UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH.
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO.
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

EL ESPECTRO PRIMO DEL ANILLO GLOBAL DE REPRESENTACIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATAMÁTICAS

PRESENTA:
CITLALI ROBERTA TORRES SÁCHEZ.

TUTOR: Dr. ALBERTO GERARDO RAGGI CÁRDENAS.
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS CCM, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ:
Dr. LUIS VALERO ELIZONDO. UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO.
Dr. ABEL CASTORENA MARTÍNEZ, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS.
Dr. NOÉ BARCENAS TORRES, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS.
Dr. ERNESTO VALLEJO RUIZ, CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS.

MORELIA, MICHACAN, JUNIO DE 2017.

Índice general

*

Agradecimientos

El reconocimiento es para el amor de mi vida mi madre Hortencia por esos años en los cuales me dio todo su amor, sus consejos y su apoyo para realizar cada uno de mis proyectos. Hoy tu nombre me da valor y mi esfuerzo es inspirado en ti mamá.

A mi familia, en especial a mis hermanas Malinalli e Itzel, por el cariño y la fortaleza que me dieron en estos años.

A mi asesor el Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas por brindarme la oportunidad trabajar con él, y por sus conocimientos aportados durante el tiempo que curse la Maestría y para realizar este trabajo.

A mis sinodales: Dr. Luis Valero Elizondo, Dr. Abel Castorena Martínez, Dr. Noé Bárcenas Torres y al Dr. Ernesto Vallejo Ruiz, por su observaciones y comentarios sobre este trabajo.

Introducción

La presente tesis tiene por objetivo estudiar las componentes conexas del espectro primo del anillo global de representaciones de un grupo finito y la relación que existe con los idempotentes primitivos del anillo global de representaciones de un grupo finito. Para llegar a este resultado se utilizan la teoría y resultados de Álgebra Conmutativa, topología, y teoría de representaciones y caracteres de grupos finitos.

En el capítulo uno de este trabajo, primero se desarrolla Teoría de Álgebra Conmutativa enfocada en el conjunto de ideales primos de un anillo Notheriano A, que es el espectro primo de A y lo denotamos por $Spec(A)$, en el que se define la topología de Zariski asociando a cada subconjunto E de A el conjunto

$$V(E) = \{P \in SpecA : E \subseteq P\} \subseteq SpecA$$

formado por los ideales primos de A que contienen a E, que estos definen los cerrados en una topología de $Spec(A)$. Por otro lado, un elemento de A se dice que es idempotente si al multiplicarse por sí mismo sucesivas veces da él mismo, y un idempotente se llama primitivo si es distinto de cero, tal que si es la suma de dos elementos ortogonales, entonces alguno de los dos es cero. Los elementos idempotentes de un anillo A son útiles para estudiar sus propiedades. Así, si A es un anillo Noetheriano se obtiene que $Spec(A)$ es un espacio Noetheriano, y se establece una correspondencia entre los idempotentes primitivos de A y las componentes conexas de $Spec(A)$.

Se da un repaso de la Teoría de G conjuntos, para un grupo finito G. Además, se desarrolla la Teoría de biconjuntos, dados dos grupos G y H, un conjunto X se dice que es un $(G,H)-$biconjunto si es un $G-$ conjunto izquierdo y un $H-$conjunto derecho tal que la $G-$ acción y la $H-$ acción conmutan, a este $(G,H)-$biconjunto se denota por ${}_GX_H$. Los biconjuntos se caracterizan por la Descomposición de Bouc:

"Sean G, H grupos, P_1 y P_2 las proyecciones de $G\times H$ a G y H respectivamente.

$$\begin{array}{lcl} A & = & P_1(D) \\ C & = & P_2(D) \leq H \\ A_1 & = & \{a \in G \mid (a,1) \in D\} \trianglelefteq A \\ C_1 & = & \{b \in H \mid (1,b) \in D\} \trianglelefteq C \end{array} \tag{1}$$

Si X es un (G,H)–biconjunto transitivo, $X \cong \frac{G\times H}{D}$ para algún subgrupo D de $G\times H$ tenemos el siguiente isomorfismo de (G,H)–biconjuntos

$$\frac{G\times H}{D} \cong {}_G G_A \times_A \rho B_B \times_B B\pi_C \times_C H_H$$

donde B es el grupo C/C_1, $\pi : C \to B$ y $\pi' : A \to A/A_1$ los morfismos proyección, f es el isomorfismo del lema 3 y $\rho = f \circ \pi'$."

En el segundo capítulo se define el anillo de Burnside de un grupo finito G, $B(G)$, que es el cociente del grupo libre abeliano con base en el conjunto de G–conjuntos finitos, hasta isomorfismo, sobre el subgrupo generado por los elementos de la forma $([X\sqcup Y]) - [X] - [Y]$ para cada par de G–conjuntos. Se define el homomorfismo de anillos entre el anillo de Burnside de un grupo finito G y el anillo $\prod_{H\in\mathscr{C}}\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & B(G) & \longrightarrow & \prod_{H\in\mathscr{C}}\mathbb{Z} \\ & X & \longrightarrow & (\varphi_H(X))_{H\in\mathscr{C}} \end{array}$$

donde $\mathscr{C}$ es el conjunto de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G, y $\varphi_H(X)$ es la marca de H en X. La matriz asociada a φ se le llama la tabla de marca de G y se denotará por $\mathscr{M}(G)$. De este homomorfismo se puede ver al anillo de Burnside de un grupo finito G como un subanillo del anillo $\mathbb{Z}^n$ (donde n es el número de las clases de conjugación de los subgrupos de G). Además, se deduce que $B(G)$ es un anillo Noetheriano, se describen los ideales primos de $B(G)$, para después especificar cuáles son las componentes conexas de $B(G)$ y finalizar con el Teorema de Dress, para un grupo finito G se tiene que los idempotentes primitivos de $B(G)$ están en biyección con las clases de conjugación de subgrupos perfectos de G.

En el tercer capítulo se define el grupo de representaciones de un grupo finito G sobre $\mathbb{C}$ como el grupo de Grothendick de la categoría de $\mathbb{C}G$–módulos finitamente generados (salvo isomorfismo) con respecto a $\oplus$, y se denota por $R_{\mathbb{C}}(G)$ o $R(G)$. Exploramos la teoría de caracteres de grupos finitos y se desarrolla algunas de sus propiedades elementales. Para cada $a \in G$, se define la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \chi(a) : & R(G) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & M & \longrightarrow & tr_M(a_l) \end{array}$$

Por otro lado, si M es un $\mathbb{C}G$–módulo, entonces cada elemento a de G define una transformación lineal invertible de M. Se define el caracter de M como la función

$$\begin{array}{rccl} \chi_M : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longrightarrow & tr_M(a_l) \end{array}$$

Este desarrollo se continúa con la introducción de La tabla de caracteres de G, que se denota por χ, es una matriz cuadrada cuyas columnas son indexadas por clases de conjugación de G , y las filas están indexadas por clases de isomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos simples S. Sean $g_1,\ldots,g_r$ representantes de las clases de conjugación de G, la (i,j) entrada de χ es $\chi_i(g_j)$.

En el capítulo final se introduce y desarrolla la construcción del anillo global de representaciones de un grupo finito, que denotamos por $\mathbb{D}(G)$, el cuál generaliza y relaciona las propiedades del anillo de representaciones y el anillo de Burnside, este anillo fue definido por el Dr. A. Gerardo Raggi Cárdenas y el Dr. Luis Valero Elizondo en su artículo *Global representation ring* [Raggi-Valero]. El anillo de representaciones y el anillo de Burnside inducen funtores de biconjuntos y de forma análoga también puede definirse un nuevo funtor a partir del anillo global de representaciones de forma natural, este es el funtor global de representaciones el cual es un funtor de biconjuntos, estos funtores se desarrollan en el trabajo de la M.C. Karley Tatiana Cardona Echenique, en su tesis *El funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos de Green* [Cardona].

De los caracteres de $\mathbb{C}G$–módulos se definen homomorfismos de anillos $\mathscr{S}_{H,a}:\mathbb{D}(G)\longrightarrow\prod_{(H,b)\in\mathscr{E}}\mathbb{C}$, para cada subgrupo H de G y $a\in H$, y por medio de estos homomorfismos se define un homomorfismo de anillos $\overline{\mathscr{S}}$ de $\mathbb{D}(G)$ a $\prod_{(H,b)\in\mathscr{E}}\mathbb{C}$, donde $\mathscr{E}=\{(H,b)|H\leq G,\ b\in H\}$. De forma análoga que con el anillo de Burnside se describen los ideales primos de $\mathbb{D}(G)$, para después construir las componentes conexas del espectro primo de $\mathbb{D}(G)$. Y así, establecer la relación entre los idempotentes del anillo de Burnside de G y los idempotentes primitivos del anillo global de representaciones de G.

1 Preliminares

En este capítulo se desarrollan los resultados necesarios de Álgebra Conmutativa, para ello se enunciarán algunas definiciones y propiedades de anillos, de los biconjuntos, y culminar con el Teorema primordial para este trabajo.

1.1. El espectro primo de un Anillo Noetheriano.

En esta sección se introducen resultados de Álgebra Conmutativa, en particular para anillos noetherianos necesarios para el desarrollo de este trabajo, principalmente los idempotentes primitivos de estos anillos. Además, de conceptos de Topología, y así describir la relación que existe entre un anillo noetheriano y su espectro primo, considerando la Topología de Zariski.

El primer resultado es el Prime Avoidance Lemma y el Teorema del Residuo Chino,

Lema 1 *Sea A un anillo conmutativo. Si $I_1, \dots, I_n$ son ideales de A y P es un ideal primo tal que $\cap_{j=1}^{n} I_i \subseteq P$, entonces existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $I_j \subseteq P$.*

Demostración. Supongamos que $I_j \not\subseteq P$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, para cada j existe un elemento a_j de I_j tal que $a_j \notin P$, se tiene que $a_1 \cdots a_n \in I_1 \cdots I_n \subseteq \cap_{j=1}^{n} I_i$. Puesto que P es primo, entonces $a_1 \cdots a_n \notin P$, así, $\cap_{j=1}^{n} I_i \not\subseteq P$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $I_j \subseteq P$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Sean A un anillo y $I_1, \dots, I_n$ ideales de A. Se define el homomorfismo

$$\theta : A \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} A/I_i$$

dado por $\theta(x) = (x + I_1, \dots, x + I_n)$.

Teorema 1.1.1 *1. Si $I_1, \ldots, I_n$ son ideales de A tales que si $i \neq j$ los ideales I_i e I_j son coprimos, entonces*

$$\prod_{j=1}^{n} I_i = \bigcap_{j=1}^{n} I_i.$$

2. θ es supreyectiva si y sólo si los ideales I_i e I_j son coprimos siempre que $i \neq j$.

3. θ es inyectiva si y solo si $\cap_{j=1}^{n} I_i = (0)$.

Demostración. Para su demostración ver [Bourbaki, pág. 53]. □

Definición 1 *Al conjunto de ideales primos de un anillo A se le denota por*

$$Spec(A) = \{P \subseteq A | P \text{ es un ideal primo de } A\}$$

y se le llama espectro primo de A.

Se introduce una topología en el espectro primo de un anillo de la siguiente forma

Definición 2 *Sea A un anillo. A cada subconjunto E de A se le asocia el conjunto de ideales primos de A que contienen a E, se denota por $V(E)$, es decir,*

$$V(E) = \{P \in Spec(A) | E \subseteq P\}$$

Sean $E, E' \subseteq A$ tales que $E \subseteq E'$, entonces $V(E') \subseteq V(E)$. En particular, para cada subconjunto E de A y si I es un ideal generado por los elementos de E, entonces $V(E) = V(I)$. Se cumplen las siguientes propiedades

Proposición 1.1.1 *Sea A un anillo conmutativo con uno. Entonces,*

1. *$V(A) = \emptyset$ y $V(0) = Spec(A)$.*
2. *Si I, J son ideales de A, entonces*

$$V(IJ) = V(I) \cup V(J).$$

3. *Si $\{I_j\}_{j \in \mathscr{A}}$ es una familia de ideales de A, se cumple que*

$$V\left(\bigcup_{j \in \mathscr{A}} I_j\right) = V\left(\sum_{j \in \mathscr{A}} I_j\right) = \bigcap_{j \in \mathscr{A}} V(I_j).$$

4. *Si I y J son ideales de A tales que $I \subseteq J$, entonces $V(J) \subseteq V(I)$.*

Demostración. 1. y 4. son obvias.

2. Si $P \in V(I) \cup V(J)$, entonces $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$ y así $IJ \subseteq P$, se tiene que $P \in V(IJ)$. Recíprocamente, si $P \in V(IJ)$ y $P \notin V(J)$, entonces existe $a \in J$ tal que $a \notin P$, pero para todo $b \in I$ se tiene que $ba \in IJ \subseteq P$ y como P es primo, entonces $b \in P$ para todo $b \in I$, es decir, $I \subseteq P$. Entonces, $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

4. Sea $\{I_j\}_{j\in\mathscr{A}}$ una familia de ideales de A, entonces un ideal primo P contiene a la suma $\sum_{j\in\mathscr{A}} I_j$ si y sólo si contiene a cada I_j y así que

$$V\left(\sum_{j\in\mathscr{A}} I_j\right) = \bigcap_{j\in\mathscr{A}} V(I_j).$$

   Además, $\sum_{j\in\mathscr{A}} I_j$ es generado por $\bigcup_{j\in\mathscr{A}} I_j$ y por la anterior observación se tiene que $V\left(\sum_{j\in\mathscr{A}} I_j\right) = V(\bigcup_{j\in\mathscr{A}} I_j)$.

□

De esta Proposición se sigue que los conjuntos $V(I)$ definen los cerrados en una topología en $Spec(A)$,

Definición 3 *Sea A un anillo conmutativo con unidad. A la topología definida por los cerrados $V(E)$, anteriormente definidos, se le llama la topología de Zariski en $Spec(A)$.*

Ahora, si A es un anillo se tiene la construcción recíproca de $V(I)$. Sea U un subconjunto de $Spec(A)$, se define

$$I(U) = \bigcap_{P\in U} P.$$

Note que $I(U)$ es un ideal de A, para todo subconjunto U de $Spec(A)$. Las siguientes propiedades son inmediatas,

1. Si $U \subseteq U' \subseteq Spec(A)$, entonces $I(U') \subseteq I(U)$.

2. Sea $\{U_j\}_{j\in\mathscr{A}}$ una familia de subconjuntos de $Spec(A)$, entonces

$$I\left(\bigcup_{j\in\mathscr{A}} U_j\right) = \bigcap_{j\in\mathscr{A}} I(U_j).$$

3. $I(\{p\}) = p$.

Definición 4 *Un espacio topológico X tal que $X \neq \emptyset$, se dice que es irreducible si cuando $Y, Z \subsetneq X$, donde Y y Z son subespacios cerrados, entonces*

$$X \neq Y \bigcup Z.$$

Los subespacios de X que son irreducibles maximales, es decir, que no estén contenidos estrictamente en otro subespacio irreducible, son las componentes irreducibles de X.

Sea X un espacio topológico, consideremos en X la siguiente relación

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists K \subseteq X \text{ conexo tal que } x, y \in K$$

Se sigue que esta relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición 5 *Las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas de X.*

Note que la cerradura de un subespacio irreducible también es irreducible, entonces las componentes conexas de un espacio topológico son cerrados. Además, los espacios irreducibles son conexos, se sigue que cada componente irreducible de un espacio topológico X está contenida en una componente conexa de X.

Dado un anillo $A \neq 0$, el conjunto de ideales primos de A tiene un elemento minimal con respecto a la inclusión ($\subseteq$) y se le llama primo minimal, y estos influyen en las componentes conexas de $Spec(A)$,

Lema 2 *Sea A un anillo y $X = Spec(A)$. Para cada ideal P de A, $V(P)$ es irreducible en X si y sólo si $I(V(P))$ es un ideal primo. Entonces las componentes irreducibles de X son los subconjuntos $V(P)$ donde P es un ideal primo minimal de A.*

Demostración. Supongamos que $V(P)$ es irreducible en X y sean $f, g \in A$ tal que $fg \in I(V(P))$ se sigue que $V(fg) \supseteq V(I(V(P))) \subseteq V(P)$, entonces

$$V(P) = (V(f) \cap V(P)) \cap (V(g) \cap V(P)),$$

así que, $V(f) \cap V(P) = V(P)$ o $V(g) \cap V(P) = V(P)$, $f \in I(V(P))$ o $g \in I(V(P))$.
Ahora, si $I(V(P))$ es un ideal primo y existen $U, W \subsetneq V(P)$ cerrados tal que $V(P) = U \cup W$, entonces $I(V(P)) \subsetneq I(U), I(W)$ y $I(U \cup W) \subset I(V(P))$, existen $f \in I(U)$ y $g \in I(W)$ tales que $f, g \notin I(V(P))$, pero $fg \in I(V(P))$, lo cual es una contracción. $\square$

Definición 6 *La dimensión de Krull de un anillo A es el supremo de las longitudes de las cadenas crecientes de ideales primos de A, es decir, el anillo A tiene dimensión finita n si admite una cadena de ideales primos*

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

y cualquier otra cadena de ideales primos de A tiene longitud menor o igual a n.

Dado un anillo A se dice que es Noetherino, en honor a Emmy Noether $(1882-1935)$, si cada ideal de A es finitamente generado.

Definición 7 *Un espacio topológico X se dice que es noetheriano si, toda sucesión estrictamente decreciente de cerrados de X es finita.*

Note que, si A es un anillo notheriano, entonces $Spec(A)$ es un espacio topológico noetheriano.

Teorema 1.1.2 *Todo espacio topológico Noetheriano se descompone en una unión finita de sus componentes irreducibles*

Demostración. Para su demostración ver [Navarro, pág. 152]. □

Corolario 1.1.3 *En un espacio topológico noetheriano todo subconjunto cerrado es la unión finita de cerrados irreducibles.*

Corolario 1.1.4 *Todo anillo noetheriano R tiene un número finito de ideales minimales y cada ideal primo de R contiene algún ideal primo minimal.*

En los siguientes Teoremas se enuncia el caso cuando las cadenas de ideales primos en las extensiones enteras pueden ser extendidas por inclusión ascendente, o el caso cuando una cadena puede ser extendida por inclusión descendente.

Teorema 1.1.5 (Going-up) *Sean A, B anillos, tal que $A \subseteq B$ y B es entero sobre A. Sean $P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_n$ cadena de ideales primos de A y $Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_m$ cadena de ideales primos de B tales que para todo $1 \leq j \leq m$ se cumple que*

$$P_j = Q_j^c = Q_j \cap A,$$

entonces existen $Q_{m+1}, \ldots, Q_n \in Spec(B)$ tales que

$$P_l = Q_l^c = Q_2 \cap A, \text{ para } l = m+1, \ldots, n.$$

Demostración. Para su demostración ver [Atiyah-Macdonald, pág. 62]. □

Notación 1 *En lo que sigue de esta sección A denotará un anillo conmutativo con unidad y Noetheriano.*

Definición 8 *Un elemento $a \in A$ se llama idempotente si*

$$a^2 = a.$$

Note que en un anillo siempre son idempotentes 0 y 1. Un idempotente $e \in A$ se llama central si

$$\text{para todo } a \in A, \text{ se tiene que } \quad ae = ea.$$

Un conjunto E de idempotentes de A se llama ortogonal si

$$\forall\ e, f \in E,\ e \neq f \Rightarrow ef = 0.$$

Se dice que dos idempotentes $e, f \in A$ son ortogonales si el conjunto $\{e, f\}$ es ortogonal.

Definición 9 *Un idempotente $e \in A$ se llama primitivo si $e \neq 0$ y si dado $e = e_1 + e_2$ con e_1, e_2 ortogonales se tiene que $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$.*

Un conjunto finito $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes de A se llama completo si cumple que

$$e_1 + \cdots + e_n = 1.$$

Notación 2 *Sea $X = Spec(A)$. Para todo $f \in A$, el conjunto abierto $X - V(F)$ se denotará por X_f.*

La descomposición de un anillo en producto directo de anillos está en correspondencia con la descomposición de su elemento identidad en suma de idempotentes ortogonales, tal como veremos en la siguiente demostración. Finalmente, a continuación se enuncia el Teorema fundamental de esta sección que relaciona los idempotentes primitivos de un anillo Noetheriano y las componentes conexas de su espectro primo.

Teorema 1.1.6 *Existe una correspondencia uno a uno entre los idempotentes primitivos de un anillo Noetheriano A y las componentes conexas del espacio topológico Noetheriano $Spec(A)$.*

Demostración. Sean $U_1, \ldots, U_m$ las componentes conexas de $Spec(A)$, se sigue que U_i es cerrado, entonces $U_i = V(P_i)$ para algún ideal minimal P_i de A. Se tiene que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} V(P_i).$$

Ademas, $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$V(P_j + \prod_{i \neq j}^{m} P_i) = \bigcup_{i \neq j}^{m} V(P_j) \cap V(P_i) = \emptyset$$

Así que, $P_j + \prod_{i \neq j}^{m} P_i = A$. Sea $I_j = \prod_{i \neq j}^{m} P_i$, existen $e_j \in P_j$ y $f_j \in I_j$ tales que $e_j + f_j = 1$. Para los elementos $f_1, \ldots, f_m$ se cumple lo siguiente

1. $f_j^2 = f_j$.
   Sin perdida de generalidad se supone que $\cap_{i=1}^{m} P_i = 0$. Se tiene que

   $$e_j = e_j(e_j + f_j) = e_j^2 + e_j f_j = e_j^2,$$

   puesto que $e_j f_j \in \cap_{i=1}^{m} P_i$, entonces $f_j^2 = (1-e_j)(1-e_j) = 1+e_j^2-2e_j = f_j$.

2. Si $i \neq j$, $f_i f_j = 0$. Puesto que, $f_i f_j \in \cap_{i=1}^{m} P_i$.

3. $\sum_{i=1}^{m} f_i = 1$.

   $$1 - \sum_{i=1}^{m} f_i = (1 - f_k) - \sum_{i=1, i \neq k}^{m} f_i$$

   se tiene que $1 - f_k = e_k \in P_k$ y si $i \neq k$ $f_i \in \prod_{l \neq i}^{m} P_l \subseteq P_k$, entonces $1 - \sum_{i=1}^{m} f_i \in \cap_{l=1}^{m} P_l = 0$, y se obtiene lo deseado.

Por lo tanto, los elementos $f_1, \ldots, f_m$ son los idempotentes primitivos del anillo A.

Por otro lado, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ el conjunto de los idempotentes primitivos de A y lo denotamos por $Idem(A)$.
Puesto que $e_1 + \cdots + e_n = 1$ y $Idem(A)$ es un conjunto ortogonal, se sigue que A es la suma directa de ideales

$$A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n,$$

Entonces se tiene el homomorfismo del Teorema1.1.1

$$\theta : A \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A/I_i$$

dado por $\theta(x) = (x + I_1, \ldots, x + I_n)$, el cual es un isomorfismo. Se tiene que A es el producto directo de los anillos A/I_i. Sean $\pi_i : A \to A/I_i$ las proyecciones canónicas y $P_i = \prod_{j\neq i}^{n} A/I_j$ su kernel, puesto que $\cap_i P_i = 0$ se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{n} V(P_i) = V(\bigcap_{i=1}^{n} P_i) = V(0) = X,$$

además, $V(P_i + P_j) = V(1) = \emptyset$, el complemento de $V(P_i)$ es $\cup_{j\neq i} V(P_j)$.Así, se deduce que X es la unión disjunta de subespacios que son abiertos y cerrados.

□

1.2. Biconjuntos.

En esta sección se enuncian algunos resultados de G–conjuntos, que se utilizaran en este trabajo. Al conjunto de subgrupos de G se denotará por $S(G)$, para cada $g \in G$ y $H \in S(G)$ se tiene que gHg^{-1} está nuevamente en $S(G)$ y define una G–acción en $S(G)$. Así, se puede considerar el conjunto de G–orbitas de $S(G)$, que se denotará por $G\backslash S(G)$, y al conjunto de representantes de cada G–orbita se denota por $[G\backslash S(G)]$.

Proposición 1.2.1 *Se tienen los siguientes resultados para G–conjuntos*

1. *Todo G–conjunto es una unión disjunta de G–conjuntos transitivos.*

2. *Sean H, $K \leq G$. Los G–conjuntos G/H y G/K son isomorfos si y sólo si H y K son conjugados en G.*

3. *Sea X un G–conjunto, entonces*

$$X \cong \bigsqcup_{H\in[G\backslash S(G)]} n_H G/H, \;\; n_H \in \mathbb{Z}.$$

Demostración.

1. Sabemos que un G–conjunto es la unión disjunta de órbitas. Ahora, si X es un G–conjunto transitivo y si $x \in X$, para cada $y \in X$ existe $\lambda_x \in G$ tal que $y = \lambda_x x$. Así, bajo las funciones $\varphi : G/G_x \to X$ y $\phi : X \to G/G_x$ dadas como $\varphi(gG_x) = gx$ y $\phi(y) = \lambda_x G_x$, se tiene que X y G/G_x son isomorfos.

2. Supongamos que G/H y G/K son isomorfos, existe un isomorfismo de G–conjuntos $\varphi : G/H \to G/K$. Así, existe $g \in G$ tal que $\varphi(H) = gK$, para todo $h \in H$ se cumple que

$$\varphi(H) = \varphi(hH) = h\varphi(H) = hgK,$$

entonces $gK = hgK$, es decir, $H^g \leq K$. Por otra parte para todo $k \in K$, se tiene que

$$\varphi({}^gkH) = {}^gk\varphi(H) = {}^gkgK = gkK = gK = \varphi(H),$$

por inyección de φ se sigue que ${}^gkH = H$, esto es que $K \leq H^g$. Por lo tanto, $H^g = K$.

3. Como $(G_x)^g = G_y$, de los incisos 1 y 2 concluimos que

$$X \cong \bigsqcup_{H \in [G \backslash S(G)]} n_H G/H, \quad n_H \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Se considera otro grupo H. Se dice que X es un (G, H)–biconjunto si es un G– conjunto izquierdo y un H–conjunto derecho tal que la G– acción y la H– acción conmutan, es decir,

$$\forall g \in G, \ \ \forall h \in H, \ \ \forall x \in X, \text{ se cumple } (gx)h = g(xh).$$

Se denotará a este (G, H)–biconjunto por ${}_GX_H$.

Note que X es un $G \times H$–conjunto bajo la acción

$$(g, h)x = gxh^{-1}, \ \ \forall g \in G, \ \ \forall h \in H, \ \ \forall x \in X.$$

Así que, todos los resultados de $G \times H$–conjunto se cumplen en X. Se denota el conjunto de $G \times H$–orbitas de X por $G \backslash X / H$.

Sean X , Y (G, H)–biconjuntos. Decimos que una función $\varphi : X \to Y$ es un homomorfismo de (G, H)–biconjuntos si,

$$\varphi(gxh))g\varphi(x)h, \ \ \forall g \in G, \ \ \forall h \in H, \ \ \forall x \in X.$$

Ejemplo: 1 *Ahora, se analizan ejemplos importantes de biconjuntos.*

1. *sean H, K grupos. Si $\varphi : H \to K$ es un homomorfismo de grupos, entonces*

   a) *K es un (K, H)–biconjunto con la acción dada por*

   $$\forall h \in H, \ \ \forall l \in K, \ \ \forall k \in K, \quad lkh = lk\varphi(h).$$

   A este biconjunto lo denotamos por ${}_KK\varphi_H$.

b) *Además, K es un (H,K)–biconjunto bajo la accion*

$$\forall h \in H,\ \ \forall l \in K,\ \ \forall k \in K, \quad hkl = \varphi(h)kl,$$

y lo denotamos por ${}_K\varphi K_H$.

c) *En particular, si φ es un isomorfismo de grupos, se denota por iso_H^K.*

2. *Sea K un grupo. Para cada subgrupo H de K, tenemos los siguientes biconjuntos*

   a) *${}_H K_K$ es un (H,K)–biconjunto con la $H-$ acción izquierda y la $K-$ acción derecha dadas por la multiplicación en K. A este biconjunto se denota por res_H^K (res significa restricción).*

   b) *De forma análoga, ${}_K K_H$ es un (K,H)–biconjunto con la $K-$ acción izquierda y la $H-$ acción derecha dadas por la multiplicación en K. A este biconjunto se denota por ind_H^K (id significa inducción).*

3. *Sean H un grupo y $N \trianglelefteq H$. Si $\pi : H \to H/N$ es el homomorfismo proyección, del primer ejemplo se sigue que*

   a) *${}_H\pi H/N_{H/N}$ es un $(H,H/N)$–biconjunto, se denota por inf_H^K (inf significa inflación).*

   b) *${}_{H/N}H/N\pi_H$ es un $(H/N,H)$–biconjunto, y se denota por def_H^K (def significa deflación).*

Sean G, H, y K grupos finitos. Si X es un (G,H)–biconjunto y Y un (H,K)–biconjunto, el conjunto $X \times Y$ es un H–conjunto con la acción

$$h(x,y) = (xh, h^{-1}y),\ \ \forall h \in H,\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

La $H-$ orbita de (x,y) se denota por $[x,y]$ y el conjunto de orbitas $G\backslash X \times Y$ por $X \times_H Y$.
Además, $X \times_H Y$ es un (G,K)–biconjunto bajo la acción definida por,

$$g[x,y]k = [gx, yk],\ \ \forall g \in G,\ \forall k \in K,\ \forall [x,y] \in X \times_H Y.$$

Ejemplo: 2 *Denotamos por G a un grupo finito, consideremos algunas operaciones importantes en los G–conjuntos*

1. *Sea H un subgrupo de G.*

- *Si X es un $G-$conjunto, por restricción X es un $H-$conjunto, este $H-$conjunto es denotado por $res_H^G X$. Si $f : X \to Y$ es un homomorfismo de $G-$conjuntos, sea la función $res_H^G f : res_H^G X \to res_H^G Y$ donde f se considera como un homomorfismo de $H-$conjuntos. Así, se tiene un funtor (restricción) de la categoría de $G-$conjuntos en la categoría de H-conjuntos,*

$$res_H^G : G-conjuntos \to H-conjuntos.$$

- *Si Z es un $H-$conjunto, el $G-$conjunto inducido es $G\times_H Z$, y se denota por $ind_H^G Z$. Ahora, si $f : Z \to T$ es un homomorfismo de $H-$conjuntos, entonces la función $ind_H^G f : ind_H^G X \to ind_H^G Y$ dada por $ind_H^G f((g,z)) = (g, f(z))$. Define un funtor (inducción) de la categoría de $H-$conjuntos en la categoría de G-conjuntos,*

$$ind_H^G : H-conjuntos \to G-conjuntos.$$

2. *Si $H \trianglelefteq G$, todo $G/H-$conjunto X es un $G-$conjunto por inflación con la acción,*

$$\forall x \in X,\ \forall g \in G,\ \ gx = (gH)x.$$

Así, se tiene un funtor (inflación) de la categoría de $G/H-$conjuntos en la categoría de $G-$conjuntos.

3. *Finalmente, sea H un subgrupo de G y $x \in G$. Si Z es un $H-$conjunto, el grupo ${}^xH$ actúa en Z por*

$$\forall z \in Z, \forall g \in {}^xH \ \ gz = (g^x)z.$$

esto da un ${}^xH-$conjunto, denotado por ${}^xZ$. Si $f : Z \to T$ es un homomorfismo de $H-$conjuntos, entonces la función $c_{x,H}(f) : {}^xZ \to {}^xT$ dada por $c_{x,H}(f)(z) = f(z)$ es un homomorfismo de ${}^xH-$conjuntos. Así, se tiene un funtor (conjugación) de la categoría $H-$conjuntos en la categoría ${}^xH-$conjuntos,

$$c_{x,H} : H-conjuntos \to {}^xH-conjuntos.$$

Para estos últimos biconjuntos tenemos los siguientes resultados,

Proposición 1.2.2 *Sean G, H, K y L grupos.*

1. *Si X es un $(G,H)-$biconjunto, Y un $(H,K)-$biconjunto y Z un $(K,L)-$biconjunto, existe un isomorfismo canónico de $(G,L)-$biconjuntos*

$$(X\times_H Y)\times_K Z \cong X\times_H (Y\times_K Z)$$

2. *Si X es un $(G,H)-$biconjunto y Y un $(H,K)-$biconjunto, existe un isomorfismo canónico de $(G,K)-$biconjuntos*

$$X\times_H Y \cong Y\times_H X$$

3. *Si X, X' son (G,H)–biconjuntos y Y, Y' son (H,K)–biconjuntos, existe un isomorfismo canónico de (G,K)–biconjuntos*

$$\begin{array}{rcl} X\times_H(Y\sqcup Y') & \cong & (X\times_H Y)\sqcup(X\times_H Y') \\ (X\sqcup X')\times_H Y & \cong & (X\times_H Y)\sqcup(X'\times_H Y) \end{array}$$

Sea X un (G,H)–biconjunto transitivo, por la Proposición 1.2.1 podemos escribir a X como $X\cong\frac{G\times H}{D}$ para algún $D\in S(G\times H)$. Consideremos P_1 y P_2 como los morfismos proyecciones de $G\times H$ a G y H respectivamente. Denotamos,

$$\begin{array}{rcl} A & = & P_1(D) \\ C & = & P_2(D)\leq H \\ A_1 & = & \{a\in G\mid(a,1)\in D\}\trianglelefteq A \\ C_1 & = & \{b\in H\mid(1,b)\in D\}\trianglelefteq C \end{array} \tag{1.1}$$

Lema 3 *Continuando con la anterior notación se cumple que,*

$$A/A_1\cong C/C_1.$$

Demostración. Para cada $a\in A$ existe $c\in H$ tal que $(a,c)\in D$, entonces $c\in C$, considere la relación

$$\begin{array}{rccc} f: & \frac{A}{A_1} & \rightarrow & \frac{C}{C_1} \\ & aA_1 & \rightarrow & cC_1 \end{array}$$

Si existe $b\in A$ tal que $aA_1=bA_1$, se sigue que $a^{-1}b\in A_1$, entonces $(a^{-1}b,1)\in D$. Además, existe $e\in H$ tal que $(b,e)\in D$, se tiene que

$$(1,ce^{-1})=(a,c)(a^{-1}b,1)(b^{-1},e^{-1})\in D,$$

así que, $ce^{-1}\in C_1$, es decir, $cC_1=eC_1$. Se deduce que f está bien definida, de forma análoga se demuestra que f es inyectiva y es claro que es sobreyectiva.
Sean $s,t\in A/A_1$, existen $a,b\in A$ tales que $s=aA_1$ y $t=bA_1$. Existen $c,e\in C$ tales que $(a,c),(b,e)\in D$, entonces $(ab,ce)\in D$, así se tiene que

$$f(aA_1bA_1)=f(abA_1)=ce=f(aA_1)f(bA_1),$$

se sigue que f es un homomorfismo de grupos. Por lo tanto, f es un isomorfismo de grupos.

$\square$

Se denota al grupo C/C_1 por B. Sean $\pi: C\rightarrow B$ y $\pi': A\rightarrow A/A_1$ los morfismos proyección, y sea $\rho=f\circ\pi'$. Note que π y ρ son sobreyectivos.

Teorema 1.2.1 (Descomposición de Bouc) *Sean G, H grupos. Con la notación en 1.1 tenemos el siguiente isomorfismo de (G,H)–biconjuntos*

$$\frac{G\times H}{D}\cong {}_GG_A\times {}_A\rho B_B\times {}_BB\pi_C\times {}_CH_H$$

Demostración. Considere la siguiente relación

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \frac{G\times H}{D} & \to & {}_GG_A\times {}_A\rho B_B\times {}_BB\pi_C\times {}_CH_H\\ & (g,h)L & \to & [g,1,1,h^{-1}].\end{array}$$

Si existen $(g,h),(u,v)\in G\times H$ tales que $(g,h)D=(u,v)D$, entonces existe $(a,c)\in D$ tal que $(g,h)=(u,v)(a,c)$, se sigue que $g=ua$ y $h=vc$, así que $\varphi((g,h)D)=[ua,1,1,c^{-1}v^{-1}]$, note que

$$[ua,1,1,c^{-1}v^{-1}]=[u,a1_B,1_Bc^{-1},v^{-1}]=[u,f(aA_1),c^{-1}C_1,v^{-1}],$$

además, $f(aA_1)=cC_1$, entonces $\varphi((g,h)D)=[u,1,1,v^{-1}]=\varphi((u,v)D)$, de lo cual se deduce que φ está bien definida.
Por otro lado, si existen $(g,h),(u,v)\in G{\times}H$ tales que $\varphi((g,h)D)=\varphi((u,v)D)$, entonces existen $a\in A$ y $c,d\in C$ tales que

$$(u,1,1,v^{-1})=(ga,a^{-1}dC_1,d^{-1}C_1c,c^{-1}h^{-1}).$$

Así que, $u=ga,\ v=hc$ y si $f(aA_1)=eC_1$, se tiene que $(a,e)\in D$. Entonces $e^{-1}d,d^{-1}c\in C_1$, implica que $(1,e^{-1}d),(1,d^{-1}c)\in D$, en consecuencia $(a,c)\in D$, entonces $(g,h)D=(u,v)D$. Por lo tanto, φ es inyectiva.
Ahora, se demostrará que φ es sobreyectiva, para esto sea $[g,xC_1,yC_1,h]$ un elemento de ${}_GG_A\times {}_A\rho B_B\times {}_BB\pi_C\times {}_CH_H$, puesto que f es sobreyectiva existe $a\in A$ tal que $f(aA_1)=xC_1$, así que

$$\begin{array}{rcl}[g,xC_1,yC_1,h] & = & [g,f(aA_1),yC_1,h]\\ & = & [g,a1,1y,h]\\ & = & [ga,1,1,yh]\end{array}$$

entonces $\varphi((ga,h^{-1}y^{-1})D)=[g,xC_1,yC_1,h]$, es decir, φ es sobreyectiva.
Sean $(g,h),(u,v)\in G\times H$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\varphi((g,h)\ \ (u,v)D) & = & [gu,1,1,v^{-1}h^{-1}]\\ & = & g[u,1,1,v^{-1}]h^{-1}\\ & = & (g,h)[u,1,1,v^{-1}]\\ & = & (g,h)\varphi((u,v)D),\end{array}$$

se deduce que φ es un homomorfismo de $(G\times H)$–conjuntos

□

Sean G, H y K grupos. Si $\varphi:G\to H$ y $\psi:K\to G$ son homomorfimos de grupos, de forma similar que en la demostración anterior se obtiene los isomorfismos

$$\begin{array}{rcl}{}_KG_G\times {}_G\varphi H_H & \cong & {}_K\varphi\psi H_H\\ {}_HH\varphi_G\times {}_GG\psi_K & \cong & {}_HH\varphi\psi_K\end{array}$$

Lema 4 (Mackey) *Sean G, y H, $K \leq G$. Denotamos por $c_g : K \to {}^gK$ el homomorfismo de grupos definido por $c_g(k) = {}^gk$, que es el homomorfismo conjugación. Entonces*

$$ {}_HG_G \times {}_GG_K \cong \bigsqcup_{g \in [H \backslash G/K]} HgK \cong \bigsqcup_{g \in [H \backslash G/K]} {}_HH_{H \cap {}^gK} \times {}_{H \cap {}^gK}{}^gKc_{gK}. $$

Demostración. Note que ${}_HG_G \times {}_GG_K \cong {}_HG_K$, así que,

$$ {}_HG_G \times {}_GG_K \cong \bigsqcup_{g \in [H \backslash G/K]} HgK. $$

Por otro lado, para cada x representante de las clases dobles de H y K en G, se tiene el homomorfismo

$$ \begin{array}{rccc} \psi: & {}_HH_{H \cap {}^gK} \times {}_{H \cap {}^gK}{}^gKc_{gK} & \longrightarrow & HgK \\ & [h, gkg^{-1}] & \longrightarrow & hgk \end{array} $$

se verifica que ψ es un isomorfismo, con lo cual se concluye la demostración. $\square$

2 Anillo de Burnside

2.1. Anillo de Burnside.

Dado dos G−conjuntos finitos X y Y, decimos que $X \sim Y$ si y sólo si $X \cong Y$. Observemos que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de G−conjuntos finitos. Sea

$$B^{+}(G) = \{\, [X] \,|X \text{ es un } G-\text{conjunto finito}\}$$

En $B^{+}(G)$ se define $[X]+[Y] = [X \sqcup Y]$, está operación cumple con las siguientes propiedades para X, Y y Z G−conjuntos finitos

1. $[X]+([Y]+[Z]) = ([X]+[Y])+[Z]$.
2. $[X]+[Y] = [X \sqcup Y] = [Y \sqcup X] = [Y]+[X]$.
3. Denotemos por $0 = [\emptyset]$, entonces $[X]+0 = [X \sqcup \emptyset] = [X]$.
4. Si $[X]+[Y] = [X]+[Z]$, entonces $[Z] = [Y]$.

Note que con esta operación binaria + se tiene que $(B^{+}(G),+,0)$ es un monoide y la operación binaria es conmutativa.

Ahora, al monoide $B^{+}(G)$ se le asocia su grupo de Grothendieck, denotado por $G_0(B^{+}(G))$, para ello se construye el grupo abeliano libre $\mathbb{Z}[B^{+}(G)]$ con base el conjunto $B^{+}(G)$, y consideramos el subgrupo $U(B^{+}(G),+)$ de $\mathbb{Z}[B^{+}(G)]$ que es generado por los elementos de la forma

$$([X \sqcup Y]) - [X] - [Y]$$

para cada par de G−conjuntos X y Y. Así, se define el grupo de Grothendieck de $B^{+}(G)$ por

$$G_0(B^{+}(G)) = \frac{\mathbb{Z}[B^{+}(G)]}{U(B^{+}(G),+)}$$

Definición 10 *Definimos el grupo de Burnside del grupo finito G como el grupo de Grothendieck $G_0(B^+(G))$*

Sean G, H y K grupos finitos, el grupo de Burnside de biconjuntos $B(H,G)$ es el grupo de Burnside $B(H \times G)$. Existe una única función bilineal

$$\begin{array}{lcl} \times_G : B(H,G) \times B(G,K) & \longrightarrow & B(H,K) \\ ([{}_H X_G], [{}_G Y_K]) & \longrightarrow & [X \times_G Y] \end{array}$$

Si G es un grupo finito, el grupo de Burnside tiene una estructura natural de anillos, donde el producto está definido por

$$[X] \cdot [Y] = [X \times Y], \ \ [X], \ [Y] \in B(G).$$

Este anillo es conmutativo, y la identidad multiplicativa es la clase de un G–conjunto con cardinalidad 1 y $[\emptyset]$ es el cero del anillo.

Los elementos de $B(G)$ son de la forma $[X] - [Y]$, con X y Y G–conjuntos finitos. Si $F : G$–conjuntos $\to H$–conjuntos es un funtor (restricción, inducción, inflación o conjugación), entonces F induce un homomorfismo de grupos, denotado nuevamente por F, de $B(G)$ a $B(H)$, definido por

$$F([X] - [Y]) = F(X) - F(Y)$$

para cada par de G–conjunto X y Y.

Además, la Proposición 1.2.1 implica que

$$X \cong \bigsqcup_{H \in [G \backslash S(G)]} n_H G/H \quad \text{y} \quad Y \cong \bigsqcup_{H \in [G \backslash S(G)]} m_H G/H, \ \ n_H, m_H \in \mathbb{Z}$$

así que,

$$[X] - [Y] = \sum_{H \in [G \backslash S(G)]} (n_H - m_H)[G/H].$$

Entonces

$$B(G) \cong \bigoplus_{H \in [G \backslash S(G)]} \mathbb{Z}\, [G/H]. \tag{2.1}$$

Por lo tanto, $B(G)$ es un $\mathbb{Z}$–módulo libre con base en el conjunto de elementos de la forma $[G/H]$ donde $H \in [G \backslash S(G)]$, y en consecuencia es un Anillo Noetheriano. Si no existe ambigüedad, se denotará por X al elemento $[X]$ del anillo $B(G)$.

Ejemplo: 3 *Sea $C_n =< x >$ el grupo cíclico multiplicativo de orden n, es decir, tal que $ord(x) = n$, entonces*

$$B(G) \cong \bigoplus_{m|n} \mathbb{Z}\, [C_n/C_m].$$

Proposición 2.1.1 *Sean G un grupo finito y $H, K \leq G$.*

1. *(Formula de Mackey) Si $Z \in B(H)$, en $B(K)$ se cumple*
$$res_K^G ind_H^G Z = \sum_{x \in K\backslash G/H} ind_{K\cap {}^xH}^K \, {}^x res_{K\cap^x H}^H Z.$$

2. *(Identidad de Frobenius) Si $X \in B(G)$ y $Z \in B(H)$, en $B(K)$ tenemos que*
$$X \cdot ind_H^G Z = ind_H^G((res_H^G) \cdot Z).$$
y en particular
$$X \cdot (G/H) = ind_H^G res_H^G X.$$

3. *Si $Z \in B(H)$, entonces en $B(N_G(H)/H)$ obtenemos*
$$(ind_H^G Z)^K = \sum_{x \in N_G(K)\backslash G/H} ind_{N_{^xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^xZ)^K.$$

Además, como grupo $B(G)$ tiene la siguiente propiedad.

Lema 5 (Propiedad universal del grupo de Burnside.) *Si f es una función definida sobre la clase de G–conjuntos finitos con valores en un grupo abeliano A, tal que:*

1. *Si X, Y son G–conjuntos finitos, entonces $f(X) = f(Y)$.*

2. *Para cada G– conjuntos finitos X y Y*
$$f(X \sqcup Y) = f(X) + f(Y),$$

entonces existe un único homomorfismo de grupos $\widetilde{f} : B(G) \to A$ tal que $f(X) = \widetilde{f}([X])$ para todo G–conjunto finito X.

Definición 11 *Sean G un grupo finito y $H \leq G$. Si X es un G–conjunto definimos el conjunto de puntos fijos de H sobre X como,*
$$X^H = \{x \in X | hx = x, \ \forall \ h \in H\}.$$

Note que X^H es un $\frac{N_G(H)}{H}$–conjunto, por medio de la acción
$$\forall \ g \in N_G(H), \ \forall \ x \in X^H, \quad (gH)x = gx.$$
Si G es un grupo finito y H es un subgrupo de G, entonces existe una única forma lineal
$$\varphi_H : B(G) \to \mathbb{Z}$$
tal que $\varphi_H(X) = |X^H|$ para cada G–conjunto X. Al número entero $\varphi_H(X)$ se le llama la marca de H en X.

Continuando con la notación, tenemos las siguientes propiedades para la marca de H en G–conjuntos,

1. $\varphi_H(\emptyset) = 0$.

2. $\varphi_H(\cdot) = 1$.

3. $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

4. $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

5. Si $X \cong Y$, si y sólo si $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$.

Entonces de la Propiedad Universal del Grupo de Burnside se sigue que existe un único homomorfismo de grupos $\phi_H^G : B(G) \to A$ tal que $\phi_H^G([X]) = \varphi_H(X)$.

Proposición 2.1.2 *Sea G un grupo finito. Si $H \leq G$, la función*

$$\phi_H^G : B(G) \to \mathbb{Z},$$

definida por $\phi_H^G([X]) = \varphi_H(X)$ es un homomorfismo de anillos.

Demostración. De las propiedades de la marca de H en X se sigue que,

a) Sean X y Y $G-$conjuntos tales que $X \cong Y$. Puesto que $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$, $\phi_H^G([X]) = \phi_H^G([Y])$, entonces ϕ_H^G está bien definida.

b) $\phi_H^G([X]+[Y]) = \phi_H^G([X \sqcup Y]) = \varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X)+\varphi_H(Y) = \phi_H^G([X])+\phi_H^G([Y])$, $\forall [X],[Y] \in B(G)$.

c) $\phi_H^G([X]\cdot[Y]) = \phi_H^G([X\times Y]) = \varphi_H(X\times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y) = \phi_H^G([X])\phi_H^G([Y])$, $\forall [X],[Y] \in B(G)$.

d) $\phi_H^G([\emptyset]) = \varphi_H(\emptyset) = 0$.

e) $\phi_H^G([\cdot]) = \varphi_H(\cdot) = 1$.

$\square$

Sea X un $G-$conjunto, puesto que

$$[X] = \sum_{K\in[G\setminus S(G)]} n_H[G/K], \quad n_H \in \mathbb{Z},$$

entonces aplicando ϕ_H^G en $[X]$, se tiene que

$$\phi_H^G([X]) = \sum_{K\in[G\setminus S(G)]} n_H\phi_H^G([G/K]) = \sum_{K\in[G\setminus S(G)]} n_H\varphi_H(G/K),$$

Ahora, para cada subgrupo K de G se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_H(G/K) &= |(G/K)^H| \\ &= \sharp\{gK \in G/K | h(gK) = gK,\ \forall\ h \in H\} \\ &= \sharp\{gK \in G/K | (hg)K = gK,\ \forall\ h \in H\} \\ &= \sharp\{gK \in G/K | g^{-1}hg \in K,\ \forall\ h \in H\} \\ &= \sharp\{gK \in G/K | H^g \leq K\} \\ &= \frac{\sharp\{g \in G | H^g \leq K\}}{|K|}\end{aligned}$$

Si denotamos $\alpha(H,K) = \sharp\{E \leq G | H \leq E \text{ y } E =_G K\}$, entonces

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H,K).$$

Sea $\beta(H,K) = \sharp\{F \leq G | F \leq K \text{ y } F =_G H\}$, así,

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H,K).$$

Los elementos $[X]$ de $B(G)$ se denotarán por X y denotaremos al conjunto de representantes de cada G–orbita, $[G\backslash S(G)]$, por $\mathscr{C}$, y para cada $H \leq G$ denotaremos $\phi_H^G = \varphi_H$.

Proposición 2.1.3 *Sea G un grupo finito. Si $H, K \leq G$, entonces $\varphi_H = \varphi_K$ si y sólo si $H =_G K$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi_H = \varphi_K$, entonces $\varphi_H(G/K) = \varphi_K(G/K)$ y $\varphi_K(G/H) = \varphi_H(G/H)$, así

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi_H(G/K) & = & \frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H,K) & \qquad & \varphi_K(G/H) & = & \frac{|N_G(H)|}{|H|}\alpha(K,H) \\ & = & \frac{|N_G(K)|}{|K|} & & & = & \frac{|N_G(H)|}{|H|} \end{array}$$

Entonces $\alpha(H,K) = 1$ y $\alpha(K,H) = 1$, así, $H \leq_G K$ y $K \leq_G H$, es decir, $H =_G K$.

Ahora, si existe $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$ y X es cualquier G–conjunto se tiene que $x \in X^H$ si y sólo si $gx \in X^{gHg^{-1}}$, se deduce que $|X^K| = |X^{gHg^{-1}}| = |X^H|$, entonces $\varphi_H = \varphi_K$.

$\square$

Se denotará el anillo $\prod_{H \in \mathscr{C}} \mathbb{Z}$ por $\tilde{B}(G)$ y se define el homomorfismo de anillos entre $B(G)$ y $\tilde{B}(G)$ de la siguiente forma

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & B(G) & \longrightarrow & \tilde{B}(G) \\ & X & \longrightarrow & (\varphi_H(X))_{H \in \mathscr{C}} \end{array}$$

La matriz asociada a φ se le llama la tabla de marca de G y se denotará por $\mathscr{M}(G)$, que es la matriz cuadrada cuyas columnas y filas son indexados por las clases de conjugación de subgrupos de G y en cuya entrada (H,K), donde H y K son subgrupos de G, se encuentra $\varphi_H(G/K)$.

Ejemplo: 4 *Sea $C_n =< x >$ el grupo cíclico multiplicativo de orden n, entonces para cada entero positivo m que divide a n se tiene que*

$$\mathscr{M}(G) = \left(\begin{array}{c|ccc} & \{1\} & < x^m > & C_n \\ \hline \{1\} & n & n/m & 1 \\ < x^m > & 0 & n/m & 1 \\ C_n & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cuadro 2.1: Tabla de marca de C_n.

Ejemplo: 5 *Ahora, sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de S_3 que son $\{\{I\}, C_2, A_3\}$.*

$$\mathscr{M}(G) = \left(\begin{array}{c|cccc} & \{I\} & C_2 & A_3 & S_3 \\ \hline \{I\} & 6 & 3 & 2 & 1 \\ C_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ A_3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cuadro 2.2: Tabla de marca de S_3.

Ejemplo: 6 *Finalmente, sea A_5 el grupo alternado de orden 5. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de A_5 que son $\{\{I\}, C_2, C_3, D_2, C_5, D_3, D_5, A_4\}$, donde D_n denota el grupo diédrico de orden $2n$.*

$$\mathscr{M}(G) = \left(\begin{array}{c|ccccccccc} & \{I\} & C_2 & C_3 & D_2 & C_5 & D_3 & D_5 & A_4 & A_5 \\ \hline \{I\} & 60 & 30 & 20 & 15 & 12 & 10 & 6 & 5 & 1 \\ C_2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ C_3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ D_2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cuadro 2.3: Tabla de marca de A_5.

Las marcas son todos los homomorfismos de anillos que se pueden definir de $B(G)$ a $\mathbb{Z}$, es decir, si $f : B(G) \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de anillos, entonces existe $H \leq G$ tal que $f(G/K) = \varphi_H(G/K)$ para todo subgrupo K de G.

Ahora, sea $\mathscr{C} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ tal que si $|H_i| \leq |H_j|$ entonces $i \leq j$, $H_1 = 1$ y $H_n = G$. Se tiene que $\mathscr{M}(G)$ es triangular superior y en la diagonal están los números de Weil $w(H_i) = |N_G(H_i)|/|H_i|$. Además,

$$B(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\ G/H_i,$$

Sean X y Y dos G−conjuntos. Entonces $X \cong Y$, si y sólo si $\varphi_{H_i}(X) = \varphi_{H_i}(Y)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, es decir, φ es inyectiva.

2.2. Espectro primo del Anillo de Burnside.

En esta sección G denotará un grupo finito. Como ya se mencionó el anillo de Burnside $B(G)$ es Noetheriano, ahora se determinará el espectro primo de $B(G)$ por medio de dos Teoremas. Para ello incluimos nueva notación y algunos resultados previos.

Sea π un conjunto no vació de números primos. Un grupo H se dice que es un π−grupo si todos los divisores del orden de H que son primos están en π. Si p es un número primo, denotaremos por $O^p(G)$ al subgrupo normal más pequeño N de G tal que G/N es un p−grupo. Note que $O^p(G)$ es el subgrupo de G generado por los elementos de orden primo relativo a p.

Definición 12 *Sea π un conjunto de números primos. Denotamos por $O^\pi(G)$ al subgrupo normal de G tal que*

1. *$G/O^\pi(G)$ es un π−grupo (si $p|\ |G/O^\pi(G)|$, entonces $p \in \pi$).*
2. *El grupo $G/O^\pi(G)$ es soluble.*
3. *Si existe $H \trianglelefteq G$ tal que G/H es un π−grupo y G/H es soluble, entonces $O^\pi(G) \leq H$.*

Si π es el conjunto de divisores primos del orden de G, entonces $O^\pi(G)$ es el mínimo subgrupo normal tal que el cociente $G/O^\pi(G)$ es soluble y se denota al subgrupo $O^\pi(G)$ por $O^S(G)$.

El siguiente lema nos asegura la existencia del subgrupo normal $O^\pi(G)$ para todo conjunto de números primos π.

Lema 6 *Sea π un conjunto de números primos. Existe un subgrupo normal de G único tal que el cociente G/N es un π−grupo soluble*

Demostración. Sea $M = \{H \trianglelefteq G | G/H$ es un π − grupo soluble $\}$. Puesto que $G \in M$, entonces $M \neq \emptyset$. Además, si $H, K \in M$, se tiene que $G/(H \cap K)$ es un π−grupo soluble, puesto que $H/(H \cap K)$ es soluble, implica que $H \cap K \in M$. Por lo tanto, sea N la intersección de todos los elementos de M, se tiene que $N \in M$. □

Sea π un conjunto de números primos. El subgrupo $O^{\pi}(G)$ tiene las siguientes propiedades

1. El subgrupo $O^{\pi}(G)$ es un subgrupo característico de G.
2. Si existe un conjunto de números primos π' tal que $\pi' \subseteq \pi$, se sigue que $O^{\pi'}(G) \subseteq O^{\pi}(G)$.
3. Sea π' un conjunto de números primos tal que $\pi' \subseteq \pi$, entonces $O^{\pi}(O^{\pi'}(G)) = O^{\pi'}(G)$.
4. Si $\pi \neq \emptyset$, existen $p_1, \ldots, p_r \in \pi$ tal que
$$O^{\pi}(G) = O^{p_r}(O^{p_{r-1}}(\cdots(O^{p_2}(O^{p_1}(G))))).$$
5. Sea $H \leq G$. Para todo $g \in G$, se cumple que $gO^{\pi}(H)g^{-1} = O^{\pi}(gHg^{-1})$.
6. Sean $H, K \leq G$. Si $H \leq K$, entonces $O^{\pi}(H) \leq O^{\pi}(K)$.

Definición 13 *Un subgrupo H de G se dice que es perfecto si*

$$H' = H,$$

donde H' es el subgrupo derivado generado por todos los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$, con $x, y \in G$

Lema 7 *Un grupo H es perfecto si y sólo si $O^S(H) = H$.*

Demostración. Supongamos que H es perfecto y que $O^S(H) \subsetneq H$. Por definición se tiene que $H/O^S(H)$ es soluble no trivial, entonces existe un subgrupo normal $L/O^S(H)$ de $H/O^S(H)$, tal que

$$\frac{H/O^S(H)}{L/O^S(H)} \quad \text{es abeliano,}$$

por el Teorema de Correspondencia y el Tercer Teorema de Isomorfía existe $L \trianglelefteq H$ tal que H/L es abeliano, así, $H' \subseteq L \subsetneq H$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, si H no es perfecto y $O^S(H) = H$, entonces H/H' es un grupo abeliano no trivial. Se sigue que H/H' es soluble, entonces por definición de $O^S(H)$, $O^S(H) \subset H' \subsetneq H$, lo cual es una contradicción. $\square$

Para cada conjunto π de números primos denotamos $P_\pi(G)$ como el subconjunto de $S(G)$ que consiste de todas las clases de conjugación de subgrupos $\pi-$perfectos de G. Además, dado un subgrupo $\pi-$perfecto H de G se denota

$$S_\pi(H) = S_\pi(G,H) = \{L \leq G : O^\pi(L) = H\}.$$

Ahora, sean p un número primo o cero y H cualquier subgrupo de G, consideremos el homomorfismo de anillos

$$\varphi_H : B(G) \to \mathbb{Z},$$

se denotará $I_{H,p} = \varphi_H^{-1}(p\mathbb{Z})$ y $I_H = \varphi_H^{-1}(0)$. Note que $I_{H,p}$ es un ideal primo de $B(G)$, y si I es un ideal primo de $B(G)$, entonces

$$B(G)/I \cong \mathbb{Z}_p \text{ o } B(G)/I \cong \mathbb{Z}.$$

Lema 8 *Si I es un ideal primo de $B(G)$ tal que $I_H \subseteq I$ para algún subgrupo H de G, entonces $I = I_{H,p}$ donde p es la característica de $B(G)/I$.*

Demostración. Sea $\pi : B(G) \to B(G)/I$ la aplicación canónica, p es la característica de $B(G)/I$, así, $B(G)/I \cong \mathbb{Z}_p$ es un dominio entero, se sigue que

$$\pi(X) = \varphi_H(X) + I, \text{ para todo } X \in B(G).$$

Entonces $X \in I$ si y sólo si $\pi(X) = 0$ si y sólo si $\varphi_H(X) \equiv 0 \; mod \; p$ si y sólo si $X \in I_{H,p}$. $\square$

Teorema 2.2.1 *Los ideales primos de $B(G)$ son de la forma $I_{H,p}$ para algún subgrupo H de G y p un número entero.*

Demostración. Sea I un ideal primo de $B(G)$, y consideremos la aplicación canónica $\pi : B(G) \to B(G)/I$, se tiene que $B(G)/I \cong \mathbb{Z}_p$ o $B(G)/I \cong \mathbb{Z}$. Así, existe $H \leq G$ tal que $Ker(\pi) = I_{H,p}$, es decir, $I = I_{H,p}$.

$\square$

Proposición 2.2.1 *Sea G un grupo finito. Si $H,K \leq G$, entonces $I_H = I_K$ si y sólo si $H =_G K$.*

Demostración. Supongamos que $H =_G K$, la Proposición 2.1.3 implica que $\varphi_H = \varphi_K$, entonces $I_H = I_K$.
Ahora, supongamos que $I_H = I_K$, entonces para $X \in B(G)$ se tiene que $\varphi_H(X) = 0$ si y solo si $\varphi_k(X) = 0$, en particular para G/K y G/H, puesto que $\varphi_H(G/H) \neq 0$ y $\varphi_K(G/K) \neq 0$, entonces $\varphi_K(G/H) \neq 0$ y $\varphi_H(G/K) \neq 0$, se sigue que $K \leq_G H$ y $H \leq_G K$. Por lo tanto, $H =_G K$.

$\square$

Teorema 2.2.2 *Sea K un subgrupo de G. Si $L \trianglelefteq K$ tal que $|K/L| = p$ es un número primo, entonces $P_{K,p} = P_{L,p}$.*

Demostración. Sea X un G−conjunto, entonces se tiene que $X^K \subseteq X^L$ y X^L es un K−conjunto bajo la acción kx para todo $k \in K$ y para todo $x \in X$, puesto que

$$l(kx) = k(k^{-1}lk)x = kx, \forall x \in X^L, \forall l \in L, \forall k \in K,$$

se sigue que la acción está bien definida. Así que, X^L es un K/L−conjunto, implica que $|X^L| = |X^K| mod\ p$, entonces $\varphi_L(X) = \varphi_K(X) mod\ p$, por lo tanto $P_{K,p} = P_{L,p}$.

$\square$

Corolario 2.2.3 *Sea K un subgrupo de G, entonces $P_{K,p} = P_{O^p(K),p}$.*

Demostración. Puesto que $O^p(K) \trianglelefteq K$ y $|K/O^p(K)| = p$, el resultado se sigue del Teorema. $\square$

Sea P_G el conjunto de subgrupos perfectos de G, es decir,

$$P_G = \{H \leq G | O^S(H) = H\}.$$

note que P_G es un G−conjunto bajo la acción $gH = gHg^{-1}$ para cada $g \in G$ y $H \in P_G$, puesto que $O^S(gHg^{-1}) = gO^S(H)g^{-1} = gHg^{-1}$, la acción está bien definida. Para cada $H \in P_G$, se denota

$$Y_H = \{P_K,\ P_{K,p} | K \leq G, p \text{ es un número primo },\ O^S(K) =_G H\}$$

Note que, $X_H \subseteq Spec(B(G))$, para todo $H \in P_G$.

Teorema 2.2.4 *El conjunto $\{Y_H | H \in [G \backslash P_G]\}$ contiene las componentes conexas distintas de $Spec(B(G))$.*

Demostración. Puesto que $P_K \subseteq P_{K,p}$(para todo número primo p), entonces P_K está en la misma componente conexa que $P_{K,p}$.
Sean H, K subgrupos de G y p un número primo. Si $P_{K,p} \in X_H$, entonces $O^S(K) =_G H$ y la Proposición 2.2.1 implica que $P_H = P_{O^S(K)}$, puesto que

$P_{K,p} = P_{O^S(K),p}$, entonces $P_{K,p}$ y P_H están en la misma componente conexa. Entonces Y_H está contenida en una componente conexa del espectro primo de $B(G)$.
Si $P \in Spec(B(G))$, $P = P_H$ o $P = P_{H,p}$, para algún número primo p, puesto que $O^S(O^S(H)) = O^S(H)$, entonces $P \in X_{O^S(H)}$, así,

$$B(G) = \bigsqcup_{H \in [G \backslash P_G]} Y_H.$$

Además, se tiene que $Y_H \subseteq \cup_{O^S(K)=_G H} V(P_K)$, y del lema 8 se tiene que los ideales primos que contienen a P_K deben ser de la forma $P_{K,p}$, entonces

$$Y_H = \bigcup_{O^S(K)=_G H} V(P_K)$$

Por lo tanto, Y_H es cerrado y abierto, entonces Y_H es conexo.

□

Corolario 2.2.5 *Los ideales $P_{K,p}$ y $P_{L,q}$ están en la misma componente conexa si y sólo si $p = q$ y $O^S(K) =_G O^S(L)$.*

2.3. Idempotentes del Anillo de Burnside.

Para un grupo finito G, $B(G)$ es Noetheriano y cada subgrupo H de G define un homomorfismo de anillos φ_H de $B(G)$ a $\mathbb{Z}$. El kernel de φ_H es un ideal primo, puesto que $\mathbb{Z}$ es un dominio entero, y la intersección de $Ker(\varphi_H)$ para cada subgrupo H de G es igual a cero. Ahora, consideremos el homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & B(G) & \longrightarrow & \prod_{H \in \mathscr{C}} \mathbb{Z} \\ & X & \longrightarrow & (\varphi_H(X))_{H \in \mathscr{C}} \end{array}$$

Puesto que $\varphi_H = \varphi_K$ si y sólo si H y K son conjugados en G, φ es inyectiva y es una función entre $\mathbb{Z}$–módulos libres de igual rango. La cardinalidad de el cokernel de φ es el determinante de $\mathscr{M}(G)$, es decir,

$$|Coker(\varphi)| = \prod_{H \in \mathscr{C}} [N_G(H) : H]$$

Continuando con el homomorfismo de anillos φ, si tensorizamos con $\mathbb{Q}$ nos da un ismorfismo de $\mathbb{Q}$–algebras

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G) \longrightarrow \prod_{H \in \mathscr{C}} \mathbb{Q}$$

y en particular el algebra $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ es semi-simple, es decir, es suma de simples. Denotamos $\mathbb{Q}B(G) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi = \mathbb{Q}\varphi$, y todas los resultados de $B(G)$ serán extendidos a $\mathbb{Q}B(G)$.

Ahora, consideremos la base canónica de $\prod_{H\in\mathscr{C}}\mathbb{Q}$, la denotamos por $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0)\ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)\}$, con $n = |\mathscr{C}|$. La imagen inversa por φ de los elementos indexados por H de la base canónica de $\prod_{H\in\mathscr{C}}\mathbb{Q}$ se denotará por $e_{G,H}$. Si K y H son subgrupos de G conjugados en G, entonces $e_{G,K} = e_{G,H}$. Para cualquier dos subgrupos H y K de G, tenemos

$$\varphi_K(e_{G,H}) = \begin{cases} 1 \text{ si } H =_G K \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Una relación $\leq$ sobre un conjunto X se llama de orden si cumple con los siguientes axiomas

1. $x \leq x$ para todo $x \in X$.

2. Si $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. Si $x, y, z \in X$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Definición 14 *Un conjunto parcialmente ordenada, o copo, es un conjunto en el cual se ha definido un orden parcial $\leq$.*

Un intervalo de un copo X es un conjunto de la forma

$$[a,b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\} \quad a, b \in X$$

Un copo es localmente finito si cada uno de sus intervalos tiene cardinalidad finita.

Definición 15 *Sean P un copo localmente finito y F un campo de caracteristica cero, se denota por $a_F(P)$ al conjunto,*

$$a_F(P) = \{f : P \times P \longrightarrow F \mid f(x,y) = 0 \text{ si } x \not\leq y\}$$

Con la anterior notación, sean $x, y \in P$, $\lambda \in F$ y $f, g \in a_F(P)$, se define $f+g$ y λf en $a_F(P)$ como sigue,

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x,y) & = & f(x,y) + g(x,y) \\ (\lambda f)(x,y) & = & \lambda f(x,y) \end{array}$$

Se deduce que $a_F(P)$ es un espacio vectorial sobre F

Definición 16 *Sean $f, g \in a_F(P)$ se define la convolución de f y g, denotada por $f * g$, como el elemento de $a_F(P)$ que para $x, y \in P$ tal que $x \leq y$ está dado por*

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z \in [x,y]} f(x, z) g(z, y)$$

y si $x \not\leq y$ entonces $(f * g)(x, y) = 0$.

Con esto a $a_F(P)$ se le da una estructura de $F-$álgebra definiendo el producto de dos elementos $f, g \in a_F(P)$ por la convolución $f * g$.

Definición 17 *La función de Kronecker, denotada por δ, en $a_F(P)$ se define como*

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x = y \\ 0 & si\ x \neq y \end{cases}$$

Lema 9 *Sea P un copo localmente finito. Entonces $a_F(P)$ es una $F-$álgebra con la función de Kronecker como el elemento identidad. Además, un elemento $f \in a_F(P)$ es una unidad si y sólo si $f(x, x) \neq 0$ para todo $x \in P$.*

Definición 18 *La función zeta, denotada por ζ, se define por,*

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La función de Möbius, denotada por μ, está dada por $\mu = \zeta^{-1}$.

La función de Möbius cumple con

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = -\sum_{x < z \leq y} \mu(z, y) & \text{si } x < y \end{cases}$$

Lema 10 (Inversión de Mobius) *Sea P un copo localmente finito, y sean $f : P \to F$, $g : P \to F$ dos funciones. Si $\alpha, \beta \in a_F(P)$ tales que $\alpha = \beta^{-1}$, entonces para todo $x \in P$ se cumple que,*

$$f(x) = \sum_{y \in P} \alpha(x, y) g(y)$$

si y sólo si

$$g(x) = \sum_{y \in P} \beta(x, y) f(y).$$

Consideremos al conjunto $S(G)$ parcialmente ordenado por contenciones. Sea H subgrupo de G, y sea e_K la base canónica de $\tilde{B}(G)$ tal que

$$(e_K)_L = \begin{cases} 1 \text{ si } K{=_G}L \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(G/H) &= (\varphi_K(G/H))_{K\in\mathscr{C}} \\
&= \sum_{K\in\mathscr{C}} \varphi_K(G/H)e_K \\
&= \sum_{K\in\mathscr{C}} \frac{|N_G(K)|}{|H|}\zeta(K,H)e_K \\
&= \sum_{K\leq G} \frac{|N_G(K)|}{|H|}\zeta(K,H)e_K.
\end{aligned}$$

Puesto que φ es inyectiva, se puede considerar a G/H como un elemento de $\tilde{B}(G) = \prod_{H\in\mathscr{C}}\mathbb{Z}$. Si $f(H) = |H|G/H$ y $g(H) = |N_G(H)|e_{G,H}$ para cada subgrupo H de G, se tiene que f y g son funciones de $S(G)$ al anillo $\tilde{B}(G) = \prod_{H\in\mathscr{C}}\mathbb{Z}$, además,

$$\begin{aligned}
f(H) &= |H|\left(\sum_{K\leq G} \frac{|N_G(K)|}{|H|}\zeta(K,H)e_{G,H}\right) \\
&= \sum_{K\leq G} |N_G(K)|\zeta(K,H)e_{G,H} \\
&= \sum_{K\leq G} \zeta(K,H)g(K)
\end{aligned}$$

entonces del lema anterior se sigue que

$$g(H) = \sum_{D\leq G} \mu(D,H)f(D),$$

Así, se tiene que

$$|N_G(H)|e_{G,H} = \sum_{D\leq G} \mu(D,H)|D|G/D.$$

Por lo tanto,

$$e_{G,H} = \frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{D\leq H} |D|\mu(D,H)G/D.$$

Ahora, sean π un conjunto de números primos, H un subgrupo $\pi-$perfecto de G y K cualquier subgrupo de G, se define

$$\lambda(K,H) = \sum_{L\in S_\pi(H)} \mu(K,L)$$

Definición 19 *Sea H un subgrupo π–perfecto de G, entonces se define*

$$e^{\pi}_{G,H} = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \leq N_G(H)} |K| \; \lambda(K,H) \; [G/K].$$

Note que, $\mu(K,L) = \mu(gKg^{-1}, gLg^{-1})$, para todo $g \in G$, entonces si $(L) = (H)$ implica que $e^{\pi}_{G,L} = e^{\pi}_{G,H}$. Además, si π es vacío se tiene $P_{\pi}(G) = S(G)$ y $S_{\pi}(H) = H$ para cada subgrupo H de G, así,

$$e^{\pi}_{G,H} = e^{\emptyset}_{G,H} = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K| \; \mu(K,H) \; [G/K],$$

en este caso se denotará $e_{G,H} = e^{\emptyset}_{G,H}$.

Lema 11 *El conjunto $\{e_{G,H} | H \in \mathscr{C}\}$ está constituido por todos los idempotentes primitivos y ortogonales de $\mathbb{Q}B(G)$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{Q}B(G) \cong \mathbb{Q}^n$, donde n es la cardinalidad de $\mathscr{C}$, entonces basta demostrar que

$$\varphi_L(|N_G(H)| e_{G,H}) = \begin{cases} 1 \text{ si } L =_G H \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Consideremos a $e'_{G,H} = |N_G(H)| e_{G,H}$, así, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_L(G/K) &= |(G/K)^L| \\ &= \frac{1}{|K|} \sharp\{g \in G | L^g \leq K\} \\ &= \sharp\{gK \in G/K | (hg)K = gK, \; \forall \; h \in H\} \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \zeta(L^g, K) \end{aligned}$$

De la definición de Möbius se sigue que

$$\varphi_L(e'_{G,H}) = \sum_{K \leq H} |K| \mu(K,H) \varphi_L(G/K)$$

por el lema 10 se tiene que

$$\begin{aligned} &= \sum_{g \in G} \sum_{K \leq H} \zeta(L^g, K) \mu(K,H) \\ \varphi_L(e'_{G,H}) &= \sum_{g \in G} \delta(L^g, H) \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } L =_G H \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

De este lema y el anterior se deduce que para cada $H \in P_G$ el elemento $e^{\pi}_{G,H}$ es un idempotente de $\mathbb{Q}B(G)$.

Ejemplo: 7 *Sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de S_3 son $\{\{I\}, C_2, A_3\}$. Así, los idempotentes $e_{S_3,H}$ de S_3 son:*

$$\begin{aligned}
e_{S_3,\{I\}} &= \tfrac{1}{6}(S_3/\{I\}) \\
e_{S_3,C_2} &= \tfrac{1}{2}(2S_3/C_2 - S_3/\{I\}) \\
e_{S_3,A_3} &= \tfrac{1}{6}(3S_3/A_3 - S_3/\{I\}) \\
e_{S_3,S_3} &= \tfrac{1}{6}(-3S_3/A_3 - 6S_3/C_2 + 3S_3/\{I\} + 6S_3/S_3)
\end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$e_{S_3,\{I\}} + e_{S_3,C_2} + e_{S_3,A_3} + e_{S_3,S_3} = S_3/S_3$$

Sea A_5 el grupo alternado de orden 5. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de A_5 que son

$$\{\{I\}, C_2, C_3, D_2, C_5, D_3, D_5, A_4\}$$

Así, los idempotentes $e_{A_5,H}$ de A_5 son:

$$\begin{aligned}
e_{A_5,\{I\}} &= \tfrac{1}{60}(A_5/\{I\}) \\
e_{A_5,C_2} &= -\tfrac{1}{4}(A_5/\{I\}) + \tfrac{1}{2}(A_5/C_2) \\
e_{A_5,C_3} &= -\tfrac{1}{6}(A_5/\{I\}) + \tfrac{1}{2}(A_5/C_3) \\
e_{A_5,D_2} &= \tfrac{1}{6}(A_5/\{I\}) - \tfrac{1}{2}(A_5/C_2) + \tfrac{1}{3}(A_5/D_2) \\
e_{A_5,C_5} &= -\tfrac{1}{10}(A_5/\{I\}) + \tfrac{1}{2}(A_5/C_5) \\
e_{A_5,D_3} &= \tfrac{1}{2}(A_5/\{I\}) - 1(A_5/C_2) - \tfrac{1}{2}(A_5/C_3) + (A_5/D_3) \\
e_{A_5,D_5} &= \tfrac{1}{2}(A_5/\{I\}) - 1(A_5/C_2) - \tfrac{1}{2}(A_5/C_5) + 1(A_5/D_5) \\
e_{A_5,A_4} &= \tfrac{1}{3}(A_5/\{I\}) - 1(A_5/C_3) - \tfrac{1}{3}(A_5/D_2) + 1(A_5/A_4) \\
e_{A_5,A_5} &= -1(A_5/\{I\}) + 2(A_5/C_2) + 1(A_5/C_3) - 1(A_5/D_3) - 1(A_5/D_5) - 1(A_5/A_4) + \\
&\quad +1(A_5/A_5)
\end{aligned}$$

Para cada subgrupo perfecto H de G consideremos el conjunto S_H formado por el conjunto de subgrupos K de G tal que $O^S(K) = H$. Además, si π es el conjunto de primos que dividen al orden de G, $\lambda(K,H) = \sum_{L\in S_\pi(H)} \mu(K,L) = \sum_{L\in S_H} \mu(K,L)$, se sigue que

$$e^{\pi}_{G,H} = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K\leq N_G(H)} |K| \, (\sum_{L\in S_H} \mu(K,L)) \, [G/K].$$

Lema 12 *Sean π el conjunto de primos que dividen al orden de G y H un subgrupo perfecto de G. Si $\{K_1,\dots,K_m\}$ es el conjunto de todos los representantes de las clases de conjugación de S_H bajo G. Entonces*

$$e^{\pi}_{G,H} = \sum_{i=1}^{m} e_{G,K_i}.$$

Demostración. Sea $N = N_G(H)$. Para todo subgrupo K de G sabemos que $O^S(K)$ es característico en K, entonces para todo $K \in S_H$ se tiene que H es característico en K, así, para todo automorfismo ϕ de K se tiene que $\phi(H) = H$, para cada $g \in N_G(K)$ induce un automorfismo c_g en K dado por $c_g(k) = gkg^{-1}$ y así $c_g(H) = gHg^{-1}$ para cada $g \in N_G(K)$, entonces $N_G(K) \leq N_G(H)$.
Por otra parte, si $K,L \in S_H$ y $K = gLg^{-1}$ para algún $g \in G$, se sigue que

$$O^S(K) = O^S(gLg^{-1}) = gO^S(L)g^{-1} = H,$$

puesto que $O^S(L) = H$, entonces $g \in N$. Así, dos elementos de S_H son conjugados en G si y sólo si son conjugados en N.

Puesto que $e_{G,K} = e_{G,L}$ si y sólo si $K =_G L$, se tiene que $e_{G,K} = e_{G,L}$ si y sólo si $K =_N L$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{m} e_{G,K_i} = \sum_{K\in S_H} \frac{1}{|O_N(K)|} e_{G,K}$$

donde $O_N(K)$ es la $N-$orbita de K, se sigue que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K\in S_H} \frac{1}{[N : N_G(K)]} e_{G,K} \\
&= \sum_{K\in S_H} \frac{1}{[N : N_G(K)]} \left(\frac{1}{|N_G(K)|} \sum_{D\leq K} |D|\mu(D,K)G/D \right) \\
&= \sum_{K\in S_H} \sum_{D\leq K} \frac{1}{|N|} |D|\mu(D,K)G/D
\end{aligned}$$

Por definición de μ si $D \not\leq K$ se tiene que $\mu(D,K) = 0$, y si $D \leq K$, puesto que $K \leq N_G(K) \leq N_G(H) = N$ implica que $D \leq N$ y así

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|N|} \sum_{K \in S_H} \sum_{D \leq N} |D| \mu(D,K) G/D \\
&= \frac{1}{|N|} \sum_{D \leq N} |D| \sum_{K \in S_H} \mu(D,K) G/D \\
&= \frac{1}{|N|} \sum_{D \leq N} |D| (\sum_{K \in S_H} \mu(D,K)) G/D \\
&= e^{\pi}_{G,H}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Sean G un grupo finito, $H \leq G$ y $\mathscr{C} = \{H_1, \ldots, H_n\}$. Denotamos $\varphi_{H_i}(G/H_i) = \omega(H_i)$ para cada i. Si X es un G–conjunto, X^H es un $N_G(H)$–conjunto, así,

$$
\begin{array}{cccc}
F_{r,H} & B(G) & \longrightarrow & B\left(\frac{N_G(H)}{H}\right) \\
 & X & \longrightarrow & X^H
\end{array}
$$

es un homomorfismo de anillos.

Teorema 2.3.1 *Sea G un grupo finito. Si X es un G–conjunto, entonces*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \sharp \text{ orbitas de } G.$$

Demostración. Sea $\Omega = |\{(g,x) \in G \times X | gx = x\}|$

Notemos que para cada $g \in G$ hay $|X^g|$ pares que tienen a g como primer elemento en el par (g,x), así,

$$\Omega = \sum_{g \in G} |X^g|$$

por otra parte, para cada $x \in X$ hay $|G_x|$ pares que tienen a x como segundo elemento en el par (g,x), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \sum_{x \in X} |G_x| \\
&= \sum_{x \in X} |G|/|Gx| \\
&= |G| \left(\sum_{x \in X} 1/|Gx| \right)
\end{aligned}
$$

Además, $1/|Gx|$ es igual para todo x que este en la misma órbita, entonces

$$\begin{aligned}\Omega &= |G|\left(\sum_{x\in[G\backslash X]} 1\right)\\ &= |G||[G\setminus X]|\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.2 *Sea G un grupo finito. Si $y \in \tilde{B}(G)$, entonces $y \in Im(\varphi)$ si y sólo si para todo subgrupo H de G se tiene que*

$$\sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} \varphi_{\langle x,H\rangle}(y) \equiv 0 \ mod \left|\frac{N_G(H)}{H}\right|.$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$B(G) \xrightarrow{\varphi} \tilde{B}(G) \xrightarrow{\psi} \tilde{B}(G) \xrightarrow{\pi} \prod_{H\in\mathscr{C}} \frac{\mathbb{Z}}{\frac{N_G(H)}{H}\mathbb{Z}},$$

donde $\psi(\alpha) = \sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} \varphi_{\langle x,H\rangle}(\alpha)$. Sea $\overline{\psi} = \pi \circ \psi$.

Sea $\mathscr{C} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ tal que $H_1 = 0$ y $H_n = G$ y la base canónica de $\prod_{H\in\mathscr{C}} \mathbb{Z}$, la denotamos por

$$\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0)\ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)\}.$$

Consideremos la matriz asociada a ψ y se denotará por A, que es la matriz cuadrada cuyas columnas y filas son indexados por las clases de conjugación de subgrupos de G y en cuya entrada (H,K), donde H y K son subgrupos de G, se encuentra $\sum_{x\in[N_G(H)/H]} \varphi_{\langle x,H\rangle}(e_K)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\psi(e_K)_H &= \sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} \varphi_{\langle x,H\rangle}(e_K)\\ &= |\{x \in [N_G(H)/H] \,|\langle x,H\rangle =_G K\}|\end{aligned}$$

Si $y \in Im(\varphi)$, existe un G–conjunto X tal que

$$y = (|X^H|)_{H\in\mathscr{C}}$$

puesto que X^H es un $N_G(H)$–conjunto por el anterior teorema tenemos que

$$\frac{1}{|N_G(H)/H|} \sum_{\alpha\in N_G(H)/H} |(X^H)^\alpha| = \sharp \text{ orbitas de } N_G(H)/H$$

note que los elementos de $N_G(H)/H$ son de la forma xH con $x \in N_G(H)$, así,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} \varphi_{\langle x,H\rangle}(y) &= \sum_{K\in\mathscr{C}} |X^K| \sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} \varphi_{\langle x,H\rangle}(e_K) \\
&= \sum_{K\in\mathscr{C}} \sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} |X^K|\varphi_{\langle x,H\rangle}(e_K) \\
&= \sum_{K\in\mathscr{C}} \sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} |X^K|\, |\{x \in [N_G(H)/H] | \langle x,H\rangle =_G K\}| \\
&= \sum_{x\in\left[\frac{N_G(H)}{H}\right]} \varphi_{<x,H>}(X) \\
&= \sum_{xH\in N_G(H)/H} \varphi_{<xH>}(X^H) \\
&= (\sharp \text{ orbitas de } X^H)\ |N_G(H)/H|
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Im(\varphi) \subseteq Ker(\overline{\psi})$.

Ahora, se tiene que

$$\frac{\tilde{B}(G)}{Ker(\overline{\psi})} \cong \prod_{H\in\mathscr{C}} \frac{\mathbb{Z}}{\frac{N_G(H)}{H}\mathbb{Z}},$$

entonces $[\tilde{B}(G) : Ker(\overline{\psi})] = \prod_{H\in\mathscr{C}} N_G(H)/H$. Además,

$$|Coker(\varphi)| = \prod_{H\in\mathscr{C}} [N_G(H) : H],$$

entonces $[\tilde{B}(G) : Ker(\overline{\psi})] = [\tilde{B}(G) : Im(\varphi)]$. Ya se tiene que $Im(\varphi) \subseteq Ker(\overline{\psi})$ y como $Ker(\overline{\psi}) \subseteq \tilde{B}(G)$ se sigue que

$$[\tilde{B}(G) : Ker(\overline{\psi})][Ker(\overline{\psi}) : Im(\varphi)] = [\tilde{B}(G) : Im(\varphi)]$$

entonces $[Ker(\overline{\psi}) : Im(\varphi)]$, así, $Im(\varphi) = Ker(\overline{\psi}) = Ker(\pi)$. □

Teorema 2.3.3 (Dress) *Sean G un grupo finito. Entonces los idempotentes primitivos de $B(G)$ están en biyección con las clases de conjugación de subgrupos perfectos de G.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.1.6 y el Teorema 2.2.4. □

Sea e un idempotente de $B(G)$, del homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{cccc}
\varphi : & B(G) & \longrightarrow & \tilde{B}(G) \\
& X & \longrightarrow & (\varphi_H(X))_{H\in\mathscr{C}}
\end{array}$$

puesto que φ es inyectiva, entonces e se puede escribir como la suma de algunos idempotentes de $\tilde{B}(G)$. Además, si $H \leq G$, $\varphi(e)$ es igual a 1 o 0. Supongamos que $e = \sum_{i=1}^{r} e_{G,K_i}$, entonces

$$\varphi_H(e) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_H(e_{G,K_i}) = 1$$

entonces existe i tal que $\varphi_H(e_{G,K_i}) = 1$ y $\varphi_H(e_{G,K_j}) = 0$ para $j \neq i$. Por lo tanto,

$$e = \sum_{H \in I_e} e_{G,H}$$

donde $I_e = \{H \in S(G) | \varphi_H(e) = 1\}$, note que $I_e \subseteq S(G)$ y es cerrado bajo conjugación en G

Teorema 2.3.4 *Sean G un grupo finito. Sea $e \in B(G)$ un idempotente primitivo de $B(G)$ tal que $e \neq 0$ y $e = \sum_{H \in I_e} e_{G,H}$ para algún $I_e \subseteq S(G)$ cerrado bajo conjugación en G, entonces para cualquier par de subgrupos L y T de G tales que $L \trianglelefteq T$ y T/L es soluble, entonces $T \in I_e$ si y sólo si $L \in I_e$.*

Demostración. Sea $e \in B(G)$ un idempotente primitivo de $B(G)$ tal que $e \neq 0$, entonces

$$e = \sum_{H \in I_e} e_{G,H}.$$

Sean L y T subgrupos de G tales que $L \trianglelefteq T$ y T/L es soluble, entonces $O^S(L) \leq O^S(T)$. Además, $O^S(T) \leq L \leq T$, se sigue que $O^S(O^S(T)) \leq O^S(L)$, y así $O^S(T) \leq O^S(L)$. Entonces $O^S(T) = O^S(L)$.
Sea π el conjunto de números primos que dividen al orden de G, y sea $p \in \pi \cup \{0\}$. Se tiene que $e \in I_{H,p}$ si y solo si $H \notin I_e$. Puesto que $I_{H,p} = I_{H,O^p(H)}$ por el Corolario 2.2.3, entonces $H \in I_e$ si y sólo si $O^p(H) \in I_e$. De forma análoga, se obtiene que $H \in I_e$ si y sólo si $O^S(H) \in I_e$.
Entonces $T \in I_e$ si y sólo si $O^S(T) \in I_e$, puesto que $O^S(T) = O^S(L)$, se tiene que $T \in I_e$ si y sólo si $L \in I_e$.

Puesto que $e \neq 0$, $I_e \neq \emptyset$, sea $H \in I_e$ el elemento minimal por contenciones, puesto que $O^S(H) \trianglelefteq H$ y $H/O^S(H)$ es soluble, entonces $O^S(H) \in I_e$, y así $O^S(H) = H$. Además, para cada $H \in I_e$ se tiene

$$I_H = \{K \leq G | O^S(K) = H\} \subseteq I_e$$

sea $P^S(I_e) = \{H \in I_e | O^S(H) = H\}$, entonces

$$I_e = \bigsqcup_{H \in [G \backslash P^S(I_e)]} I_H.$$

Y así se tiene que,

$$\begin{aligned} e &= \sum_{H \in [G \backslash P^S(I_e)]} \sum_{K \in I_H} e_{G,K} \\ &= \sum_{H \in [G \backslash P^S(I_e)]} e^{\pi}_{G,H}. \end{aligned}$$

note que para cada $H \in P_G$ el elemento $e^{\pi}_{G,H}$ es un idempotente de $\tilde{B}(G)$, del Teorema 1.1.6 y el Teorema 2.2.4 se sigue que los idempotentes primitivos de $B(G)$ están en biyección con las clases de conjugación de subgrupos perfectos de G, puesto que los idempotentes de la forma $e^{\pi}_{G,H}$ de $\tilde{B}(G)$ están en biyección con las clases de conjugación de subgrupos perfectos de G, entonces

$$e = e^{\pi}_{G,H}$$

para algún $H \in [G \setminus P^S(I_e)]$. $\square$

3 Anillo de representaciones

3.1. Anillo de representaciones de un grupo finito.

Teniendo conocimientos previos de teoría de módulos, ahora se introduce la clase de anillos cuyos módulos estudiaremos. Sea R un anillo conmutativo y G un grupo finito, construimos

$$RG = \{\sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in R\}$$

Tenemos que RG es un anillo con el producto dado por,

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g)(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g\in G} \lambda_g \beta_h (gh)$$

Definición 20 *Se dice que M es un RG–módulo si es un R–módulo y un G–conjunto tal que*

$$\forall g \in G,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R,\ \forall m_1, m_2 \in M,\ \ g(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2) = \lambda_1 g m_1 + \lambda_2 g m_2$$

Nos interesa principalmente el caso cuando R es un campo k y G es finito, en este caso kG es un k–espacio vectorial que tiene a G como una base y tiene dimensión $|G|$. Además, kG es un álgebra sobre k, puede ser considerado como un k–espacio vectorial, con $\lambda \in k$ que actúa por $\lambda 1 \in kG$.

Si G es finito y si V es generado como un kG–módulo por el conjunto

$\{v_1, \ldots, v_r\}$, entonces V es generado como k–espacio vectorial por el conjunto $\{gv_i | g \in G,\ 1 \leq i \leq r\}$ y así $dim_k(V) < \infty$, se sigue que un kG–módulo es finitamente generado si y sólo si tiene dimensión finita considerado como un k–espacio vectorial.

Sean M y N dos kG–módulos, entonces $M \oplus N$ tiene estructura de kG–módulo dada por

$$g(m,n) = (gm, gn), \quad \forall g \in G, \forall m \in M, \forall n \in N.$$

Para el módulo $M \otimes N$, se tiene que cada $g \in G$ define una aplicación de $M \times N$ a $M \otimes N$ que envía (m,n) a $gm \otimes gn$, y de esto se tiene que $M \otimes N$ es un kG–módulo bajo la acción

$$g(m \otimes n) = gm \otimes gn, \quad \forall g \in G, \forall m \in M, \forall n \in N.$$

Ahora, para cada $g \in G$ y cada homomorfismo $\varphi \in Hom_k(M,N)$, se define la aplicación $g\varphi : M \to N$ dada por $(g\varphi)(m) = g(\varphi(g^{-1}m))$. Note que $g\varphi \in Hom_k(M,N)$, y para cada $g, h \in G$ se cumple que $(gh)\varphi = g(h\varphi)$. Esto da al k–espacio vectorial $Hom_k(M,N)$ una estructura de kG–módulo.

Se construye el grupo abeliano libre con base en el conjunto de kG–módulos (salvo isomorfismo), denotado por $\mathbb{Z}[\Omega]$, y consideramos el subgrupo $U(\Omega, \oplus)$ de $\mathbb{Z}[\Omega]$ que es generado por los elementos de la forma

$$(M \oplus N) - M - N$$

para cada par de kG–módulos M y N. Así, se define el grupo de Grothendieck de Ω por

$$G_0(\Omega) = \frac{\mathbb{Z}[\Omega]}{U(\Omega, \oplus)}$$

Definición 21 *Sea G un grupo finito, el grupo de representaciones de G sobre $\mathbb{C}$ es el grupo de Grothendieck de la categoría de $\mathbb{C}G$–módulos finitamente generados con respecto a $\oplus$, y se denota por $R_{\mathbb{C}}(G)$ o $R(G)$.*

Consideremos $x \in kG$ con $x = \sum_{g \in G} g$, note que para cada $l \in G$ se tiene que

$$lx = \sum_{g \in G} lg = x,$$

para este elemento se cumple que

$$x^2 = (\sum_{g \in G} g)x = \sum_{g \in G} gx = \sum_{g \in G} x = |G|x$$

Si la característica de k es mayor que cero y no divide al orden de G, entonces $e = \frac{1}{|G|}x$ es un idempotente de kG puesto que

$$e^2 = \frac{1}{|G|}x(\frac{1}{|G|}x) = \frac{1}{|G|^2}x^2 = \frac{1}{|G|}x = e.$$

Sean G y H grupos finitos. Si X es un (G,H)–biconjunto y k es un campo, kX es un (kG,kH)–bimódulo.
Y si M es un kH–módulo, entonces $kX \otimes_{kH} M$ es un kG–módulo bajo la G-acción

$$g(x\otimes m) = gx\otimes m, \ \ \forall g\in G, \ x\in X, \forall m\in M.$$

Ejemplo: 8 *Casos particulares de la anterior construcción son los siguientes,*

1. *Sean G un grupo finito y $H \leq G$. La restricción de módulos de $\mathbb{C}G$ a $\mathbb{C}H$ induce una función de restricción,*

$$\begin{array}{rccl} res_H^G: & R(G) & \longrightarrow & R(H) \\ & M & \longrightarrow & \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}G} M \end{array}$$

2. *Sean G un grupo finito y $H \leq G$. La inducción de módulos de $\mathbb{C}H$ a $\mathbb{C}G$ induce una función de inducción,*

$$\begin{array}{rccl} ind_H^G: & R(H) & \longrightarrow & R(G) \\ & N & \longrightarrow & \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} N \end{array}$$

3. *Si $\varphi : G \to H$ es un isomorfismo de grupos finitos, entonces existe una función líneal natural,*

$$\begin{array}{rccl} iso(\varphi): & R(G) & \longrightarrow & R(H) \\ & M & \longrightarrow & \mathbb{C}H\otimes_{\mathbb{C}G} M \end{array}$$

4. *Sean G un grupo finito, $N \trianglelefteq G$ y $H = G/N$. La inflación de módulos de $\mathbb{C}H$ a $\mathbb{C}G$ induce una función de inflación,*

$$\begin{array}{rccl} inf_H^G: & R(H) & \longrightarrow & R(G) \\ & M & \longrightarrow & \mathbb{C}H\otimes_{\mathbb{C}H} M \end{array}$$

   donde $\pi : G \to H$ es el homomorfismo proyección.

5. *Sean G un grupo finito, $N\trianglelefteq G$ y $H = G/N$. Partiendo de un $\mathbb{C}G$–módulo M puede considerarse el módulo M_N el espacio vectorial cociente de M más grande en el cuál N actúa trivialmente. Así, M_N es un $\mathbb{C}H$–módulo y la construcción es un funtor de la categoría de $\mathbb{C}G$–módulos a la categoría de $\mathbb{C}H$–módulos, puesto que $M_N \cong \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}N} M$. Entonces la correspondencia $M \to M_N$ induce una función de deflación.*

Estas funciones están relacionados por las siguientes condiciones de compatibilidad

1. Condición de transitividad.

   - Sean $K, H \leq G$. Si $K \leq H \leq G$, tenemos que

$$res_K^H \circ res_H^G = res_K^G \tag{3.1}$$
$$ind_H^G \circ ind_K^H = ind_K^G. \tag{3.2}$$

   - Si $\varphi : G \to H$ y $\psi : H \to K$ son isomorfismos de grupos, entonces

$$iso(\psi) \circ iso(\varphi) = iso(\psi \circ \varphi). \tag{3.3}$$

   - Sean $N, M \trianglelefteq G$. Si $N \leq M \leq G$, se cumple que

$$inf_{G/N}^G \circ inf_{G/M}^{G/N} = inf_{G/M}^G \tag{3.4}$$
$$def_{G/M}^{G/N} \circ def_{G/N}^G = def_{G/M}^G. \tag{3.5}$$

2. Condición de conmutatividad.

   - Si $\varphi : G \to H$ es un isomorfismos de grupos y $K \leq G$, entonces

$$iso(\varphi') \circ res_K^G = res_{\varphi(K)}^H \circ iso(\varphi), \tag{3.6}$$

   donde φ' es la restricción de φ a K.

   - Si $\varphi : G \to H$ es un isomorfismos de grupos y $N \trianglelefteq G$, tenemos que

$$iso(\varphi'') \circ def_{G/N}^G = def_{H/\varphi(N)}^H \circ iso(\varphi), \tag{3.7}$$
$$iso(\varphi) \circ inf_{G/N}^G = inf_{H/\varphi(N)}^H \circ iso(\varphi''), \tag{3.8}$$

   donde $\varphi'' : G/N \to H/\varphi(N)$ es el isomorfismo de grupos inducido por φ.

   - (**Formula de Mackey**) Para dos subgrupos H y K de G se cumple que

$$res_H^G \circ ind_K^G = \sum_{x \in [H \backslash G/K]} ind_{H \cap {}^xK}^H \circ iso(\phi_x) \circ res_{H \cap {}^xK}^K, \tag{3.9}$$

   donde $\phi_x : H \cap {}^xK \to H \cap {}^xK$ es isomorfismo dado por $\phi(a) = {}^xa$.

   - Si $N, M \trianglelefteq G$, se sigue que

$$def_{G/N}^G \circ inf_{G/M}^G = inf_{G/NM}^{G/N} \circ def_{G/NM}^{G/M}, \tag{3.10}$$

- Si $H \leq G$ y $N \trianglelefteq G$, se cumple que

$$\begin{aligned} def^G_{G/N} \circ ind^G_H &= ind^{G/N}_{HN/N} \circ iso(\varphi) \circ def^H_{H/(H\cap N)}, && (3.11)\\ res^G_H \circ inf^G_{G/N} &= inf^H_{H/(H\cap N)} \circ iso(\varphi^{-1}) \circ res^{G/N}_{HN/N}. && (3.12)\end{aligned}$$

con $\varphi : H/H\cap N \to HN/N$ el isomomorfismo canónico de grupos.

- Sean $H \leq G$ y $N \trianglelefteq G$, tal que $N \leq H$, así,

$$\begin{aligned} res^{G/N}_{H/N} \circ def^G_{G/N} &= def^H_{H/N} \circ res^G_H, && (3.13)\\ ind^G_H \circ inf^H_{H/N} &= inf^G_{G/N} \circ ind^{G/N}_{H/N}. && (3.14)\end{aligned}$$

3. Condición de trivialidad.

   - Si $\varphi : G \to G$ es un automorfismo de grupos, tenemos que

$$res^G_G = id,\ ind^G_G = id,\ def^G_{G/1} = id,\ inf^G_{G/1} = id,\ iso(\varphi) = id. \quad (3.15)$$

4. Inducción de $\mathbb{C}G$–módulos. Sea $H \leq G$. Si V es un $\mathbb{C}H$–módulo, se tiene que $ind^G_H(V) = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$ es un $\mathbb{C}G$–módulo bajo la acción

$$g(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i g_i \otimes v_i)) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i g g_i \otimes v_i),\ \ \forall g \in G,\ |G| = n$$

para V se define $g \otimes_{\mathbb{C}H} V = \{g \otimes v | v \in V\}$ y tenemos el isomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos.

Lema 13 *Sea $H \leq G$. Si V es un $\mathbb{C}H$–módulo, entonces*

a) *El conjunto $g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ es un subespacio vectorial de $ind^G_H(V)$.*

b) *El conjunto $g \otimes_{\mathbb{C}H} V$ sólo depende de las clases de g en G/H. Entonces si $h \in gH$, $g \otimes_{\mathbb{C}H} V = h \otimes_{\mathbb{C}H} V$*

c) *Consideremos el conjunto de representantes de los elementos de G/H, denotado por $[G/H]$, entonces se tiene el isomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos*

$$ind^G_H(V) \cong \bigoplus_{g\in[G/H]} g \otimes_{\mathbb{C}H} V.$$

5. Teorema de reciprocidad de Frobenius. Sean W un $\mathbb{C}G$-módulo, $H \leq G$ y sea V un $\mathbb{C}H$–módulo. Entonces como $\mathbb{C}$ espacios vectoriales se tiene que

$$Hom_{\mathbb{C}H}(V, res^G_H(W)) \cong Hom_{\mathbb{C}G}(ind^G_H(V), W). \quad (3.16)$$

Es natural en V y W, es una adjunción entre funtores.

3.2. Caracteres

En esta sección G denotará un grupo finito y todo $\mathbb{C}G$–módulo será finitamente generado. Para referencias de la demostración del siguiente Teorema ver [Alperin Bell, pág. 138].

Teorema 3.2.1 *Denotamos por $M_n(\mathbb{C})$ a la $\mathbb{C}$–álgebra de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\mathbb{C}G \cong M_{f_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{f_n}(\mathbb{C})$$

como $\mathbb{C}$–álgebras. Además, existen exactamente n clases de isomorfismos de $\mathbb{C}G$–módulos simples. Si se consideran $S_1, \ldots, S_n$ representantes de estas clases, entonces pueden ser reordenados los S_i de tal forma que

$$\mathbb{C}G \cong f_1 S_1 \oplus \cdots \oplus f_n S_n,$$

como $\mathbb{C}G$–módulos, donde $dim_{\mathbb{C}}(S_i) = f_i$ para cada i. Entonces

$$\sum_{i=1}^{r} f_i^2 = |G|.$$

Todo $\mathbb{C}G$–módulo puede ser escrito de forma única como

$$a_1 S_1 \oplus \cdots \oplus a_r S_r,$$

donde los a_i son enteros no negativos.

Las $\mathbb{C}$–dimensiones $f_1, \ldots, f_r$ son llamados los grados de G. El $\mathbb{C}G$–módulo trivial $\mathbb{C}$ es unidimensional y por tanto simple, se denotará por S_1.

Sean M un $\mathbb{C}G$–módulo y $a \in G$, consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} a_l : & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longrightarrow & am \end{array} \tag{3.17}$$

Notemos que a_l es una aplicación lineal de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que $dim_{\mathbb{C}} M = m$, sea $\{m_1, \ldots, m_m\}$ una base para M tal que a_l es diagonizable, es decir,

$$\text{existen } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \mathbb{C} \text{ tal que } a_l(m_i) = \varepsilon_i m_i,$$

además, la traza de la transformación lineal a_l, denotada por $tr_M(a_l)$, es la suma de los ε_i, es decir, $tr_M(a_l) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$.

Definición 22 *Para cada $a \in G$, se define la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \chi(a): & R(G) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & M & \longrightarrow & tr_M(a_l) \end{array}$$

Por otro lado, si M es un $\mathbb{C}G$–módulo, entonces cada $a \in G$ define una transformación lineal invertible de M. Se define el caracter de M como la función

$$\begin{array}{rccc} \chi_M: & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longrightarrow & tr_M(a_l) \end{array}$$

Se sigue inmediatamente que $\chi_M(1) = dim_{\mathbb{C}}M$.

Si $\underline{M} : G \to GL(M)$ es la representación correspondiente a M, entonces χ_M es la traza de la aplicación $\underline{M}(g)$. Note que dos $\mathbb{C}G$–módulos isomorfos tienen caracteres iguales. Además, se tiene que

Proposición 3.2.1 *Sea $a \in G$. Para cada $M \in R(G)$, χ_M satisface las siguientes propiedades*

1. *Si existe $b \in G$ tal que $a =_G b$, entonces $\chi_M(a) = \chi_M(b)$.*
2. *Se tiene que $\chi_{\mathbb{C}G}(1) = |G|$. Si $a \neq 1$, entonces $\chi_{\mathbb{C}G}(a) = 0$.*
3. *$\chi_M(a) = \Sigma_{i=1}^m \varepsilon_i$, donde $m = dim_{\mathbb{C}}M$ y los ε_i son las raices de la unidad.*
4. *$|\chi_M(a)| \leq \Sigma_{i=1}^m |\varepsilon_i| = dim_{\mathbb{C}}M$.*
5. *$\{g \in G | \chi_M(g) = \chi_M(1) = dim_{\mathbb{C}}M\} \trianglelefteq G$.*
6. *$\chi_M(a^{-1}) = \overline{\chi_M(a)}$.*

Demostración.

1. Para cualquiera $a, h \in G$ la transformación lineal de M definida por a y hag^{-1} son similares y por lo tanto tienen la misma traza, es decir, $\chi_M(a) = \chi_M(hag^{-1})$.
2. Sean $M = \mathbb{C}G$ y $a \in G$. Entonces $\chi_M(a)$ es igual al número de elementos g en G tales que $ag = g$, así que, $\chi_M(1) = |G|$ y para $a \neq 1$ se tiene $\chi_M(a) = 0$.
3. Sea n el orden de a en G, entonces $a^n = 1$, $\underline{M}(a)$ es una raíz del polinomio $X^n - 1$ en $\mathbb{C}[X]$, implica que el polinomio mínimo de $\underline{M}(a)$ se factoriza en factores lineales, así que, $\underline{M}(a)$ es diagonizable y por lo tanto su traza es la suma de sus autovalores, es decir,

   $$\chi_M(a) = \Sigma_{i=1}^m \varepsilon_i$$

   donde $m = dim_{\mathbb{C}}M$ y los ε_i son los autovalores de $\underline{M}(a)$, estos autovalores son las raíces del polinomio mínimo de $\underline{M}(a)$ que divide a $X^n - 1$, entonces son las n–raíces de la unidad.

4. Se sigue de 2.

5. Sea $\mathbb{C} * I = \{A \in GL(\mathbb{C}, m) | A \text{ es constante } \}$, entonces

$$\{g \in G | \chi_M(g) = \chi_M(1) = dim_{\mathbb{C}} M\} = \underline{M}^{-1}(\mathbb{C} * I) \trianglelefteq G$$

6. Sea $\{x_1, \ldots, x_m\}$ la base de M tal que $\underline{M}(a)$ es diagonizable, es decir, $ax_i = \varepsilon_i x_i$ y $\chi_M(a) = \Sigma_{i=1}^m \varepsilon_i$, donde los ε_i son los autovalores de $\underline{M}(a)$, así, $a^{-1}x_i = \varepsilon_i^{-1}x_i$, entonces

$$\chi_M(a^{-1}) = \Sigma_{i=1}^m \varepsilon_i^{-1} = \overline{\Sigma_{i=1}^m \varepsilon_i} = \overline{\chi_M(a)}$$

□

En la sigiente proposición se demuestra que la función $\chi(a)$ es un homomorfismo de anillos,

Proposición 3.2.2 *Para cada $a \in G$, la función $\chi(a)$ cumple con las siguientes propiedades*

1. *Sean M, N y T $\mathbb{C}G$–módulos. Si $M = N \oplus T$, entonces*

$$\chi_M(a) = \chi_N(a) + \chi_T(a).$$

2. *Sean M, N y T $\mathbb{C}G$–módulos. Si $M = N \otimes T$, tenemos que*

$$\chi_M(a) = \chi_N(a)\chi_T(a).$$

3. $\chi_{\mathbb{C}}(a) = 1$

4. *Sea $b \in G$ tal que $a =_G b$, entonces $\chi(a) = \chi(b)$.*

5. *Sean M un $\mathbb{C}G$–módulos y $M^* = Hom_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$. Con esta notación se sigue que*

$$\chi_{M^*} = \overline{\chi_M}.$$

6. *Sean M, N $\mathbb{C}G$–módulos. Entonces*

$$\chi_{Hom_{\mathbb{C}}(M,N)} = \overline{\chi_M}\chi_N.$$

Siempre que se diga que $S_1, \ldots S_n$ son los distintos $\mathbb{C}G$–módulos simples, los cuales están implícitamente ordenados, se denotará $\chi_{S_i} = \chi_i$ para cada i. Los $\chi_1, \ldots, \chi_n$ se conocen como los caracteres irreducibles de G. El siguiente Teorema establece la relación que existe entre los $\mathbb{C}G$–módulos simples y la estructura de G

Teorema 3.2.2 *El número de $\mathbb{C}G$–módulos simples es igual al número de clases de conjugación de G. Los caracteres irreducibles de G son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración. Ver [Alperin Bell, pág. 138] □

En general los caracteres distinguen $\mathbb{C}G$-módulos salvo isomorfismo como se demuestra en el siguiente Teorema,

Teorema 3.2.3 *Dos $\mathbb{C}G$–módulos son isomorfos si y sólo si sus carácteres son iguales.*

Demostración. Sean M y N $\mathbb{C}G$–módulos tales que $\chi_M = \chi_N$. Puesto que $\mathbb{C}G$ es semisimple, se tiene que

$$M \cong \oplus_i a_i S_i \quad y \quad N \cong \oplus_i b_i S_i,$$

donde a_i y b_i son enteros no negativos. Ahora, se toma caracteres

$$0 = \chi_M - \chi_N = \sum_i (a_i - b_i)\chi_i,$$

puesto que los caracteres irreducibles de G son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$, se sigue que $a_i = b_i$ para cada i, es decir, $M \cong N$. □

Ejemplo: 9 *Sea $C_n =< x >$ el grupo cíclico multiplicativo de orden n.*

Sea ε una n–ésima raíz primitiva de a unidad. Consideremos, los $\mathbb{C}$–espacios vectoriales V_i generados por ε^i, para cada $1 \le i \le n$.
Se tiene que C_n actúa en V_i, dado por $xw = \varepsilon^{i-1}w$ para cada $w \in V_i$, esto le da una estructura de $\mathbb{C}C_n$–módulo a V_i. Puesto que cada V_i es unidimensional, entonces es un $\mathbb{C}C_n$–módulo simple.
Sea χ_i el caracter de V_i, entonces

$$\chi_i(x) = \varepsilon^{i-1} \ y \ \chi_i(x^r) = \varepsilon^{r(i-1)}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Los caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son n caracteres lineales distintos de C_n, y como C_n tiene n caracteres irreducibles, entonces $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son los caracteres irreducibles de C_n.

Una función de clases en G es una función $f : G \to \mathbb{C}$ de G a $\mathbb{C}$ que al evaluarse en cualquier clase de conjugación es constante, es decir,

$$f(glg^{-1}) = f(l), \quad \forall g \in G, \ \forall l \in G.$$

Por ejemplo, los caracteres de $\mathbb{C}G$–modulos son funciones de clases. Denotamos el conjunto de funciones de clases en G como $cf_{\mathbb{C}}(G)$. Note que $cf_{\mathbb{C}}(G)$ es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial.

Proposición 3.2.3 *$cf_{\mathbb{C}}(G)$ es un $\mathbb{C}$–espacio vectorial de dimensión m, donde m es el número de clases de conjugación de G. Los caracteres irreducibles de G forman una base para $cf_{\mathbb{C}}(G)$.*

Demostración. Se tiene que $cf_{\mathbb{C}}(G) \cong \mathbb{C}^m$, con m el número de clases de conjugación de G. Y por el Teorema 3.2.2 se sigue que los caracteres irreducibles de G son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$ y el número de $\mathbb{C}G$–módulos simples es igual al número de clases de conjugación de G, que es igual a la dimensión de $cf_{\mathbb{C}}(G)$. □

Sean α, $\beta \in cf_{\mathbb{C}}(G)$ se define su producto interno como sigue

$$\begin{array}{lcc} cf_{\mathbb{C}}(G) \times cf_{\mathbb{C}}(G): & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) & \longrightarrow & \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)\overline{\beta(g)} \end{array}$$

La función $(,)$ es, como el nombre lo sugiere, un producto interno en el espacio de las funciones de clases de G, entonces tiene la siguientes propiedades:

a) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, $\forall \alpha \in cf_{\mathbb{C}}(G)$. Y $(\alpha, \alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$.

b) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ para todo $\alpha, \beta \in cf_{\mathbb{C}}(G)$.

c) $(\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$ para todo $\alpha, \beta \in cf_{\mathbb{C}}(G)$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

d) $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$ para todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in cf_{\mathbb{C}}(G)$.

Las siguientes propiedades para $(,)$ son consecuencia directa de las anteriores propiedades

e) $(\alpha, \lambda\beta) = \overline{\lambda}(\alpha, \beta)$ para todo $\alpha, \beta \in cf_{\mathbb{C}}(G)$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

f) $(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_1)$ para todo $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in cf_{\mathbb{C}}(G)$.

Si M es un $\mathbb{C}G$–módulo, entonces el conjunto de elementos de M en que G actúa trivialmente es un $\mathbb{C}G$–submódulo de M, que denotamos por M^G, es decir,

$$M^G = \{m \in M | gm = m, \ \ \forall g \in G\}.$$

Teorema 3.2.4 *Si M es un $\mathbb{C}G$–módulo, entonces*

$$dim_{\mathbb{C}}M^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_M(g).$$

Demostración. Sea $a = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \in \mathbb{C}G$. Se tiene que $ga = a$ para todo $g \in G$, se sigue que $a^2 = a$. Si T es la transformación lineal de M definida por a, entonces $T^2 - T = 0$, implica que T es diagonalizable, y los valores propios de T son sólo 1 y 0. Sea M_1 el espacio propio de T correspondiente a el valor propio 1. Si $m \in M_1$, se tiene que $gm = gam = am = m$ para todo $g \in G$, y por lo tanto $m \in M^G$. Por otro lado, si $m \in M^G$, entonces

$$|G|am = (\sum_{g\in G} g)m = \sum_{g\in G} gm = \sum_{g\in G} m = |G|m,$$

así que, $am = m$, entonces $m \in M_1$. Por lo tanto, $M^G = M_1$. Pero, la traza de T es igual a la dimensión de M_1, entonces

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_M(g) = \chi_M\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\right) = \chi_M(a) = dim_{\mathbb{C}} M^G$$

□

Teorema 3.2.5 *Sean M y N $\mathbb{C}G$–módulos, entonces*

$$(\chi_M, \chi_N) = dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}G}(M,N).$$

Demostración. Note que $Hom_{\mathbb{C}G}(M,N)$ es un subespacio del $\mathbb{C}G$–módulo $Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$. Si $\phi \in Hom_{\mathbb{C}G}(M,N)$ y $g \in G$, se tiene que

$$(g\phi)(m) = g\phi(g^{-1}m) = gg^{-1}\phi(m) = \phi(m), \quad \forall m \in M,$$

si y sólo si $g\phi = \phi$ para todo $g \in G$ si y sólo si $\phi \in Hom_{\mathbb{C}}(M,N)^G$. Por lo tanto, $Hom_{\mathbb{C}G}(M,N) = Hom_{\mathbb{C}}(M,N)^G$. Entonces, por el Teorema anterior se sigue que

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}G}(M,N) &= dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}}(M,N)^G \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Hom_{\mathbb{C}}(M,N)}(g) \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.2.2 inciso 6 se tiene que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_M(g)}\chi_N(g) \\ &= (\chi_M, \chi_N). \end{aligned}$$

□

Ya se se estableció que todo caracter de G es una combinación $\mathbb{Z}$–lineal de los r carateres irreducibles $\chi_1,, \chi_r$ de G, donde r es el número de clases de conjugación de G, y el el siguiente teorema se demuestra que los caracteres irreducibles de G forman una base ortonormal.

Teorema 3.2.6 (Teorema de las filas ortogonales.) *Sea r el número de clases de conjugación, entonces $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$, para cada $1 \leq i, j \leq r$.*

Demostración. Sean $S_1, \ldots, S_r$ los $\mathbb{C}G$–módulos simples. Por el anterior Teorema se tiene para cada i y j que

$$(\chi_i, \chi_j) = dim_{\mathbb{C}} Hom_{\mathbb{C}G}(S_i, S_j)$$

Para cada i se tiene que

$$Hom_{\mathbb{C}G}(S_i, S_i) = End_{\mathbb{C}G}(S_i) \cong \mathbb{C}$$

Y si $i \neq j$, entonces

$$Hom_{\mathbb{C}G}(S_i, S_j) = 0$$

Por lo tanto,

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}.$$

□

Sean $\chi_1, , \chi_r$ los r carateres irreducibles de G, y sean α y β dos caracteres de G, entonces $\alpha = \sum_i^r a_i \chi_i$ y $\beta = \sum_j^r b_j \chi_j$ para algunos $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$, entonces

$$(\alpha, \beta) = (\sum_i^r a_i \chi_i, \sum_j^r b_j \chi_j) = \sum_i^r \sum_j^r a_i b_j (\chi_i, \chi_j) = \sum_i^r \sum_j^r a_i b_j \delta_{ij} = \sum_i^r a_i b_i.$$

Así, si tenemos que $(\alpha, \alpha) = n \in \{1, 2, 3\}$, entonces α es igual a la suma de n caracteres irreducibles de G.

Teorema 3.2.7 (Teorema de las columnas ortogonales.) *Sean $g_1, \ldots, g_r$ representantes de las clases de conjugación de G, tal que $g_1 = 1$, y $k_1, \ldots, k_r$ los órdenes de las clases de conjugación, entonces para cada $1 \leq i, j \leq r$ se cumple que*

$$\sum_{t=1}^r \chi_t(g_i) \overline{\chi_t(g_j)} = \frac{|G|}{k_i} \delta_{ij} = |C_G(g_i)| \delta_{ij}.$$

Demostración. Sean χ la tabla de caracteres de G, y K la matriz diagonal de tamaño $r \times r$ que tiene a $(k_1, \ldots, k_r)$ en su diagonal. Se tiene que

$$\begin{aligned}
(\chi K \, \overline{\chi}^t)_{ij} &= \sum_{l=1}^r \chi_i(g_l) k_l (\overline{\chi}^t)_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^r k_l \chi_i(g_l) \overline{\chi_j(g_l)} \\
&= \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} \\
&= |G| (\chi_i, \chi_j) \\
&= |G| \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\chi K\ \overline{\chi}^t = |G|I$, donde I es la matriz identidad. Así que, $K\ \overline{\chi}^t\chi = |G|I$, y para cada $1 \leq i, j \leq r$ se cumple que

$$|G|\delta_{ij} = \sum_{l=1}^{r} (K\ \overline{\chi}^t)_{jl}(\chi)_{li} = \sum_{l=1}^{r} k_j\overline{\chi_l(g_j)}\chi_l(g_i).$$

□

Ejemplo: 10 *a) Sea $C_n =< x >$ el grupo cíclico multiplicativo de orden n. Sea ε una $n-$esima raíz primitiva de a unidad. Consideremos, para cada $1 \leq i \leq n$ un $\mathbb{C}-$espacio V_i unidimensional.*
Se tiene que C_n actúa en V_i, dado por $xw = \varepsilon^{i-1}w$ para cada $w \in V_i$, esto le da una estructura de $\mathbb{C}C_n-$módulo a V_i. Puesto que cada V_i es unidimensional, entonces es un $\mathbb{C}C_n-$módulo simple.
Sea χ_i el caracter de V_i, entonces

$$\chi_i(x) = \varepsilon^{i-1} \ y\ \chi_i(x^r) = \varepsilon^{r(i-1)}, \ \ \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Los caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son n caracteres lineales distintos de C_n, y como C_n tiene n caracteres irreducibles, entonces $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son los caracteres irreducibles de C_n.

b) Ahora, sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de S_3 que son $\{\{I\}, C_2, A_3\}$.

Puesto que $A_3 \triangleleft S_3$ y $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$, entonces S_3 tiene dos caracteres lineales de $\mathbb{Z}_2$, denotemos por χ_1 y χ_2 estos caracteres.
Del Teorema 3.2.1 se tiene que $6 = |S_3| = 2 + f_3^2$ donde f_3 es la dimensión del $\mathbb{C}S_3-$módulo simple correspondiente al tercer caracter χ_3, entonces $f_3 = 2$. Y por el Teorema de las columnas ortogonales 3.2.7 se tiene que

$$0 = \sum_{i=1}^{3} f_i\chi_i((12)) = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\chi_3((12))$$

$$0 = \sum_{i=1}^{3} f_i\chi_i((123)) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\chi_3((123))$$

Entonces $\chi_3(I) = 2$, $\chi_3((12)) = 0$ y $\chi_3((12)) = -1$.

c) Sea A_5 el subgrupo alternante de S_5. Los representantes de las clases de conjugación de A_5 son $\{\{I\}, (12)(34), (123), (12345), (13524)\}$.

El grupo A_5 actúa transitivamente en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ bajo la acción $\sigma x = \sigma(x)$ para todo $\sigma \in A_5$ y todo $x \in X$. Sea χ_1 el caracter principal de A_5 y sea π el caracter del $\mathbb{C}A_5-$módulo $\mathbb{C}X$ dado por $\pi(\sigma) = \sharp\{x \in X | \sigma x = x\}$. Puesto que

$$(\pi-\chi_1,\pi-\chi_1)=\frac{1}{60}\sum_{l=1}^{5}k_l[(\pi-\chi_1)(g_l)]^2=1$$

Se deduce que $\pi-\chi_1$ es un caracter irreducible de A_5, sea $\chi_2=\pi-\chi_1$.

Ahora, sea $Y=\{\{a,b\}|a,b\in X, a\neq b\}$, tenemos que $\mathbb{C}Y$ es un $\mathbb{C}A_5-$módulo y sea ψ el caracter del $\mathbb{C}A_5-$módulo $\mathbb{C}Y$ tal que $\psi(\sigma)=\sharp\{C\in Y|\sigma C=C\}$. Además, se obtiene que $(\psi-\chi_1,\psi-\chi_1)=2$ y $(\psi-\chi_1,\chi_2)=1$, entonces $\psi-\chi_1-\chi_2$ es un caracter irreducible de A_5 y lo denotamos por χ_3.

Del Teorema 3.2.1 y el Teorema de las columnas ortogonales 3.2.7 se deduce que $f_4=f_5=3$ y

$$\begin{array}{lll}\chi_4((12)(34))=-1, & \chi_4((12345))=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, & \chi_4((13524))=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \chi_5((12)(34))=-1, & \chi_5((12345))=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, & \chi_5((13524))=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}$$

Definición 23 *La tabla de caracteres de G es una matriz cuadrada, cuyas columnas son indexadas por clases de conjugación de G , y las filas están indexadas por clases de isomorfismo de $\mathbb{C}G-$módulos simples S. Sean $g_1,\ldots,g_r$ representantes de las clases de conjugación de G, tal que $g_1=1$, si χ es la tabla de marcas, su (i,j) entrada es $\chi_i(g_j)$.*

Ejemplo: 11 *a) Sea $C_n=<x>$ el grupo cíclico multiplicativo de orden n.*

Sea ε una $n-$ésima raíz primitiva de la unidad. Consideremos, los caracteres lineales $\chi_1,\ldots,\chi_n$ de C_n, como en el ejemplo 10 inciso a), entonces

$$\chi_i(x)=\varepsilon^{i-1} \text{ y } \chi_i(x^r)=\varepsilon^{r(i-1)},\ \ \forall r\in\mathbb{Z}.$$

La tabla de caracteres de C_n es:

$$\chi(C_n)=\left(\begin{array}{c|ccccc} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}\\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \chi_2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1}\\ \chi_3 & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \chi_n & 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \cdots & \varepsilon\end{array}\right)$$

Cuadro 3.1: Tabla de caracteres de C_n.

b) Ahora, sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Del ejemplo 10 inciso b) se deduce que S_3 tiene dos caracteres lineales de $\mathbb{Z}_2$, denotemos por χ_1 y χ_2 estos caracteres. Además, $f_3=2$, $\chi_3(I)=2$, $\chi_3((12))=0$ y $\chi_3((12))=-1$. Entonces la tabla de caracteres de S_3 es:

$$\chi(S_3) = \begin{array}{c|ccc} & I & (12) & (123) \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & -1 & 1 \\ \chi_3 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

Cuadro 3.2: Tabla de caracteres de S_3.

c) Sea A_5 el subgrupo alternante de S_5. Los representantes de las clases de conjugación de A_5 son $\{\{I\},(12)(34),(123),(12345),(13524)\}$.

Del ejemplo 10 inciso c) tenemos los caracteres irreducibles de A_5, χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, y χ_5. Y así la tabla de caracteres de A_5 es:

$$\chi(A_5) = \begin{array}{c|ccccc} & I & (12)(34) & (123) & (12345) & (13524) \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \chi_3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \chi_4 & 3 & -1 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \chi_5 & 3 & -1 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Cuadro 3.3: Tabla de caracteres de A_5.

4 Anillo Global de Representaciones

En este capítulo se define el Anillo Global de Representaciones basado en el artículo “representation ring". En este anillo se estudia la relación entre sus idempotentes primitivos y las componentes conexas de su espectro primo.

4.1. Anillo Global de Representaciones

Definición 24 *Dado X un G–conjunto, se dice que un $\mathbb{C}G$–módulo V es X–graduado si*

$$V = \bigoplus_{x \in X} V_x,$$

donde cada V_x es un $\mathbb{C}$–subespacio vectorial tal que $gV_x = V_{gx}$, $\forall x \in X$.

Sea £ la categoría constituida por los objetos de la forma (X, V), donde X es un G–conjunto y V es un $\mathbb{C}G$–módulo graduado. Si X y Y son G–conjuntos isomorfos, y V y W son $\mathbb{C}G$–módulos graduados isomorfos, entonces (X, V) y (Y, W) representan el mismo objeto en £.

Dado dos objetos (X, V) y (Y, W) de £ un morfismo de (X, V) a (Y, W) es una terna (f, α), donde $f : X \to Y$ es un homomorfismo de G–conjuntos y $\alpha : V \to W$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos tales que f y α son compatibles, es decir, $\alpha(V_x) \subset W_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Sean (X, U), (Y, V) y (Z, W) objetos de £, tenemos la composición $(g, \beta) \circ (f, \alpha)$

$$Mor_{£}((X,U),(Y,V)) \times Mor_{£}((Y,V),(Z,W)) \xrightarrow{\circ} Mor_{£}((X,U),(Z,W))$$

$$((f,\alpha),(g,\beta)) \quad \to \quad (g \circ f, \beta \circ \alpha)$$

1. Para todo $x \in X$, tenemos que

$$(\beta \circ \alpha)(V_x) = \beta(\alpha(U_x)) \subset \beta(V_{f(x)}) \subset W_{g \circ f(x)},$$

   entonces la composición está bien definida.

2. La identidad local es definida como

$$id_{(X,V)} = (id_X, id_V) : (X,V) \to (X,V).$$

3. Que la composición es asociativa se sigue de la asociatividad de la composición de los homomorfismos de G–conjuntos y $\mathbb{C}G$–módulos.

Definición 25 *Le daremos estructura de monoide a la categoría £ con las siguientes operaciones;*

1. *Definimos la suma de dos objetos de £, (X,V) y (Y,W) como;*

$$(X,V) + (Y,W) = (X \sqcup Y, V \oplus W)$$

   La cual está bien definida, puesto que

$$V \oplus W = \bigoplus_{x \in X} V_x \oplus \bigoplus_{x \in X} W_x = \bigoplus_{z \in (X \sqcup Y)} (V \oplus W)_z,$$

   con $(V \oplus W)_z = V_z$ si $z \in X$ y $(V \oplus W)_z = W_z$ si $z \in Y$, entonces $V \oplus W$ es un módulo $(X \sqcup Y)$–graduado.
   $(\emptyset, 0)$ es el elemento neutro para la suma.

2. *El producto de (X,V) y (Y,W) se define por*

$$(X,V) \otimes (Y,W) = (X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W)$$

   Puesto que

$$V \otimes W = \bigoplus_{x \in X} V_x \otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{x \in X} W_x = \bigoplus_{x \in X, y \in Y} (V_x \otimes_{\mathbb{C}} W_y)_z,$$

   se sigue que el producto está bien definido.
   $(\cdot, \mathbb{C})$ es el elemento neutro para el producto y se llama la unidad.

3. *El producto se distribuye bajo la suma*

$$((X,V) + (Y,W)) \otimes (Z,U) = (X,V) \otimes (Z,U) + (Y,W) \otimes (Z,U)$$

Que se obtiene de,

$$\begin{aligned}((X,V)+(Y,W))\otimes(Z,U) &= ((X\sqcup Y, V\oplus W))\otimes(Z,U)\\ &= ((X\sqcup Y)\times Z,(V\oplus W)\otimes_{\mathbb{C}} U)\\ &\cong ((X\times Z)\sqcup(Y\times Z)),(V\otimes_{\mathbb{C}} U)\oplus(W\otimes_{\mathbb{C}} U))\\ &\cong (X,V)\otimes(Z,U)+(Y,W)\otimes(Z,U)\end{aligned}$$

Y de forma análoga se prueba que

$$(Z,U)\otimes((X,V)+(Y,W)) = (Z,U)\otimes(X,V)+(Z,U)\otimes(Y,W)$$

Lema 14 *Si X es un G−conjunto transitivo y V un $\mathbb{C}G$−módulo X−graduado, entonces para todo $x\in X$ tenemos que V_x es un $\mathbb{C}G_x$−módulo y*

$$(X,V)\cong(G/G_x, ind_{G_x}^G(V_x))$$

Demostración. Consideremos un conjunto de representantes de las orbitas de X, $[G\backslash X]=\{x_1,\cdots,x_n\}$, $X=\sqcup_{i=1}^n Gx_i$, entonces

$$V=\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{x\in Gx_i} V_x$$

Tomamos un x fijo en X y $g\in G_x$, del lema1.2.1 tenemos un isomorfismo $\psi: X\to G/G_x$. Puesto que

$$gV_x = V_{gx} = V_x$$

bajo esta acción V_x es un $\mathbb{C}G_x$−módulo.
Ahora, del lema 13 sabemos que

$$ind_{G_x}^G(V_x)\cong\bigoplus_{g\in[G/G_x]} g\otimes_{\mathbb{C}G_x} V_x,$$

(4.1)

Así, construimos dos funciones $\varphi: V\to ind_{G_x}^G(V_x)$ y $\phi: ind_{G_x}^G(V_x)\to V$ de la siguiente forma:
Sea $v\in V$, existen $y_i\in Gx_i$, $v_{y_i}\in V_{y_i}$ tales que $v=\Sigma_{i=1}^n v_{y_i}$. Basta definir φ sobre los subespacios V_y y extender linealmente a V.
Sea $v\in V_{y_i}$, como X es transitivo, existe un único $\lambda_i\in[G/G_x]$ tal que $y_i=\lambda_i x$, y así que

$$\lambda_i^{-1}v\in\lambda_i^{-1}V_{y_i}=V_{\lambda_i^{-1}y_i}=V_x.$$

Entonces definimos $\varphi(v)=\lambda_i\otimes\lambda_i^{-1}v$, de la fórmula 4.1 se sigue que φ está bien definida y que $\varphi(V_{y_i})\subseteq\lambda_i\otimes V_x$. Resta demostrar que φ es un homomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos, para esto tomamos $g \in G$, $gv \in V_{gy_i}$ y existe $\lambda \in [G/G_x]$ tal que $\lambda x = gy_i$, entonces

$$\varphi(gv) = \lambda \otimes \lambda^{-1} v$$

Puesto que $y_i = \lambda_i x$, $gy_i = g\lambda_i x$, por la unicidad de λ, existe $\alpha \in G_x$ tal que $g\lambda_i = \lambda\alpha$, esto es $g\lambda_i\alpha^{-1} = \lambda$, así que

$$\varphi(gv) = \lambda \otimes (\alpha\lambda_i^{-1}g^{-1})gv = \lambda \otimes \alpha\lambda_i^{-1} v$$

Por otro lado tenemos que

$$g\varphi(v) = g(\lambda_i \otimes \lambda_i^{-1} v) = g\lambda_i \otimes \lambda_i^{-1} v = \lambda \otimes \alpha\lambda_i^{-1} v,$$

se sigue que $\varphi(gv) = g\varphi(v)$.

Por el isomorfismo 4.1 podemos definir ϕ en los subespacios $g \otimes_{\mathbb{C}H} V_x$ para cada $g \in [G/G_x]$ y extendemos linealmente a $ind_{G_x}^{G}(V_x)$. Un elemento de $g \otimes_{\mathbb{C}H} V_x$ es de la forma $g \otimes_{\mathbb{C}H} v_x$ con $v_x \in V_x$, así, $\phi(g \otimes_{\mathbb{C}H} v_x) = gv_x$, que está bien definida, puesto que $gV_x = V_{gx}$. Además, ϕ es un homomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos, y tenemos que

$$\phi(\varphi(v)) = \phi(\lambda_i \otimes \lambda_i^{-1} v) = \lambda_i\lambda_i^{-1} v = v,$$

$$\varphi(\phi(g \otimes_{\mathbb{C}H} v_x)) = \varphi(gv_x) = g \otimes_{\mathbb{C}H} v_x$$

Entonces ϕ es inverso a φ, se sigue que φ es un isomorfismo de V a $ind_{G_x}^{G}(V_x)$. Finalmente de ψ y φ se sigue que (X, V) y $(G/G_x, ind_{G_x}^{G}(V_x))$ son isomorfos en £. □

De la categoría £ se construye el grupo abeliano libre T con base en el conjunto de objetos de £, y consideramos el subgrupo M de T que es generado por los elementos de la forma

$$\begin{array}{ll} (X \sqcup Y, V \oplus W) - (X, V) - (Y, W), & (X, V), (Y, W) \in ob(£) \\ (X, V \oplus W) - (X, V) - (X, W), & (X, V), (X, W) \in ob(£) \end{array}$$

Definición 26 *Definimos el anillo global de representaciones del grupo G como el cociente*

$$\mathbb{D}(G) = \frac{T}{M}$$

Si $H \leq G$, denotamos $\overline{(G/H, ind_H^G(V))} = [H, V]$.

Proposición 4.1.1 $\mathbb{D}(G)$ *es un anillo conmutativo con multiplicación*

$$\overline{(X, V)} \cdot \overline{(Y, W)} = \overline{(X, V) \otimes (Y, W)} = \overline{(X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W)}.$$

Demostración. Note que $\overline{(\cdot,\mathbb{C})}$ es el elemento neutro para el producto. Puesto que $X\times Y = Y\times X$ y $V\otimes_{\mathbb{C}} W = W\otimes_{\mathbb{C}} V$, entonces

$$\overline{(X,V)}\cdot\overline{(Y,W)} = \overline{(Y,W)}\cdot\overline{(X,V)}$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned}((X,V)+(Y,W))\otimes(Z,U) &= (X,V)\otimes(Z,U)+(Y,W)\otimes(Z,U)\\ (X,V)\otimes((Z,U)+(Y,W)) &= (X,V)\otimes(Z,U)+(X,V)\otimes(Z,U),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\overline{((X,V)+(Y,W))\otimes(Z,U)} &= \overline{(X,V)\otimes(Z,U)+(Y,W)\otimes(Z,U)}\\ \overline{(X,V)\otimes((Z,U)+(Y,W))} &= \overline{(X,V)\otimes(Z,U)+(X,V)\otimes(Z,U)}\end{aligned}$$

Así, el producto se distribuye bajo la suma

$$\begin{aligned}\overline{((X,V)+(Y,W))\otimes(Z,U)} &= \overline{(X,V)\otimes(Z,U)}+\overline{(Y,W)\otimes(Z,U)},\\ \overline{(X,V)\otimes((Z,U)+(Y,W))} &= \overline{(X,V)\otimes(Z,U)}+\overline{(X,V)\otimes(Z,U)}.\end{aligned}$$

□

Del lema 14 se tiene que $\overline{(X,V)}$ se puede expresar de la forma

$$\overline{(X,V)} = \sum_{x\in[G\backslash X]} \overline{(G/G_x, ind_{G_x}^{G}(V_x))} = \sum_{x\in[G\backslash X]} [G_x, V_x],$$

donde V_x es un $\mathbb{C}G_x$–módulo. Sea $H\leq G$, tenemos que

$$\mathbb{C}H \cong \bigoplus_{i=1}^{l} S_i^{n_i},$$

donde cada S_i es un $\mathbb{C}H$–módulo simple y $n_i\in\mathbb{N}$, el conjunto $\{S_1,\dots,S_l\}$ se conoce como el conjunto de irreducibles de H y lo denotamos por $Irr(H)$. Si V es un $\mathbb{C}H$–módulo, entonces

$$V\cong\bigoplus_i S_i,\quad S_i\in Irr(H)$$

(4.2)

Proposición 4.1.2 *$\mathbb{D}(G)$ está generado por lo elementos de la forma $[H,S]$, con $H\leq G$ y $S\in Irr(H)$ se toma uno por cada clase de isomorfismo, es decir,*

$$\mathbb{D}(G) = \sum_{\substack{H\in[G\backslash S(G)]\\ S\in Irr(H)}} \mathbb{Z}[H,S]$$

Demostración. De las anteriores observaciones se sigue que

$$\overline{(X,V)} = \sum_{x\in[G\backslash X]} [G_x, V_x]. \tag{4.3}$$

Puesto que V_x es un $\mathbb{C}G_x$–módulo lo podemos escribir como:

$$V_x \cong \bigoplus_{i_x} S_{i_x}, \quad S_{i_x} \in Irr(G_x).$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
[G_x, V_x] &= \overline{(G/G_x, ind_{G_x}^{G}(\bigoplus_{i_x} S_{i_x}))} \\
&= \overline{(G/G_x, \bigoplus_{i_x} ind_{G_x}^{G}(S_{i_x}))} \\
&= \sum_{i_x} \overline{(G/G_x, ind_{G_x}^{G}(S_{i_x}))} \\
&= \sum_{i_x} [G_x, S_{i_x}]
\end{aligned}$$

Sustituimos este resultado en 4.3 y obtenemos que

$$\overline{(X,V)} = \sum_{x\in[G\backslash X]} \sum_{i_x} [G_x, S_{i_x}].$$

□

De este resultado podemos concluir que el anillo global de representaciones del grupo G es finitamente generado como $\mathbb{Z}$–módulo y por lo tanto es un anillo Noetheriano.

Ejemplo: 12 *Sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de S_3, $\{\{I\}, C_2, A_3\}$.*

Tenemos 2 módulos irreducibles de C_2, dados por los $\mathbb{C}$–espacios vectoriales unidimensinales V_1 y V_2, como en el ejemplo 10. El subgrupo A_3 tiene tres modulos irreducibles W_1, W_2 y W_3. Entonces,

$$\mathbb{D}(S_3) = \mathbb{Z}\,[\{I\}, \mathbb{C}] + \sum_{i=1}^{2} \mathbb{Z}\,[C_2, V_i] + \sum_{j=1}^{3} \mathbb{Z}\,[A_3, W_j]$$

Lema 15 *En $\mathbb{D}(G)$ tenemos la siguiente fórmula para el producto*

$$[H,W]\cdot[K,V] = \bigoplus_{x\in[H\backslash G/K]} [H\cap {}^xK, res^H_{H\cap {}^xK}(W)\otimes res^{^xK}_{H\cap {}^xK}({}^xV)],$$

donde ${}^xK = xKx^{-1}$.

Demostración. Por definición se tiene que

$$[H,W]\cdot[K,V] = \overline{(G/H\times G/K, ind^G_H(W)\otimes_{\mathbb{C}} ind^G_K(V))}$$

Consideramos como G–conjunto al producto cartesiano de G/H y G/K y lo desarrollamos como la unión disjunta de orbitas

$$G/H\times G/K = \bigsqcup_{(g,l)\in G\times G} G(gH,lK)$$

Puesto que, $g(H,g^{-1}lK) = (gH,lK)$ para todo $g\in G$, tenemos que

$$G(gH,lK) = G(H,g^{-1}lK)$$

así,

$$G/H\times G/K = \bigsqcup_{x\in G} G(H,xK)$$

De cursos sabemos que $G(H,xK)\cong G/G_{(H,xK)}$, calculemos $G_{(H,xK)}$

$$\begin{aligned}
G_{(H,xK)} &= \{g\in G \mid g(H,xK) = (H,xK)\}\\
&= \{g\in G \mid gH = H,\ gxKx^{-1} = xKx^{-1}\}\\
&= H\cap {}^xK\\
G_{(H,xK)} = G_{(H,yK)} &\iff \exists\ t\in G \text{ tal que } (H,xK) = t(H,yK)\\
&\iff \exists\ t\in H \text{ tal que } xK = tyK\\
&\iff HxK = HyK
\end{aligned}$$

Entonces

$$G/H\times G/K \cong \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} \frac{G}{H\cap {}^xK}$$

Ahora, aplicamos reciprocidad de Frobenius para obtener,

$$ind^G_H(W)\otimes_{\mathbb{C}} ind^G_K(V) \cong ind^G_H(W\otimes_{\mathbb{C}} res^G_H ind^G_K(V))$$

De la fórmula de Mackey tenemos que

$$res^G_H ind^G_K(V) \cong \bigoplus_{x\in[H\backslash G/K]} ind^H_{H\cap {}^xK} res^{^xK}_{H\cap {}^xK}({}^xV)$$

Aplicando nuevamente reciprocidad de Frobenius y de la fórmula de Mackey se sigue que,

$$\begin{aligned}
ind_H^G(W)\otimes_{\mathbb{C}} ind_K^G(V) &\cong ind_H^G(W\otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{x\in[H\backslash G/K]} ind_{H\cap^x K}^H res_{H\cap^x K}^{^xK}(^xV))\\
&\cong \bigoplus_{x\in[H\backslash G/K]} ind_H^G(W\otimes_{\mathbb{C}} ind_{H\cap^x K}^H res_{H\cap^x K}^{^xK}(^xV))\\
&\cong \bigoplus_{x\in[H\backslash G/K]} ind_H^G ind_{H\cap^x K}^H(res_{H\cap^x K}^H(W)\otimes_{\mathbb{C}} res_{H\cap^x K}^{^xK}(^xV))\\
&\cong \bigoplus_{x\in[H\backslash G/K]} ind_{H\cap^x K}^G(res_{H\cap^x K}^H(W)\otimes_{\mathbb{C}} res_{H\cap^x K}^{^xK}(^xV))
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[H,W]\cdot[K,V] &= \sum_{x\in[H\backslash G/K]} \overline{(\frac{G}{H\cap^x K}, ind_{H\cap^x K}^G(res_{H\cap^x K}^H(W)\otimes_{\mathbb{C}} res_{H\cap^x K}^{^xK}(^xV)))}\\
&= \sum_{x\in[H\backslash G/K]} [H\cap^x K, res_{H\cap^x K}^H(W)\otimes_{\mathbb{C}} res_{H\cap^x K}^{^xK}(^xV)]
\end{aligned}$$

□

4.2. Homomorfismos de anillos de $\mathbb{D}(G)$ a $\mathbb{C}$

Definiremos homomorfismos de anillos del anillo global de representaciones $\mathbb{D}(G)$ al campo de los complejos $\mathbb{C}$, para esto primero se define funciones en el conjunto de objetos de la categoria £ a $\mathbb{C}$.

Definición 27 *Sean $H\leq G$ y $c\in H$. Definimos*

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}: \quad ob(£) &\longrightarrow \mathbb{C}\\
(X,V) &\longrightarrow \mathscr{S}_{H,c}(X,V)=\sum_{\substack{x\in X\\ H\leq G_x}} \chi_{V_x}(c)
\end{aligned}$$

Proposición 4.2.1 *Sean $(X,V),(Y,W)\in ob(£)$, $\mathscr{S}_{H,c}$ tiene la siguientes propiedades*

1. *Si $(X,V)\cong(Y,W)$ en $ob(£)$, entonces $\mathscr{S}_{H,c}(X,V)=\mathscr{S}_{H,c}(Y,W)$.*

2. $\mathscr{S}_{H,c}(X \sqcup Y, V \oplus W) = \mathscr{S}_{H,c}(X,V) + \mathscr{S}_{H,c}(Y,W)$.

3. $\mathscr{S}_{H,c}(X, V \oplus W) = \mathscr{S}_{H,c}(X,V) + \mathscr{S}_{H,c}(X,W)$.

4. $\mathscr{S}_{H,c}((X,V) \otimes (Y,W)) = \mathscr{S}_{H,c}(X,V)\mathscr{S}_{H,c}(Y,W)$.

Demostración.

1. Si $(X,V) \cong (Y,W)$, existe un isomorfismo $\alpha : X \to Y$ de G–conjuntos y un isomorfismo $f : V \to W$ de $\mathbb{C}G$–módulos tales que f y α son compatibles.
   Para cada $x \in X$ existe un único $y \in Y$ tal que $\alpha(x) = y$. Note que V_x es un $\mathbb{C}G_x$–módulo, puesto que si $g \in G_x$ tenemos que $gV_x = V_{gx} = V_x$, de forma similar $W_{\alpha(x)}$ es un $\mathbb{C}G_{\alpha(x)}$–módulo.
   Ahora, si $g \in G_x$, $g\alpha(x) = \alpha(gx) = \alpha(x)$, se sigue que $G_x \leq G_{\alpha(x)}$. Puesto que $f(V_x) \subseteq W_{\alpha(x)}$, entonces $f_x = f|_{V_x}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G_x$–módulos entre V_x y $W_{\alpha(x)}$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}(X,V) &= \sum_{\substack{x\in X,\\ H\leq G_x}} \chi_{V_x}(c) \\
&= \sum_{\substack{x\in X,\\ H\leq G_x}} \chi_{W_{\alpha(x)}}(c) \\
&= \sum_{\substack{y\in Y,\\ H\leq G_y}} \chi_{W_y}(c) \\
&= \mathscr{S}_{H,c}(Y,W).
\end{aligned}$$

2. Sean $(X,V),(Y,W) \in ob(£)$, entonces
$$\mathscr{S}_{H,c}(X \sqcup Y, V \oplus W) = \sum_{\substack{z\in X\sqcup Y,\\ H\leq G_z}} \chi_{(V\oplus W)_z}(c)$$
   Si $z \in X \sqcup Y$, $z \in X$ ó $z \in Y$. Y de las propiedades de los caracteres, implica que
$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}(X \sqcup Y, V \oplus W) &= \sum_{\substack{z\in X,\\ H\leq G_z}} \chi_{V_z}(c) + \sum_{\substack{z\in Y,\\ H\leq G_z}} \chi_{W_z}(c) \\
&= \mathscr{S}_{H,c}(X,V) + \mathscr{S}_{H,c}(X,W)
\end{aligned}$$

3. Sean $(X,V),(Y,W) \in ob(£)$
$$\mathscr{S}_{H,c}(X \times Y, V \otimes W) = \sum_{\substack{z\in X\times Y,\\ H\leq G_z}} \chi_{(V\otimes W)_z}(c)$$
   Todo elemento de $X \times Y$ es de la forma (x,y) con $x \in X$ y $y \in Y$. Por otro lado tenemos que
$$G_{(x,y)} = \{g \in G | g(x,y) = (x,y)\} = \{g \in G | gx = x, \text{ y } ,gy = y\} = G_x \cap G_y.$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}(X\times Y, V\otimes W) &= \sum_{\substack{(x,y)\in X\times Y,\\ H\leq G_{(x,y)}}} \chi_{(V\otimes W)_{(x,y)}}(c)\\
&= \sum_{\substack{(x,y)\in X\times Y,\\ H\leq G_x\cap G_y}} \chi_{(V\otimes W)_{(x,y)}}(c)\\
&= \sum_{\substack{x\in X, y\in Y,\\ H\leq G_x\cap G_y}} \chi_{V_x}(c)\chi_{W_y}(c)\\
&= \left(\sum_{\substack{x\in X,\\ H\leq G_x}} \chi_{V_x}(c)\right)\left(\sum_{\substack{y\in Y,\\ H\leq G_y}} \chi_{W_y}(c)\right)\\
&= \mathscr{S}_{H,c}(X,V)\mathscr{S}_{H,c}(Y,W)
\end{aligned}$$

□

Para cada subgrupo H de G y $c\in H$. Consideremos el paso a el cociente de $\mathscr{S}_{H,c}$, dado por

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}: \quad \mathbb{D}(G) &\longrightarrow \mathbb{C}\\
\overline{(X,V)} &\longrightarrow \mathscr{S}_{H,c}(X,V) = \sum_{\substack{x\in X\\ H\leq G_x}} \chi_{V_x}(c)
\end{aligned}$$

Como ya se demostró en la Proposición 4.1.2 el anillo $\mathbb{D}(G)$ está generado por lo elementos de la forma $[K,S]$, con $K\leq G$ y $S\in Irr(K)$, entonces evaluamos el homomorfismo $\mathscr{S}_{H,c}$ en los basicos $[K,S]$, y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}([K,S]) &= \mathscr{S}_{H,c}(G/K, ind_K^G(S))\\
&= \sum_{\substack{x\in G/K,\\ H\leq G_x}} \chi_{(ind_K^G(S))_x}(c)
\end{aligned}$$

Todo elemento de G/K es de la forma aK con $a\in G$. Ahora,

$$G_{aK} = \{g\in G | g(aK) = aK\} = \{g\in G | (ga)K = aK\} = {}^aK$$

Además, tenemos que

$$ind_K^G(S) \cong \bigoplus_{a\in[G/K]} a\otimes S \cong \bigoplus_{a\in[G/K]} {}^aS$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{S}_{H,c}([K,S]) = \sum_{\substack{a\in[G/K]\\ H\leq {}^aK}} \chi_{{}^aS}(c).$$

Además, puesto que
$$\mathscr{S}_{H,c}(\overline{(\cdot,\mathbb{C})}) = \chi_{\mathbb{C}}(c) = 1$$
entonces $\mathscr{S}_{H,c}$ es no trivial. Concluimos que $\mathscr{S}_{H,c}$ está bien definida y es un homomorfismo de anillos.

Proposición 4.2.2 *Sean $H,K \leq G$, $c \in H$ y $S \in Irr(K)$, entonces*

1. $\mathscr{S}_{H,1}([K,S]) = \varphi_H(G/K)dim(S)$,
2. $\mathscr{S}_{H,c}([K,\mathbb{C}]) = \varphi_H(G/K)$.

Demostración.

1. Evaluando la función $\mathscr{S}_{H,1}$ en $[K,S]$ se tiene que,
$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,1}([K,S]) &= \sum_{\substack{a\in[G/K]\\ H\leq {}^aK}} \chi_{{}^aS}(1)\\
&= \sum_{\substack{a\in[G/K]\\ H\leq {}^aK}} dim({}^aS)\\
&= \sum_{\substack{a\in[G/K]\\ H\leq {}^aK}} dim(S)\\
&= (\sharp\{a \in [G/K],\ H \leq {}^aK\})dim(S)
\end{aligned}$$
Pero $(\sharp\{a \in [G/K],\ H \leq {}^aK\}) = |(G/K)^H| = \varphi_H(G/K)$, entonces
$$\mathscr{S}_{H,1}([K,S]) = \varphi_H(G/K)dim(S).$$

2. Ahora, evaluamos la función $\mathscr{S}_{H,c}$ en $[K,\mathbb{C}]$ y así
$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,c}([K,\mathbb{C}]) &= \sum_{\substack{a\in[G/K]\\ H\leq {}^aK}} \chi_{{}^a\mathbb{C}}(c)\\
&= \sum_{\substack{a\in[G/K]\\ H\leq {}^aK}} 1\\
&= \varphi_H(G/K)
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo: 13 *Sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Como en el ejemplo 10 sean W_1, W_2 y W_3 los $\mathbb{C}$–espacios unidimensionale. Así, de la anterior Proposición se tiene que*

$$\mathscr{S}_{A_3,1}([A_3,W_i]) = \varphi_{A_3}(S_3/A_3)dim(W_i) = 2dim(W_i) = 2$$

Sin perdida de generalidad, los elementos $\overline{(X,V)}$ de $\mathbb{D}(G)$ se denotarán solo por (X,V), así que en cada caso se especificará donde se va a tomar (X,V).

Sea $\mathscr{A} = \{[H,W] | H \leq G,\ W\ \ \mathbb{C}H - \text{módulo}\}$, G actua en $\mathscr{A}$ bajo la acción

$$\forall g \in G,\ \ \forall\ [H,W] \in \mathscr{A},\ \ g[H,W] = [{}^gH, {}^gW].$$

Esta acción tiene las siguientes propiedades,

Proposición 4.2.3 *Sean $[H,W],[K,V] \in \mathscr{A}$. Entonces $[H,W] = [K,V]$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ y ${}^gW = V$ como $\mathbb{C}H$–módulos.*

Demostración. Primero supongamos que $[H,W] \cong [K,V]$, entonces existe un isomorfismo $\alpha : G/H \to G/K$ de G–conjuntos y un isomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos $f : ind_H^G(W) \to ing_K^G(V)$ tales que f y α son compatibles.

Puesto que α es un isomorfismo, existe $g \in G$ tal que $\alpha(H) = gK$. Para cada $h \in H$ tenemos que $\alpha(hH) = h\alpha(H) = hgK$ y $\alpha(hH) = \alpha(H)$, así, $HgK = gK$, es decir, ${}^gH \leq K$. Además, $\mid G/H \mid = \mid G/K \mid$, entonces $\mid H \mid = \mid K \mid$. Así, ${}^gH = K$.

Puesto que f es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos, y f con α son compatibles, tenemos que

$$f(1 \otimes W) \cong \alpha(1) \otimes v \cong g \otimes v.$$

Así, f restringida a $1 \otimes W$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}H$–módulos entre $1 \otimes W$ y $g \otimes V$. Como $g \otimes V \cong {}^gV$, entonces W es isomorfo a ${}^gV$ como $\mathbb{C}G$–módulos.

Ahora, supongamos que existe $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ y ${}^gW \cong V$ como $\mathbb{C}H$–módulos. Sea $\varphi : G/K \to G/H$ definida por $\varphi(xK) = xgH$, se tiene que φ es un isomorfismo de G–conjuntos.

Denotemos al conjunto de representantes de los elementos de G/K por $[G/K]$ y sea $\mathscr{F} = \{\varphi(g) | g \in [G/K]\}$. Existe un isomorfismo $f : V \to {}^gW$ de $\mathbb{C}H$–módulos, entonces consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \bigoplus_{g \in [G/K]} g \otimes V & \longrightarrow & \bigoplus_{r \in \mathscr{F}} r \otimes W \\ & g \otimes v & \longrightarrow & \varphi(g) \otimes f(v) \end{array}$$

La aplicación ϕ está bien definida, puesto que $\varphi(g) \otimes f(v) \in \varphi(g) \otimes W$, y es un isomorfismo de $\mathbb{C}H$–módulos. Además, ϕ y φ son compatibles. Entonces $[H,W] \cong [K,V]$. □

Así, para todo subgrupo H de G, $c \in H$ y cada $g \in G$ se tiene que

$$\mathscr{S}_{H,c}([K,S]) = \mathscr{S}_{H,c}(g[K,S]) = \mathscr{S}_{H,c}([{}^gK, {}^gS])$$

Lema 16 *Sean X un G–conjunto. Si V es un $\mathbb{C}G$–módulo X–graduado, para cada $g,h \in G$ y $x \in X$ se cumple que*

$$\chi_{V_{g^{-1}x}}(h^g) = \chi_{V_x}(h).$$

Demostración. Primero notemos que multiplicar por g^{-1} los elementos de V_x da un isomorfismo entre V_x y $V_{g^{-1}x}$. Ahora, si $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ es una base para V_x, entonces $g^{-1}\alpha_1,\ldots,g^{-1}\alpha_r$ es una base para $V_{g^{-1}x}$. Si tenemos que $h\alpha_i = a\alpha_i$ para algún $a \in \mathbb{C}$, se sigue que

$$h^g(g^{-1}\alpha_i) = g^{-1}h\alpha_i = g^{-1}(a\alpha_i),$$

así que, $\chi_{V_{g^{-1}x}}(h^g) = \chi_{V_x}(h)$. □

Evaluamos el homomorfismo $\mathscr{S}_{H,c}$ en los basicos $[K,S]$, y del anterior lema obtenemos que

$$\mathscr{S}_{H,c}([K,S]) = \sum_{\substack{a\in[G/K] \\ H\leq^a K}} \chi_S(c^a). \tag{4.4}$$

Ejemplo: 14 *Sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Consideremos la notación del ejemplo 12.*

Sean $C_2 = \{I,(12)\}$ y $c = (12)$, entonces

$$\mathscr{S}_{C_2,c}([C_2,V_i]) = \sum_{\substack{a\in[S_3/C_2] \\ C_2\leq^a C_2}} \chi_{V_i}(c^a) = \chi_{V_i}(c) = \begin{cases} 1, & si\ i=1 \\ -1, & si\ i=2 \end{cases}$$

Sean $A_3 =< (123) >$ y $b = (123)$. Consideremos $\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ la raíz cúbica primitiva de la unidad, puesto que $[S_3/A_3] = \{(12), I\}$, de la tabbla 3.1 tenemos que

$$\mathscr{S}_{A_3,b}([A_3,W_i]) = \mathscr{S}_{A_3,b^2}([A_3,W_i]) = \chi_{W_i}(b) + \chi_{W_i}(b^2) = \begin{cases} 1 & si & i=1 \\ -1 & si & i=2 \\ -\frac{7}{16} & si & i=3 \end{cases}.$$

$$\mathscr{S}_{A_3,b}([S_3,M_i]) = \chi_i(b) = \begin{cases} 1 & si & i=1 \\ 1 & si & i=2 \\ -1 & si & i=3 \end{cases}$$

Sea $\mathscr{E} = \{(H,b)|H \leq G,\ b \in H\}$, se tiene que $\mathscr{E}$ es un G–conjunto bajo la acción:

$$g(H,b) = ({}^gH, {}^gb), \forall\ g \in G, \forall\ H \leq G,\ \forall\ b \in H.$$

Ahora se estudiará la relación entre los pares (H,b) con los pares $[K,S]$ donde K es un subgrupo de G y S es un $\mathbb{C}K$–módulo simple.

Si H es un subgrupo de G claramente $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$, donde $N_G(H)$ actúa en $\mathbb{C}H$ por conjugación, sea $x = \sum_{h\in H} \lambda_h h \in \mathbb{C}H$ y así

$$lx = \sum_{h\in H} \lambda_h {}^l h, \forall l \in N_G(H)$$

y $N_G(H)$ actúa en $R(H)$ por conjugación,

Definición 28 *Sea $H \leq G$. Para cada $b \in H$ se define*

$$\overline{b} = \sum_{x\in[N/C_N(b)]} {}^x b, \tag{4.5}$$

donde $N = N_G(H)$.

La ecuación 4.5 no depende de los representantes de $N/C_N(b)$, si tenemos que $xC_N(b) = yC_N(b)$, implica que $x^{-1}y \in C_N(b)$, esto es que ${}^{x^{-1}y}b = b$, entonces ${}^y b = {}^x b$. Además, $\overline{b} \in \mathbb{C}H$.

Definición 29 *Para cada caracter irreducible χ_S de H definimos*

$$\overline{\chi_S} = \sum_{x\in[N/C_N(S)]} \chi_{{}^xS}, \tag{4.6}$$

donde $N = N_G(H)$.

Notemos que si $xC_N(S) = yC_N(S)$, $y^{-1}x \in C_N(S)$, así que, ${}^{y^{-1}x}S \cong S$, entonces ${}^xS \cong {}^yS$, lo que implica que $\chi_{{}^xS} = \chi_{{}^yS}$, se sigue que $\overline{\chi_S}$ no depende de los representantes de $N/C_N(S)$, entonces 4.6 está bien definida.

Lema 17 *El conjunto de elementos de $\mathbb{C}H$ que quedan fijos bajo la acción de $N_G(H)$, denotado por $(\mathbb{C}H)^{N_G(H)}$, es una $\mathbb{C}$–álgebra con base $\{\overline{b} | b \in H\}$.*

Demostración. Denotamos $N = N_G(H)$. Así, tenemos que

$$(\mathbb{C}H)^N = \{\sum_{h\in H} \lambda_h h | \sum_{h\in H} \lambda_h {}^a h = \sum_{h\in H} \lambda_h h \text{ para todo } a \in N\},$$

donde $(\mathbb{C}H)^N \leq \mathbb{C}H$, claramente $(\mathbb{C}H)^N$ es una $\mathbb{C}$–álgebra. Tenemos que N actúa a la izquierda en H por conjugación, sea $[N\backslash H] = \{h_1, \ldots, h_r\} \subseteq H$, demostraremos que $B = \{\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_r}\}$ es una base de $(\mathbb{C}H)^N$.

Tomamos $a \in N$ y $h_i \in [N \setminus H]$ tenemos que

$$N = \bigsqcup_{i=1}^{r} xC_N(h_i)$$

Tomamos $a \in N$ y $h_i \in [N \setminus H]$ tenemos que,

$$N = \bigsqcup_{i=1}^{r} xC_N(h_i)$$

sin embargo ,

$$N = aN = \bigsqcup_{i=1}^{r} xC_N(h_i).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
{}^{a}(\overline{h_i}) &= {}^{a}\left(\sum_{x \in [N/C_N(h_i)]} {}^{x}h_i\right) \\
&= \sum_{x \in [N/C_N(h_i)]} {}^{a}({}^{x}h_i) \\
&= \sum_{x \in [N/C_N(h_i)]} {}^{ax}h_i \\
&= \overline{h_i}
\end{aligned}$$

así que, $h_i \in (\mathbb{C}H)^N$.

Ahora, consideremos $\overline{h_i} \neq \overline{h_j}$. Supongamos que existen $x \in [N/C_N(h_i)]$ y $y \in [N/C_N(h_j)]$ tales que ${}^{x}h_i = {}^{y}h_j$, $h_i = {}^{x^{-1}y}h_j$ lo cual implica que $\overline{h_i} = \overline{h_j}$ que es una contradicción, entonces ${}^{x}h_i \neq {}^{y}h_j$ para todo $x \in [N/C_N(h_i)]$ y $y \in [N/C_N(h_j)]$, concluimos que B es linealmente independiente.

Lo siguiente es demostrar que todo elemento $\sum_{h \in H} \lambda_h h \in (\mathbb{C}H)^N$ está generado por B. Sea $a \in N$, tenemos que

$$\sum_{h \in H} \lambda_h {}^{a}h = {}^{a}\left(\sum_{h \in H} \lambda_h h\right) = \sum_{h \in H} \lambda_h h,$$

entonces ,

$$\sum_{h\in H}\lambda_h{}^a h=\sum_{h\in H}\lambda_{{}^a h}{}^a h.$$

se sabe que los elementos de H son linealmente independientes, así que, para cada $h\in H$

$$\lambda_h=\lambda_{{}^a h},$$

y en consecuencia,

$$\sum_{h\in H}\lambda_h h=\sum_{h\in[H\backslash N]}\lambda_h(\overline{h})=\sum_{1\leq i\leq r}\lambda_{h_i}(\overline{h_i}),$$

por lo tanto, B es una base de $(\mathbb{C}H)^N$.

$\square$

Teorema 4.2.1 *Sean $H\leq G$ y $N=N_G(H)$. Entonces $(R(H))^N$ es una $\mathbb{C}$–álgebra con base $\{\overline{\chi_S}|S$ es un $\mathbb{C}H-$módulo simple$\}$*

Demostración. Sean $S\in Irr(H)$ y $a\in N$, tenemos que

$$\begin{aligned}
a(\overline{\chi_S})&=a\left(\sum_{x\in[N/C_N(S)]}\chi_{{}^x S}\right)\\
&=\sum_{x\in[N/C_N(S)]}a(\chi_{{}^x S})\\
&=\sum_{x\in[N/C_N(S)]}\chi_{{}^{xa}S}\\
&=\sum_{x\in[N/C_N(S)]}\chi_{{}^x S}\\
&=\overline{\chi_S},
\end{aligned}$$

se sigue que $\overline{\chi_S}\in(R(H))^N$.

Denotemos $\mathfrak{A}=\{{}^a S|a\in[N/C_N(H)]\}$, por demostrar que $\mathfrak{A}$ es una base de $(R(H))^N$. Supongamos que $\overline{\chi_S}\neq\overline{\chi_T}$, entonces

$$\sum_{x\in[N/C_N(S)]}\chi_{{}^x S}\neq\sum_{y\in[N/C_N(T)]}\chi_{{}^y T}$$

Si existen $x \in [N/C_N(S)]$ y $y \in [N/C_N(T)]$ tales que $\chi_{{}^xS} = \chi_{{}^yT}$, entonces ${}^xS \cong {}^yT$, implica que ${}^{y^{-1}x}S \cong T$ y por lo tanto $\chi_S = \chi_T$, que es una contradicción. Así, $\chi_{{}^xS} = \chi_{{}^yT}$ para todo $x \in [N/C_N(S)]$ y $y \in [N/C_N(T)]$, concluimos que $\mathfrak{A}$ es linealmente independiente.
Ahora, demostraremos que $\mathfrak{A}$ genera a $(R(H))^N$, sea

$$\sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \chi_S \in (R(H))^N$$

si $a \in N$, tenemos que

$$\sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \chi_{{}^aS} = a\left(\sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \chi_S\right) = \sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \chi_S$$

lo cual implica que

$$\sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \chi_{{}^aS} = \sum_{S \in irr(H)} \lambda_{{}^aS} \chi_{{}^aS},$$

entonces $\lambda_S = \lambda_{{}^aS}$ para todo $S \in irr(H)$, por lo tanto,

$$\sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \chi_S = \sum_{S \in irr(H)} \lambda_S \overline{\chi_S}.$$

se sigue que $\mathfrak{A}$ es una base de $(R(H))^N$.

$\square$

Así, obtenemos los dos isomorfismos de $\mathbb{C}$–álgebras

$$(\mathbb{C}H)^N \cong \bigoplus_{b \in [N \backslash H]} \mathbb{C}\overline{b}, \quad \text{y} \quad \mathbb{C}(R(H))^N \cong \sum_{S \in [N \backslash R(H)]} \mathbb{C}\overline{S}.$$

Teorema 4.2.2 *Sea $H \leq G$. Consideremos la siguiente aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \langle\, , \,\rangle : & (\mathbb{C}H)^N \times \mathbb{C}(R(H))^N & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\overline{b}, \overline{\chi_S}) & \longrightarrow & \langle \overline{b}, \overline{\chi_S} \rangle = \chi_S\left(\sum_{x \in [N/H]} b^x\right), \end{array}$$

donde $b \in H$ y S es un $\mathbb{C}H$-módulo simple. Entonces $\langle\, , \,\rangle$ es una forma bilineal bien definida, en particular las dimensiones de $(\mathbb{C}H)^N$ y $\mathbb{C}(R(H))^N$ coinciden.

Demostración. La aplicación $\langle\ ,\ \rangle$ está bien definida:

Primero consideramos $S \in irr(H)$ fijo y suponemos que $\overline{b} = \overline{c}$, entonces existe $a \in N$ tal que $b = c^a$, y tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{b}, \overline{\chi_S} \rangle &= \chi_S \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \\
&= \chi_S \left(\sum_{x \in [N/H]} c^{ax} \right) \\
&= \sum_{x \in [N/H]} \chi_S (c^{ax}) \\
&= \sum_{x \in [N/H]} \chi_{{}^{ax}S} (c) \\
&= \sum_{x \in [N/H]} \chi_{{}^{x}S} (c) \\
&= \langle \overline{c}, \overline{\chi_S} \rangle.
\end{aligned}$$

Ahora, tomamos $\overline{b}$ fijo y supongamos que $S \cong T$, entonces $\chi_S = \chi_T$, así,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{b}, \overline{\chi_S} \rangle &= \chi_S \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \\
&= \chi_T \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \\
&= \langle \overline{b}, \overline{\chi_T} \rangle.
\end{aligned}$$

se sigue que $\langle\ ,\ \rangle$ está bien definida.

La función $\langle\ ,\ \rangle$ es una forma bilineal no degenerada:

Primero consideramos $b_0 \in (\mathbb{C}H)^N$ fijo, tal que

$$b_0 = \sum_{b \in [N/H]} \lambda_{\overline{b}} \overline{b},$$

y $\langle \overline{b_0}, \overline{\chi_S} \rangle = 0$ para todo $S \in irr(H)$, de la bilinealidad de $\langle\ ,\ \rangle$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{b_0}, \overline{\chi_S} \rangle &= \sum_{b \in [N/H]} \lambda_{\overline{b}} \langle \overline{b}, \overline{\chi_S} \rangle \\
&= \sum_{b \in [N/H]} \lambda_{\overline{b}} \chi_S \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \\
&= \chi_S \left(\sum_{b \in [N/H]} \lambda_{\overline{b}} \left(\sum_{x \in [N/H]} b^x \right) \right)
\end{aligned}$$

entonces,

$$\chi_S\left(\sum_{b\in[N/H]}\lambda_{\overline{b}}\left(\sum_{x\in[N/H]}b^x\right)\right)=0$$

se sigue que ,

$$\sum_{b\in[N/H]}\lambda_{\overline{b}}\left(\sum_{x\in[N/H]}b^x\right)=0$$

para cada $b\in[N/H]$ sea $\theta_b=\sharp\{a\in[N/H]|\overline{a}=\overline{b}\}$, así,

$$\theta_b\sum_{b\in[N/H]}\lambda_{\overline{b}}\left(\sum_{x\in[N/H]}b^x\right)=0$$

para cada $b\in[N/H]$ se tiene $\theta_b>0$, entonces $\lambda_{\overline{b}}=0$, implica que $b_0=0$.

Ahora, sea $S_0\in R(H)^N$ fijo tal que

$$S_0=\sum_{S\in[N\backslash irr(H)]}\lambda_{\overline{S}}\overline{\chi_S},$$

y $\langle\overline{b},\overline{\chi_{S_0}}\rangle=0$ para todo $b\in H$, de la bilinealidad de $\langle\ ,\ \rangle$ se tenemos que

$$\begin{aligned}\langle\overline{b},\overline{\chi_{S_0}}\rangle&=\langle\overline{b},\sum_{S\in[N\backslash irr(H)]}\lambda_{\overline{S}}\overline{\chi_S}\rangle\\&=\sum_{S\in[N\backslash irr(H)]}\lambda_{\overline{S}}\langle\overline{b},\overline{\chi_S}\rangle\\&=\sum_{S\in[N\backslash irr(H)]}\lambda_{\overline{S}}\chi_S\left(\sum_{x\in[N/H]}b^x\right)\\&=\sum_{S\in[N\backslash irr(H)]}\lambda_{\overline{S}}\left(\sum_{x\in[N/H]}\chi_S(b^x)\right)\\&=\sum_{S\in[N\backslash irr(H)]}\lambda_{\overline{S}}\left(\sum_{x\in[N/H]}\chi_{{}^xS}(b)\right).\end{aligned}$$

Para cada $S\in irr(H)$ tenemos que $H\leq C_N(S)\leq N$ y tenemos que

$$\begin{aligned}N&=\bigsqcup_{x\in[N/C_N(S)]}xC_N(S)\\&=\bigsqcup_{x\in[N/C_N(S)]}x\left(\bigsqcup_{y\in[C_N(S)/H]}yH\right)\\&=\bigsqcup_{x\in[N/C_N(S)]}\left(\bigsqcup_{y\in[C_N(S)/H]}xyH\right).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle \overline{b}, \overline{\chi_{S_0}} \rangle = \sum_{S \in [N\backslash irr(H)]} \lambda_{\overline{S}} \left(\sum_{x \in [N/C_N(S)]} \left(\sum_{y \in [C_N(S)/H]} \chi_{yx_S}(b) \right) \right),$$

puesto que $\chi_{yx_S} = \chi_{x_S}$ para cada $y \in [C_N(S)/H]$, se sigue que

$$\langle \overline{b}, \overline{\chi_{S_0}} \rangle = \sum_{S \in [N\backslash irr(H)]} \left(\sum_{x \in [N/C_N(S)]} \lambda_{\overline{S}} |C_N(S)/H| \chi_{x_S}(b) \right) = 0.$$

el conjunto $\{{}^xS | x \in [N/C_N(S)], S \in [N/irr(H)]\}$ es linealmente independiente, entonces $\lambda_{\overline{S}} = 0$ para todo $S \in [N/irr(H)]$, así que, $S_0 = 0$. Por lo tanto, $\langle\ ,\ \rangle$ es no degenerada en ambas variables.

□

Proposición 4.2.4 *Sean $H, K \leq G$, $a \in H$ y $b \in K$. Entonces $\mathscr{S}_{H,a} = \mathscr{S}_{K,b}$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ y ${}^ga = b$.*

Demostración. Supongamos que existe $g \in G$ tal que ${}^gH = K$ y ${}^ga = b$. Entonces se tiene que

$$\mathscr{S}_{H,a}(X, V) = \sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_{V_x}(a) = \sum_{\substack{x \in X \\ K^g \leq G_x}} \chi_{V_x}(b^g)$$

Note que si $K^g \leq G_x$ implica que $K \leq {}^g(G_x) = G_{gx}$, así, hacemos el cambio de variable $y = gx$, entonces

$$\mathscr{S}_{H,a}(X, V) = \sum_{\substack{g^{-1}y \in X \\ K \leq G_y}} \chi_{V_{g^{-1}y}}(b^g)$$

Tomando en cuenta que $V_{g^{-1}y} = g^{-1}V_y$ y de las propiedades de los caracteres se sigue que que para cada $h \in H$ se cumple,

$$\chi_{V_{g^{-1}y}}(h^g) = \chi_{g^{-1}V_y}(h^g) = \chi_{V_y}(h^g)^{-1} = \chi_{V_y}(h).$$

Entonces,

$$\mathscr{S}_{H,a}(X, V) = \sum_{\substack{y \in X \\ K \leq G_y}} \chi_{V_y}(b) = \mathscr{S}_{K,b}(X, V).$$

Ahora, supongamos que existen $H, K \leq G$, $a \in H$ y $b \in K$ tal que $\mathscr{S}_{H,a} = \mathscr{S}_{K,b}$. Evaluamos en $[K, \mathbb{C}]$ y tenemos que

$$\varphi_H(G/K) = \mathscr{S}_{H,a}[K, \mathbb{C}] = \mathscr{S}_{K,b}[K, \mathbb{C}] = \varphi_K(G/K) = |N_G(K)/K| \neq 0,$$

entonces $H \leq_G K$, y por un argumento similar evaluando en $[H, \mathbb{C}]$ tenemos que $K \leq_G H$.
Sin perdida de generalidad escogemos $g \in G$, así que

$$K = {}^g({}^{g^{-1}}K) \leq {}^gH \leq K,$$

entonces ${}^gH = K$. Nos falta demostrar que a y b son conjugados en $N_G(K)$, para esto consideremos que para todo $\mathbb{C}K$–módulo simple S tenemos que

$$\mathscr{S}_{K,b}[K,S] = \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ K \leq^x K}} \chi_{{}^xS}(b) = \sum_{x \in [N_G(K)/K]} \chi_S(b^x) = \langle \overline{b}, \overline{\chi_S} \rangle$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{K,{}^ga}[K,S] &= \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ K \leq^x K}} \chi_{{}^xS}({}^ga) \\
&= \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ K \leq^x K}} \chi_S(({}^ga)^x) \\
&= \sum_{x \in [N_G(K)/K]} \chi_S({}^{xg}a) \\
&= \langle \overline{{}^ga}, \overline{\chi_S} \rangle
\end{aligned}$$

De la primera parte se sigue que $\mathscr{S}_{H,a} = \mathscr{S}_{{}^gH,{}^ga} = \mathscr{S}_{K,{}^ga}$ y como $\mathscr{S}_{H,a} = \mathscr{S}_{K,b}$, entonces

$$\langle \overline{{}^ga}, \overline{\chi_S} \rangle = \langle \overline{b}, \overline{\chi_S} \rangle$$

el Teorema4.2.2 implica que $\overline{{}^ga} = \overline{b}$, entonces existe $x \in N_G(K)$ tal que $b = {}^{xg}a$. Sea $y = xg$, entonces ${}^yH = {}^{xg}H = {}^x({}^gH) = {}^xK = K$ y ${}^ya = b$, como se deseaba.

□

Lema 18 *Para cada subgrupo H de G y para los morfismos $\mathscr{S}_{H,b}$ se tiene que*

$$\bigcap_{(H,b) \in \mathscr{E}} Ker(\mathscr{S}_{H,b}) = 0$$

Demostración. Para esto se define la aplicación

$$\begin{array}{rccl}
\overline{\mathscr{S}}: & \mathbb{D}(G) & \longrightarrow & \prod_{(H,b)\in\mathscr{E}} \mathbb{C} \\
 & [K,S] & \longrightarrow & (\mathscr{S}_{H,b}([K,S]))_{(H,b)\in\mathscr{E}}
\end{array}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
Ker(\overline{\mathscr{S}}) &= \{[K,S] | \forall (H,b) \in \mathscr{E}, \mathscr{S}_{H,b}([K,S]) = 0\} \\
&= \{[K,S] | \forall (H,b) \in \mathscr{E}, [K,S] \in Ker(\mathscr{S}_{H,b})\} \\
&= \bigcap_{(H,b)\in\mathscr{E}} Ker(\mathscr{S}_{H,b}),
\end{aligned}$$

De la Proposición 4.1.2 se sigue que $\{[H,S] | H \leq G, S \in Irr(H)\}$ es base de $\mathbb{D}(G)$. Supongamos que $H_1, \ldots, H_n$ son todos los subgrupos de G (hasta isomorfismo), de tal forma que $H_1 = \{1\}$, $H_n = G$ y $|H_i| < |H_j|$ si $i < j$.

Del Teorema 3.2.2 se tiene que $[G/H_i]$ y $irr(H_i)$ tienen la misma cardinalidad para todo i. Sean $[G/H_i] = \{b_1^i, \ldots, b_{r_i}^i\}$ y $irr(H_i) = \{S_1^i, \ldots, S_{r_i}^i\}$. Denotamos por A a la matriz asociada a $\overline{\mathscr{S}}$, que tiene entradas $\mathscr{S}_{H,b}([K,S])$, esta matriz tiene bloques A_{ij} con entradas $\mathscr{S}_{H_i,b_k^i}([H_j, S_l^j])$ y tienen las siguientes propiedades

1. Si $i > j$ entonces $A_{ij} = 0$.
   Puesto que $|H_i| > |H_j|$, entonces $H_i \nleqq {}^x H_j$, así, se tiene que

$$\mathscr{S}_{H_i,b}([H_j, S]) = \sum_{\substack{x \in [G/H_j] \\ H_i \leq^x H_j}} \chi_{{}^x S}(b) = 0.$$

2. A_{ii} tiene (k,l) entradas igual a $\langle \overline{b_k^i}, \overline{S_l^i} \rangle$.

$$\begin{aligned}
(A_{ii})_{kl} &= \mathscr{S}_{H_i,b_k^i}([H_i, S_l^i]) \\
&= \sum_{\substack{x \in [G/H_i] \\ H_i \leq^x H_i}} \chi_{{}^x S_l^i}(b_k^i) \\
&= \sum_{x \in [N_G(H_i)/H_i]} \chi_{{}^x S_l^i}(b_k^i) \\
&= \sum_{x \in [N_G(H_i)/H_i]} \chi_{S_l^i}((b_k^i)^x) \\
&= \chi_{S_l^i}\left(\sum_{x \in [N_G(H_i)/H_i]} (b_k^i)^x \right) \\
&= \langle \overline{b_k^i}, \overline{S_l^i} \rangle
\end{aligned}$$

Del Teorema 4.2.2 se sigue que A_{ii} es una matriz bilineal y no degenerada, por lo tanto es una matriz invertible. Concluimos que $Det(A) = Det(A_{11})Det(A_{22})(A_{nn}) \neq 0$, entonces A es invertible y por lo tanto $\overline{\mathscr{S}}$ es biyectiva, en particular $Ker(\overline{\mathscr{S}}) = 0$, es decir, $\bigcap_{(H,b)\in\mathscr{E}} Ker(\mathscr{S}_{H,b}) = 0$.

□

Definición 30 *La matriz cuadrada cuyas filas son indexadas por $[H,b]$ y en las columnas por $[K,S]$, cuyas entradas son $\mathscr{S}_{H,b}([K,S])$ es la **tabla de especies**. Esta matriz consiste en bloques (dados por las clases de conjugación de los subgrupos de G) en la diagonal, ceros bajo la diagonal y el último bloque de la diagonal es la tabla de caracteres. Esta matriz es invertible.*

Ejemplo: 15 *Sea $C_2 =< x >$ el grupo cíclico multiplicativo de orden dos.*

Consideremos, los caracteres lineales χ_1, y χ_2 de C_2, como en el ejemplo 10 inciso a), entonces

$$\chi_i(x) = (-1)^{i-1}.$$

La tabla de especies de C_2 es:

$$\chi(C_n) = \begin{array}{c} \\ (\{1\},1) \\ (C_2,1) \\ (C_2,x) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [\{1\},\mathbb{C}] & [C_2,V_1] & [C_2,V_2] \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cuadro 4.1: Tabla de especies de C_2.

Teorema 4.2.3 *Sean R un anillo conmutativo, $a_1,\ldots,a_n \in R$ generadores de R como grupo abeliano y $f_1,\ldots,f_n$ homomorfismos de anillos de R a $\mathbb{C}$. Si la matriz $(f_i(a_j))$ es invertible, entonces $\{a_1,\ldots,a_n\}$ es una base de R sobre $\mathbb{Z}$ y cualquier homomorfismo de anillos de R a $\mathbb{C}$ es uno de los f_i.*

Demostración. Puesto que R es generado por $a_1,\ldots,a_n$, tenemos que

$$R = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i,$$

para ver que $\{a_1,\ldots,a_n\}$ es linealmente independiente, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$, entonces

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_1(a_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_n(a_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j) \\ \vdots \\ f_n(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

como $(f_i(a_j))$ es invertible, se sigue que $\lambda_i = 0$ para cada $i = 1,\ldots,n$, entonces $\{a_1,\ldots,a_n\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto, $\{a_1,\ldots,a_n\}$ es una base de R sobre $\mathbb{Z}$.

Ahora, sea $\psi : R \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de anillos. Para cada f_i se extiende

$$1 \otimes f_i : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R \to \mathbb{C}$$

que en los básicos está definido por $1 \otimes f_i(c \otimes r) = c f_i(r)$. Consideremos, el homomorfismo de anillos

$$f : \mathbb{C} \otimes R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C},$$

en los básicos está dada por $f(c \otimes r) = (c f_i(r))_i$, y se extiende linealmente a todo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Además, f tiene como matriz asociada a la matriz $(f_i(a_j))$ que por hipótesis es invertible, así que, f es un isomorfismo.
Notemos que para cada i se cumple que $1 \otimes f_i = \pi_i \circ f$, donde π_i es la i–ésima proyección canónica de $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$. Además, tenemos el homomorfismo

$$(1 \otimes \psi) \circ f^{-1} : \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

pero los únicos morfismos de este tipo son las proyecciones, entonces existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $(1 \otimes \psi) \circ f^{-1} = \pi_j$, esto es que, $1 \otimes \psi = \pi_j \circ f = 1 \otimes f_j$ en consecuencia $\psi = f_j$.

$\square$

Definición 31 *Definimos el automorfismo de anillos $\sigma : \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G)$ que manda (X,V) a (X,V^*), donde $V^* = Hom_{\mathbb{C}G}(V,\mathbb{C})$.*

Tenemos que X es un G–conjunto y V es un $\mathbb{C}G$–módulo X–graduado con $V = \bigoplus_{x\in X} V_x$, entonces

$$V^* = Hom_{\mathbb{C}G}(V,\mathbb{C}) = Hom_{\mathbb{C}G}(\bigoplus_{x\in X} V_x,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{x\in X} Hom_{\mathbb{C}G}(V_x,\mathbb{C}) = \bigoplus_{x\in X} (V_x)^*$$

además, $g(V_x)^* \subseteq (V_{gx})^*$, se trata de un isomorfismo de $\mathbb{C}G$–módulos X–graduados, entonces σ tiene sentido. A partir de los siguientes resultados se demuestra que σ es un morfismo de anillos,

Proposición 4.2.5 *Para cada (H,b), con $H \leq G$ y $b \in H$, se cumple que*

$$\mathscr{S}_{H,b} \circ \sigma = \mathscr{S}_{H,b^{-1}}.$$

Demostración. Sean $H \leq G$ y $b \in H$, de las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.1 se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,b} \circ \sigma((X,V)) &= \mathscr{S}_{H,b}(\sigma(X,V)) \\
&= \mathscr{S}_{H,b}(X,V^*) \\
&= \sum_{\substack{x\in X \\ H\leq G_x}} \chi_{V^*}(b^x) \\
&= \sum_{\substack{x\in X \\ H\leq G_x}} \chi_{V}((b^{-1})^x) \\
&= \mathscr{S}_{H,b^{-1}}.
\end{aligned}$$

□

Notemos que si $(X,V),(Y,W) \in \mathbb{D}(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,b}(\sigma((X,V)\otimes(Y,W))) &= \mathscr{S}_{H,b^{-1}}((X,V)\otimes(Y,W)) \\
&= \mathscr{S}_{H,b^{-1}}(X,V)\mathscr{S}_{H,b^{-1}}(Y,W) \\
&= \mathscr{S}_{H,b}(\sigma(X,V))\mathscr{S}_{H,b}(\sigma(Y,W)) \\
&= \mathscr{S}_{H,b}(\sigma(X,V)\otimes\sigma(Y,W)),
\end{aligned}$$

puesto que $\mathscr{S}_{H,b}$ es un homomorfismo inyectivo, entonces

$$\sigma((X,V)\otimes(Y,W)) = \sigma(X,V)\otimes\sigma(Y,W),$$

es decir, σ es un homomorfismo de anillos.

Para concluir la sección se construye un homomorfismo de anillos entre el anillo de Burnside $B(G)$ y el anillo global de representaciones $\mathbb{D}(G)$ con el que se demuestra que $B(G)$ es un subanillo de $\mathbb{D}(G)$.

Teorema 4.2.4 *Se define la aplicación entre $B(G)$ y $\mathbb{D}(G)$.*

$$\gamma : B(G) \to \mathbb{D}(G)$$

dado por $\gamma(X) = (X, \mathbb{C})$ para cada $X \in B(G)$. Tenemos que γ es un homomorfismo de anillos inyectivo y existe un homomorfismo $\beta : \mathbb{D}(G) \to B(G)$ tal que $\beta\gamma \cong id_{B(G)}$.

Demostración. Sea $H \leq G$, entonces

$$\gamma(G/H) = (G/H, ind_H^G(\mathbb{C}) = [H, \mathbb{C}]$$

Para demostrar que γ es un homomorfismo de anillos basta comprobar las propiedades en los básicos de $B(G)$. Si se tiene que $G/H \cong G/K$, entonces $H = {}^gK$ para algún $g \in G$, de la Proposición 4.2.3 se sigue que $[H, \mathbb{C}] \cong [K, \mathbb{C}]$, así, γ está bien definida.
Además, γ manda unidad en unidad, puesto que $\gamma(G/G) = [G, \mathbb{C}]$. Ahora, sean H y K subgrupos de G, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{H,b} \circ \sigma((X,V)) &= \mathscr{S}_{H,b}(\sigma(X,V)) \\
&= \mathscr{S}_{H,b}(X, V^*) \\
&= \sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_{V^*}(b^x) \\
&= \sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_V((b^{-1})^x) \\
&= \mathscr{S}_{H,b^{-1}}.
\end{aligned}$$

En la demostración del lema 15 se demostró que

$$G/H \times G/K \cong \bigcup_{x \in [H \backslash G/K]} \frac{G}{H \cap {}^xK},$$

así que,

$$\gamma(G/H \times G/K) = \sum_{x \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^xK, \mathbb{C}]$$

Por otro lado, $\gamma(G/H)\gamma(G/K) = [H, \mathbb{C}][K, \mathbb{C}]$ y del lema 15 se tiene que

$$\begin{aligned}
[H, \mathbb{C}][K, \mathbb{C}] &= \sum_{x \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^xK, res^H_{H \cap {}^xK}(\mathbb{C}) res^{{}^xK}_{H \cap {}^xK}(\mathbb{C})] \\
&= \sum_{x \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^xK, \mathbb{C}].
\end{aligned}$$

Entonces $\gamma(G/H)\gamma(G/K) = \gamma(G/H \times G/K)$, por lo tanto γ es un homomorfismo de anillos.
El homomorfismo γ es inyectivo, ya que si existen subgrupos H, K de G tales que $\gamma(G/H) = \gamma(G/K)$, es decir, $[H, \mathbb{C}] = [K, \mathbb{C}]$, entonces existe $g \in G$ tal que ${}^{g}H = K$, y así $G/H \cong G/K$.
Se define $\beta : \mathbb{D}(G) \to B(G)$ dada por $\beta(X, V) = X$ para cada generador (X, V) de $\mathbb{D}(G)$, se puede verificar que β es un homomorfismo de anillos, y se tiene que

$$\beta\gamma(G/H) = \beta(G/H, ind_H^G(\mathbb{C})) = G/H,$$

entonces $\beta\gamma = id_{B(G)}$.

□

Teorema 4.2.5 *Se define la aplicación θ del anillo de representaciones de G al anillo global de representaciones de G, que en los básico de $R(G)$ está dada por $\theta(S) = (\cdot, S)$ para cada $\mathbb{C}G$–módulo S. Entonces θ es un homomorfismo de anillos y existe un homormorfismo*

$$\alpha : \mathbb{D}(G) \to R(G)$$

dada por $\alpha(X, V) = V$ y $\alpha\theta = id_{R(G)}$.

Demostración. Se tiene que $\theta(\mathbb{C}) = (\cdot, \mathbb{C})$. Sean S y T $\mathbb{C}G$–módulos, entonces

$$\begin{aligned} \theta(S \otimes T) &= (\cdot, S \otimes T) \\ &= (\cdot, S) \otimes (\cdot, T) \\ &= \theta(S) \otimes \theta(T), \end{aligned}$$

implica que θ es un homomorfismo de anillos.
Sea $\alpha : \mathbb{D}(G) \to R(G)$ dada por $\alpha(X, V) = V$, α está bien definida. Se tiene que $\alpha(\cdot, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y además

$$\begin{aligned} \alpha((X, V) \otimes (Y, W)) &= \alpha(X \times Y, V \otimes W) \\ &= V \otimes W \\ &= \alpha(X, V) \otimes \alpha(Y, W). \end{aligned}$$

entonces α es un homomorfismo de anillos. Sea S u $\mathbb{C}G$–módulo, se tiene que

$$\alpha\theta(S) = \alpha(\theta(S)) = \alpha(\cdot, \mathbb{C}) = S = id_{R(G)}(S),$$

se sigue que, $\alpha\theta = id_{R(G)}$. □

4.3. Ideales primos del anillo $\mathbb{D}(G)$.

En este sección denotaremos con n al orden de G.Sea ω una n–ésima raíz compleja primitiva de la unidad.

Para cada subgrupo H de G y $b \in H$ denotamos por $P_{H,b}$ en kernel de

$\mathscr{S}_{H,b}$, y por $\mathscr{S}_{H,b}$ la imagen de $\mathscr{S}_{H,b}$ en $\mathbb{Z}[w]$. Además, sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\mathbb{Z}[w]$, consideremos el siguiente diagrama

$$\mathbb{D}(G) \xrightarrow{\mathscr{S}_{H,b}} \mathbb{Z}[w] \xrightarrow{\pi} \frac{\mathbb{Z}[w]}{\mathfrak{m}}$$

donde π es el morfismo proyección. Sea $\overline{\mathscr{S}^{\mathfrak{m}}_{H,b}}$ la composición de $\mathscr{S}_{H,b}$ con π, denotamos por $P_{H,b,\mathfrak{m}}$ el kernel de $\overline{\mathscr{S}^{\mathfrak{m}}_{H,b}}$.

Teorema 4.3.1 *Sean K un subgrupo de G. Si existen $b, y \in K$ tales que $by = yb$ y el orden de y es p^k, entonces $\mathscr{S}_{K,b}(z) - \mathscr{S}_{K,by}(z) \in \mathfrak{m}$ para todo $z \in \mathbb{D}(G)$ y todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de característica p.*

Demostración. De la Proposición 4.1.2 se tiene que $\mathbb{D}(G)$ está generado por lo elementos de la forma $[H,S]$, con $H \leq G$ y $S \in Irr(H)$, entonces es suficiente demostrar el resultado en $z = [H,S]$, así,

$$\mathscr{S}_{K,b}([H,S]) - \mathscr{S}_{K,by}([H,S]) = \sum_{\substack{x \in [G/H] \\ K \leq^x H}} \chi_S(b^x) - \chi_S((by)^x).$$

Puesto que b y y conmutan, entonces las aplicaciones lineales b_l y y_l como en 3.17 se diagonalizan simultáneamente, sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ la base tal que lo anterior se cumple, entonces $b^x v_i = u_i v_i$ y $y^x v_i = t_i v_i$ tal que $t_i^{p^k} = 1$. Entonces,

$$\chi_S(b^x) - \chi_S(b^x y^x) = \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i t_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i (1 - t_i).$$

Además, $(1-t_i)^{p^k} \equiv 0 (mod\ \mathfrak{m})$, entonces $1 - t_i \in \mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de característica p. Por lo tantoo, $\mathscr{S}_{K,b}([H,S]) - \mathscr{S}_{K,by}([H,S]) \in \mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de característica p. □

Corolario 4.3.2 *Sean H un subgrupo de G. Si existen $b, y \in H$ tales que $by = yb$ y el orden de y es p^k, entonces $P_{H,b,\mathfrak{m}} = P_{H,by,\mathfrak{m}}$, para todo ideal máximal $\mathfrak{m}$ de característica p.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de característica p, del anterior Teorema se tiene que $\mathscr{S}_{K,b}(z) - \mathscr{S}_{K,by}(z) \in \mathfrak{m}$ para todo $z \in \mathbb{D}(G)$. Consideremos el morfismo proyección $\pi : \mathbb{Z}[w] \to \mathbb{Z}[w]/\mathfrak{m}$, se tiene que

$$\overline{\mathscr{S}^{\mathfrak{m}}_{H,b}}(z) - \overline{\mathscr{S}^{\mathfrak{m}}_{H,b}}(z) = \pi(\mathscr{S}_{K,b}(z)) - \pi(\mathscr{S}_{K,by}(z)) = \pi(\mathscr{S}_{K,b}(z) - \mathscr{S}_{K,by}(z)) = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{D}(G)$, entonces $Ker(\overline{\mathscr{S}^{\mathfrak{m}}_{H,b}}) = Ker(\overline{\mathscr{S}^{\mathfrak{m}}_{H,b}})$, así, $P_{H,b,\mathfrak{m}} = P_{H,by,\mathfrak{m}}$. □

Del lema 18 se tiene que $\cap P_{H,b} = 0$, entonces si se considera un ideal primo P de $\mathbb{D}(G)$ se sigue que $\cap P_{H,b} < P$ y por el lema 1 se tiene que existen $H \leq G$ y $b \in H$ tales que $P_{H,b} \leq P$. Así, $P/P_{H,b}$ es un ideal del anillo $\mathbb{D}(G)/P_{H,b} \cong Im_{H,b} \leq \mathbb{Z}[\omega]$, entonces es el ideal cero o es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[\omega]$, en el primer caso será $P = P_{H,b}$ y si se tiene el segundo caso por el Teorema Going-up 1.1.5 se sigue que

$$P = \mathfrak{m} \cap Im_{H,b},$$

para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\omega]$, entonces

$$P = \mathscr{S}_{H,b}^{-1}(\mathfrak{m}) = P_{H,b,\mathfrak{m}}.$$

Por lo tanto,

$$Spec(\mathbb{D}(G)) = \{P_{H,a}\ ,\ P_{K,b,\mathfrak{m}} | \mathfrak{m} \in Max\{\mathbb{Z}[\omega]\}, H, K \leq G\ a \in H,\ b \in K\}$$

El siguiente paso es describir las componentes conexas del espectro primo del anillo $\mathbb{D}(G)$. Note que $P_{H,a}$ está contenido en $P_{H,a,\mathfrak{m}}$, para todo subgrupo H de G, $a \in H$ e ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\omega]$, entonces todos estos ideales pertenecen a la misma componente del espectro primo del anillo global de representaciones $\mathbb{D}(G)$.

Teorema 4.3.3 *Sea K un subgrupo de G. Para cada $c \in K$ se tiene que $P_{K,c}$ y $P_{K,1}$ están en la misma componente conexa de $Spec(\mathbb{D}(G))$.*

Demostración. Por el Teorema fundamental de la Aritmética o teorema de factorización única tenemos que el orden de c es un número primo o bien un único producto de números primos $o(c) = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$. El elemento c puede escribirse de manera única como el producto de elementos $c_1, \ldots, c_t$ que conmutan entre sí, con órdenes $p_1^{r_1}, \ldots, p_t^{r_t}$, respectivamente. Además, $c_1, \ldots, c_t$ son potencias de c, esto es,

$$c = c_1 \cdots c_t,$$

donde $o(c_i) = p_i^{r_i}$. Para cada primo p_i tomamos un ideal maximal $\mathfrak{m}_i$ de característica p_i, entonces $P_{H,c}$ y $P_{H,c,\mathfrak{m}}$ están en la misma componente conexa. Por el Corolario 4.3.2 se tiene que $P_{H,c,\mathfrak{m}} = P_{H,c_2\cdots c_t,\mathfrak{m}}$ y este ideal está en la componente conexa de $P_{H,c_2\cdots c_t}$. Continuando de esta forma se obtiene que los ideales $P_{H,c_3\cdots c_t}$, $\ldots, P_{H,c_t}$, $P_{H,1}$ pertenecen a la misma componente conexa de $Spec(\mathbb{D}(G))$. $\square$

Teorema 4.3.4 *Sea K un subgrupo de G. Si $L \trianglelefteq K$ tal que $|K/L| = p$ es un número primo, entonces $P_{K,1}$ y $P_{L,1}$ están en la misma componente conexa del espectro primo de $\mathbb{D}(G)$.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.2 es suficiente demostrar el resultado en los elementos $[H, S]$, con $H \leq G$ y $S \in Irr(H)$, entonces

$$\mathscr{S}_{L,1}([H,S]) - \mathscr{S}_{K,1}([H,S]) = (\varphi_L(G/H) - \varphi_K(G/H)) dim S.$$

Si X es un G–conjunto se tiene que

$$\varphi_L(X) - \varphi_K(X) = |X^L| - |X^K|.$$

Puesto que $K \leq N_G(L)$, K actúa en X^L, entonces X^L es un K/L–conjunto, y así,

$$|X^L - X^K| = pr \in p\mathbb{Z}$$

Entonces,

$$\mathscr{S}_{L,1}([H,S]) - \mathscr{S}_{K,1}([H,S]) = (pr)dimS$$

Tomamos un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de característica p, entonces

$$P_{K,1,\mathfrak{m}} = P_{L,1,\mathfrak{m}},$$

Puesto que $P_{K,1}$ y $P_{K,1,\mathfrak{m}}$ están en la misma componente conexa, y $P_{L,1}$ con $P_{L,1,\mathfrak{m}}$ están en la misma componente conexa de $Spec(\mathbb{D}(G))$, por lo tanto, $P_{K,1}$ y $P_{L,1}$ están en la misma componente conexa de $Spec(\mathbb{D}(G))$. □

Corolario 4.3.5 *Sea K un subgrupo de G. Si $L \trianglelefteq K$ tal que $|K/L| = p$ es un número primo, entonces $P_{K,1,\mathfrak{m}}$ y $P_{L,1,\mathfrak{m}}$ están en la misma componente conexa, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\omega]$ de característica p.*

Corolario 4.3.6 *Sea K un subgrupo de G, entonces $P_{K,1}$ y $P_{O^s(K),1}$ están en la misma componente conexa.*

Teorema 4.3.7 *Sea $H \leq G$. Si $P_{H,b}$ está contenido en un ideal primo P de $\mathbb{D}(G)$, entonces $P = P_{H,b}$ o existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\omega]$, tal que $P = P_{H,b,\mathfrak{m}}$.*

Demostración. Supongamos que $P \neq P_{H,b}$, entonces $P/P_{H,b}$ es un ideal no trivial de $\mathbb{D}(G)/P_{H,b} \cong Im_{H,b} \leq \mathbb{Z}[\omega]$, entonces es el ideal cero o es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[\omega]$, así, se tiene el segundo caso y por el Teorema Going-up 1.1.5 se sigue que

$$P = \mathfrak{m} \cap Im_{H,b},$$

para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\omega]$, entonces

$$P = \mathscr{S}_{H,b}^{-1}(\mathfrak{m}) = P_{H,b,\mathfrak{m}}.$$

□

Sea P_G el conjunto de subgrupos perfectos de G, es decir,

$$P_G = \{H \leq G | O^S(H) = H\}.$$

note que P_G es un G–conjunto bajo la acción $gH = gHg^{-1}$ para cada $g \in G$ y $H \in P_G$, puesto que $O^S(gHg^{-1}) = gO^S(H)g^{-1} = gHg^{-1}$, la acción está bien definida. Para cada $H \in P_G$ sea

$$X_H = \{P_{K,a},\ P_{K,a,\mathfrak{m}} | K \leq G, a \in K, \mathfrak{m} \in Max(\mathbb{Z}[\omega])\ O^S(K) =_G H\}$$

donde $Max(\mathbb{Z}[\omega])$ es el conjunto de ideales maximales de $\mathbb{Z}[\omega]$. Note que $X_H \subseteq Spec(\mathbb{D}(G))$, para todo $H \in P_G$.

Teorema 4.3.8 *El conjunto $\{X_H | H \in [G \backslash P_G]\}$ contiene las componentes conexas distintas de $Spec(\mathbb{D}(G))$.*

Demostración. Sean H y K subgrupos de G. Si $P_{K,a} \in X_H$ el Teorema 4.3.3 implica que $P_{K,a}$ y $P_{K,1}$ están en la misma componente conexa, puesto que $O^S(K) = H$, $P_{K,1}$ está en la misma componente conexa que $P_{H,1}$. Para cualquier otro ideal P_K o $P_{K,p}$ de X_H debe pertenecer a la misma componente conexa que $P_{K,1}$, entonces X_H está contenida en una componente conexa del espectro primo del anillo $\mathbb{D}(G)$.

Si $P \in Spec(\mathbb{D}(G))$, $P = P_{H,b}$ o $P = P_{H,b,\mathfrak{m}}$, para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\omega]$, puesto que $O^S(O^S(H)) = O^S(H)$, entonces $P \in X_{O^S(H)}$, así,

$$\mathbb{D}(G) = \bigsqcup_{H \in [G \backslash P_G]} X_H.$$

Además, se tiene que $X_H \subseteq \cup_{O^S(K) =_G H} V(P_{K,c})$, y del Teorema 4.3.7 se tiene que los ideales primos que contienen a $P_{K,c}$ deben ser de la forma $P_{K,b,\mathfrak{m}}$, entonces

$$X_H = \bigcup_{O^S(K) =_G H} V(P_{K,c})$$

Por lo tanto, X_H es cerrado y abierto, entonces X_H es conexo.

□

Corolario 4.3.9 *Los ideales $P_{K,c,\mathfrak{m}}$ y $P_{L,d,\mathfrak{n}}$ están en la misma componente conexa del espacio $Spec(\mathbb{D}(G))$ si y sólo si $O^S(K) = O^S(L)$.*

Recordando, en las preliminares de este trabajo en el Teorema 1.1.6 se demostró que existe una correspondencia uno a uno entre los idempotentes primitivos de $\mathbb{D}(G)$ y las componentes conexas de $Spec(\mathbb{D}(G))$, entonces

Teorema 4.3.10 *El número de idempotentes primitivos de $\mathbb{D}(G)$ es igual a el número de las clases de conjugación de subgrupos perfectos de G.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.1.6 y que $\{X_H | H \in [G \backslash P_G]\}$ son las componentes conexas distintas de $Spec(\mathbb{D}(G))$.

$\square$

Por el homomorfismo inyectivo $\gamma : B(G) \to \mathbb{D}(G)$ del Teorema 4.2.4 se puede considerar al anillo de Burnside $B(G)$ como un subanillo del anillo $\mathbb{D}(G)$ y así se tiene que,

Corolario 4.3.11 *Los idempotentes primitivos del anillo $\mathbb{D}(G)$ coincide con los idempotentes primitivos del anillo $B(G)$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{D}(G)$ y su subanillo $B(G)$ tienen el mismo número de idempotentes primitivos, entonces los idempotentes primitivos de $\mathbb{D}(G)$ coincide con los idempotentes primitivos de $B(G)$.

$\square$

Consideremos la biyección $\overline{\mathscr{S}}$ del lema 18

$$\begin{array}{rccc} \overline{\mathscr{S}}: & \mathbb{D}(G) & \longrightarrow & \prod_{(H,b)\in\mathscr{E}} \mathbb{Z}[\omega] \\ & [K,S] & \longrightarrow & (\mathscr{S}_{H,b}([K,S]))_{(H,b)\in\mathscr{E}} \end{array}$$

Ahora, se describe la factorización de los idempotentes primitivos $e_{K,c}$ en $\prod_{(H,b)\in\mathscr{E}} \mathbb{Z}[\omega]$ usando los elementos de $\mathbb{D}(G)$.

Teorema 4.3.12 *Sean $K \leq G$ y $c \in K$. Entonces*

$$\begin{aligned} e_{K,c} &= \frac{1}{|N_G(K) \cap C_G(c)|} \sum_{\substack{(H,S), H \leq G \\ S \in Irr(H)}} \overline{\dot{\chi}_S(c)} \mu(H,K)[H,S]. \\ &= \frac{1}{|N_G(K) \cap C_G(c)|} \sum_{\substack{(H,S), c \in H \leq G \\ S \in Irr(H)}} \chi_S(c) \mu(H,K)[H,S] \end{aligned}$$

Se toman los subgrupos H de G (salvo subgrupos conjugados) y un conjunto de representantes S de los $\mathbb{C}H-$módulos irreducibles. La expresión $\dot{\chi}_S(c)$ es igual a $\chi_S(c)$ siempre que c este en H, y 0 en otro caso.

Demostración. En esta demostración será $z = \sum_{\substack{(H,S), H \leq G \\ S \in Irr(H)}} \overline{\dot{\chi}_S(c)} \mu(H,K)[H,S]$.

Entonces basta demostrar que

$$\mathscr{S}_{L,d}(z) = \begin{cases} |N_G(K) \cap C_G(c)|, & \text{si } (L,d) =_G (K,c) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero supongamos que d no es conjugado a c en G, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{L,d}(z) &= \sum_{\substack{(H,S),H\leq G\\ S\in Irr(H)}} \overline{\dot{\chi}_S(c)}\mu(H,K)\mathscr{S}_{L,d}([H,S]) \\
&= \sum_{\substack{(H,S),H\leq G\\ S\in Irr(H)}} \overline{\dot{\chi}_S(c)}\mu(H,K) \sum_{\substack{x\in[G/H]\\ L\leq^x H}} \chi_S(d^x) \\
&= \sum_{H\leq G} \frac{1}{|H|} \sum_{x\in G} \left(\sum_{S\in Irr(H)} \overline{\dot{\chi}_S(c)}\chi_S(d^x) \right) \zeta(L^x,H)\mu(H,K)
\end{aligned}$$

Usando la relación de ortogonalidad del Teorema 3.2.7 se tiene que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{H\leq G} \frac{1}{|H|} \sum_{x\in G} (0)\zeta(L^x,H)\mu(H,K) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $d = c$, pero que no existe $g \in C_G(c)$ tal que ${}^gL = K$. Usando nuevamente la relación de ortogonalidad, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{L,d}(z) &= \mathscr{S}_{L,c}(z)) \\
&= \sum_{\substack{(H,S),H\leq G\\ S\in Irr(H)}} \overline{\dot{\chi}_S(c)}\mu(H,K) \sum_{\substack{x\in[G/H]\\ L\leq^x H}} \chi_S(c^x) \\
&= \sum_{H\leq G} \frac{1}{|H|} \sum_{x\in G} \left(\sum_{S\in Irr(H)} \overline{\dot{\chi}_S(c)}\chi_S(c^x) \right) \zeta(L^x,H)\mu(H,K) \\
&= \sum_{H\leq G} \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x\in G\\ c^x=_H c}} |C_H(c)|\zeta(L^x,H)\mu(H,K)
\end{aligned}$$

Sea $\{c_1,\ldots,c_r\}$ la orbita de c bajo conjugación por los elementos de H, con $r = |H|/|C_H(c)|$, y $c_i = c^{h_i}$. Entonces,

$$= \sum_{H\leq G} \frac{|C_H(c)|}{|H|} \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{x\in G\\ c^x=c_i}} \zeta(L^x,H)\mu(H,K)$$

Note que, $c^x = c_i = c^{h_i}$ si y sólo si $c^{xh_i^{-1}} = c$, y si $L^x \leq H$, entonces $L^{xh_i} \leq H$, haciendo el cambio de variable $x = xh_i$ y considerando que $r = |H|/|C_H(c)|$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&= \sum_{H\leq G} \sum_{\substack{x\in G\\ c^x=c}} \zeta(L^x,H)\mu(H,K) \\
&= \sum_{x\in C_G(c)} \left(\sum_{H\leq G} \zeta(L^x,H)\mu(H,K) \right)
\end{aligned}$$

puesto que $\mu = \zeta^{-1}$, pero no existe $g \in C_G(c)$ tal que ${}^gL = K$, entonces

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x \in C_G(c)} \left(\sum_{H \leq G} \zeta(L^x, H)\mu(H, K) \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Finalmente, supongamos que $(L, d) =_G (K, c)$, de la Proposición 4.2.4 se sigue que

$$\mathscr{S}_{L,d}(z) = \mathscr{S}_{K,c}(z)$$

análogo al caso anterior se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{H \leq G} \sum_{x \in G, c^x = c} \zeta(L^x, H)\mu(H, K) \\
&= \sum_{x \in C_G(c)} \left(\sum_{H \leq G} \zeta(K^x, H)\mu(H, K) \right) \\
&= |N_G(K) \cap C_G(c)|
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\mathscr{S}_{L,d}(e_{K,c}) = \begin{cases} 1, & \text{si } (L,d) =_G (K,c) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

□

Ejemplo: 16 *Sea S_3 el grupo simétrico de orden 3. Consideremos los representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de S_3 que son $\{\{I\}, C_2, A_3\}$.*

Tenemos 2 módulos irreducibles de C_2, dados por los $\mathbb{C}$−espacios vectoriales unidimensinales V_1 y V_2, como en el ejemplo 10. El subgrupo A_3 tiene tres modulos irreducibles W_1, W_2 y W_3. El grupo S_3 tiene tres tres modulos irreducibles M_1, M_2 y M_3 como en el ejemplo 10. Sean $c = (12)$ y $b = (123)$.

$$
\begin{aligned}
e_{\{I\},I} &= \tfrac{1}{6}[\{I\},\mathbb{C}].\\
e_{C_2,I} &= -\tfrac{1}{2}[\{I\},\mathbb{C}]+\tfrac{1}{2}[C_2,V_1]+\tfrac{1}{2}[C_2,V_2].\\
e_{C_2,c} &= \tfrac{1}{2}[C_2,V_1]-\tfrac{1}{2}[C_2,V_2].\\
e_{A_3,I} &= -\tfrac{1}{6}[\{I\},\mathbb{C}]+\tfrac{1}{6}[A_3,W_1]+\tfrac{1}{6}[A_3,W_2]+\tfrac{1}{6}[A_3,W_3].\\
e_{A_3,b} &= \tfrac{1}{3}[A_3,W_1]+\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{6}[A_3,W_2]-\tfrac{2+i\sqrt{3}}{12}[A_3,W_3].\\
e_{S_3,I} &= \tfrac{1}{2}[\{I\},\mathbb{C}]-\tfrac{1}{2}[C_2,V_1]-\tfrac{1}{2}[C_2,V_2]-\tfrac{1}{6}[A_3,W_1]-\tfrac{1}{6}[A_3,W_2]-\tfrac{1}{6}[A_3,W_3]\\
&\quad +\tfrac{1}{6}[S_3,M_1]+\tfrac{1}{6}[S_3,M_2]+\tfrac{1}{2}[S_3,M_3].\\
e_{S_3,c} &= -\tfrac{1}{2}[C_2,V_1]+\tfrac{1}{2}[C_2,V_2]+\tfrac{1}{2}[S_3,M_1]-\tfrac{1}{2}[S_3,M_2].\\
e_{S_3,b} &= -\tfrac{1}{3}[A_3,W_1]-\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{6}[A_3,W_2]+\tfrac{2+i\sqrt{3}}{12}[A_3,W_3]+\tfrac{1}{3}[S_3,M_1]+\tfrac{1}{3}[S_3,M_2]+\\
&\quad -\tfrac{1}{3}[S_3,M_3].
\end{aligned}
$$

Además, $e_{\{I\},1}+e_{C_2,I}+e_{C_2,I}+e_{A_3,I}+e_{A_3,I}+e_{S_3,I}+e_{S_3,I}+e_{S_3,I}=[S_3,\mathbb{C}]$

Bibliografía

[Alperin Bell] ALPERIN, J. L.; BELL, ROWEN B., *Groups and representations.* Graduate Texts in Mathematics, 162. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Atiyah-Macdonald] M. ATIYAH, I. G. MACDONALD., *Introducción al Álgebra Commutativa.* Ed Reverté, Barcelona (1973).

[Boltje] BOLTJE, ROBERT.,*Representation rings of finite groups, their species and idempotent formulae.*, Preprints from the author's homepage athttp://boltje.math.ucsc.edu, 2001.

[Boltje] BOLTJE, ROBERT., *Monomial resolutions.* J. Algebra 246 (2001), no. 2, 811˘848.

[Bouc] SERGE BOUC, *Burnside rings.* Université Paris 7–Denis Diderot, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05. France.

[Bouc] BOUC, SERGE ,*Green functors and G-sets.* Lecture Notes in Mathematics, 1671. Springer-Verlag, Berlin, 1997. $viii + 342$ pp. ISBN: $3-540-63550-5$.

[Bourbaki] BOURBAKI, N., *Algebre Commutative.* Chapitres 1 á 4, 5 á 7, 8 et 9. Hermann, Paris, $1961-1965$; ' Reimpression: Masson, Paris, 1985; Réimpression: Springer Verlag, Berlin, 2006. Traducción al ingles: Commutative Algebra. Chapters 1 to 7. Addison-Wesley, Reading, and Hermann, Paris, 1972.

[Cardona] KARLEY TATIANA CARDONA ECHENIQUE., *El funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos de Green*, Tesis: M.C. en Ciencias Matemáticas UNAM, Morelia-Michiacan, Febrero de 2016.

[Dress] ANDREAS DRESS,*The ring of monomial representations. I Structure theory.* J.Algebra 18 (1971) 137˘157.

[Dress] Dress, Andreas W. M.,*Contributions to the theory of induced representations. Algebraic K-theory, II: Classical algebraic K-theory and connections with arithmetic* (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle,Wash., 1972), pp. 183˘240. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973.

[Hall Marshall] Hall, Marshall., *Theory of Groups*. The Macmillan Company, Nueva York, 1959.

[Navarro] Juan A. Navarro Gonzáles., *Álgebra Commutativa Básica*. Universidad de Extremadura.Servicio de Publicaciones; Edición: 1 (16 de enero de 1997)ISBN: 9788477232667.

[Raggi-Valero] Alberto Gerardo Raggi Cárdenas, Luis Valero Elizondo., *Global representation rings*. J.Algebra 441 (2015), 426 – 440. $19A22$.

[Yoshida] Tomoyuki Yoshida, *Idempotents of Burnside Rings and Dress Induction Theorem*. Department of Mathematics, Hokkaido University, Spporo, Japan, Communicated by W. Feit, Received July 5, 1980.

[Zaldívar] Felipe Zaldívar., *Introducción al Álgebra Commutativa*. 16 de Febrero de 2011.