



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

VOLUMEN DE 3-VARIEDADES HIPERBÓLICAS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
RICARDO GUZMAN FUENTES

DIRECTOR DE TESIS  
DR. CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS

ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE DEL 2016.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Introducción

Una variedad hiperbólica  $M$ , es una variedad Riemanniana completa, conexa, con curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Dichas variedades son cocientes  $\mathbb{H}^n/G$  del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  vía una acción libre de un grupo discreto  $G$ .

Encontrar diversos ejemplos de variedades hiperbólicas es complicado. Una manera de generar una gran cantidad de variedades hiperbólicas topológicamente diferentes, es mediante el pegado de poliedros vía un subgrupo de isometrías  $I(\mathbb{H}^n)$ . El pegado de poliedros se hace identificando las caras de estos mediante un subconjunto  $\Phi \subset I(\mathbb{H}^n)$  de las isometrías de  $\mathbb{H}^n$ , el conjunto  $\Phi$  es denominado un  $I(\mathbb{H}^n)$ -emparejamiento lateral y debe satisfacer el Teorema 2.2.1, el cual nos indica cuando el pegado mediante  $\Phi$  resulta ser una 3-variedad. Las variedades así obtenidas poseen invariantes geométricos como la compacidad, la completez y el volumen.

El propósito de esta tesis es exponer el cálculo del volumen de 3-variedades hiperbólicas mediante la función de Lobachevsky, cuando se obtienen mediante pegado de poliedros. Además veremos como se comporta el espacio de valores de volúmenes de 3-variedades hiperbólicas según los teoremas de Thurston, Jørgensen, entre otros.

Una manera de calcular el volumen de una 3-variedad hiperbólica  $M$  descrita en coordenadas hiperbólicas (ver sección 1.3), es mediante una integral que involucra dichas coordenadas hiperbólicas. Este proceso en general es complicado. Sin embargo si  $M$  se obtiene mediante pegado de poliedros convexos de volumen finito, la función de Lobachevsky (sección 3.1) nos permite calcular su volumen mediante los ángulos diédricos de los poliedros que se pegaron para formarla, evitando cálculos de integrales.

Para el caso de dimensión 2, es un poco más accesible. Por el Teorema de Gauss-Bonnet el área de una 2-variedad  $M$  hiperbólica orientable y compacta, es proporcional a la característica de Euler, a saber  $A(M) = 2\pi\chi(M)$ . De este hecho, si  $\Delta$  es un triángulo hiperbólico con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  (aquí  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ ) el área está dada por  $A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ . Para calcular el área de un

polígono, seguimos la ideología “*divide y vencerás*”, partir el polígono en triángulos y luego sumar las áreas de todos estos.

Otra consecuencia del Teorema de Gauss-Bonnet, es que el conjunto de posibles áreas de 2-variedades hiperbólicas completas de área finita es discreto en  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ . Más aún, el número de 2-variedades hiperbólicas topológicamente diferentes con área menor o igual a  $r$  es finito.

En el caso de variedades de dimensión  $n > 3$ , el Teorema de Finitud de Wang (ver [Gro]) garantiza que para cada real  $x$  solo existe una cantidad finita de  $n$ -variedades hiperbólicas completas con volumen menor o igual a  $x$  salvo isometrías, lo que implica que el conjunto de posibles volúmenes de  $n$ -variedades hiperbólicas completas de volumen finito es discreto en  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ . Así, se observa que el volumen de variedades de dimensión mayor a 3, tiene un comportamiento similar al de las variedades de dimensión 2.

Sin embargo, en el caso de dimensión 3, es diferente, puesto que el conjunto de posibles volúmenes de 3-variedades hiperbólicas completas de volumen finito no es discreto. Más aún, dicho conjunto tiene un buen orden y su ordinal es de la forma  $\omega^\omega$ . Nuestro interés en esta tesis se centra en 3-variedades hiperbólicas completas de volumen finito.

El Teorema de Thurston, sobre el comportamiento del volumen en 3-variedades hiperbólicas completas de volumen finito brinda más información sobre el volumen. Definamos  $\mathfrak{M} := \{M \mid M \text{ 3-variedad hiperbólica de volumen finito} \}$  y  $\mathfrak{v} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación dada por  $\mathfrak{v}(M) := \text{vol}(M)$  para cada  $M \in \mathfrak{M}$ . Con esto tenemos el siguiente teorema.

**Teorema de Thurston:** *Si  $\mathfrak{v} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es la aplicación dada arriba. Entonces  $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  cerrado, no discreto, bien ordenado y su ordinal es de la forma  $\omega^\omega$ . La aplicación  $\mathfrak{v}$  es finito a uno, es decir  $\mathfrak{v}^{-1}(r)$  es finito para cada  $r \in \mathfrak{v}(\mathfrak{M})$ .*

Este teorema es consecuencia de varios teoremas profundos tales como el Teorema de rigidez de Mostow, el Teorema de Jørgensen, y otros dados por C. Chabauty, M. Gromov y W. Thurston.

El presente trabajo se divide en 4 capítulos.

En el Capítulo 1 se presenta el espacio de Lorentz y tres modelos de la Geometría Hiperbólica y se detalla el modelo del paraboloides o Lorentziano. Se define volumen hiperbólico y el grupo de isometrías, este último será de utilidad para construir variedades hiperbólicas.

En el Capítulo 2, se presenta lo necesario para dotar a una 3-variedad de una estructura hiperbólica. Se explica cómo construir 3-variedades, mediante pegado de poliedros y se dan las condiciones para que dichas variedades resulten ser espacios métricos completos. Cabe señalar

que no es tarea fácil el encontrar un patrón de pegado de uno o más poliedros para una variedad hiperbólica dada.

En el Capítulo 3, se define la función de Lobachevsky, el cálculo de volumen de ortotetraedros (generalizados) los cuales son de utilidad para calcular el volumen de tetraedros ideales, puesto estos últimos se pueden ver como la suma algebraica de ortotetraedros. También se da la construcción de estructuras hiperbólicas pegando tetraedros ideales y regulares para el complemento del nudo ocho, el complemento del Enlace de Whitehead y el complemento de los anillos Borromeos. Además, se calcula el volumen hiperbólico mediante la función de Lobachevsky de dichas estructuras. Por último, en el Capítulo 4 se expone el Teorema de Thurston, el cual hemos descrito anteriormente.



# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>i</b>  |
| <b>1 Geometría hiperbólica</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1 n-Espacio Lorentziano . . . . .                              | 2         |
| 1.2 n-Espacio hiperbólico . . . . .                              | 6         |
| 1.2.1 Geodésicas y líneas hiperbólicas . . . . .                 | 9         |
| 1.3 Volumen hiperbólico (primera parte) . . . . .                | 11        |
| <b>2 Variedades geométricas y <math>(X,G)</math>-estructuras</b> | <b>17</b> |
| 2.1 Espacios geométricos . . . . .                               | 18        |
| 2.2 3-Variedades hiperbólicas . . . . .                          | 21        |
| 2.2.1 3-Variedades pegadas . . . . .                             | 21        |
| 2.3 Ángulos diédricos y ángulos sólidos . . . . .                | 22        |
| 2.3.1 Completez de 3-variedades pegadas . . . . .                | 25        |
| <b>3 3-Variedades hiperbólicas de volumen finito</b>             | <b>29</b> |
| 3.1 Función de Lobachevsky . . . . .                             | 30        |
| 3.2 Volumen hiperbólico (segunda parte) . . . . .                | 32        |
| 3.2.1 Ortotetraedro . . . . .                                    | 32        |
| 3.2.2 Tetraedros ideales . . . . .                               | 33        |
| 3.3 El complemento del nudo ocho . . . . .                       | 37        |
| 3.3.1 Volumen del complemento del nudo ocho . . . . .            | 43        |
| 3.4 El complemento del Enlace de Whitehead . . . . .             | 43        |
| 3.4.1 Volumen del complemento del Enlace de Whitehead . . . . .  | 48        |
| 3.5 Complemento de los anillos Borromeanos . . . . .             | 48        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.5.1    | Variedad de Gieseking . . . . .                | 50        |
| <b>4</b> | <b>Teorema del volumen de Thurston</b>         | <b>51</b> |
| 4.1      | Descomposición de Margulis-Jørgensen . . . . . | 53        |
| 4.2      | Convergencia de variedades . . . . .           | 57        |
| 4.3      | Apertura, cerradura de cúspides . . . . .      | 58        |
|          | <b>Bibliografía</b>                            | <b>61</b> |

# Capítulo 1

## Geometría hiperbólica

Existen diversos modelos de la Geometría Hiperbólica, cada uno tiene sus ventajas y desventajas sobre los otros modelos. En los capítulos subsecuentes se utilizará los siguientes tres modelos.

### **El modelo del semiespacio superior.**

Es el semiespacio superior  $U^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  dotado con la métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

En este modelo medir los ángulos diédricos se traduce en medir ángulos entre planos Euclidianos o bien ángulos entre una esfera y un plano Euclidianos tangentes; estos ángulos serán de utilidad en el cálculo del volumen de tetraedros en  $U^3$ .

### **El modelo del interior de la bola (o modelo conforme de Poincaré).**

Consideremos la bola unitaria  $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$  junto con la métrica Riemanniana

$$ds^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2))^2},$$

lo que es un modelo de Geometría Hiperbólica. Éste tiene ventajas importantes, una es que tiene una representación como un subconjunto acotado del espacio Euclidianos. Los ángulos hiperbólicos se miden como los ángulos entre curvas en el espacio Euclidianos. También es un buen modelo para estudiar las propiedades de poliedros regulares (centrados o con un vértice en el origen) ya que existen geodésicas que son segmentos de recta Euclidianas, estas son precisamente las que pasan por el origen. Así se heredan ciertas propiedades de los poliedros Euclidianos a los poliedros hiperbólicos, las cuales son usadas para calcular el volumen de tetraedros ideales.

### **El modelo del hiperboloide o Lorentziano.**

Es el que presentamos en las siguientes secciones, en este modelo es más simple la expresión de la distancia hiperbólica. Esta fórmula es más fácil de manipular que las de los otros modelos, de manera que la fórmula de volumen también es fácilmente calculable.

Estos modelos son isométricamente equivalentes, la demostración de este hecho y otros detalles se encuentra en [Can] y [Thu2].

## 1.1 n-Espacio Lorentziano

En  $\mathbb{R}^n$  (se asumirá  $n > 1$ ), la bola  $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : (x - y) \cdot (x - y) < r\}$  es un conjunto vacío si  $r \leq 0$ , aquí  $\cdot$  es el producto usual de  $\mathbb{R}^n$ . A continuación se define un producto interno para  $\mathbb{R}^n$ , llamado *producto interno Lorentziano*, para el cual si  $r$  es un número negativo  $B_r(x)$  no es vacío y en la frontera de una bola modelará al espacio hiperbólico.

**Definición 1.1.1.** Sea  $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la forma bilineal dada por

$$x \circ y = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Esta forma bilineal es el producto interno Lorentziano.

El espacio  $\mathbb{R}^n$  dotado con el producto interno Lorentziano se denota por  $\mathbb{R}^{1,n-1}$ . La norma Lorentziana se define como sigue.

**Definición 1.1.2.** Sea  $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ . La norma (longitud) Lorentziana de  $x$  es el número complejo

$$\|x\| = (x \circ x)^{\frac{1}{2}}.$$

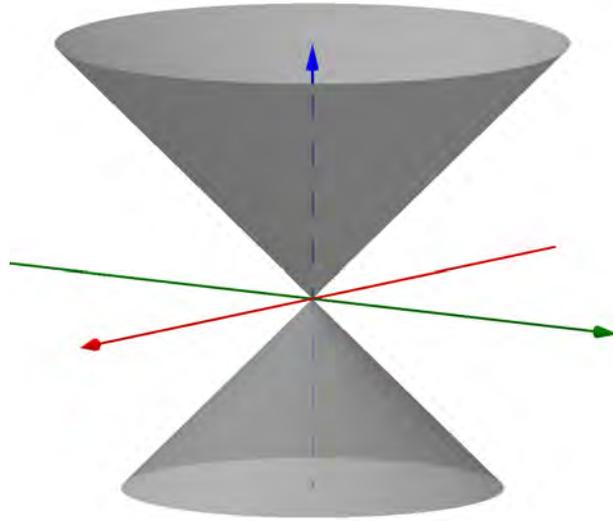
Aquí,  $\|x\|$  puede ser un número real positivo, cero o imaginario positivo. Por la definición de norma Lorentziana se obtiene que  $\mathbb{R}^{1,n-1}$  se divide en los siguientes conjuntos.

**Tipo luz (el hipercono  $C^{n-1}$ ).**

Los vectores de tipo luz son todos los  $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  tales que  $\|x\| = 0$ . En este caso si  $x_1 < 0$ , entonces  $x$  es un vector tipo luz negativo, y en el caso  $x_1 > 0$ ,  $x$  es un vector tipo luz positivo.

**Tipo espacial (el exterior del hipercono  $C^{n-1}$ ).**

Los vectores tipo espacial son todos los  $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  tales que  $\|x\| > 0$ .

Figura 1.1: Hipercono para  $n = 3$ 

**Tipo temporal (el interior del hipercono  $C^{n-1}$ ).**

Los de *tipo temporal* son todos los  $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$  tales que  $\|x\|$  es imaginario positivo. En este caso, si  $x_1 < 0$ , entonces  $x$  es un vector tipo temporal negativo, y si  $x_1 > 0$ ,  $x$  es un vector tipo temporal positivo. En este conjunto se define el modelo Lorentziano de la Geometría Hiperbólica.

**Nota:** Si para cada  $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ , con  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , se define  $\bar{x} := (x_2, \dots, x_n)$ , se sigue

$$\|x\|^2 = -x_1^2 + |\bar{x}|^2,$$

donde  $|\cdot|$  es la norma usual en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , además se tiene

$$x \circ y = -x_1 y_1 + \bar{x} \cdot \bar{y},$$

con  $\bar{x} \cdot \bar{y}$  el producto interno usual de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Así  $x$  es espacial si y solo si  $|x_1| < |\bar{x}|$ . De manera similar,  $x$  es temporal si y solo si  $|x_1| > |\bar{x}|$ . Por lo tanto el conjunto de los vectores temporales tiene dos componentes conexas, la componente que consta de los vectores positivos y la que consta de los negativos.

Por lo anterior, surgen conceptos como transformación y matriz Lorentziana, los cuales son de utilidad para estudiar las isometrías (funciones que preservan la distancia) del espacio hiperbólico.

**Definición 1.1.3.** Una aplicación  $\phi : \mathbb{R}^{1,n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,n-1}$  es Lorentziana si y solo si  $\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y$ .

El conjunto de aplicaciones Lorentzianas con la composición de aplicaciones, forma un grupo, el cual se denomina *grupo de aplicaciones Lorentzianas*. El caso de las matrices Lorentzianas es como sigue.

**Definición 1.1.4.** *La matriz  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es Lorentziana si y solo si la aplicación*

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^{1,n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{1,n-1} \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

*es una aplicación Lorentziana, es decir  $(Ax) \circ (Ay) = x \circ y$ .*

El conjunto de todas las matrices Lorentzianas forma un grupo bajo la multiplicación de matrices, el cual se denota como  $O(1, n-1)$ , este grupo es denominado el *grupo de Lorentz* de matrices  $n \times n$ . Por la definición de matriz Lorentziana, el grupo de aplicaciones Lorentzianas es isomorfo a  $O(1, n-1)$ . La siguiente proposición permite definir dos subgrupos importantes de  $O(1, n-1)$  que proporcionan información de las isometrías del modelo Lorentziano.

**Proposición 1.1.1.** *Para cada  $A \in O(1, n-1)$ , tenemos  $\det(A) = \pm 1$ .*

**Demostración:** Sea  $L$  la matriz de  $n \times n$

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así  $x \circ y = xLy$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ .

Si  $A \in O(1, n-1)$  entonces

$$x(A^T L A)y = (Ax) \circ (Ay) = x \circ y = xLy,$$

luego  $A^T L A = L$ , lo que implica  $\det^2(A) = 1$ . Por lo tanto  $\det(A) = \pm 1$ . ■

Una consecuencia inmediata es que el subgrupo

$$SO(1, n-1) := \{A \in O(1, n-1) \mid \det(A) = 1\},$$

de  $O(1, n-1)$  es de índice 2, el cual se denomina *el grupo especial de Lorentz*.

Recordemos que el conjunto de vectores temporales tiene dos componentes conexas. Así una matriz  $A \in O(1, n-1)$  es positiva si manda vectores positivos en vectores positivos y negativos en negativos, y es negativa si envía negativos en positivos y viceversa. De esta manera surgen los siguientes subgrupos:

$$PO(1, n-1) = \{A \in O(1, n-1) \mid A \text{ es positiva}\} \text{ y}$$

$$PSO(1, n-1) = \{A \in SO(1, n-1) \mid A \text{ es positiva}\},$$

los cuales son de índice 2 en  $O(1, n-1)$  y  $SO(1, n-1)$  respectivamente.

El subgrupo  $PO(1, n-1)$  es denominado el *grupo positivo de Lorentz* y  $PSO(1, n-1)$  es el *grupo positivo especial de Lorentz*.

Para definir las líneas (rectas) hiperbólicas y el espacio hiperbólico, es necesario tener en cuenta que es un espacio temporal, espacial y luz.

**Definición 1.1.5.** *Sea  $V$  subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{1, n-1}$ . Entonces  $V$  es:*

- (1) *Luz, si todos sus vectores no son temporales y tiene un vector tipo luz que no es el vector nulo.*
- (2) *Espacial, si y solo si todo vector no nulo de  $V$  es espacial.*
- (3) *Temporal, si y solo si  $V$  tiene un vector temporal.*

Los espacios temporales definen líneas hiperbólicas, las cuales, más adelante se verá que son precisamente las geodésicas de esta geometría. Por otro lado la acción natural de  $PO(1, n-1)$  sobre un subespacio temporal de  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  está en el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.1.** *Para todo  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , con  $m \leq n$ , si  $V$  es subespacio temporal de  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  con dimensión  $m$ , entonces la acción natural de  $PO(1, n-1)$  en  $V$  es transitiva.*

**Demostración:**

Sea  $V$  un  $m$ -espacio vectorial de  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  de vectores temporales. Identificando  $\mathbb{R}^m$  con el subespacio de  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  generado por  $e_1, \dots, e_m$  (donde  $e_1, \dots, e_n$  son la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ). Es suficiente probar que existe  $A \in PO(1, n-1)$  tal que  $A\mathbb{R}^m = V$ .

Sean  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  tal que  $v_1$  es temporal positivo en  $V$  y  $\{v_1, \dots, v_m\}$  es base de  $V$ .

Sean  $w_1 = \frac{v_1}{Im\|v_1\|}$  y  $u_2 = v_2 + (v_2 \circ w_1)w_1$ , de modo que  $w_1 \circ w_1 = -1$  y  $u_2 \neq 0$  (puesto  $v_1$  y  $v_2$  son linealmente independientes), más aún  $w_1 \circ u_2 = 0$ , entonces  $u_2$  es espacial, puesto que si  $x \circ y = 0$  con  $x \neq y \neq 0$  y  $x$  es temporal, implica que  $y$  es espacial.

Ahora sean

$$w_j = \frac{u_j}{\|u_j\|} \quad \text{para } 2 \leq j \leq n$$

y

$$u_k = v_k + (v_k \circ w_1)w_1 - \sum_{l=2}^{k-1} (v_k \circ w_l)w_l \quad \text{para } 3 \leq k \leq n.$$

Entonces  $\{w_1, \dots, w_n\}$  es una base ortonormal (con respecto al producto interno Lorentziano) de  $\mathbb{R}^{1,n-1}$  y  $\{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $V$ .

Sea  $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$  entonces,  $A$  es Lorentziana,  $A\mathbb{R}^m = V$ ,  $A$  positiva y  $Ae_1 = w_1$  es temporal positivo. ■

## 1.2 n-Espacio hiperbólico

En esta sección se presentan el espacio, la distancia, el grupo de isometrías y las geodésicas hiperbólicas del modelo del hiperboloide. Sea

$$\mathbb{F}^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid \|x\|^2 = -1\},$$

esfera de radio  $i$ . Este conjunto no es conexo, puesto que es un hiperboloide de dos mantos dado por la ecuación  $x_1^2 - |\bar{x}|^2 = 1$ , ver Figura 1.2, en la que se presenta el caso  $n = 2$ .

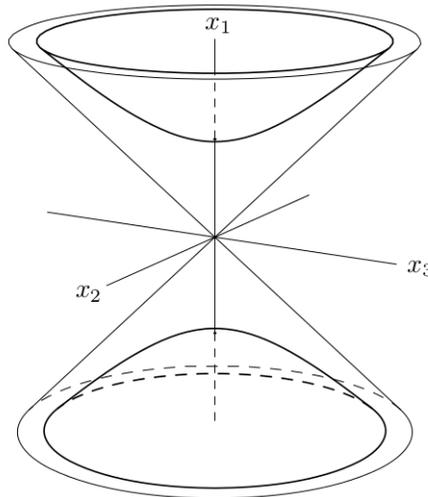


Figura 1.2: El hiperboloide  $\mathbb{F}^2$

El inconveniente de la conexidad se arregla ya sea identificando los vectores antipodalmente del manto positivo  $\mathbb{F}_+^n := \{x \in \mathbb{F}^n | x_1 > 0\}$  con los puntos del manto negativo  $\mathbb{F}_-^n := \{x \in \mathbb{F}^n | x_1 < 0\}$  o simplemente descartando uno de los dos mantos.

**Definición 1.2.1.** *Se define el modelo del hiperboloide  $\mathbb{H}^n$  del  $n$ -espacio hiperbólico como el manto (u hoja) positivo  $\mathbb{F}_+^n$ .*

Ahora, si  $x, y \in \mathbb{H}^n$ , por el Teorema 1.1.1, existe  $A \in PO(1, n)$  tal que  $Ax = e_1$ , entonces

$$x \circ y = Ax \circ Ay = -w_1,$$

donde  $w_1$  es la primera coordenada de  $Ay$ . Por ende  $w_1 \geq 1$ , luego  $-w_1 \leq -1$ . Así existe un único número real no negativo  $\eta(x, y)$  tal que

$$x \circ y = -\cosh(\eta(x, y)).$$

El número real  $\eta(x, y)$  se denomina *ángulo temporal entre  $x$  e  $y$* . Gracias a esta unicidad, se obtiene la definición de distancia hiperbólica como sigue.

**Definición 1.2.2.** *Sean  $x, y \in \mathbb{H}^n$ , así la distancia hiperbólica entre  $x$  e  $y$  se define como:*

$$d_H(x, y) = \eta(x, y).$$

Donde  $\eta(x, y)$  es el ángulo temporal entre  $x$  e  $y$ .

Ya definimos el espacio, la distancia hiperbólica, ahora es el turno de las isometrías de  $\mathbb{H}^n$ . Recordar que una isometría  $\phi$  de  $\mathbb{H}^n$  es una aplicación  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  la cual cumple

$$d_H(\phi(x), \phi(y)) = d_H(x, y),$$

para todo  $x, y \in \mathbb{H}^n$ . Denotemos por  $I(\mathbb{H}^n)$  al conjunto de isometrías de  $\mathbb{H}^n$  y a los elementos de  $I(\mathbb{H}^n)$  se denominan *isometrías hiperbólicas*.

**Teorema 1.2.1.** *Para toda  $A \in PO(1, n)$  existe  $\psi \in I(\mathbb{H}^n)$  tal que la restricción de  $A$  en  $\mathbb{H}^n$  es  $\psi$ . Y para todo  $\phi \in I(\mathbb{H}^n)$  existe una única  $B \in PO(1, n)$  para la cual  $\phi$  se extiende a  $B$ .*

**Demostración:** Observemos que una aplicación  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  es una isometría si y solo si preserva el producto interno Lorentziano en  $\mathbb{H}^n$ . Así toda  $A \in PO(1, n)$  se restringe a una isometría de  $\mathbb{H}^n$ .

Ahora sea  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  una isometría de  $\mathbb{H}^n$ . Tenemos dos casos, uno cuando  $\phi$  fija  $e_1$  y otro cuando no.

**Caso 1)** Si  $\phi$  fija  $e_1$ .

Sea  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ , entonces  $\phi_1(x) = -\phi(x) \circ e_1 = x \circ e_1 = x_1$ , implica

$$\phi(x) = (x_1, \phi_2(x), \dots, \phi_{n+1}(x)).$$

Tomando  $\rho : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación dada por  $\rho(x) = \bar{x}$ , la cual es biyectiva, definamos  $\bar{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$\bar{\phi}(u) = (\phi_2(\rho^{-1}(u)), \dots, \phi_{n+1}(\rho^{-1}(u))).$$

Entonces  $\bar{\phi}(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$  para todo  $x \in \mathbb{H}^n$ . Como  $\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y$  se sigue que

$$-x_1 y_1 + \bar{\phi}(\bar{x}) \cdot \bar{\phi}(\bar{y}) = -x_1 y_1 + \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Así  $\bar{\phi}(\bar{x}) \cdot \bar{\phi}(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ . Por tanto  $\bar{\phi}$  es una isometría de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto existe  $A$  matriz de  $n \times n$  tal que  $A^T A = I$  y  $A(u) = \bar{\phi}(u)$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ .

Consideremos la matriz  $B$  de  $(n+1) \times (n+1)$  como sigue

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Entonces  $B \in PO(1, n)$  y  $B(x) = \phi(x)$  para todo  $x \in \mathbb{H}^n$ .

**Caso 2)** Cuando  $\phi$  no fija  $e_1$ .

Por el Teorema 1.1.1, existe  $C \in PO(1, n)$  tal que  $C\phi(e_1) = e_1$ . Definamos  $\psi$  como:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ x &\mapsto C(\phi(x)). \end{aligned}$$

Así,  $\psi$  fija a  $e_1$ , y el caso 1),  $\psi$  se extiende a una  $B \in PO(1, n)$ , por lo tanto  $\psi = B$  en  $\mathbb{H}^n$ , luego  $\phi = C^{-1}B$  en  $\mathbb{H}^n$ . Con lo que se concluye que,  $\phi$  se extiende a un elemento de  $PO(1, n)$ .

Con esto se garantiza la existencia. Ahora prosigamos con la unicidad.

Sean  $B, C \in PO(1, n)$  extensiones de  $\phi$ . Entonces  $B^{-1}C$  fija cada punto de  $\mathbb{H}^n$ . Como todo subespacio propio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  no está contenido en  $\mathbb{H}^n$ ,  $B^{-1}C$  también fija a todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto  $C = B$ , lo que prueba la unicidad. ■

El resultado anterior arroja información sobre las isometrías hiperbólicas.

**Corolario 1.2.1.** *El grupo de isometrías  $I(\mathbb{H}^n)$  es isomorfo a  $PO(1, n)$ .*

### 1.2.1 Geodésicas y líneas hiperbólicas

Una línea hiperbólica de  $\mathbb{H}^n$  es la intersección de  $\mathbb{H}^n$  con un subespacio temporal de  $\mathbb{R}^{1,n}$  de dimensión 2. Sean  $x, y \in \mathbb{H}^n$  distintos, por lo que  $x$  e  $y$  generan un subespacio temporal  $V(x, y)$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  de dimensión 2 y denotamos por  $L(x, y)$  a la intersección  $V(x, y) \cap \mathbb{H}^n$ , la cual es la línea hiperbólica que contiene a  $x$  e  $y$ . Cabe resaltar que  $L(x, y)$  es una rama de una hipérbola y es única puesto  $V(x, y)$  lo es.

Además tres puntos en  $\mathbb{H}^n$  son hiperbólicos colineales si y solo si existe una línea hiperbólica de  $\mathbb{H}^n$  que los contiene, más aún,  $\eta(x, y) + \eta(y, w) = \eta(x, w)$  si y solo si  $x, y, w$  son hiperbólicamente colineales, esta última propiedad la podemos encontrar en [Rat].

Sea  $(X, d_X)$  un espacio métrico, una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ , es un arco geodésico si es una aplicación que preserva las métricas, esto es para cualesquiera  $t, s \in [a, b]$ ,  $d_X(\alpha(t), \alpha(s)) = |t - s|$ . En el teorema siguiente damos una caracterización de los arcos geodésicos en  $\mathbb{H}^n$ . Para este teorema se requiere la definición de  $L$ -ortonormalidad.

**Definición 1.2.3.** *Dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$  son Lorentzianos ortonormales ( $L$ -ortonormales) si y solo si*

$$\|y\|^2 = 1, x \circ y = 0 \text{ y } \|x\|^2 = -1.$$

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  una curva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *La curva  $\alpha$  es un arco geodésico.*
2. *Existen vectores  $L$ -ortonormales  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$  tales que*

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))x + (\sinh(t - a))y.$$

3. *La curva  $\alpha$  satisface la ecuación diferencial  $\alpha'' - \alpha = 0$ .*

**Demostración:**

[1  $\Rightarrow$  2] Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$  una curva que es un arco geodésico y  $t \in [a, b]$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned} \eta(\alpha(a), \alpha(b)) &= b - a \\ &= (t - a) + (b - t) \\ &= \eta(\alpha(t), \alpha(a)) + \eta(\alpha(b), \alpha(t)) \end{aligned}$$

Como  $\eta(x, y) + \eta(y, w) = \eta(x, w)$  si y solo si  $x, y, w$  son hiperbólicamente colineales, entonces  $\alpha(a), \alpha(b)$  y  $\alpha(t)$  son hiperbólicamente colineales, se sigue que  $\alpha([a, b]) \subset l$  con  $l$  una línea hiperbólica de  $\mathbb{H}^n$ . Sin pérdida de la generalidad podemos suponer  $n = 1$ , (lo que reduce la demostración a  $\mathbb{H}^1$ ).

Ahora sea  $A$  la matriz Lorentziana dada por

$$\begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix},$$

con  $s$  tal que  $A(\alpha(a)) = e_1$ , así se puede suponer que  $\alpha(a) = e_1$ .

Entonces

$$e_1 \alpha(t) = -\alpha(a) \circ \alpha(t) = \cosh(\eta(\alpha(a), \alpha(t))) = \cosh(t - a).$$

Análogamente,  $e_2 \alpha(t) = \pm \sinh(t - a)$ . Como  $\alpha$  es continua, el signo se mantiene constante para todo  $t$ . Por lo tanto

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))e_1 + (\sinh(t - a)) \pm e_2.$$

[2  $\Rightarrow$  1] Sean  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$   $L$ -ortonormales tales que

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))x + (\sinh(t - a))y.$$

Para  $s, t \in [a, b]$  con  $s \leq t$ , se observa

$$\begin{aligned} \cosh(\eta(\alpha(s), \alpha(t))) &= -\alpha(s) \circ \alpha(t) \\ &= \cosh(s - a)\cosh(t - a) - \sinh(s - a)\sinh(t - a) \\ &= \cosh(t - s) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\eta(\alpha(t), \alpha(s)) = t - s$ . Entonces  $\alpha$  es un arco geodésico.

[2  $\Rightarrow$  3] Sean  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$   $L$ -ortonormales tales que

$$\alpha(t) = (\cosh(t - a))x + (\sinh(t - a))y.$$

Así  $\alpha''(t) = (\cosh(t - a))x + (\sinh(t - a))y$ , entonces  $\alpha'' - \alpha = 0$ .

[3  $\Rightarrow$  2] Como  $\alpha'' - \alpha = 0$ , se sigue

$$\alpha''(t) = (\cosh(t - a))\alpha'(a) + (\sinh(t - a))\alpha(a).$$

Tomando  $\alpha(a) = e_1$ , como  $\alpha(t) \in \mathbb{H}^n$   $\alpha(t) \circ \alpha(t) = -1$ , derivando se obtiene  $\alpha(t) \circ \alpha'(t) = 0$  para todo  $t$ , en particular para  $t = a$ . Además  $\|\alpha(t)\|^2 = -\cosh^2(t - a) + \sinh^2(t - a) = \|\alpha'(a)\|^2$ . Por lo tanto  $\|\alpha'(a)\| = -1$  puesto que  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ . Entonces  $\alpha'(a)$  y  $\alpha(a)$  son  $L$ -ortonormales.

■

Unas consecuencias inmediatas de este Teorema, son los siguientes resultados.

**Teorema 1.2.3.** *Una aplicación  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$  es una línea geodésica si y solo si existen vectores  $L$ -ortonormales  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$  tales que*

$$\lambda(t) = (\operatorname{cosht})x + (\operatorname{senht})y.$$

**Demostración:** Se sigue del Teorema 1.2.2. ■

**Corolario 1.2.2.** *Las geodésicas de  $\mathbb{H}^n$  son líneas hiperbólicas.*

En resumen, el conjunto de puntos de nuestro modelo del hiperboloide es  $\mathbb{F}_+^n$ , la distancia entre dos puntos es  $d_H(x, y) = \eta(x, y)$ , donde  $\eta(x, y)$  es el ángulo temporal entre  $x$  e  $y$ ; el grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^n$  es  $PO(1, n)$  y las geodésicas son las líneas hiperbólicas.

### 1.3 Volumen hiperbólico (primera parte)

En el espacio hiperbólico se tienen las coordenada hiperbólicas, las cuales sirven para dotar de una medida a los conjuntos en  $\mathbb{H}^n$  y, así poder calcular volumen. Las coordenadas hiperbólicas son las análogas a las coordenadas esféricas para el espacio Euclidiano, pues son ángulos entre un vector de la base usual y ciertas proyecciones. Para definir las coordenadas hiperbólicas es necesario tener en cuenta los siguientes tipos de ángulos.

Si  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ , son vectores espaciales, el subespacio  $V$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  generado por estos vectores, puede ser de Tipo Temporal, Espacial o Luz.

Si  $V$  es Espacial existe un único  $\eta(x, y) \in [0, \pi]$  tal que

$$x \circ y = \|x\| \|y\| \cos(\eta(x, y)),$$

en este caso  $\eta(x, y)$  se denomina *el ángulo espacial Lorentziano* entre  $x$  e  $y$ .

Ahora, si  $V$  es temporal, existe un único  $\eta(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  tal que

$$|x \circ y| = \|x\| \|y\| \cosh(\eta(x, y)),$$

aquí  $\eta(x, y)$  se llama *el ángulo temporal Lorentziano* entre los vectores  $x$  e  $y$ .

Por último si  $V$  es del tipo luz, entonces  $|x \circ y| = \|x\| \|y\|$ , en este caso  $\eta(x, y) = 0$ .

Por otro lado si  $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ , con  $x$  e  $y$  vectores temporales, existe un único  $\eta(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  tal que

$$|x \circ y| = \|x\| \|y\| \operatorname{senh}(\eta(x, y)),$$

en este caso  $\eta(x, y)$  se denomina *el ángulo temporal Lorentziano* entre  $x$  e  $y$ .

Sea  $x \in \mathbb{H}^n$ , con  $n > 1$  tal que  $\{x_n, x_{n+1}\} \neq \{0\}$ ; entonces los vectores  $e_i$  y  $x_i e_i + \dots x_{n+1} e_{n+1}$  son espaciales si  $1 < i$  y son temporales si  $i = 1$ , así *las coordenadas hiperbólicas*  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  de  $x$  se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \eta_i &= \eta(e_i, x_i e_i + \dots x_{n+1} e_{n+1}) \text{ si } i < n \quad y \\ \eta_n &\text{ es el ángulo polar entre } e_n \text{ y } x_n e_n + x_{n+1} e_{n+1}. \end{aligned}$$

Las coordenadas hiperbólicas satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x_1 &= \cosh(\eta_1) \\ x_2 &= \sinh(\eta_1) \cos(\eta_2) \\ x_j &= \sinh(\eta_1) \left[ \prod_{k=2}^{j-1} \sin(\eta_k) \right] \cos(\eta_j) \quad \text{para } 2 < j < n+1 \\ x_{n+1} &= \sinh(\eta_1) \sin(\eta_2) \dots \sin(\eta_{n-1}) \sin(\eta_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

De este sistema de ecuaciones, se desprende la siguiente parametrización en coordenadas hiperbólicas de  $\mathbb{H}^n$ ;

$$h : \mathbb{R} \times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{H}^n \quad h(\eta_1, \dots, \eta_n) = (x_1, \dots, x_{n+1}),$$

donde  $x_1, \dots, x_{n+1}$  están dados como en las ecuaciones (1.1). La transformación  $h$  es biyectiva en  $\mathbb{R} \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ . Las coordenadas hiperbólicas tienen las siguientes propiedades.

**Lema 1.3.1.** *La transformación  $h$  definida como antes, cumple las siguientes propiedades:*

1.  $\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta_1} \right\| = 1$
2.  $\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta_i} \right\| = \sinh(\eta_1) \sin(\eta_2) \dots \sin(\eta_{i-1}) \quad \forall i > 1.$
3.  $\frac{\partial h}{\partial \eta_i} \circ \frac{\partial h}{\partial \eta_j} = 0 \quad \forall i < j.$

**Demostración:**

1. Por definición de  $h$ ,  $h(\eta_1, \dots, \eta_n) = (x_1, \dots, x_{n+1})$ , así  $\frac{\partial h}{\partial \eta_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \eta_1} \right)$  y además

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta_1} \right\|^2 = \left\| \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \eta_1} \right) \right\|^2 = -\frac{\partial x_1^2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial \eta_1} + \dots + \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_1}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial x_1^2}{\partial \eta_1} &= -\operatorname{sen}h^2(\eta_1). \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial \eta_1} &= \operatorname{cosh}^2(\eta_1)\cos^2(\eta_2). \\ \frac{\partial x_j^2}{\partial \eta_1} &= \operatorname{cosh}^2(\eta_1) \left( \prod_{k=2}^{j-1} \operatorname{sen}^2(\eta_k) \right) \cos^2(\eta_j) \quad \text{para } 2 < j < n+1. \\ \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_1} &= \operatorname{cosh}^2(\eta_1) \left( \prod_{k=2}^n \operatorname{sen}^2(\eta_k) \right). \end{aligned}$$

Ahora, como  $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$  y  $\operatorname{cosh}^2\theta - \operatorname{sen}h^2\theta = 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_n^2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_1} &= \operatorname{cosh}^2(\eta_1)\operatorname{sen}^2(\eta_2)\operatorname{sen}^2(\eta_3) \cdots \operatorname{sen}^2(\eta_{n-1}). \\ \frac{\partial x_{n-1}^2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_n^2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_1} &= \operatorname{cosh}^2(\eta_1)\operatorname{sen}^2(\eta_2)\operatorname{sen}^2(\eta_3) \cdots \operatorname{sen}^2(\eta_{n-2}). \\ &\vdots \\ \frac{\partial x_2^2}{\partial \eta_1} + \cdots + \frac{\partial x_n^2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_1} &= \operatorname{cosh}^2(\eta_1)(\cos^2(\eta_2) + \operatorname{sen}^2(\eta_2)) = \operatorname{cosh}^2(\eta_1). \\ -\frac{\partial x_1^2}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial \eta_1} + \cdots + \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_1} &= -\operatorname{sen}h^2(\eta_1) + \operatorname{cosh}^2(\eta_1) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta_1} \right\| = 1$ .

2. Precediendo como en el caso anterior,  $\frac{\partial h}{\partial \eta_i} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta_i}, \dots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \eta_i} \right)$ , así

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta_i} \right\|^2 = \left\| \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta_i}, \dots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \eta_i} \right) \right\|^2 = -\frac{\partial x_1^2}{\partial \eta_i} + \frac{\partial x_2^2}{\partial \eta_i} + \cdots + \frac{\partial x_{n+1}^2}{\partial \eta_i}.$$

De donde se observa lo siguiente:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i. \\ -\operatorname{sen}h(\eta_1) \left[ \prod_{k=2}^i \operatorname{sen}(\eta_k) \right] & \text{si } j = i. \\ \operatorname{sen}h(\eta_1) \left[ \prod_{k=2}^{i-1} \operatorname{sen}(\eta_k) \right] \cos(\eta_i) \left[ \prod_{k=i+1}^{j-1} \operatorname{sen}(\eta_k) \right] \cos(\eta_j) & \text{si } n \geq j > i. \\ \operatorname{sen}h(\eta_1) \left[ \prod_{k=2}^{i-1} \operatorname{sen}(\eta_k) \right] \cos(\eta_i) \left[ \prod_{k=i+1}^n \operatorname{sen}(\eta_k) \right] & \text{si } n+1 = j. \end{cases}$$

De aquí se desprende que

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta_i} \right\| = \operatorname{sen}h(\eta_1) \left[ \prod_{k=2}^{i-1} \operatorname{sen}(\eta_k) \right] \quad \forall i > 1.$$

3. Por 2, se tiene que  $\frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} = 0$  siempre que  $k < j$ . Los otros casos son como sigue:

- Si  $j = k$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} = -\operatorname{sen} h^2(\eta_1) \left[ \prod_{l=2, l \neq i}^{j-1} \operatorname{sen}^2(\eta_l) \right] \operatorname{sen}(\eta_i) \cos(\eta_i) \operatorname{sen}(\eta_j) \cos(\eta_j).$$

- Si  $j < k \leq n$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} = \operatorname{sen} h^2(\eta_1) \left[ \prod_{l=2, j \neq l \neq i}^{k-1} \operatorname{sen}^2(\eta_l) \right] \operatorname{sen}(\eta_i) \cos(\eta_i) \operatorname{sen}(\eta_j) \cos(\eta_j).$$

- Si  $k = n + 1$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} = \operatorname{sen} h^2(\eta_1) \left[ \prod_{l=2, j \neq l \neq i}^k \operatorname{sen}^2(\eta_l) \right] \operatorname{sen}(\eta_i) \cos(\eta_i) \operatorname{sen}(\eta_j) \cos(\eta_j).$$

Dada la identidad  $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ , se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} = \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_j} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta_i} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_j} = 0.$$

Por consiguiente,  $\frac{\partial h}{\partial \eta_i} \circ \frac{\partial h}{\partial \eta_j} = 0 \quad \forall i < j.$  ■

Ahora, como nuestro objetivo es definir el volumen hiperbólico, primero se debe definir cuándo un conjunto es medible en  $\mathbb{H}^n$ .

**Definición 1.3.1.** *Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{H}^n$  es medible en  $\mathbb{H}^n$  si y solo si  $h^{-1}(X)$  es medible en  $\mathbb{R}^n$ , en el sentido usual.*

Con esto, todo subconjunto de Borel de  $\mathbb{H}^n$  es medible en  $\mathbb{H}^n$ . Ahora es turno de definir el volumen hiperbólico.

**Definición 1.3.2.** *Sea  $X \subset \mathbb{H}^n$  medible en  $\mathbb{H}^n$ , el volumen hiperbólico de  $X$  se define como:*

$$\operatorname{Vol}(X) := \int_{h^{-1}(X)} \operatorname{sen} h^{n-1} \eta_1 \operatorname{sen}^{n-2} \eta_2 \cdots \operatorname{sen}(\eta_{n-1}) d\eta_1 \cdots d\eta_n$$

De aquí se observa la conveniencia de la función de Lobachevsky, que más adelante se definirá, puesto que es muy complicado encontrar y describir el conjunto  $h^{-1}(X)$ .

**Ejemplo 1.3.1.** *Si  $B_r(x)$  es el disco hiperbólico centrado en un punto  $x \in \mathbb{H}^2$  de radio  $r$ ; como  $B_r(x)$  es abierto y  $\partial B_r(x)$  es cerrado en  $\mathbb{H}^2$ , son medibles (pues son conjuntos Borelianos), entonces el perímetro es  $2\pi \operatorname{sen} h(r)$  y su área es  $2\pi(\cosh(r) - 1)$ .*

Si  $X \subset \mathbb{H}^n$  es medible y  $\phi \in PO(1, n)$ , se obtiene que  $\phi(X)$  también es medible. Considerando la nueva parametrización de  $\mathbb{H}^n$  dada de la composición de  $h$  con  $\phi$ , se llega a que  $Vol(\phi(X)) = Vol(X)$ . En otras palabras, el volumen hiperbólico es un invariante isométrico en  $\mathbb{H}^n$ , además si  $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una colección de subconjuntos de  $\mathbb{H}^n$  disjuntos y medibles en  $\mathbb{H}^n$ , se sigue que  $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$  también es medible y  $Vol(X) = \sum_{m \in \mathbb{N}} Vol(X_m)$ . Por lo tanto el volumen es una medida para los subconjuntos de  $\mathbb{H}^n$ . Por último, en este capítulo, calculamos el elemento de volumen en coordenadas Euclidianas.

**Teorema 1.3.1.** *El elemento de volumen hiperbólico de  $\mathbb{H}^n$  con respecto a las coordenadas Euclidianas  $x_2, \dots, x_{n+1}$  es*

$$\frac{dx_2 \cdots dx_{n+1}}{\sqrt{1 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}}.$$

**Demostración:**

Sea  $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación definida como  $\psi(\eta_1, \dots, \eta_n) = (x_2, \dots, x_{n+1})$ , donde  $x_2, \dots, x_{n+1}$  están dadas como en el sistema de ecuaciones (1.1). Por el inciso 3 del Lema 1.3.1 se tiene que  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta_i} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_j} = 0$  para todo  $i < j$ , entonces los vectores  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial \eta_n}$  son ortogonales, por ende el Jacobiano de la transformación  $\psi$  es

$$J(\eta_1, \dots, \eta_n) = \left| \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \right| \cdots \left| \frac{\partial \psi}{\partial \eta_n} \right| = \cosh(\eta_1) \operatorname{sen} h^{n-1} \eta_1 \operatorname{sen}^{n-2} \eta_2 \cdots \operatorname{sen}(\eta_{n-1}).$$

Por el cambio de coordenadas dado y  $\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|^2 = -1$  (por estar en  $\mathbb{H}^n$ ), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{h^{-1}(X)} \operatorname{sen} h^{n-1} \eta_1 \operatorname{sen}^{n-2} \eta_2 \cdots \operatorname{sen}(\eta_{n-1}) d\eta_1 \dots d\eta_n &= \int_{\psi(h^{-1}(X))} \frac{dx_2 \cdots dx_{n+1}}{\cosh(\eta_1)} \\ &= \int_{\rho(X)} \frac{dx_2 \cdots dx_{n+1}}{x_1} = \int_{\rho(X)} \frac{dx_2 \cdots dx_{n+1}}{\sqrt{1 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}} \end{aligned}$$

donde  $\rho : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la proyección  $\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_2, \dots, x_{n+1})$ . ■



## Capítulo 2

# Variedades geométricas y (X,G)-estructuras

Antes de llegar a ejemplos de volumen finito para 3-variedades hiperbólicas (no compactas), se verá como dotar de una estructura hiperbólica a diversas variedades.

Una  $n$ -variedad Riemanniana completa, conexa y con curvatura seccional  $-1$ , es precisamente un cociente  $\mathbb{H}^n/G$  del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  vía una acción libre de un grupo discreto  $G \subset I(\mathbb{H}^n)$  ([Apa, Capítulos 4 y 7]). Una  $n$ -variedad topológica  $M$  con atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ , donde  $J$  es un conjunto de índices, puede ser expresada como la composición de piezas del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , las cuales son pegadas mediante homeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  tomados de un conjunto  $\mathcal{G}$ , este conjunto consta de homeomorfismos los cuales satisfacen las siguientes condiciones, las cuales definen un pseudo grupo de homeomorfismos locales entre conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  :

1. La restricción  $g_0$  de cualquier elemento  $g \in \mathcal{G}$  a un conjunto abierto en su dominio es un elemento de  $\mathcal{G}$ .
2. Para cada  $f, g \in \mathcal{G}$ , se tiene que  $f \circ g \in \mathcal{G}$  (si se puede definir la composición).
3. Para todo  $g \in \mathcal{G}$ , se tiene que  $g^{-1} \in \mathcal{G}$ .
4. si  $U = \bigcup_i U_i \subset \mathbb{R}^n$  y  $g : U \rightarrow V$  es un homeomorfismos local tal que  $g_i = g|_{U_i} \in \mathcal{G}$  para todo  $i$ , entonces  $g \in \mathcal{G}$ .

Una  $n$ -variedad  $M$  obtenida por el pegado de piezas de  $\mathbb{R}^n$  mediante un pseudo-grupo  $\mathcal{G}$  de homeomorfismos locales es llamada una  $\mathcal{G}$ -variedad. Generalizando, si  $H$  es un grupo de

homeomorfismos locales de una variedad  $X$  cumple 1-4, entonces  $H$  se denomina un *pseudo grupo*. Ahora, si  $G$  es un grupo de homeomorfismos de  $X$  actuando sobre este, la restricción de sus elementos a abiertos de  $X$  forman un pseudo grupo  $\mathcal{G}$  de homeomorfismos locales, entonces se dice una  $(X, G)$ -variedad es la que se obtiene del pegado de piezas de  $X$  mediante los elementos de  $\mathcal{G}$ .

Como es usual uno considera diferentes categorías dependiendo de la regularidad de  $G$ . En particular:

- Si  $\mathcal{G}$  es un pseudo-grupo de homeomorfismos locales de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ , la  $\mathcal{G}$ -variedad es una  $C^r$ -variedad.
- Si  $\mathcal{G}$  es un pseudo-grupo de homeomorfismos locales lineales a trozos, entonces la  $\mathcal{G}$ -variedad es una PL-variedad.
- Si  $\mathcal{G} = \text{Möb}(n)$  (grupo de transformaciones de Möbius) actuando sobre la esfera  $S^n = \overline{\mathbb{R}^n}$ , con  $n > 2$ , entonces la  $\mathcal{G}$ -variedad es llamada conforme.

A continuación, daremos más detalles de  $(X, G)$ -variedades.

## 2.1 Espacios geométricos

Unas propiedades que posee el espacio  $\mathbb{H}^n$  son que es conexo, es geodésicamente completo y es un espacio homogéneo. Estas propiedades no necesariamente se preservan bajo cocientes pero son deseables para las variedades hiperbólicas, de forma que las incluimos en la definición.

**Definición 2.1.1.** *Un  $n$ -espacio geométrico, es un espacio métrico  $X$ , que satisface las siguientes propiedades:*

1.  $X$  es geodésicamente conexo, es decir, para cada par de puntos distintos de  $X$  existe un segmento geodésico en  $X$  que los conecta.
2.  $X$  es geodésicamente completo, es decir, cada arco geodésico  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$  se extiende a una línea geodésica  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ .
3.  $X$  es homogéneo, es decir, si para todo  $a, b \in X$ , existe  $f : X \rightarrow X$  homeomorfismo tal que  $b = f(a)$ .

4. Existe una función continua  $\epsilon : E^n \rightarrow X$  y un número real  $k > 0$  tal que  $\epsilon(B_k(0)) = B_k(\epsilon(0))$  y  $\epsilon : B_k(0) \rightarrow B_k(\epsilon(0))$  es un homeomorfismo; además para cada punto  $u \in S^{n-1}$ , la aplicación  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ , definida por  $\lambda(t) = \epsilon(tu)$  es una recta geodésica tal que  $\lambda$  se restringe a un arco geodésico sobre el intervalo  $[-k, k]$ .

Un subgrupo de los automorfismos entre espacios geométricos, es el grupo de similitudes, los cuales son cambios de escalas entre el mismo espacio geométrico.

Una aplicación  $\psi : X \rightarrow Y$  entre espacios métricos es un *cambio de escala* si y solo si existe un número real  $k > 0$  tal que

$$d_Y(\psi(x), \psi(y)) = kd_X(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

La constante  $k$  es denominada *el factor de escala* de  $\psi$ . Nótese que un cambio de escala es una inyección continua.

**Definición 2.1.2.** Una similitud de un espacio métrico  $X$  en un espacio métrico  $Y$  es un cambio de escala biyectivo. Dos espacios son similares (o equivalentes bajo cambio de escala) si y solo si existe una similitud entre ellos.

**Observación 2.1.1.** El factor de escala de  $\psi^{-1}$  es  $\frac{1}{k}$ , de aquí  $\psi$  también es un homeomorfismo.

Las similitudes de un espacio métrico consigo mismo, junto con la composición de aplicaciones, forman un grupo denotado por  $\mathbb{S}(X)$ , es llamado *grupo de similitudes* de  $X$ . Cabe resaltar que el grupo de isometrías es subgrupo de  $\mathbb{S}(X)$ .

**Definición 2.1.3.** Sea  $G$  subgrupo de  $\mathbb{S}(X)$  con  $X$  un  $n$ -espacio geométrico y  $M$  una  $n$ -variedad. Un  $(X, G)$ -atlas para  $M$  se define como una familia de aplicaciones

$$\Sigma := \{\psi_i : U_i \rightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}},$$

llamadas *cartas*, que satisfacen:

1. El conjunto  $U_i$  es un subconjunto abierto y conexo de  $M$  para cada  $i$ ; este se denomina *vecindad coordinada*.
2. La carta  $\psi_i$ , es un homeomorfismo a la imagen  $\psi_i(U_i)$  y este subconjunto es abierto en  $X$  para cada  $i$ .
3.  $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  es una cubierta abierta de  $M$ .

4. Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces

$$\psi_j \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \psi_j(U_i \cap U_j),$$

coincide en una vecindad de cada punto de su dominio con un elemento de  $G$ .

Dado  $\Sigma$  un  $(X, G)$ -atlas para  $M$ , existe un único  $(X, G)$ -atlas maximal\* de  $M$  el cual contiene a  $\Sigma$ ; para esto proseguimos de forma análoga que los atlas maximales para variedades suaves.

**Definición 2.1.4.** Una  $(X, G)$ -estructura para una  $n$ -variedad  $M$ , es un  $(X, G)$ -atlas maximal de  $M$ . Una  $(X, G)$ -variedad  $M$ , es una  $n$ -variedad  $M$  junto con una  $(X, G)$ -estructura para  $M$ .

Si  $M$  es una  $(X, G)$ -variedad, una carta para  $M$  es un elemento  $\psi : U \longrightarrow X$  de la  $(X, G)$ -estructura de  $M$ . Si  $u \in M$ , entonces una carta para  $(M, u)$  es una carta  $\psi : U \longrightarrow X$  para  $M$  tal que  $u \in U$ . Así, la  $(\mathbb{H}^n, I(\mathbb{H}^n))$ -estructura sobre una variedad se llama una *estructura hiperbólica* y una  $(\mathbb{H}^n, I(\mathbb{H}^n))$ -variedad es una  *$n$ -variedad hiperbólica*.

**Definición 2.1.5.** Una aplicación  $\xi : M \longrightarrow N$  entre  $(X, G)$ -variedades, es una  $(X, G)$ -aplicación si y solo si  $\xi$  es continua y para cada carta  $\phi : U \longrightarrow X$  para  $M$  y cada carta  $\psi : V \longrightarrow X$  para  $N$  tal que  $U \cap \xi^{-1}(V) \neq \emptyset$ , la aplicación

$$\psi \xi \phi^{-1} : \phi(U \cap \xi^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(\xi(U) \cap V),$$

coincide en una vecindad de cada punto de su dominio con un elemento de  $G$ .

Recordemos que un espacio métrico  $(X, d)$  es *completo* si y solo si toda sucesión de Cauchy de elementos en  $X$  converge en  $X$ . Entonces ¿cuándo una  $(X, G)$ -variedad es completa? Para esto se tiene lo siguiente.

**Definición 2.1.6.** Una  $(X, G)$ -variedad  $M$  es *completa* si y solo si el cubriente universal de cada componente conexa de  $M$  es completa como espacio métrico.

Para cerrar esta sección, presentamos, un teorema sobre completitud para  $(X, G)$ -variedades. Recordemos que un espacio métrico  $X$  es geodésicamente completo si y solo si cada arco geodésico se extiende indefinidamente.

---

\* $\Gamma$  es un  $(X, G)$ -atlas maximal si y solo si para cada  $\phi : U \longrightarrow X$  aplicación que cumple 1 y 2 de la definición anterior y además existe  $\psi \in \Gamma$  tales que  $\phi$  y  $\psi$  satisfacen el inciso 4 de la definición anterior, entonces  $\phi \in \Gamma$

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $M$  una  $(X, G)$ -variedad métrica.<sup>†</sup> Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $M$  es completa.
2.  $M$  es geodésicamente completo.
3.  $M$  es un espacio métrico completo.

La demostración de este teorema la encontramos en [Rat].

## 2.2 3-Variedades hiperbólicas

Una manera de generar diversos ejemplos de variedades hiperbólicas es mediante pegados de poliedros. En esta sección se presenta como pegar poliedros para generar variedades hiperbólicas completas.

**Definición 2.2.1.** *Una cara de un subconjunto convexo  $C$  de  $\mathbb{H}^n$  es un subconjunto maximal, convexo, no vacío de  $\partial C$ . Un poliedro convexo  $P$  en  $\mathbb{H}^n$  es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado de  $\mathbb{H}^n$ , tal que el conjunto de que consta de sus caras es localmente finito en  $\mathbb{H}^n$ .*

### 2.2.1 3-Variedades pegadas

Sean  $X = \mathbb{H}^3$ ,  $P$  un poliedro convexo en  $X$ ,  $\mathcal{P}$  una familia de poliedros convexos ajenos en  $X$  y  $G$  un subgrupo de isometrías de  $\mathbb{H}^3$ . Usamos  $X$  en lugar de  $\mathbb{H}^3$ , pues los siguientes resultados y definiciones se cumplen también cuando  $X = E^3$  (espacio Euclidiano) o  $X = S^3$ .

**Definición 2.2.2.** *Un  $G$ -emparejamiento lateral para  $\mathcal{P}$  es un subconjunto de  $G$*

$$\Phi = \{g_S : S \in \mathcal{S}\},$$

*indexado por la colección  $\mathcal{S}$  de todas las caras de los poliedros en  $\mathcal{P}$ , tal que para cada  $S \in \mathcal{S}$ :*

1. *Existe una cara  $S' \in \mathcal{S}$  tal que  $g_S(S') = S$ ;*
2. *las isometrías  $g_S$  y  $g_{S'}$  satisfacen  $g_{S'} = g_S^{-1}$*
3. *si  $S$  es una cara de  $P \in \mathcal{P}$  y  $S'$  es una cara de  $P' \in \mathcal{P}$ ; entonces  $P \cap g_S(P') = S$ .*

---

<sup>†</sup>Una  $(X, G)$ -variedad métrica es una  $(X, G)$ -variedad conexa tal que  $G$  es un grupo de isometrías de  $X$ .

**Observación 2.2.1.**

- $S'$  esta determinada de manera única por  $S$ .
- $S'$  se denomina el emparejado del lado  $S$ .
- $(S')' = S$ .
- $\Phi$  genera una relación de equivalencia sobre el conjunto  $\Pi = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$  y las clases de equivalencia son llamadas ciclos de  $\Phi$ .

Sean  $\Phi$  un  $G$ -emparejamiento lateral para  $\mathcal{P}$  y  $M = \Pi/\Phi$  un espacio cociente con la relación de equivalencia dada por  $\Phi$ . A  $M$  se llama el *espacio obtenido mediante pegado* de los poliedros de  $\mathcal{P}$  vía  $\Phi$ . Un resultado que relaciona  $G$ -emparejamientos con  $(X, G)$ -estructuras es el siguiente.

**Teorema 2.2.1.** *Sean  $G$  un subgrupo de isometrías de  $X$  y  $M$  un espacio obtenido mediante pegado de una familia  $\mathcal{P}$  de poliedros convexos disjuntos en  $X$  por un  $G$ -emparejamiento lateral  $\Phi$ . Entonces  $M$  es una 3-variedad con una  $(X, G)$ -estructura tal que la inyección natural de  $P^\circ$  a  $M$  es una  $(X, G)$ -aplicación para cada  $P \in \mathcal{P}$ .*

Para la demostración de este teorema ver [Rat, pag 437].

### 2.3 Ángulos diédricos y ángulos sólidos

Sea  $P$  un poliedro convexo  $n$ -dimensional en  $X$ . Las caras  $S$  y  $T$  de  $P$  se denominan adyacentes si y solo si

- $P$  es un segmento geodésico y  $S, T$  son distintos.
- $P$  es un polígono en  $\mathbb{H}^n$  y  $S, T$  son distintos y asintóticos.
- $S \cap T$  es un lado de  $S$  y  $T$  a la vez.

Sean  $S$  y  $T$  caras de  $P$ . Defínase el ángulo diédrico  $\theta(S, T)$  entre  $S$  y  $T$  en  $P$ , como sigue:

- Si  $P$  es un segmento geodésico en  $X$ :  $\theta(S, T)$  es el ángulo entre los puntos finales de  $P$  si  $X = S^n$  y 0 si  $X = E^n$  o bien  $X = \mathbb{H}^n$ .
- Si  $P$  es un polígono en  $\mathbb{H}^n$  y  $S, T$  son distintos y asintóticos, entonces  $\theta(S, T)$  se define como 0.

- $S \cap T$  es una lado de  $S$  y  $T$  a la vez.

Entonces los hiperplanos  $\langle S \rangle$  y  $\langle T \rangle$  dividen al hiperplanos  $\langle P \rangle$  en 4 regiones, una de las cuales contiene a  $P$ ; más aún  $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \langle S \cap T \rangle$ , para este caso, se sigue la construcción.

Sea  $x \in S \cap T$  y  $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow X$  geodésicas tales que

1.  $\lambda(0) = \mu(0) = x$ .
2.  $\lambda$  y  $\mu$  son normales a  $\langle S \rangle$  y  $\langle T \rangle$ , respectivamente.
3.  $\lambda'(0)$  y  $\mu'(0)$  apuntan en dirección contrario al semiespacio de  $\langle P \rangle$  que contiene a  $P$ .

Sea  $\alpha$  el ángulo entre estas dos geodésicas en el punto  $x$ . Está claro que  $\alpha$  no depende de la elección de  $x$ . Definamos el ángulo diédrico entre  $S$  y  $T$  como  $\theta(S, T) = \pi - \alpha$ .

Observemos que  $\pi - \alpha \in (0, \pi)$ , ya que  $\alpha \in (0, \pi)$ . Por definición, se tiene que  $\theta(S, T) \in [0, \pi]$ , el ángulo diédrico es llamado *propio* si y solo si  $\theta(S, T) \in (0, \pi)$ . De la definición se deduce:  $\theta(S, T) \in (0, \pi)$  si y solo si  $S \neq T$  y son adyacentes.

**Definición 2.3.1.** Sean  $P$  un poliedro en  $X$ , y  $x \in P$ . Se define el ángulo sólido  $\omega$  subtendido por  $P$  en el punto  $x$ , como el número real

$$\omega = 4\pi \frac{\text{Vol}(P \cap B_r(x))}{\text{Vol}(B_r(x))},$$

donde  $r$  es menor que la distancia de  $x$  a cualquier cara de  $P$  que no lo contiene.

**Observación 2.3.1.** Por el Teorema 1.3.1,  $\omega$  no depende de  $r$ , así  $\omega$  está bien definido.

Sean  $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$  un ciclo de  $\Phi$ ,  $P_i$  el poliedro en  $\mathcal{P}$  tal que  $x_i \in P_i$  y  $\omega_i$  el ángulo sólido subtendido por  $P_i$  en  $x_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

La suma angular sólida de  $[x]$  está definida como el número real

$$\omega[x] = \sum_{i=1}^m \omega_i.$$

Si  $x$  está en el interior de algún poliedro  $P \in \mathcal{P}$ , entonces  $[x] = \{x\}$  y así  $\omega[x] = 4\pi$ . Esto debido a que  $\text{Vol}(P \cap B_r(x)) = \text{Vol}(B_r(x))$ , por ende  $w = 4\pi$ , luego  $\omega[x] = 4\pi$ .

Si  $x$  está en el interior de alguna cara  $S$  de un poliedro  $P \in \mathcal{P}$ , por lo cual  $x' = g_S(x)$  está en el interior de  $S'$ , esto es  $[x] = \{x, x'\}$  y por tanto

$$\omega[x] = \begin{cases} 2\pi & \text{si } x = x' \\ 4\pi & \text{si } x \neq x' \end{cases}.$$

Si  $x$  está en una arista de un poliedro de  $\mathcal{P}$ . Luego, todo elemento de  $[x]$  está en una arista de algún poliedro de  $\mathcal{P}$ . En tal caso,  $[x]$  se denomina *un ciclo de arista* de  $\Phi$ .

Sea  $\theta_i$  el ángulo diédrico de  $P_i$  a lo largo de la arista que contiene a  $x_i$  para cada  $i$ . La suma diédrica angular de un ciclo de arista  $[x]$  de  $\Phi$  se define como el número real

$$\theta[x] = \sum_{i=1}^m \theta_i.$$

Así que  $\omega_i = 2\theta_i$  para cada  $i$ . Por lo tanto  $\omega[x] = 2\theta[x]$ .

**Definición 2.3.2.** *Un  $G$ -emparejamiento lateral  $\Phi$  para  $\mathcal{P}$  es propio si y solo si cada ciclo de  $\Phi$  es finito y tiene suma angular sólida  $4\pi$ .*

Un emparejamiento propio tiene las siguientes propiedades.

**Teorema 2.3.1.** *Si  $G$  es subgrupo de las isometrías de  $X$  y  $\Phi$  es un  $G$ -emparejamiento lateral propio para una familia finita  $\mathcal{P}$  de poliedros conexos ajenos en  $X$ , entonces:*

- I) *La isometría  $g_S$  no fija ningún punto de  $S'$ , para cada  $S \in \mathcal{S}$ .*
- II) *Cada ciclo de arista de  $\Phi$  contiene a lo más un punto en una arista de algún poliedro en  $\mathcal{P}$ .*

La prueba de este teorema se encuentra en [Rat, pag 436]. Ahora se presentan condiciones para que un emparejamiento sea propio.

**Teorema 2.3.2.** *Sean  $G$  un grupo de isometrías de  $X$  que preservan la orientación y  $\Phi = \{g_S : S \in \mathcal{S}\}$  un  $G$ -emparejamiento lateral para una familia finita de poliedros convexos disjuntos  $\mathcal{P}$  en  $X$ . Entonces  $\Phi$  es propio si y solo si*

- (1) *Cada ciclo de  $\Phi$  es finito,*
- (2) *la isometría  $g_S$  no fija puntos de  $S'$  para cada  $S \in \mathcal{S}$  y*
- (3) *cada ciclo de arista de  $\Phi$  tiene suma diédrica angular  $2\pi$ .*

**Demostración:**

[ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $\Phi$  es propia. Entonces cualquier ciclo de  $\Phi$  es finito y tiene suma angular sólida  $4\pi$ ; por otra parte,  $g_S$  no fija puntos de  $S'$  para cada  $S \in \mathcal{S}$  por el Teorema 2.3.1. Sea  $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$  un ciclo de arista de  $\Phi$ . Como  $\omega[x] = 2\theta[x]$ , entonces  $\theta[x] = 2\pi$ . Esto es, todo ciclo de arista tiene suma diédrica angular  $2\pi$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $\Phi$  satisface (1), (2) y (3).

Entonces, por (1), todo ciclo de  $\Phi$  es finito, sea  $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$  un ciclo de  $\Phi$ . Si  $x$  está en el interior de un poliedro de  $\mathcal{P}$ , así  $\omega[x] = 4\pi$  como consecuencia de (2). Ahora, si  $x$  está en el interior de una arista de un poliedro de  $\mathcal{P}$ , se tiene que  $[x]$  es un ciclo de arista y, por (3),  $\omega[x] = 2\theta[x] = 4\pi$ .

Por otro lado, si  $x$  es un vértice de un poliedro de  $\mathcal{P}$ , se tiene que  $x_i$  es un vértice de un poliedro  $P_i \in \mathcal{P}$  para cada  $i$ . Sea  $r \in \mathbb{R}_+$  menor que la mitad de la distancia de  $x_i$  a  $x_j$  para cada  $i \neq j$  y de  $x_i$  a cualquier lado de  $P_i$  que no contiene a  $x_i$  para cada  $i$ . Entonces para cada  $i$ , el conjunto  $P_i \cap S_r(x_i)$  es un polígono en la esfera  $S_r(x_i)$  y los polígonos  $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$  son disjuntos. Ahora el emparejamiento lateral  $\Phi$  se restringe a un emparejamiento lateral propio de los polígonos  $\{P_i \cap S_r(x_i)\}$ . Sea  $\Sigma$  el espacio obtenido al pegar dichos polígonos, tiene una estructura esférica orientable por el Teorema 9.2.3. de [Rat, pag 389], entonces  $\Sigma$  es una 2-esfera, dado que es compacto y conexo.

Por lo cual  $\omega[x] = 4\pi$ , así  $\Phi$  es propia. ■

### 2.3.1 Completez de 3-variedades pegadas

Sea  $\mathcal{P}$  una familia finita de poliedros convexos en  $\mathbb{H}^3$ , disjuntos, de volumen finito tal que cada poliedro en  $\mathcal{P}$  tiene un número finito de caras. Si  $M$  una 3 variedad hiperbólica obtenida mediante el pegado de  $\mathcal{P}$  mediante un  $I(\mathbb{H}^3)$ -emparejamiento lateral propio  $\Phi$ , ¿cuándo  $M$  es completa?

En esta sección se trabaja con el modelo conforme de la bola  $B^3$ . Entonces cada poliedro tiene solo un número finito de vértices ideales sobre la esfera  $S^2$  en el infinito. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que no hay dos poliedros en  $\mathcal{P}$  compartiendo un vértice ideal. Así, el emparejamiento lateral  $\Phi$  de los lados  $\mathcal{S}$  de los poliedros en  $\mathcal{P}$ , se extiende a un emparejamiento de los vértices ideales de los poliedros en  $\mathcal{P}$ , el cual, a su vez, genera una relación de equivalencia en el conjunto de todos los vértices ideales de los poliedros en  $\mathcal{P}$ . Las clases son llamadas *ciclos*. Los ciclos que contienen un vértice ideal  $v$  son denotados por  $[v]$ . Un ciclo de vértices ideales es llamado un *punto cúspide* de la variedad  $M$ . Recordemos que una horobola es el límite de una sucesión de bolas crecientes en  $\mathbb{H}^n$ , que comparten (de un lado) un plano hipertangente y su punto de tangencia, además su frontera recibe el nombre de horoesfera.

**Definición 2.3.3.** Sean  $v$  un vértice ideal de un poliedro  $P_v \in \mathcal{P}$  y  $\Sigma_v$  una horoesfera con base en  $v$  la cual pasa solo por las caras de  $\mathcal{S}$  que inciden en  $v$ . La aureola del vértice ideal  $v$  se define como el conjunto  $L(v) := P_v \cap \Sigma_v$ . El conjunto  $\{S \cap \Sigma_v : S \in \mathcal{S}\}$  se llama el conjunto de las caras de  $L(v)$ .

Dos caras de la aureola,  $S \cap \Sigma_v$  y  $T \cap \Sigma_v$ , son adyacentes si

$$\theta(S \cap \Sigma_v, T \cap \Sigma_v) = \theta(S, T).$$

Se observa que  $L(v)$  es un polígono Euclidiano compacto en la horoesfera  $\Sigma_v$ , con respecto a la métrica Euclidiana natural de  $\Sigma_v$ , cuyo tipo de similitud no depende de la elección de la horoesfera  $\Sigma_v$ . Para cada ciclo  $[v]$  del vértice ideal, asumimos que las horoesferas  $\{\Sigma_u : u \in [v]\}$  han sido escogidas de tal manera que las aureolas  $\{L(u) : u \in [v]\}$  son disjuntos. Mostremos que  $\Phi$  determina un  $S(E^2)$ -emparejamiento lateral de los polígonos  $\{L(u) : u \in [v]\}$ .

Sea  $g_S \in \Phi$  y sean  $u, u' \in [v]$  tales que  $g_S(u') = u$ . Entonces  $\Sigma_{u'} \cap S'$  es un lado de  $L(u')$  y  $\Sigma_u \cap S$  es un lado de  $L(u)$ . Ahora considérese  $\bar{g}_S : \Sigma_{u'} \rightarrow g_S(\Sigma_{u'})$  la restricción de  $g_S$ . Luego  $\bar{g}_S$  es una isometría con respecto a la métrica Euclidiana natural de las horoesferas  $\Sigma_{u'}$  y  $g_S(\Sigma_{u'})$ . Observamos que el segmento de línea

$$g_S(\Sigma_{u'} \cap S') = g_S(\Sigma_{u'}) \cap S',$$

es paralelo al segmento de línea  $\Sigma_u \cap S$  porque  $g_S(\Sigma_{u'})$  y  $\Sigma_u$  son concéntricos.

Sea

$$p_S : g_S(\Sigma_{u'}) \rightarrow \Sigma_u,$$

la proyección radial de  $g_S(\Sigma_{u'})$  en  $\Sigma_u$ . De aquí se sigue que  $p_S$  es un cambio de escala con respecto a la métrica Euclidiana natural  $g_S(\Sigma_{u'})$  y  $\Sigma_u$ . Definimos

$$h_S : \Sigma_{u'} \rightarrow \Sigma_u,$$

como  $h_S = p_S \bar{g}_S$ . Así  $h_S$  es una similitud con respecto a la métrica Euclidiana natural de las horoesferas  $\Sigma_{u'}$  y  $\Sigma_u$ ; más aún,  $h_S$  envía el lado  $\Sigma_{u'} \cap S'$  sobre el lado  $\Sigma_u \cap S$ . Claramente  $\{h_S\}$  es un  $S(E^2)$ -emparejamiento lateral propio de los polígonos  $\{L(v)\}$ . Aquí  $S$  se extiende sobre todos los lados de  $\mathcal{S}$  que inciden con el ciclo  $[v]$ . Se supondrá que las horoesferas  $\{\Sigma_u\}$  se han elegido de forma que  $p_S = 1$  para el mayor número posible de lados  $S$ .

Sea  $L[v]$  el espacio obtenido por el pegado de los polígonos  $\{L(u)\}$  mediante  $\{h_S\}$ . La superficie<sup>‡</sup>  $L[v]$  es llamada *aureola* del punto cúspide  $[v]$  de la 3-variedad hiperbólica  $M$  obtenida mediante pegado de los poliedros en  $\mathcal{P}$  por  $\Phi$ .

Ahora, para describir la topología de  $L[v]$  se tienen los siguientes resultados.

---

<sup>‡</sup>Por el Teorema 9.2.3 en [Rat],  $L[v]$  es similar a una superficie Euclidiana

**Teorema 2.3.3.** *La aureola  $L[v]$  de un punto cúspide  $[v]$  de  $M$  es un toro o bien una botella de Klein; más aún, si cada elemento de  $\Phi$  conserva la orientación, entonces  $L[v]$  es un toro.*

**Demostración:**

Por construcción  $L[v]$  es una superficie cerrada. Suponga que todos los polígonos  $\{L(u)\}$  son triángulos (subdividir los polígonos, si es necesario,). Sean  $p$ ,  $e$ ,  $t$  el número de vértices, aristas y triángulos, respectivamente. Así  $3t = 2e$ , pues por cada triángulo hay 3 aristas y por cada arista hay 2 triángulos. Ahora, por un lado la suma de todos los ángulos de los triángulos es  $\pi t$  y por otro lado es  $2\pi p$ . De aquí  $t = 2p$ . Por lo tanto

$$\chi(L[v]) = p + t - e = \frac{1}{2}t + t - \frac{3}{2}t = 0.$$

Por lo cual  $L[v]$  es una botella de Klein o bien un toro. Más aún, si cada elemento de  $\Phi$  conserva la orientación, entonces cada elemento de  $\{h_S\}$  también conserva la orientación, por ende  $L[v]$  es orientable, por tanto  $L[v]$  es un toro, puesto que la botella de Klein no es orientable. ■

Ahora, la completez de la aureola  $L[v]$  de un punto cúspide, tiene estrecha relación con el emparejamiento de las aureolas  $\{L(v)\}$ . Esto se plasma en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.4.** *La aureola  $L[v]$  de un punto cúspide  $[v]$  de  $M$  es completo si y solo si las aureolas  $\{L(u)\}$  de los vértices ideales en  $[v]$  pueden escogerse de tal manera que  $\Phi$  se restringe a un emparejamiento lateral para  $\{L(u)\}$ .*

**Demostración:**

[ $\Rightarrow$ ] Sea  $\mathfrak{G}$  la gráfica abstracta donde los vértices son los elementos de  $[v]$  y las aristas son los conjuntos  $\{u, u'\}$  para los cuales existe  $g_S \in \Phi$  tal que  $g_S(u') = u$ . Entonces  $\mathfrak{G}$  es conexo. Sea  $\mathfrak{H}$  la subgráfica de  $\mathfrak{G}$  cuyos vértices son los de  $\mathfrak{G}$  y las aristas son los conjuntos  $\{u, u'\}$  para los cuales existe  $g_S \in \Phi$  tal que  $g_S(u') = u$  y  $p_S = 1$ .

Probaremos que  $\mathfrak{H}$  es conexo. Por contradicción, supongamos que  $\mathfrak{H}$  no es conexo.

Entonces existe un vértice  $\{u, u'\}$  de  $\mathfrak{G}$  que une dos componentes de  $\mathfrak{H}$ . Reeligiendo todas las horoesferas correspondientes a estas componentes por un cambio de escala uniforme, para tener horoesferas disjuntas y definir un emparejamiento, se puede agregar  $\{u, u'\}$  a  $\mathfrak{H}$ . Sin embargo, se asumió en la elección original de las horoesferas que  $\mathfrak{H}$  tiene el mayor número posible de aristas. Así  $\mathfrak{H}$  debe ser conexo.

Ahora como  $L[v]$  es completo, la  $(E^2, S(E^2))$ -estructura de  $L[v]$  contiene una  $(E^2, I(E^2))$ -estructura, más aún, dado que  $\mathfrak{H}$  es conexo, se puede escoger la escala de

$(E^2, I(E^2))$ –estructura sobre  $L[v]$  tal que la inyección natural de  $L(u)^\circ$  en  $L[v]$  es una isometría local para cada  $u \in [v]$ . Sea  $g_S \in \Phi$  tal que  $g_S(u') = u$ , entonces la restricción de  $h_S$  al interior de el lado  $\Sigma_{u'} \cap S'$  de  $L(u')$  es una isometría local. De esta manera,  $h_S$  es una isometría, por tanto  $p_S = 1$ . Esto es,  $\Phi$  se restringe a un emparejamiento lateral para  $\{L(u)\}$ .

[ $\Leftarrow$ ] Como  $\Phi$  se restringe a un emparejamiento lateral para  $\{L(u)\}$ ,  $h_S = \bar{g}_S$  para cada  $S$ , así  $\{h_S\}$  es un  $I(E^2)$ –emparejamiento lateral para  $\{L(u)\}$ . Ya que  $L[v]$  es compacto, la  $(E^2, I(E^2))$ –estructura sobre  $L[v]$  determinada por  $\{h_S\}$  es completa (por el Teorema 8.5.7 de [Rat]). Entonces  $L[v]$  es una  $(E^2, I(E^2))$ –superficie completa (por el Teorema 8.5.8 de [Rat]). ■

La completéz de una variedad obtenida mediante pegado de poliedros esta determinada por la completéz de sus cúspides, esto se ve reflejado en los siguientes teoremas.

**Teorema 2.3.5.** *Si la aureola  $L[v]$  de un punto cúspide  $[v]$  de  $M$  es completo, entonces existe una isometría inyectiva local*

$$\iota : B(v)/\Gamma_v \longrightarrow M,$$

*compatible con la proyección de  $P_v$  a  $M$ .*

**Teorema 2.3.6.** *Sea  $M$  una 3-variedad obtenida mediante el pegado de una familia finita  $\mathcal{P}$  de poliedros, convexos, disjuntos y de un número finito de lados en  $\mathbb{H}^3$  de volumen finito; pegados por un  $I(\mathbb{H}^3)$ –emparejamiento lateral  $\Phi$ . Entonces  $M$  es completo si y solo si  $L[v]$  es completo para cada punto cúspide  $[v]$  de  $M$ .*

Las demostraciones de estos dos últimos teoremas las encontramos en [Rat].

## Capítulo 3

# 3-Variedades hiperbólicas de volumen finito

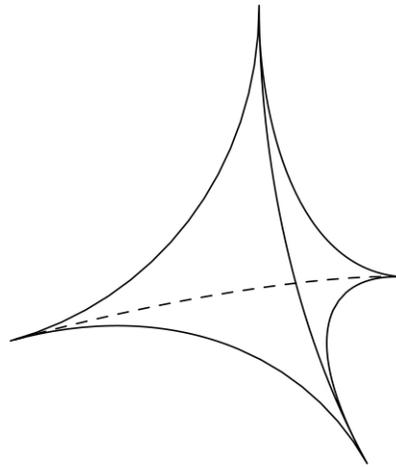


Figura 3.1: Un tetraedro regular ideal en  $B^3$

En este capítulo, se construirán algunos ejemplos de 3-variedades hiperbólicas abiertas, completas y de volumen finito, las cuales se obtienen al pegar poliedros regulares ideales en  $\mathbb{H}^3$ .

Una bandera para un poliedro  $P$ , es una terna  $(F_0, F_1, F_2)$  tal que  $F_i$  es una cara de  $F_{i+1}$  para cada  $i \in \{0, 1\}$  y  $F_2$  es una cara del poliedro  $P$ .

**Definición 3.0.1.** *Un poliedro en  $X$  es regular si el grupo de isometrías de  $X$  actúa transitivamente sobre el conjunto de sus banderas y  $P$  es ideal si sus vértices son puntos ideales, es decir, puntos al infinito.*

### 3.1 Función de Lobachevsky

Ahora, para calcular el volumen hiperbólico de las estructuras hiperbólicas con cierta facilidad, se requiere de la función de Lobachevsky  $\Lambda(\theta)$ , la cual está definida como sigue:

$$\Lambda(\theta) := - \int_0^\theta \log|2 \operatorname{sen} t| dt, \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}.$$

Esta función tiene varios nombres y maneras de definirla. Por ejemplo, la función de Clausen,  $Cl_2(\iota)$ , la cual está definida por una fórmula similar:

$$Cl_2(\iota) := - \int_0^\iota \log \left| 2 \operatorname{sen} \left( \frac{t}{2} \right) \right| ds \quad \text{para } \iota \in [0, \infty).$$

Mediante el cambio de variable  $\iota = 2\theta$  se obtiene la siguiente igualdad:

$$Cl_2(2\theta) = \Lambda(\theta).$$

Si  $\theta \in (0, \pi)$ , se sigue:

$$\log(1 - e^{2i\theta}) = \log(2 \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{arg} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.1)$$

Esto es gracias a que:

$$\begin{aligned} 1 - e^{2i\theta} &= 1 - \cos(2\theta) - i \operatorname{sen}(2\theta) \\ &= 2 \operatorname{sen}^2 \theta (\operatorname{sen}(\theta) - i \cos \theta) \\ &= 2 \operatorname{sen}(\theta) \left( \cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

y usando que  $\log(\nu\iota) = \log \nu + \log \iota$ , se llega a 3.1.

Ahora veamos propiedades de la función de Lobachevsky.

**Teorema 3.1.1.** *La función de Lobachevsky,  $\Lambda$ , está definida para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , es continua y periódica. Más aún, para todo  $\theta \in [0, \infty)$  se satisface lo siguiente:*

1.  $\Lambda(\theta + \pi) = \Lambda(\theta)$ ,
2.  $\Lambda(-\theta) = -\Lambda(\theta)$ .

La prueba de este teorema se encuentra en [Rat, pag 468].

**Teorema 3.1.2.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función de Lobachevsky satisface*

$$\Lambda(n\theta) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda \left( \theta + \frac{j\pi}{n} \right).$$

**Demostración:** Como

$$z^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} \left( z - e^{i2\pi j/n} \right),$$

al evaluar en  $z = e^{i2t}$  se obtiene

$$e^{i2nt} - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} e^{i2t} \left( 1 - e^{-i2t - i2\pi j/n} \right),$$

luego por 3.1 se sigue

$$\|1 - e^{2i\theta}\| = \|2\text{sen } \theta\|.$$

Por lo tanto:

$$|2\text{sen } nt| = \prod_{j=0}^{n-1} \left| 2\text{sen} \left( t + \frac{t + j\pi}{n} \right) \right|.$$

De donde se sigue:

$$\int_0^\theta \log|2\text{sen}(nt)| dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\theta \left| 2\text{sen} \left( t + \frac{t + j\pi}{n} \right) \right| dt.$$

Haciendo cambios de variables se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \log|2\text{sen}(nt)| dt &= \frac{1}{n} \int_0^{n\theta} \log|2\text{sen}(s)| ds \quad \text{y} \\ \int_0^\theta \left| 2\text{sen} \left( t + \frac{t + j\pi}{n} \right) \right| dt &= \int_{t+\frac{t+j\pi}{n}}^{\theta+t+\frac{t+j\pi}{n}} |2\text{sen}(s)| ds. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{n} \Lambda(n\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda \left( \theta + \frac{j\pi}{n} - \sum_{j=0}^{n-1} \right) \Lambda \left( \frac{j\pi}{n} \right).$$

Por el Teorema 3.1.1 se sigue:  $\Lambda \left( \frac{(n-j)\pi}{n} \right) = \Lambda \left( -\frac{j\pi}{n} \right) = -\Lambda \left( \frac{j\pi}{n} \right)$ . Así,  $\sum_{j=0}^{n-1} \Lambda \left( \frac{j\pi}{n} \right) = 0$ .

Concluyendo que

$$\Lambda(n\theta) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda \left( \theta + \frac{j\pi}{n} \right).$$

■

**Nota:** Dada la definición de la función de Lobachevsky, esta es diferenciable, con primera y segunda derivada como sigue:

$$\frac{d\Lambda(\theta)}{d\theta} = -\log|2\text{sen } \theta| \quad \text{y} \quad \frac{d^2\Lambda(\theta)}{d\theta^2} = -\cot \theta.$$

Así  $\Lambda$  tiene un valor mínimo en  $\frac{\pi}{6}$  y un máximo en  $\frac{5\pi}{6}$ .

## 3.2 Volumen hiperbólico (segunda parte)

Con la función de Lobachevsky, podemos proseguir a calcular el volumen de variedades obtenidas del pegado de poliedros ideales de  $\mathbb{H}^3$ , evitando el cálculo de la integral dada en la Definición 1.3.2.

### 3.2.1 Ortotetraedro

Un ortotetraedro  $T \in \mathbb{H}^3$ , con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  es un tetraedro en  $\mathbb{H}^3$  con sus tres ángulos diédricos rectos y sus cuatro caras pueden ser ordenadas como  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , tales que

$$\theta(S_1, S_2) = \alpha, \theta(S_2, S_3) = \beta, \theta(S_3, S_4) = \gamma.$$

Nombrar  $u_i$  al vértice de  $T$  opuesto a la cara  $S_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , como en la Figura 3.2.

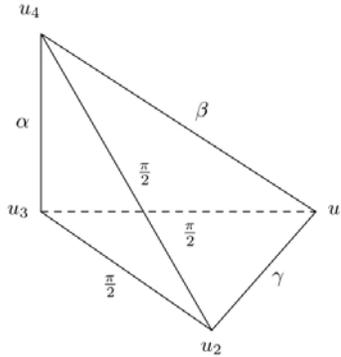


Figura 3.2: Ortotetraedro  $T$  en  $B^3$  con vértice  $u_3$  en el origen

Las cuatro caras de un tetraedro  $T$  son triángulos rectángulos con ángulos rectos en los vértices  $u_2$  y  $u_3$ . Así, los vértices  $u_2$  y  $u_3$  de  $T$  no son ideales. Se observa que  $\alpha$  es el ángulo de  $S_4$  en  $u_3$  y  $\gamma$  el de  $S_1$  en  $u_2$ . Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son estrictamente menores que  $\frac{\pi}{2}$ . Considerando la aureola de  $u_1$  en  $T$ , se observa que  $\beta + \gamma \geq \frac{\pi}{2}$ ; la suma es igual a  $\frac{\pi}{2}$  si y solo si  $u_1$  es ideal. Análogamente,  $\beta + \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ ; la suma es igual a  $\frac{\pi}{2}$  si y solo si  $u_4$  es ideal.

Thurston (ver [Thu2, pags: 161-162]) demuestra que si  $T$  es un ortotetraedro, con ángulos diédricos  $\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \gamma$  tiene volumen

$$Vol(T) = \frac{1}{4} \left[ \Lambda(\alpha + \gamma) + \Lambda(\alpha - \gamma) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right].$$

Con este resultado tenemos el siguiente corolario, tomando a  $\gamma = \alpha$ .

**Corolario 3.2.1.** *Sea  $T$  es un ortotetraedro, con ángulos diédricos  $\alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\alpha$ , entonces el volumen de  $T$  es*

$$\text{Vol}(T) = \frac{1}{2}\Lambda(\alpha).$$

### 3.2.2 Tetraedros ideales

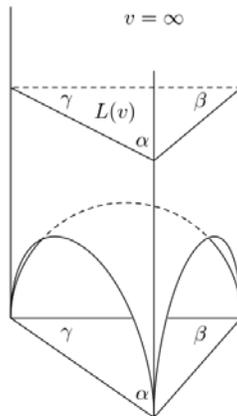


Figura 3.3: Un tetraedro ideal en  $U^3$

Recordemos que, si  $T$  es un tetraedro y  $v$  un vértice ideal de  $T$  entonces la aureola de  $v$  en  $T$ , se obtiene como la intersección de una horoesfera  $\Sigma_v$ , que no intersecciona a las caras de  $T$  que no contienen a  $v$ , con  $T$  y denotado por  $L(v) = \Sigma_v \cap T$ . La aureola  $L(v)$  es un triángulo Euclidiano, además la clase de similitud que preservan la orientación de  $L(v)$  no depende de la elección de  $\Sigma_v$ . Lo que se observa en los siguientes teoremas.

**Teorema 3.2.1.** *Las clases de similitud (que preservan la orientación) de la aureola  $L(v)$  de un vértice ideal de un tetraedro  $T$  en  $\mathbb{H}^3$  determinan a  $T$  salvo congruencias (que preservan la orientación).*

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $T$  un tetraedro ideal en  $\mathbb{H}^3$ . Entonces  $T$  está determinado, salvo congruencias, por los tres ángulos diédricos  $\alpha, \beta, \gamma$  de las aristas de  $T$  que inciden en un vértice de  $T$ . Más aún,  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  y los ángulos diédricos de las aristas opuestas de  $T$  son iguales. Además, si  $\alpha, \beta, \gamma$  son números reales positivos tales que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , entonces hay un tetraedro ideal en el  $\mathbb{H}^3$  cuyos ángulos diédricos son  $\alpha, \beta, \gamma$ .*

Las demostraciones de estos dos teoremas, se pueden encontrar en [Rat].

Con estos dos teoremas, obtenemos el volumen de un tetraedro ideal mediante la función de Lobachevsky. Denotaremos por  $T_{\alpha, \beta, \gamma}$  al tetraedro ideal con ángulos diédricos  $\alpha, \beta, \gamma$ .

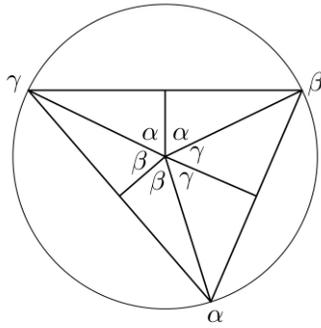


Figura 3.4: El origen está en el interior de  $\Delta$

**Teorema 3.2.3.** Sea  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$  un tetraedro ideal en  $U^3$ . Entonces el volumen de  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$  es

$$\text{Vol}(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma).$$

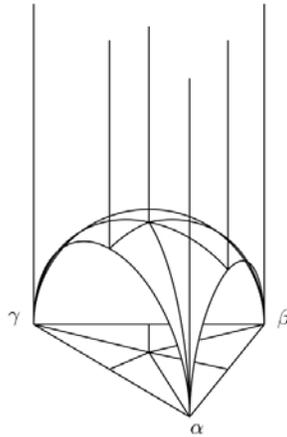


Figura 3.5: División de  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$

**Demostración:** Suponer, sin pérdida de generalidad, que uno de los vértices de  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$  está en  $\infty$  y que los que restan están sobre la esfera unitaria. Así, la proyección de  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$  a  $E^2$  es un triángulo Euclidiano  $\Delta$  con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  y vértices sobre el círculo unitario.

Se tienen los siguientes casos:

1. El origen está en el interior de  $\Delta$
2. El origen está sobre una arista de  $\Delta$
3. El origen está en el exterior de  $\Delta$ .

**Caso 1)** Uniendo los puntos medios de cada arista y los vértices de  $\triangle$  con el origen mediante segmentos (Figura 3.4), se obtiene una división de  $\triangle$ , la cual lo separa en seis triángulos rectángulos. Observemos que las parejas de triángulos que comparten un lado perpendicular de  $\triangle$  son congruentes. Los ángulos inscritos en un círculo miden la mitad de la longitud del arco que determinan, así los ángulos internos están definidos como en la Figura 3.4. Haciendo tomando la imagen inversa de la proyección de esta subdivisión de  $\triangle$  se genera una subdivisión sobre  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$  por seis ortotetraedros, cada uno posee dos vértices ideales (Figura 3.5). Así, del Corolario 3.2.1 se sigue

$$\text{Vol}(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = 2 \left[ \frac{1}{2}\Lambda(\alpha) + \frac{1}{2}\Lambda(\beta) + \frac{1}{2}\Lambda(\gamma) \right].$$

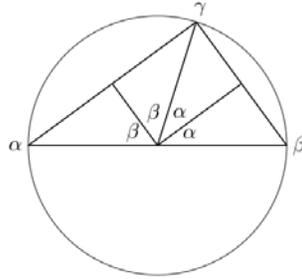


Figura 3.6: El origen está sobre una arista de  $\triangle$

**Caso 2)** Para este caso,  $\triangle$  está inscrito en un semicírculo, entonces uno de los ángulos es recto, digamos  $\gamma$ . Uniendo los puntos medios de cada arista y los vértices de  $\triangle$  con el origen, mediante segmentos (ver Figura 3.6); esta división de  $\triangle$  lo separa en cuatro triángulos rectángulos. Observemos que las parejas de triángulos que comparten un lado perpendicular de  $\triangle$ , son congruentes. Los ángulos inscritos en un círculo miden la mitad de la longitud del arco que determinan, así, por un argumento similar al *Caso 1)* y el Corolario 3.2.1

$$\text{Vol}(T_{\alpha,\beta,\pi/2}) = 2 \left[ \frac{1}{2}\Lambda(\alpha) + \frac{1}{2}\Lambda(\beta) + \frac{1}{2}\Lambda(\gamma) \right].$$

**Caso 3)** Por un argumento análogo (ver Figura 3.7), tomando en cuenta que aquí debemos restar las áreas de los ortotetraedros que se generan demás, así se obtiene que para este caso

$$\text{Vol}(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = 2 \left[ \frac{1}{2}\Lambda(\alpha) + \frac{1}{2}\Lambda(\beta) + \frac{1}{2}\Lambda(\gamma) \right].$$

■

**Teorema 3.2.4.** *Un tetraedro de volumen máximo en  $\mathbb{H}^3$  es un tetraedro regular ideal.*

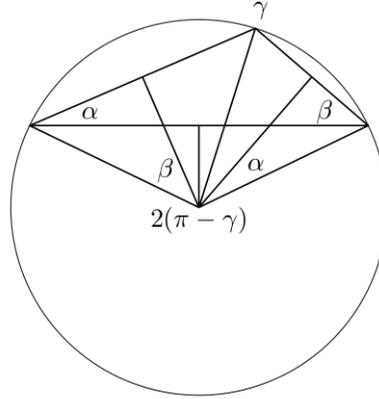


Figura 3.7: El origen esta en el exterior de  $\Delta$ .

**Demostración:** Observemos que cualquier tetraedro de  $\mathbb{H}^3$  está contenido en un tetraedro ideal, solo basta enviar sus vértices a puntos ideales. Así, es suficiente considerar únicamente tetraedros ideales. Por el Teorema 3.2.3, se necesita maximizar la función

$$\mathfrak{V}(\alpha, \beta, \gamma) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma),$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son reales no negativos y  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Por definición  $\mathfrak{V}$  resulta ser continua y diferenciable, además  $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \mid \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$  es un conjunto cerrado y acotado, por tanto compacto, entonces  $\mathfrak{V}$  alcanza un máximo en dicho conjunto. Ahora,  $\mathfrak{V}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  siempre que  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  sean cero, debido al Teorema 3.1.1. Entonces para que  $\mathfrak{V}$  alcance su máximo  $\alpha, \beta, \gamma$  deben ser mayores a cero. Definiendo la función  $f$  como  $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$ , por el Teorema de los Multiplicadores De Lagrange ([Mar, Teorema 8 pag 265.]), existe un escalar  $\lambda$  tal que

$$\nabla(V) = \lambda \nabla(f),$$

en cualquier punto máximo  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ .

Entonces  $\Lambda'(\alpha_0) = \Lambda'(\beta_0) = \Lambda'(\gamma_0)$ . Luego,

$$\text{sen } \alpha_0 = \text{sen } \beta_0 = \text{sen } \gamma_0. \quad (3.2)$$

Como  $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \pi$ , para que cumplan 3.2 solo les queda ser todos iguales a  $\frac{\pi}{3}$ .

Por lo tanto cualquier tetraedro ideal de volumen máximo es regular. ■

Sea  $P$  el poliedro en  $U^3$  obtenido al tomar el cono de  $\infty$  a un  $n$ -ágono ideal que está sobre el

hemisferio de una esfera Euclidiana que esta en  $U^3$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  los ángulos diédricos de  $P$  entre las caras verticales y el  $n$ -ágono (la base). Este poliedro ideal se denotará por  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ .

**Teorema 3.2.5.** *El poliedro  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  tiene las siguientes propiedades:*

1.  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \pi$ .
2.  $Vol(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \sum_{i=1}^n \Lambda(\alpha_i)$ .

**Demostración:** Se procede por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 3$ , se sigue de los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3. Ahora suponga que 1. y 2. son válidos para  $n - 1$ .

Dividiendo el  $n$ -ágono, que es base de  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ , en un  $(n-1)$ -ágono y un triángulo, el poliedro  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  se puede subdividir en la unión de los poliedros  $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta}$  y  $P_{\alpha_{n-1}, \alpha_n, \pi - \beta}$ . Por hipótesis de inducción, se sigue que:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \beta = \pi,$$

$$\alpha_{n-1} + \alpha_n + (\pi - \beta) = \pi.$$

Por lo que

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \beta + \alpha_{n-1} + \alpha_n + (\pi - \beta) = 2\pi.$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \pi.$$

Nuevamente por hipótesis de inducción

$$Vol(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta}) = \sum_{i=1}^{n-2} \Lambda(\alpha_i) + \Lambda(\beta).$$

$$Vol(P_{\alpha_{n-1}, \alpha_n, \pi - \beta}) = \Lambda(\alpha_{n-1}) + \Lambda(\alpha_n) + \Lambda(\pi - \beta).$$

Como  $\Lambda(\pi - \beta) = \Lambda(-\beta) = -\Lambda(\beta)$ , sumando las expresiones anteriores se tiene  $Vol(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \sum_{i=1}^n \Lambda(\alpha_i)$ . ■

A continuación dotaremos de estructura hiperbólica a el complemento del nudo ocho, el complemento del Enlace de Whitehead y el complemento de los anillos Borromeanos.

### 3.3 El complemento del nudo ocho

Sea  $\mathcal{T}$  una tetraedro regular ideal (ver figure 3.1) en  $B^3$  (modelo conforme de la bola). Dado que el grupo de simetrías actúa transitivamente sobre sus aristas, todos los ángulos diédricos de  $\mathcal{T}$  son

los mismos. La aureola de cada vértice ideal de  $\mathcal{T}$  es un triángulo Euclidiano equilátero, y todos los ángulos diédricos de  $\mathcal{T}$  son de  $\frac{\pi}{3}$ .

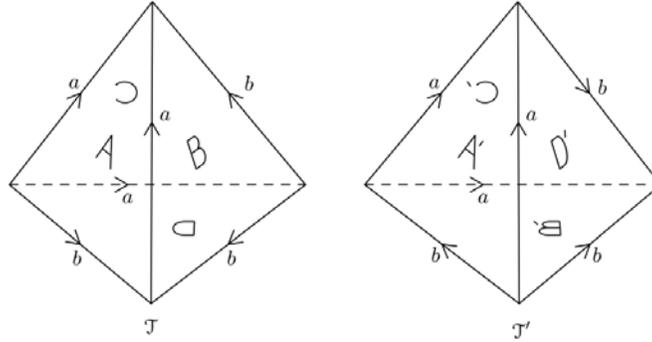


Figura 3.8: Patrón de pegado del complemento del nudo 8.

Sean  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  tetraedros regulares ideales ajenos en  $B^3$ . Etiquetemos sus caras y aristas como en la Figura 3.8. Como una transformación de Möbius de  $B^3$  es determinada por la acción sobre los cuatro vértices de  $\mathcal{T}$ , el grupo de simetrías de  $\mathcal{T}$  corresponde al grupo de permutaciones de los vértices de  $\mathcal{T}$ . Así, existe una única isometría  $f_S$  que invierte la orientación de  $B^3$  tal que envía a  $\mathcal{T}'$  a  $\mathcal{T}$  y la cara  $S'$  sobre la cara  $S$  de manera que se conserva el patrón de pegado entre  $S'$  y  $S$  en la Figura 3.8, para  $S \in \{A, B, C, D\}$ .

Sea  $g_S$  la composición de  $f_S$  seguida de la reflexión sobre la cara  $S$ . Entonces  $g_A, g_B, g_C, g_D$ , y sus inversas forman un  $I_0(B^3)$ -emparejamiento lateral  $\Phi$  para  $\{\mathcal{T}, \mathcal{T}'\}$ . Existen seis puntos en cada ciclo arista de  $\Phi$ . Por lo tanto, la suma angular diédrica de cada ciclo arista de  $\Phi$  es  $2\pi$ . Entonces  $\Phi$  es un emparejamiento lateral propio.

Sea  $M$  el espacio obtenido al pegar  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  mediante  $\Phi$ , entonces  $M$  es una 3-variedad hiperbólica orientable, por el Teorema 2.2.1. La aureola del punto cúspide de  $M$  es un toro, por el Teorema 2.3.3. Esto puede verse en la Figura 3.9.

Ahora escogemos horoesferas basadas en el vértice ideal de  $\mathcal{T}'$  que son invariantes bajo el grupo de simetrías de  $\mathcal{T}'$ , entonces las isometrías  $f_A, f_B, f_C, f_D$  mapearán esas horoesferas a horoesferas basadas en el vértice ideal de  $\mathcal{T}$  que son invariantes bajo el grupo de isometrías de  $\mathcal{T}$ . Así, la aureola del punto cúspide de  $M$ , es completo por el Teorema 2.3.4. Luego,  $M$  tiene una cúspide por el Teorema 2.3.5. Finalmente,  $M$  es completa por el Teorema 2.3.6.

Sea  $\mathcal{K}$  el nudo ocho en  $E^3$ , que se muestra en la Figura 3.10. Mostremos que  $M$  es homeomorfo

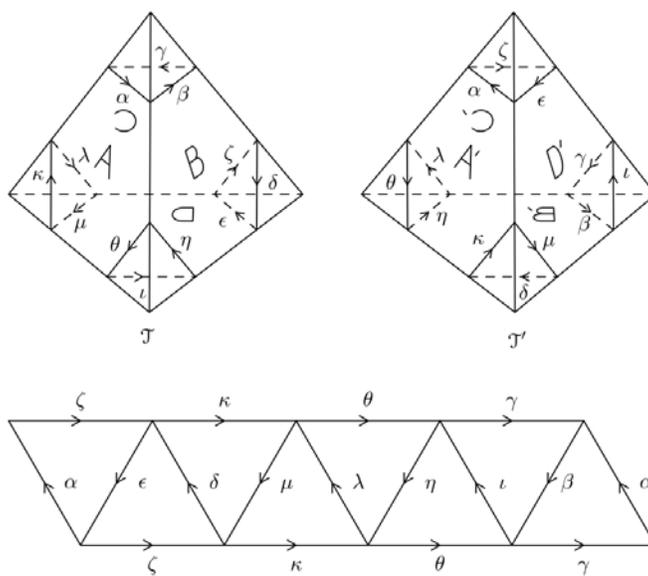


Figura 3.9: La aureola del punto cúspide del complemento del nudo 8.

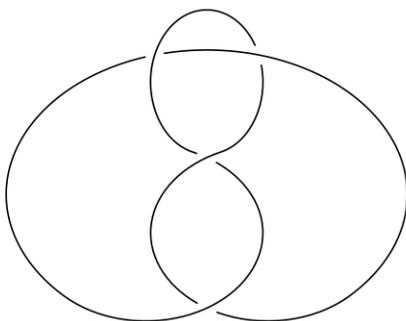


Figura 3.10: El nudo 8.

a  $\hat{E}^3 - \mathcal{K}$ . Cubrir\* el tetraedro  $\mathcal{T}$  con el nudo ocho y agregar arcos dirigidos  $a$  y  $b$  sobre  $\mathcal{K}$  como en la Figura 3.11, esos arcos corresponden a las dos aristas  $a$ ,  $b$  de  $M$ .

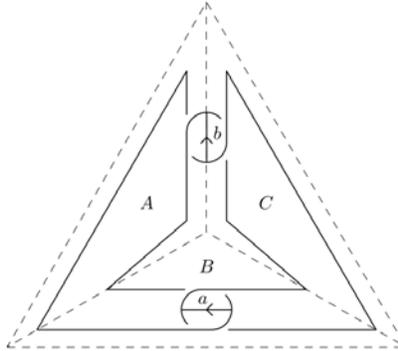


Figura 3.11: El nudo ocho cubriendo el tetraedro  $\mathcal{T}$

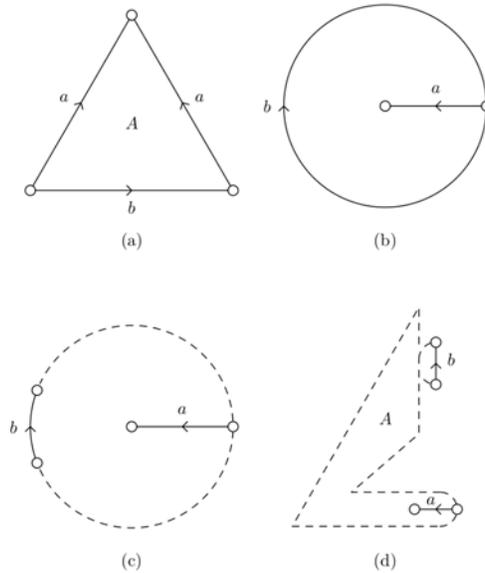


Figura 3.12: La cara  $A$  deformado en un 2-celda del complejo  $L$ .

Ahora, el patrón de pegado de la frontera de la cara  $A$  es como en la Figura 3.12 (a). El espacio cociente resultante es homeomorfo a un disco cerrado con 2 puntos removidos, como en la Figura 3.12 (b). Este espacio cociente es homeomorfo a un disco con un punto interior y parte de su frontera removidos, como en las figuras 3.12 (c) y 3.12 (d). Notemos que el disco (d) tiene en el lado derecho un medio giro junto al arco dirigido  $b$ . El disco (d) se extiende por la parte de  $\mathcal{K}$  que sigue el contorno de la cara  $A$  en la Figura 3.11.

\*Una analogía de como se cubre el poliedro es: si este fuera una mesa, el nudo es un mantel.

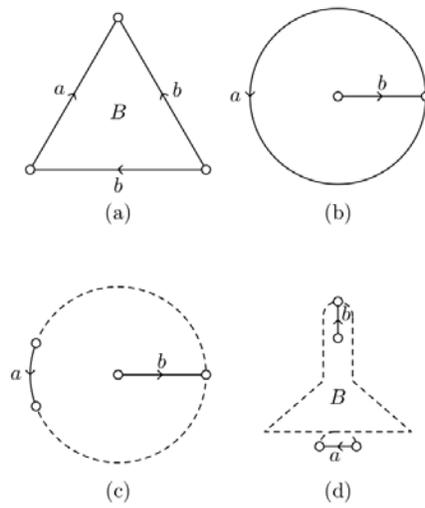


Figura 3.13: La cara  $B$  deformado en un 2-celda del complejo  $L$ .

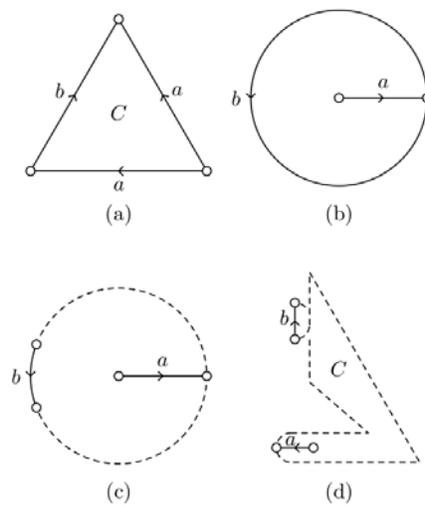


Figura 3.14: La cara  $C$  deformado en un 2-celda del complejo  $L$ .

Observemos que el nudo pasa por el punto faltante del interior del disco (d). De manera análoga para las caras  $B$ ,  $C$  y  $D$ , como se observa en las figuras 3.13, 3.14 y 3.15.

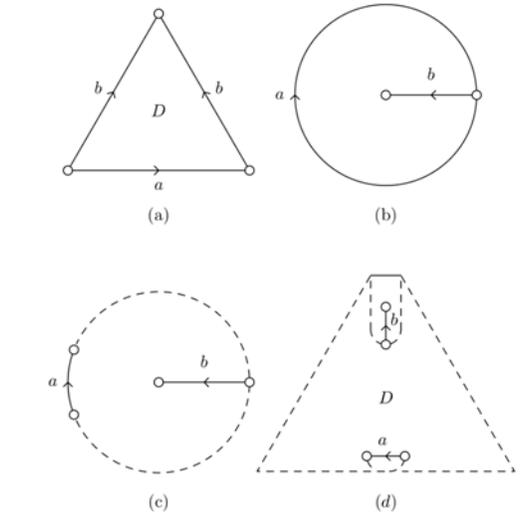


Figura 3.15: La cara  $D$  deformado en un 2-celda del complejo  $L$ .

Estos cuatro discos junto con  $\mathcal{K}$  forman un 2-complejo  $L$  cuyo 1-esqueleto es la unión de  $\mathcal{K}$  y los arcos  $a, b$ . Sea  $\mathcal{M}$  la imagen de  $\partial\mathcal{T}$  en  $M$ . Por la compatibilidad del pegado, se tiene que  $\mathcal{M}$  es homeomorfo a  $L - \mathcal{K}$ .

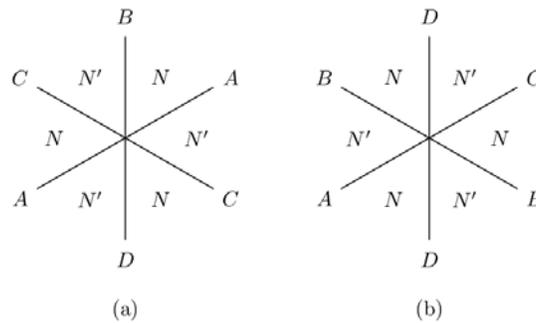


Figura 3.16: Las secciones transversales perpendiculares a la arcos  $a$  y  $b$  apuntando hacia abajo.

Cada uno de los arcos  $a, b$  se encuentra con las cuatro 2-celdas de  $L$ . Colapsando  $a$  y  $b$  a puntos, se observa que  $L$  tiene el tipo de homotopía de una 2-esfera. Así,  $\hat{E}^3 - L$  es la unión de dos 3-bolas abiertas. Ahora, cortamos  $\hat{E}^3 - \mathcal{K}$  a lo largo de los interiores de las 2-celdas de  $L$  y partimos a lo largo de los interiores de los arcos  $a, b$  para producir dos 3-variedades conexas con frontera  $N$  y  $N'$  cuyas fronteras son 2-esferas menos cuatro puntos con la misma descomposición en celdas como

las fronteras de  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$ , respectivamente. La Figura 3.16 muestra las secciones de cruces de las subdivisiones de  $\hat{E}^3 - \mathcal{K}$  normal a los arcos  $a$  y  $b$ . Obsérvese que  $\infty \in N$ , esto explica la vuelta de adentro hacia afuera de los discos (a) y (b) en las figuras 3.12, 3.13, 3.14 y 3.15.

Como los interiores de  $N$  y  $N'$  son 3-bolas, las variedades  $N$  y  $N'$  son 3-bolas cerradas menos cuatro puntos en sus fronteras. Consecuentemente, existe una aplicación  $\phi$  de la unión disjunta de  $N$  y  $N'$  a la unión disjunta de  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  que induce un homeomorfismo de  $\hat{E}^3 - \mathcal{K}$  a  $M$ . Por tanto,  $M$  es homeomorfo al complemento de nudo ocho en  $\hat{E}^3$ .

### 3.3.1 Volumen del complemento del nudo ocho

La estructura hiperbólica sobre el complemento del nudo ocho, se obtuvo pegando dos tetraedros ideales con ángulos diédricos iguales a  $\frac{\pi}{3}$ . Entonces, por el Teorema 3.2.3, tiene volumen

$$Vol(\mathfrak{L}) = 2Vol(T_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}) = 6\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

## 3.4 El complemento del Enlace de Whitehead

Consideremos  $P$  un octaedro regular ideal en  $B^3$  con vértices ideales  $\pm e_1, \pm e_2$  y  $\pm e_3$  (ver la Figura 3.17). Sean  $v$  un vértice ideal y  $S_r(v)$  la esfera Euclidiana con centro en  $v$  y radio  $r > 0$  menor a la distancia (Euclidiana) a las caras del octaedro que no contiene a  $v$ , tomando  $\Sigma_v := B^3 \cap S_r(v)$  la horoesfera con base en  $v$ , está únicamente incide con las caras de  $P$  que tiene a  $v$  como vértice ideal. Observe que  $(F_0, F_1, F_2)$  es una bandera de  $P$  si y solo si  $(F_0 \cap \Sigma_v, F_1 \cap \Sigma_v, F_2 \cap \Sigma_v)$  es una bandera de la aureola  $L(v)$ .

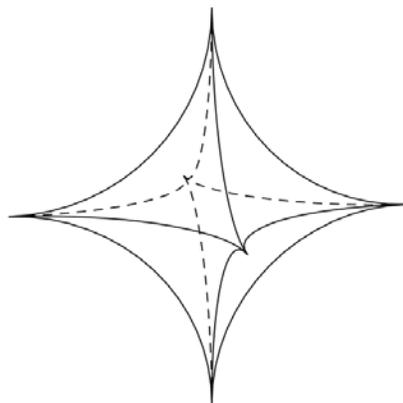


Figura 3.17: Octaedro regular ideal en  $B^3$ .

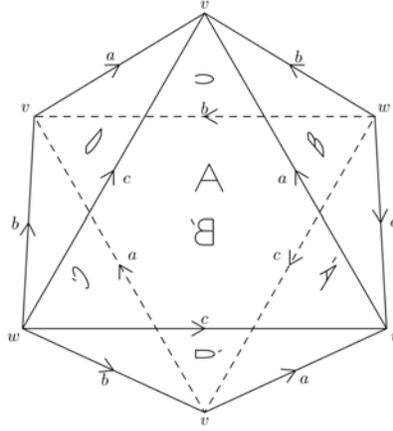


Figura 3.18: Patrón de pegado para el complemento del Enlace de Whitehead.

Como el grupo de isometrías de  $B^3$  actúa transitivamente sobre el conjunto de banderas de  $P$ , también actúa transitivamente sobre el conjunto de aureolas de los vértices de  $P$  (que distan Euclideanamente en  $r$  a cada vértice) y sobre el conjunto de banderas de cada aureola. Así, las aureolas de los vértices de  $P$  (que distan Euclideanamente en  $r$  a cada vértice) son poliedros regulares congruentes.

Por lo que la aureola de cada vértice ideal de  $P$  es un polígono regular Euclidiano, más aún es un cuadrado Euclidiano. Por lo cual, todos los ángulos diédricos de  $P$  son de  $\frac{\pi}{2}$ .

Marcamos las caras, aristas y vértices de  $P$  como en la Figura 3.18. Así  $g_A$  la transformación de Möbius de  $B^3$  que es la composición de la reflexión en el plano de  $B^3$  que está en medio de los dos planos que contienen la cara  $A$  y la cara  $A'$ ; luego, una rotación  $\frac{2\pi}{3}$  en el plano que contiene a la cara  $A$  alrededor del centro de  $A'$  en sentido positivo con respecto al exterior de  $A$ ; y por último, una reflexión sobre el plano que contiene a  $A$ . Ahora, considerar  $g_B$  análogamente a como se definió  $g_A$  sin la rotación. Definamos  $g_C$  análogo a  $g_A$  y  $g_D$  análogo a  $g_B$ .

Así,  $g_A, g_B, g_C, g_D$  con sus respectivas inversas forman un  $I_0(B^3)$ -emparejamiento lateral  $\Phi$  para  $P$ . Entonces, cada ciclo arista consta de cuatro puntos, por lo cual la suma diédrica angular es de  $2\pi$ . Luego,  $\Phi$  es un emparejamiento lateral propio.

Sea  $M$  el espacio obtenido al pegar las caras de  $P$  mediante  $\Phi$ . Por el Teorema 2.2.1  $M$  es una 3-variedad hiperbólica orientable. Hay dos ciclos de vértices ideales de  $P$ , las aureolas de los puntos cúspides de  $M$ . Por el Teorema 2.3.3, las aureolas de los puntos cúspides de  $M$  son toros (ver Figura 3.19). Cada elemento  $g_S$  de  $\Phi$  es la composición de una transformación ortogonal seguida por la reflexión en  $S$ . Por lo tanto, horoesferas disjuntas basadas en los vértices ideales de  $P$  y equidistantes

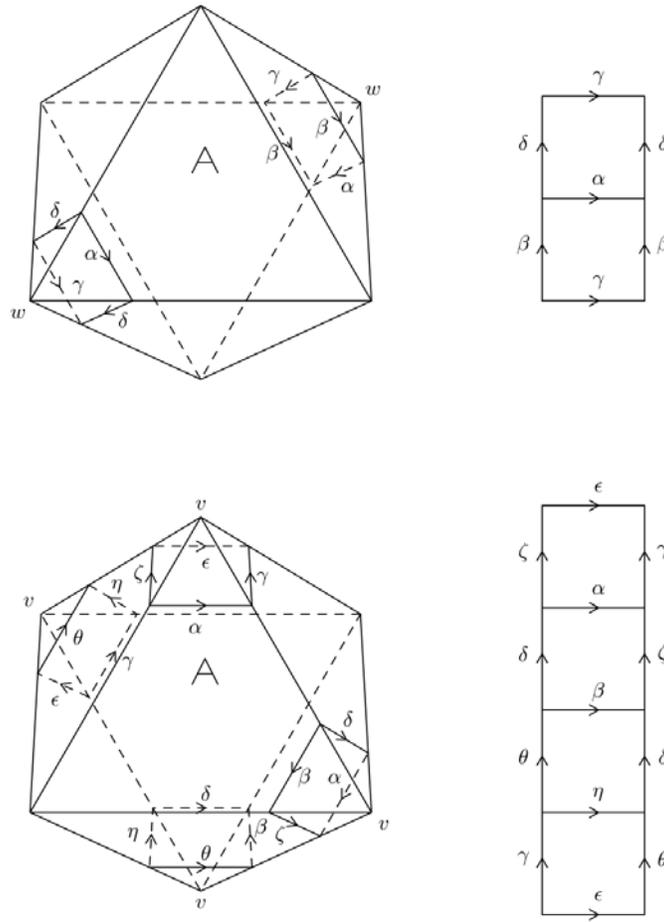


Figura 3.19: Las aureolas de los puntos cúspides del complemento del Enlace de Whitehead.

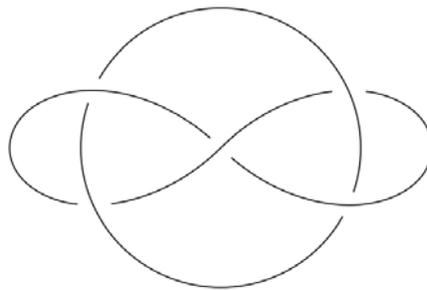


Figura 3.20: Enlace de Whitehead.

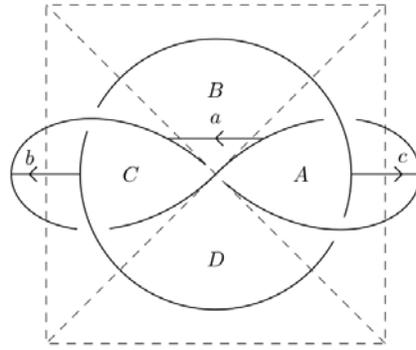


Figura 3.21: Octaedro regular cubierto por el Enlace de Whitehead.

del origen están emparejadas por los elementos de  $\Phi$ . Luego, por el Teorema 2.3.4 las aureolas de los puntos cúspides de  $M$  son completos. Por consiguiente,  $M$  tiene dos cúspides disjuntas por el Teorema 2.3.5 y por el Teorema 2.3.6,  $M$  es completa.

Sea  $L$  el Enlace de Whitehead en  $E^3$ , como en la Figura 3.21. Veremos que  $M$  es homeomorfo a  $E^3 - L$ . Cubrimos la pirámide superior del octaedro  $P$  con el Enlace de Whitehead, agregamos tres arcos dirigidos  $a, b, c$  a  $L$ , como en la Figura 3.21. Estos tres arcos corresponden a tres aristas  $a, b, c$  de  $M$ .

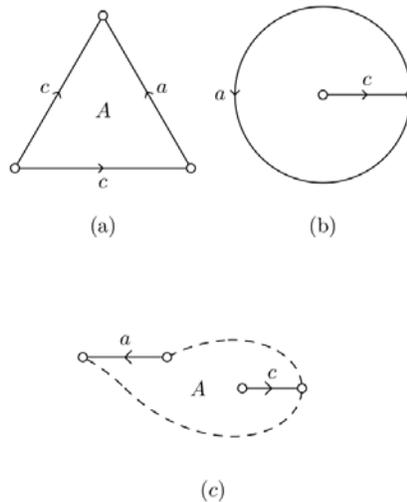


Figura 3.22: La cara  $A$  deformada en una 2-celda del complejo  $K$

Ahora, observemos que la frontera de la cara  $A$  tiene patrón de pegado como en la Figura 3.22 (a). El espacio cociente resultante es homeomorfo a un disco cerrado con dos puntos removidos como en la Figura 3.22 (b). Este espacio cociente es homeomorfo a un disco cerrado con un punto

interior y parte de su frontera removidos como en la Figura 3.22 (c). Este último disco se extiende por la mitad derecha de la componente de  $L$  en la Figura 3.21 que está en la forma de un símbolo de infinito. Observe que la otra componente pasa por el punto que falta del interior del disco en la Figura 3.22 (c).

Por otro lado, observemos que la frontera de la cara  $B$  tiene un patrón de pegado como en la Figura 3.23 (a). El espacio cociente resultante es homeomorfo a un disco cerrado con una parte de su frontera removida como en la Figura 3.23 (b) y (c); este último, genera la parte de  $L$  en la Figura 3.21 que sigue el contorno del lado  $B$ . De la misma forma las caras  $C$  y  $D$  de  $P$ . Estos cuatro discos forman un 2-complejo  $K$ , cuyo 1-esqueleto es la unión de  $L$  con los arcos  $a, b, c$ . Sea  $\mathcal{M}$  la imagen de la  $\partial P$  en  $M$ . Por la compatibilidad del pegado, vemos que  $\mathcal{M}$  es homeomorfo a  $K - L$ .

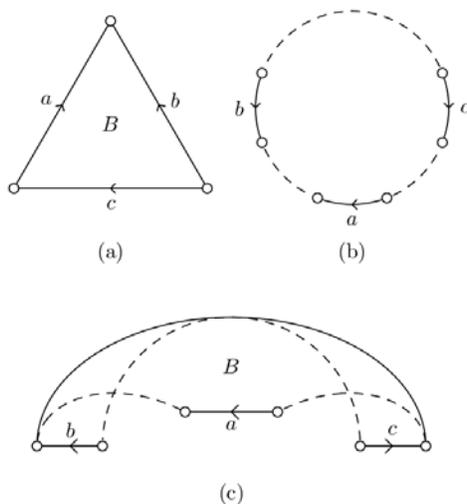


Figura 3.23: La cara  $B$  deformada en una 2-celda del complejo  $K$

El 2-complejo  $K$  es contraíble porque si se colapsa los arcos  $a, b, c$  a puntos, obtiene un disco cerrado. Por tanto  $\hat{E}^3 - K$  es una 3-bola abierta. Cortando  $\hat{E}^3 - L$  a lo largo de los interiores de las 2-celdas de  $K$  y partiendo lo largo de los interiores de los arcos, se obtiene una 3-variedad con frontera,  $N$ , cuya frontera es una 2-esfera menos 6 puntos con la misma descomposición celular que  $\partial P$ . Como el interior de  $N$  es una 3-bola abierta,  $N$  es una 3-bola abierta sin 6 puntos sobre su frontera.

Luego existe una aplicación  $\phi : N \rightarrow P$  que induce un homeomorfismo de  $\hat{E}^3 - L$  a  $M$ . Esto es,  $M$  es homeomorfo al complemento de una aureola Whitehead en  $\hat{E}^3$ .

### 3.4.1 Volumen del complemento del Enlace de Whitehead

La estructura hiperbólica sobre el complemento del Enlace de Whitehead, se obtiene al pegar un octaedro ideal regular, quien a su vez puede dividirse en dos copias de  $P_{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}}$ . Entonces el volumen de  $\mathfrak{W}$  es

$$Vol(\mathfrak{W}) = 2Vol(P_{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}}) = 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

### 3.5 Complemento de los anillos Borromeos

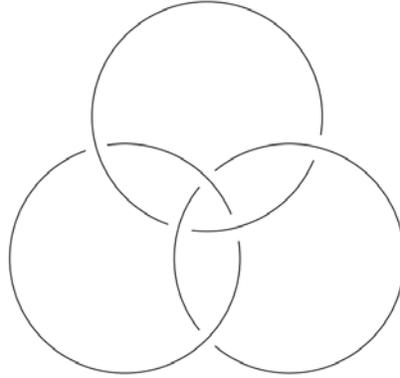


Figura 3.24: Anillos Borromeos

Sea  $L$  los anillos Borromeos en la Figura 3.24. Se prosigue a describir la estructura hiperbólica para  $\hat{E}^3 - L$ .

Pegar seis arcos dirigidos  $a, b, c, d, e, f$  a  $L$  como en la Figura 3.25. La unión de  $L$  y esos seis arcos forma el 1-esqueleto de un 2-complejo  $K$ , cuyas 2-celdas son discos correspondientes a las regiones  $A, B, C, D, E, F, G, H$  en la Figura 3.25, observándose que cada uno de los arcos  $a, b, c, d, e, f$  interseca cuatro de las 2-celdas de  $K$ . Colapsando los arcos  $a, b, c, d, e, f$  a puntos, se tiene que  $K$  tiene la homotopía de una 2-esfera. Consecuentemente  $\hat{E}^3 - K$  es la unión de dos 3-bolas abiertas.

Al cortar  $\hat{E}^3 - L$  a lo largo de los interiores de las 2-celdas de  $K$  y partiendo a lo largo de los interiores de los arcos  $a, b, c, d, e, f$  se obtienen dos 3-variedades con frontera,  $N$  y  $N'$ , cuyas fronteras son 2-esferas menos 6 puntos con la misma descomposición celular que las fronteras de los octaedros en la figura 3.26. Como el interior de  $N$  y  $N'$  son 3-bolas abiertas,  $N$  y  $N'$  son 3-bolas cerradas menos seis puntos sobre sus fronteras. Luego,  $\hat{E}^3 - L$  puede ser obtenido mediante el pegado de dos octaedros regulares ideales a lo largo de sus caras por un emparejamiento lateral como en la Figura 3.26.

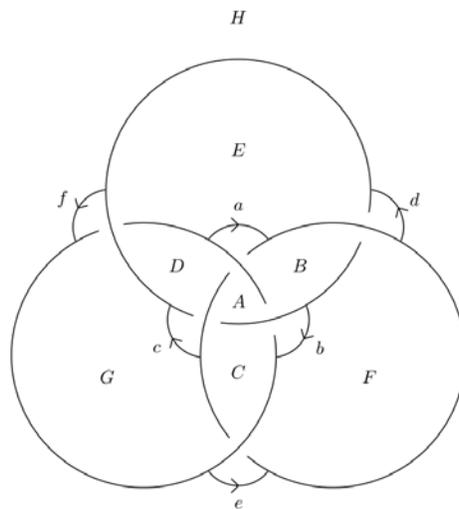


Figura 3.25: El 2-complejo  $K$

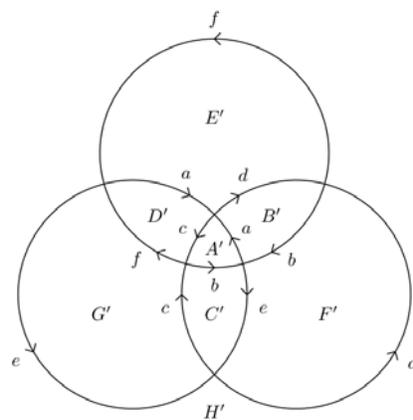
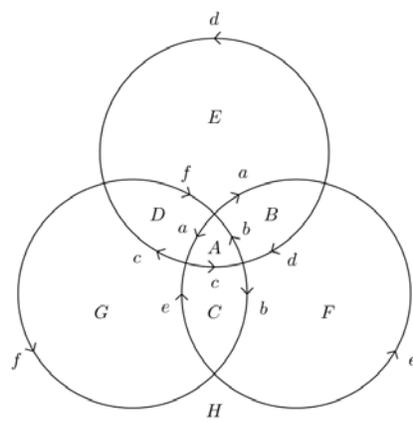


Figura 3.26: Patrón de pegado para el complemento de los anillos Borromeanos

Notemos que los lados emparejados, están pegados entre sí con rotaciones en  $\frac{2\pi}{3}$ , alternando en la dirección de lado a lado adyacente.

### Volumen del complemento de los anillos Borromeanos

Para el complemento de los anillos Borromeanos, se construyó una estructura hiperbólica mediante el pegado de dos octaedros regulares ideales, cada octaedro se puede dividir en dos copias de  $P_{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}}$ . Por lo cual el volumen de  $\mathfrak{B}$  es

$$Vol(\mathfrak{B}) = 4Vol(P_{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}}) = 16\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

#### 3.5.1 Variedad de Gieseking

En los artículos [Col], [Kell], [Rat] y [Thu], se encuentra la construcción de una 3-variedad como en la Figura 3.27. La cual se denomina *variedad Gieseking*, su relevancia radica que es la única 3-variedad hiperbólica no compacta de volumen hiperbólico minimal, que por el Teorema 3.2.3, tiene volumen  $3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

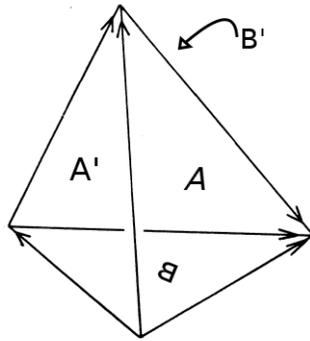


Figura 3.27: Patrón de pegado de la variedad de Gieseking

## Capítulo 4

# Teorema del volumen de Thurston

Como anteriormente se mencionó, una variedad hiperbólica es una variedad Riemanniana, completa con curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Considerando  $V$  una 2-variedad hiperbólica de volumen finito. El Teorema de Gauss-Bonnet implica que

$$\text{Vol}(V) = -2\pi\chi(V),$$

donde  $\chi(V)$  es la característica de Euler de  $V$ .



Figura 4.1: Las superficies de volumen finito para  $k = 1$ , son la esfera con tres pinchaduras (izquierda) y el toro con una pinchadura (derecha).

Además para cada 2-variedad hiperbólica  $V$ , se tiene que  $-\chi(V) \in \mathbb{N}$ ; así los posibles valores de  $\text{Vol}(V)$  son de la forma  $2k\pi$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Con un volumen dado, existen una cantidad finita de 2-variedades, salvo homeomorfismos (ver [Gro]). Si  $r = 2\pi k$ , el número de 2-variedades hiperbólicas (no homeomorfas) con volumen  $r$ , es  $\frac{k+3}{2}$  siempre que  $k$  es impar, y para cuando  $k$  es par, la cantidad de 2-variedades (no-homeomorfas) con volumen  $r$  son  $\frac{k}{2} + 2$ .

Además el Teorema de Finitud de Wang (ver [Gro]), nos dice que para  $n > 3$  fijo y cada  $r \in \mathbb{R}$  existe una cantidad finita de  $n$ -variedades hiperbólicas con volumen menor o igual a  $r$ , salvo isometrías.

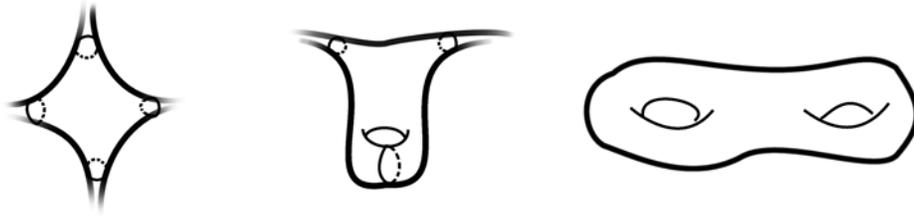


Figura 4.2: Las superficies de volumen finito para  $k = 2$ , son la esfera con 4 pinchaduras (izquierda), el toro con dos pinchadura (centro) y la superficie de genero 2 (derecha).

Por lo que para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$  el conjunto que consta de los volúmenes de toda  $n$ -variedad de volumen finito (con  $n$  fijo), es un subconjunto discreto en  $\mathbb{R}$ . Pero, ¿por qué se excluye el 3 de los posibles valores de  $n$ ? Es decir, ¿qué pasa para las 3-variedades de volumen finito? Para esto, veamos lo siguiente.

Definir  $\mathfrak{M} := \{M \mid M \text{ 3-variedad hiperbólica de volumen finito}\}$  y  $\mathfrak{v} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación dada por  $\mathfrak{v}(M) := \text{Vol}(M)$  para cada  $M \in \mathfrak{M}$ .

**Teorema 4.0.1** (Thurston). Sean  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{v}$  como arriba, entonces  $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  cerrado, no discreto, bien ordenado y su ordinal es de la forma  $\omega^\omega$ . La aplicación  $\mathfrak{v}$  es finito a uno, es decir  $\mathfrak{v}^{-1}(r)$  es finito para cada  $r \in \mathfrak{v}(\mathfrak{M})$ .

Este teorema, nos da una construcción “a mano” de un ordinal. Además nos dice lo siguiente.

- Existe una 3-variedad hiperbólica  $V_1$  con volumen  $v_1$ , el más pequeño de todos los volúmenes; una 3-variedad  $V_2$  con volumen  $v_2$ , el segundo volumen mas pequeño, esto es,  $v_1 < v_2$ , así sucesivamente.
- Que el volumen  $v_\omega$  le pertenece a una 3-variedad hiperbólica completa no compacta; y la segunda 3-variedad hiperbólica completa, no compacta tiene volumen  $v_{2\omega}$ .
- El volumen  $v_{\omega^2}$  se asocia a la primera 3-variedad con dos cúspides. Para  $n \in \mathbb{N}$ , el volumen  $v_{\omega^n}$  se asocia a una variedad con  $n$  cúspides.
- Además  $\mathfrak{v}^{-1}(r)$  es finito para todo  $r \in \mathfrak{v}(\mathfrak{M})$ .

## 4.1 Descomposición de Margulis-Jørgensen

Sea  $M$  una variedad hiperbólica, denotemos por  $l(p)$  la longitud del lazo geodésico más corto con base en  $p \in M$ . Fijando  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ , si  $2\epsilon < l(p)$  la bola con centro  $p$  y de radio  $\epsilon$  tiene geometría estándar, es decir, dicha bola es isométrica a una bola de radio  $\epsilon$  en  $\mathbb{H}^n$ , donde  $n = \dim(M)$ .\* Aquí se trabaja el caso  $n = 3$ .

**Teorema 4.1.1** (Kazhdan-Margulis (caso especial)). *Existe  $\mu \in \mathbb{R}_+$  tal que para cada variedad hiperbólica orientable  $M$  y cada  $p \in M$ , los lazos con base en  $p$  y longitud menor que  $2\mu$  generan en  $\pi_1(M, p)$  un grupo libre abeliano de rango a lo más 2. La constante  $\mu$  se denomina constante de Kazhdan-Margulis.*

La demostración de este hecho se encuentra en [Thu]. Como consecuencia de este teorema cada bola de radio  $\epsilon$ , con  $\epsilon < \mu$ , en  $M$  es isométrica a una bola de radio  $\epsilon$  en  $\mathbb{H}^3$  o bien una variedad hiperbólica con grupo fundamental  $\mathbb{Z}$  ó  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Veamos como describir estas variedades.

### Cúspides

Sean  $\phi_n : U^3 \rightarrow U^3$  dado por  $\phi_n(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + n, x_2, x_3)$  y  $\varphi_m : U^3 \rightarrow U^3$  dado por  $\varphi_m(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + m, x_3)$ . Así el subgrupo  $G = \{\phi_n, \varphi_m : n, m \in \mathbb{Z}\}$  de  $I(U^3)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Definamos una *doble cúspide* a la variedad cociente  $U^3/G$ , la cual es isométrica a  $T \times \mathbb{R}$ , donde  $T$  es el toro plano. Ver Figura 4.3

De la definición de  $C$  se tiene que es una 3-variedad hiperbólica con  $\pi_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ; además como su cubriente universal es  $\mathbb{H}^3$ , implica que cualquier 3-variedad hiperbólica con  $\pi_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  es isométrica a  $C$ .

Sea  $U_1^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in U^3 : x_3 \geq 1\}$ , de donde definamos la variedad  $C^+ := U_1^3/G \subset C$  la cual es llamada *cúspide con base en  $T$* . Esta variedad tiene como frontera a  $T$  y el tipo de isometría de  $C^+$  se determina de forma única por (el tipo de isometría de)  $T$ . La cúspide(finita) tiene volumen finito y es isométrica a  $T \times [0, \infty)$ .

---

\*Recordemos que  $\mathbb{H}^n$  es un variedad simplemente conexa de curvatura  $-1$ . Además el cubriente universal de cualquier  $n$ -variedad hiperbólica es isométrica a  $\mathbb{H}^n$ .

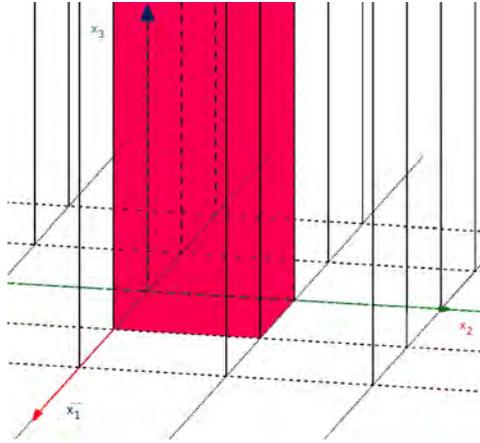


Figura 4.3: El dominio fundamental (en rojo) de la acción de  $G$  sobre  $U^3$  es el prisma infinito con base el cuadrado unitario, con vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

### Tubos

Sean  $\phi_1 : U^3 \rightarrow U^3$  y  $\phi_2 : U^3 \rightarrow U^3$  las inversiones con respecto a las esferas Euclidianas con centro en  $(0, 0, 0)$  de radio 1 y 2 respectivamente, así sea  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ . y definamos  $G := \{\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$  el subgrupo de  $I(U^3)$  el cual es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

Ahora, un *tubo infinito* es la 3-variedad hiperbólica obtenida al hacer actuar  $G$  en  $U^3$ , esta variedad tiene una geodésica cerrada simple. Un tubo infinito  $\mathcal{D}$  tiene una única geodésica cerrada simple  $\gamma \subset \mathcal{D}$ , la cual es llamada *geodésica axial*, ver Figura 4.4

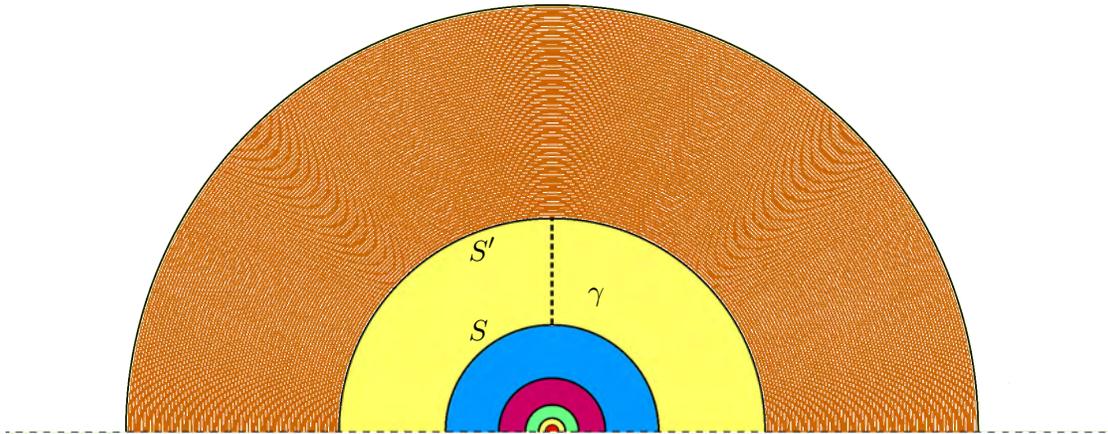


Figura 4.4: El dominio fundamental de la acción de  $G$  sobre  $U^3$  es el conjunto acotado por la esfera  $S'$  (esfera de radio 2 con centro en el origen) y la esfera  $S := \phi_1(S')$ .

Un *tubo* (finito)  $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$ ,  $r \geq 0$ , es el conjunto de puntos  $p \in \mathcal{D}$  tales que  $d(p, \gamma) \leq r$ .

La frontera  $\partial\mathcal{D}_r$  es el toro topológico con métrica plana, esto es,  $\partial\mathcal{D}_r = T$ . El toro  $T$  contiene una geodésica cerrada simple  $\tau$  la cual es contraíble en  $\mathcal{D}_r$ . Esta geodésica está determinada de

manera única, bajo rotaciones de  $T$ , por el homomorfismo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{D}_r) = \mathbb{Z}$ .

Notemos que la longitud de  $\tau$  es igual a la longitud del círculo de radio  $r$  en el plano hiperbólico. Se sigue que  $r \sim \log(\text{longitud}(T))$  cuando esta longitud es grande. El tipo de isometría de  $\mathcal{D}_r$  es determinado de manera única por  $(T, \tau)$  y además, para cada toro plano  $T$  y una geodésica cerrada simple  $\tau \subset T$  existe un tubo  $\mathcal{D}_r$  con  $\partial\mathcal{D}_r \subset T$  tal que  $\tau$  es contraíble en  $\mathcal{D}_r$ ,<sup>†</sup> así se dirá que  $\mathcal{D}_r$  es un tubo con base  $(T, \tau)$ .

Si  $M$  es una variedad isométrica a una cúspide  $T \times \mathbb{R}$ , entonces el valor de  $l(p) = l(t, r)$  solo depende de  $r \in \mathbb{R}$  y  $l$  es estrictamente creciente como función de  $-r$ . Cuando  $r \longrightarrow -\infty$  el valor de  $l(p)$  tiende a  $|2r|$  y cuando  $r \longrightarrow \infty$ ,  $l(p)$  se aproxima a  $e^{-r}$ . Y en este caso  $l$  no tiene valores críticos y todos los niveles  $l^{-1}(x)$  son toros.

Si  $M$  es una variedad isométrica a un tubo infinito con geodésica axial  $\gamma$ , entonces el valor de  $l(p)$  solo depende de  $r(p) = d(p, \gamma)$  y  $l$  es una función estrictamente creciente para  $r \in [0, \infty)$ . Cuando  $r = 0$  se tiene que  $l(r) = \text{longitud}(\gamma)$  y para  $r \longrightarrow \infty$   $l(r)$  se aproxima a  $2r$ . En este caso  $l$  tiene un valor crítico  $\lambda = \text{longitud}(\gamma)$  y todos los niveles  $l^{-1}(x)$ , con  $\lambda < x$ , son toros.

Sean  $r, \rho$  números positivos, definamos  $C_r$  como un disco cerrado en  $\mathbb{R}^2$  de radio  $r$  y  $S_\rho$  como una circunferencia de perímetro  $\rho$ . Así, un *tubo* es una variedad isométrica a  $C_r \times S_\rho$ . La prueba de este hecho se encuentra en [Ben, pag 153].

De lo anterior y el Teorema 4.1.1 se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.2** (Teorema de Descomposición). *Sean  $M$  una 3-variedad hiperbólica orientable de volumen finito,  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\mu$ , donde  $\mu$  es la constante de Kazhdan-Margulis. Entonces  $l^{-1}[0, \epsilon] \subset M$  consiste de una cantidad finita de componentes y cada una es isométrica a una cúspide o un tubo.*

Como consecuencia de este teorema, si existe  $\epsilon < \frac{1}{2}\mu$ , tal que  $M$  no contiene una geodésica cerrada de longitud  $\epsilon$ , en este caso, las fronteras de  $M_{(0, \epsilon]} := \{p \in M : l(p) \leq \epsilon\}$  y  $M_{[\epsilon, \infty)} := \{p \in M : l(p) \geq \epsilon\}$  son toros.

Las  $\epsilon$ -vecindades (en  $M$ ) de puntos  $p \in M_{[\epsilon, \infty)}$  son isométricas a bolas hiperbólicas. Se sigue que  $M_{[\epsilon, \infty)}$  puede ser cubierto con  $N = c(\epsilon)\mathfrak{v}(M)$  bolas de radio  $\epsilon$ , donde  $c(\epsilon)$  es una constante que depende de  $\epsilon$ .

Asumamos que  $M$  es conexo, es claro que también  $M_{[\epsilon, \infty)}$  es conexo y por lo tanto su diámetro es acotado por  $2N$ .

$M_{(0, \epsilon]}$  tiene una geometría local más complicada que la de  $M_{[\epsilon, \infty)}$ , pero globalmente, es un objeto

---

<sup>†</sup>La construcción de dicho tubo se encuentra en [Gro]

más estándar. En particular se tiene que la cantidad de componentes de  $M_{(0,\epsilon]}$  no excede  $c\nu(M)$ , donde  $c$  es una constante del orden  $\mu^{-1}$ .

Lo cual implica que  $M$  tiene a lo más  $c\nu(M)$  geodésicas cerradas de longitud menor o igual a  $\frac{1}{2}\mu$  y cuando  $\epsilon$  es más pequeño que la longitud de la más pequeña de esas geodésicas, la variedad  $M_{(0,\epsilon]}$  consiste de cúspides y su número no depende de  $\epsilon$ , ver Figura 4.5.

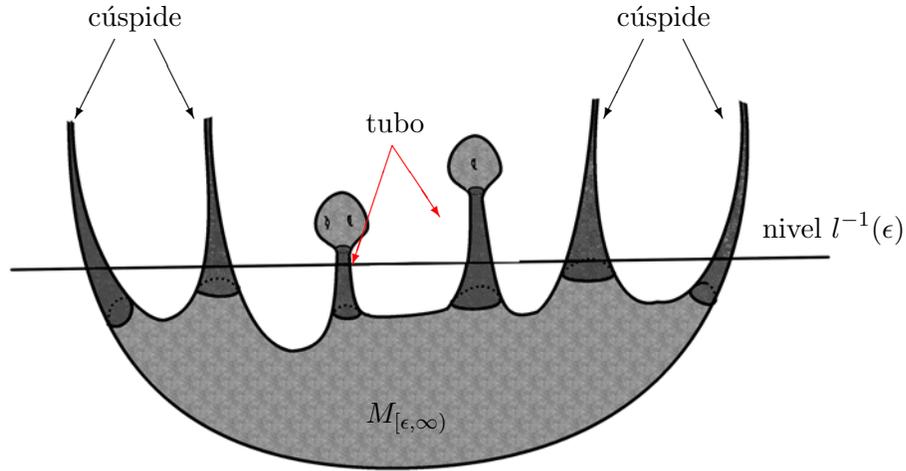


Figura 4.5: Esquema del Teorema de Descomposición

Un corolario inmediato de este Teorema de Descomposición es el siguiente.

**Corolario 4.1.1.** *Sea  $M$  una 3-variedad hiperbólica orientable de volumen finito. Entonces  $M$  es difeomorfo al interior de una variedad compacta que su frontera consta de toros y por lo tanto, sólo existe una cantidad numerable de 3-variedades hiperbólicas topológicamente diferentes de  $M$ .*

Por el Teorema de Rigidez de Mostow el grupo fundamental  $\pi_1(M)$  determina de manera única a  $M$ , salvo isometrías. Esto implica, que existe una cantidad numerable de 3-variedades hiperbólicas isométricas a  $M$ .

**Teorema 4.1.3** (de Rigidez de Mostow (versión geométrica)). *Sean  $M_1, M_2$   $n$ -variedades hiperbólicas sin frontera y compactas, con  $2 < n$ . Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es una equivalencia homotópica (esto es, si  $f$  es continua y además existe  $g : M_2 \rightarrow M_1$  tal que  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son homotópicas), entonces  $f$  es homotópica a una isometría.*

Este teorema es un caso especial del Teorema de Rigidez de Thurston (4.3.4).

## 4.2 Convergencia de variedades

Para dos espacios métricos  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  y una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  definamos

$$L(f) = \sup \left\{ \left| \log \left( \frac{d_X(x_1, x_2)}{d_Y(f(x_1), f(x_2))} \right) \right| : x_1, x_2 \in X \text{ y } x_1 \neq x_2 \right\}.$$

**Definición 4.2.1.** Sean  $\{X^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de espacios métricos con puntos base  $x_i \in X^i$  y  $Y$  un espacio métrico. Diremos que la sucesión  $\{(X^i, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $(Y, y)$  si y solo si para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $r > 0$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i > j$  existe  $f_i : B_r(x_i) \subset X^i \rightarrow Y$  tal que

- $f_i(x_i) = y$ ;
- $B_{r-\epsilon}(y) \subset f_i(B_r(x_i))$ ;
- $L(f_i) \leq \epsilon$ .

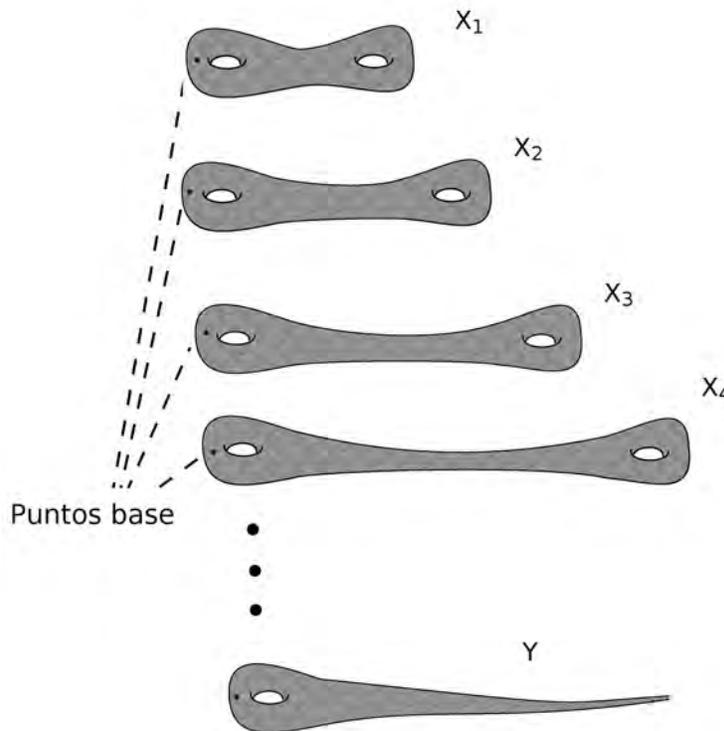


Figura 4.6: Ejemplo de convergencia

**Nota:** Una sucesión  $\{(M^i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  de 3-variedades hiperbólicas, completas, de volumen finito, converge si y solo si existe  $M$  una 3-variedad hiperbólica, completa, de volumen finito, para la cual la sucesión  $\{(M^i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $M$  en el sentido de la Definición 4.2.1.

En nuestro caso, nos interesa saber propiedades de 3-variedades hiperbólicas de volumen finito, con esta definición y el Teorema de Descomposición se llega al siguiente teorema.

**Teorema 4.2.1** (de Jørgensen). *Sea  $\{(M^i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente de 3-variedades hiperbólicas con volumen finito tal que  $\{\mathfrak{v}(M^i) : i \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto acotado superiormente. Entonces el espacio límite  $M$  de dicha sucesión es una 3-variedad hiperbólica con  $\mathfrak{v}(M) = \lim\{\mathfrak{v}(M^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ .*

**Demostración:** El Teorema de Descomposición implica que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño los conjuntos  $M_{[\epsilon, \infty)}^i$  son conexos y  $p_i \in M_{[\epsilon, \infty)}^i$ , además por el Teorema de Descomposición (nuevamente) se observa que si  $\epsilon_i$  es una sucesión de números positivos que converge a 0, entonces  $\mathfrak{v}(M_{(0, \epsilon_i]}^i) \rightarrow 0$ . Como  $\text{diametro}(M_{[\epsilon, \infty)}^i) \leq k(\epsilon)$ , donde  $k(\epsilon)$  es una constante, así se obtiene que  $\lim\{\mathfrak{v}(M^i)\}_{i \in \mathbb{N}} = \mathfrak{v}(M)$ . ■

Chabauty, demuestra un resultado que nos ayuda en la prueba de que el conjunto  $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$  es cerrado, dicho resultado es el siguiente.

**Teorema 4.2.2** (de Chabauty). *Sea  $\{(M^i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de  $n$ -variedades hiperbólicas (con  $n$ -fija). Si los lazos geodésicos en  $p_i$  satisfacen que*

$$\inf\{l(p_i) : i \in \mathbb{N}\} > 0,$$

*entonces  $\{(M^i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión convergente.*

Para la demostración de este teorema ver [Cha]. Recordemos que  $\mathfrak{M}$  es el conjunto de todas la 3-variedades hiperbólicas (completas) de volumen finito y que  $\mathfrak{v}(\cdot)$  es la función que asigna cada  $M \in \mathfrak{M}$  su volumen. Prosigamos a ver el siguiente resultado.

**Proposición 4.2.1.** *El conjunto  $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$  es un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}_+$ .*

**Demostración:** De acuerdo con el Teorema de Descomposición si  $\{M^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de 3-variedades hiperbólicas de volumen finito, para cada  $i \in \mathbb{N}$  existe  $p_i \in M^i$  tal que  $l(p_i) > \mu_i$ , donde  $\mu_i$  es la constante de Kazhdan-Margulis de la variedad  $M^i$ . Entonces por el Teorema de Chabauty existe una subsucesión convergente y por el Teorema de Jørgensen la función  $\mathfrak{v}$  es continua. ■

### 4.3 Apertura, cerradura de cúspides

Sea  $\{M^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente (relativa a una elección de puntos base) de 3-variedades hiperbólicas con  $\sup\{\mathfrak{v}(M^i)\} < \infty$  y denotemos por  $M$  la variedad límite de dicha sucesión. Por

el Teorema de Descomposición se sigue que para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $i$  suficientemente grande los conjuntos  $M_{[\epsilon, \infty)}^i$  son difeomorfos a  $M_{[\epsilon, \infty)}$  y cuando  $\epsilon$  es suficientemente pequeño los conjuntos  $M_{(0, \epsilon]}^i$  tienen el mismo número de componentes que  $M_{(0, \epsilon]}$ . Se puede asumir que todas las componentes de  $M_{(0, \epsilon]}$  son cúspides, de ser necesario hacer más pequeño a  $\epsilon$ .

Lo que implica que el único cambio posible en la topología cuando se pasa al límite, es el intercambio de tubos en  $M_{(0, \epsilon]}^i$  por cúspides en  $M_{(0, \epsilon]}$ , como en la Figura 4.7.

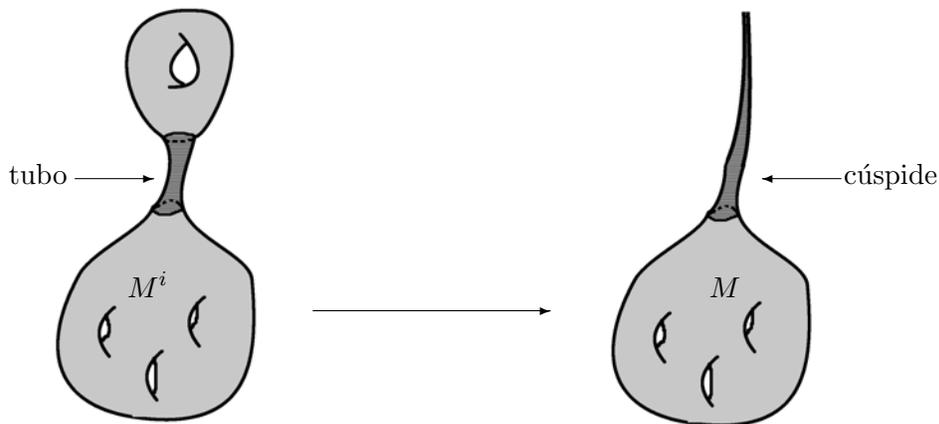


Figura 4.7: Intercambio de tubos por cúspides

De lo anterior se llega al siguiente hecho.

**Teorema 4.3.1** (De apertura de cúspides de Jørgensen). *Sea  $\{M^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de 3-variedades hiperbólicas orientables con volúmenes uniformemente acotados. Entonces existe una  $\{N^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una subsucesión convergente a  $N$  y una sucesión de números positivos  $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  que converge a 0, tales que cada  $N^i$  tiene  $p$  cúspides y  $q$  geodésicas cerradas simples de longitud menor o igual a  $\epsilon_i$  con  $p$  y  $q$  independientes de  $i$ . La variedad  $N$  tiene  $p + q$  cúspides y es difeomorfa a cada  $N^i$  menos esas  $q$  geodésicas.*

Notemos que al retirar la geodésica axial de un tubo, lo que resulta, es difeomorfo a una cúspide  $C$ . Más aún si  $C$  es la cúspide basada en un toro plano  $T$  y  $\tau_i \subset T$  es una sucesión de geodésicas cerradas simples con  $longitud(\tau_i) \rightarrow \infty$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , entonces la sucesión de tubos  $\mathcal{D}_i$  con base en  $(T, \tau_i)$  converge a  $C$ , tomando los puntos base en las fronteras de dichos tubos.

De lo anterior surgen inconvenientes, como que la convergencia de los tubos se pueda dar dentro de una variedad completa (sin frontera) con volumen finito y otro inconveniente es el comportamiento de los volúmenes de  $N^i$ . Thurston resuelve esto mediante dos teoremas, los cuales se presentan a continuación.

**Teorema 4.3.2** (Clausura de cúspides). *Sea  $M$  una variedad completa orientable con volumen finito, la cual tiene  $p + q$  cúspides. Entonces existe una sucesión  $\{M^i\}$  que converge a  $M$  tal que cada  $M^i$  tiene exactamente  $p$  cúspides y  $q$  geodésicas pequeñas.*

Para la prueba de este teorema ver [Gro] y el capítulo 5 de las notas de Thurston ([Thu])

Este teorema implica que  $M$  puede verse como límite de variedades compactas.

**Teorema 4.3.3** (Volumen del Límite). *Sea  $\{N^i\}$  una sucesión que converge a  $N$  como en el Teorema 4.3.1 y sea  $q > 0$ . Entonces  $\mathfrak{v}(N) > \mathfrak{v}(N^i)$  para todo  $i$ .*

Éste último teorema es un caso especial del Teorema de Rigidez de Thurston, más aún, el Teorema de Rigidez de Thurston implica el Teorema de Rigidez de Mostow.

**Teorema 4.3.4** (Rigidez de Thurston). *Sea  $M$  una variedad hiperbólica con volumen finito y denotemos por  $M'$  la variedad la cual es obtenida de una variedad hiperbólica completa de volumen finito a la cual se le eliminaron algunas geodésicas cerradas simples disjuntas. Sea  $f : M \rightarrow M'$  una mapeo propio de grado positivo  $d$ . Entonces  $\mathfrak{v}(M) \geq d\mathfrak{v}(M')$  y la igualdad se tiene si y solo si  $f$  es homotópica a una isometría cubriente de grado  $d$ . En particular  $\mathfrak{v}(M) = d\mathfrak{v}(M')$  implica que  $\mathfrak{v}(M')$  era completa (y no se le eliminaron geodésicas).*

La prueba de este Teorema de Thurston se encuentra en [Thu].

Para ver que 4.3.4 implica 4.3.3, solo basta tomar  $M'$  como  $N^i$  menos  $q$  geodésicas. Y como sabemos  $M'$  es difeomorfa a  $N$ , entonces  $d = 1$ . Si  $q > 0$  por 4.3.4 implica  $\mathfrak{v}(N) \geq d\mathfrak{v}(M') = \mathfrak{v}(N^i)$ . De donde 4.3.4 implica 4.3.3.

Por otro lado veamos que el Teorema de Rigidez de Thurston implica el Teorema de Rigidez de Mostow.

Sean  $M$  y  $M'$  son variedades hiperbólicas completas con grupos fundamentales isomorfos, tenemos mapeos propios de grado 1,  $M \rightarrow M'$  y  $M' \rightarrow M$ . Asumiendo  $\mathfrak{v}(M) \leq \mathfrak{v}(M')$  (en caso contrario intercambiar  $M$  y  $M'$ ), por el Teorema 4.3.4 nos implica que  $M \rightarrow M'$  es homotópico a una isometría. Así el Teorema de Rigidez de Thurston implica el Teorema de rigidez de Mostow.

El Teorema 4.3.3 implica que el conjunto  $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$  esta bien ordenado, además que la función  $\mathfrak{v}$  es finita a uno y usando el Teorema 4.3.2 se observa que  $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$  tiene ordinal del tipo  $\omega^\omega$ . Así tenemos la prueba del Teorema de Thurston (4.0.1).

# Bibliografía

- [Apa] Apanasov, B.N. Discrete groups in space and uniformization problems, Kluwer Academic Press, 1991.
- [Ben] Benedetti, Riccardo; Petronio, Carlo. “*Lectures on Hyperbolic Geometry*”. Berlin ; New York : Springer-Verlag, c1992.
- [Col] Colin C. Adams (1987). “*The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume*”. AMS, Volume 100, Number 4, August. pp 601-606.
- [Can] Cannon, James W; Floyd, William J; Kenyon, Richard; Parry Walter R. “*Hyperbolic geometry*”. Flavors of Geometry. MSRI Publications. Volume 31, 1997. pp 59-115.
- [Cha] Chabauty, Claude. “*Limite d’ensembles et géométrie des nombres*”. Bull. Soc. Math. France. Vol 78, 1950, pp. 143-151.
- [Gro] Gromov, Michael. Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen. Séminaire N. Bourbaki, 1979-1980, exp.  $n^\circ$  546, pp 40-53.  
[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1979-1980\\_\\_22\\_\\_40\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__40_0)
- [Kell] Kellerhals, Ruth. “*Volumes of cusped hyperbolic manifolds*”. Topology Vol 37, No 4, Elsevier Science Ltd. 1998. pp 719-734.
- [Mar] Marsden, Jerrold E; Tromba, Antony J. “*Cálculo Vectorial*”. Tercera edición. Addison-Wesley Iberoamericana. EUA. 1991.
- [Rat] Ratcliffe, John G. 2000. “*Foundations of Hyperbolic Manifolds*”. New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer.
- [Thu] Thurston, William P. “*The Geometry and Topology of Three-Manifolds*”. Electronic version 1.1 - March 2002.

<http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>

[Thu2] \_\_\_\_\_. "*Three-Dimensional Geometry and Topology*". Volume 1. Princeton University Press.  
Princeton New Jersey. 1997.