



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CÁLCULO DE LA ENERGÍA DE BRANAS
MAGNÉTICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

PEDRO JESÚS TREJO CALDERÓN

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR
2017**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno

Trejo

Calderón

Pedro Jesús

(55) 68 42 89 31

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Física

30622673-1

2.Datos del tutor

Dr.

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Hernando

Quevedo

Cubillos

4.Datos del sinodal 2

Dr.

Yuri

Bonder

Grimberg

5.Datos del sinodal 3

Dr.

Héctor

Hernández

Coronado

6.Datos del sinodal 4

Dr.

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

7. Datos del trabajo escrito

Cálculo de la energía de branas magnéticas

64 p

2017

Cálculo de la Energía de Branas Magnéticas

Pedro Jesús Trejo Calderón

Asesor: Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar

A mi madre, por haberme dado todo su amor y apoyarme en todo momento;
a mi Padre, que nunca dudó de mis capacidades y habilidades para conseguir este logro en mi vida;
a mis hermanos, que siempre me apoyaron de alguna u otra forma y me permitieron llegar a la universidad;
a ti Yanín, por ser fundamental en mi formación como físico y ser mi apoyo en los momentos más difíciles.

Contenido

Agradecimientos	I
Introducción	II
1. El formalismo ADM de la Relatividad General	1
1.1. Fundamentos	1
1.2. Reescribiendo las ecuaciones de Einstein: La formulación ADM	11
1.2.1. Formulación Lagrangiana	12
1.2.2. Descomposición 3+1	16
1.2.3. Curvatura Extrínseca y La Derivada Covariante Inducida	19
1.2.4. Formulación Hamiltoniana	22
1.3. Comentarios finales	24
2. Propiedades de los espaciotiempos asintóticamente AdS	25
2.1. El Espaciotiempo AdS	26
2.1.1. Estructura Conforme del espaciotiempo AdS y Compactificación Conforme	28
2.2. Espaciotiempo asintóticamente AdS	29
2.2.1. La expansión de Fefferman-Graham	30
2.3. La temperatura de un agujero negro	31
2.4. La Correspondencia AdS/CFT	32
2.4.1. Algunas entradas del diccionario	32
2.5. Comentarios finales	33
3. La Energía de las Branas Magnéticas	35
3.1. La conjetura de Myers-Horowitz	35
3.2. La métrica de la Brana Magnética	38
3.2.1. La energía asociada a las soluciones analíticas	39
3.3. Soluciones de las branas magnéticas y su energía	42
3.3.1. Espectro energético	43
4. Discusión y Resultados	45
4.1. La elección del fondo de referencia	45
4.2. Comparación entre las energías con los resultados perturbativos en teoría cuántica de campos	45
4.3. Discusión	46
4.4. Conclusiones y trabajo futuro	47
Apéndice	47
A. Ecuaciones de movimiento	49
Bibliografía	51

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Leonardo Patiño por haber asesorado este trabajo, por su paciencia y sobre todo por la guía que fue para mi durante la elaboración de mi tesis y que llegó incluso a traspasar lo académico. Me queda claro que, antes que nada, es un gran ser humano.

También quiero darle las gracias a los miembros de mi comité sinodal por el enorme esfuerzo que hicieron para que este trabajo viera la luz lo más rápido posible y pudiera seguir con mi formación académica. Aprecio enormemente los comentarios que me hicieron para mejorar y enriquecer mi tesis. Merece una mención especial el Dr. Alejandro Ayala, sus comentarios nos permitieron entender mejor los resultados que obtuvimos.

Ha pasado mucho tiempo desde que pisé como estudiante la universidad, mis decisiones me hicieron recorrer el camino en un poco más de tiempo del planeado, sin embargo, en mi ser tengo la certeza de que la física es lo que me gusta en verdad en la vida. Durante mi estancia (nada breve) en ingeniería me di cuenta que el tratar de entender el mundo es lo que verdaderamente me pasiona, por eso estoy en este momento concluyendo esta parte de mi formación académica.

El orden en que vaya mencionado a las personas con quienes me siento en deuda no tiene una razón particular, cada persona ha contribuido en mi vida de manera positiva.

Primero quisiera agradecer a mis padres: Pedro Trejo Bazaldúa y María de Lourdes Calderón Ramírez, por haberme dado todo lo que pudieron; yo soy más que feliz con que me dejaran estudiar y haber obtenido una educación universitaria, los amo hartos. Mis hermanos Adriana, Xochitl, Gaby, Nicandro y Conina por ser un apoyo fundamental durante todo este tiempo, me han dado el mejor regalo que pudieran haber pensado jamás, también los amo.

Quisiera agradecer ahora a mi mejor amigo en la vida: Joaquín A. Ramirez. Si no hubiera sido por aquellas ocasiones en que me regañaste por deprimirme y faltar a la escuela es probable que aun estuviera lamentándome en algún rincón de la facultad. Gracias por ser mi amigo, por aguantarme durante el año y medio que compartimos habitación al final de la carrera y, sobre todo, gracias por la comprensión que me has mostrado durante todo este tiempo. Te debo mucho pues debo reconocer que estuviste conmigo en un momento no muy bonito de mi vida.

El camino ha sido algo difícil, máxime, cuando se vive lejos y se trabaja. Cuando me mudé a vivir cerca de la universidad me habría sido imposible mantenerme sin las ayudantías que me dieron el Dr. Manuel Tejada, el Mat. Eduardo Arellano Arjona, la Dra. Ángeles Sandoval Romero y el Dr. Alessio Franci, si algún día leen esto, sepan que estoy muy agradecido por haberme dado el trabajo que me permitió tener un ritmo de vida más calmado y no *morir* durante los mis últimos semestres de la carrera, y que a su vez me permitió terminar esta tesis. Quiero agradecer, especialmente, al Fís. Sebastián Nájera por ser mi

amigo y también por haberme dado trabajo en mi momento de *nini*. También quiero agradecer a Ernesto Carro, Mario Pérez, Axel Rodríguez, por su amistad y por haberme aguantado en clase a las que llegaba tarde.

Quiero agradecer muy especialmente a la abogada Juana Santillán y al Fís. Carlos Guerra, hay muchísimas cosas que han hecho por mi, me han abierto su casa, me han tratado desde el inicio de una forma muy amable y han hecho que me sienta parte de su familia. Muchas tareas y mucho del trabajo que presento en esta tesis fue hecho en su restaurante, con su compañía, un parte de este trabajo es también parte de ustedes. Me quedo con las pláticas que he tenido con el Fís. Carlos Guerra sobre filosofía de la ciencia, de la importancia en la predicción en la física y de cómo es que debemos hacer ciencia para generar progreso en la humanidad. Reconozco en este momento que he sido altamente influenciado por sus ideas.

Por último, sólo queda agradecerle a la persona que más me ha apoyado en la carrera, quien estuvo conmigo durante mis momentos de frustración, quien me alentó cuando me daba por vencido y siempre creyó en mi. Gracias Yanín, eres una parte fundamental en mi vida, desde que empezamos siendo amigos y compartíamos nuestras penas, llevamos un laboratorio juntos, te esperaba a que salieras de tu clase para que fuéramos a comer, corríste a abrazarme porque falté una semana porque pensé que ya no podría más, después te convertiste en mi novia, me apoyaste en mi locura de octavo semestre para acabar en un tiempo *decente* la carrera y concluir esta etapa. Solo me queda decirte: ¡Gracias!

Le agradezco a la UNAM pues, como ya debe quedar claro, me ha dado todo.

Introducción

“I gotta have my orange juice...”

– Richard Feynman

Para tratar con fenómenos microscópicos en la naturaleza donde la velocidad y la energía de las partículas involucradas alcanzan magnitudes relativistas, se ha desarrollado la teoría cuántica de campos como una herramienta que permite realizar, por ejemplo, cálculos de amplitudes de dispersión que pueden medirse en los experimentos realizados en el CERN o en el FermiLab, este tipo de cálculos se realizan de manera perturbativa y resultan ser muy cercanos a las mediciones tomadas.

En 1998, Juan Maldacena propuso una dualidad entre una teoría de cuántica de campos conforme y una teoría de supercuerdas, que es una teoría gravitacional en 10 dimensiones[1], a partir de entonces se detonó toda una área de investigación con la finalidad de probarla o contradecirla. Hasta la fecha no se cuenta con una prueba de la conjetura que hizo Maldacena, sin embargo, se cuenta con bastantes ejemplos en donde los cálculos hechos en una teoría coinciden con su teoría dual. En resumen, la conjetura de Maldacena permite hacer uso de una teoría gravitacional en 10 dimensiones para estudiar sistemas cuánticos de altas energías en cuatro dimensiones. Dentro de la tesis se profundizará un poco más en los aspectos de la correspondencia, al menos de manera cualitativa.

En las teorías cuánticas de campos con fondo magnético se ha encontrado que la densidad de energía del sistema tiene un comportamiento divergente[2] que puede quitarse a través de renormalizar la teoría, o bien, regularizándola. Usando la conjetura de Maldacena pueden estudiarse este tipo de sistemas encontrando su teoría dual gravitacional, en particular, puede encontrarse la densidad de energía en la configuración gravitacional y traducirla con el diccionario de la correspondencia AdS/CFT. El espaciotiempo dual a una teoría cuántica de campos con fondo magnético es generado por una pila de objetos conocidos como branas magnéticas [3, 4].

La presente tesis aborda el cálculo de la energía del fondo generado por branas magnéticas regularizando la acción, usando de una derivación equivalente al formalismo ADM debido a S. Hawking y G. Horowitz con la finalidad de obtener una densidad de energía a partir de la configuración gravitacional, que pueda ser útil en la teoría de dual, según la conjetura de Maldacena.

Para hacer autocontenido este texto se introduce al lector en los capítulos 1 y 2 a las herramientas necesarias para el desarrollo de los cálculos presentados en el capítulo 3. Se hace un breve repaso de la teoría de la relatividad general y se desarrolla el formalismo ADM de la misma. En el capítulo 2 se tratan las propiedades geométricas de los espaciotiempos AdS; se introducen los espacios que son

asintóticamente AdS, sus propiedades y su conexión con la holografía y se mencionan los aspectos relevantes de la correspondencia AdS/CFT, la cual motiva, en cierta medida, los cálculos realizados en este trabajo.

El capítulo 3 tiene el propósito de presentar la conjetura de Myers-Horowitz y su expresión para calcular la energía de espaciotiempos asintóticamente AdS. Después se introduce la métrica de las branas magnéticas, la cual consta de una familia de soluciones a las ecuaciones de Einstein, en particular, dos de ellas son soluciones analíticas: la solución de la brana negra cuando no hay campo magnético y la solución del agujero negro $BTZ \times T^2$.

Se finaliza este trabajo con una discusión de la energía obtenida de manera numérica y perturbativa cerca de la frontera en el capítulo 4, en ambos casos, la energía muestra una dependencia proporcional al cuadrado de la magnitud del campo magnético. En el caso perturbativo cerca de la frontera, la densidad de energía muestra una divergencia logarítmica en la coordenada radial, la cual está relacionada a través de la correspondencia norma/gravedad con la escala energética en la teoría de campos. Lo anterior sugiere que es posible usar renormalización holográfica, aunque dicha técnica está fuera del alcance de la presente tesis, se propone como trabajo futuro de investigación.

Capítulo 1

El formalismo ADM de la Relatividad General

[...]Perhaps we should say: “Time is what happens when nothing else happens.” Which also doesn’t get us very far. Maybe it is just as well if we face the fact that time is one of the things we probably cannot define (in the dictionary sense), and just say that it is what we already know it to be: it is how long we wait! [...]

– Richard Feynman,
Feynman’s Lectures on Physics. Vol. I Ch. 5.

Este capítulo tiene como finalidad presentar el formalismo ADM. La expresión que se usó para realizar los cálculos correspondientes a las branas magnéticas, así como los conceptos de curvatura extrínseca y la función shift y vector lapse, tienen su fundamento en la formulación hamiltoniana de la relatividad general. El formalismo ADM permite hacer tal descripción pues surgió de la necesidad de tener una descripción dinámica del espaciotiempo.

A continuación se hace un breve repaso de las ideas que originaron la relatividad especial y general, después vendrán un poco de herramientas matemáticas necesarias para profundirse en el estudio de la relatividad general.

1.1. Fundamentos

Durante varios siglos, la mecánica newtoniana fue considerada como el modelo correcto para hacer la descripción del movimiento de los cuerpos. Esta teoría está fundamentada en el **principio de Galileo**: “No puede realizarse experimento alguno que permita determinar la velocidad absoluta de un observador; el resultado de cualquier experimento no depende de la velocidad relativa entre el observador que lo desarrolló y cualquier otro observador que no esté involucrado.”; también considera que el tiempo es una cantidad absoluta de la naturaleza, esto es, el tiempo transcurre de la misma manera para cualesquiera dos observadores, sin importar cual sea su velocidad relativa.

En el siglo XIX, James Clarke Maxwell logró unificar la electricidad y el magnetismo en una sola teoría llamada electromagnetismo. Una de las consecuencias más relevantes de la teoría de Maxwell es que la luz es una onda electromagnética propándose en el espacio.

Tanto la mecánica de Newton como la teoría electromagnética de Maxwell tenían comprobación experimental a su favor, no obstante, ambas son incompatibles. En primer lugar, la ecuación de onda no es invariante ante cambios de sistemas inerciales, esto no sería ningún problema si en los experimentos se hubiera encontrado que la velocidad de la luz era distinta para dos observadores inerciales pero no fue así; en segundo lugar, si la luz fuese una onda entonces debía existir un medio en el que se propague, se le llamó éter y, de existir, tenía propiedades mecánicas peculiares como permear todo el espacio o transmitir ondas transversales a pesar de ser un fluido (solo puede hacerlo un sólido pues los fluidos no soportan esfuerzos cortantes). La idea de propagación de ondas en el vacío llegó después de los trabajos de Einstein.

El éter permitía la elección de un sistema de referencia preferencial pues se creía que la velocidad de propagación de la luz que aparecía en la ecuación de onda debía ser medida en el sistema de referencia del éter, con esto en mente, Michelson y Morley desarrollaron su famoso experimento del interferómetro, querían verificar si existía una variación en la velocidad de la luz dependiendo de la dirección. El resultado de los experimentos de Michelson y Morley fue que la velocidad de la luz es la misma sin importar la dirección, esto inspiró a Albert Einstein a reformular la mecánica aceptando el hecho de que la velocidad de la luz es la velocidad límite de la naturaleza, postuló la **invarianza de la velocidad de la luz**: *La velocidad de la luz es la misma para cualquier observador que se encuentre en un sistema de referencia inercial* y, junto con el principio de Galileo, sentó las bases de la relatividad especial. Con esta nueva teoría se hacían compatibles la teoría de Maxwell y la teoría de Newton, siendo esta última un caso límite de esta teoría más general.

La gravedad resultó ser también incompatible con la relatividad especial, era de esperarse pues la ley de gravitación universal de Newton contempla una interacción instantánea entre los cuerpos. Einstein se dio a la tarea de integrarla con las ideas de la relatividad especial, agregando el **principio de equivalencia** que establece que *es imposible distinguir un cuerpo acelerado uniformemente de un cuerpo bajo la atracción gravitacional*, para dar a luz la teoría moderna de gravitación con la que se cuenta hoy en día, llamada Relatividad General, la cual es una teoría que considera la fuerza gravitacional como una consecuencia de la curvatura del espaciotiempo debido a la presencia de materia o energía, es decir, la materia determina la geometría del espaciotiempo. A pesar de que el espaciotiempo tenga una estructura global curva, en una zona pequeña se sigue comportando como un espacio plano, entonces debe establecerse la teoría a través de matemáticas en espacios curvos que tengan la propiedad anterior.

Antes de seguir en el desarrollo de la teoría de la relatividad general es conveniente introducir la herramienta matemática adecuada para hacer formularla en términos de esta, por ende, los siguientes párrafos estarán destinados a presentar las definiciones necesarias para enunciar la teoría de gravitación como lo hizo Einstein en su momento.

El lenguaje matemático en el que está hecha la teoría de Einstein es el que proporciona la geometría diferencial, la cual estudia una clase particular de espacios topológicos que se conocen como variedades diferenciables. Estos espacios tienen las siguientes propiedades:

1. Son localmente Euclidianos.
2. Son Hausdorff.
3. Son 2do numerables.

Un espacio de este tipo suena bastante bien para ser el representante del espaciotiempo ya que la primera propiedad implica que de manera *local* el espacio se ve como un espacio euclidiano. Por ejemplo, una esfera puede verse como un espacio plano (figura (1.1)) de manera local.

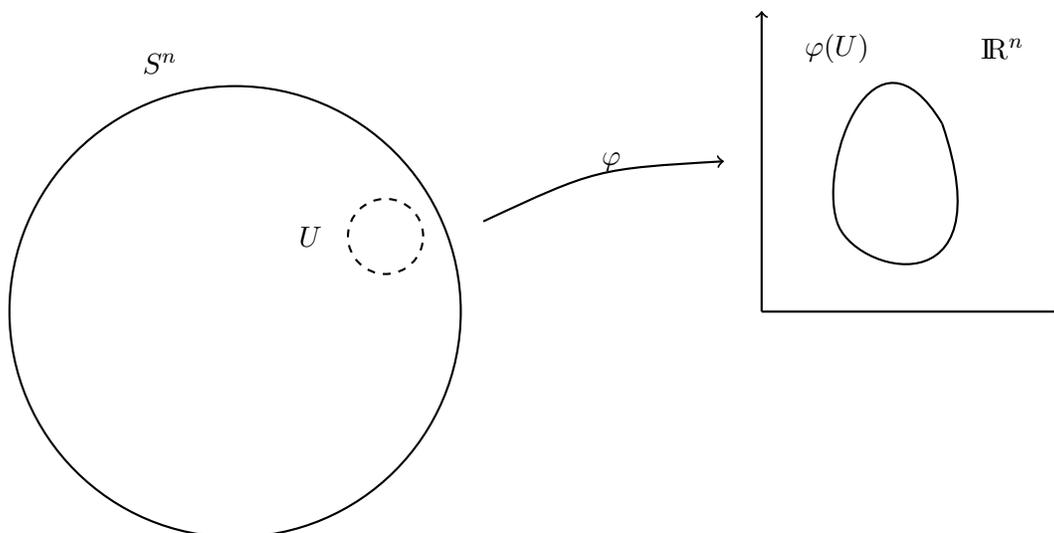


Figura 1.1: Una esfera puede verse como un espacio euclidiano de manera local.

La segunda propiedad implica que es posible distinguir cualesquiera dos puntos en el espacio mediante vecindades ajenas, o dicho de otra forma, el espacio es *separable*, propiedad que tiene el espaciotiempo.

La tercera propiedad está aunada a la segunda, pero es una cuestión de consistencia matemática más allá (al menos para el autor) de algún requerimiento físico¹.

Una variedad suave M es un espacio topológico de dimensión n con las propiedades anteriores y una familia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, donde A es conjunto de índices, los subconjuntos U_α son abiertos en la topología de M^2 , los mapeos $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ son suaves (de clase C^∞), existen sus inversos, también son suaves y se debe satisfacer

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,
2. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son suaves (restringidas al dominio adecuado).

A la pareja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se le conoce como **carta** de M y al conjunto $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ se le llama **atlas** de M . Las cartas son las parejas que permiten ver, de manera local, a M como un subconjunto de un \mathbb{R}^n . Entonces, dado un $p \in M$, su imagen bajo el mapeo $\varphi(p)$ es un elemento en \mathbb{R}^n , con **funciones coordenadas** o **coordenadas locales** $\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p)$ [7].

El conjunto de funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suaves, que se denota por $C^\infty(M)$, con las operaciones usuales en las funciones

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

y la multiplicación por un escalar

$$(\lambda f)(p) = \lambda f(p), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in C^\infty(M),$$

forma un espacio vectorial; con la operación de producto dado por

$$(fg)(p) = f(p)g(p), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

¹Un espacio topológico T se dice 2do numerable si existe alguna colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ de T tal que cualquier subconjunto abierto de T puede escribirse como la unión de algunos elementos de la colección \mathcal{U} . [5]

²Una definición detallada puede encontrarse en [6]. En este trabajo se tratarán los conceptos esenciales y no será exhaustivo el tratamiento en esta parte.

forma un anillo, en consecuencia, $C^\infty(M)$ es un álgebra sobre \mathbb{R} , y servirá para definir a los vectores tangentes a M a través de las derivadas direccionales de las funciones $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$, pues la noción de vector que se tiene de manera intuitiva coincide con la dirección de derivación, entonces resulta natural definir a los vectores de una manera operacional, dicho de otra forma, puede definirse escribiendo cómo actúa sobre los elementos de $C^\infty(M)$.

Un vector tangente a M en p es un operador $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} v(\lambda f + g) &= \lambda v(f) + v(g), \\ v(fg) &= v(f)g + fv(g). \end{aligned}$$

Al conjunto de todos los vectores tangentes a $p \in M$ con las operaciones

$$\begin{aligned} (v + w)(f)(p) &= v(f(p)) + w(f(p)), \\ (\lambda v)(f)(p) &= \lambda v(f(p)), \end{aligned}$$

se le denota por T_pM y se le llama espacio tangente a M en p , con la definición anterior puede verificarse con facilidad que T_pM es un espacio vectorial real de dimensión finita [6, 8], además, dado que se ha argumentado la existencia de una identificación uno a uno entre los vectores tangentes en M y las derivadas direccionales, se puede tomar como una base para este espacio el conjunto $\{\partial_\mu\}_{1 \leq \mu \leq n}$.

En álgebra lineal existe el concepto de espacio vectorial dual al espacio vectorial V , que se denota como V^* y consta de todas las funcionales lineales $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$, *i.e.*, para cualesquiera dos vectores $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$\pi(\lambda v + w) = \lambda\pi(v) + \pi(w).$$

Cuando el espacio vectorial V es de dimensión finita resulta ser que su espacio dual V^* tiene la misma que V [8]. En efecto, si $v \in V$, y el conjunto $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de V , dicho vector puede escribirse como

$$v = \alpha^i e_i,$$

entonces pueden definirse funcionales lineales $\tilde{e}^j \in V^*$, con $1 \leq j \leq n$, que satisfagan la siguiente expresión

$$\tilde{e}^j(e_i) = \delta^j_i,$$

donde δ^j_i es la delta de Kronecker. Así, para un vector $v \in V$, se tiene que

$$\tilde{e}^j(v) = \tilde{e}^j(\alpha^i e_i) = \alpha^i \tilde{e}^j(e_i) = \alpha^i \delta^j_i = \alpha^j.$$

la base de V^* dual a β que se denota por β^* es el conjunto $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\}$.

En el caso del espacio tangente T_pM , su espacio dual se denota por T_p^*M y se le llama **espacio cotangente** a M en p , consta de funcionales lineales a las que comúnmente se les llama **covectores**, que toman vectores de T_pM y les asignan un número real. Dado que el espacio tangente es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces también el espacio cotangente será de la misma dimensión, cuya base se le denotará por $\{dx^\mu\}_{1 \leq \mu \leq n}$ y sus elementos cumplen con la condición

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu.$$

Al conjunto de los espacios tangentes a todos los puntos de M se le llama **haz tangente** y es el conjunto definido por

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM,$$

donde el símbolo \sqcup indica que la unión es disjunta. Este espacio resulta ser también una variedad del doble de la dimensión que M , además es suave si M lo es[6].

Un **campo vectorial** X en M es un mapeo $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} X(\lambda f + g) &= X(f) + X(g), \\ X(fg) &= X(f)g + fX(g), \end{aligned}$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que $X_p = v$ asigna a cada punto p de M un vector tangente v en T_pM . Si (U, φ) es una carta de M , con funciones coordenadas x^μ y que contiene a p , entonces X_p puede escribirse en términos de la base $\{\partial_\mu\}$ como

$$X_p = v^\mu(p)\partial_\mu,$$

donde las funciones $v^\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ se le llaman las componentes de v_p relativas a la carta (U, φ) . Si las funciones v^μ son suaves se dice que el campo vectorial es suave. El conjunto de todos los campos vectoriales en M se le denota como $\mathfrak{X}(M)$ y con las operaciones definidas anteriormente es un $C^\infty(M)$ -módulo.

Al conjunto de todos los espacios cotangentes en p a M se le llama **haz cotangente** y se define como el conjunto

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

el cual, al igual que el haz tangente, es una variedad del doble de la dimensión que M y es una variedad suave si M es una suave a su vez.

Una **1-forma** sobre una variedad suave M es un mapeo $\omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que cumple

$$\begin{aligned} \omega(\lambda X + Y) &= \lambda\omega(X) + \omega(Y), \\ \omega(fX) &= f\omega(X), \end{aligned}$$

en particular, asigna a cada punto p de M un covector $\omega_p \in T_p^*M$. Si (U, φ) es una carta de M que contiene a p , con funciones coordenadas x^μ , entonces ω_p puede escribirse en términos de la base como sigue

$$\omega_p = \omega_\mu(p)dx^\mu,$$

las funciones $\omega_\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman funciones componentes de ω relativas a la carta (U, φ) ; se dice que la 1-forma es suave si lo son las funciones componentes.

Dada una función $\phi : M \rightarrow N$ suave entre variedades y un punto p en M . Al homomorfismo

$$d\phi_p : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N,$$

se le llama la diferencial de ϕ en p . La diferencial es una aplicación lineal que a un vector $v \in T_pM$ le asigna un vector en $T_{\phi(p)}N$ de la siguiente forma

$$d\phi_p(v) = v(\phi);$$

en coordenadas locales se tiene que

$$d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu.$$

En particular, las funciones coordenadas son funciones que a cada punto p de M le asignan un número real, entonces puede tomarse su diferencial. Para cada función x^μ se tiene lo siguiente

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

Si $f \in C^\infty(N)$, entonces $v(\phi)(f) = v(f \circ \phi)$, donde es claro que $f \circ \phi \in C^\infty(M)$. A la acción anterior se le conoce como **pullback** de f y se denota por

$$\phi^*(f) = f \circ \phi.$$

Obsérvese que el pullback define una función $\phi^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$. Dado que lleva funciones de N a M se le dice **contravariante**, pues va en *dirección* contraria a la dirección de la aplicación de ϕ .

Para los campos vectoriales se define el **pushforward** $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ como

$$(\phi_*(v))(f) = v(\phi^*(f)).$$

En cada punto p de M el pushforward define un vector $\phi_*v \in T_{\phi(p)}N$ partiendo de un vector $v \in T_pM$. Dado que el pushforward va en la misma dirección de la función.

Los **tensores** de tipo (n, m) son aplicaciones multilineales que actúan sobre m vectores y n covectores asignándoles un real,

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_n \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_m \rightarrow \mathbb{R},$$

$$T(\mathbf{w}^*, \mathbf{v}) \mapsto k,$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $\mathbf{w}^* = (w^{1*}, \dots, w^{m*})$, con $v_i \in V$ y $w^j \in V^*$, para cualesquiera $1, \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. En particular, los tensores del tipo $(0, 1)$ son los covectores y los tensores del tipo $(1, 0)$ son los vectores.

El conjunto de todos los tensores del tipo (n, m) forman un espacio vectorial definiendo sobre ese conjunto la operación de suma y multiplicación por un escalar usual en los espacios de funciones[8], a dicho conjunto se le denota por $\mathcal{T}_n^m(V)$. La dimensión de este espacio vectorial es k^{m+n} , donde k es la dimensión del espacio vectorial V [6, 8].

Existe otro tipo de operación que puede definirse entre tensores arbitrarios, se conoce como el producto exterior o producto tensorial, se denota por \otimes y se define de la siguiente manera: dado un tensor $T \in \mathcal{T}_q^p(V)$ y un tensor $S \in \mathcal{T}_s^r(V)$, se construye un nuevo tensor del tipo $(p+r, q+s)$, denotado por $T \otimes S$ que actúa de la siguiente forma

$$(T \otimes S)(\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{w}_1^*, \mathbf{v}_1)S(\mathbf{w}_2^*, \mathbf{v}_2),$$

donde $\mathbf{v}_1 = (v_1, \dots, v_p)$, $\mathbf{v}_2 = (v_{p+1}, \dots, v_{p+r})$, $\mathbf{w}_1^* = (w^{1*}, \dots, w^{q*})$ y $\mathbf{w}_2^* = (w^{q+1*}, \dots, w^{q+s*})$. Dado que V es un espacio vectorial de dimensión finita, dígame n , pueden construirse tensores a partir del producto tensorial de una base $\{v_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n}$ y la base dual asociada $\{v^{\beta*}\}_{1 \leq \beta \leq n}$, los cuales forman una base de los tensores $\mathcal{T}_q^p(V)$, esta base se escribe como

$$\{v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_p} \otimes v^{\beta_1*} \otimes \cdots \otimes v^{\beta_q*}\}.$$

Un tensor, en general, puede descomponerse como una combinación línea de elementos de los *tensores elementales* de la base

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{\beta_1 \cdots \beta_m} v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v^{\beta_q*}, \quad (1.1.1)$$

donde los elementos $T^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{\beta_1 \cdots \beta_m}$, se conocen como las componentes del tensor T en la base $\{v_\alpha\}$.

Los tensores que aparecen en relatividad general están asociados con m copias del espacio tangente y n copias del espacio contangente, es decir, son elementos del espacio

$$\mathcal{T}_n^m(M) = \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_n \otimes \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_m,$$

así, punto a punto en la variedad, puede definirse un conjunto de tensores para el espacio tangente T_pM . A esta asignación se le conoce como **campos tensoriales**, los campos vectoriales y las 1-formas son ejemplos de estos.

Los espacios vectoriales pueden dotarse de una mayor estructura con un *producto interior*, dicha operación es una función que asigna un número real a dos vectores de V . Las formas más comunes de denotar al producto interior son $\langle u, v \rangle$ o $u \cdot v$, se adoptara en este texto la primera forma. El producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisface ser lineal en cada una de sus entradas $\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ (lo mismo con la otra entrada), simétrico $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para cualesquiera vectores u y v en V , cumple también con la propiedad $\langle u, v \rangle = 0$ para cualquier $u \in V$ cuando v es el vector nulo, puede ser positivo definido, es decir, satisface que $\langle v, v \rangle \geq 0$, pero no es una condición necesaria. Cabe mencionar que el producto interior permite identificar a los vectores de una base $\{e_\alpha\}$ con la base dual tomando

$$e^{\alpha*} = \langle \cdot, e_\alpha \rangle,$$

pues al ser lineal en los vectores sobre los que actúa, se ve que lo anterior define una funcional lineal. Nótese, en particular, que el producto interior es un tensor del tipo $(0, 2)$ pues satisface las propiedades de bilinealidad y es un mapeo de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Resulta evidente definir un campo tensorial del tipo $(0, 2)$ a partir de este tensor.

Una métrica g es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, simétrico, no degenerado: es consecuencia de la segunda propiedad del producto interior y se pide para garantizar la existencia de la métrica inversa, se obtiene de asignar un producto interior al espacio tangente en cada punto p de M ; así, dada una base de vectores $\{\partial_\nu\}$ en unas coordenadas locales, la métrica se puede escribir, usando (1.1.1) como

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta,$$

aunque es más común la notación

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.1.2)$$

donde se omite el símbolo de producto tensorial, de esta manera, la expresión anterior deja ver de manera intuitiva que la métrica está relacionada con el cuadrado de una distancia infinitesimal[8].

Las funciones $g_{\alpha\beta}$ se definen a partir de la evaluación $\langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle$, por una lado se tiene

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in T_pM,$$

por otra parte, los vectores pueden escribirse en términos de la base como

$$u = u^\nu \partial_\nu, \quad v = v^\mu \partial_\mu,$$

donde $u^\nu = \langle u, \partial_\nu \rangle = dx^\nu(u)$ y $v^\mu = \langle v, \partial_\mu \rangle = dx^\mu(v)$ como ya se había mencionado, entonces

$$\langle u, v \rangle = \langle u^\nu \partial_\nu, v^\mu \partial_\mu \rangle = \langle \partial_\nu, \partial_\mu \rangle dx^\nu(u) dx^\mu(v).$$

Comparando ésta última expresión con (1.1.2) puede concluirse que

$$g_p(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}, \quad (1.1.3)$$

de la expresión anterior es claro que las funciones componentes son resultado del producto interior de los elementos de la base. La métrica debe satisfacer la igualdad

$$g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta,$$

donde $g^{\alpha\beta}$ es la métrica inversa o la métrica en el espacio de los covectores. Dado que la métrica define un producto interior en cada espacio tangente de la variedad[8], siempre puede encontrarse una base ortogonal de dicho espacio, es decir, los elementos de la base cumplen con

$$g_p(v_\mu, v_\nu) = \pm\delta_{\mu\nu}.$$

El número de vectores que cumplen con $g_p(v_\mu, v_\mu) = 1$ y $g_p(v_\nu, v_\nu) = -1$ es la misma cantidad si se escogiera otra base de T_pM , esto permite definir la *signatura* de la métrica[8]. Si la signatura de la métrica es siempre positiva (o es positiva definida), entonces se tiene una **métrica riemanniana**, cuando la métrica tiene una signatura con un elemento negativo y el restante positivo, se dice que es una **métrica lorentziana**. Se entenderá como variedad riemanniana a aquella variedad equipada con una métrica riemanniana, si está equipada con una métrica lorentziana entonces se le llamará variedad lorentziana[9].

Además de definir un producto interior en el espacio tangente a cada punto de la variedad, la métrica sirve para *subir y bajar índices*. Supóngase que se tiene campo vectorial v , una base del espacio tangente $\{\partial_\nu\}$ en algunas coordenadas locales y que la métrica está expandida en dicha base, entonces al hacer que la métrica actúe sobre dicho campo vectorial, expresado en la base como,

$$v = v^\nu \partial_\nu,$$

se obtiene una 1-forma

$$\omega = g(\cdot, v) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu (v^\nu \partial_\nu) = g_{\mu\nu} v^\nu dx^\mu = \omega_\mu dx^\mu,$$

donde $\omega_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$. La 1-forma resultante puede actuar sobre otro campo vectorial w para obtener un número real. Dado que cada campo vectorial v define de manera única a la 1-forma anterior³, las componentes de esta 1-forma se escriben como v^μ . El ejemplo anterior muestra cómo la métrica puede identificar a un vector con una 1-forma, lo cual muestra que el proceso de subir y bajar índices es más bien una identificación entre campos vectoriales y 1-formas, en el espacio tangente a cada punto de la variedad, de manera similar, puede identificarse a un covector con un vector usando la métrica en el espacio vectorial de los covectores. Esta acción puede extenderse para tensores arbitrarios (n, m) , el resultado de dicha acción es un tensor $(n + 1, m - 1)$, si se actúa con la métrica de los vectores, y un tensor $(n - 1, m + 1)$, si se actúa con la métrica inversa.

El último concepto que es preciso recordar de relatividad general es la derivada covariante. La construcción anterior del espacio tangente fue puntual, la pregunta que puede hacerse es cómo se identifican dos vectores del espacio tangente en dos puntos distintos del espaciotiempo. Es claro que primero debe definirse una curva en el espaciotiempo mediante algún parámetro y después ver como pueden asociarse los vectores en un espacio tangente a los vectores de otro espacio tangente en un punto distinto unidos mediante una curva dada. La respuesta a la pregunta anterior la da justamente el objeto al que se llama derivada covariante y satisface:

$$\nabla_u v = \left(\frac{dv^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \right) e_\nu, \quad (1.1.4)$$

donde la expresión anterior representa la derivada covariante del campo vectorial v en la dirección del campo u . Los coeficientes $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ se conocen como símbolos de Christoffel⁴ y están dados por la siguiente

³Pues el mapeo es uno a uno [9]

⁴Se considera la teoría de Einstein libre de *torsión*, lo cual permite obtener los símbolos de Christoffel como se presentó, además de volverlos simétricos, es decir, de la definición dada es fácil ver que

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}.$$

La teoría donde se considera torsión se conoce como teoría de Einstein-Cartan[10] y está fuera del espectro de esta tesis.

fórmula

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda} (\partial_\beta g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}).$$

En particular, si la derivada covariante es igual a cero, eso implica, debido a la independencia lineal de la base e_ν , que los coeficientes son iguales a cero, por tanto debe satisfacerse

$$\frac{dv^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0,$$

la ecuación anterior describe una **geodésica**, es decir, es una curva que transporta sus vectores tangentes de manera paralela; también puede entenderse como la trayectoria cuya longitud es mínima o máxima⁵. En relatividad general, se asume que las curvas geodésicas son las trayectorias que siguen las partículas de prueba cuando no están sujetas a ninguna interacción.

Nótese que la ecuación (1.1.4), con la igualdad[11]

$$\frac{dv^\nu}{d\lambda} = u^\beta \partial_\beta v^\nu,$$

puede escribirse como

$$\nabla_u v = u^\beta \partial_\beta v^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v^\alpha u^\beta = \left(\partial_\beta v^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v^\alpha \right) u^\beta.$$

El término entre paréntesis define la derivada covariante del campo vectorial v

$$\nabla_\beta v^\nu = \partial_\beta v^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v^\alpha,$$

que resulta ser un tensor del tipo (1, 1), en el caso de una 1-forma se tiene una expresión similar [12]

$$\nabla_\beta \omega_\nu = \partial_\beta \omega_\nu - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \omega_\alpha,$$

en general, para un tensor de rango (n, m) su derivada covariante es[12]⁶

$$\nabla_\beta T^{\nu_1, \dots, \nu_n}_{\mu_1, \dots, \mu_m} = \partial_\beta T^{\nu_1, \dots, \nu_n}_{\mu_1, \dots, \mu_m} + \sum_{i=1}^n \Gamma^{\nu_i}_{\beta \hat{\nu}_i} T^{\nu_1, \dots, \hat{\nu}_i, \dots, \nu_n}_{\mu_1, \dots, \mu_m} - \sum_{j=1}^m \Gamma^{\hat{\mu}_j}_{\beta \mu_j} T^{\nu_1, \dots, \nu_n}_{\mu_1, \dots, \hat{\mu}_j, \dots, \mu_m},$$

un caso muy especial es el de la métrica pues su derivada covariante satisface[8, 11, 13]

$$\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0.$$

Como ya se había mencionado, la interacción gravitacional no es compatible con la relatividad especial y la conservación de la energía pues permite la implementación de máquinas ideales que generen una cantidad infinita de energía [11]. Lo que debe de modificarse es alguna de las propiedades del espaciotiempo de Minkowski. La conclusión a la que llegó Einstein es que la gravedad puede entenderse como una deformación del espaciotiempo, el cual hace que deba tratarse con variedades *curvas*. En general, los espacios no euclidianos no satisfacen con el quinto postulado de Euclides, el cual puede parafrasearse como *dos rectas paralelas nunca se cortan*. Como motivación para estudiar los espacios no euclidianos considérese el ejemplo clásico de una curva en una esfera que comienza en alguno de sus polos, después se avanza

⁵En el espacio euclideo, con el producto interior usual, las rectas son las trayectorias de longitud mínima; en el caso del espacio lorentziano, las líneas rectas son aquellas con longitud máxima.

⁶Se espera que la notación sea entendible, lo que se está haciendo es una doble suma, la que está dada por la contracción de los índices y la que se está haciendo al recorrerlos en los símbolos de Christoffel. Debe tenerse especial atención en los índices con gorro pues estos van recorriéndose en su posición.

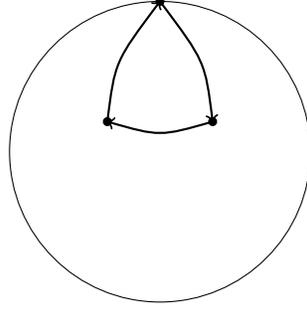


Figura 1.2: Transporte paralelo del vector tangente a la curva en la esfera.

hacia una dirección a una cierta distancia, luego se gira en alguna dirección un ángulo recto y se avanza otra cierta distancia para volver a girar un ángulo recto en sentido contrario del primero y se vuelve a avanzar hasta llegar de nuevo al punto de inicio (ver Figura 1.2). Si en la curva anterior se transporta un vector tangente a dicha curva, al terminar el recorrido el vector resultante del transporte paralelo será distinto del vector inicial y se debe a que la esfera es un espacio *curvo*, otro hecho que ocurre en los espacios con curvatura es que los triángulos, como el ejemplo descrito, tienen ángulos interiores cuya suma es mayor a π radianes. En general, puede decirse que los ángulos interiores en un triángulo suman una cantidad distinta de π radianes, dependerá de la curvatura del espacio si es mayor o menor, el primer caso corresponde a espacios con curvatura positiva como la esfera y el segundo caso está relacionado con espacios con curvatura negativa como los hiperboloides.

Para tratar espacios con curvatura es necesario hacer uso del tensor de Riemann, está asociado a la variación de un vector, a través de transportarlo de manera paralela en una curva cerrada, esto puede medirse tomando la diferencia en los transportes paralelos partiendo de un punto y llegando a otro distinto mediante dos curvas, entonces el **tensor de Riemann** puede definirse [12] como

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}v^\alpha \equiv \nabla_\beta \nabla_\gamma v^\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta v^\alpha, \quad (1.1.5)$$

en términos de los símbolos de Christoffel, se tiene

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \Gamma^\mu{}_{\mu\delta}. \quad (1.1.6)$$

El **tensor de Ricci** se define a partir del tensor de Riemann como[12]

$$R_{\beta\delta} = R^\gamma{}_{\beta\gamma\delta}. \quad (1.1.7)$$

Finalmente, el **escalar de curvatura** o escala de Ricci está definido por[12]

$$R = R^\alpha{}_\alpha. \quad (1.1.8)$$

Las ecuaciones de Einstein en un espaciotiempo de cuatro dimensiones son un conjunto de diez ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden sobre las funciones de la métrica, que codifican la estructura geométrica del mismo a través de la cantidad y distribución de materia y energía presente a través del tensor de energía-momento. La forma de obtenerlas es mediante la minimización de la acción de *Einstein-Hilbert*, o bien, derivándolo de una manera heurística, de tal suerte que cumplan con el principio de equivalencia y la conservación de energía y momento. Típicamente, en un primer acercamiento a la teoría, las ecuación son deducidas siguiendo las ideas de Einstein. Para exponer en este texto un método

más cercano a la teoría de Lagrange y Hamilton, las ecuaciones de Einstein serán deducidas partiendo de la acción de Einstein-Hilbert. La acción que va a considerarse para tal fin es la siguiente

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (1.1.9)$$

donde $g = \det g_{\mu\nu}$ y R es el escalar de curvatura. La propuesta es que esta acción, vista como una funcional del tensor métrico, satisface que en sus extremos se obtiene el tensor métrico físico que describe al espaciotiempo. Debe realizarse la variación de dicha acción respecto a las componentes del tensor métrico, y dicha variación también dará las ecuaciones de movimiento. Para efectuar la variación de (1.1.9), es necesario mencionar la formulación lagrangiana de una teoría de campo. La siguiente sección presenta las herramientas para establecer la conexión entre la expresión anterior y la ecuación que ya conocida

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (1.1.10)$$

donde G es la constante de gravitación universal y

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \quad (1.1.11)$$

es el célebre tensor de Einstein.

Por su parte, el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ contiene toda la información de la materia y energía que se encuentra en el espaciotiempo y define la geometría del mismo. Además satisface la ecuación

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0,$$

la cual está asociada a la conservación de energía y momento.

1.2. Reescribiendo las ecuaciones de Einstein: La formulación ADM

Las ecuaciones de Einstein que se presentaron anteriormente, tienen una belleza increíble, pues relaciona la geometría del espaciotiempo que está dado por el tensor de Einstein, y la materia, que está en función del tensor de energía-momento. A pesar de lo anterior, las ecuaciones no contienen de manera explícita cómo evoluciona el espacio en función del tiempo, ya que trata a ambas coordenadas como iguales debido a la covarianza de la teoría, pues esta implica, en particular que

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0,$$

esta expresión resultan ser constricciones que se mantienen cuando las ecuaciones dinámicas se satisfacen, esto hace que sea complicado separar las ecuaciones dinámicas de las constricciones[14].

Para obtener los verdaderos grados de libertad de la teoría se procede a hacer una descripción hamiltoniana de la gravedad, esto implica que debe tenerse una descripción lagrangiana de la misma, también que debe privilegiarse al tiempo para poder obtener las velocidades generalizadas asociadas a la lagrangiana gravitacional. Por supuesto, esto rompe la covarianza de las ecuaciones y corta al espaciotiempo en rebandadas [14]. El trabajo no fue sencillo y mentes como la de Dirac, uno de lo más grandes físicos que ha existido, fracasaron en la búsqueda de una descripción dinámica de la ecuación de Einstein [14]. En los años 60's del siglo pasado, R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner encontraron una manera de obtener la dinámica de las ecuaciones de Einstein al notar que la evolución de una superficie tridimensional puede tratarse como un problema de Cauchy. A dicha formulación es lo que se conoce como *formalismo ADM*. Lo que resta del capítulo tratará de exponer las ideas y los conceptos necesarios para dicha formulación

y desarrollar las expresiones que serán necesarias en los siguientes capítulos. Como ya se mencionó es necesaria una descripción lagrangiana de la gravedad para poder pasar a una descripción hamiltoniana, a continuación se presentan las herramientas y los conceptos necesarios para poder dar una descripción lagrangiana de la gravedad.

1.2.1. Formulación Lagrangiana

En mecánica clásica, la acción está relacionada con la lagrangiana del sistema de la siguiente forma

$$S = \int L(q, \dot{q}; t) dt,$$

donde q , \dot{q} y t son, respectivamente, las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y un parámetro que usualmente se asocia con el tiempo. Por otro lado, nótese que la acción enunciada en (1.1.9) es una integral sobre el espaciotiempo de la cantidad definida por

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R, \tag{1.2.1}$$

por lo que, al menos de manera intuitiva, puede considerarse a (1.1.9) como la integral sobre el tiempo de la expresión

$$L = \int \mathcal{L}_G d^3x. \tag{1.2.2}$$

Dados los párrafos anteriores, es sugerente que a (1.2.2) se le puede pensar como una lagrangiana y a (1.2.1) como una **densidad lagrangiana** por unidad de volumen. La existencia de una densidad lagrangiana indica que deben haber grados de libertad asociados a cada punto del espacio sobre el cual se integra, información que usualmente se codifica por medio de la introducción de uno o más campos. En lo que sigue se verá la forma de aplicar un principio variacional en este contexto.

Un campo es una cantidad definida en cada punto del espacio y del tiempo $(\vec{x}; t)$ [15]. Mientras que en mecánica clásica las partículas tratan con un número finito de coordenadas generalizadas $q_\alpha(t)$, indexadas por una etiqueta α , en la teoría de campos es de interés la dinámica de los campos

$$\phi_\alpha(\vec{x}; t)$$

donde α y \vec{x} son considerados como etiquetas. Entonces se trata con un sistema con un número infinito de grados de libertad. Nótese que el concepto de *posición* ha sido relegado de una variable dinámica en la mecánica de una partícula a un etiqueta en la teoría de campos.

La dinámica en esta teoría estará gobernada por una lagrangiana que sea función del campo $\phi(\vec{x}; t)$, de su derivada respecto al tiempo $\dot{\phi}(\vec{x}; t)$ y sus derivadas respecto a las coordenadas espaciales $\nabla\phi(\vec{x}; t)$ [15]. En los sistemas que se considerarán en esta tesis la densidad lagrangiana será función del campo y de sus primeras derivadas a lo sumo, para hacer más simple la notación se usará $\partial_\mu\phi$ para representar a la derivada temporal y las derivadas espaciales. La lagrangiana tendrá la forma

$$L = \int \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu\phi_\alpha) d^3x,$$

en consecuencia, la acción será

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int \mathcal{L} d^4x.$$

Es posible obtener ecuaciones de movimiento a través del principio de mínima acción. Se varía la trayectoria de integración, manteniendo los puntos extremos fijos y pidiendo que $\delta S = 0$,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right] d^4 x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) \right] \delta \phi_\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha \right) d^4 x.\end{aligned}$$

El último término es una derivada total y se anula para cualquier $\delta \phi_\alpha(\vec{x}; t)$ que decae cuando las coordenadas espaciales tienden a infinito y obedece $\delta \phi_\alpha(\vec{x}; t_1) = \delta \phi_\alpha(\vec{x}; t_2) = 0$. Imponiendo que la variación de la acción se anule para cualquier trayectoria se obtienen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para los campos ϕ_α ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) = 0. \quad (1.2.3)$$

Los siguientes ejemplos de lagrangianas de campos son los más sencillos. Supóngase que la densidad lagrangiana para un campo escalar ϕ está dada por

$$\mathcal{L}_{KG}(\phi, \partial_\mu \phi) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2),$$

la cual está asociado al campo de Klein-Gordon en el espaciotiempo de Minkowski. Dicho campo corresponde a la solución de partícula libre [8, 15]. Se calcula la ecuación de movimiento que satisface este campo, por un lado

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \phi} \right|_{\partial_\mu \phi = cte} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right), \\ &= m^2 \phi;\end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left(\left. \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right|_{\phi = cte} \right) &= \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \right) \right], \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu \phi), \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \phi.\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (1.2.3) se obtiene

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0, \quad (1.2.4)$$

la cual puede revisarse en [8] que corresponde a la ecuación de campo de Klein-Gordon. El siguiente ejemplo corresponde al campo electromagnético. Es importante tratarlo pues se usará la acción Einstein-Maxwell cuando se presenten las soluciones de la brana magnética. Considérese la densidad lagrangiana para el potencial vectorial A_μ [8]

$$\mathcal{L}_{EM}(\partial_\nu A^\mu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\partial_{[\mu}A_{\nu]} \partial^{[\mu}A^{\nu]},$$

donde

$$\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu).$$

La densidad lagrangiana para el electromagnetismo también puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} [\partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu - \partial_\beta A_\alpha \partial_\nu A_\mu].$$

Por otro lado, las derivadas funcionales satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(A_\beta)} &= 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= -(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores las variables fueron el campo escalar ϕ para la densidad lagrangiana de Klein-Gordon y el vector potencial A_μ para la densidad lagrangiana del campo electromagnético.

En el caso de la gravedad, la variable es el tensor métrico, un tensor de rango 2, definido en una variedad M de dimensión cuatro. La densidad lagrangiana que se había propuesto es

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R,$$

para la cual pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento variando la acción con respecto a la métrica, de hecho, se considerarán variaciones respecto a la métrica inversa ya que facilita un poco el trabajo y las ecuaciones son equivalentes[12]. Usando $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, se tiene

$$\delta S_H = \int [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta(\sqrt{-g})] d^4x. \quad (1.2.5)$$

El segundo término está en la forma que se requiere pues está multiplicado por $\delta g^{\mu\nu}$; los términos restantes deben llevarse a una forma similar examinándolos con mayor detalle.

El tensor de Ricci es una contracción del tensor de Riemann, el cual está dado por (1.1.6)

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \Gamma^\mu{}_{\mu\delta}.$$

La variación de este objeto con respecto a la métrica puede hallarse variando primero la conexión respecto a la métrica y sustituir en resultado en la expresión anterior. Las variaciones de la conexión, sin embargo, se tomarán reemplazando

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \rightarrow \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

Dado que $\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ es la diferencia de dos conexiones, entonces puede tomarse su derivada covariante,

$$\nabla_\mu (\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}) = \partial_\mu (\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}) + \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} \delta\Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} \delta\Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\gamma} \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda}.$$

La expresión anterior puede llevarse a [12]

$$\delta R^\alpha{}_{\gamma\mu\beta} = \nabla_\mu (\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}) - \nabla_\beta (\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}).$$

Así, el primer término en la integral (1.2.5) puede reescribirse, usando $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, como

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\alpha\mu} (\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\alpha}) - g^{\alpha\beta} (\delta\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta})) d^4x,$$

el cual corresponde a la divergencia de un vector, usando el teorema de Stokes este término puede reemplazarse por una integral de superficie evaluada en infinito que pueda anularse imponiendo la

condición de que la variación sea cero en infinito. Por tanto, este término no contribuye en la variación total[12].

Para reescribir el tercer término en (1.2.5) es necesario hacer uso de la siguiente identidad para una matriz A arbitraria:

$$\text{tr}(\ln A) = \ln(\det A),$$

donde $\ln A$ está definido por $\exp(\ln A) = A$. La variación de la igualdad anterior conlleva a

$$\text{tr}(A^{-1}\delta A) = \frac{1}{\det A}\delta(\det A),$$

donde se usó la propiedad cíclica de la traza y se ha ignorado que A^{-1} y δA pueden no conmutar al tratarse de un producto de matrices. Aplicando este resultado a la métrica inversa y usando

$$\delta(g^{-1}) = \frac{1}{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

resulta

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Sustituyendo este resultado en (1.2.5) y recordando que el primer término con contribuye, se obtiene

$$\delta S_H = \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x.$$

Esta última expresión debe anularse para cualquier variación arbitraria, lo que conlleva a las ecuaciones de Einstein en vacío

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Para considerar ecuaciones de campo distintas del vacío debe tomarse una acción de la forma

$$S = \frac{1}{8\pi G}S_H + S_M,$$

donde S_M es la acción para los campos de materia. Siguiendo un procedimiento similar al expuesto anteriormente se llega a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (1.2.6)$$

las ecuaciones de Einstein se recuperan si se toma

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.2.7)$$

La identificación del tensor de energía momento a través (1.2.7) pareciera *ad hoc*, no obstante es la “mejor” manera de definir un tensor simétrico que satisface la condición de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, como se muestra en [12].

1.2.2. Descomposición 3+1

La forma de extraer la información dinámica del espaciotiempo es la siguiente: considérese una variedad Lorentziana M difeomorfa a $\mathbb{R} \times S$, donde S es la variedad que representa al *espacio* y $t \in \mathbb{R}$ representa al *tiempo*. La elección de esta coordenada es arbitraria. Notése que puede definirse una coordenada temporal τ en M usando el pullback del difeomorfismo $\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S$, entonces $\tau = \phi^*t$. Se tienen tantas coordenadas temporales como difeomorfismos entre M y $\mathbb{R} \times S$. Lo que debe asegurarse es que la descomposición que está haciéndose no depende de la elección de la coordenada temporal.

Considérese una variedad M con una métrica de signatura $(-, +, +, +)$, funciones coordenadas que se denotan por x^μ y una variedad Σ de dimensión 3. Defínase la siguiente función $X : \Sigma \rightarrow M$

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a), \quad (1.2.8)$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $a = 1, 2, 3$ y las funciones coordenadas ξ^a están asociadas a Σ . La función anterior define un encaje $\Sigma \hookrightarrow M$ si las funciones coordenadas de Σ son inyectivas [14]. Además, Σ está relacionada con S a través de la función $\pi_S \circ \phi \circ X : \Sigma \rightarrow S$, donde π_S es la proyección dada por $\pi_S : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$, entonces Σ y S no son el mismo objeto pero están relacionados por el mapeo anterior.

Hay que ver que la métrica en M induce una métrica en Σ . El intervalo en una vecindad de un punto p de M se escribe como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(p)dx^\alpha dx^\beta.$$

Al hacer la restricción a Σ usando el encaje dado por (1.2.8) se tiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}(p)dX^\alpha(\xi^a)dX^\beta(\xi^b), \\ &= g_{\alpha\beta}(p)\frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^a}d\xi^a\frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^b}d\xi^b, \\ &= \left[g_{\alpha\beta}(p)\frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^b} \right] d\xi^a d\xi^b, \end{aligned}$$

De donde puede definirse a la *métrica inducida* como

$${}^3g_{ab}(p) = g_{\alpha\beta}(p)\frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^b}. \quad (1.2.9)$$

Resta verificar que es una métrica para Σ . Hay que recordar que los elementos de la base del espacio tangente en p como elemento de Σ , con las derivaciones, están dados por

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a},$$

mientras que los elementos de la base del espacio tangente en p , visto como un elemento en M , son

$$\frac{\partial}{\partial X^\alpha}.$$

Notése que los elementos

$$A^\alpha_a \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^a},$$

corresponden a la α -ésima componente, del a -ésimo vector, en otras palabras, corresponden a los coeficientes que permiten escribir los elementos de la base del espacio tangente $T_p\Sigma$ en términos de los elementos de la base de T_pM . Así, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi^a} &= A^\alpha{}_a \frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^a} \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.\end{aligned}$$

Puede concluirse que la métrica inducida proviene de los elementos de la base del espacio tangente a Σ , pues

$$g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}(p)$$

y por tanto, después de simplificar usando las propiedades que satisface la métrica, resulta

$$\begin{aligned}{}^3g_{ab}(p) &= g_{\alpha\beta} A^\alpha{}_a A^\beta{}_b, \\ &= g(\partial_\alpha, \partial_\beta) A^\alpha{}_a A^\beta{}_b, \\ &= g(A^\alpha{}_a \partial_\alpha, A^\beta{}_b \partial_\beta), \\ &= g(\partial_a, \partial_b), \\ &= \langle e_a, e_b \rangle,\end{aligned}$$

donde $e_a = \partial_a = \partial/\partial\xi^a$ y $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$. Así, la métrica inducida queda definida de manera *natural* en la base de $T_p\Sigma$.

Como el espacio $T_p\Sigma$ es un subespacio vectorial de T_pM de dimensión 3, debe encontrarse un vector que junto con los vectores de la base de $T_p\Sigma$ complete una base para T_pM . Dado que se tiene un producto interior, se construye el complemento ortogonal a $T_p\Sigma$ con la métrica $g_{\alpha\beta}$. Dicho subespacio es de dimensión 1 y es generado por un vector que se denota como n . En consecuencia, dicho vector debe de satisfacer

$$\langle n, e_a \rangle = 0, \quad \text{con } a = 1, 2, 3,$$

donde $e_a = \partial/\partial\xi^a$. Además se pide que esté normalizado, entonces

$$\langle n, n \rangle = -1.$$

Cualquier vector en el espacio tangente T_pM puede escribirse en términos de la base (n, e_a) que se ha construido. Entonces si $v \in T_pM$ se tiene

$$\begin{aligned}v^\mu &= (\sigma^a e_a + \sigma^\perp n)^\mu, \\ &= \sigma^a A^\mu{}_a + \sigma^\perp n^\mu,\end{aligned}$$

donde $\sigma^\perp = -\langle v, n \rangle$.

Para los vectores $v \in T_p\Sigma$ que se escriben en componentes como

$$v = \sigma^a e_a,$$

los cambios de coordenadas $X^\mu \mapsto X'^\mu$, no afectan los coeficientes σ^a pues los vectores base e_a no cambian ante tales transformaciones. En cambio, el mismo vector visto como un elemento de $T_p\Sigma$ si sufre cambios al tomar las transformaciones $\xi^a \mapsto \xi'^a$ [14]. Así, el vector transforma como $v \mapsto v'$

$$\begin{aligned}\sigma^a \frac{\partial}{\partial\xi^a} &= \sigma^a \frac{\partial\xi'^b}{\partial\xi^a} \frac{\partial}{\partial\xi'^b}, \\ &= \sigma'^a e'_a,\end{aligned}$$

donde las componentes en la nueva base están dadas por la fórmula

$$\sigma'^a = \sigma^b \frac{\partial \xi'^a}{\partial \xi^b}. \quad (1.2.10)$$

La métrica inducida 3g nos ayudará a *subir y bajar índices*, por ejemplo:

$$\begin{aligned} v_a &= {}^3g_{ab} v^b, \\ v^a &= {}^3g^{ab} v_b. \end{aligned}$$

Particularmente, si se escribe $v_b = \langle v, e_b \rangle = g_{\mu\nu} v^\nu A^\mu_b$ y se sustituye en la última expresión, conlleva a lo siguiente

$$v^a = {}^3g^{ab} g_{\mu\nu} v^\nu A^\mu_b.$$

Si se define $A^a_\nu \equiv {}^3g^{ab} g_{\mu\nu} A^\mu_b$, puede encontrarse la a -ésima componente de un vector arbitrario v como

$$v^a = A^a_\nu v^\nu. \quad (1.2.11)$$

Se ha encontrado una forma de proyectar a un vector arbitrario v en el espaciotiempo en la base de $T_p\Sigma$. Ahora debe encontrarse una forma de hallar las componentes de un vector arbitrario de $T_p\Sigma$ en términos de la base de T_pM . Dada la expresión

$$v^\mu = A^\mu_a v^a - \langle v, n \rangle n^\mu, \quad (1.2.12)$$

la cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned} A^\mu_a v^a &= v^\mu + v^\nu n_\nu n^\mu, \\ &= v^\nu (\delta^\mu_\nu + n_\nu n^\mu), \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

es natural definir al operador de proyección como

$$h^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu, \quad (1.2.14)$$

el cual tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} h^\mu_\nu n^\nu &= (\delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu) n^\nu \\ &= n^\mu + (n^\nu n_\nu) n^\mu \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^\mu_\mu &= \delta^\mu_\mu + n^\mu n_\mu \\ &= 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^\mu_\nu h^\nu_\lambda &= (\delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu)(\delta^\nu_\lambda + n^\nu n_\lambda) \\ &= \delta^\mu_\nu \delta^\nu_\lambda + \delta^\mu_\nu n^\nu n_\lambda \\ &\quad + n^\mu n_\nu \delta^\nu_\lambda + n^\mu n_\nu n^\nu n_\lambda \\ &= \delta^\mu_\lambda + n^\mu n_\lambda \\ &= h^\mu_\lambda. \end{aligned}$$

1.2.3. Curvatura Extrínseca y La Derivada Covariante Inducida

Considérese dos campos vectoriales u, v en Σ , entonces la derivada covariante en M dada por $\nabla_u v$ puede descomponerse en la parte normal y tangencial como sigue

$$\nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n).$$

El primer término se reescribe como

$$K(u, v)n = -g(\nabla_u v, n)n \quad (1.2.15)$$

donde $K(u, v)$ se conoce como **curvatura extrínseca**. La curvatura extrínseca mide qué tanto se curva Σ vista como una superficie encajada en M , ya que la información que arroja está asociada con que tanto falla el transporte paralelo de dos vectores sobre Σ usando la conexión de Levi-Civita ∇ en M .

El segundo término puede escribirse como sigue

$${}^3\nabla_u v = \nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n, \quad (1.2.16)$$

lo cual establece una conexión de Levi-Civita en Σ asociado a 3g , hecho que puede revisarse en [9]. La expresión anterior define una derivada covariante inducida en Σ con la conexión ∇ en M ; también puede asociarse un tensor de Riemann ${}^3R^i_{jkl}$ a la métrica inducida ${}^3g_{ab}$.

La curvatura extrínseca es un tensor simétrico, $C^\infty(\Sigma)$ -lineal sobre los vectores u, v que puede escribirse como

$$K(u, v) = K_{ij}u^i v^j, \quad (1.2.17)$$

en algunas coordenadas locales, donde

$$K_{ij} = K(\partial_i, \partial_j). \quad (1.2.18)$$

Existe una definición alternativa para la curvatura extrínseca tomando

$$K(u, v) = g(\nabla_u n, v). \quad (1.2.19)$$

Esta definición permite interpretar de otra forma la curvatura extrínseca: mide la rotación del vector normal n respecto a v cuando se transporta de manera paralela en la dirección de u .

La coordenada $\tau = \phi^* t$ en M tiene asociado un campo vectorial dado por ∂_τ . Considérese una *rebanada* Σ en $\tau = 0$, y supongáse que dicha superficie es espacialoide. Entonces, puede expresarse a ∂_τ en una componente normal y en una tangencial a Σ (ver 1.3), esto es

$$\partial_\tau = -g(\partial_\tau, n)n + (\partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n).$$

La expresión anterior puede reescribirse de manera más compacta, haciendo las identificaciones

$$N_l = -g(\partial_\tau, n), \quad (1.2.20)$$

$$N_s = \partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n. \quad (1.2.21)$$

El primer objeto definido en la primera ecuación se conoce como función **lapse** y el de la segunda ecuación se conocen como vector **shift**. Estos objetos junto con la métrica ${}^3g_{ab}$ constituyen las variables ADM. Es conveniente y necesario hacer una discusión respecto a la interpretación de las nuevas variables. La función lapse mide la separación que hay entre cada rebanada de espaciotiempo, es decir, contiene la información del tiempo que pasó entre dos eventos A y A' ; mide, por ejemplo, el tiempo propio transcurrido entre dichos eventos para un observador con dichas coordenadas. Por su parte, el vector shift mide qué tanto se

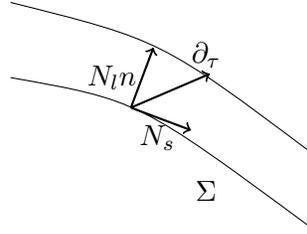


Figura 1.3: Esquema de la descomposición normal y tangencial del vector ∂_τ .

deformó la superficie Σ , y por ende, da información de cómo se desplaza un punto p fijo en Σ para cada rebanada a un tiempo $\tau = \text{constante}$. Así, para cada rebanada de espaciotiempo, deben determinarse los 4 parámetros asociados a N_l y N_s , y la métrica inducida ${}^3g_{ab}$. Es fácil ver que los grados de libertad coinciden en el formalismo cuatro dimensional original y en la descomposición en tres mas una dimensiones que se acaba de introducir, pues en un espacio de 4 dimensiones debe determinarse un total de 10 coeficientes, en el espacio tridimensional la métrica queda determinada cuando se especifican los 6 coeficientes de la matriz simétrica g_{ij} , los 4 términos restantes quedan determinados por la función lapse y el vector shift.

Es de interés saber como escribir el intervalo en términos de éstas nuevas variables. Supongáse que un evento ocurre en A con coordenadas $p(t, x^a)$ y un evento B en $p(t') = p(t + dt, x^a + dx^a)$. El intervalo entre dichos eventos puede calcularse haciendo la descomposición normal y tangencial a Σ de donde se obtiene

$$ds^2 = -(N_l dt)^2 + {}^3g_{ab}(dx^a + N_s^a dt)(dx^b + N_s^b dt),$$

al simplificar, queda lo siguiente

$$ds^2 = (N_s^a (N_s)_a - N_l^2) dt^2 + 2(N_s)_a dx^a dt + {}^3g_{ab} dx^a dx^b. \quad (1.2.22)$$

De la expresión anterior pueden hacerse las identificaciones

$$\begin{aligned} g_{00} &= N_s^a (N_s)_a - N_l^2, \\ g_{0a} &= (N_s)_a, \\ g_{ab} &= {}^3g_{ab} \end{aligned}$$

Para hallar $g^{\mu\nu}$ puede verse a $g_{\mu\nu}$ como matriz y calcular su inversa [14]. Las componentes que resultan de hacer dicha operación son:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N_l^2} & \frac{N_s^b}{N_l^2} \\ \frac{N_s^a}{N_l^2} & {}^3g^{ab} - \frac{N_s^a N_s^b}{N_l^2} \end{pmatrix}. \quad (1.2.23)$$

Finalmente, el elemento de volumen en las variables ADM está dado por [14, 8]

$$\sqrt{-g} d^4x = N_l \sqrt{{}^3g_{ab}} d^4x. \quad (1.2.24)$$

También es posible escribir el escalar de curvatura con las variables ADM, esto, con la finalidad de reescribir la acción de Einstein-Hilbert. Para poder hacer lo anterior deben usarse las ecuaciones de *Gauss-Codazzi*, que relacionan las componentes del tensor de Riemann $R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}$ con las componente de la curvatura extrínseca K_{ij} y las componente del tensor de Riemann asociados a la métrica inducida $R^i{}_{jkl}$.

Primero, calcúlese las componentes del tensor $R^\alpha{}_{ijk}$,

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k;$$

de la expresión (1.2.16) debe resultar claro que

$$\nabla_u v = K(u, v)n + {}^3\nabla_u v,$$

para cualesquiera campos vectoriales u, v , en particular, para ∂_i, ∂_j ,

$$\nabla_i \partial_j = K_{ij}n + {}^3\Gamma^k_{ij} \partial_k. \quad (1.2.25)$$

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla_j \nabla_i \partial_k &= \nabla_j (K_{ik}n + {}^3\Gamma^m_{ik} \partial_m) \\ &= \nabla_j (K_{ik}n) + \nabla_j ({}^3\Gamma^m_{ik} \partial_m) \\ &= K_{ik} \nabla_j n + \nabla_j (K_{ik}) n + \nabla_j ({}^3\Gamma^m_{ik}) \partial_m + {}^3\Gamma^m_{ik} \nabla_j \partial_m \\ &= K_{ik} \nabla_j n + K_{ik,j} n + {}^3\Gamma^m_{ik,j} \partial_m + {}^3\Gamma^m_{ik} (K_{jm}n + {}^3\Gamma^l_{jm} \partial_l) \\ &= (K_{ik,j} + {}^3\Gamma^m_{ik} K_{jm}) n + ({}^3\Gamma^m_{ik,j} + {}^3\Gamma^l_{ik} {}^3\Gamma^m_{jl}) \partial_l + K_{ik} \nabla_j n. \end{aligned}$$

El último término puede escribirse como

$$\begin{aligned} \nabla_j n &= K(\partial_j, n)n + {}^3\nabla_j n \\ &= g(\nabla_j n, n)n \\ &= K_{ji} \partial^i, \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\nabla_j n = K_j^m \partial_m,$$

que sustituido en la ecuación anterior resulta en

$$\nabla_j \nabla_i \partial_k = (K_{ik,j} + {}^3\Gamma^m_{ik} K_{jm}) n + ({}^3\Gamma^l_{ik,j} + {}^3\Gamma^l_{ik} {}^3\Gamma^m_{jl}) \partial_m + K_{ik} K_j^m \partial_m,$$

de donde, al intercambiar los índices, queda la expresión

$$\nabla_i \nabla_j \partial_k = (K_{jk,i} + {}^3\Gamma^m_{jk} K_{im}) n + ({}^3\Gamma^m_{jk,i} + {}^3\Gamma^l_{jk} {}^3\Gamma^m_{il}) \partial_m + K_{jk} K_i^m \partial_m.$$

Al tomar la resta de la segunda ecuación con la primera e identificar lo siguiente:

$${}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik} = K_{jk,i} + {}^3\Gamma^m_{jk} K_{im} - K_{ik,j} - {}^3\Gamma^m_{ik} K_{jm},$$

$${}^3R^m_{ijk} \partial_m = ({}^3\Gamma^l_{ik,j} + {}^3\Gamma^l_{ik} {}^3\Gamma^m_{jl} - {}^3\Gamma^l_{ik,j} - {}^3\Gamma^l_{ik} {}^3\Gamma^m_{jl}) \partial_m,$$

se obtiene la ecuación de **Gauss-Codazzi**:

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = ({}^3\nabla_i R_{jk} - {}^3\nabla_j R_{ik}) n + ({}^3R^m_{ijk} + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m. \quad (1.2.26)$$

1.2.4. Formulaci3n Hamiltoniana

Despu3s de reescribir el escalar de curvatura en t3rminos de las variables ADM, ahora es posible encontrar una descripci3n hamiltoniana del espaciotiempo. Hasta este punto ya se tienen desarrollado los ingredientes necesarios para poder hacer una descomposici3n del espaciotiempo privilegiando una coordenada para que juegue el rol del tiempo en la teor3a de Hamilton. Para desarrollar lo que resta se adecuar3n al contexto de campos los pasos del formalismo de Hamilton de la mec3nica cl3sica de sistemas con grados de libertad finitos. Dada una densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ para un campo tensorial ψ del tipo (k, l) , se define la **densidad de momento conjugado** al campo ψ como

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}, \quad (1.2.27)$$

por ejemplo, para un campo escalar ϕ como el campo de Klein-Gordon, el momento conjugado es la derivada respecto al tiempo del campo, $\partial_t \phi = \dot{\phi}$.

La **densidad hamiltoniana** para el campo tensorial ψ se escribe, como en mec3nica cl3sica, de la forma

$$\mathcal{H}(\psi, \pi) = \dot{\psi} \pi - \mathcal{L}, \quad (1.2.28)$$

y la hamiltoniana ser3

$$H = \int \mathcal{H}(\psi, \pi) d^3x.$$

Para poder hacer una descripci3n con las variables ADM debe escribirse el escalar de curvatura en t3rminos del escalar de Ricci extr3nseco y la curvatura extr3nseca. De la ecuaci3n de Gauss-Codazzi, se obtiene

$$R = {}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2, \quad (1.2.29)$$

donde $K = K^i_j$ y 3R es el escalar de Ricci de la m3trica inducida. Tomando ${}^3g_{ij} = h_{ij}$, la densidad lagrangiana para la relatividad general (1.2.1) se escribe, sustituyendo las ecuaciones (1.2.24) y (1.2.29) en (1.2.1), como

$$\mathcal{L} = N_l \sqrt{h} ({}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2), \quad (1.2.30)$$

con $h = \det h_{ij}$. Para esta densidad lagrangiana se tiene la densidad de momento conjugada a h_{ij} [8]

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \sqrt{h} (K^{ij} - \text{tr} K h^{ij}),$$

Se advierte desde este momento que los t3rminos de frontera no se tomar3n en cuenta para el desarrollo pues por el momento se considerar3 que dichos t3rminos se anulan. Sustituyendo en la ecuaci3n (1.2.28) la ecuaci3n (1.2.30) se obtiene [8]

$$\mathcal{H}_G(h_{ij}, \pi^{ij}) = \sqrt{h} \left[N_l \left(-{}^3R + h^{-1} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \right) - 2N_s^i \left({}^3\nabla^j (h^{-1/2} \pi^{ij}) \right) \right].$$

La ausencia de los momentos conjugados de las funci3n lapse y el vector shift indican que no son entidades din3micas, lo cual es de esperarse dado que en realidad no son grados de libertad del sistema, m3s bien fungen como multiplicadores de Lagrange [14]. Por lo tanto, las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_l} = -{}^3R + h^{-1} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) = 0, \quad (1.2.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_s^i} = {}^3\nabla_j (h^{-1/2} \pi^{ij}) = 0, \quad (1.2.32)$$

son constricciones que deben cumplir las variables h y π , mientras que la dinámica de estos campos está gobernada por [8]

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\partial H_G}{\partial \pi^{ij}} = 2h^{-1/2}N \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}\pi \right) + {}^3\nabla_i N_j + {}^3\nabla_j N_i, \quad (1.2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} &= -\frac{\partial H_G}{\partial h_{ij}} = -Nh^{1/2} \left({}^3R^{ij} - \frac{1}{2}{}^3R h^{ij} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ij} \left(\pi_{kl}\pi^{kl} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) \\ &\quad - 2Nh^{-1/2} \left(\pi^{ik}\pi_k^j - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij} \right) \\ &\quad + h^{1/2}({}^3\nabla^i {}^3\nabla^j N - h^{ij}{}^3\nabla^k {}^3\nabla_k N) \\ &\quad + h^{1/2} \left({}^3\nabla_k (h^{-1/2}N^k\pi^{ij}) \right) - \pi^{ki} \left({}^3\nabla_k N^j \right) - \pi^{kj} \left({}^3\nabla_k N^i \right). \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

Las ecuaciones (1.2.33) y (1.2.34), encontradas por Arnowitt, Deser y Misner en 1962, permiten una descripción hamiltoniana del espaciotiempo. Una de las cuestiones importantes en esta descripción es la existencia de constricciones para la dinámica de las variables ADM⁷. La existencia de constricciones indican que aún no se han encontrado a los *verdaderos grados de libertad dinámicos* de la teoría, es decir, el espacio de configuraciones sigue siendo *muy grande*. Los grados de libertad restantes están asociados a la libertad de norma[8] presente en h_{ij} , que se hace evidente al considerar un difeomorfismo φ de Σ , entonces h_{ij} y el pullback φ^*h_{ij} representan la misma situación física, esta identificación resulta ser una clase de equivalencia. Debido a lo anterior, es conveniente tomar como espacio de configuraciones para la relatividad el conjunto de clases de equivalencia de h_{ij} , que se denota por \tilde{h}_{ij} , de métricas riemannianas sobre Σ . El espacio de configuraciones de las clases de equivalencia \tilde{h}_{ij} se conoce como **superespacio**, en este espacio, el momento conjugado π^{ij} debe satisfacer la condición [8]

$$\int \pi^{ij}(\delta h_{ij} + {}^3\nabla_i v_j + {}^3\nabla_j v_i) = \int \pi^{ij} \delta h_{ij},$$

lo que implica que π^{ij} está obligado a cumplir

$${}^3\nabla_i (h^{1/2}\pi^{ij}) = 0.$$

Al elegir el superespacio como espacio de configuraciones la constricción (1.2.32) desaparece de la teoría, mientras que (1.2.31) permanece pues esta emerge de la elección de como separar al espaciotiempo en S y \mathbb{R} . Como se menciona en [8], esta constricción es análoga a la constricción que surge al parametrizar una teoría que originalmente no está constreñida, en un espaciotiempo de fondo fijo. En otras palabras, al hacer la elección de las hipersuperficies Σ_t , con respecto a la superficie de referencia Σ , se introduce una función que depende del tiempo en la lagrangiana y se toma como una variable dinámica. Cuando las teorías mencionadas tienen constricciones lineales en el momento conjugado como función del tiempo, se vuelve posible *desparametrizar* la teoría al resolver la constricción para el momento conjugado. No obstante, la ecuación (1.2.31) es cuadrática en el momento, y una desparametrización no parece ser factible. Hasta ahora, parece no existir una elección de espacio de configuraciones que contenga solo a los *verdaderos grados de libertad* de la teoría para la relatividad general[8].

⁷Esto dificulta hacer una descripción cuántica de la gravedad utilizando la *cuantización canónica* de Dirac.

1.3. Comentarios finales

Este capítulo estuvo dedicado a presentar un desarrollo de la teoría de Einstein distinto a lo que usualmente se ve en un curso de licenciatura. Las herramientas matemáticas presentadas es una parte ineludible pues la intención es que el desarrollo sea lo más claro posible.

Se presentó una forma de obtener las ecuaciones de campo de Einstein a través de un principio variacional, esto será de utilidad cuando se realice el análisis de la acción considerada para el trabajo de esta tesis. Cabe señalar que el espaciotiempo considerado es de cinco dimensiones y los resultados mostrados aquí se pueden extender para estos espacios, de hecho, pueden extenderse para dimensiones arbitrarias como puede revisarse en [12]. A partir de este método pudo realizarse una descripción lagrangiana y hamiltoniana de la gravedad, que servirá al lector que quiera profundizar en el desarrollo hecho en [16] pues parte del trabajo desarrollado allí comienza con lo expuesto en este capítulo.

El siguiente capítulo tratará las propiedades de los espaciotiempo asintóticamente anti-de Sitter (AdS), son de interés en este trabajo pues la conjetura de Maldacena está parte de una teoría gravitacional con un comportamiento de este estilo.

Capítulo 2

Propiedades de los espaciotiempos asintóticamente AdS

“...Only questions about the results of experiments have a real significance and it is only such questions that theoretical physics has to consider.”

— Paul Adrien Maurice Dirac,
Principles of Quantum Mechanics.

Las ecuaciones de Einstein admiten como solución un universo en expansión y en la época de Einstein dicha idea contradecía la creencia que tenía la humanidad de que el universo ha estado allí, estático y eterno. La expansión del universo implica que todo lo que se conoce tuvo un comienzo (y tal vez un final), es por ello que Einstein agregó un término extra a las ecuaciones, asociado con la métrica y una constante a la que se llamó constante cosmológica, que permitía obtener como solución un universo estático sin romper la covarianza de las ecuaciones de la teoría[17]. Después de que se confirmara que el universo realmente se está expandiendo con el corrimiento al rojo en las observaciones astronómicas este tipo de modelos para el universo fueron abandonados, no obstante, con el avance en las teorías de gravitación, y particularmente, con el avance en la teoría de cuerdas, una de las soluciones asociadas a la modificación que propuso Einstein ha cobrado una gran importancia gracias a la correspondencia AdS/CFT propuesta por Juan Maldacena[1]. La correspondencia norma/gravedad ha tenido una gran cantidad de aplicaciones pues asocia a una teoría de campos conforme (Conformal Field Theory), donde los campos están fuertemente acoplados, una teoría de súpercuerdas de tipo IIB con acoplamiento débil, lo que permite hacer un tratamiento gravitacional clásico. Hasta ahora, la propuesta de Maldacena ha mostrado ser útil y, conforme ha avanzado el tiempo, los trabajos realizados basados en dicha conjetura han aportado evidencia en favor de la correspondencia, no obstante, aún no se cuenta con una prueba formal de dicha equivalencia entre ambas teorías.

Para un tratamiento completo del problema que aborda la presente tesis, es preciso mencionar, al menos cualitativamente, los aspectos más relevantes asociados con espaciotiempos anti-de Sitter y asintóticamente Anti-de Sitter, que son los espaciotiempos que usualmente aparecen en los trabajos donde se aplica la correspondencia.

2.1. El Espaciotiempo AdS

Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica son:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.1.1)$$

donde dependiendo del valor de la constante Λ se pueden obtener dos soluciones de particular interés. Una posible solución con constante positiva es el universo que se conoce como de Sitter (dS), mientras que para una constante negativa, existe una solución que se conoce como de anti-de Sitter (AdS), ambos espacios tienen la característica de tener la mayor cantidad de simetrías posibles[13]. En particular, este último espacio puede verse como un hiperboloide encajado en un espacio de $d + 2$ dimensiones que satisface la siguiente expresión:

$$(T^1)^2 + (T^2)^2 - \sum_{i=1}^d (x^i)^2 = \ell^2, \quad (2.1.2)$$

donde las coordenadas T^1 y T^2 son consideradas como coordenadas temporales mientras que las coordenadas restantes son coordenadas espaciales, y ℓ es un parámetro del espaciotiempo AdS. Obsérvese que el grupo de Lorentz $O(d, 1)$ actúa en las coordenadas T^1, x^i y T^2, x^i de manera separada dejando el espacio invariante, entonces las isometrías en dicho hiperboloide constan de dos copias del grupo $O(d, 1)$. En consecuencia de lo anterior, el espaciotiempo AdS consta de todas las simetrías que pueda tener un espaciotiempo con constante negativa.

El elemento de línea en este espacio se escribe como

$$ds_{AdS_{d+1}}^2 = -(dT^1)^2 - (dT^2)^2 + \sum_{i=1}^d (dx^i)^2.$$

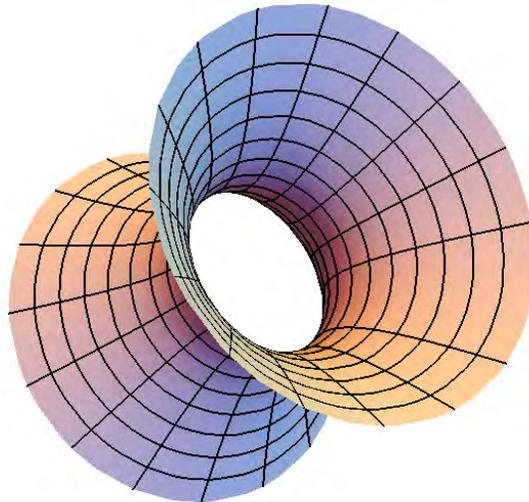


Figura 2.1: Espaciotiempo AdS_{d+1} encajado en un \mathbb{R}^{d+2}

Una forma de parametrizar el hiperboloide es tomando los siguientes cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} T^1 &= \sqrt{\ell^2 + r^2} \cos(\tau/\ell), \\ T^2 &= \sqrt{\ell^2 + r^2} \sin(\tau/\ell), \end{aligned}$$

donde $r^2 = \sum_{i=1}^d (x^i)^2$. Considerando que

$$\begin{aligned} dT^1 &= -\frac{1}{\ell} \sqrt{\ell^2 + r^2} \sin(\tau/\ell) d\tau + \frac{r}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \cos(\tau/\ell) dr \\ dT^2 &= \frac{1}{\ell} \sqrt{\ell^2 + r^2} \cos(\tau/\ell) d\tau + \frac{r}{\sqrt{\ell^2 + r^2}} \sin(\tau/\ell) dr \\ \sum_{i=1}^d (dx^i)^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \end{aligned}$$

donde el término $d\Omega_{d-1}$, corresponde al elemento de línea de la $(d-1)$ -esfera; el cambio de coordenadas recién descrito conlleva a

$$ds_{AdS_{d+1}}^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right) d\tau^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.1.3)$$

Nótese que la coordenada τ está identificada con un periodo igual a $2\pi\ell$. Las coordenadas anteriores son globales para un espacio AdS y admiten curvas temporaloides cerradas, por ejemplo en $r = 0$. Es conveniente tomar otro tipo de coordenadas que satisfacen la condición

$$\begin{aligned} z &= \frac{\ell^2}{T^1 + x^d}, \\ t &= \frac{\ell T^2}{T^1 + x^d}, \\ \xi^i &= \frac{\ell x^i}{T^1 + x^d}, \end{aligned}$$

donde $i = 1, \dots, d-1$, son conocidas como coordenadas de Poincaré y en términos de ellas el elemento de línea se escribe como

$$ds_{AdS_{d+1}}^2 = \frac{\ell^2}{z^2} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (d\xi^i)^2 + dz^2 \right). \quad (2.1.4)$$

Se les conoce con ese nombre debido a que muestran de manera directa la simetría que tienen las d coordenadas t, ξ^i respecto al grupo de Poincaré. Obsérvese que las coordenadas de Poincaré están definidas en la región $T^1 + x^d > 0$, zona a la que se conoce como *parche de Poincaré*. Esta condición cobrará relevancia cuando se trate la correspondencia AdS/CFT.

Véase como se relaciona el parámetro ℓ con la constante cosmológica Λ , nótese que el espacio es máximamente simétrico[13] y, por tanto, el tensor de Riemann se puede escribir en términos de una simetrización de índices del tensor métrico adecuada. Puede revisarse en [17] que el tensor de Riemann se escribe como

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{d(d+1)} R (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}). \quad (2.1.5)$$

Al realizar el cálculo de la curvatura con la ecuación (2.1.4), para dicho espacio se obtiene que debe ser

$$R = -\frac{d(d+1)}{\ell^2}.$$

Así, para obtener una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío (2.1.1), la constante cosmológica debe satisfacer

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2\ell^2},$$

lo cual resulta evidente después de multiplicar (2.1.1) por $g^{\mu\nu}$, pues se llega a

$$R = 2\frac{d+1}{d-1}\Lambda.$$

2.1.1. Estructura Conforme del espaciotiempo AdS y Compactificación Conforme

Para poder construir las cantidades conservadas en cualquier espaciotiempo es necesario analizar el comportamiento asintótico de la métrica bajo transformaciones conformes [17]. De interés para este trabajo es que la estructura conforme permite definir los espacios que se comportan de manera asintótica a un espacio AdS, que son necesarios para la correspondencia. En el siguiente apartado serán tratados los espacios localmente asintóticos AdS (AlAdS). En lo que sigue, se desarrollará la herramienta que será necesaria para tal fin.

Para un espaciotiempo M , donde M es una variedad Lorentziana, se define la **compactificación conforme** como una función conforme (de hecho, un difeomorfismo que preserva ángulos) $\phi : M \rightarrow \text{Int}(\hat{M})$, donde \hat{M} es una variedad suave compacta con frontera $\partial\hat{M}$. A la frontera $\partial\hat{M}$ se le conoce como *frontera conforme* de M . La métrica g en M está relacionada con la métrica \hat{g} de \hat{M} a través del factor conforme Ω de la forma

$$d\hat{s}^2 = \Omega^2 ds^2. \tag{2.1.6}$$

La ventaja principal que ofrece la compactificación conforme es que permite estudiar *puntos al infinito* de una variedad haciendo que la distancia entre los puntos sea finita mediante el factor conforme. Lo anterior no siempre se cumple pues la compactificación conforme que se realiza en el plano a través de la proyección estereográfica manda a todo el plano junto con el punto al infinito a la 2-esfera, la cual es una variedad compacta sin frontera y la asignación no es hacia el interior de S^2 [18]. Sin embargo, puede tomarse otra función que satisfaga la condición de asignar al plano al interior de alguna variedad compacta con frontera, como puede revisarse en [19].

El factor conforme Ω^2 debe satisfacer ciertas condiciones que garanticen que la descripción realizada se comporta de manera adecuada y conveniente. La primera condición que debe satisfacer es que debe ser positivo sobre M , por ello se toma Ω^2 , debe anularse al evaluar en infinito y debe ser diferenciable tantas veces como lo requiera el problema con su primera derivada distinta de cero en la frontera conforme. Por otro lado, la forma en que se van agregando puntos al espaciotiempo M debe ser de tal manera que la curvatura del espacio \hat{M} sea finita; también debe de satisfacer que los puntos al infinito agregados por la compactificación conforme tengan una distancia finita y la frontera conforme $\partial\hat{M}$ sea compacta. Cabe resaltar que la nueva variedad que se obtiene mediante la función conforme no tiene una relevancia física; a la variedad original se le conoce como *bulto*, a la métrica de esta variedad también es común que se le llame *métrica del bulto*. La forma de escoger el factor conforme no es única[17], se tiene un conjunto de clases de equivalencia entre las métricas, donde el factor conforme escogido es representativo de su clase y se denomina como *marco conforme*; a las clases de equivalencia de las métricas vía el factor conforme en M se les denomina **estructura conforme**. La métrica obtenida en la frontera conforme $\partial\hat{M}$ se le llama *métrica de la frontera*.

La métrica para un espaciotiempo AdS en coordenadas globales (2.1.3) puede reescribirse en términos de una nueva coordenada dada por $\varrho = 1/r$, como la frontera conforme se encuentre con $r \rightarrow \infty$, resulta

que la frontera conforme en esta nueva coordenada está en $\varrho = 0$. En este caso el factor conforme está dado por $\Omega(\varrho) = \varrho$, de tal suerte que la métrica puede escribirse como

$$d\hat{s}^2 = - \left(\varrho^2 + \frac{1}{\ell^2} \right) dt^2 + \left(\varrho^2 + \frac{1}{\ell^2} \right)^{-1} d\varrho^2 + d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.1.7)$$

Otra forma de elegir el factor conforme en las coordenadas globales es tomando [17]

$$\rho = \arctan \frac{r}{\ell},$$

con lo cual, el elemento de línea se reescribe como

$$ds_{\text{AdS}_{d+1}}^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 \rho} \left(-\frac{1}{\ell^2} d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\Omega_{d-1}^2 \right), \quad (2.1.8)$$

y el factor conforme para estas coordenadas es

$$\Omega^2 = \frac{\cos^2 \rho}{\ell^2}.$$

La frontera está localizada en $\rho = \pi/2$ y tiene una métrica inducida de la forma

$$d\hat{s}^2 = -d\tau^2 + d\Omega_{d-1}^2,$$

donde en esta última métrica, el término $d\Omega_{d-1}^2$ está asociado al elemento de línea de la $(d-1)$ -esfera y no debe confundirse con el factor conforme, a pesar de que se ha usado el mismo símbolo, también esta métrica correspondiente a una variedad $M = \mathbb{R} \times S^{d-1}$, i.e., la métrica de la frontera puede identificarse con la de un cilindro plano, este espacio es conocido como el universo estático de Einstein [17]. En el caso de las coordenadas del parche de Poincaré (2.1.4), el factor conforme está dado por $\Omega(z) = z/\ell$, de tal manera que el elemento de línea compactificado puede reescribirse como

$$d\hat{s}^2 = -dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (d\xi^i)^2. \quad (2.1.9)$$

La frontera conforme se encuentra en $z = 0$, por tanto la métrica resultante en la frontera es la métrica de Minkowski en un spaciotiempo de d dimensiones.

2.2. Espaciotiempo asintóticamente AdS

Los espacios que son de interés dentro de la correspondencia son aquellos que son localmente asintótico AdS (AlAdS). Dichos espacios satisfacen condiciones en la frontera conforme de tal suerte que tienen una métrica similar a (2.1.3) en la frontera, al menos de manera local.

Recuérdese que las condiciones que debe satisfacer el factor conforme Ω son

$$\Omega^2 > 0 \quad \text{en } M, \quad \Omega^2|_{\partial\hat{M}} = 0, \quad d\Omega^2|_{\partial\hat{M}} \neq 0,$$

y en lo que sigue se tomara a la métrica \hat{g} como C^2 , lo cual garantiza que el tensor de Riemann esté bien definido sobre \hat{M} . Como ya se mencionó, la elección del factor conforme no es única, puede definirse un nuevo factor a través de la expresión

$$\Omega' = e^\sigma \Omega,$$

donde σ es una función suave arbitraria en M . Entonces, la elección de la función σ determina el marco conforme y, por ende, la métrica inducida en $\partial\hat{M}$. No obstante, la métrica del bulto g define de manera única la estructura conforme en $\partial\hat{M}$. El factor conforme jugará un rol importante en la expansión de Fefferman-Graham que se definirá un poco más adelante, en esencia puede decirse que es una expansión de la métrica similar a una serie de Tylor aunque esta expansión se realiza cerca de la frontera conforme, es decir, es una expansión de la métrica considerando $r \rightarrow \infty$.

Un espaciotiempo (M, g) $d+1$ dimensional es asintóticamente localmente AdS si satisface las condiciones de compactificación conforme ya mencionadas y además la métrica g satisface la ecuación (2.1.1) con $\Lambda < 0$. Si la frontera $\partial\hat{M}$ es topológicamente equivalente a $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ entonces el espaciotiempo es asintóticamente AdS. El último tipo de espaciotiempos tienen la característica de aproximarse a un espaciotiempo AdS global cerca de $\partial\hat{M}$.

Para poder mostrar que el espaciotiempo (M, g) es AlAdS, se necesita hacer uso del tensor de Riemann y ver que puede escribirse como (2.1.5), después de sustituir el valor de la curvatura. Un cálculo sencillo lleva a la expresión

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{\ell^2} (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}).$$

Obsérvese que las componentes de la métrica del bulto puede escribirse en términos del factor conforme como

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \hat{g}_{\mu\nu},$$

y por tanto, cerca de ∂M , el tensor de Riemann puede escribirse como sigue

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -|d\Omega|_{\hat{g}}^2 (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}) + \mathcal{O}(\Omega^{-3})$$

donde la cantidad

$$|d\Omega|_{\hat{g}}^2 = \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Omega \partial_\nu \Omega$$

solamente depende de la estructura conforme y se extiende de manera suave sobre ∂M . Dado que g satisface (2.1.1) entonces el factor conforme debe satisfacer la fórmula

$$|d\Omega|_{\hat{g}}^2 = \frac{1}{\ell^2}$$

en la frontera del espaciotiempo M .

2.2.1. La expansión de Fefferman-Graham

La discusión anterior se ha hecho con la finalidad de explicar, de manera al menos cualitativa, los espaciotiempos AlAdS. La manera formal en la que se determina si un espacio tiempo es AlAdS es a través de la expansión de Fefferman-Graham. Esta expansión permite analizar a la métrica de la variedad cerca de su frontera conforme y será de utilidad cuando se realice el cálculo de la energía del espaciotiempo asociado a las branas magnéticas. Puede revisarse en [20] que cuando d es par la métrica puede expandirse cerca de la frontera como

$$g_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\mu\nu}^{(n)} (r^{-d} \ln r^{-1})^n,$$

donde $\gamma_{\mu\nu}^{(n)}$ son, en general, funciones suaves; $\gamma_{\mu\nu}^{(0)}$ corresponde a la métrica de la frontera conforme.

2.3. La temperatura de un agujero negro

Conocer la temperatura a la cual se encuentra un agujero negro será de utilidad para el análisis de la densidad de energía obtenida en este trabajo a través de la dualidad, es por ello que se ha incluido esta sección, para poder hacer un análisis adecuado y correcto entre las cantidades relacionadas en ambas teorías. Para determinar la temperatura de un agujero negro considérese una métrica de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{p-1}^2, \quad (2.3.1)$$

la cual tiene un horizonte en r_+ , es decir, $f(r_+) = 0$. A este espacio se le puede encontrar una continuación euclidea realizando una rotación de Wick haciendo $t \rightarrow i\tau$. En el espacio de signatura positiva resultante, la única forma de que el valor cero que f tiene en r_+ no implique la aparición de una singularidad cónica es que la coordenada τ sea periódica y que la longitud de los ciclos en ella cercanos a $r = r_+$ cumplan con $2\pi(r - r_+)$. Para verificar que la última condición se cumpla, vemos que la métrica (2.3.1) infinitesimalmente cerca de r_+ se puede escribir como

$$ds^2 \simeq f'(r_+)(r - r_+)d\tau^2 + \frac{1}{f'(r_+)(r - r_+)}dr^2 + r_+^2d\Omega_{p-1}, \quad (2.3.2)$$

expresión a la que se llegó usando que $f(r_+) = 0$. Al introducir la coordenada

$$\varrho^2 = \frac{4(r - r_+)}{f'(r_+)},$$

se obtiene

$$r - r_+ = \frac{1}{4}f'(r_+)\varrho^2, \quad dr = \frac{1}{2}f'(r_+)\varrho d\varrho,$$

que al ser sustituido en (2.3.2) resulta en el elemento de línea

$$ds^2 = \frac{[f'(r_+)]^2}{4}\varrho^2 d\tau^2 + d\varrho^2 + r_+^2d\Omega_{d-1}, \quad (2.3.3)$$

el cual, por la introducción de $\phi = f'(r_+)\tau/2$, se puede escribir como

$$ds^2 = \varrho^2 d\phi^2 + d\varrho^2 + r_+^2 d\Omega_{d-1}.$$

En esta última expresión ya es claro que la métrica en el espacio dado por ρ y ϕ es la de un cono, y por lo tanto presentará una singularidad cónica en $r = r_+$ a menos que el cono sea degenerado y coincida con el espacio plano dos dimensional, caso que se logra sólo si ϕ tiene periodo 2π . La relación entre ϕ y τ se puede usar para ver que este último requerimiento es equivalente a que τ tenga periodo

$$\beta = \frac{4\pi}{f'(r_+)}. \quad (2.3.4)$$

En el tratamiento de teorías de campos a temperatura finita es conocido, por razones más allá del alcance de esta tesis, que la aparición de una periodicidad β en la coordenada temporal implica que la teoría está a temperatura $T = 1/\beta$ [21].

2.4. La Correspondencia AdS/CFT

A pesar de que esta tesis no está enfocada en la parte de teoría de campos, es pertinente mencionar algunos detalles de la correspondencia que serán de utilidad en los siguientes capítulos.

Desde la publicación del artículo [1] el interés en el espaciotiempos AdS fue catapultado, hoy en día se hace una enorme investigación en esta nueva rama a la que dio origen el artículo citado.

Si bien la correspondencia tuvo sus orígenes en la teoría de supercuerdas del tipo IIB, tema que se ha mantenido ajeno a esta tesis (literatura introductoria a este tema son [21] y [22]), actualmente es posible establecer su contenido sin la necesidad del formalismo completo que esta teoría conlleva[23]. El enunciado principal es

$$\text{Supercuerdas IIB en AdS}_5 \times S^5 \simeq \text{SYM en 4D, } SU(N), \mathcal{N} = 4.$$

Aunque esta dualidad relaciona una teoría de cuántica de campos Súper Yang-Mills (SYM), es decir, una teoría de norma supersimétrica con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías en cuatro dimensiones planas, con grupo de norma $SU(N)$ en el límite cuando $N \rightarrow \infty$ y una teoría de supercuerdas IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$, hay casos en que puede evitarse usar el formalismo completo de esta última, pues su límite de bajas energías es la teoría de supergravedad IIB y hay muchos cálculos que se pueden realizar en esta aproximación. Lo anterior establece que las teorías relacionadas por esta dualidad son una descripción distinta de la *misma física*.

Sin necesidad de ahondar, como parte de la teoría de cuerdas existen objetos extendidos dinámicos de cualquier dimensionalidad entre cero y la total del espacio, que se comportan similarmente a como lo haría una membrana metida en un espacio de tres dimensiones, razón por la cual se les llama p-branas, donde p indica el número de dimensiones espaciales en las que extiende el objeto. De estos objetos hay algunos que tienen un origen especial, que sólo pueden ser entendidos si se hace un tratamiento más completo de la dinámica que las cuerdas siguen, pero que se les distingue como D-branas y es el lugar geométrico donde yacen los extremos de las cuerdas abiertas que forman parte de la teoría[22, 24].

En la parte medular de la correspondencia se encuentran dos hechos, uno es que el espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$ es la geometría generada por una pila de N D3-branas en una región muy cercana a ellas, y el otro es que el espectro que se encuentra para las cuerdas abiertas con extremos en una pila de N D3-branas es el de SYM $SU(N)$ $\mathcal{N} = 4$.

Algunas de las características principales de la correspondencia AdS/CFT pueden enlistarse como sigue[23]

- La correspondencia AdS/CFT es holográfica. En efecto, la correspondencia es uno de los ejemplos más concretos del principio holográfico propuesto por ‘t Hooft y mejorado por Leonard Susskind[25].
- Dualidad de acoplamiento fuerte/débil. Mientras que la teoría de campos está fuertemente acoplada, razón por la cual cualquier técnica perturbativa falla, en lado gravitacional la teoría está débilmente acoplada en el contexto de la teoría de cuerdas.
- Existe un mapeo entre una teoría cuántica de la gravedad (teoría de cuerdas) y una teoría cuántica de campos ordinaria o no gravitacional. Dicha correspondencia muestra ser independiente del fondo, salvo por las condiciones de frontera AdS. Esto podría ayudar a resolver muchas las primeras preguntas en gravedad cuántica que llevan tiempo sin respuesta, a través de una reformulación en un lenguaje no gravitacional.

2.4.1. Algunas entradas del diccionario

La correspondencia tiene implicaciones que básicamente son identificaciones entre las cantidades que existen en las teorías. Dicho de otra forma, se tiene un *diccionario* para traducir los elementos de una

teoría a su dual. Los siguientes elementos del diccionario de la correspondencia fueron los primeros en encontrarse [23, 1]:

Simetrías: El espaciotiempo AdS_{4+1} tiene como grupo de isometría a $SO(2, 4)$, mientras que S^5 tiene como grupo de isometrías a $SO(6)$. En la teoría de campo, el grupo conforme en cuatro dimensiones es $SO(2, 4)$, su contenido de materia es de seis campos escalares φ^i y cuatro fermiones que están relacionados a través de la simetría global $SU(4) \simeq SO(6)$ R -simetría. Ambos lados de la correspondencia tienen un total de 32 supersimetrías.

Direcciones: La identificación hecha de las simetrías sugiere cómo se identifican las 10 dimensiones del bulto $\text{AdS}_{4+1} \times S^5$ con la teoría de campos. Los campos escalares φ^i se identifican con las direcciones en S^5 a través de la simetría $SO(6)$. La dirección radial del bulto se identifica con la escala de la energía en la teoría de norma. Las dimensiones restantes en la parte de AdS_{4+1} se identifican con las del espacio de Minkowski como ya se hizo en (2.1.9), en la zona UV de la teoría de campos debido a la dualidad entre la coordenada radial y la escala energética.

Escala energética/radio del bulto: Esta correspondencia también es conocida con la dualidad UV/IR. En [23] puede encontrarse una deducción detallada de esta dualidad, aquí solo se presentarán las ideas en su deducción. Básicamente, la equivalencia entre la posición radial y la escala energética emerge al considerar una dimensión extra en la teoría de campo que corresponde a la escala de la energía, y se deduce a partir de que el grupo de normalización que controla el flujo de las constantes de acoplamiento satisface las condiciones físicas requeridas para ser considerada una dimensión extra. La teoría debe permanecer invariante ante transformaciones conformes, en particular ante dilataciones $x^\mu \rightarrow \alpha x^\mu$, que reescalan la energía simultáneamente $E \rightarrow E/\alpha$. Este comportamiento es el mismo que tiene la coordenada z en AdS_{4+1} en (2.1.9), entonces se identifica con el inverso de la escala energética y, en consecuencia, la coordenada r se identifica con la escala energética.

Las siguientes entradas se dieron después de la aparición de la conjetura de Maldacena, pueden considerarse como extensiones del planteamiento original.

Truncamiento consistente: En [26] se demostró que la supergravedad normada cinco dimensional es una truncación consistente de la supergravedad IIB en diez dimensiones, garantizando que a partir de cualquier solución en la primera, se pueda construir una solución en la segunda. Esto ha permitido usar la correspondencia en ciertos fondos gravitacionales AAdS cinco dimensionales sin tener que considerar las direcciones de la cincoesfera.

Teoría de campos a temperatura finita: Se logró hacer una correspondencia entre una teoría de campos a temperatura finita agregando un horizonte alrededor de las D3 branas en el lado gravitacional, fondo que se conoce como AdS-Schwarzschild[27].

Sabor: A través de realizar el encaje de una pila de D7 brana de prueba en el fondo generado por la D3 brana se logró introducir sabor en el lado CFT.

Existen muchas más entradas que no se incluyen aquí debido a que son completamente ajenas al propósito de la presente tesis.

2.5. Comentarios finales

En este capítulo se revisó, de manera general, las propiedades de los espaciotiempos asintóticamente AdS, que son los que tienen un papel fundamental en la correspondencia norma/gravedad. Más allá de los aspectos técnicos que involucren, los conceptos importantes para este trabajo son la temperatura de un agujero negro y cómo se relaciona con su teoría dual, la estructura conforme de los espaciotiempos asintóticamente AdS que clarifica en cierta medida la dualidad pues con las coordenadas de Poincaré queda de manifiesto que en su frontera conforme se encuentra un espaciotiempo de Minkowski con una dimensión menor al espaciotiempo AdS, también será de vital importancia para la interpretación de

los resultados, la dualidad entre la coordenada radial del espaciotiempo AdS y la escala energética y la expansión de Fefferman-Graham que permitirá poder realizar el cálculo de la energía las soluciones numéricas encontradas en [4].

El siguiente capítulo presenta el método para calcular la energía de un espaciotiempo y la métrica con la que se trabajó, así como los aspectos y propiedades relevantes del espaciotiempo al que está asociada.

Capítulo 3

La Energía de las Branas Magnéticas

“Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí”

– Confucio.

En este capítulo se presenta un resumen con las ideas más generales de la conjetura propuesta por Gary T. Horowitz y Robert C. Myers [28], así como los resultados más relevantes para hacer uso de la conjetura y extenderlo para la métrica correspondiente a una D3-brana. Después se aplicarán las herramientas desarrolladas en [16], de manera análoga que en el trabajo que realizaron Myers y Horowitz, a las soluciones analíticas de la métrica de la brana magnética.

3.1. La conjetura de Myers-Horowitz

En el capítulo 1 se presentó el formalismo ADM y se vio como permite hacer una descripción de la relatividad general mediante densidades lagrangianas y hamiltonianas. De forma particular, se tomará la densidad hamiltoniana, ya que a partir de ella, es posible calcular la energía del sistema que está bajo consideración. No obstante, antes de pasar a realizar el cálculo de la energía, debe agregarse un poco de herramienta para realizar los cálculos. Hawking y Horowitz encontraron en [16] otro método para calcular la energía de un espaciotiempo, el cual arroja los mismos resultados que el formalismo ADM, su derivación consiste, esencialmente, en considerar los términos de frontera en la realización de la descripción hamiltoniana de la gravedad, mismos que se asumieron como nulos en el capítulo 1, y solo depende de la traza de la curvatura extrínseca K del espaciotiempo bajo consideración y de la curvatura extrínseca K_0 de un fondo de referencia. Cabe aclarar que la curvatura extrínseca del fondo corresponde a la métrica y campos que satisfacen las ecuaciones estáticas obtenidas a través de variar la acción. En otras palabras, el método consiste en la sustracción de la integral de la curvatura extrínseca de dos espacios con el mismo comportamiento asintótico, uno de ellos se toma como referencia y el otro es del que se desea conocer su energía. Para el problema tratado en esta tesis, se reduce a tomar como referencia un espaciotiempo AdS con la dimensión adecuada como se verá más adelante. La expresión para la energía de un espaciotiempo

M de dimensión $d + 1$ es

$$E = -\frac{1}{8\pi G_{d+1}} \int_{\Sigma_\infty} N_l (K - K_0) + \frac{1}{8\pi G_{d+1}} \int_{\Sigma_\infty} N_s^i h_{ij} r^i, \quad (3.1.1)$$

donde G_{d+1} es la constante de gravitación en $d + 1$ dimensiones, N_l , N_s^i son la función lapse y el vector shift, h_{ij} es el momento conjugado a la métrica inducida y los índices i, j corren desde 1 hasta d ; los objetos r^j son las componentes del vector normal a la superficie Σ_∞ . La ecuación anterior está bien definida, incluso para el caso en que el espaciotiempo no es una variedad compacta compacta[16]. Si las soluciones son de vacío y/o considerando campo magnético [16], el segundo término no contribuye a la energía calculada a través de este método. En lo que resta de la presente tesis solo se tomarán en cuenta las integrales de la curvaturas extrínsecas.

En [28], mencionan que Witten había realizado un trabajo respecto a espaciotiempos en donde una dirección es compactificada y es identificada con condiciones antiperiódicas en su frontera, de tal suerte que rompen con la supersimetría en la parte fermiónica; sugirió que es posible utilizar la correspondencia para describir teorías de norma de Yang-Mills no supersimétricas con topología $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Para espaciotiempos asintóticamente Anti de Sitter, mencionan que los teoremas de masa positiva siguen siendo válidos y entonces ellos se preguntan si el resultado sigue siendo válido para espacios que son asintóticamente AdS de manera local, pues son los espacios que corresponden a teorías de campos no supersimétricos en la dualidad. En ese momento ya se sabía que para espacios asintóticamente planos los teoremas ya no son ciertos. Al realizar la doble continuación analítica¹ en el tiempo y en la última coordenada, la energía que obtuvieron fue negativa y a través de la correspondencia AdS/CFT concluyeron que dicha energía corresponde a la energía de Casimir, salvo un factor de 3/4. Conjeturaron que la métrica del solitón corresponde a la energía mínima e hicieron algunos cálculos donde muestran indicios a favor de dicha conjetura. Este trabajo fue motivado en cierto sentido por estos resultados, pues la expresión (3.1.1) funciona para espaciotiempos asintóticamente AdS[16], de manera que puede aplicarse para realizar el cálculo de la energía de lado gravitacional de la correspondencia e interpretarse en la teoría cuántica de campos dual.

En el artículo [28], se encuentran varios ejemplos del cálculo de la energía para algunas métricas. Aquí se presentan algunos de ellos y se harán los desarrollos correspondientes para mostrar la validez de la ecuación (3.1.1).

Ejemplos.

1. *Schwarzschild-AdS en 4D.* La métrica de este espaciotiempo es

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2, \quad (3.1.2)$$

donde ℓ está asociada con la constante cosmológica, en este caso, por $\ell^2 = -3\Lambda$. Tómese una superficie espacial a un tiempo constante de esta solución. Para un radio fijo r , se tiene una esfera cuya área está dada por $A = 4\pi r^2$. La integral de la traza de la curvatura extrínseca se calcula entonces como[28]

$$\int_{\Sigma_\infty} K = n^\mu \partial_\mu A = \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} 8\pi r, \quad (3.1.3)$$

donde n^μ es un vector unitario normal a la superficie de la 2-esfera. En el caso de la curvatura extrínseca de la referencia, es decir, en un espaciotiempo Anti-de Sitter, como se vio en el capítulo 2 la métrica en

¹La continuación analítica consiste en realizar una rotación de Wick en donde se hace el cambio $x^k \rightarrow ix^k$ en alguna de las coordenadas.

coordenadas globales es

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2,$$

que puede obtenerse a partir de (3.1.2) poniendo $r_0 = 0$, en consecuencia, el cálculo de la integral de la curvatura extrínseca del fondo se reduce a tomar $r_0 = 0$ en (3.1.3). Dado que la frontera Σ_∞ se encuentra en este caso en $r \rightarrow \infty$ puede evaluarse las expresiones para las curvaturas extrínsecas considerando que $r_0/r \ll 1$ y obtener

$$\begin{aligned} \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\varrho^2 + 1 - \frac{\gamma_0}{\varrho} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \varrho \left(1 + \frac{\varrho - \gamma_0}{\varrho^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\simeq \varrho \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho - \gamma_0}{\varrho^3} \right), \end{aligned}$$

donde $\varrho = r/\ell$ y $\gamma_0 = r_0/\ell$. La expresión anterior conlleva a que las integrales de la traza de la curvatura extrínseca del espaciotiempo considerado y del fondo se escriban como

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\infty} K &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho - \gamma_0}{\varrho^3} \right) 8\pi \varrho^2 \ell \\ \int_{\Sigma_\infty} K_0 &= \left(1 + \frac{1}{2\varrho^2} \right) 8\pi \varrho^2 \ell. \end{aligned}$$

Finalmente, la función lapse N_l es constante sobre la superficie de la 2-esfera bajo la condición de r muy grande, por lo cual, es factible hacer la aproximación $N_l \simeq r/\ell = \varrho$. Así, la energía total sustraída, está dada por:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{8\pi G_4} \left\{ 8\pi \varrho^3 \ell \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho - \gamma_0}{\varrho^3} \right) - \left(1 + \frac{1}{2\varrho^2} \right) \right] \right\}, \\ &= \frac{\gamma_0 \ell}{2G_4} \\ &= \frac{r_0}{2G_4}. \end{aligned}$$

2. *Schwarzschild-AdS en $p + 2$ dimensiones.* El ejemplo anterior puede extenderse a $p + 2$ dimensiones, en este espaciotiempo la métrica está dada por

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p-1} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p-1} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_p, \quad (3.1.4)$$

donde $d\Omega_p$ denota la métrica de una p -esfera cuya área está dada por $\Omega_p = 2\pi^{\frac{p+1}{2}}/\Gamma(\frac{p+1}{2})$, y $\ell^2 = -p(p+1)/2\Lambda$.

Siguiendo un procedimiento análogo al realizado anteriormente, el vector radial normal a la esfera a un tiempo y radio fijo está dado por

$$n^\mu = \begin{cases} \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p-1} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } \mu = r, \\ 0 & \text{si } \mu \neq r. \end{cases}$$

El área de la superficie está dado por $A = r^p \Omega_p$. La integral de la traza de la curvatura extrínseca queda como:

$$\int_{\Sigma_\infty} K = \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p-1} \right)^{\frac{1}{2}} p \Omega_p r^{p-1}.$$

Por otra parte, haciendo las mismas aproximaciones para r grande, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\infty} K &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho - \gamma_0^{p-1}}{\varrho^{p+1}} \right) p \Omega_p \varrho^p \ell^{p-1}, \\ \int_{\Sigma_\infty} K_0 &= \left(1 + \frac{1}{2\varrho^p} \right) p \Omega_p \varrho^p \ell^{p-1}. \end{aligned}$$

Así, la energía está dada por

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{8\pi G_{p+2}} \left\{ p \Omega_p \varrho^{p+1} \ell^{p-1} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho - \gamma_0^{p-1}}{\varrho^{p+1}} \right) - \left(1 + \frac{1}{2\varrho^p} \right) \right] \right\}, \\ &= \frac{p \Omega_p}{16\pi G_{p+2}} (\gamma_0 \ell)^{p-1}, \\ &= \frac{p \Omega_p}{16\pi G_{p+2}} r_0^{p-1}. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

3. *p-branas*. Este espaciotiempo es generado por una pila de p -branas[1, 28], para ciertos valores de p ; esta métrica se denomina como **métrica del solitón**[28], corresponde a un espacio asintóticamente AdS para $r_0/r \ll 1$ y tiene la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} \left[- \left(1 - \frac{r_0^{p+1}}{r^{p+1}} \right) dt^2 + (dx^i)^2 \right] + \left(1 - \frac{r_0^{p+1}}{r^{p+1}} \right)^{-1} \frac{\ell^2}{r^2} dr^2, \tag{3.1.6}$$

donde $1 \leq i \leq p$. Un cálculo análogo a los anteriores muestra que la energía para este tipo de métricas está dado por²

$$E = \frac{p V_p}{16\pi G_{p+2} \ell^{p+2}} r_0^{p+1}. \tag{3.1.7}$$

De acuerdo a la correspondencia norma/gravedad el cociente E_p/V_p corresponde a la densidad de energía del estado de vacío en la teoría de campos. Obsérvese que si alguna de las coordenadas x^i no es compacta, entonces la energía calculada no está bien definida. Lo anterior se debe a que es posible hacer un reescalamiento sobre todas las coordenadas de tal forma que el valor de r_0 cambie, lo cual implica que también cambia el valor de la energía. Cuando al menos una de las direcciones en consideración está identificada con algún periodo (*i.e.* está compactificada) el valor de r_0 está fijo pues ya no es posible hacer un reescalamiento. Esta observación tendrá relevancia en el momento de realizar los cálculos de la energía en la siguiente sección.

3.2. La métrica de la Brana Magnética

Ya que se tiene una forma de calcular la energía para espaciotiempos asintóticamente AdS, lo siguiente es partir de una métrica con una forma específica pero con funciones arbitrarias (que para este trabajo

²La validez de la ecuación anterior será vista en la siguiente sección, en el caso particular para $p = 3$, y después será probada para una p arbitraria.

sólo dependerán de una coordenada que se denotará como r) y encontrar una expresión *genérica* para realizar el cálculo de su energía tomando como referencia un espacio AdS. En algunas ocasiones no será tan directo debido a las aproximaciones que deben hacerse, pero tener una fórmula sirve al menos para calcular la expresión primaria a la cual se le deberán hacer las aproximaciones.

3.2.1. La energía asociada a las soluciones analíticas

Supóngase que la métrica es de la forma

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + \frac{1}{U(r)}dr^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2, \quad (3.2.1)$$

en donde la energía se calcula a partir de la ecuación (3.1.1). La integral de la traza de la curvatura extrínseca se calcula a partir de la expresión [28]

$$\int_{\Sigma_\infty} K = n^\mu \partial_\mu A, \quad (3.2.2)$$

donde $n^\mu = (0, [U(r)]^{1/2}, 0, 0, 0)$, y el área de la esfera para un tiempo fijo y una r fija, se calcula como

$$A = V(r)[W(r)]^{\frac{1}{2}}V_3, \quad (3.2.3)$$

con V_3 el volúmen determinado por las coordenadas dx , dy y dz .

Realizando el cálculo dado por la ecuación (3.2.2) y usando la expresión para el área (3.2.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A &= \partial_r(V(r)[W(r)]^{\frac{1}{2}}V_3), \\ &= V_3 \left(V'(r)[W(r)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}V(r) \frac{W'(r)}{[W(r)]^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Así, se tiene que la integral de la curvatura extrínseca está dada por:

$$\int_{\Sigma_\infty} K = n^\mu \partial_\mu A = V_3[U(r)]^{\frac{1}{2}} \left(V'(r)[W(r)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}V(r) \frac{W'(r)}{[W(r)]^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.2.4)$$

En el caso de la curvatura extrínseca de la referencia, el cálculo de la integral $\int K_0$ se reduce a calcularlo para un espacio AdS_{4+1} , por tanto

$$\int_{\Sigma_\infty} K_0 = 3 \frac{r^3}{\ell^4} \quad (3.2.5)$$

Por otra parte, se considera que para r suficientemente grande $N_l \simeq r/\ell$, con $\ell = -3/\Lambda$ y Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo AdS_5 . Así, la energía ser

$$E = -\frac{1}{8\pi G_5} V_3 \left(\frac{r}{\ell} \right) \left\{ [U(r)]^{\frac{1}{2}} \left(V'(r)[W(r)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}V(r) \frac{W'(r)}{[W(r)]^{\frac{1}{2}}} \right) - 3 \frac{r^3}{\ell^4} \right\} \quad (3.2.6)$$

Para realizar el cálculo de la energía de las branas magnéticas deben darse condiciones sobre las funciones en (3.2.1), con tal de que describa un fondo gravitacional con un campo magnético tangente en las direcciones de la frontera.

La acción que se considera corresponde a la teoría, en cinco dimensiones, de Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} \left(R + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{12}{\ell^2} \right) + S_{fr}, \quad (3.2.7)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$, $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta}$ y con la siguiente propuesta para el campo magnético

$$F_{BG} = B dx \wedge dy. \quad (3.2.8)$$

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell se obtienen al variar (3.2.7) respecto a la métrica en la forma discutida en el capítulo 1, y la forma explícita que toman al sustituir (3.2.1) y (3.2.8) en (1.2.6) se pueden encontrar en el apéndice A al final de la presente tesis. El término de frontera S_{fr} contiene términos que deben tomarse en cuenta para mantener la acción finita al evaluarse en las soluciones, esto es, contrarrestar los términos divergentes en la integral de volumen con términos de frontera.

Existen dos soluciones exactas para este problema [4], a saber, la métrica correspondiente a un agujero negro $BTZ \times T^2$, donde T^2 es una superficie compacta [3], i.e., las coordenadas x e y son compactas, y las funciones de la métrica son

$$\begin{aligned} U_{BTZ}(r) &= 3 \frac{r^2}{\ell^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \\ V_{BTZ}(r) &= \frac{B}{\sqrt{3}}, \\ W_{BTZ}(r) &= 3 \frac{r^2}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

La solución BTZ corresponde a una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell en un espaciotiempo en $2 + 1$ dimensiones con constante cosmológica negativa y está caracterizado por masa, momento angular y carga[29].

La segunda solución corresponde a la métrica de una D3-brana negra y se da cuando $B = 0$,

$$\begin{aligned} U_{BB}(r) &= \left(r + \frac{r_0}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{2} r_0 \right)^4}{\left(r + \frac{r_0}{2} \right)^4} \right), \\ V_{BB}(r) &= \frac{4\mathcal{V}}{9r_0^2} \left(r + \frac{r_0}{2} \right)^2, \\ W_{BB}(r) &= \frac{4}{3} \left(r + \frac{r_0}{2} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

pueden reescribirse estas funciones haciendo $r + r_0/2 \rightarrow r$, $\tilde{z} = 2z/\sqrt{3}$ y $\mathcal{V} = r_0$, en la forma conocida:

$$\begin{aligned} U_{BB}(r) &= \frac{r^2}{\ell^2} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right), \\ V_{BB}(r) &= \frac{r^2}{\ell^2}, \\ W_{BB}(r) &= \frac{r^2}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Ahora que ya se tienen las soluciones analíticas correspondientes puede calcularse la energía para dicho espaciotiempo, sin embargo, debe realizarse un reescalamiento de las coordenadas en ambas soluciones

para que la métrica se comporte en la frontera como un espacio de Minkowski. Lo siguiente es presentar la energía asociada a través de (3.2.6) para ambas soluciones.

Energía de la solución $BTZ \times T^2$. Para la solución dada por (3.2.9), debe sustraerse un fondo distinto pues se comporta asintóticamente como un espacio $AdS_{2+1} \times T^2$ y no como un AdS_{4+1} . La energía para esta solución puede calcularse de manera similar a (3.2.6) intercambiando el término asociado al fondo AdS_{4+1} por el asociado a $AdS_{2+1} \times T^2$ dado por

$$\int K_0 = B \frac{r}{\ell^2}.$$

Se sustituye esta modificación en la expresión de la energía dada por (3.2.6), seguido de los reescalamientos de las coordenadas $t \rightarrow \sqrt{3}t$, $r \rightarrow r/\sqrt{3}$, $x \rightarrow x/(3)^{\frac{1}{4}}$, $y \rightarrow y/(3)^{\frac{1}{4}}$, y $z \rightarrow \sqrt{3}z$, para obtener

$$\begin{aligned} E &= -\frac{V_3 B}{8\pi G_5} \left(\frac{r^2}{\ell^3} \right) \left[\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &\simeq -\frac{1}{16\pi G_5} V_3 B \frac{r^2}{\ell^3} \left(-\frac{r_0^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

Así, la energía para la solución $BTZ \times T^2$ está dada por

$$E_{BTZ} = \frac{V_3 B r_0^2}{16\pi G_5 \ell^3}. \quad (3.2.12)$$

Energía de la solución de la brana negra. Dado que la métrica está dada por (3.2.11), al sustituir en (3.2.6) la energía queda como

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{8\pi G_5} V_3 \left(\frac{r}{\ell} \right) \left\{ \frac{r}{\ell} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2r^2}{\ell^3} + \frac{r^2}{\ell^3} \right) - 3 \frac{r^3}{\ell^4} \right\}, \\ &= \frac{3V_3}{8\pi G_5} \left(\frac{r^4}{\ell^5} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

luego, cerca de la frontera $r_0/r \ll 1$, y puede hacerse la siguiente aproximación

$$\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{r_0^4}{r^4}.$$

Así, la energía queda como

$$E = \frac{3V_3}{16\pi G_5 \ell^5} r_0^4, \quad (3.2.13)$$

que corresponde a la expresión en (3.1.7), para $p = 3$.

También debe saberse la temperatura de las soluciones analíticas, ya que se usará más adelante para poder comparar con resultados obtenidos en otros trabajos realizados con un enfoque distinto. El periodo estará dado de acuerdo a la expresión (2.3.4). Para la D3-brana negra se tiene el siguiente periodo

$$\beta_{BB} = \frac{2\pi \ell^2 r^3}{r^4 + r_0^4} \Big|_{r=r_0} = \frac{\pi \ell^2}{r_0}, \quad (3.2.14)$$

por su parte, la solución BTZ tiene el periodo

$$\beta_{BTZ} = \frac{2\pi\ell^2}{3r} \Big|_{r=r_0} = \frac{2\pi\ell^2}{3r_0}. \quad (3.2.15)$$

Debe recordarse que el inverso de las expresiones anteriores corresponden a la temperatura a la que se encuentra el agujero negro, y por ende, la temperatura a la cual se encuentra la teoría de campos conforme. Por otro lado, nótese que la solución de la brana negra tiene el mismo periodo que la solución BTZ tomando $\tilde{r}_0 = 3r_0/2$, esto es importante en la construcción de las soluciones numéricas presentadas en [4] a las cuales se les calculará la energía.

Para las soluciones analíticas la energía resultó finita, la energía de la métrica de la brana negra ya se había calculado a través de este método en [28], la parte que se ha agregado es el cálculo realizado para la solución $BTZ \times T^2$. Ya se tiene la energía asociada a los casos límite, aun queda por calcular la energía de las soluciones que se obtienen de manera numérica y eso es lo que se hará en la siguiente sección.

3.3. Soluciones de las branas magnéticas y su energía

Usando como base las soluciones analíticas obtenidas para la métrica de las branas magnéticas es posible construir un conjunto de soluciones suaves a través del método realizado en [4]. Cerca del horizonte, las funciones de la métrica con $\ell = 1$, se escriben como[30]

$$\begin{aligned} U_P(r) &= 6r_0(r - r_0) + \sum_{i=2}^{\infty} U_i(r - r_0)^i, \\ V_P(r) &= \sum_{i=0}^{\infty} V_i(r - r_0)^i, \\ W_P(r) &= 3r_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} W_i(r - r_0)^i, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

donde los coeficientes que aparecen explícitamente fijos, son comunes a todas las soluciones de la familia, incluso las dos analíticas ya vistas. El coeficiente V_0 es libre de tomar cualquier valor positivo, pero una vez que este sea fijado, todos los demás quedan determinados al resolver las ecuaciones de Einstein orden a orden en r . Con lo anterior, se ve que la familia de soluciones que se construye queda parametrizada por el valor de V_0 . Desde luego, resolver a todo orden no es posible, por lo que las soluciones en el dominio completo de r se obtienen de manera numérica, por tanto, el cálculo de la energía para estas soluciones se obtiene a través de la sustitución de los resultados numéricos para U, V y W en (3.2.6) que cerca del radio del horizonte coinciden con (3.3.1). Como se mencionó en el capítulo 2, puede asociársele una temperatura a cada solución, aquellas obtenidas a partir de este método tienen todas la misma temperatura (el inverso de (3.2.14)), como se menciona en [4]. Dado que (3.2.6) se debe evaluar en el límite $r \rightarrow \infty$, una manera de obtener una expresión analítica para la energía es tomando la expansión de Fefferman-Graham de las funciones de la métrica y dejar la energía en términos de los coeficiente que se obtienen a través de resolver de manera perturbativa las ecuaciones de Einstein en la frontera. Las siguientes expresiones son el

resultado de realizar la anterior

$$\begin{aligned}
 U_\infty(r) &= r^2 + \frac{\frac{2}{3}B^2 \ln(r^{-1}) + U_\infty^1}{r^2}, \\
 V_\infty(r) &= r^2 - \frac{\frac{1}{3}B^2 \ln(r^{-1}) + \frac{V_\infty^1}{2}}{r^2}, \\
 W_\infty(r) &= r^2 + \frac{\frac{2}{3}B^2 \ln(r^{-1}) + V_\infty^1}{r^2},
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

donde los coeficientes U_∞^1 y V_∞^1 son libres en lo que a la expansión en la frontera concierne, y distintos valores de ellos dictarán diferentes comportamientos de la solución cerca del horizonte. Integrar desde la frontera para determinar los valores de estos coeficientes llevan al comportamiento de las funciones cerca de r_0 , que es de interés pero requeriría de ajustes finos en la parte numérica, así que por el contrario, se entenderá que U_∞^1 y V_∞^1 están relacionado con las particularidades de la solución numérica y solo pueden extraerse de ella, en particular, es posible que uno de ellos provenga del radio del horizonte, como se verá un poco más adelante. En lo que sigue se tomará, como en [4], $\ell = 1$ para simplificar los cálculos.

Al sustituir las funciones (3.3.2) en la expresión (3.2.6), considerando términos dominantes conforme r va a infinito se obtiene

$$E_p = \frac{V_3}{8\pi G_5} \left(-\frac{3}{2}U_\infty^1 + B^2 \ln r \right),$$

cuando se apaga el campo magnético debe recuperarse la expresión obtenida para la brana negra (3.2.13), lo que insinúa hacer la identificación $U_\infty^1 = -r_0^4$; como se había anticipado, vincula los coeficientes en la frontera con el comportamiento cercano al horizonte. Así, se obtiene la expresión final

$$E_p = \frac{V_3}{8\pi G_5} \left(\frac{3}{2}r_0^4 + B^2 \ln r \right). \tag{3.3.3}$$

El cálculo anterior sugiere que la acción contiene términos divergentes, para verificarlo se toma el integrando de la acción (3.2.7) con las funciones (3.3.2) y se toma $r = 1/\epsilon$, considerando términos dominantes con $\epsilon \rightarrow 0$ resulta la expresión

$$S_{\frac{1}{\epsilon}} = \int -\frac{32}{\epsilon^3} + \frac{8}{3}B^2 \epsilon d^5x + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{3.3.4}$$

que para $\epsilon \rightarrow 0$, diverge y, en consecuencia, debe tener una corrección con términos extra en la frontera, como se explicó en secciones anteriores. Como se verá en la discusión, esta divergencia es de esperarse desde la perspectiva de la teoría de campos.

3.3.1. Espectro energético

Para tener una representación gráfica de los resultados numéricos y constatar que su apariencia parezca correcta, se sustituye en (3.2.6) las funciones obtenidas para U, V y W de forma numérica (3.3.1) para distintos valores de B , se evalúa en un radio r_{max} arbitrariamente grande en comparación con r_0 , y se divide por el logaritmo de r_{max} , obteniendo la gráfica.

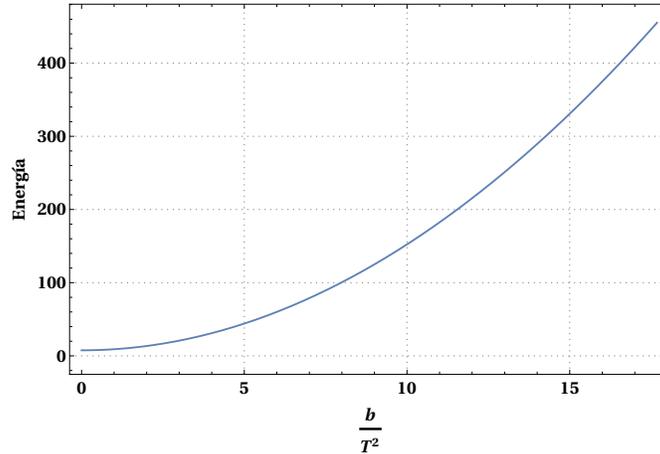


Figura 3.1: Gráfica de la energía obtenida de manera numérica para las soluciones de las branas magnéticas vs la intensidad de campo magnético.

Por otro parte, para simplificar la comparación con la ecuación (3.3.3) y expresar los resultados en forma adimensional, se normalizan los resultados numéricos por un factor adecuado, permitiendo así su comparación con la expresión más simple $1 + B^2/T^2$

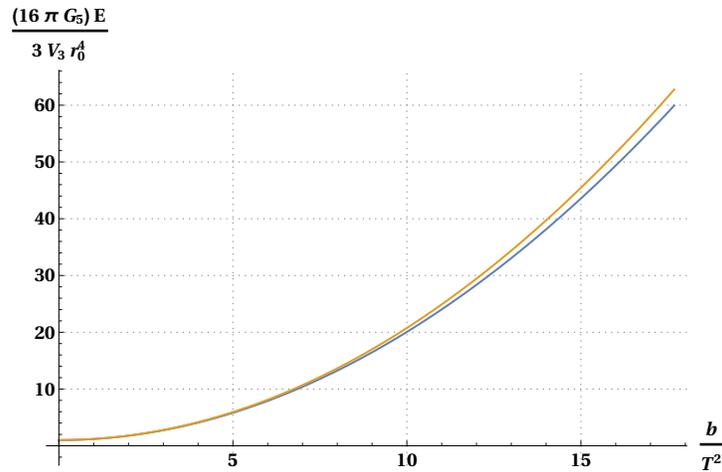


Figura 3.2: Comparación de las gráficas $1 + B^2/T^2$ y la obtenida de manera numérica para la energía.

Para finalizar este capítulo se hará un breve resumen con los aspectos más relevantes. Primero, se debe enfatizar que el propósito de este capítulo era presentar el cálculo de la energía del espaciotiempo asociado a las branas magnéticas, por supuesto, ya se sabía el de un caso límite (brana negra), restaba calcular la energía de la otra solución analítica ($BTZ \times T^2$) y de la familia de soluciones construidas de manera numérica. En segundo lugar, cuando se encontró una divergencia en los cálculos se procedió a verificar que la acción fuera finita, garantizando así que el principio variacional permanezca bien definido y que la expresión de Hawking-Horowitz para la energía (3.1.1) siga estando bien definida para las soluciones numéricas. Finalmente, a través de la solución numérica pudo obtenerse una gráfica que mostrara que el comportamiento de la energía es similar a una parábola como función de la magnitud del campo magnético.

Capítulo 4

Discusión y Resultados

En este capítulo se discutirán los detalles respecto al cálculo de la energía para las soluciones, así como los resultados encontrados y su relación con la teoría de campos conforme mediante la dualidad. También se proponen nuevas consideraciones en el problema y otra forma de resolverlo, que se espera de mejores resultados.

4.1. La elección del fondo de referencia

Como ya se mencionó, al realizar el cálculo de la energía a través de la fórmula de Hawking-Horowitz, debe considerarse un fondo de referencia para mantener finito el valor de la integral. El problema tratado aquí se redujo a simplemente tomar en cuenta la curvatura extrínseca del espaciotiempo de referencia. Debe resaltarse que dicho fondo de referencia es distinto para la solución de la D3-brana y la solución del agujero BTZ. En la primera solución se tomó como métrica de fondo el espaciotiempo AdS_{4+1} ; en cambio, para la solución BTZ, el fondo de referencia fue un espacio $\text{AdS}_{2+1} \times T^2$. Ambas elecciones del fondo de referencia mantuvieron a la energía finita.

Para las soluciones interpoladas entre las solución de la brana negra y la solución BTZ, dado el comportamiento asintótico de todos estos espacios, se tomó como fondo de referencia el espacio AdS_{4+1} , lo cual quita la divergencia debida al vacío en la teoría de campo pero no la asociada al campo magnético. Si bien el cálculo (3.3.4) muestra que es necesario considerar términos de frontera en la acción que controlen la divergencia encontrada en la energía, la importancia de la expresión (3.2.6) es que nos permite conocer la forma exacta en que ocurre la divergencia y por ello estar en posición de regularizarla, dejando el trabajo de renormalización holográfica para más adelante.

4.2. Comparación entre las energías con los resultados perturbativos en teoría cuántica de campos

A través de técnicas de teoría de campos es posible calcular la energía a la teoría dual a los fondos gravitacionales que se han estudiado. En esta sección se hará una comparación entre la densidad de energía que se ha obtenido para las soluciones analíticas, y los resultados que se sabe que existen en la literatura para las teorías de norma en presencia de un campo magnético.

El hecho de encontrar una divergencia asociada a la presencia del campo magnético y que esta deba ser renormalizada está en concordancia con los resultados en los cálculos perturbativos en teoría de campos. La energía del vacío para una teoría de norma en presencia de un campo magnético fue calculada en [2], los autores encuentran que, en efecto, es necesario introducir un nuevo parámetro que absorba la divergencia producida por el campo magnético. En su caso encuentran que tal divergencia es proporcional a B y no a B^2 , pero esto es de esperarse, pues el tratamiento es distinto, del lado gravitacional el resultado no es perturbativo, mientras que del lado de teoría cuántica de campos, los cálculos son perturbativos, por esta y otras diferencias entre las teorías, una comparación cuantitativa no es pertinente, pero la aparición de una divergencia asociada al campo magnético es cualitativamente consistente.

Por otro lado, en el caso tratado aquí se han encontrado la energía de una de las dos soluciones analíticas: la solución correspondiente al agujero negro BTZ, que asintóticamente se aproxima $\text{AdS}_{2+1} \times T^2$ y, por ende, le corresponde una teoría de campo en $1 + 1$ dimensiones. Y se ha corroborado la energía de la otra solución, la D3-brana negra, que se aproxima asintóticamente a AdS_{4+1} , por consiguiente, la correspondencia indica que tiene asociado una teoría de campo en $3 + 1$ dimensiones.

Antes de introducir los resultados de la teoría de campos, deben manipularse las expresiones que se obtuvieron del lado gravitacional para que adquieran una forma que facilite la comparación con el trabajo de D'Hoker y Kraus. Se tomará $\ell = 1$ para la brana negra y $\ell = 1/\sqrt{3}$ para el agujero BTZ, también se tomará $G_5 = \pi/2N^2$ y las temperaturas asociadas por (3.2.14) y (3.2.15). Así, la densidad de energía para el agujero BTZ queda como

$$\rho_{grav} = \frac{E_{BTZ}}{V_1} = \frac{BV_2 r_0^2}{16\pi G_5 \ell^3} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{\mathcal{B} \mathcal{V}_2 N^2 T^2}{12}, \quad (4.2.1)$$

donde se ha hecho $V_3 = V_1 V_2$ pues se tiene una métrica diagonal, $\mathcal{B} = \sqrt{3}B$ y $\mathcal{V}_2 = \sqrt{3}V_2$. La densidad de energía en la brana negra queda como

$$\rho_{grav} = \frac{E_{BB}}{V_3} = \frac{3r_0^4}{16\pi G_5 \ell^5} = \frac{3}{4} \frac{N^2 \pi^2 T^4}{2}. \quad (4.2.2)$$

Ahora bien, en lo que corresponde a la teoría de norma, puede consultarse en [3] que después de realizar la integral $\rho = \int T dS$, las energías en las teorías de campo duales a la solución BTZ y a la brana negra están dadas respectivamente por,

$$\rho_{gauge} = \frac{N^2 \pi^2 T^4}{2} \quad \text{y} \quad \rho_{gauge} = \frac{\mathcal{B} \mathcal{V}_2 N^2 T^2}{12}, \quad (4.2.3)$$

donde en el mismo [3] reportan que a cada una le corresponde

$$\frac{S}{L_y} = \frac{\mathcal{B} \mathcal{V}_2 N^2}{6} T^2, \quad \frac{S}{V} = \frac{2\pi^2 N^2 T^3}{3},$$

A partir de las expresiones anteriores, y en virtud de las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.1), se observa que la densidad de energía obtenida del lado gravitacional difiere por un factor de $3/4$, mismo factor encontrado en [28] y [3], para temperaturas bajas y un factor $\sqrt{4/3}$ para temperaturas altas como también obtuvieron en [3].

4.3. Discusión

La correspondencia norma/gravedad permite encontrar la densidad de energía en la teoría de campo dual. En el artículo [28], se encuentran los cálculos de la energía dual. Para el problema que se presentó,

se utilizó la misma idea para calcular una *energía* que, sin entrar en detalles de como se interpreten estos resultados a través de la correspondencia, sirva como referencia para todas las aplicaciones que pueda tener la métrica de la brana magnética.

Como pudo observarse en la gráfica 3.2, el comportamiento de la energía es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo magnético, manteniendo al sistema a temperatura constante, eso sugirió que era posible expresar la energía a través de un tratamiento analítico. Usando la expansión de Fefferman-Graham, pudo calcularse la energía asociada a la métrica de las branas magnéticas, donde se obtuvo un comportamiento divergente en la densidad de energía de forma logarítmica en función de la coordenada radial.

En este trabajo se ha encontrado que la energía diverge y, mejor aún, pudo encontrarse la forma específica en la que diverge en términos de la escala energética. Esto último alienta la posibilidad de obtener un resultado finito renormalizando la densidad de energía, para ello deben agregarse términos de frontera para mantener la acción finita al estilo Gibbons-Hawking. Los términos de frontera aparecen como potencias y logaritmos de la coordenada radial y se espera que dichos términos al volver finita la acción en la capa de masa, también vuelvan finita la densidad de energía.

A través de la expresión de la densidad de energía pueden obtenerse otros parámetros en la teoría de campos, como la entropía, entonces la expresión de la densidad de energía puede servir para calcular la entropía en la dualidad con un factor numérico, como ya se ha visto en los resultados que se han obtenido hasta ahora, y eso es parte de la motivación de la presente tesis.

4.4. Conclusiones y trabajo futuro

La fórmula para la energía obtenida por Hawking y Horowitz resultó de gran utilidad para realizar el análisis de las soluciones analíticas de la energía de las branas magnéticas, gracias a que dicho método emplea el comportamiento asintótico de la métrica. Para las branas magnéticas se consiguió parametrizar la divergencia que aparentemente ocurría en [3], abriendo la puerta a definir correctamente los términos de frontera. La forma en que se calculó fue a través de regularizar la energía usando la solución numérica.

Se logró calcular la energía ADM de la métrica de las branas magnéticas. El caso $BTZ \times T^2$ es una solución analítica disconexa de la familia que se construye numéricamente, como se ve que es disconexa es en su comportamiento asintótico. Por un lado, la familia de soluciones es asintóticamente AdS_{4+1} , mientras que la solución $BTZ \times T^2$ es asintóticamente $AdS_{2+1} \times T^2$, en otras palabras, su frontera es distinta a pesar de ser soluciones en cinco dimensiones. La divergencia que aparece en la energía para las branas magnéticas solo es una confirmación de la necesidad de términos de frontera proporcionales a B^2 en la acción gravitacional para que el principio varacional esté bien definido. Debe enfatizarse que a través la expresión (3.2.6) pudo realizarse el cálculo de la energía de toda la familia de soluciones (3.3.1), para las soluciones numéricas tuve que usarse la expansión de Fefferman-Graham, gracias esto se sugiere la identificación de uno de los coeficientes, aun resta uno por determinar y verificar que, en efecto, puede hacerse la identificación que aquí se ha propuesto, pero esto es un avance para determinar el comportamiento de la métrica cerca de la frontera.

Para determinar la energía de manera analítica debe hacerse uso de la renormalización holográfica para quitar los términos divergentes dentro de la acción y verificar (si es el caso) la forma funcional de la densidad energía obtenida con la regularización. Además se propone verificar la conjetura de Myers-Horowitz haciendo la doble continuación analítica para determinar la energía para dichos espaciotiempos a los que le corresponde teorías conformes no supersimétricas, una vez que es conocido el procedimiento analítico para renormalizar la energía.

Apéndice A

Ecuaciones de movimiento

El sistema

$$\begin{aligned} & 2W^2(r) \left[4B^2 + V(r) (U'(r)V'(r) + U(r)V''(r)) \right] - \\ & V(r)W(r) \left[2V(r) (U'(r)W'(r) + U(r)W''(r)) + U(r)V'(r)W'(r) \right] \\ & + U(r)V^2(r)W'^2(r) = 0 \\ & 4V(r)W^2(r)V''(r) - 2W^2(r)V'^2(r) - V^2(r) \left(W'^2(r) - 2W(r)W''(r) \right) = 0 \quad (\text{A.0.1}) \\ & W(r) \left[-8B^2 + 6V^2(r) (U''(r) - 8) + 6V(r)U'(r)V'(r) \right] + 3V^2(r)U'(r)W'(r) = 0 \\ & W(r) \left(4B^2 + 2V(r)U'(r)V'(r) + U(r)V'(r) - 24V^2(r) \right) \\ & + V(r)W'(r) (V(r)U'(r) + 2U(r)V'(r)) = 0, \end{aligned}$$

resulta de sustituir el ansatz (3.2.1) en las ecuaciones de movimiento obtenidas al demandar que se anule la variación de la acción (3.2.7) respecto a la métrica.

Para cualquier métrica de la forma (3.2.1), el campo (3.2.8) será solución a las ecuaciones derivadas en (3.2.7) al variar el potencial electromagnético.

Bibliografía

- [1] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [2] Alejandro Ayala, Luis Alberto Hernandez, Jesus Lopez, Ana Julia Mizher, Juan Cristobal Rojas, and Cristian Villavicencio. Phase diagram for charged scalars in a magnetic field at finite temperature. *Phys. Rev.*, D88:036010, 2013.
- [3] Eric D’Hoker and Per Kraus. Magnetic Brane Solutions in AdS. *JHEP*, 10:088, 2009.
- [4] Gustavo Arciniega, Patricia Ortega, and Leonardo Patiño. Brighter Branes, enhancement of photon production by strong magnetic fields in the gauge/gravity correspondence. *JHEP*, 04:192, 2014.
- [5] Stephen Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1st edition, 1970.
- [6] Lawrence Conlon. *Differentiable Manifolds*. Birkhäuser, 2001.
- [7] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition*, volume Volume 1. Publish or Perish, 3rd edition, 1999.
- [8] Robert M. Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, first edition edition, 1984.
- [9] Javier P. Muniain John C. Baez. *Gauge Fields, Knots and Gravity (Series on Knots and Everything)*. Series on Knots and Everything. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [10] Friedrich W. Hehl, Paul von der Heyde, G. David Kerlick, and James M. Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48:393–416, Jul 1976.
- [11] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
- [12] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. 1997.
- [13] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education Limited, 1,pearson new international edition edition, 2014.
- [14] Alejandro Corichi y Darío Núñez. Introducción al formalismo ADM. *Revista Mexicana de Física*, 37(4):720–747, 1991.

- [15] Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V. *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [16] S. W. Hawking and Gary T. Horowitz. The Gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Class. Quant. Grav.*, 13:1487–1498, 1996.
- [17] Vesselin Petkov (eds.) Abhay Ashtekar. *Springer Handbook of Spacetime*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2014.
- [18] A. O. Barut (eds.) Roger Penrose (auth.). *Group Theory in Non-Linear Problems: Lectures Presented at the NATO Advanced Study Institute on Mathematical Physics, held in Istanbul, Turkey, August 7–18, 1972*. Nato Advanced Study Institutes Series 7. Springer Netherlands, 1 edition, 1974.
- [19] Valetina Di Carlo. Conformal compactification and anti-de sitter space. Master’s thesis, Stockholms Universitet, Suecia.
- [20] C. Robin Graham Charles Fefferman. *The Ambient Metric*. Annals of Mathematics Studies 178. Princeton University Press, 2011.
- [21] Horațiu Năstase. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015.
- [22] Alfonso V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. *Springer Proc. Phys.*, 161:411–474, 2015.
- [23] Veronika E. Hubeny. The AdS/CFT Correspondence. *Class. Quant. Grav.*, 32(12):124010, 2015.
- [24] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
- [25] James Lindesay Leonard Susskind. *An Introduction to Black Holes, Information And The String Theory Revolution: The Holographic Universe*. World Scientific Publishing Company, 0 edition, 2004.
- [26] Kostas Skenderis and Marika Taylor. Kaluza-Klein holography. *JHEP*, 05:057, 2006.
- [27] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:505–532, 1998.
- [28] Gary T. Horowitz and Robert C. Myers. The AdS / CFT correspondence and a new positive energy conjecture for general relativity. *Phys. Rev.*, D59:026005, 1998.
- [29] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851, 1992.
- [30] Daniel Areán, Leopoldo A. Pando Zayas, Leonardo Patiño, and Mario Villasante. Velocity statistics in holographic fluids: magnetized quark-gluon plasma and superfluid flow. *Journal of High Energy Physics*, 2016(10):158, 2016.