{J}(R)^n = \mathtt{J}(R)^{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, usando que $\mathtt{J}(R)^n$ es finitamente generado (debido a que ${}_RR$ es neteriano) el Lema de Nakayama (Lema 1.1.29) implica que $\mathtt{J}(R)^n\mathtt{J}(R) \ll \mathtt{J}(R)^n$; entonces $\mathtt{J}(R)^n \ll \mathtt{J}(R)^n$, así $\mathtt{J}(R)^n = 0$, que, como acabamos de ver, es imposible. De aquí que

$$\underbrace{R \supsetneq \mathtt{J}(R) \supsetneq \mathtt{J}(R)^2 \supsetneq \mathtt{J}(R)^3 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathtt{J}(R)^n \supsetneq \mathtt{J}(R)^{n+1} \supsetneq \cdots \supsetneq 0.}_{\mathcal{C}}$$

Por otro lado, del hecho de que R es uniserial izquierdo se sigue, en virtud del Lema 5.2.13, que R es local y por lo tanto $\mathtt{J}(R)$ es el único ideal izquierdo máximo de R (Lema 1.1.35), así R-Fil* $= \{\mathcal{F} \in \text{R-Fil} \mid \mathtt{J}(R) \in \mathcal{F}\}$. Tomemos un $\mathcal{F} \in$ R-Fil* y hagamos $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}} \doteq \{n \in \mathbb{Z}^+ | \mathtt{J}(R)^n \in \mathcal{F}\}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos $\mathcal{F}_n \doteq \{\mathtt{J}(R)^k \mid k \in \{0, 1, ..., n\}\}$, mientras que $\mathcal{F}_\omega \doteq \{\mathtt{J}(R)^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Notamos que si $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ tiene elemento mayor m, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$. Si $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}$ no tiene elemento mayor, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ o bien $\mathcal{F} = \eta[0]$. Por lo tanto

$$\text{R-Fil}^* = \{\mathcal{F}_n | n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\mathcal{F}_\omega\} \cup \{\eta[0]\}$$

y además sus elementos están totalmente ordenados de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_n \subsetneq \mathcal{F}_{n+1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_\omega \subsetneq \eta[0].$$

Entonces R-Fil* es un conjunto linealmente ordenado e infinito, como consecuencia directa de la Proposición 5.1.14 se obtiene que $i\mathcal{P}(R)$ es un conjunto infinito que está totalmente ordenado por la inclusión. ■

A continuación veremos que al considerar una clase particular de anillos, su perfil de inyectividad será una retícula artiniana y neteriana; no obstante, como ya es costumbre, requerimos de ciertos resultados preliminares.

Definición
Sea $\mathcal{J} \in$ R-Fil. Diremos que $\mathcal{J}$ es *jansiano* si es cerrado bajo tomar intersecciones arbitrarias.

Lema (5.2.19)
Sea R un anillo y sea I un ideal bilateral de R. Entonces, $\eta[I]$ es jansiano.
Demostración:
El Lema 4.3.1 asegura que $\eta[I]$ es un filtro. Ahora bien, sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ un subconjunto no vacío de $\eta[I]$. Entonces, para cada $\alpha \in \Gamma$, se tiene que I_α es un ideal izquierdo de R y que $I \subseteq I_\alpha$, por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$ es un ideal izquierdo de R tal que $I \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$; luego $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha \in \eta[I]$. ■

Lema (5.2.20)
Sea R un anillo artiniano izquierdo. Si $\mathcal{J} \in$ R-Fil, entonces $\mathcal{J}$ es jansiano.
Demostración:
Sea $\mathcal{J} \in$ R-Fil y sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{J}$. Como ${}_R R$ es artiniano, existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Gamma_0} I_\alpha$. Del hecho de que $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_0}$ es un subconjunto finito (no vacío) de $\mathcal{J}$ y de que $\mathcal{J}$ es un filtro, se sigue que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma_0} I_\alpha \in \mathcal{J}$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha \in \mathcal{J}$. ■

Lema (5.2.21)
Sea $\mathcal{F} \in$ R-Fil. Entonces, $\mathcal{F}$ es jansiano si y sólo si $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$.
Demostración:
$\Rightarrow$] Si $\mathcal{F}$ es jansanio, como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$, es claro que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$. Sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{J}$. Como $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$ y $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$ es un ideal izquierdo de R tal que $\bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$, de la definición de filtro se sigue que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha \in \mathcal{F}$. ■

Lema (5.2.22)
Si $\mathcal{F} \in$ R-Fil, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un ideal bilateral de R.
Demostración:
Sea $\mathcal{F} \in$R-Fil. Como $\mathcal{F}$ es un conjunto (no vacío) de ideales izquierdos de R, $\bigcap \mathcal{F}$ es un ideal izquierdo de R, entonces sólo resta probar que $(\bigcap \mathcal{F})\, r \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ para cada $r \in$ R. Tomemos pues un $x \in \bigcap \mathcal{F}$ y un $r \in$ R. Queremos mostrar que $xr \in I$ para cada $I \in \mathcal{F}$, por lo que tomamos un $I \in \mathcal{F}$ arbitrario. El hecho de que $\mathcal{F}$ sea un filtro nos lleva a deducir que $(I : r) \in \mathcal{F}$, por consiguiente $\bigcap \mathcal{F} \subseteq (I : r)$ y de este modo ocurre que $xr \in I$. ■

Lema (5.2.23)
Sea $\mathcal{F} \in$ R-Fil. Entonces, $\mathcal{F}$ es jansiano si y sólo si $\mathcal{F} = \eta[I]$ para algún ideal bilateral I de R.

Demostración:
$\Leftarrow$] Inmediato del Lema 5.2.19.

$\Rightarrow$] Supongamos a $\mathcal{F}$ jansiano. Si hacemos $L_{\mathcal{F}} \doteqdot \bigcap \mathcal{F}$, del Lema 5.2.22 se sigue que $L_{\mathcal{F}}$ es un ideal bilateral, lo cual, usando el Lema 4.3.1, conduce a que $\eta[L_{\mathcal{F}}]$ es un filtro. Veamos que $\mathcal{F} = \eta[L_{\mathcal{F}}]$. Sea $I \in \mathcal{F}$. Tenemos entonces que $L_{\mathcal{F}} \in \eta[L_{\mathcal{F}}]$ y $L_{\mathcal{F}} \subseteq I$, pero $\eta[L_{\mathcal{F}}]$ es un filtro, por lo tanto $I \in \eta[L_{\mathcal{F}}]$. Por otro lado, si J es un ideal izquierdo de R de modo que $L_{\mathcal{F}} \subseteq J$ (es decir, $J \in \eta[L_{\mathcal{F}}]$), como $\mathcal{F}$ es jansiano, por el Lema 5.2.21 sucede que $L_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$; de la definición de filtro es inmediato que $J \in \mathcal{F}$. ∎

De los Lemas 5.2.20 y 5.2.23 se obtiene de inmediato el siguiente corolario, el cual es básicamente la columna vertebral de nuestro próximo, y último, teorema de esta sección.

Corolario (5.2.24)
Si R es artiniano izquierdo, entonces R-Fil $= \{\eta[I] \mid {}_R I_R \leqslant {}_R R_R\}$.

Teorema (5.2.25)
Sea R un anillo artiniano izquierdo. Hay un anti-isomorfismo de retículas entre $\left(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$ y $\left(\{{}_R A_R \leqslant {}_R R_R \mid A \subseteq \mathtt{J}(R)\}, \leqslant, \bigcap, \sum\right)$.
Demostración:
Teniendo en cuenta que R-Fil $= \{\eta[I] \mid {}_R I_R \leqslant {}_R R_R\}$ (por el Corolario 5.2.24) y que $\mathtt{J}(R) = \mathtt{Rad}({}_R R) = \bigcap\{J \mid J$ es un ideal izquierdo máximo de $R\}$, no es difícil notar que R-Fil$^* = \{\eta[I] \in$ R-Fil $\mid I \subseteq \mathtt{J}(R)\}$. De este modo, si hacemos $\Phi_{\mathtt{J}(R)} \doteqdot \{{}_R A_R \leqslant {}_R R_R \mid A \subseteq \mathtt{J}(R)\}$, definiendo

$$\begin{aligned} \text{R-Fil}^* &\xrightarrow{\varphi} \Phi_{\mathtt{J}(R)} \\ \eta[I] &\longmapsto I \end{aligned}$$

se obtiene que φ es una función biyectiva; de hecho su inversa está dada por $\varphi^{-1}(A) \doteqdot \eta[A]$, para cada $A \in \Phi_{\mathtt{J}(R)}$. Ahora bien, observemos que $(\Phi_{\mathtt{J}(R)}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, pero más aún, $(\Phi_{\mathtt{J}(R)}, \subseteq, \cap, \Sigma)$ es una retícula. Entonces (R-Fil$^*, \subseteq$) y $(\Phi_{\mathtt{J}(R)}, \subseteq)$ tienen estructura de retícula. Por otra parte, si $\eta[I], \eta[J] \in$ R-Fil* son tales que $\eta[I] \subseteq \eta[L]$, como $I \in \eta[I]$, se sigue que $I \in \eta[L]$ y así $L \subseteq I$; luego φ invierte el orden. Recíprocamente, asumamos que $A, B \in \Phi_{\mathtt{J}(R)}$ y $A \subseteq B$, si $K \in \eta[B]$ sucede que $B \subseteq K$ y por consiguiente $A \subseteq K$, lo cual significa que $K \in \eta[A]$, entonces $\eta[B] \subseteq \eta[A]$; de aquí que φ^{-1} invierte el orden. Por lo tanto φ es un anti-isomorfismo de orden. La Proposición 5.1.14 lleva a concluir que hay un anti-isomorfismo de orden entre $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$ y $(\Phi_{\mathtt{J}(R)}, \subseteq)$, hecho que ante la Proposición 1.3.3 se traduce en que $(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \wedge, \vee)$ y son $(\Phi_{\mathtt{J}(R)}, \subseteq, \cap, \Sigma)$ anti-isomorfas. ∎

Corolario (5.2.26)
Si R es un anillo artiniano izquierdo, entonces la retícula $\left(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$ es artiniana y neteriana.
Demostración:
Supongamos que ${}_R R$ es artiniano y tomemos un $A \subseteq i\mathcal{P}(R)$ tal que $A \neq \varnothing$. Si $\Phi_{\mathtt{J}(R)} \doteqdot \{{}_R I_R \leqslant {}_R R_R \mid I \subseteq \mathtt{J}(R)\}$, el Teorema 5.2.25 nos dice que hay un $\phi : i\mathcal{P}(R) \to \Phi_{\mathtt{J}(R)}$ anti-isomorfismo de retículas, de esta manera $\phi(A)$ es en

particular un conjunto no vacío de ideales izquierdos de R; luego $\phi(A)$ debe de tener un elemento mínimo (pues $_RR$ es artiniano por hipótesis), digamos I'_m, y también un elemento máximo ($_RR$ es neteriano por el Lema 1.1.36), digamos I'_M. Sean $\phi^{-1}(I'_m) \doteq I_m$ y $\phi^{-1}(I'_M) \doteq I_M$, entonces $I_m, I_M \in A$.

Afirmación: I_M es un elemento mínimo de $(A, \subseteq)$.

Demostración: Sea $x \in A$ tal que $x \subseteq I_M$. Como ϕ es un anti-isomorfismo de orden (Proposición 1.3.3) entre $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$ y $(\Phi_{\mathrm{J}(R)}, \subseteq)$, entonces $I'_M \subseteq \phi(x)$, la elección de I'_M implica que $I'_M = \phi(x)$. Por lo tanto $x = I_M$. ❑

De la afirmación anterior se sigue que $(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \wedge, \vee)$ es artiniana. Análogamente se ve que I_m es un elemento máximo de $(A, \subseteq)$, así $(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \wedge, \vee)$ resulta ser una retícula neteriana. ■

Por el Lema 1.3.4 sabemos que toda retícula artiniana es atómica, entonces del corolario anterior se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario (5.2.27)
Si R es un anillo artiniano izquierdo, entonces $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\big)$ es atómica.

5.3 Anillos sin Clase Media

Sabemos que un anillo R es semisimple si y sólo todo R-módulo izquierdo es inyectivo y todo R-módulo derecho es inyectivo, lo cual ocurre si y sólo si $i\mathcal{P}(R)_i = \{\text{R-Mod}\} = i\mathcal{P}(R)_d$; entonces el perfil de inyectividad de un anillo tiene cardinalidad 1 si y sólo si el anillo es semisimple, así en un anillo semisimple los módulos pobres coinciden con los inyectivos. El siguiente paso es estudiar a los anillos cuyo perfil de inyectividad tiene únicamente dos elementos, es decir, anillos con la propiedad de que sus módulos están divididos en dos clases ajenas: los pobres y los inyectivos.

Definición
Si R es un anillo tal que $|i\mathcal{P}(R)_i| = 2$, diremos que R es un *anillo sin clase media izquierda*. De manera análoga se define un anillo sin clase media derecha.

Es importante mencionar que los anillos sin clase tienen una forma genérica, para ser más precisos, en [22] se demuestra el siguiente teorema:

Si R es un anillo sin clase media (izquierda), entonces $R = S \times T$, en donde S y T son anillos, con S un anillo semisimple y T un anillo que pertenece a alguna de las siguientes tres clases:

(1) T es morita equivalente a un dominio PCI (izquierdo).
(2) T es un anillo inescindible SI (izquierdo) con las siguientes propiedades:
(2.1) T es artiniano (izquierdo) ó es un V-anillo (izquierdo).
(2.2) T tiene zoclo esencial y homogéneo.
(2.3) Hay un único, salvo isomorfismo, T-módulo (izquierdo) singular.
(3) T es un anillo artiniano (izquierdo) inescindible que satisface las condiciones siguientes:
(3.1) $\mathtt{Zoc}(_TT) = \mathtt{Sing}(_TT) = \mathtt{J}(_TT)$.

(3.2) T tiene zoclo homogéneo.

(3.3) Hay un único, salvo isomorfismo, T-módulo (izquierdo) simple que no es inyectivo.

En el tercer caso, T es un anillo QF ó ${}_TT$ es pobre.

La demostración de tal teorema es bastante extensa, si bien es un resultado importante, en realidad sus alcances no llegan (al parecer) a tocar ningún punto de nuestro estudio; situación por la cual no presentamos aquí una prueba de dicho enunciado. Con todo, analizaremos ciertos tipos de anillos y deduciremos aspectos interesantes de su perfil de inyectividad; en el andar de este camino encontraremos algunas condiciones que aseguran que un anillo no tiene clase media.

Lema (5.3.1)

Sea R un anillo tal que $\mathtt{J}(R)$ es un ideal simple y esencial de R. Si asumimos que ${}_R(R/\mathtt{J}(R))$ es semisimple, entonces R no tiene clase media izquierda.

Demostración:

Tomemos un $M \in$R-Mod no inyectivo y probemos que M es pobre. Para ver que M es pobre nos ayudaremos del Lema 3.2.4, entonces sea $Rx \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$ y lleguemos a que Rx es semisimple. Como $Rx \cong R/(0:x)$, $\mathcal{I}n^{-1}(M)$ es cerrada bajo isomorfismos y M no es inyectivo, el Criterio de Baer asegura que $(0:x) \neq 0$; del hecho de que $\mathtt{J}(R) \subseteq_e$ R se sigue que $(0:x) \cap \mathtt{J}(R) \neq 0$. Luego $0 \neq (0:x) \cap \mathtt{J}(R) \leqslant \mathtt{J}(R)$ y $\mathtt{J}(R)$ es simple por hipótesis, entonces $(0:x) \cap \mathtt{J}(R) = \mathtt{J}(R)$ y así $\mathtt{J}(R) \leqslant (0:x)$; consiguiendo de este modo que $Rx \cong R/(0:x) \cong (R/\mathtt{J}(R)) \,/\, ((0:x)/\mathtt{J}(R))$. Ahora, si $R/\mathtt{J}(R)$ es semisimple entonces toda copia de cualquier cociente de $R/\mathtt{J}(R)$ también lo es, en particular Rx; por consiguiente M es pobre. ■

Lema (5.3.2)

Sea R un anillo artiniano izquierdo. Entonces, R es un anillo sin clase media izquierda si y sólo si $\mathtt{J}(R) \neq 0$ y $\mathtt{J}(R)$ no contiene ideales de R distintos de los triviales.

Demostración:

Sabemos que existe una biyección entre $i\mathcal{P}(R)_i$ y $\{{}_RA_R \leqslant {}_RR_R \mid A \subseteq \mathtt{J}(R)\}$ por el Teorema 5.2.25, de aquí que $|i\mathcal{P}(R)_i| = 2$ si y sólo si $\mathtt{J}(R)$ contiene exactamente dos ideales (a 0 y a sí mismo). ■

Hasta ahora sólo hemos trabajado con el perfil de inyectividad izquierdo de un anillo, sin embargo, y aunque no lo hemos mencionado explícitamente, todos los resultados obtenidos para $i\mathcal{P}(R)_i$ también se tienen para $i\mathcal{P}(R)_d$ si uno trabaja con R-módulos derechos de la misma forma en que hicimos con los R-módulos izquierdos. Así que en particular es cierta la "versión derecha" del Teorema 5.2.25: Si R es un anillo artiniano derecho, entonces existe un anti-isomorfismo de retículas entre $(i\mathcal{P}(R)_d, \subseteq, \wedge, \vee)$ y $(\{{}_RA_R \leqslant {}_RR_R \mid A \subseteq \mathtt{J}(R)\}, \leqslant, \cap, \Sigma)$.

Corolario (5.3.3)

Sea R un anillo artiniano. Entonces, $\left(i\mathcal{P}(R)_i, \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$ y $\left(i\mathcal{P}(R)_d, \subseteq, \bigwedge, \bigvee\right)$ son retículas isomorfas, en particular R es un anillo sin clase media izquierda si y sólo si R es un anillo sin clase media derecha.

Demostración:
Si hacemos $\Phi_{\mathtt{J}(R)} \doteqdot \{{}_R I_R \leqslant {}_R R_R | I \subseteq \mathtt{J}(R)\}$, por el Teorema 5.2.25 tenemos que existe un $\phi_i : i\mathcal{P}(R)_i \to \Phi_{\mathtt{J}(R)}$ anti-isomorfismo de retículas y por la versión derecha del Teorema 5.2.25 sabemos que existe un anti-isomorfismo de retículas $\phi_d : i\mathcal{P}(R)_d \to \Phi_{\mathtt{J}(R)}$. Entonces $\phi_d^{-1} \circ \phi_i : i\mathcal{P}(R)_i \to i\mathcal{P}(R)_d$ es una función biyectiva tal que para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in i\mathcal{P}(R)_i$ sucede, debido a que un anti-isomorfismo de retículas es un anti-isomorfismo de orden (Lema 1.3.1 y Lema 1.3.2), que

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \phi_i(\mathcal{B}) \subseteq \phi_i(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \phi_d^{-1}\big(\phi_i(\mathcal{A})\big) \subseteq \phi_d^{-1}\big(\phi_i(\mathcal{B})\big),$$

por lo tanto $\phi_d^{-1} \circ \phi_i$ es un isomorfismo de orden entre conjuntos con estructura de retícula; luego $\phi_d^{-1} \circ \phi_i$ es un isomorfismo de retículas por la Proposición 1.3.3. Como $|i\mathcal{P}(R)_i| = |i\mathcal{P}(R)_d|$, se sigue que $|i\mathcal{P}(R)_i| = 2$ si y sólo si $|i\mathcal{P}(R)_d| = 2$. ■

Para una cierta clase de anillos semiartinianos izquierdos tenemos una caracterización de cuándo tales anillos no tienen clase media. Puesto que los anillos semiartinianos no son anillos que se estudien en un curso estándar de licenciatura, nos tomamos la libertad de analizar algunas de sus propiedades principales con el objetivo de hacer el contenido de este trabajo más accesible para un mayor número de personas. Así pues, iniciamos con la definición.

Definición
Si $M \in$ R-Mod, diremos que M es *semiartiniano izquierdo* si todo cociente distinto de cero de M contiene un módulo simple. Mientras que un anillo R se llamará *semiartiniano izquierdo* si como R-módulo izquierdo es semiartiniano izquierdo.

A partir de aquí sólo diremos "semiartiniano" en vez de "semiartiniano izquierdo", esto para agilizar la lectura de los lemas que a continuación vienen.

Lema (5.3.4)
Si $M \in$ R-Mod es semiartiniano, entonces $\mathtt{Zoc}(M) \subseteq_e M$.

Demostración:
Sea $0 \neq M \in$ R-Mod semiartiniano. Como $M \cong M/0 \neq 0$, por hipótesis M debe contener un simple, así $\mathtt{Zoc}(M) \neq 0$. Supongamos que $\mathtt{Zoc}(M) \nsubseteq_e M$. Entonces existe $0 \neq N \leqslant M$ tal que $\mathtt{Zoc}(M) \cap N = 0$. Sea L un seudocomplemento de N en M, del Lema 1.1.18 se sigue que $(N+L)/L \subseteq_e M/L$. Como M es semiartiniano y $M/L \neq 0$, M/L contiene un simple, digamos $\bar{S}$; entonces $0 \neq ((N+L)/L) \cap \bar{S} \leqslant \bar{S}$ (pues $(N+L)/L \subseteq_e M/L$) y $\bar{S}$ es simple, así $((N+L)/L) \cap \bar{S} = \bar{S}$ y por consiguiente $\bar{S} \subseteq (N+L)/L$. Como $(N+L)/L$ contiene un simple y $(N+L)/L \cong N/(L \cap N) = N/0 \cong N$, deducimos que N también tiene un submódulo simple, sea S dicho submódulo. En resumen $S \subseteq \sum\{S \mid S \leqslant M \text{ y } S \text{ es simple }\} \cap N = \mathtt{Zoc}(M) \cap N = 0$, lo cual es absurdo debido a que S es distinto de cero por ser simple. ■

Lema (5.3.5)
Sea $N, M \in$ R-Mod. Los siguientes enunciados son ciertos:

(1) Si $N \cong M$ y M es semiartiniano, entonces N es semiartiniano.

(2) Si $N \leqslant M$ y M es semiartiniano, entonces M/N es semiartiniano.
(3) Si $N \leqslant M$ y M es semiartiniano, entonces N es semiartiniano.
(4) Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de R-módulos semiartinianos, entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es semiartiniano.

Demostración:
Supongamos que $M \neq 0$ es semiartiniano.

[1] Si $M \overset{\varphi}{\cong} N$ y $K = N/L$ para algún $L \lneqq N$, entonces $M/Ker(\pi\varphi) \cong N/L$, donde $\pi{:}N \twoheadrightarrow N/L$ es el epimorfismo natural; como $\varphi^{-1}(L) \lneqq \varphi^{-1}(N) = M$ y $M/Ker(\pi\varphi) = M/\varphi^{-1}(Ker(\pi)) = M/\varphi^{-1}(L)$, del hecho de que M es semiartiniano se sigue que $M/Ker(\pi\varphi)$ contiene un simple y por lo tanto N/L también.

[2] Sea $N \lneqq M$. Si $L/N \lneqq M/N$, como $(M/N)\,/\,(L/N) \cong M/L \neq 0$ y M es semiartiniano, deducimos que $(M/N)\,/\,(L/N)$ tiene un submódulo simple.

[3] Tomemos un $0 \neq N \lneqq M$. Asumamos que $\bar{N}$ es un cociente de N distinto de cero. Si $i : N \hookrightarrow M$ es el monomorfismo inclusión y $\pi : N \twoheadrightarrow \bar{N}$ es el epimorfismo natural, los Lemas 1.1.7, 1.1.6 y 1.1.8 nos aseguran que para $\bar{M} \doteqdot (\bar{N} \oplus M)/U$, donde $U \doteqdot \{(\pi(n), -i(n)) \mid n \in N\}$, existe un monomorfismo $\psi : \bar{N} \rightarrowtail \bar{M}$ y un epimorfismo $\beta : M \twoheadrightarrow \bar{M}$ de modo que

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & M \arrow[d, two heads, "\beta"'] \\ \bar{N} \arrow[r, tail, "\psi"] & \bar{M} \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Puesto que $N \neq M$, se tiene que $U \neq \bar{N} \oplus M$ y por lo tanto $\bar{M} \neq 0$; de los incisos (1) y (2) se sigue que $\bar{M}$ es semiartiniano, luego el Lema 5.3.4 implica que $\texttt{Zoc}(\bar{M}) \subseteq_e \bar{M}$. Entonces $\texttt{Zoc}(\bar{M}) \subseteq_e \bar{M}$ y $0 \neq \psi(\bar{N}) \leqslant \bar{M}$, así que $0 \neq \psi(\bar{N}) \cap \texttt{Zoc}(\bar{M}) = \texttt{Zoc}(\psi(\bar{N}))$ (pues $\texttt{Zoc}$ es un prerradical exacto izquierdo), de aquí que $\psi(\bar{N})$ contiene un simple; usando que $\psi(\bar{N}) \cong \bar{N}$ llegamos a la conclusión de que $\bar{N}$ también debe de tener un submódulo simple.

[4] Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia, no vacía, de R-módulos semiartinianos tal que $M_l \neq 0$ para algún $l \in I$. En vista del inciso (1) podemos suponer sin perdida de generalidad que $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia independiente. Sea $\bar{M}$ un cociente distinto de cero de $\oplus_{i \in I} M_i$, entonces existe un epimorfismo $\varphi : \oplus_{i \in I} M_i \twoheadrightarrow \bar{M}$ y, como hay un $0 \neq \bar{m} \in \bar{M}$, existe un $0 \neq m \doteqdot m_{j1} + \cdots + m_{jk} \in \oplus_{i \in I} M_i$ de modo que $\varphi(m) = \bar{m} \neq 0$; así $m_{ji} \neq 0$ para algún $ji \in \{j1, ..., jk\} \subseteq I$, por lo tanto $\varphi|_{M_{ij}} : M_{ij} \twoheadrightarrow \varphi(M_{ij})$ es un epimorfismo tal que $\varphi(M_{ij}) \neq 0$. Luego $\varphi(M_{ij})$ tiene un submódulo simple ya que M_{ij} es semiartiniano, sin embargo $\varphi(M_{ij}) \subseteq \bar{M}$, así que $\bar{M}$ contiene un simple. ■

Lema (5.3.6)
Un anillo R es semiartiniano izquierdo si y sólo si todo R-módulo izquierdo es semiartiniano izquierdo.

Demostración:
Si R es un anillo semiartiniano, como todo $M \in$ R-Mod es cociente de $R^{(X)}$ para algún conjunto X, los incisos (4) y (2) del Lema 5.3.5 implican que todo R-módulo es semiartiniano. ■

Notamos que si R es un anillo, $\bar{E}$ un R-módulo inyectivo principal y $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) = \bar{E}$, entonces $\mathtt{Zoc} = \omega^{\bar{E}}_{\mathtt{Zoc}(\bar{E})} = \omega^{\bar{E}}_{\bar{E}} = \underline{1}$, así que todo R-módulo es semisimple; por lo tanto ${}_RR$ es semisimple. De este modo si R es un anillo no semisimple, para cualquier $\bar{E} \in$ R-Mod inyectivo principal sucede que $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \subsetneq \bar{E}$.

Teorema (5.3.7)
Sea R un anillo semiartiniano izquierdo no semisimple. Son equivalentes:
(1) R es un anillo sin clase media izquierda.
(2) Todo R-módulo no semisimple y quasi-inyectivo es inyectivo.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que R no tiene clase media izquierda, entonces para todo $N \in$ R-Mod se tiene que $\mathcal{I}n^{-1}(N)$=R-SSMod ó que $\mathcal{I}n^{-1}(N)$=R-Mod. Sea $M \in$ R-Mod quasi-inyectivo y no semisimple. Como $M \in \mathcal{I}n^{-1}(M)$ por ser M quasi-inyectivo, si M no fuera inyectivo, por hipótesis, ocurriría que $\mathcal{I}n^{-1}(M)$ = R-SSMod y por lo tanto M sería semisimple, lo cual es absurdo; así que M debe de ser inyectivo.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Asumamos cierto el enunciado del inciso (2). Sea $\bar{E} \in$ R-Mod un inyectivo principal. Tomemos un $M \in \mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$ tal que $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \lneq M$. Como ${}_RR$ es semiartiniano, por el Lema 5.3.6 se tiene que $\bar{E}$ es semiartiniano y así del Lema 5.3.4 obtenemos que $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \subseteq_e \bar{E}$; luego el Lema 1.1.12 conduce a que $M \subseteq_e \bar{E}$, por consiguiente $E(M) = \bar{E}$. Como $M \leqslant_{fi} \bar{E}$, entonces $M \leqslant_{fi} E(M)$ y de la Proposición 3.2.6 se deriva que M es quasi-inyectivo. Por otro lado, en vista de que $\mathtt{Zoc}(\bar{E})$ es el mayor submódulo semisimple de $\bar{E}$ y M es un submódulo de $\bar{E}$ tal que $\mathtt{Zoc}(\bar{E}) \lneq M$, deducimos que M no es semisimple. Entonces M es quasi-inyectivo y no es semisimple, así que del inciso (2) se sigue que M es inyectivo; sin embargo $E(M) = \bar{E}$, por lo tanto $M = \bar{E}$. En resumen $\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*=\{\bar{E}, \mathtt{Zoc}(\bar{E})\}$. Del hecho de que $|\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*| = 2$ y de que hay una biyección entre $\mathsf{S}_{fi}(\bar{E})^*$ y $i\mathcal{P}(R)_i$ (Proposición 5.1.14), llegamos a que R es un anillo sin clase media izquierda. ■

Si R es un anillo artiniano izquierdo, todo cociente de R es artiniano izquierdo, entonces para cualquier ${}_RI \lneq {}_RR$ sucede que el conjunto $\{L/I \leqslant R/I \mid L/I \neq 0\}$ tiene un elemento mínimo; luego R/I contiene un simple. Así todo anillo artiniano izquierdo es semiartiniano izquierdo. Por otra parte, si R es un anillo artiniano izquierdo no semisimple, por el Lema 1.1.30 sucede que $\mathtt{J}(R) \neq 0$, de aquí que $\mathtt{J}(R)$ contiene al menos dos ideales de R distintos. De estas observaciones, del Corolario 5.3.2 y del Teorema 5.3.7, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario (5.3.8)
Sea R un anillo artiniano izquierdo no semisimple. Son equivalentes:

(1) R es un anillo sin clase media izquierda.
(2) Todo R-módulo no semisimple y quasi-inyectivo es inyectivo.
(3) $\mathtt{J}(R)$ no contiene ideales de R distintos de los triviales.

5.4 Orden Lineal en $i\mathcal{P}(R)$

Bien, después de que ya estudiamos, en la sección pasada, el caso en el que el perfil de inyectividad de un anillo consta de solamente dos elementos (lo cuales están linealmente ordenados por la inclusión), ha llegado el momento de analizar cuándo el perfil de inyectividad de un anillo es un conjunto totalmente ordenado. Como el perfil de inyectividad de un anillo R es una clase de clases de Wisbauer y como R-Wis es una retícula isomorfa a R-Fil, si uno logra deducir aspectos del comportamiento del orden definido en R-Fil se van a tener implicaciones en el orden establecido en R-Wis y por consiguiente en el orden de $i\mathcal{P}(R)$; así es una suerte que Ana Viola-Prioli y Jorge Viola-Prioli hayan estudiado a profundidad en [23] los anillos para los cuales se tiene que R-Fil es linealmente ordenado, los resultados siguientes son precisamente el fruto de los trabajos de estos dos autores.

Proposición (5.4.1)
Sea R un anillo. Son equivalentes:
1.- (R-Fil, $\subseteq$) es un conjunto linealmente ordenado.
2.- Para cualquier par de ideales izquierdos I y J de R existe $X \subseteq$ R finito de modo que $(I : X) \subseteq J$ ó $(J : X) \subseteq I$.
3.- Para cualesquiera I y J ideales izquierdos de R existe $n \in \mathbb{N}$ tal que R/I es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/J)^{(n)}$ ó R/J es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/I)^{(n)}$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea ${}_RK \leqslant {}_RR$. Definimos:

$$\mathcal{F}(K) \doteq \{{}_RU \leqslant {}_RR \mid \exists X \subseteq R \text{ finito de modo que } (K : X) \subseteq U\}.$$

Notamos que $(K : \{1\}) = K$, así pues $K \in \mathcal{F}(K)$; sin embargo $\mathcal{F}(K)$ no sólo es una familia no vacía de ideales izquierdos de R.

Afirmación: $\mathcal{F}(K) \in$ R-Fil.

Demostración: Tomemos $a \in R$, ${}_RJ \leqslant {}_RR$ y $U, V \in \mathcal{F}(K)$.
i] Supongamos que $U \subseteq J$. Como $U \in \mathcal{F}(K)$, existe $X \subseteq$ R finito de modo que $(K : X) \subseteq U$. Entonces $(K : X) \subseteq J$, y así $J \in \mathcal{F}(K)$.

ii] Con base en la elección de U y V podemos asegurar que $(K : X) \subseteq U$ y que $(K : Y) \subseteq V$ para ciertos subconjuntos finitos X y Y de R. Observamos ahora que $r \in (K : X \cup Y)$ implica $r(X \cup Y) \subseteq K$, tomando $x \in X$ y $y \in Y$ tenemos que rx, $ry \in r(X \cup Y)$, y por lo tanto llegamos a que rx, $ry \in K$; luego $r \in (K : X) \cap (K : Y)$, pero $(K : X) \cap (K : Y) \subseteq U \cap V$, así $r \in U \cap V$. Entonces $(K : X \cup Y) \subseteq U \cap V$, donde $X \cup Y$ es un subconjunto finito de R, de aquí que $U \cap V \in \mathcal{F}(K)$.

iii] En vista de que $U \in \mathcal{F}(K)$, existe un $X \subseteq$ R finito tal que $(K : X) \subseteq U$. Fijando nuestra atención en $(K : aX)$ observamos que, $r \in (K : aX)$ implica $r(aX) \subseteq K$, lo cual deriva en que $(ra)X \subseteq K$; consiguiendo con esto que $ra \in (K : X)$ y por consiguiente que $ra \in U$, lo cual nos lleva a su vez a deducir que $r \in (U : a)$. En resumen tenemos $(K : aX) \subseteq (U : a)$, como aX es finito obtenemos finalmente que $(U : a) \in \mathcal{F}(K)$.

$\therefore$ $\mathcal{F}(K) \in$ R-Fil para cualquier K ideal izquierdo de R. ❑

Por otro lado, sean I y J ideales izquierdos de R. Ya que $\mathcal{F}(I), \mathcal{F}(J) \in$ R-Fil y R-Fil está linealmente ordenado por la inclusión, sin perdida de generalidad podemos suponer $\mathcal{F}(I) \subseteq \mathcal{F}(J)$. Ya que $I \in \mathcal{F}(I)$, concluimos que $I \in \mathcal{F}(J)$; luego existe $X \subseteq$ R finito tal que $(J : X) \subseteq I$.

(2) $\Rightarrow$ (3)] Sean $I, J \leqslant {}_R R$. Por (2) tenemos que $(I : X) \subseteq J$ ó $(J : X) \subseteq I$ para algún $X \subseteq R$ finito, digamos $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Sin perder generalidad podemos suponer $(I : X) \subseteq J$. A continuación definimos

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{f} (R/I)^{(n)} \\ r &\longmapsto r(x_1 + I, ..., x_n + I) \end{aligned}$$

Es inmediato ver que f es un R-morfismo, y en vista de que

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{r \in R \mid f(r) = \bar{0}\} \\ &= \{r \in R \mid rx_i \in I \text{ para cada } x_i \in X\} \\ &= \{r \in R \mid rX \subseteq I\} \\ &= (I : X), \end{aligned}$$

deducimos que $Im(f) \overset{f'}{\cong} R/(I : X)$. Por otro lado, también definimos

$$\begin{aligned} R/(I : X) &\xrightarrow{g} R/J \\ r + (I : X) &\longmapsto r + J \end{aligned}$$

Notamos que si $r + (I : X)$, $r' + (I : X) \in R/(I : X)$ son iguales, entonces $r - r' \in (I : X)$, pero $(I : X) \subseteq J$, por lo tanto $r - r' \in J$ y así $r + J = r' + J$. Luego g es función, y claramente suprayectiva. Pero más aún, se ve que g es un R-morfismo. Como $Im(f) \leqslant (R/I)^{(n)}$ y $gf'\colon Im(f) \longrightarrow R/J$ es un epimorfismo, concluimos que R/J es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/I)^{(n)}$.

(3) $\Rightarrow$ (1)] Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$ R-Fil. Supongamos que $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{G}$. Ahora, tomemos a los (únicos) prerradicales exactos izquierdos que les corresponden, respectivamente, a $\mathcal{F}$ y a $\mathcal{G}$ bajo los isomorfismos de retículas descritos en los Teoremas 4.2.15 y 4.3.6; digamos r y s. Como $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{G}$, entonces ocurre que $\mathsf{r} \nleqslant \mathsf{s}$; por ello debe de existir un $M \in$ R-Mod tal que $\mathsf{r}(M) \nleqslant \mathsf{s}(M)$. Ya que $\mathsf{r}, \mathsf{s} \in$R-Prei, $\mathsf{r}(M), \mathsf{r}(M) \leqslant M$ y $\mathsf{r}(M) \nleqslant \mathsf{s}(M)$, entonces $\mathsf{r}(M) \in \mathcal{T}_{\mathsf{r}}$ pero $\mathsf{r}(M) \notin \mathcal{T}_{\mathsf{s}}$ (donde $\mathcal{T}_{\mathsf{t}} \doteqdot \{M \in \text{R-Mod} \mid \mathsf{t}(M) = M\}$ es la clase de pretorsión del prerradical t definida justo antes del Lema 4.2.5), pues $\mathsf{s}(\mathsf{r}(M)) = \mathsf{s}(M) \cap \mathsf{r}(M)$, así que si $\mathsf{r}(M) \in \mathcal{T}_{\mathsf{s}}$ tendríamos que $\mathsf{r}(M) \leqslant \mathsf{s}(M)$, lo cual es imposible. A causa de la Proposición 4.2.8, las clases $\mathcal{T}_{\mathsf{r}}$ y $\mathcal{T}_{\mathsf{s}}$ son de Wisbauer; de aquí, y del hecho de que $\mathsf{r}(M) = \sum_{x \in \mathsf{r}(M)} Rx$, llegamos a que $\mathsf{r}(M) \in \mathcal{T}_{\mathsf{r}}$ si y sólo si $Rx \in \mathcal{T}_{\mathsf{r}}$ para cada $x \in \mathsf{r}(M)$, y ya que $\mathsf{r}(M) \notin \mathcal{T}_{\mathsf{s}}$, deducimos que hay algún $x_0 \in \mathsf{r}(M)$ tal que $Rx_0 \notin \mathcal{T}_{\mathsf{s}}$. En vista de que $Rx_0 \cong R/I$ para algún $I \leqslant {}_R R$, tenemos que $R/I \in \mathcal{T}_{\mathsf{r}}$ y $R/I \notin \mathcal{T}_{\mathsf{s}}$. Por otro lado, si ahora tomamos los (únicos) filtros asociados a $\mathcal{T}_{\mathsf{r}}$ y $\mathcal{T}_{\mathsf{s}}$ bajo los isomorfismos de retículas descritos en los Teoremas 4.2.15 y 4.3.6, por la elección de r y s tendríamos que estos son, respectivamente, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Recordando que el isomorfismo de retículas entre R-Prei y R-Fil esta dado por $\mathsf{F}_{()} \circ \mathcal{T}_{()}$, donde

$$\begin{array}{ccccc} \text{R-Prei} & \xrightarrow{\mathcal{T}_{()}} & \text{R-Wis} & \xrightarrow{\mathsf{F}_{()}} & \text{R-Fil} \\ \mathsf{t} & \longmapsto & \mathcal{T}_{\mathsf{t}} & \longmapsto & \mathsf{F}_{\mathcal{T}_{\mathsf{t}}} \end{array}$$

y $\mathsf{F}_{\mathcal{T}_{\mathsf{t}}} = \{{}_R K \leqslant {}_R R \mid R/K \in \mathcal{T}_{\mathsf{t}}\}$, notamos que lo obtenido hasta ahora se resume en que $I \in \mathcal{F}(= \mathsf{F}_{\mathcal{T}_r})$ e $I \notin \mathcal{G}(= \mathsf{F}_{\mathcal{T}_s})$. Que puesto que queremos probar que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sea $J \in \mathcal{G}(= \mathsf{F}_{\mathcal{T}_s})$. Por (3) sabemos que hay un $n \in \mathbb{N}$ de modo que R/I es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/J)^{(n)}$ ó R/J es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/I)^{(n)}$. Si R/I es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/J)^{(n)}$, como $R/J \in \mathcal{T}_s$ y $\mathcal{T}_s \in$ R-Wis, entonces $R/I \in \mathcal{T}_s$ y por lo tanto $I \in \mathcal{G}(= \mathsf{F}_{\mathcal{T}_s})$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto debe suceder que R/J es isomorfo a un cociente de un submódulo de $(R/I)^{(n)}$, pero $R/I \in \mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}_r \in$ R-Wis, obteniendo así que $R/J \in \mathcal{T}_r$; lo que deriva en que $J \in \mathsf{F}_{\mathcal{T}_r}(= \mathcal{F})$. Luego $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. ■

Corolario (5.4.2)
Si R-Fil está linealmente ordenado por la inclusión, entonces también lo está el conjunto de todos los ideales de R.

Demostración:
Supongamos que R-Fil está linealmente ordenado. Sean I y J ideales de R. De la Proposición 5.4.1 se infiere la existencia de un $X \subseteq R$ finito de modo que $(J : X) \subseteq I$ ó bien $(I : X) \subseteq J$. Como $I \subseteq (I : X)$ y $J \subseteq (J : X)$, deducimos que $J \subseteq I$ ó $I \subseteq J$. ■

Proposición (5.4.3)
Sea R un anillo artiniano izquierdo. Si la familia de los ideales de R está totalmente ordenada por la inclusión, entonces R-Fil también lo está.

Demostración:
Supongamos que la colección de ideales de R es un conjunto totalmente ordenado (por la inclusión). Tomamos $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$ R-Fil. Consideremos

$$I_0 \doteq \bigcap \mathcal{F}.$$

Afirmación: I_0 es un ideal de R.

Demostración: Como ${}_R I_0 \leqslant {}_R R$, sólo debemos ver que $ar \in I_0$ para cualquier $a \in I_0$ y cualquier $r \in R$. Sean pues $a \in I_0$ y $r \in R$. Notamos que si $U \in \mathcal{F}$, entonces $(U : r) \in \mathcal{F}$, y, así $I_0 = \bigcap \mathcal{F} \subseteq (U : r)$; de esto que $I_0 r \subseteq U$. Luego $I_0 r \subseteq U$ para cada $U \in \mathcal{F}$, obteniendo con esto que $I_0 r \subseteq \bigcap \mathcal{F} = I_0$. Como $ar \in I_0 r$, la inclusión anterior asegura que $ar \in I_0$. □

Usando que R es artiniano izquierdo, del Lema 1.1.26 se sigue que hay un subconjunto finito $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ con propiedad de que $\bigcap \mathcal{F}_0 = \bigcap \mathcal{F} = I_0$; puesto que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo tomar intersecciones finitas por definición, concluimos que $I_0 \in \mathcal{F}$. Como $I_0 \leqslant {}_R R_R$ por la afirmación, se tiene que $\eta[I_0] \in$R-Fil; de hecho, debido a que $I_0 \in \mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{F} = \eta[I_0](= \{{}_R U \leqslant {}_R R \mid I \subseteq U\})$. Si hacemos $J_0 \doteq \bigcap \mathcal{G}$, procediendo de manera análoga a como hicimos con I_0, llegaremos a que $\mathcal{G}{=}\eta[J_0]$. A causa de que la familia de ideales de R está totalmente ordenada, podemos suponer, sin perder generalidad, que $I_0 \subseteq J_0$. Del hecho de que $I_0 \subseteq J_0$, $\mathcal{F} = \eta[I_0]$ y $\mathcal{G} = \eta[J_0]$, se sigue que $\eta[J_0] \subseteq \eta[I_0]$. Por lo tanto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}$. ■

Definición
Si I es un ideal propio de R, vamos a denotar al conjunto $\{{}_R K \leqslant {}_R R | I \subsetneq K\}$ por $\eta[I]^*$.

Lema (5.4.4)
Si los ideales de izquierdos de R están linealmente ordenados e I es un ideal propio de R, entonces $\eta[I]^* \in$ R-Fil.

Demostración:
Supongamos que todos los ideales izquierdos de R están linealmente ordenados y que I es un ideal propio de R.

i] Sean $K \in \eta[I]^*$ y $J \leqslant {}_R R$ de modo que $K \subseteq J$. Como $I \subsetneq K \subseteq J$, entonces $I \subsetneq J$ y por lo tanto $J \in \eta[I]^*$.

ii] Si $J, K \in \eta[I]^*$, entonces $I \subsetneq K, J$. Por hipótesis podemos suponer que $K \subseteq J$, luego $I \subsetneq K = J \cap K$. Así que $J \cap K \in \eta[I]^*$.

iii] Tomamos $K \in \eta[I]^*$ y $r \in$ R. Sólo hay que ver que $I \subsetneq (K : r)$. En vista de que $x \in I$ implica $xr \in I$, y como $K \in \eta[I]^*$, se sigue que $xr \in K$ y por lo tanto que $x \in (K : r)$. Luego $I \subseteq (K : r)$. Ahora supongamos $I = (K : r)$. Por hipótesis los ideales izquierdos Rr y K se deben comparar de alguna forma. Notamos que si $Rr \subseteq K$, entonces $x \in R$ implica $xr \in Rr$ y por consiguiente $xr \in K$, lo cual deriva en que $x \in (K : r)$; obteniendo de esta manera que $R \subseteq (K : r) = I$, lo cual es una contradicción ya que I es propio en R. Por lo tanto debe ocurrir que $K \subseteq Rr$, pero si tomamos un $x \in K \backslash I$ se tiene que $ar = x \in K$ para algún $a \in$R; así $a \in (K\colon r) = I$, y de aquí deducimos que $x = ar \in I$, lo cual es imposible. Concluimos entonces que $I \subsetneq (K : r)$. ■

Lema (5.4.5)
Si los ideales de izquierdos de R están linealmente ordenados y $\mathcal{F} \in$ R-Fil, entonces existe un ideal I_0 de R tal que $\mathcal{F} = \eta[I_0]$ ó $\mathcal{F} = \eta[I_0]^*$.

Demostración:
Supongamos que la colección de ideales izquierdos de R es un conjunto totalmente ordenado. Sea $\mathcal{F} \in$ R-Fil y hagamos $I_0 \doteq \bigcap \mathcal{F}$. En la demostración de la Proposición 5.4.3 vimos que I_0 es un ideal de R, por ello $\eta[I_0] \in$R-Fil. Ahora analizamos los siguientes casos:

Caso 1] $I_0 \in \mathcal{F}$.

En general $\mathcal{F} \subseteq \eta[I_0]$. Ahora, como $I_0 \in \mathcal{F}$, se obtiene que $\eta[I_0] \subseteq \mathcal{F}$. Así, en este caso, ocurre que $\mathcal{F} = \eta[I_0]$.

Caso 2] $I_0 \notin \mathcal{F}$.

Sea $K \in \eta[I_0]^*$. Entonces $I_0 \subsetneq K$. Si $K \subseteq H$ para cada $H \in \mathcal{F}$, deducimos que $K \subseteq I_0 (= \bigcap \mathcal{F})$; de aquí que $K \subseteq I_0 \subsetneq K$, lo cual es absurdo. Por consiguiente existe $H \in \mathcal{F}$ tal que $K \nsubseteq H$, sin embargo los ideales izquierdos de R están linealmente ordenados, así que $H \subseteq K$; luego $K \in \mathcal{F}$ debido a que H es un elemento de $\mathcal{F}$. En resumen $\eta[I_0]^* \subseteq \mathcal{F}$. Recíprocamente, si $K \in \mathcal{F}$, ocurre que $I_0 \subseteq K$, y de hecho $I_0 \subsetneq K$, pues de lo contrario tendríamos que $I_0 \in \mathcal{F}$, lo cual contradice la hipótesis del caso actual; así $K \in \eta[I_0]^*$. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \eta[I_0]^*$. Entonces $\mathcal{F} = \eta^*[I_0]$. ■

Corolario (5.4.6)
Si los ideales de izquierdos de R están linealmente ordenados, entonces R-Fil está linealmente ordenado.

Demostración:
Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$ R-Fil. El Lema 5.4.5 nos dice que hay ideales, I y J, de R tales

que $\mathcal{F} = \eta[I]$ ó $\mathcal{F} = \eta[I]^*$ y $\mathcal{G} = \eta[J]$ ó $\mathcal{G} = \eta[J]^*$. Por hipótesis podemos suponer que $I \subseteq J$. Puesto que en general, si K es un ideal de R, ocurre que $\eta[K]^* \subseteq \eta[K]$, supondremos más bien $I \subsetneq J$. Por otra parte, es inmediato ver que $\eta[J] \subseteq \eta[I]^*$, por esta razón $\eta[J]^* \subseteq \eta[J] \subseteq \eta[I]^* \subseteq \eta[I]$. Así, en cualquier caso, se tiene que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. ■

Como un anillo es uniserial izquierdo si el conjunto de todos sus ideales izquierdos está linealmente ordenado por la inclusión, el corolario anterior nos permite deducir rápidamente el siguiente resultado.

Corolario (5.4.7)
Sea R un anillo uniserial izquierdo. El conjunto $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq\big)$ es linealmente ordenado.

Demostración:
Por el Corolario 5.4.6 se tiene que R-Fil está linealmente ordenado por la inclusión. Usando que hay un isomorfismo de orden entre R-Fil y R-Wis (Teorema 4.3.6), del hecho de que (R-Fil, $\subseteq$) es un conjunto linealmente ordenado se sigue que (R-Wis, $\subseteq$) también lo es; por lo tanto cualquier subconjunto de R-Wis será linealmente ordenado por la inclusión, en particular $i\mathcal{P}(R)$. ■

Para una clase particular de anillos artinianos izquierdos se tiene que el orden definido en su perfil de inyectividad está íntimamente relacionado con el orden inducido por la inclusión en la familia de todos sus ideales bilaterales.

Proposición (5.4.8)
Sea R un anillo artiniano izquierdo local. Son equivalentes:

(1) $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq\big)$ es linealmente ordenado.

(2) $\big(\{I \subseteq R \mid I \text{ es un ideal de } R\}, \subseteq\big)$ es linealmente ordenado.

Demostración:
Como R es local, $\mathtt{J}(R)$ es el único ideal izquierdo máximo de R (Lema 1.1.35), así que R-Fil$^* = \{\mathcal{F} \in$ R-Fil $\mid \mathtt{J}(R) \in \mathcal{F}\} \subseteq$ R-Fil$\setminus\{\eta[R]\}$. Por otra parte, si $\mathcal{F} \in$ R-Fil$\setminus\{\eta[R]\}$, hay un $I \in \mathcal{F}$ tal que ${}_RI \lneq {}_RR$, por lo que $I \leqslant \mathtt{J}(R)$ (pues $\mathtt{J}(R)$ es el mayor ideal izquierdo propio de R por el Lema 1.1.35), entonces $\mathtt{J}(R) \in \mathcal{F}$ por definición de filtro; de aquí que $\mathcal{F} \in$ R-Fil*. De este modo se tiene que R-Fil* = R-Fil$\setminus\{\eta[R]\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2)] Si $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$ es linealmente ordenado, la Proposición i.s.s implica que (R-Fil$^*, \subseteq$) es linealmente ordenado, sin embargo R-Fil* = R-Fil$\setminus\{\eta[R]\}$, por ello (R-Fil, $\subseteq$) es linealmente ordenado; del Corolario 5.4.2 se sigue que el conjunto de todos los ideales de R está linealmente ordenado por $\subseteq$.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Si la familia de los ideales de R está totalmente ordenada por la inclusión, la Proposición 5.4.3 asegura que R-Fil también lo está, en particular (R-Fil$^*, \subseteq$) debe ser linealmente ordenado; usando la Proposición 5.1.14 podemos concluir que $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$ es linealmente ordenado. ■

En los resultados precedentes hemos cargado propiedades al anillo para deducir aspectos de su perfil de inyectividad, las proposiciones siguientes, con las cuales cerramos este proyecto, muestran la posibilidad de una situación inversa; es decir, si el perfil de inyectividad de un anillo R es de cierto tipo, entonces se tendrán repercusiones en R-Mod.

Proposición (5.4.9)
Sea R un anillo no semisimple de modo que $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq\big)$ es linealmente ordenado. Para cada $K \in$ R-Mod no pobre, existe un $C \in$ R-Mod cíclico tal que $\mathcal{I}n^{-1}(C) \subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$.

Demostración:
Primero notamos que como R un no es semisimple, R-SSMod $\subsetneq$ R-Mod, es decir, hay al menos un R-módulo que no es pobre. Sea K un R-módulo que no es pobre y sea Γ un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos cíclicos. Supongamos que $\mathcal{I}n^{-1}(N) \nsubseteq \mathcal{I}n^{-1}(K)$ para cada $N \in \Gamma$. Como $i\mathcal{P}(R)$ está linealmente ordenado por la inclusión, la suposición anterior conduce a que $\mathcal{I}n^{-1}(K) \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(N)$ para cada $N \in \Gamma$; entonces $\mathcal{I}n^{-1}(K) \subseteq \bigcap_{N\in\Gamma} \mathcal{I}n^{-1}(N)$. Sin embargo el Corolario 3.1.8 dice que $\bigcap_{N\in\Gamma} \mathcal{I}n^{-1}(N) = \mathcal{I}n^{-1}\left(\prod_{N\in\Gamma} N\right)$, además $\prod_{N\in\Gamma} N$ es un R-módulo pobre según el Teorema 3.2.10, así que $\bigcap_{N\in\Gamma} \mathcal{I}n^{-1}(N) =$ R-SSMod. Luego $\mathcal{I}n^{-1}(K) \subseteq$ R-SSMod, hecho que deriva en que $\mathcal{I}n^{-1}(K) =$ R-SSMod, es decir, K es pobre, lo cual contradice la naturaleza de K. Por lo tanto existe $N \in \Gamma$ tal que $\mathcal{I}n^{-1}(N) \subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$. ■

Corolario (5.4.10)
Sea R un anillo tal que $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq, \bigwedge, \bigvee\big)$ es una retícula atómica y linealmente ordenada. Entonces, hay un R-módulo cíclico que es pobre.

Demostración:
Si R es semisimple, todo R-módulo es pobre. Supongamos entonces que R no es semisimple. Tomemos $K \in$ R-Mod de modo que $\mathcal{I}n^{-1}(K)$ es un átomo de $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$, en particular R-SSMod $\subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$, así que K no es pobre. De la Proposición 5.4.9 se infiere la existencia de un R-módulo cíclico C, tal que $\mathcal{I}n^{-1}(C) \subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$, lo cual nos lleva, usando que $\mathcal{I}n^{-1}(K)$ es un átomo, a que $\mathcal{I}n^{-1}(C) =$ R-SSMod; por lo tanto C es un R-módulo pobre. ■

Proposición (5.4.11)
Sea R un anillo artiniano izquierdo tal que $\big(i\mathcal{P}(R), \subseteq\big)$ es linealmente ordenado. Entonces, existe un R-módulo pobre que es simple.

Demostración:
Como ${}_RR$ es neteriano por el Lema 1.1.36 y ${}_R\left(R/\mathtt{J}(R)\right)$ es cíclico, del Lema 1.1.33 se desprende que $R/\mathtt{J}(R)$ es neteriano izquierdo. Por otro lado, el Lema 1.1.31 asegura que ${}_R\left(R/\mathtt{J}(R)\right)$ es semisimple, así que $R/\mathtt{J}(R) = \oplus_{i\in I} S_i$ para alguna familia $\{S_i \mid i \in I\}$ de submódulos simples de $R/\mathtt{J}(R)$; del hecho de que $R/\mathtt{J}(R)$ es neteriano izquierdo deducimos que existe $I_0 \subseteq I$ finito de modo que $R/\mathtt{J}(R) = \oplus_{i\in I_0} S_i$. Luego $\mathcal{I}n^{-1}\left(\oplus_{i\in I_0} S_i\right) = \bigcap_{i\in I_0} \mathcal{I}n^{-1}(S_i)$ a causa del Corolario 3.1.8 y Lema 3.1.9, pero $\mathcal{I}n^{-1}\left(R/\mathtt{J}(R)\right) =$ R-SSMod por el Lema 3.2.5, así que $\bigcap_{i\in I_0} \mathcal{I}n^{-1}(S_i) =$ R-SSMod. Ahora bien, por el Corolario 5.2.27 podemos tomar un $K \in$ R-Mod de modo que $\mathcal{I}n^{-1}(K)$ es un átomo de $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$. Supongamos que R-SSMod $\subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(S_i)$ para cada $i \in I_0$. Si $\mathcal{I}n^{-1}(S_i) \subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$ para algún$i \in I_0$, entonces $\mathcal{I}n^{-1}(K)$ no sería ya un átomo puesto que R-SSMod $\subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(S_i) \subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$; por lo tanto $\mathcal{I}n^{-1}(K) \subseteq \mathcal{I}n^{-1}(S_i)$ para todo $i \in I_0$ debido a que $(i\mathcal{P}(R), \subseteq)$ es linealmente ordenado, de aquí que $\mathcal{I}n^{-1}(K) \subseteq \bigcap_{i\in I_0} \mathcal{I}n^{-1}(S_i)$. Hemos llegado con esto a que $\mathcal{I}n^{-1}(K) \subseteq$ R-SSMod; que es absurdo porque R-SSMod $\subsetneq \mathcal{I}n^{-1}(K)$ por definición de átomo. Luego $\mathcal{I}n^{-1}(S_i) =$ R-SSMod para algún $i \in I_0$. ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] F. Kasch, *Modules and Rings*, Academic Press, 1982.

[2] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1992.

[3] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[4] K. Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*, 3rd edition, Marcel Dekker, 1999.

[5] G. Grätzer, *Lattice Theory*, Dover Publications, 1999.

[6] G. Călugăreanu, *Lattice Concepts of Module Theory*, Springer Sciences+Business Media, 2000.

[7] C. Năstăsescu y F. Oystaeyen, *Dimensions of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[8] A. Blass, *Injectivity, Projectivity and The Axiom of Choice*, American Mathematical Society, Vol. 225, 31–59, 1979.

[9] H. Rubin y J. Rubin, *Equivalents of The Axiom of Choice, II*, Elsevier Science Publishers, 1985.

[10] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag New York, 1998.

[11] N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith y R. Wisbauer, *Extending Modules*, Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. 313, 1994.

[12] S.H. Mohamed y B.J. Müller, *Continuous and Discrete Modules*, Cambridge University Press, 1990.

[13] B. L. Osofsky, *Rings all of Whose Finitely Generated Modules are Injective*, Pacific J. Math., Vol. 14, 645–650, 1964.

[14] B. L. Osofsky y P. F. Smith, *Cyclic Modules Whose Quotients have all Complement Submodules Direct Summands*, J. Algebra, Vol. 139, 342–354, 1991.

[15] S. Singh, *Quasi-injective and Quasi-projective Modules over Hereditary Noetherian Prime Rings*, Can. J. Math. Vol. 26, 1173–1185, 1974.

[16] A.N. Alahmadi, M. Alkan y S.R. López-Permouth, *Poor Modules: The Opposite of Injectivity*, Glasg. Math. J. 52A, 7–17, 2010.

[17] L. Bican, T. Kepka y P. Nemec, *Rings, Modules and Preradicals*, Marcel Dekker, New York, 1982.

[18] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[19] J. Golan, *Linear Topologies on a Ring: An Overview*, Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. 159, 1987.

[20] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón y R. Fernández-Alonso, *Basic Preradicals and Main Injective Modules*, J. Algebra Appl., Vol. 8, 1–16, 2009.

[21] S.R. López-Permouth y J. E. Simental, *Characterizing Rings in Terms of the Extent of the Injectivity and Projectivity of their Modules*, J. Algebra, Vol. 362, 56–69, 2012.

[22] N. Er, S.R. López-Permouth y N. Sökmez, *Rings Whose Modules have Maximal or Minimal Injectivity Domain*, J. Algebra, Vol. 330, 404–417, 2011.

[23] A. M. Viola-Prioli y J. Viola-Prioli, *Rings Whose Kernel Functors are Linearly Ordered*, Pacific J. Math., Vol. 132, 21–34, 1988.

[24] A. Facchini, *Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules*, Birkhäuser-Verlag, 1998.

[25] E. Matlis, *Injective Modules Over Noetherian Rings*, Pacific J. Math., Vol. 8, 511–528, 1958.