



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**PROPIEDADES PROYECTIVAS DE GRÁFICAS
DE FUNCIONES POLINÓMICAS REALES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
MIGUEL ÁNGEL GUADARRAMA GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL
ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COMITÉ TUTOR
FELIPE DE JESÚS ZALDÍVAR CRUZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

COMITÉ TUTOR
ERNESTO ROSALES GONZÁLES
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Adriana Ortiz por todo su tiempo, paciencia, entusiasmo, generosidad, apoyo, y confianza que me ha brindado durante todo el tiempo que ha sido mi tutora. Sin sus enseñanzas e impulso este trabajo no hubiera sido posible. Es un honor para mi aprender de ella.

A Ernesto Rosales porque estuvo al tanto de mi trabajo y siempre dispuesto a apoyarme y escucharme.

A Felipe Zaldívar por sus consejos y por su apoyo durante mis estudios de doctorado.

A Fuensanta Aroca quien me invito a una estancia en la unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas. Agradezco la hospitalidad durante este periodo.

A Jesús Muciño por impulsarme a mejorar por medio de todos sus comentarios y preguntas. Agradezco su invitación al seminario de Singularidades del Centro de Ciencias Matemáticas.

A Federico Sánchez por haber aceptado ser sinodal de este trabajo.

A Xavier Gomez-Mont por todos sus comentarios y por el viaje que realizó a la Ciudad de México con motivo de mi examen de candidatura.

A Laura Ortiz porque directa e indirectamente recibí su soporte.

A Iván y Alberto, quienes me hicieron volver a vivir la pasión por las matemáticas.

A mis padres y hermanos, gracias por todo.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM por permitirme ser becario en magna institución.

A CONACyT por la beca que me otorgó durante mis estudios de doctorado.

Agradezco a los proyectos PAPIIT IN102413 y CONACyT CB-219722.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	v
I Propiedades proyectivas de superficies no singulares	1
1 Curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$	3
1.1 Restricciones sobre la topología de las curvas algebraicas reales	3
1.2 Clases de isotopía de las curvas proyectivas de grado $d \leq 6$	9
2 Geometría de superficies	11
2.1 Clasificación de los puntos de una superficie genérica	11
2.2 Campos de direcciones asintóticas en superficies genéricas	14
2.3 Superficies duales de superficies genéricas.	19
2.4 Antecedentes al estudio de curvas Hessianas	20
2.5 Geometría afín de la gráfica de una función polinómica real	22
2.6 Otras propiedades de los puntos PE	31
Apéndice al capítulo 2	34
3 Formas diferenciales cuadráticas binarias	37
3.1 Formas diferenciales cuadráticas	37
3.2 Extensión de una ecuación diferencial cuadrática binaria a la recta al infinito . . .	39

4 Campos de direcciones asintóticas. Extensión a la recta al infinito	51
4.1 La forma diferencial cuadrática inducida por $II(S_f)$	51
4.2 Dominios hiperbólico y elíptico contenidos en $\mathbb{R}P^2$	54
4.3 Índice de Poincaré de los puntos singulares en la recta al infinito	58
4.4 Fórmulas tipo Poincaré-Hopf	66
4.5 Cotas superiores para los puntos PE con tangencias interiores y exteriores	70
4.6 Superficies S_f con dominio hiperbólico contenido en B^+	71
4.7 Gráficas de polinomios hiperbólicos	73
4.8 Algunas restricciones para gráficas de polinomios	74
II Teoría clásica de invariantes y Curvas Hessianas	77
5 Teoría clásica de invariantes de polinomios homogéneos	79
5.1 Introducción	79
5.2 Invariantes y covariantes	80
5.3 Bases de Hilbert	83
5.4 Formas normales de las formas binarias complejas y reales de grado 4	84
5.5 Polinomios Hessianos de las formas normales reales	86
6 Gráficas de polinomios de grado cuatro	93
6.1 Configuraciones de las curvas Hessianas de grado 4	93
6.2 Polinomios homogéneos Hessianos de grado cuatro	98
Bibliografía	99

Introducción

Clásicamente, los puntos de una superficie no singular en \mathbb{R}^3 se pueden clasificar en elípticos, parabólicos ó hiperbólicos de acuerdo al signo que toma la curvatura Gaussiana en cada uno de éstos.

A finales del siglo XIX se introdujo una clasificación de los puntos de una superficie no singular S en $\mathbb{R}P^3$, y en consecuencia para una superficie no singular en \mathbb{R}^3 , basada en el máximo orden de contacto que tiene S con sus rectas tangentes en cada punto. En esta tesis consideramos este concepto de orden de contacto para estudiar la estructura geométrica de superficies genéricas en \mathbb{R}^3 . Más específicamente, este trabajo está centrado en el estudio geométrico-diferencial de las superficies algebraicas genéricas de grado n de la forma $S_f^n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - f(x, y) = 0\}$, donde $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio de grado n . Para motivar y enunciar el concepto de "superficie genérica" para S_f^n , presentamos primeramente la clasificación de los puntos de una superficie genérica en $\mathbb{R}P^3$.

Superficies genéricas en $\mathbb{R}P^3$. Una recta $L \subset T_p S$ es una *dirección asintótica en p* si L tiene orden de contacto con S , en p , mayor o igual que tres.

Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ es *genérica* en el espacio de superficies de clase C^∞ en $\mathbb{R}P^3$ si cada uno de sus puntos pertenece a uno de los siguientes 7 tipos.

- (1) Un punto $p \in S$ es *elíptico* si toda recta en $T_p S$ tiene orden de contacto con S , en p , igual a dos.
- (2) Un punto p es *parabólico genérico* si tiene una única dirección asintótica y ésta tiene orden de contacto con S , en p , igual a tres.
- (3) Un punto p es *parabólico especial* si tiene una única dirección asintótica, la cual tiene orden de contacto con S , en p , igual a cuatro. Dicho punto será denotado con (PE).
- (4) Un punto p es *hiperbólico genérico* si hay exactamente dos direcciones asintóticas en p , que además cada una de éstas tienen orden de contacto con S , en p , igual a tres.

- (5) Un punto p es de *inflexión genérico* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas; una de las cuales tiene orden de contacto con S , en p , igual a tres y la otra tiene orden de contacto igual a cuatro.
- (6) Un punto p es *hiperbólico especial* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas en p , las cuales tienen orden de contacto con S , en p , igual a cuatro.
- (7) Un punto p es de *bi-inflexión* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas, una de las cuales tiene orden de contacto con S , en p , igual a tres y otra igual a cinco.

E. E. Landis demostró que el máximo orden de contacto que una recta $L \subseteq T_p S$ puede tener con una superficie genérica S en $\mathbb{R}P^3$, en p , es cinco (ver referencia [46]).

O. A. Platonova (ver [58]) demostró que el conjunto \mathcal{G} de superficies genéricas del espacio de superficies compactas y de clase C^∞ en $\mathbb{R}P^3$ es un subconjunto abierto de dicho espacio, que también es denso en todas partes.

Cabe resaltar que los 7 tipos de puntos antes mencionados son invariantes bajo transformaciones proyectivas del espacio $\mathbb{R}P^3$. Observemos que la definición de los 7 tipos de puntos es de carácter local, por ésto, las mismas definiciones hacen sentido para gráficas de las funciones polinómicas. De esta manera, la descripción de la estructura geométrica de las gráficas de funciones polinómicas genéricas es análoga a la de las superficies genéricas en $\mathbb{R}P^3$. Los puntos parabólicos especiales (PE) también son conocidos como cúspides de Gauss o godrones (este último término es debido a R. Thom [42]).

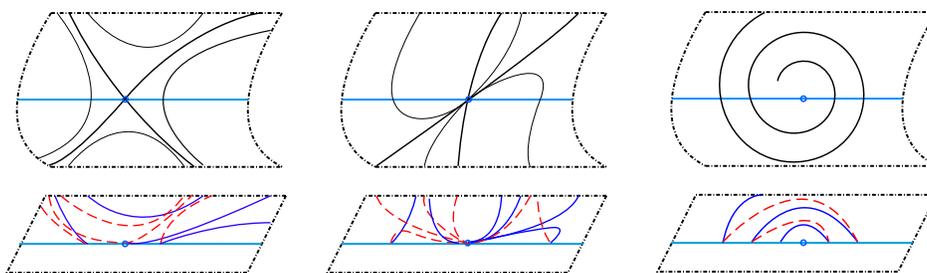
Estructura geométrica de superficies genéricas en $\mathbb{R}P^3$. El *dominio elíptico* de una superficie genérica S está formado por sus puntos elípticos. El *dominio hiperbólico* de S está constituido por los puntos de S que tienen dos direcciones asintóticas distintas (es decir, los puntos de los tipos (4), (5), (6) y (7)). Estos dos subconjuntos de S son abiertos y no necesariamente conexos. La *curva parabólica* de S está formada por los puntos parabólicos genéricos (2) y los parabólicos especiales (3). Esta curva es la frontera común de los dominios elíptico e hiperbólico. La *curva flecnodal* de S está formada por los puntos del dominio hiperbólico que tienen al menos una dirección asintótica con orden de contacto mayor o igual que cuatro (es decir, los puntos de los tipos (5), (6) y (7)). Esta curva se autointerseca en los puntos hiperbólicos especiales de S y su cerradura es tangente a la curva parabólica en los puntos parabólicos especiales. La unión de los conjuntos de puntos parabólicos especiales, hiperbólicos especiales y de bi-inflexión es un subconjunto finito de S (que incluso puede ser vacío).

Un *campo de direcciones asintóticas* de S está formado por direcciones asintóticas de S . En el complemento del dominio elíptico de S hay dos campos de direcciones asintóticas continuos

(L. Dara en [21] y A. Davydov en [22] demostraron que localmente estos campos de direcciones son continuos). Dichos campos, también tienen la propiedad de ser transversales entre sí en cada punto del dominio hiperbólico y de coincidir en cada punto de la curva parabólica de S . La única recta asintótica en un punto parabólico genérico es transversal a la curva parabólica, mientras que la única recta asintótica en un punto parabólico especial es tangente a la curva parabólica.

Las *curvas asintóticas de $S \subseteq \mathbb{R}P^3$* son las curvas integrales de los campos de direcciones asintóticas de dicha superficie. R. Uribe también ha contribuido al estudio de los campos de direcciones asintóticas y sus curvas integrales (ver [67]). En 2006, demostró que las curvas integrales de uno de los campos de direcciones asintóticas de S tienen torsión negativa en cada uno de sus puntos. Así mismo, las curvas integrales del otro campo de direcciones asintóticas de S tienen torsión positiva en cada uno de sus puntos.

En una vecindad de un punto parabólico genérico, el conjunto de las curvas asintóticas de ambos campos son difeomorfas a una familia de parábolas semicúbicas de la forma $u^2 = v^3 + c$ (ver [42] y [4] pág. 27). Mientras que en una vecindad de un punto (PE) la unión de las dos familias de curvas asintóticas se comporta topológicamente de tres formas distintas (ver [22], [10], [42], [21]). Cada forma se distingue de acuerdo al tipo de punto singular (silla, nodo o foco) que tiene cierto campo vectorial ξ asociado a los campos de direcciones asintóticas y que es tangente a la doble cubierta del dominio hiperbólico. Esta superficie está contenida en el *espacio de 1-jets de funciones $y(x)$, $\{(x, y, p) \mid p = dy/dx\}$* . La figura 1 ilustra cada uno de los tipos topológicos. T. Banchoff y R. Thom [10] mostraron que un punto parabólico especial p es un punto de tangencia interior (exterior) si a p le corresponde un punto singular de tipo silla (nodo o foco) en ξ , ver figura 1.



– Figura 1 –

Gráficas de funciones polinómicas de grado n genéricas en \mathbb{R}^3 . Ahora consideremos las superficies algebraicas $S_f^n \subseteq \mathbb{R}^3$ de grado n tales que cada una de ellas es la gráfica una función

polinómica $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$. Para extender la noción de superficie genérica a superficies la forma S_f^n necesitamos introducir varios conceptos de curvas algebraicas reales.

Definición. La *curva Hessiana* de un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n , es la curva algebraica en \mathbb{R}^2 de grado a lo más $2n - 4$:

$$\text{Hess}f(x, y) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x, y) = 0.$$

Definición. Una *curva algebraica en $\mathbb{R}P^2$ de grado n* es, salvo factores constantes no nulos, un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ de grado n . Al conjunto de ceros de una curva F en $\mathbb{R}P^2$ también le llamaremos curva algebraica real.

Definición. La *curva Hessiana proyectiva* asociada a f es la curva algebraica en $\mathbb{R}P^2$, $H(x, y, z) = 0$, donde $H \in \mathbb{R}[x, y, z]$ es el polinomio homogéneo que satisface que $H(x, y, 1) = \text{Hess}f(x, y)$.

Al espacio de superficies algebraicas S_f^n que son la gráfica de una función polinómica $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n lo denotamos con \mathcal{S}^n .

Definición. Dado $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 4$, la superficie algebraica S_f^n de grado n es *genérica* en el espacio \mathcal{S}^n si satisface las siguientes condiciones:

- (i) Cada punto de S_f^n pertenece a uno de los siete tipos de puntos.
- (ii) La curva Hessiana proyectiva asociada a f es una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado $2n - 4$.

Cuando $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio de grado $n = 3$, decimos que S_f^3 es *genérica* en el espacio \mathcal{S}^3 si satisface la condición (ii) y cada uno de los puntos de S_f^3 pertenece a los tipos (1),(2),(3),(4) ó a alguno de los siguientes tipos.

- (5') Un punto p es de *inflexión* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas; una de las cuales tiene orden de contacto con S , en p , igual a tres y la otra tiene orden de contacto mayor o igual a cuatro.
- (6') Un punto p es *hiperbólico especial* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas, las cuales tienen orden de contacto con S , en p , al menos cuatro.

Las superficies S_f^n que satisfacen la condición (i) de la definición anterior forman un subconjunto denso en todas partes del conjunto superficies algebraicas \mathcal{S}^n , el cual se obtiene de la intersección numerable de subconjuntos abiertos de dicho conjunto. Esto es consecuencia del teorema fuerte de transversalidad de Thom ([4], pág. 231).

Problemas principales y resultados. Consideremos una superficie $S_f^n \in \mathcal{S}^n$.

P1 ¿Qué condiciones debe satisfacer el polinomio f para que la curva parabólica de S_f^n sea compacta o, no compacta?

P2 ¿Cómo se distribuyen las componentes conexas de los dominios hiperbólicos y elípticos y, de la curva parabólica en S_f^n ?

P3 ¿Cuál es el número máximo de puntos parabólicos especiales con tangencia interior que puede tener una superficie genérica S_f^n ?, ¿y cuántos con tangencia exterior?

Con respecto a las preguntas P1 y P2, obtuvimos un criterio (Teorema 1) para determinar cuándo la curva parabólica de una superficie S_f^n genérica es compacta y cuándo C_u , la cerradura en \mathbb{R}^2 de la componente no acotada del complemento, en \mathbb{R}^2 , de la curva Hessiana de f , es *hiperbólica* o *elíptica* (es decir, cuando el interior de C_u consiste de puntos hiperbólicos o elípticos, respectivamente).

Un polinomio homogéneo $g \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ es *hiperbólico* (*elíptico*) si su Hessiano es negativo (positivo) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Teorema 1 Consideremos $f = \sum_{i=m}^n f_i \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, donde f_i es la componente homogénea de grado i de f . Si f_n es un polinomio homogéneo hiperbólico (elíptico), entonces la curva Hessiana de f es compacta en \mathbb{R}^2 y C_u es hiperbólica (elíptica).

Nótese que las conclusiones del Teorema 1 fueron establecidas por I. Hernández, A. Ortiz y F. Sánchez en [35], pero con una hipótesis adicional a las del Teorema 1 (ver la primera parte del teorema 2.16).

Una consecuencia del Teorema 1 es el siguiente.

Corolario 1 Consideremos $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n se factoriza como el producto de n factores lineales reales distintos cuyos ceros son rectas distintas. Entonces la curva Hessiana de f es compacta en \mathbb{R}^2 y C_u es hiperbólica.

También obtuvimos las siguientes propiedades de polinomios hiperbólicos y elípticos

Lema 1 (a) Si $g \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo hiperbólico, entonces g tiene al menos un factor lineal real. Además, cada factor lineal real de g tiene multiplicidad 1.

(b) Si $g \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo elíptico, entonces g no tiene factores lineales reales.

Todos estos resultados dan respuestas a las preguntas P1 y P2 cuando la curva parabólica de S_f^n es compacta.

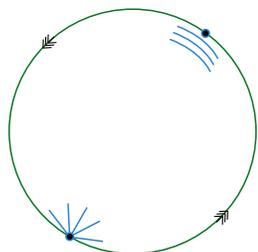
Para dar respuesta a la pregunta P3 realizamos lo siguiente. Los campos de direcciones asintóticas de una superficie S_f^n están determinados globalmente por la ecuación diferencial cuadrática binaria

$$II(S_f^n) = f_{xx}(x, y) dx^2 + 2f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2 = 0.$$

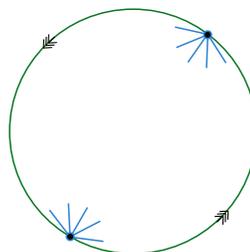
Denotemos con \mathbb{X} la extensión al plano proyectivo real de uno de los campos de direcciones asintóticas determinados por la ecuación $II(S_f^n) = 0$ en \mathbb{R}^2 .

Observación 1 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n no tiene factores repetidos. Sea m el número de factores lineales reales de f_n .

1. Si n es impar, entonces \mathbb{X} tiene m puntos singulares en la recta al infinito de tipo topológico igual al de la figura 2. En particular, el índice de Poincaré de \mathbb{X} en cada uno de estos puntos singulares es igual a $\frac{1}{2}$.
2. Si n es par, entonces \mathbb{X} tiene $\frac{m}{2}$ puntos singulares en la recta al infinito de tipo nodo (ver figura 3). En particular, el índice de Poincaré de \mathbb{X} en cada uno de estos puntos singulares es igual a 1.



– Figura 2 –



– Figura 3 –

Una consecuencia de la observación 1 es lo siguiente.

Observación 2 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n no tiene factores repetidos. Si m es el número de factores lineales reales de f_n , entonces

$$0 \leq \sum \text{Ind}([q]) = \frac{m}{2} \leq \frac{n}{2},$$

donde la suma corre sobre los m puntos singulares $[q]$ del campo \mathbb{X} , que están en la recta al infinito.

Si además suponemos que la curva Hessiana proyectiva tiene intersección no vacía y transversal con la recta al infinito, entonces

$$0 \leq \sum \text{Ind}([q]) = \frac{m}{2} \leq \frac{n-2}{2}.$$

Sea $B^\delta = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}$ con $\begin{cases} \delta = + \text{ si } B^\delta \text{ es una superficie orientable,} \\ \delta = - \text{ si } B^\delta \text{ no es orientable.} \end{cases}$

Teorema 2 Consideremos $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que S_f^n es una superficie genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es transversal a la recta al infinito y que el dominio hiperbólico de f está contenido en B^δ . Sea P_i (P_e) el número de puntos parabólicos especiales con tangencia interior (con tangencia exterior). Entonces,

$$\sum \text{Ind}([q]) = \chi(B^\delta) + \frac{P_i - P_e}{2},$$

donde la suma corre sobre todos los puntos singulares $[q]$ del campo \mathbb{X} .

Las demostraciones de la observación 1 y del teorema 2 están basadas en las siguientes Proposiciones 1 y 2, en el Lema 2 y Teorema 3.

La proyección central del plano $N = \{(x, y, 1)\}$ sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, define dos funciones $s_1, s_2 : N \rightarrow \mathbb{S}^2$, las cuales, a cada punto $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ le asignan dos puntos antípodas $s_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ y $s_2(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ sobre la esfera. Por medio de estas funciones asociamos a la forma cuadrática $\zeta = II(S_f^n)$ una forma cuadrática diferencial $s_1^*(\zeta)$ en el hemisferio norte de \mathbb{S}^2 y, una forma diferencial cuadrática $s_2^*(\zeta)$ en el hemisferio sur de \mathbb{S}^2 .

Proposición 1 Las formas diferenciales cuadráticas $s_1^*(\zeta)$ y $s_2^*(\zeta)$ se extienden a una forma diferencial cuadrática analítica ρ definida sobre toda la esfera, de tal manera que el ecuador de \mathbb{S}^2 es, salvo los puntos singulares de ρ , una curva integral de las foliaciones definidas en \mathbb{S}^2 por ρ .

Proposición 2 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 2$. El número de puntos singulares de la forma ρ que están en el ecuador de la esfera es el doble del número de factores lineales reales que tiene el polinomio homogéneo f_n . Más aún, los puntos singulares en el ecuador de la esfera están determinados por los factores lineales reales de f_n .

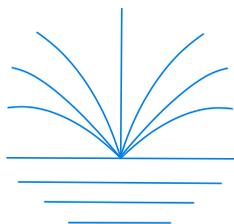
La proposición 2 afirma que la forma ρ tiene un número finito de puntos singulares en el ecuador de la esfera \mathbb{S}^2 . V. Guíñez encontró que esta propiedad no es cierta en otras formas diferenciales cuadráticas polinómicas (ver [29]).

Denotemos con $Y_k, k = 1, 2$ los campos de direcciones que define ρ . Recordemos que $H \in \mathbb{R}[x, y]$ es el polinomio homogéneo tal que $H(x, y, 1) = \text{Hess}f(x, y)$. Si la superficie S_f^n es genérica, entonces los campos de direcciones $Y_k, k = 1, 2$ están definidos en la superficie con frontera $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}$ y sólo tienen puntos singulares en el ecuador de \mathbb{S}^2 .

Lema 2 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n no tiene factores repetidos. Si (u_0, v_0, ω_0) es un punto singular de ρ , entonces (u_0, v_0, ω_0) está en el interior de B .

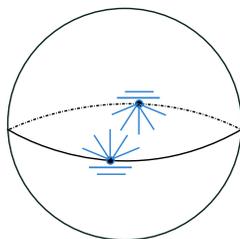
Así, los puntos singulares de la forma cuadrática ρ que están en el ecuador de \mathbb{S}^2 , no están en la frontera de B . Cuando la superficie S_f^n es genérica, todos los puntos singulares de la forma cuadrática ρ están en el ecuador de \mathbb{S}^2 .

Teorema 3 Consideremos $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$. Supongamos que f_n no tiene factores repetidos. Entonces todos los puntos singulares del campo de direcciones $Y_k, k = 1, 2$ que están en el ecuador de \mathbb{S}^2 son del tipo topológico mostrado en la figura 4. En consecuencia, el índice de Poincaré del campo $Y_k, k = 1, 2$ en cada punto singular $(u_0, v_0, 0) \in \mathbb{S}^2$ es igual a $\frac{1}{2}$.

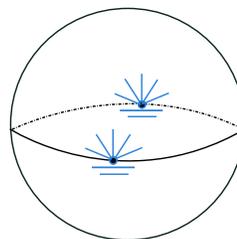


- Figura 4 -

Notemos que el comportamiento topológico de las curvas integrales del campo $Y_k, k = 1, 2$ en cada pareja de puntos antípodas en el ecuador de la esfera y que son puntos singulares de Y_k es como en la figura 5 si n es impar y como en la figura 6 si n es par.



- Figura 5 -



- Figura 6 -

A partir de la fórmula del teorema 2 y de las desigualdades de Petrowsky [57] (o ver el teorema 1.7 en la página 8), obtuvimos una cota superior para cada uno de los números P_i y P_e .

Teorema 4 Consideremos $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ con S_f^n genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es transversal a la recta al infinito y que el dominio hiperbólico está contenido en B^δ . Si f_n tiene k factores lineales reales, entonces

$$P_i \leq \frac{(n-2)(8n-21)}{2} + \frac{k}{2} \quad y \quad P_e \leq \frac{(n-2)(8n-21)}{2} + 1 - \frac{k}{2}.$$

Las componentes conexas de una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ son *óvalos* o *pseudorectas*. Los óvalos se caracterizan porque su complemento en $\mathbb{R}P^2$ es un subconjunto abierto disconexo: *el interior de un óvalo* es difeomorfo a un 2-disco y *el exterior de un óvalo* es difeomorfo a una banda de Möbius. Mientras que una pseudorecta se caracteriza porque su complemento en $\mathbb{R}P^2$ es conexo y difeomorfo a un 2-disco.

Todas las componentes conexas de una curva algebraica real no singular de grado par son óvalos. Por su parte, cada curva algebraica no singular de grado impar en $\mathbb{R}P^2$ tiene exactamente una pseudorecta y, si tiene otras componentes conexas, éstas son óvalos [73]. Un *nido de óvalos*, de una curva algebraica no singular $F = 0$, es un conjunto finito de óvalos de esta curva tal que para cualesquiera dos óvalos en este conjunto, uno está contenido en el interior del otro.

En el caso en que la curva Hessiana proyectiva es convexa y B^- contiene al conjunto de puntos hiperbólicos, encontramos una cota superior para el número de puntos (PE) cuando B^- es difeomorfa a una banda de Möbius a la que se le han quitado un número finito de discos abiertos. Es decir, cuando la curva Hessiana proyectiva no tiene nidos de óvalos.

Teorema 5 *Consideremos $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n con S_f^n genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es convexa, no tiene nidos de óvalos y es transversal a la recta al infinito. Si B^- contiene al dominio hiperbólico y f_n tiene k factores lineales reales, entonces S_f^n tiene a lo más $(n - 2)(3n - 9) + k$ puntos parabólicos especiales.*

Decimos que el *índice de un punto (PE)* es $+1$ si el campo vectorial ξ tiene un punto singular del tipo nodo o foco y que es -1 si el campo vectorial ξ tiene un punto singular del tipo silla.

Las siguientes preguntas fueron formuladas por D. A. Panov y son enunciadas como el problema 1997-6 en la lista de problemas de V. I. Arnold [6].

P4 ¿Existe una función genérica f definida sobre el plano, tal que la curva parabólica de su gráfica sea conexa y tal que los campos de direcciones asintóticas sobre esta curva parabólica tengan sólo un punto parabólico especial y éste sea de índice $+1$?

P5 Si la curva parabólica de la gráfica de f es conexa y no singular, ¿es cierto que el número de puntos parabólicos especiales con índice -1 es mayor o igual que el número de puntos parabólicos especiales con índice $+1$?

En el caso de funciones polinómicas $f \in \mathbb{R}[x, y]$, obtuvimos los siguientes resultados que dan una respuesta a las preguntas de Panov.

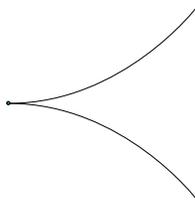
Proposición 3 *No existe $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, tal que:*

1. *La superficie S_f^n es genérica y tiene sólo un punto (PE), cuyo índice es $+1$.*

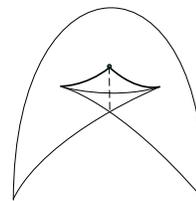
2. El polinomio f_n no tiene factores repetidos.
3. La curva Hessiana proyectiva de f es conexa y transversal a la recta al infinito.
4. La superficie B^- contiene al dominio hiperbólico de f .

Proposición 4 Consideremos $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, tal que S_f^n es una superficie genérica. Supongamos que f_n no tiene factores repetidos, la curva Hessiana de f es transversal a la recta al infinito y que B^- (B^+) contiene al dominio hiperbólico. Si $\chi(B^-) \leq 0$ ($\chi(B^+) \leq 0$, respectivamente), entonces el número de puntos parabólicos especiales con índice negativo es mayor o igual al número de puntos parabólicos especiales con índice positivo.

Motivación e historia. V. I. Arnold estableció en [9] que el análogo multidimensional de un punto de inflexión de una curva diferenciable en \mathbb{RP}^2 es la curva parabólica de una superficie no singular $S \subset \mathbb{RP}^3$ junto con el conjunto de puntos parabólicos especiales que están sobre dicha curva. Esta analogía se deriva de lo siguiente. Si p es un punto de inflexión de una curva plana proyectiva C de clase C^∞ , y si q es el punto sobre la curva dual C^\vee correspondiente a p , entonces q es un punto singular de tipo cúspide (figura 7). Mientras que en el espacio proyectivo dual $(\mathbb{RP}^3)^\vee$ de \mathbb{RP}^3 , a cada componente conexa de la curva parabólica de una superficie S en \mathbb{RP}^3 le corresponde una arista cuspidal en la superficie dual de S (ver [66]). A cada punto parabólico especial le corresponde, en la superficie dual, un punto singular de tipo cola de golondrina (figura 8). La relación que hay entre estos puntos singulares es la siguiente. El discriminante de los polinomios reales de grado tres de la forma $x^3 + ax + b$, es una curva en el plano de coordenadas $\{(a, b)\}$, la cual tiene un punto singular del tipo cúspide. Mientras que el discriminante de los polinomios reales de grado cuatro $x^4 + ax^2 + bx + c$, es una superficie en el espacio de coordenadas $\{(a, b, c)\}$ que tiene un punto singular de tipo cola de golondrina.



– Figura 7 –



– Figura 8 –

Uno de los objetivos de V. I. Arnold, fue encontrar un análogo al teorema de Möbius (ver [49]), el cual afirma que cualquier curva en \mathbb{RP}^2 que sea simple, cerrada y no contraíble, tiene al menos 3 puntos de inflexión. Con el propósito de encontrar un resultado análogo al teorema

de Möbius, para el caso de superficies en $\mathbb{R}P^3$, las siguientes preguntas aparecen naturalmente: ¿Cuál es el número mínimo de aristas cuspidales y el número mínimo de puntos singulares del tipo cola de golondrina que tiene la superficie dual de una superficie obtenida de una perturbación infinitesimal de un plano proyectivo $S_0 = \mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}P^3$? En otras palabras, ¿cuál es el número mínimo de componentes conexas de la curva parabólica y cuál es el número mínimo de puntos (PE) que tiene una superficie que se obtiene de una perturbación infinitesimal de un plano proyectivo en $\mathbb{R}P^3$? Paralelamente, estas preguntas también surgen si la perturbación es algebraica.

En el caso de superficies algebraicas, B. Segre demostró que el número de componentes conexas de la curva parabólica de cualquier superficie algebraica genérica de grado tres, homeomorfa a $\mathbb{R}P^2$, es al menos cuatro y el número de puntos (PE) es igual a 6 (ver [65]).

Por medio de experimentos computacionales, F. Aicardi observó que la distribución de los puntos (PE) en cuatro componentes de la curva parabólica de superficies de grado tres es $0+1+2+3=6$. V. I. Arnold comunicó a E. Shustin esta observación, quien usando el método de Segre probó que ésta es la única distribución posible de los puntos (PE) en la curva parabólica de cualquier superficie de grado tres genérica y homeomorfa a $\mathbb{R}P^2$ (ver [9]).

En 1995, F. Aicardi conjeturó que el número de componentes conexas de la curva parabólica de una perturbación infinitesimal genérica del plano proyectivo en $\mathbb{R}P^3$ es al menos cuatro, mientras que el número de puntos (PE) es al menos 6 (ver [9]). Esta conjetura parecía ser el problema análogo al teorema de Möbius. Sin embargo, en 1998, D. Panov [56] encontró, mediante una perturbación genérica de un plano proyectivo, una superficie no singular en $\mathbb{R}P^3$ cuya curva parabólica consiste sólo de una componente conexa. El ejemplo descarta la parte correspondiente al número de componentes conexas de la curva parabólica en la conjetura de Aicardi; sin embargo, permanece vigente la parte de la conjetura sobre el número de puntos (PE), pues en la curva parabólica de la superficie que Panov exhibe hay 12 puntos (PE) (ver también [6], problema 1995-3).

Continuamos con el apartado de motivación e historia, pero ahora nos enfocamos en curvas algebraicas planas reales.

Topología de las curvas Hessianas. En 1876, A. Harnack demostró que el número máximo de componentes conexas de una curva algebraica proyectiva en $\mathbb{R}P^2$ de grado n no singular¹ es $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ (ver [33]). En el mismo artículo probó que la cota superior es óptima, es decir, que existen curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$ de grado n con el número máximo de componentes conexas. Estas curvas son conocidas como *M-curvas*. En 1891 (ver [36]), D. Hilbert proporcionó

¹Ricardo Benedetti y Jean-Jacques Risler [11] demostraron que la cota superior de Harnack es cierta aún si la curva algebraica es singular.

otro método para construir M -curvas. En el mismo trabajo, Hilbert anunció, sin prueba, que los óvalos de una M -curva de grado 6 no se pueden distribuir en el plano proyectivo real de tal forma que 10 óvalos estén en el interior del onceavo óvalo. Esto fue considerado por Hilbert como un hecho notable, pues observó que las M -curvas tienen una topología especial. Estudiar la topología de curvas algebraicas reales fue una tarea propuesta por Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900.

Una parte del estudio de la topología de las curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$ está centrada en la siguiente pregunta. ¿Cuáles son las configuraciones que son realizables por las curvas algebraicas de grado n ? es decir, dada una configuración C de circunferencias en el plano proyectivo real, ¿existe un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ de grado n tal que el par $(\mathbb{R}P^2, F = 0)$ sea isotópico al par $(\mathbb{R}P^2, C)$? La respuesta a esta pregunta se conoce sólo para curvas algebraicas de grado $n \leq 7$ (ver [25], [26], [68]). Hay resultados parciales cuando el grado de la curva es mayor que siete. La solución para $n \leq 5$ ya era conocida a principios del siglo pasado y se obtuvo a partir de algunas consecuencias topológicas del teorema de Bézout. Entre los que han hecho aportaciones al estudio de las clases de isotopía que son realizables por curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$, están D. Hilbert [36], I. Petrowsky [57], V. A. Rokhlin [62], [63], D. A. Gudkov [26], O. Viro [68], [71], [69], [70], V. Kharlamov [70], G. Wilson [72].

Entre los problemas que surgen al estudiar la topología de la curva Hessiana de un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ están los siguientes.

Dado un polinomio real f de grado $n \geq 3$ en dos variables, ¿cuál es el número máximo de componentes conexas que puede tener su curva Hessiana?

Del número total de componentes conexas de la curva Hessiana de un polinomio f ¿cuál es el número máximo de componentes conexas compactas? ¿son óptimas estas cotas?

También, surgen los siguientes problemas de realización.

Problema de *realización de curvas Hessianas*: ¿bajo qué condiciones, una curva algebraica $g(x, y) = 0$ en \mathbb{R}^2 , es realizable como la curva Hessiana de un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$?

Problema de *realización de polinomios Hessianos*: Dado $g \in k[x, y]$, con $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. ¿Existe un polinomio $f \in k[x, y]$ tal que $Hess f = g$?

La cota superior de Harnack para el número de componentes conexas de una curva proyectiva plana proporciona una cota superior para el número de componentes conexas de la curva Hessiana de un polinomio real f cuando ésta es compacta. Se sabe, para este caso, que tal cota, $(n - 3)(2n - 5) + 1$, es óptima si el grado de f es menor o igual que 4. Un ejemplo de un polinomio de grado 4 tal que su curva Hessiana es de grado 4 y contiene cuatro componentes compactas es presentado en [54].

Una curva algebraica no singular y no compacta en \mathbb{R}^2 de grado n puede tener a lo más $g(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ componentes conexas compactas y n componentes conexas no acotadas. Harnack construyó una curva en $\mathbb{R}P^2$ de grado n con $g(n) + 1$ componentes y tal que una de sus componentes conexas interseca a la recta al infinito en n puntos distintos. Esta curva muestra que las cotas $(g(n), n)$ para componentes conexas compactas y componentes conexas no acotadas, respectivamente, son realizables por curvas afines reales de grado n . En el caso de curvas Hessianas de grado $2n - 4$, con al menos una componente conexa no acotada, se desconoce si las cotas $(g(2n - 4), 2n - 4)$ son realizables para n mayor o igual que cuatro. Es decir, no se sabe si existe un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 4$ tal que su curva Hessiana tenga $g(2n - 4)$ componentes conexas compactas y $2n - 4$ no acotadas. Sin embargo, cuando $n = 4$, A. Ortiz-Rodríguez y F. Sottile [54] encontraron ejemplos de curvas Hessianas de grado 4 con $(2, 4)$ y con $(3, 2)$ componentes conexas (compactas, no compactas).

En 2010, B. Bertrand y E. Brugallé [12] usaron el método de Viro, para demostrar que para cada número entero $n \geq 4$ existe un polinomio $Q \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n tal que su curva Hessiana es no singular y tiene al menos $(n - 4)^2$ componentes conexas compactas.

Respecto al problema de realización de polinomios Hessianos, decir si un polinomio g es el Hessiano de otro polinomio f de grado n , en general, no es una tarea sencilla. Esto es debido a que los coeficientes de f deben ser solución de un sistema de $(2n - 3)(n - 1)$ ecuaciones cuadráticas. E. Martínez-Ojeda y A. Ortiz-Rodríguez estudiaron en [48] el problema de realización de polinomios Hessianos g de grado m y caracterizaron los casos cuando $0 \leq m \leq 2$. También caracterizaron los casos del problema de realización de curvas Hessianas de grado m cuando $0 \leq m \leq 3$.

Si bien, el problema de realización de polinomios Hessianos contiene al de realización de curvas Hessianas, éstos son distintos. Pues, aunque una curva algebraica afín $g(x, y) = 0$ sea realizable como una curva Hessiana, no necesariamente se tiene que el polinomio real g es Hessiano (o no necesariamente todos los múltiplos $\lambda g(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son Hessianos si g lo es). Tal es el caso de la circunferencia definida por el polinomio $g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (que no es el Hessiano de ningún polinomio de grado 3) y por el polinomio Hessiano $g_1(x, y) = -x^2 - y^2 + 1$ (ver [48] y [34]). Esta observación señala que un polinomio g que es el Hessiano de otro polinomio f viene acompañado por la distribución, en \mathbb{R}^2 , de las componentes conexas de los conjuntos semialgebraicos $g(x, y) < 0$ y $g(x, y) > 0$.

En 1988, V. I. Arnold (ver [7]) había estudiado estos problemas de realización para el caso de funciones diferenciables. Él demostró que para cualquier función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que se anule en un punto crítico de multiplicidad finita, existe una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su Hessiano coincide con el de g en una vecindad del punto crítico, salvo un cambio de coordenadas del

plano \mathbb{R}^2 .

Cotas superiores de los puntos (PE). En relación al número de puntos parabólicos especiales que pueden aparecer cuando f es una función polinómica genérica de grado n , I. Hernández-Martínez, A. Ortiz-Rodríguez y F. Sánchez-Bringas [34] probaron que este número está acotado superiormente por el número $(n - 2)(5n - 12)$. Esta cota superior es óptima si $n \leq 3$, pero se desconoce si es óptima cuando $n \geq 4$. Cuando la curva Hessiana de f es compacta y convexa, el número $n(3n - 14) + 18$ es una cota superior para el número de puntos parabólicos especiales que están en las componentes conexas exteriores de la curva Hessiana. Esta cota superior es realizable en grado 4, pero se desconocen ejemplos que realicen esta cota superior si $n \geq 5$ (ver [35]).

Contenido de la tesis. La tesis está organizada en seis capítulos. El primero, segundo, tercero y quinto capítulos contienen material preliminar. En el tercero², cuarto y sexto, se exponen los resultados obtenidos. El contenido de cada capítulo es el siguiente.

El capítulo uno se centra en el estudio de las curvas algebraicas reales, principalmente, de las curvas proyectivas planas no singulares de grado par. En este apartado son recopilados algunos teoremas que generan restricciones a las configuraciones de las componentes conexas en el plano proyectivo real. Entre éstos, se encuentran el teorema de A. Harnack, las desigualdades de I. Petrowsky y las congruencias de V. I. Arnold y V. Rohklin. En la sección 1.3 se recopilan los teoremas que exhiben las clases de isotopía que son realizables por curvas algebraicas proyectivas planas no singulares de grado menor igual que seis.

El capítulo dos se enfoca en superficies algebraicas encajadas en un espacio tridimensional real (afín o proyectivo), en particular, en las propiedades que poseen los puntos de dichas superficies y que son preservadas por transformaciones proyectivas y/o afines del espacio de dimensión tres. También, se da un contexto histórico y un marco teórico de los resultados que se presentan en los capítulos cuatro y seis.

En el tercer capítulo se introducen las formas diferenciales cuadráticas binarias y algunas propiedades de sus foliaciones cuando éstas son polinómicas. Principalmente, se describe la *compactificación de Poincaré* para estas foliaciones. La cual, por medio de la proyección central del plano \mathbb{R}^2 sobre la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, le asocia, a una forma diferencial cuadrática definida en el plano \mathbb{R}^2 , una forma diferencial analítica en \mathbb{S}^2 . En este apartado se incluyen algunos resultados de las formas diferenciales cuadráticas binarias positivas y se inicia el desarrollo de la compactificación de Poincaré cuando las formas diferenciales cuadráticas binarias no necesariamente son positivas.

²En el tercer capítulo se estudian, además del material preliminar, formas diferenciales cuadráticas que no son estudiadas en las referencias conocidas por el autor.

En el capítulo cuatro se enuncian y demuestran los resultados principales de la tesis. En este apartado se describen algunas propiedades de la compactificación de Poincaré de la segunda forma fundamental de gráficas de funciones polinómicas genéricas. Principalmente, se establece el número y tipo topológico de los puntos singulares que aparecen en el infinito. Se muestran criterios que garantizan la compacidad de la curva Hessiana, así como la hiperbolicidad y elipticidad de la componente no acotada contenida en el complemento de la curva Hessiana. Se demuestra una fórmula tipo índice. Además, se presenta una cota superior para cada uno de los números P_i y P_e .

El capítulo cinco recopila algunos aspectos básicos de la teoría clásica de invariantes. Principalmente, se presentan invariantes, covariantes y formas normales de polinomios homogéneos de grado menor o igual que cuatro, bajo la acción, sobre \mathbb{R}^2 , del grupo de matrices reales invertibles. El contenido de este capítulo es material preliminar que nos ayudará, en el capítulo 6, a obtener información de la estructura geométrica de la gráfica de un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4.

En el capítulo seis se clasifican algunas configuraciones en \mathbb{R}^2 de la curva Hessiana de un polinomio f de grado 4 (cuando esta curva es no singular) de acuerdo a la clase de equivalencia bajo el grupo $GL(2, \mathbb{R})$ del polinomio homogéneo de grado 4 de f . Por último, haciendo uso de las formas normales de los polinomios homogéneos de grado cuatro se demuestra que la función que asocia a cada polinomio homogéneo de grado cuatro su Hessiano, no es suprayectiva.

Parte I

Propiedades proyectivas de superficies no singulares

Capítulo 1

Curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$

1.1. Restricciones sobre la topología de las curvas algebraicas reales

Una *curva algebraica en $\mathbb{R}P^2$ de grado m* es, salvo factores constantes no nulos, un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ de grado m . La ecuación polinómica $F(x, y, z) = 0$ determina el *conjunto de puntos reales de la curva F en $\mathbb{R}P^2$* .

Al conjunto de puntos reales de una curva F en $\mathbb{R}P^2$ también le llamaremos *curva algebraica real* (o sólo *curva* por brevedad). Sólo haremos distinción de los términos en caso necesario.

Un punto $[x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{R}P^2$ es llamado *punto singular de la curva algebraica $F(x, y, z) = 0$* si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ es un punto crítico del polinomio F . Decimos que una curva algebraica real es *no singular* si no tiene puntos singulares en $\mathbb{R}P^2$.

Isotopías de círculos en $\mathbb{R}P^2$. A $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ con su topología usual le llamamos *círculo*. Sea $T = \{c_1, \dots, c_l\}$ una familia finita de círculos y $h, g : T \rightarrow \mathbb{R}P^2$ dos encajes de T en $\mathbb{R}P^2$. Decimos que h y g son *isotópicos en $\mathbb{R}P^2$* , si existe una homotopía $H : \mathbb{R}P^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$, que cumple lo siguiente:

1. Para cada $t \in [0, 1]$ la función $H_t : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2, H_t(x) = H(x, t)$, es un homeomorfismo.
2. H_0 es la función identidad en $\mathbb{R}P^2$ y $H_1 \circ h = g$.

Una *configuración C en $\mathbb{R}P^2$ de una familia finita de círculos T* es, salvo isotopía, un encaje g de T en $\mathbb{R}P^2$.

Decimos que una curva algebraica real F no singular de grado m realiza una configuración de círculos C , si el conjunto de puntos reales de F es isotópico a C en $\mathbb{R}P^2$.

La clase de isotopía de una curva algebraica F en $\mathbb{R}P^2$ no singular de grado m está formada por el conjunto de curvas algebraicas no singulares de grado m que realizan la misma configuración que F . En otras palabras, la clase de isotopía de una curva algebraica F en $\mathbb{R}P^2$ está determinada, salvo homeomorfismo, por cómo cada componente conexa del conjunto de puntos reales de F está situada en $\mathbb{R}P^2$ con respecto a las otras componentes conexas.

Una pregunta que surge dentro del estudio de las propiedades topológicas de curvas algebraicas reales es la siguiente: ¿Cuáles configuraciones son realizables por las componentes conexas de una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado m ?

En lo siguiente, enunciaremos algunas restricciones a las que están sujetas las configuraciones realizables por curvas algebraicas no singulares de grado m en $\mathbb{R}P^2$.

Óvalos y pseudorectas. Hay dos tipos de encajes, salvo isotopía, del círculo \mathbb{S}^1 en el plano proyectivo real. Cada tipo se distingue de acuerdo a lo siguiente.

Definición. Sea $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ un encaje del círculo \mathbb{S}^1 en el plano proyectivo real. Decimos que la imagen del encaje ρ es un *óvalo* si $\mathbb{R}P^2 \setminus \rho(\mathbb{S}^1)$ es la unión de un abierto homeomorfo a un disco, llamado *el interior del óvalo*, y un abierto homeomorfo a una banda de Möbius, llamado *el exterior del óvalo*. Decimos que $\rho(\mathbb{S}^1)$ es una *pseudorecta* si $\mathbb{R}P^2 \setminus \rho(\mathbb{S}^1)$ es conexo y homeomorfo a un disco abierto.

Cada componente conexa de una curva algebraica real no singular $F(x, y, z) = 0$ es un óvalo o a una pseudorecta. Si la curva $F(x, y, z) = 0$ es de grado par, cada una de sus componentes conexas es un óvalo. A diferencia de las curvas de grado par, cada curva algebraica no singular de grado impar en $\mathbb{R}P^2$ tiene exactamente una pseudorecta y si tiene otras componentes conexas, éstas son óvalos.

Teoremas de Harnack sobre curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$. Carl Gustav Axel Harnack mostró los dos resultados siguientes.

Teorema 1.1 ([33]) *El número máximo de componentes conexas de una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado d es*

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1.$$

Teorema 1.2 ([33]) *Para cualquier número entero positivo d y cualquier número entero c que satisfacen las desigualdades*

$$\frac{1 - (-1)^d}{2} \leq c \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1,$$

existe una curva algebraica no singular en \mathbb{RP}^2 de grado d con c componentes conexas.

Definición. Una curva algebraica no singular de grado d en el plano proyectivo real que contiene $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1$ componentes conexas es llamada *M-curva*. Una *(M-i)-curva* es una curva no singular de grado d en \mathbb{RP}^2 con $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1 - i$ componentes conexas.

Notemos que en particular, el teorema 1.2 afirma que existen *M*-curvas para todos los grados $d \geq 1$.

Nidos de óvalos. Salvo isotopías de \mathbb{RP}^2 , hay dos maneras distintas en las que un óvalo puede situarse en \mathbb{RP}^2 con respecto a un segundo óvalo, al que no intersecta. En la primera, cada óvalo está contenido en el exterior del otro óvalo. En la segunda, uno de los óvalos está contenido en el interior del otro óvalo.

Definición. Dos óvalos de una curva algebraica no singular en el plano proyectivo real se dice que están *anidados* si uno de ellos está contenido en el interior del otro óvalo. Un *nido de óvalos de profundidad h* es un conjunto de h óvalos de una curva algebraica no singular tal que cualesquiera dos óvalos en este conjunto están anidados.

Definición. Decimos que dos nidos de óvalos Γ_1 y Γ_2 son *disjuntos* si no tienen óvalos en común. Decimos que l nidos de óvalos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_l$ son *estrictamente disjuntos* si para cada uno de los nidos Γ_i existe un nido Γ_j contenido en el exterior de los óvalos de Γ_i .

La siguiente proposición es consecuencia (ver [71]) del teorema de Bézout.

Proposición 1.1 *El número de óvalos en la unión de dos nidos disjuntos de óvalos de una curva algebraica no singular en \mathbb{RP}^2 de grado d es menor o igual a $\frac{d}{2}$. En particular, un nido de óvalos de una curva algebraica no singular en \mathbb{RP}^2 de grado d es de profundidad a lo más $\frac{d}{2}$. Si una curva tiene un nido de óvalos de profundidad $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, entonces la curva no tiene otros óvalos.*

Ejemplo 1.1 Consideremos el polinomio

$$Nest_{d,\epsilon,k}^2 := (x+y) \cdot \epsilon^{k+\lfloor d/2 \rfloor} + \prod_{j=1}^{\lfloor d/2 \rfloor} (x^2 + y^2 - \epsilon^j),$$

donde $d = 2, 3, \dots, k = 0, 1, 2, \dots$ y ϵ es un número real positivo lo suficientemente pequeño. En [44], Oliver Labs estudió la familia de curvas determinada por los polinomios reales $Nest_{d,\epsilon,k}^2$. Para

cada d, k y ϵ fijos, la curva algebraica $Nest_{d,\epsilon,k}^2 = 0$ es de grado d y tiene un nido de profundidad $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, la mayor posible de acuerdo a la proposición 1.1.

La proposición 1.2, es uno de los resultados sobre nidos de óvalos que generalizan la proposición 1.1 y que fueron demostrados usando curvas conexas auxiliares de grado $n \geq 2$ (ver los trabajos [25] de D. A. Gudkov, [17] de A. L. Čeponkus y [61] de V. Rokhlin). Antes de enunciar la proposición 1.2 tenemos lo siguiente.

Una curva algebraica de grado n en $\mathbb{R}P^2$ está determinada por $\frac{1}{2}n(n+3)$ puntos en posición general. En el caso de curvas conexas, dos puntos distintos determinan una única recta y cinco puntos en posición general determinan una única cónica en $\mathbb{R}P^2$. De manera general, sea $C(n)$ el mayor número de puntos en posición general por los que pasa una curva algebraica conexa de grado n en $\mathbb{R}P^2$. Notemos que $C(n)$ satisface la desigualdad $C(n) \geq 3n - 1$ (ver [61]). En particular, si $n = 1, 2, 3$, $C(n)$ coincide con $3n - 1$. Sin embargo, en [17] A. L. Čeponkus probó que si $n = 4$, entonces $C(4) = 13$ y no 11.

Proposición 1.2 ([61]) *Si una curva algebraica no singular de grado d tiene s nidos de óvalos estrictamente disjuntos y de profundidad h_1, \dots, h_s , con $s \leq C(n)$ y n par, entonces*

$$h_1 + \dots + h_s \leq \frac{nd}{2}.$$

Otras generalizaciones de la proposición 1.1 fueron demostradas por Gudkov en [25] y por Čeponkus en [17]. Para estas generalizaciones, Gudkov y Čeponkus usaron curvas algebraicas auxiliares de grado $n \geq 3$ no necesariamente conexas.

En el caso de M -curvas, David Hilbert demostró lo siguiente.

Teorema 1.3 ([36]) *Una M -curva de grado d no puede tener nidos de profundidad mayor que $\lfloor \frac{d}{2} - 1 \rfloor$. Además, para cada entero positivo d existen M -curvas de grado d con un nido de profundidad $\lfloor \frac{d}{2} - 1 \rfloor$.*

Varias restricciones sobre las configuraciones o arreglos en $\mathbb{R}P^2$ de las componentes conexas de una curva algebraica de grado par, están establecidas por medio de congruencias. Antes de enunciar estas restricciones tenemos la siguiente terminología.

Definición. Sea C una curva no singular de grado par en el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$. Decimos que un óvalo de C es *par* (*impar*) si está en el interior de un número par (impar) de otros óvalos de C . A los óvalos pares que no están en el interior de algún otro óvalo de C , los llamamos *exteriores*. Al número de óvalos pares de C lo denotamos con P y al número de óvalos impares de C , con N .

Teorema 1.4 ([63], [62], [47]) *Sea C una M -curva de grado par $d = 2k$ en el plano proyectivo real. Entonces se cumple la siguiente congruencia*

$$P - N \equiv k^2 \pmod{8}.$$

La congruencia del teorema anterior fue formulada por Gudkov como conjetura avalada por varios ejemplos. Antes de que Rokhlin demostrara el teorema 1.4, V. I. Arnold probó el siguiente resultado.

Teorema 1.5 ([3]) *Sea C una M -curva de grado par $d = 2k$ en el plano proyectivo real. Entonces se cumple la siguiente congruencia*

$$P - N \equiv k^2 \pmod{4}.$$

Si bien la congruencia del teorema de Rokhlin es la mejor posible para M -curvas, la prueba realizada por Arnold del teorema 1.5 fue pionera en el uso de técnicas de topología algebraica para el estudio de curvas algebraicas reales y no sólo en el estudio de curvas, sino también, en el estudio de variedades algebraicas reales (por mencionar algunos ejemplos, están los trabajos de Arnold [5], V. M Kharlamov [39], [40] y G. Wilson [72]).

Otra congruencia que forma parte de las restricciones de curvas algebraicas proyectivas planas no singulares es la congruencia de Gudkov-Krakhnov-Kharlamov:

Teorema 1.6 ([27], [41]) *Sea C una $(M - 1)$ -curva de grado par $d = 2k$ en $\mathbb{R}P^2$. Entonces se cumple la siguiente congruencia*

$$P - N \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

Las superficies con frontera B^- y B^+ . Sea $F(x, y, z) = 0$ una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado par. Dicha curva es la frontera común de dos superficies disjuntas no singulares con frontera contenidas en $\mathbb{R}P^2$. Estas superficies se caracterizan porque F es no negativo en una de ellas y es no positivo en la otra. Una de las superficies contiene, entre sus componentes conexas, una componente no orientable y en tal caso la superficie es denotada con B^- . La otra superficie es orientable y es denotada con B^+ .

Nota 1.1 Dada una curva algebraica no singular \tilde{F} de grado par en $\mathbb{R}P^2$, se puede elegir $F = \lambda\tilde{F} \in \mathbb{R}[x, y, z]$ de tal manera que la superficie no orientable B^- coincida con el conjunto de puntos en $\mathbb{R}P^2$ tales que $F(x, y, z) \leq 0$, mientras que B^+ coincida con el conjunto de puntos en $\mathbb{R}P^2$ tales que $F(x, y, z) \geq 0$.

Desigualdades de Petrowsky. Los números P y N contienen información sobre la topología de las superficies B^+ y B^- . En efecto, la superficie B^+ tiene P componentes conexas, la superficie B^- tiene $N + 1$ componentes conexas y la característica Euler de esas superficies es $\chi(B^+) = P - N$ y $\chi(B^-) = N - P + 1$. Esto fue notado por V. Ragsdale en [60]. Por su parte, y sin conocer el trabajo de Ragsdale, I. Petrowsky demostró el siguiente resultado.

Teorema 1.7 ([57]) *Cualquier curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado par $d = 2k$ satisface las siguientes desigualdades*

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq P - N \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

Como $\chi(B^+) + \chi(B^-) = \chi(\mathbb{R}P^2)$, se cumple la igualdad $\chi(B^+) = 1 - \chi(B^-)$. Así, la siguiente desigualdad, la cual usaremos posteriormente, se sigue del teorema de Petrowsky.

$$-\frac{3k(k-1)}{2} - 1 \leq -\chi(B^-) \leq \frac{3k(k-1)}{2}. \quad (1.1)$$

La componente conexa no orientable $\mathbb{M}_\tau \subseteq B^-$ y su doble cubriente. Sea $F(x, y, z) = 0$ una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado par. La superficie no orientable B^- tiene una componente conexa la cual es una superficie cuya frontera es la unión de los τ óvalos exteriores de la curva $F = 0$ y es homeomorfa a una banda de Möbius cerrada a la que se le han quitado $\tau - 1$ discos abiertos. A esta componente conexa de B^- la denotamos con \mathbb{M}_τ .

La proposición 1.3 es consecuencia del teorema de clasificación de superficies (al lector interesado en este teorema se le sugiere consultar [45]). Para las proposiciones 1.4 y 1.5, una referencia es [37].

Proposición 1.3 *La superficie $\mathbb{M}_\tau \subset \mathbb{R}P^2$ es compacta, conexa, no orientable y su frontera tiene τ componentes conexas. Además, la característica de Euler-Poincaré de \mathbb{M}_τ es*

$$\chi(\mathbb{M}_\tau) = 1 - \tau.$$

Sea $\Pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ la proyección natural de la esfera \mathbb{S}^2 en el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$. Denotamos con $2\mathbb{M}_\tau$ a la doble cubriente orientable de \mathbb{M}_τ , la cual está definida como la imagen inversa mediante la proyección Π de la superficie \mathbb{M}_τ , esto es, $2\mathbb{M}_\tau = \Pi^{-1}(\mathbb{M}_\tau)$.

Proposición 1.4 *La superficie $2\mathbb{M}_\tau$ es no singular, orientable y con frontera.*

Una doble cubriente de B^- y de B^+ . Dado un polinomio homogéneo $H \in \mathbb{R}[x, y, z]$ de grado par, la ecuación $H(x, y, z) = 0$ en \mathbb{R}^3 define una curva sobre la esfera \mathbb{S}^2 . Dicha curva es una

cubriente doble no ramificada del conjunto de puntos reales de la curva H en $\mathbb{R}P^2$. De manera similar a $2M_{\tau}$, consideramos a las superficies $2B^- = \Pi^{-1}(B^-)$ y $2B^+ = \Pi^{-1}(B^+)$.

Proposición 1.5 *Las superficies $2B^-$ y $2B^+$ forman una cubriente doble no ramificada de las superficies B^- y B^+ respectivamente. Además, $\chi(2B^-) = 2\chi(B^-)$ y $\chi(2B^+) = 2\chi(B^+)$.*

1.2. Clases de isotopía de las curvas proyectivas de grado $d \leq 6$

El estudio de las clases de isotopía de curvas algebraicas no singulares de grado fijo d ha sido completado únicamente hasta grado 7. En grado 6, éste fue realizada por D. A. Gudkov, mientras que en grado 7, por O. Ya. Viro en [68]. Para $d \leq 5$, las restricciones que proporciona el teorema de Bézout, junto con algunas de sus consecuencias, y el teorema de Harnack, son suficientes para describir todas las posibles configuraciones de las componentes conexas que una curva de grado $d \leq 5$ puede tener en el plano proyectivo real (ver [71]).

Para describir las configuraciones de las componentes conexas de curvas algebraicas no singulares de grado $d \leq 6$, adoptamos la notación de O. Ya. Viro usada en [71]. La curva vacía es denotada con $\langle 0 \rangle$. Una curva con sólo un óvalo es denotada con $\langle 1 \rangle$. Una configuración de n óvalos, tal que cada óvalo está en el exterior de los $n - 1$ óvalos restantes, es denotada con $\langle n \rangle$. El símbolo $\langle 1 \langle n \rangle \rangle$ denota el arreglo de $n + 1$ óvalos: uno de estos óvalos contiene en su interior a los otros n óvalos, los cuales tienen la configuración $\langle n \rangle$. El símbolo $\langle m \text{ II } \langle 1 \langle n \rangle \rangle \rangle$ denota la configuración de $m + (n + 1)$ óvalos, que consiste de la unión disjunta de las siguientes dos configuraciones: La configuración $\langle m \rangle$ de m de estos óvalos y la configuración $\langle 1 \langle n \rangle \rangle$ de los $n + 1$ óvalos restantes. Un nido de profundidad 3 es denotado con $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$. Una pseudorecta es denotada con $\langle J \rangle$. Con $\langle J \text{ II } n \rangle$ se denota a una curva no singular con una pseudorecta y n óvalos con la configuración $\langle n \rangle$. Por último, $\langle J \text{ II } \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$ denota a una curva no singular con una pseudorecta y dos óvalos con la configuración $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$.

Teorema 1.8 *Las configuraciones realizables por curvas algebraicas no singulares de grado $d \leq 5$ en el plano proyectivo real son las descritas en la tabla 1.1.*

d	Configuraciones de curvas algebraicas no singulares de grado d
1	$\langle J \rangle$
2	$\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$
3	$\langle J \rangle, \langle J \amalg 1 \rangle$
4	$\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle$
5	$\langle J \rangle, \langle J \amalg 1 \rangle, \langle J \amalg 2 \rangle, \langle J \amalg \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle, \langle J \amalg 3 \rangle, \langle J \amalg 4 \rangle, \langle J \amalg 5 \rangle, \langle J \amalg 6 \rangle$

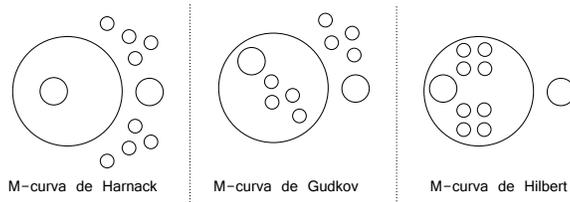
Tabla 1.1 – Clases de isotopía de curvas proyectivas reales de grado $m \leq 5$.

Teorema 1.9 ([26]) *Todas las configuraciones realizables por curvas algebraicas no singulares en $\mathbb{R}P^2$ de grado 6 son las 56 configuraciones enlistadas en la tabla 1.2.*

$\langle 9 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 5 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \amalg 1 \langle 9 \rangle \rangle$
$\langle 10 \rangle \langle 8 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 5 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \amalg 1 \langle 8 \rangle \rangle \langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$
$\langle 9 \rangle \langle 7 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 6 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 7 \rangle \rangle \langle 1 \langle 8 \rangle \rangle$		
$\langle 8 \rangle \langle 6 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \langle 7 \rangle \rangle$		
$\langle 7 \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \langle 6 \rangle \rangle$		
$\langle 6 \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \langle 5 \rangle \rangle$		
$\langle 5 \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \langle 4 \rangle \rangle$		
$\langle 4 \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \langle 3 \rangle \rangle$		
$\langle 3 \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$		
$\langle 2 \rangle \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$		
$\langle 1 \rangle$		
$\langle 0 \rangle$		

Tabla 1.2 – Clases de isotopía de curvas proyectivas reales de grado 6.

Notemos que sólo hay tres clases de isotopía de M -curvas de grado 6 (figura 1.1). En contraste, el número de clases de isotopía de M -curvas de grado 8 es al menos 52, como lo muestra Viro en [68].



– Figura 1.1 –

Capítulo 2

Geometría de superficies

2.1. Clasificación de los puntos de una superficie genérica

Tipos de puntos en Superficies genéricas. Cada punto p de una superficie S genérica encajada en el espacio proyectivo (o afín o Euclidiano) se clasifica de acuerdo al máximo orden de contacto que tienen las rectas tangentes a S en p .

Una recta tangente L a la superficie S en un punto $p \in S$ es llamada *dirección asintótica* si el orden de contacto de la recta L con la superficie S en el punto p es mayor que dos. Una curva contenida en la superficie S es llamada *curva asintótica*, si en cada uno de sus puntos la recta tangente a la curva es asintótica.

A un punto $p \in S$ se le llama *elíptico* si, en p , toda recta tangente a S tiene orden de contacto igual a dos, es decir, si ninguna recta tangente a S en p es dirección asintótica. A un punto $p \in S$ le llamamos *parabólico* si existe una única recta asintótica en $T_p S$, el plano tangente a S en p . Un punto $p \in S$ es llamado *hiperbólico* si en $T_p S$ hay exactamente dos direcciones asintóticas.

Al conjunto \mathbf{H} de puntos hiperbólicos de S se le llama *dominio hiperbólico*. De manera similar, el *dominio elíptico* es el conjunto \mathbf{E} de puntos elípticos de la superficie S . El conjunto \mathbf{P} de los puntos parabólicos forma una curva no singular llamada *curva parabólica*. Los dominios elípticos e hiperbólicos están separados por la curva parabólica.

Un punto parabólico $p \in S$ es llamado *genérico* si la única dirección asintótica tiene orden de contacto igual a tres con la superficie en p . En un punto parabólico genérico su única recta asintótica es transversal a la curva parabólica.

Un punto parabólico $p \in S$ es llamado *punto parabólico especial* y es denotado con PE , si la dirección asintótica tiene orden de contacto igual a 4 con la superficie en p .

Un punto hiperbólico es llamado *genérico* si el orden de contacto de cada una de las direcciones asintóticas es igual a 3.

Un punto hiperbólico p es llamado *de inflexión* si al menos una de las direcciones asintóticas tiene orden de contacto al menos cuatro con la superficie en p . La *curva flecnodal de la superficie* S está formada por el conjunto de puntos de inflexión de la superficie.

Un punto de inflexión p es llamado *genérico* si sus dos direcciones asintóticas tienen orden de contacto con la superficie igual a cuatro e igual a tres.

Un punto de inflexión p es llamado *hiperbólico especial* si el orden de contacto de cada dirección asintótica con la superficie es igual a cuatro en p .

Un punto de inflexión p es llamado *de bi-inflexión* si el orden de contacto de las dos direcciones asintóticas en p con la superficie es igual a cinco y tres.

En un punto parabólico especial p la dirección asintótica es tangente tanto a la curva parabólica como a la curva flecnodal en p .

Formas normales de Platonova. Para cada una de las clases de puntos, O. A. Platonova [58] e independientemente E. E. Landis [46] encontraron formas normales bajo la acción del grupo de transformaciones proyectivas, del 5-jet del germen que describe localmente a una superficie genérica.

El siguiente teorema fue demostrado por Platonova en 1981.

Teorema 2.1 ([58]) *En el espacio de superficies compactas no singulares en \mathbb{RP}^3 hay un subconjunto abierto \mathcal{G} , denso en todas partes, tal que para toda superficie $S \in \mathcal{G}$ el germen en cada uno de sus puntos es equivalente al germen de la gráfica de alguna de las siguientes formas normales.*

Clase	Forma Normal	Restricciones	p -jet	Codimensión
Elíptico	$x^2 + y^2$		2	0
Hiperbólico genérico	$xy + ax^3 + y^3,$	$a \neq 0$	3	0
Parabólico genérico	$y^2 + x^3$		3	1
Inflexión genérico	$xy + y^3 + x^4 + hx^3y$		4	1
Parabólico especial	$y^2 + x^2y + vx^4$	$v \neq 0, \frac{1}{4}$	4	2
Hiperbólico especial	$xy + x^4 + ax^3y + bxy^3 + cy^4$	$c \neq 0$	4	2
Bi-inflexión	$xy + y^3 \pm x^3y + \sum d_i x^{5-i} y^i$	$d_0 \neq 0$	5	2

Los elementos del subconjunto abierto \mathcal{G} , el cual consiste de superficies compactas no singulares, es el conjunto de *superficies genéricas*.

Todas estas clases de puntos ya eran conocidas al final del siglo XIX dentro de la geometría enumerativa de superficies algebraicas complejas, principalmente en los trabajos de A. Cayley, H. Zeuthen y G. Salmon [64].

Debido a que el orden de contacto es invariante por transformaciones proyectivas, las clases de puntos descritas anteriormente son invariantes mediante transformaciones proyectivas.

Formas normales de D. A. Panov. Consideremos al espacio afín real con un sistema de coordenadas fijo, digamos $\{(x, y, z)\}$. El grupo de transformaciones afines de \mathbb{R}^3 actúa sobre el espacio de 3-jets de superficies $z = f(x, y)$ co-orientadas (orientadas con respecto a la orientación positiva de \mathbb{R}^3). Diferentes órbitas de dicha acción corresponden a diferentes tipos de puntos de superficies. Para clasificar estas órbitas, D. A. Panov estudió la acción sobre el espacio de 3-jets del siguiente grupo de transformaciones.

Sea Aff_7 el grupo de transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preservan la orientación de \mathbb{R}^3 y que dejan invariante al semiespacio superior $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$. Sea J_k el espacio de k -jets de superficies tangentes al plano $z = 0$ en el punto $(0, 0, 0)$.

Un punto p en una superficie no singular en \mathbb{R}^3 se llama *degenerado* si la segunda forma fundamental de la superficie en p es cero.

Teorema 2.2 ([55]) *El espacio J_3 se descompone en 22 órbitas mediante la acción del grupo Aff_7 de transformaciones lineales. La siguiente tabla reúne una lista completa de representantes de las órbitas de codimensión 0,1,2,3 y 4.*

Órbita de codimensión	0	1	2	3	4
Elípticos	$\pm(x^2 + y^2 + x^3)$		$\pm(x^2 + y^2)$		
Hiperbólicos	$\pm(x^2 - y^2 + x^3)$	$\pm xy + x^3$	$x^2 - y^2$		
Parabólicos		$\pm y^2 + x^3$	$\pm x^2 + xy^2$	$\pm x^2 + x^2y$	$\pm x^2$
Degenerado				$x(x^2 \pm y^2)$	$x^2(x + y)$

A los puntos representados por los jets $\pm(x^2 + y^2 + x^3)$ los llamamos *elípticos genéricos* y a los puntos representados por los jets $\pm(x^2 + y^2)$ los llamamos *elípticos especiales*.

Las órbitas que son representadas por los jets en la columna de codimensión cero corresponden a los puntos elípticos genéricos e hiperbólicos genéricos. Por su parte, las órbitas que están representadas por las formas normales $\pm xy + x^3$ corresponden a puntos en los que las curvas asintóticas tienen curvatura cero y las formas normales $\pm y^2 + x^3$ representan a los puntos parabólicos genéricos. Los puntos hiperbólicos especiales y parabólicos especiales son representados por las formas normales $x^2 - y^2$ y $\pm x^2 + xy^2$, respectivamente. Las órbitas representadas

en la columna de codimensión tres corresponden a puntos de creación y desaparición de puntos parabólicos especiales, elípticos especiales e hiperbólicos especiales en familias a un parámetro.

En la tabla del teorema 2.2 aparecen 20 de las 22 órbitas de la acción del grupo Aff_7 , las dos órbitas restantes son una de codimensión 5 y otra de codimensión 7. Dichas órbitas sólo aparecen en familias de superficies a varios parámetros. Por ejemplo, la órbita de codimensión 7 ocurre en familias de superficies a 5 parámetros.

La clase de los puntos elípticos especiales fue encontrada por D. A. Panov en [55] donde además, los caracterizó de la siguiente manera:

Proposición 2.1 *Los puntos elípticos especiales tienen la propiedad de que el polinomio cuadrático P_2 de su 3-jet es positivo definido (o negativo definido) y el polinomio cúbico P_3 es un múltiplo de P_2 .*

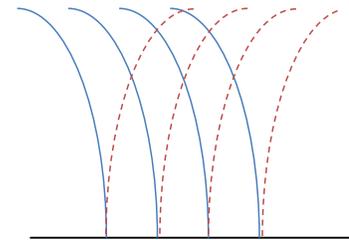
2.2. Campos de direcciones asintóticas en superficies genéricas

En el complemento del dominio elíptico de una superficie genérica S en \mathbb{R}^3 (o en $\mathbb{R}P^3$), las rectas asintóticas definen dos campos de direcciones continuos (ver el trabajo [67] de R. Uribe). Estos campos son llamados *campos de direcciones asintóticas* y sus curvas integrales son las curvas asintóticas de la superficie S .

Notemos que los campos de direcciones asintóticas de superficies genéricas no tienen puntos singulares, mientras que en superficies arbitrarias éstos sí pueden tener puntos singulares.

Comportamiento topológico de las curvas asintóticas en una vecindad de un punto parabólico genérico. Las curvas asintóticas de una superficie genérica se agrupan en dos familias, cada una de éstas es tangente a uno de los campos de direcciones asintóticas de la superficie.

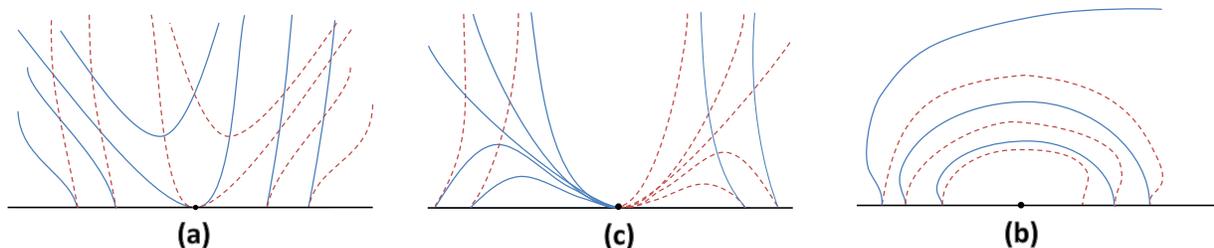
En una vecindad de un punto parabólico genérico, las curvas asintóticas son difeomorfas a una familia de parábolas semicúbicas de la forma $u^2 = v^3 + c$ ([42] y [4] pág. 27). Las dos ramas de cada parábola semicúbica provienen de una familia distinta de curvas asintóticas (ver figura 2.1).



– Figura 2.1 –

Las curvas asintóticas, en una vecindad de un punto parabólico especial, se comportan topológicamente de tres maneras distintas. La figura 2.2 ilustra dichos comportamientos. Para

mostrar el por qué las curvas asintóticas tienen estos comportamientos topológicos introducimos lo siguiente.



– **Figura 2.2** – Comportamiento topológico de los campos de direcciones asintóticas en una vecindad de un punto parabólico especial.

La superficie Λ en el espacio de 1-jets. Sea S una superficie genérica en \mathbb{R}^3 (o en $\mathbb{R}P^3$) y $q \in S$ un punto parabólico especial. En un subconjunto abierto $V \subseteq S$ de q , la superficie S es descrita con la gráfica de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Realizando un cambio de coordenadas apropiado, podemos suponer que $0 = f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0)$ y que la dirección asintótica en $(0,0)$ coincide con el eje x . En particular, $q = (0,0,0)$.

La diferencial de la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$ de S en el plano $\{(x, y)\}$ lleva cada uno de los campos de direcciones asintóticas de S en un campo de direcciones sobre U . Estos campos de direcciones están definidos por la ecuación $f_{xx}(x, y) dx^2 + 2f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2 = 0$. A esta ecuación le asociamos la ecuación diferencial implícita

$$F(x, y, p) = f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)p + p^2 f_{yy}(x, y) = 0, \text{ donde } p = \frac{dy}{dx}.$$

El espacio de variables x, y, p , con $p = \frac{dy}{dx}$, es conocido como el *espacio de 1-jets de funciones $y(x)$* . En este espacio, la ecuación $F = 0$ define una superficie Λ . Como S es genérica, la superficie Λ es no singular (ver [22], [15] y [13]).

Sea $\phi : \Lambda \rightarrow \{(x, y)\}$ la proyección que asigna, a cada punto $(x, y, p) \in \Lambda$ el punto (x, y) . Un punto sobre la superficie Λ se llama *regular* si no es punto crítico de ϕ . Un punto $t \in \Lambda$ que no es regular es llamado *singular* de Λ . El *criminante* de la ecuación implícita $F = 0$, está formado por el conjunto de puntos singulares de Λ . Este conjunto es una curva diferenciable encajada en el espacio de 1-jets. La imagen del criminante bajo ϕ es llamada la *curva discriminante*.

Nótese también que la proyección π lleva la curva parabólica de S en la curva discriminante.

Campo de direcciones sobre Λ . En ocasiones es conveniente estudiar los campos de direcciones de la ecuación $F = 0$, no en el plano $p = 0$, sino como un solo campo de direcciones sobre la superficie Λ . Para construir este campo de direcciones introducimos lo siguiente.

La 1-forma $\alpha = dy - p dx$ determina en el espacio de 1-jets un campo de planos llamado *el campo de planos de contacto*. El *plano de contacto* en un punto t del espacio de 1-jets es el plano cuyos puntos son los vectores con origen en t que anulan a la forma α . En particular, cada plano de contacto contiene una recta paralela al eje p .

En cada punto $t \in \Lambda$, la intersección del plano de contacto en t con el plano tangente $T_t\Lambda$ a Λ es una recta tangente a Λ o todo el plano $T_t\Lambda$. De esta manera, el campo de planos de contacto determina un campo de direcciones sobre Λ , el cual es diferenciable en una vecindad de cada uno de los puntos donde el plano de contacto no coincide con el plano tangente a Λ . En particular, este campo es diferenciable en cada punto regular de la ecuación $F = 0$. En puntos regulares, la diferencial de la proyección ϕ lleva el campo de direcciones tangente a Λ en los campos de direcciones determinados por la ecuación diferencial implícita $F = 0$.

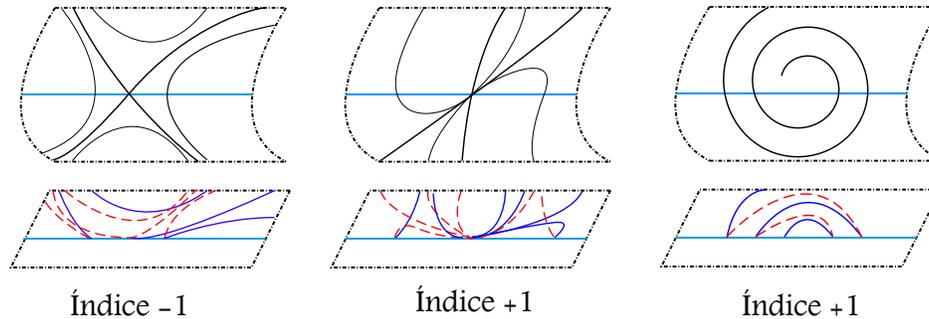
En cada punto del discriminante hay dos planos verticales: el plano tangente a la superficie y el plano de contacto. Estos planos son distintos si t es un punto del discriminante tal que $\pi^{-1}(\phi(t))$ es parabólico genérico y coinciden si $\pi^{-1}(\phi(t))$ es parabólico especial. Así, el campo de direcciones tangente a la superficie Λ , obtenido por la estructura de contacto, es diferenciable salvo en los puntos t tales que $\pi^{-1}(\phi(t))$ es parabólico especial. En este caso, t es un punto singular del campo de direcciones tangente a Λ .

De esta manera, a cada punto parabólico especial $q \in S$ le hemos asociado un punto singular del campo de direcciones tangente a Λ . Como S es genérica, estos puntos singulares son sólo del tipo *foco, nodo y silla* (figura 2.3).

Hay tres tipos de puntos parabólicos especiales (ver [22], [10], [42], [21]). Cada tipo se distingue de acuerdo al tipo de punto singular que le corresponde en el campo de direcciones sobre Λ . Las figuras 2.2 (a), 2.2 (b) y 2.2 (c) ilustran el comportamiento cualitativo de las curvas asintóticas en una vecindad de un punto PE. A los puntos PE que son como en la figura 2.2 (a) el correspondiente punto singular en Λ es del tipo silla, los puntos PE como en la figura 2.2 (b) les corresponde un punto singular del tipo nodo y los puntos PE de la figura 2.2 (c) les corresponde un punto singular del tipo foco.

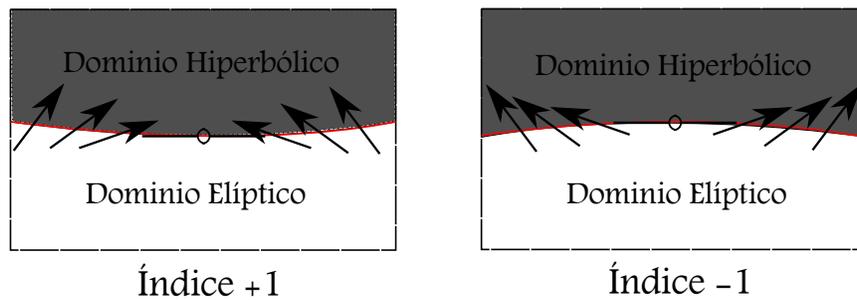
Índice de un punto PE. A cada punto parabólico especial p se le asocia el valor 1 o -1 de la siguiente manera. Decimos que el *índice del punto PE* p es $+1$ si el campo de direcciones sobre la superficie Λ asociado al campo de direcciones asintóticas tiene un punto singular del tipo nodo

o foco. El *índice del punto PE* p es -1 si el campo de direcciones sobre la superficie Λ tiene un punto singular del tipo silla.



– **Figura 2.3** – Índice de un punto PE de acuerdo al tipo de punto singular en Λ .

Una definición alternativa de índice de un punto PE es la siguiente (ver [8] y [67] para esta definición). En una vecindad de p contenida en la curva parabólica, elegimos un vector en la dirección del dominio hiperbólico sobre cada una de las rectas asintóticas de dicha vecindad. Si los vectores apuntan hacia donde está situado el punto PE p , decimos que p tiene *índice +1*. Si los vectores apuntan hacia el lado contrario donde está situado el punto PE p , decimos que p tiene *índice -1* (figura 2.4).



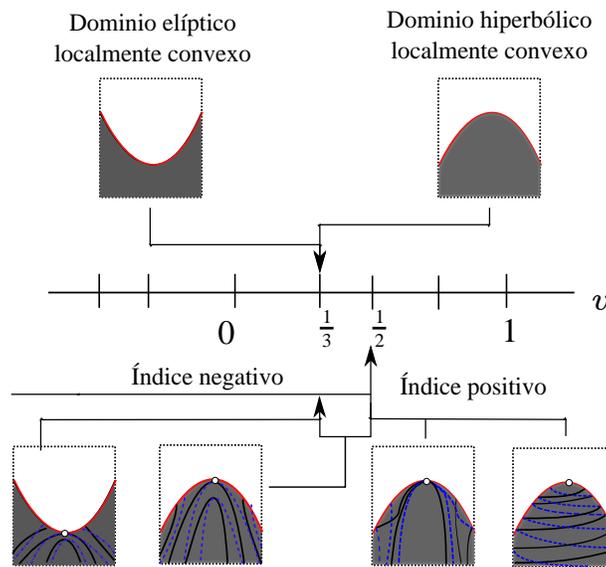
– **Figura 2.4** – Índice de un punto PE

La figura 2.2 (a) corresponde a un punto PE con índice -1. Mientras que las figuras 2.2 (b) y 2.2 (c), corresponden a un punto PE con índice 1.

En [67], R. Uribe usó la forma normal de Platonova $G_v(x, y) = \frac{y^2}{2} - x^2y + vx^4$, con $v \neq 0, \frac{1}{2}$, para describir los valores de v para los cuales el punto $(0, 0, 0)$ es un punto parabólico especial de índice 1 o -1 de la superficie $z = G_v(x, y)$.

Proposición 2.2 ([67]) *Un punto PE es de índice positivo si y sólo si $v > \frac{1}{2}$. Un punto PE es de índice negativo si y sólo si $v < \frac{1}{2}$.*

Dominios hiperbólicos y elípticos localmente convexos. El dominio elíptico de una superficie no singular es *localmente convexo en la vecindad de un punto PE* p si la proyección de una vecindad elíptica de p al plano tangente T_pS , desde algún punto exterior a T_pS , es localmente convexo. Es decir, la recta tangente a la curva parabólica en un punto de ésta se proyecta en una recta que localmente está dentro de la proyección del dominio hiperbólico. El dominio hiperbólico es *localmente convexo en la vecindad de un punto PE* si la recta tangente de la curva parabólica en p se proyecta en una recta que localmente está dentro de la imagen del dominio elíptico.



– Figura 2.5 – Relación entre dominios localmente convexos e índices de los puntos PE.

Proposición 2.3 ([67]) En un punto PE el dominio hiperbólico es localmente convexo si y sólo si $v > \frac{1}{3}$. El dominio elíptico es localmente convexo si y sólo si $v < \frac{1}{3}$.

Teorema 2.3 ([1]) i) Si p es un punto PE de índice positivo, entonces el dominio hiperbólico es localmente convexo.

ii) Existen puntos PE de índice negativo tales que el dominio hiperbólico es localmente convexo.

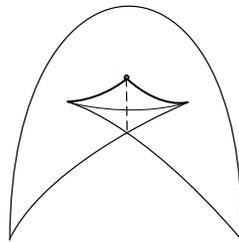
Teorema 2.4 ([67]) Si un punto PE es de índice negativo y el dominio hiperbólico es localmente convexo entonces $\frac{1}{3} < v < \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.1 ([67]) Los puntos PE en una superficie algebraica genérica de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$ tienen índice negativo.

2.3. Superficies duales de superficies genéricas.

Espacio proyectivo dual y superficie dual. El *espacio dual* \mathbb{RP}^{3v} de \mathbb{RP}^3 es el espacio formado por todos los planos de \mathbb{RP}^3 . La *superficie dual* de una superficie $S \subset \mathbb{RP}^3$ es la superficie $S^v \subset \mathbb{RP}^{3v}$ formada por el conjunto de los planos tangentes a S . La función $T : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^{3v}$ que envía la superficie S en su dual S^v es llamada la *aplicación tangencial*.

Las singularidades que pueden aparecer en la superficie dual de una superficie genérica S son *curvas de autointersección de S^v* , *aristas cuspidales* y puntos del tipo *cola de golondrina* ó *swallowtail* de S^v (figura 2.6).



– Figura 2.6 –

Lema 2.1 ([66]) *La aplicación tangencial lleva el dominio hiperbólico (elíptico) de $S \subset \mathbb{RP}^3$ en el dominio hiperbólico (elíptico) de $S^v \subset \mathbb{RP}^{3v}$. Lleva curvas asintóticas de S en curvas asintóticas de S^v . La curva parabólica de S es llevada en la arista cuspidal de S^v y los puntos PE en puntos singulares del tipo cola de golondrina.*

Planos bitangentes a una superficie y curva conodal. Un *plano bitangente* de S es un plano que es tangente a S en al menos dos puntos distintos. La *curva conodal* de S es la cerradura en S del conjunto de puntos $q \in S$ tales $T_q S$ es un plano bitangente.

La curva conodal es tangente a la curva parabólica únicamente en los puntos PE. Además, en una vecindad agujerada de un punto PE p contenida en S , la curva conodal permanece dentro del dominio hiperbólico de S o bien dentro del dominio elíptico de S .

Lema 2.2 ([67]) *En una vecindad de un punto PE p , excepto p , la curva conodal está contenida en el dominio elíptico (hiperbólico) de S si y sólo si p es un punto PE de índice +1 (índice -1).*

Lema 2.3 ([66]) *La curva de autointersección de la superficie dual proviene, mediante la aplicación tangencial, de la curva conodal de una superficie suave S .*

Swallowtails elípticos e hiperbólicos. La superficie dual puede ser de dos tipos distintos en los puntos singulares del tipo cola de golondrina. Un punto swallowtail en S^\vee se llama *hiperbólico (elíptico)* si localmente la curva de autointersección de S^\vee está contenida en el dominio hiperbólico (elíptico) de S^\vee .

Teorema 2.5 ([67]) *Un punto swallowtail hiperbólico es el dual de un punto PE con índice -1. Un punto swallowtail elíptico es el dual de un punto PE con índice +1.*

2.4. Antecedentes al estudio de curvas Hessianas

Un problema en dimensión dos análogo al problema de puntos de inflexión de curvas planas. El teorema de Möbius afirma que cualquier curva que sea una perturbación de una recta proyectiva en el plano proyectivo tiene al menos 3 puntos de inflexión. V. I Arnold realizó la siguiente observación (ver [9]).

El análogo multidimensional de un punto de inflexión de una curva plana, es la curva parabólica de una superficie contenida en el espacio proyectivo junto con el conjunto de puntos parabólicos especiales sobre dicha curva.

Recordemos que en el espacio proyectivo dual de $\mathbb{R}P^3$ a la curva parabólica de una superficie S en $\mathbb{R}P^3$ le corresponde una arista cuspidal en la superficie dual de S . A cada punto parabólico especial le corresponde en la superficie dual, un punto singular de tipo cola de golondrina. Con el propósito de encontrar un resultado análogo al teorema de Möbius en el caso de superficies en $\mathbb{R}P^3$, una pregunta que resulta es la siguiente:

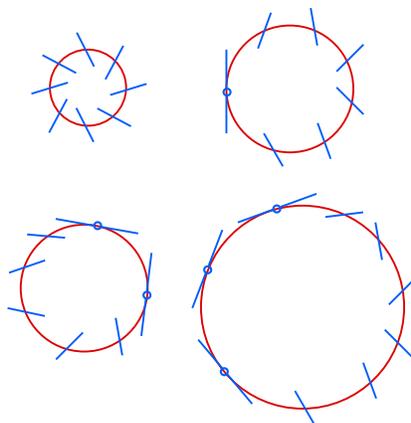
¿Cuál es el número mínimo de aristas cuspidales y el número mínimo de puntos singulares del tipo cola de golondrina que tiene la superficie dual de una superficie que proviene de perturbar un plano proyectivo en $\mathbb{R}P^3$?

En otras palabras, ¿cuál es el número mínimo de componentes conexas de la curva parabólica y cuál es el número mínimo de puntos PE que tiene una superficie que proviene de perturbar un plano proyectivo en $\mathbb{R}P^3$?

En el caso de superficies algebraicas cúbicas, B. Segre mostró lo siguiente.

Teorema 2.6 ([65]) *El número de componentes conexas de la curva parabólica de una superficie algebraica genérica de grado tres homeomorfa a $\mathbb{R}P^2$ es al menos cuatro y el número de puntos PE es igual a seis.*

Por medio de experimentos computacionales, F. Aicardi observó que la distribución de los puntos PE en las cuatro componentes de la curva parabólica de superficies cúbicas era $0+1+2+3=6$, como en la figura 2.7. E. Shustin probó, usando el método de Segre, que ésta es la única distribución posible de los puntos PE en la curva parabólica de cualquier superficie cúbica genérica homeomorfa a $\mathbb{R}P^2$ (ver [9]). Así, el análogo en el caso de superficies del teorema de Móbius parecía ser la siguiente conjetura.



– **Figura 2.7** – Distribución de los puntos PE en las componentes conexas de la curva parabólica de una superficie cúbica

Conjetura de Aicardi [9] (ver también [6], problema 1995-3). El número de componentes conexas de la curva parabólica de una perturbación genérica del plano proyectivo en $\mathbb{R}P^3$ es al menos cuatro, mientras que el número de puntos PE es al menos 6. Además, cuando únicamente hay 4 componentes conexas y 6 puntos PE, la distribución de los puntos PE es $0+1+2+3=6$ y cada una de las cuatro componentes conexas de la curva parabólica es la frontera de un disco.

Con respecto a la primera parte de la conjetura de Aicardi, en 1997, V. I. Arnold [8] estudió superficies obtenidas de perturbaciones de un plano proyectivo en $\mathbb{R}P^3$. El resultado que obtuvo es que para dichas perturbaciones el número de componentes de la curva parabólica es al menos cuatro.

Contraejemplo de Panov a la conjetura de Aicardi. En 1998, D. A. Panov [56] encontró un ejemplo de una superficie no singular en $\mathbb{R}P^3$, con la propiedad de que la curva parabólica de esta superficie es conexa. Panov obtuvo esta superficie perturbando un plano proyectivo real dentro de $\mathbb{R}P^3$. Este ejemplo descarta la parte correspondiente al número de componentes conexas de la curva parabólica en la conjetura de Aicardi; sin embargo, permanece vigente la

parte de la conjetura sobre el número de puntos PE. El ejemplo de Panov no descarta esta parte de la conjetura de Aicardi, pues en la curva parabólica de la superficie que Panov exhibe hay 12 puntos PE.

Debido al contraejemplo de Panov, la conjetura de Aicardi se transforma en el siguiente problema (ver [6] problema 1998-2). ¿Puede una superficie genérica en $\mathbb{R}P^3$ tener menos de seis puntos PE? Si el número de puntos PE es menor a 6 ¿puede el número de componentes de la curva parabólica ser menor a cuatro?

Teoremas de Panov sobre superficies cúbicas. En los siguientes teoremas sólo se considera el caso de superficies cúbicas genéricas en $\mathbb{R}P^3$, pues es necesario que su complejificación sea una superficie cúbica compleja que contenga 27 líneas complejas en posición general; es decir, cualesquiera dos de las 27 líneas se intersecan y si dos de estas líneas se intersecan en un punto p , entonces ninguna otra línea de las 27 pasa por p .

Teorema 2.7 ([55]) *Si $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ es una superficie cúbica difeomorfa a $\mathbb{R}P^2$, entonces tiene 3 puntos hiperbólicos especiales y 6 puntos elípticos especiales. La suma del número de los puntos parabólicos especiales en cualquier componente de la curva parabólica de la superficie y el número de puntos elípticos especiales rodeados por esta componente es 3. Un plano proyectivo tangente a S en un punto elíptico especial interseca a la superficie en una recta proyectiva. Los puntos hiperbólicos especiales son los puntos de intersección de dos rectas proyectivas contenidas sobre la superficie.*

Teorema 2.8 ([55]) *Sea $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ una superficie cúbica consistente de dos componentes conexas. En este caso, una de las componentes es difeomorfa a la esfera y la otra al plano proyectivo. La componente conexa difeomorfa a la esfera contiene exactamente 6 puntos elípticos especiales.*

Conjetura de Panov sobre superficies cúbicas [55]. Cualquier superficie cúbica $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ difeomorfa a $\mathbb{R}P^2$ tiene al menos 6 puntos parabólicos especiales, al menos 6 puntos elípticos especiales y al menos 3 puntos hiperbólicos especiales, contados con multiplicidad¹.

2.5. Geometría afín de la gráfica de una función polinómica real

Puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos en gráficas de funciones polinómicas. En este apartado consideraremos f un polinomio de grado n en $\mathbb{R}[x, y]$ y su gráfica

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - f(x, y) = 0\}.$$

¹Para esta definición de multiplicidad ver [55].

La clasificación de los puntos $(x, y, f(x, y))$ de S_f en elípticos, parabólicos e hiperbólicos, puede ser dada también por medio del signo que toma el polinomio Hessiano de f , $Hessf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ en (x, y) .

Definición. Un punto $p = (x, y, f(x, y))$ es *hiperbólico* si el polinomio $Hessf$ es negativo en (x, y) . El punto p es *parabólico* si $Hessf$ es cero en (x, y) y el punto p es *elíptico* si $Hessf$ es positivo en (x, y) .

Como la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$ de la superficie S_f al plano $\{(x, y)\}$ es un difeomorfismo entre estas dos superficies, podemos identificar los puntos de la gráfica de f con los del plano $\{(x, y)\}$. Así, al punto (x, y) le llamaremos *hiperbólico* (o *elíptico*) si $(x, y, f(x, y))$ es un punto hiperbólico (o elíptico) de S_f . En el caso del conjunto de puntos parabólicos tenemos lo siguiente.

Definición. La *curva Hessiana* de $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es el conjunto de ceros del polinomio $Hessf(x, y)$.

De manera equivalente, la proyección ortogonal de la curva parabólica de S_f al plano $\{(x, y)\}$ es la curva Hessiana de f . En particular, estas dos curvas son difeomorfas.

Si $p = (x, y, f(x, y)) \in S_f$ es un punto PE, la recta tangente a la curva parabólica de S_f en p es su dirección asintótica y la proyección ortogonal de esta recta es tangente a la curva Hessiana en (x, y) .

Definición. Un punto (x, y) en la curva Hessiana es llamado *punto parabólico especial* o *punto PE* si el punto $(x, y, f(x, y))$ es un punto PE de la superficie S_f .

Contando componentes de la curva Hessiana. Dentro del estudio de la geometría afín de la gráfica de una función polinómica real es interesante saber el número de componentes conexas compactas y no compactas que puede tener su curva Hessiana. Si la curva Hessiana de f es no singular y contiene al menos una componente no compacta, el número máximo de componentes conexas compactas que puede tener es $(2n - 5)(n - 3)$ y el número máximo de no compactas, es $2n - 4$. Mientras que si la curva Hessiana de f es no singular y compacta, el número máximo de componentes conexas que puede tener es $(2n - 5)(n - 3) + 1$. En efecto, todas estas cotas se obtienen de manera directa de las cotas de Harnack para curvas proyectivas (teorema 1.1).

Existen ejemplos de curvas Hessianas compactas de un polinomio f de grado $n = 3$ y $n = 4$ con exactamente 1 y 4 componentes conexas. El ejemplo de una curva Hessiana de grado 4 con cuatro componentes conexas fue exhibida por A. Ortiz y F. Sotille en [54]. Los ejemplos que se conocen para valores de $n \geq 5$ no realizan la cota de Harnack. En efecto, la cota de Harnack para los valores $n = 5, 6, 7$ es 11, 22 y 37, respectivamente, mientras que el número de componentes conexas de curvas Hessianas compactas de grado n (para valores de $n = 5, 6, 7$) que se han exhibido hasta ahora son 8, 11 y 15, respectivamente.

En el caso de curvas Hessianas no compactas de grado $n \geq 4$, los ejemplos conocidos [54] no alcanzan simultáneamente las cotas superiores $(2n - 5)(n - 3)$ y $2n - 4$. Por ejemplo, si el grado de f es 4, los ejemplos que se conocen toman los valores $(2, 4)$ y $(3, 2)$, donde los primeros números dentro de cada paréntesis corresponden al número de componentes compactas y los segundos números representan el número de componentes no compactas. Las cotas superiores en este caso son $(3, 4)$. Para $n = 5$, las cotas superiores son $(10, 6)$ mientras que los ejemplos que se han exhibido tienen $(6, 4)$ y $(7, 2)$ componentes conexas.

Conjuntos de Zariski en el espacio de polinomios reales de grado $\leq n$. El conjunto de polinomios $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n se descompone en dos subconjuntos que son mutuamente excluyentes. Uno de estos subconjuntos tiene la siguiente propiedad.

Teorema 2.9 ([34]) *El conjunto de polinomios de grado n cuya curva Hessiana es de grado $2n - 4$, forma un abierto de Zariski dentro del espacio de polinomios reales de grado menor o igual que n .*

El segundo de los subconjuntos es el cerrado de Zariski, formado por polinomios con curva Hessiana de grado menor que $2n - 4$. Usando resultados de la teoría clásica de invariantes, es posible describir explícitamente este cerrado de Zariski (ver por ejemplo, [31] y [50] o la proposición 5.1).

Teorema 2.10 *El polinomio Hessiano de un polinomio f , real o complejo, es de grado menor que $2n - 4$ si y sólo si f_n , la componente homogénea de grado n de f , es la n -ésima potencia de un polinomio homogéneo lineal.*

La curva Hessiana proyectiva asociada a una función polinómica. Vamos ahora a considerar la extensión natural del plano afín al plano proyectivo real y la proyectivización de la curva Hessiana de f .

Definición. Sea $H(x, y, z)$ el polinomio homogéneo con coeficientes reales que se obtiene al homogeneizar el polinomio $Hess f$. Esto es, tal que $H(x, y, 1) = h(x, y) = Hess f(x, y)$. A la curva $H(x, y, z) = 0$ le llamamos la *curva Hessiana proyectiva de f* .

Al espacio de superficies algebraicas S_f que son la gráfica de una función polinómica $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n lo denotamos con \mathcal{S}^n .

Definición. Dado $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 4$, la superficie algebraica S_f^n de grado n es *genérica* en el espacio \mathcal{S}^n si el germen de S_f en cada punto $p \in S_f$ es equivalente al germen de la superficie definida por alguna forma normal de Platonova (Teorema 2.1) y si la curva Hessiana proyectiva es no singular en $\mathbb{R}P^2$.

Cuando $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio de grado $n = 3$, decimos que S_f es *genérica* en el espacio \mathbb{S}^3 si la curva Hessiana proyectiva asociada a f es una curva algebraica no singular en $\mathbb{R}P^2$ de grado $2n - 4$ y cada uno de los puntos de S_f pertenece a uno de los tipos elíptico, hiperbólico genérico, parabólico genérico, parabólico especial ó a alguno de los siguientes tipos.

- (5') Un punto p es de *inflexión* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas; una de las cuales tiene orden de contacto con S , en p , igual a tres y la otra tiene orden de contacto mayor o igual a cuatro.
- (6') Un punto p es *hiperbólico especial* si tiene exactamente dos direcciones asintóticas, las cuales tienen orden de contacto con S , en p , al menos cuatro.

Si la superficie S_f es genérica, entonces la curva Hessiana de f es de grado $2n - 4$. Además, si la curva Hessiana de f es no vacía, el conjunto de puntos hiperbólicos y el de puntos elípticos de S_f forma un abierto no vacío de S_f .

Notemos que aún cuando f sea un polinomio de grado n y su curva Hessiana sea una curva no singular de grado $2n - 4$, los campos de direcciones asintóticas asociados a f pueden tener tangencias no aisladas con la curva Hessiana de f (ver ejemplo 2.2).

Ejemplo 2.2 La curva Hessiana del polinomio $f(x, y) = (x^2 + y^2 - a)(x^2 + y^2 - b) \in \mathbb{R}[x, y]$, con $0 < a < b$, es la unión de dos circunferencias determinadas por el conjunto de ceros del polinomio $Hess f(x, y) = 4(a + b - 6x^2 - 6y^2)(a + b - 2x^2 - 2y^2)$. Esta curva Hessiana es no singular y una de sus componentes, la circunferencia $a + b - 2x^2 - 2y^2 = 0$, es una curva asintótica. Esto es, la recta tangente en cada uno de los puntos de esta componente conexa de la curva Hessiana es asintótica, y por tanto el campo de direcciones asintóticas de S_f tiene una infinidad de tangencias con la curva Hessiana de f .

Observación 2.1 ([52]) La cerradura proyectiva $\widehat{S}_f \subset \mathbb{R}P^3$ de la superficie algebraica S_f no pertenece al conjunto de superficies genéricas en $\mathbb{R}P^3$, pues \widehat{S}_f tiene puntos singulares en el plano al infinito de $\mathbb{R}P^3$.

Componente no acotada del complemento de una curva Hessiana compacta. Ahora, supongamos que la curva Hessiana de f es compacta. En este caso, el complemento de la curva Hessiana en \mathbb{R}^2 , contiene una componente conexa la cual no es acotada. A la cerradura, en \mathbb{R}^2 , de la componente no acotada del complemento de la curva Hessiana de f en \mathbb{R}^2 la denotamos con C_u . La frontera de C_u son los óvalos exteriores de $Hess f = 0$.

Definición. Decimos que C_u es *hiperbólica (elíptica)* si sus puntos interiores son hiperbólicos (elípticos).

Ejemplos de polinomios con curva Hessiana compacta y C_u hiperbólica es la siguiente.

Definición. Decimos que $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ es un *polinomio factorizable en posición general* si f es el producto de n polinomios reales de grado uno l_1, \dots, l_n , tales que

1. Cada pareja de rectas $l_i = 0$ y $l_j = 0, i \neq j$ se intersecan en un punto.
2. Para cada $i = 1, \dots, n$, la recta $l_i = 0$ no contiene puntos críticos de la función $\prod_{j \neq i} l_j$.

Teorema 2.11 ([52]) Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ un polinomio factorizable en posición general. Entonces,

1. La curva Hessiana de f es no singular, compacta, con $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ componentes conexas y tiene $n(n-2)$ puntos parabólicos especiales con índice -1 .
2. La curva flecnodal de S_f es la curva $l_1 \cdots l_n = 0$ y C_u es hiperbólica.

En [34] I. Martínez, A. Ortiz y F. Sánchez probaron los dos resultados siguientes.

Proposición 2.4 Supongamos que existe una línea recta L en el plano $\{(x, y)\}$ que no interseca a la curva Hessiana del polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$. Si $f|_L$ es un polinomio de una variable de grado impar, entonces L está contenida en el conjunto de puntos hiperbólicos de f .

Con el siguiente teorema, los autores de [34] dan condiciones bajo las cuales se garantiza que C_u sea hiperbólica.

Teorema 2.12 Sea $f = \sum_{i=1}^n f_i \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $n \geq 3$ tal que su curva Hessiana es compacta. Entonces se cumple:

1. Si el grado de f es impar entonces, C_u es hiperbólica.
2. Si n es par, el grado de $\text{Hess} f \in \mathbb{R}[x, y]$ es igual a $2n - 4$, $f_n^{-1}(0) \neq \{(0, 0)\}$ y la curva Hessiana proyectiva es no singular. Entonces, C_u es hiperbólica.

En el caso en que $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es de grado par, en [16] A. Camacho y A. Ortiz exhiben la siguiente familia de polinomios con curva Hessiana compacta y C_u elíptica.

Teorema 2.13 Sean m_1, \dots, m_k números reales positivos tales que $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k$ y sea $f = \prod_{i=1}^k (x^2 + y^2 - m_i^2) \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $2k$. Entonces, la curva Hessiana de f es no singular y compacta; más aún, es la unión de $2k - 2$ óvalos concéntricos y C_u es elíptica.

Nótese que la curva Hessiana de f es de grado $4k - 4$ y en consecuencia, dicha curva tiene el número máximo de componentes anidadas, esto es un nido de profundidad $2k - 2$.

Ecuación diferencial de direcciones asintóticas. Los campos de direcciones asintóticas de S_f están descritos de manera global por la ecuación diferencial cuadrática:

$$II(S_f) = f_{xx}(x, y) dx^2 + 2f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2 = 0.$$

El discriminante $\Delta(x, y)$ de $II(S_f) = 0$ es el polinomio $\Delta(x, y) = -\text{Hess}f(x, y)$. Así, el conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 tales que $\Delta(x, y) < 0$ es el conjunto de puntos elípticos y el conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 tales que $\Delta(x, y) > 0$ es el conjunto de puntos hiperbólicos.

Definición. Un punto singular² de la ecuación $II(S_f) = 0$ es un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f_{xx}(x, y) = f_{xy}(x, y) = f_{yy}(x, y) = 0$.

Ejemplo 2.3 Sea $h \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio homogéneo de grado $n \geq 3$. El origen $(0, 0)$ es un punto singular de la ecuación $II(S_h) = 0$.

Observación 2.2 Si $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es grado $n \geq 3$ y S_f es una superficie genérica, entonces la ecuación $II(S_f) = 0$ no tiene puntos singulares.

Polinomios homogéneos hiperbólicos y elípticos. Un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ es *elíptico* si su Hessiano es positivo fuera del origen $(0, 0)$ y cero en este punto. Un polinomio *hiperbólico* es un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{R}[x, y]$, tal que su Hessiano es negativo en todos los puntos de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y cero en $(0, 0)$. Si f es de grado $n = 2$, lo llamaremos *elíptico* (*hiperbólico*) si su Hessiano es positivo (negativo) en cualquier punto de \mathbb{R}^2 .

Los dos campos de direcciones asintóticas de un polinomio homogéneo hiperbólico f están definidos en todo el plano \mathbb{R}^2 y si $n \geq 3$, el origen $(0, 0)$ es el único punto singular de los dos campos de direcciones. El índice de Poincaré de cada uno de los dos campos de direcciones asintóticas en el punto $(0, 0)$ es el mismo y será denotado con $\text{Ind}_{f_n}(0)$.

²De acuerdo a la clasificación de los puntos de una superficie regular S en \mathbb{R}^3 por medio de su curvatura Gaussiana, un punto $(x, y) \in S$ en el que la segunda forma fundamental $II(S_f)$ es la forma cuadrática cero es un punto umbílico plano de S .

Teorema 2.14 ([2]) Sea $f_n \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio homogéneo hiperbólico de grado n con k factores lineales reales. Entonces, $1 - \frac{k}{2} = \text{Ind}_{f_n}(0)$. Además, si n es par, entonces $\text{Ind}_{f_n}(0)$ es un entero menor o igual que cero. Si n es impar, entonces $\text{Ind}_{f_n}(0) \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ y es menor o igual que $\frac{1}{2}$.

El teorema 2.14 fue demostrado por V. Arnold. En el mismo artículo, él demostró además que el espacio de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado $n = 3$ y 4 es conexo, mientras que el espacio de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado 6 es desconexo. Además, hizo la siguiente conjetura.

Conjetura 1 ([2]) El número de componentes conexas del espacio de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado n crece respecto a n , al menos como una función lineal de n .

Definición. Decimos que un polinomio homogéneo $f_n \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n es *factorizable* si f_n es igual a un producto de n polinomios reales homogéneos de grado 1 , $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{R}[x, y]$, tales que las rectas $l_i = 0$ y $l_j = 0$ son distintas, si $i \neq j$.

Ejemplo 2.4 Una clase particular de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado $n \geq 3$, son los polinomios homogéneos factorizables (ver [24]). El espacio de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado $n = 3, 4$ coincide con el conjunto de polinomios homogéneos factorizables.

Ejemplo 2.5 Para cada número natural k , el polinomio $Q^{2k}(x, y) = (x^2 + y^2)^k$ es un polinomio homogéneo elíptico (ver [2] y [53]).

Teorema del índice en el disco. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada positivamente y sea X un campo de direcciones tangente a M , el cual es diferenciable salvo en los puntos singulares los cuales son aislados. Sea $p \in M$ un punto singular de X y $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva simple cerrada, orientada de acuerdo a la orientación de M , tal que la región D , acotada por γ , es simplemente conexa y p es el único punto singular en la cerradura en M de D . Consideremos $\nu(t), t \in [0, 1]$ un campo de vectores en la dirección de X , continuo en el intervalo $(0, 1)$. Sea $\theta(t)$ el ángulo entre el vector tangente a γ en $\gamma(t)$ y el vector $\nu(t)$. Si $X(t_0)$ es tangente a γ en $\gamma(t_0)$ decimos que la *tangencia es interior* si existe un intervalo $(\epsilon - t_0, t_0 + \epsilon) \subset [0, 1]$ en el que el ángulo $\theta(t)$ es creciente. Decimos que la *tangencia es exterior* si existe un intervalo $(\epsilon - t_0, t_0 + \epsilon) \subset [0, 1]$ en el que el ángulo $\theta(t)$ es decreciente.

Si el número de tangencias de X en $\gamma(I)$ es finito, entonces el índice de Poincaré del campo de direcciones X en p , denotado con $\text{Ind}(p)$, es [38]:

$$\text{Ind}(p) = 1 + \frac{i - e}{2},$$

donde i es el número de tangencias interiores sobre γ y e es el número de tangencias exteriores sobre γ . Esta descripción del índice es conocida como la *fórmula del índice de Poincaré para el disco*. Una generalización de esta fórmula a otras superficies con frontera es la siguiente.

Teorema de Poincaré-Hopf para superficies con frontera. Consideremos una superficie M con frontera, no singular, orientada positivamente y X un campo de direcciones continuo y tangente a M . Sea p un punto en la frontera de M tal que $X(p)$ es tangente a ∂M y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \partial M$ una curva diferenciable que recorre a $\gamma(-\epsilon, \epsilon)$ en la dirección positiva y tal que $\gamma(0) = p$. Decimos que p es un *punto de tangencia interior* si el ángulo $\theta(t)$ entre $\gamma'(t)$ y $\nu(t)$ es creciente, donde $\nu(t)$ es un campo vectorial continuo tangente a X en $\gamma(t)$. De manera análoga, un punto p en la frontera de M es un *punto de tangencia exterior* si X es tangente a la frontera de M en p y el ángulo $\theta(t)$ es decreciente.

Teorema 2.15 ([59]) *Sea M superficie no singular, orientable y con frontera. Sea X un campo de direcciones continuo y tangente a M con un número finito de puntos singulares ξ_1, \dots, ξ_k , tal que ninguno de éstos pertenece a la frontera de M . Supongamos que en la frontera de M hay un número natural i de tangencias interiores y un número natural e de tangencias exteriores. Entonces,*

$$\sum_{j=1}^k \text{Ind}(\xi_j) = \chi(M) + \frac{i - e}{2}.$$

Campos de direcciones asintóticas en la compactificación de \mathbb{R}^2 con un punto. En [35], I. Hernández, A. Ortiz y F. Sánchez consideraron la compactificación con un punto del plano \mathbb{R}^2 . Este punto es llamado *punto al infinito* y es denotado con ∞ . La compactificación de \mathbb{R}^2 con un punto es homeomorfa a la esfera unitaria S^2 de \mathbb{R}^3 . Debido a esto, consideramos a S^2 como la compactificación de \mathbb{R}^2 con el punto al infinito ∞ , al que identificamos con el punto $(0, 0, 1)$.

Para estudiar las curvas asintóticas en una vecindad de ∞ , consideraron el cambio de coordenadas $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definido por

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right).$$

Con el cambio de coordenadas φ , a partir de la ecuación $II(S_f) = 0$ obtuvieron una ecuación diferencial cuadrática, denotada con $\tilde{II}(S_f) = 0$. Esta nueva ecuación es polinómica y su parte homogénea de menor grado se obtiene de la parte homogénea de mayor grado de $II(S_f) = 0$.

Si el polinomio $u^2 + v^2$ no divide a ninguno de los sumandos homogéneos de la ecuación $\tilde{II}(S_f) = 0$, se dice que $\tilde{II}(S_f) = 0$ tiene *buena multiplicidad en $(0, 0)$* .

Denotamos con \widetilde{C}_u al subconjunto de la esfera unitaria S^2 que resulta de la compactificación con el punto al infinito de la cerradura de C_u . La superficie con frontera \widetilde{C}_u es no singular y tiene al punto ∞ en su interior. La frontera de \widetilde{C}_u tiene tantas componentes conexas como óvalos exteriores tiene la curva Hessiana. Denotando con N_u a tal número, se sigue que la característica de Euler de \widetilde{C}_u es igual a $\chi(\widetilde{C}_u) = 2 - N_u$.

Teorema 2.16 ([35]) *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n es elíptico o hiperbólico. Suponga que $\widetilde{\Pi}(S_f) = 0$ tiene buena multiplicidad en $(0, 0)$. Entonces, la curva Hessiana de f es compacta y C_u es elíptica o hiperbólica, respectivamente. Además, si f_n hiperbólico, entonces los campos de direcciones asintóticas sobre C_u se extienden a \widetilde{C}_u de tal manera que ∞ es un punto singular aislado de $\widetilde{\Pi}(S_f) = 0$.*

Del teorema 2.16 tenemos que si f_n es hiperbólico, la ecuación $\widetilde{\Pi}(S_f) = 0$ define dos campos de direcciones sobre \widetilde{C}_u . Cada uno de estos campos de direcciones tiene las mismas tangencias en la frontera de \widetilde{C}_u . Además, ∞ es punto singular de ambos campos de direcciones.

Proposición 2.5 ([35]) *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n es hiperbólico. Supongamos que $\widetilde{\Pi}(S_f) = 0$ tiene buena multiplicidad en $(0, 0)$. Entonces, los índices de los campos de direcciones asintóticas de f y f_n en el punto al infinito coinciden.*

Teorema 2.17 ([35]) *Sean $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n y g_n pertenecen a la misma componente conexa del espacio de polinomios homogéneos hiperbólicos de grado n . Si $\widetilde{\Pi}(S_f) = 0$ y $\widetilde{\Pi}(S_g) = 0$ tienen buena multiplicidad en $(0, 0)$, entonces el campo de direcciones asintóticas de f y g tienen el mismo índice en el punto ∞ .*

Proposición 2.6 ([35]) *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que su gráfica es una superficie genérica. Supóngase que su curva Hessiana es compacta y C_u es hiperbólica. Sea $Ind_f(\infty)$ el índice de Poincaré-Hopf del punto al infinito con respecto a cada uno de los campos de direcciones definidos por $\widetilde{\Pi}(S_f) = 0$. Entonces,*

$$Ind_f(\infty) = 2 - N_u + \frac{P_i - P_e}{2},$$

donde P_i (P_e) es el número de puntos PE de tangencia interior (exterior).

Observación 2.3 ([35]) *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n es hiperbólico. Supongamos que $\widetilde{\Pi}(S_f)$ tiene buena multiplicidad en $(0, 0)$. Entonces, $Ind_f(\infty) \leq 1 + \frac{n}{2}$.*

En 1980, T. Banchoff y R. Thom observaron lo siguiente:

Observación 2.4 ([10]) *Un punto parabólico especial con índice -1 es un punto de tangencia interior y un punto parabólico especial con índice +1 es un punto de tangencia exterior.*

2.6. Otras propiedades de los puntos PE

Los puntos PE de un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ pertenecen a la intersección de la curva Hessiana de f con la siguiente curva algebraica en \mathbb{R}^2 .

La curva $C_f(x, y) = 0$. Denotemos con Σ al Hessiano de f y consideremos al polinomio

$$C_f = f_{xx}(\Sigma_y)^2 - 2f_{xy}(\Sigma_x \Sigma_y) + f_{yy}(\Sigma_x)^2.$$

Entonces, la curva algebraica $C_f(x, y) = 0$ en \mathbb{R}^2 , tiene las siguientes propiedades [34].

1. Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ pertenece a la curva $C_f(x, y) = 0$ si y sólo si sucede alguna de las siguientes condiciones
 - a) $\Sigma_x(p) = \Sigma_y(p) = 0$.
 - b) El vector $(\Sigma_y(p), -\Sigma_x(p))$ es distinto de cero y satisface la ecuación $II(S_f) = 0$ en p .
2. Si un punto $p \in \mathbb{R}^2$ es elíptico y pertenece a la curva $C_f(x, y) = 0$, entonces es un punto singular aislado de la curva $C_f(x, y) = 0$.

De la condición 1.b) se obtiene que si la curva Hessiana es no singular, los puntos de intersección de $C_f(x, y) = 0$ y $\Sigma(x, y) = 0$ son los puntos PE. En particular, Si S_f es genérica, $C_f(x, y) = 0$ interseca a $\Sigma(x, y) = 0$ únicamente en los puntos PE. La segunda condición implica que la curva $C_f(x, y) = 0$ interseca tangencialmente a la curva Hessiana. En consecuencia, el orden de contacto de las curvas $C_f(x, y) = 0$ y $Hessf(x, y) = 0$ es par y mayor igual que 2.

Además de la curva $C_f = 0$, también la siguiente pareja de curvas algebraicas puede ser utilizada para localizar a los puntos PE de un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$.

Las curvas $\kappa_f(x, y) = 0$ y $\varrho_f(x, y) = 0$. Cada punto PE p tiene la propiedad de que la recta tangente a la curva Hessiana en p es una dirección asintótica. En consecuencia, una condición necesaria y suficiente (ver [8]) para que el vector $(\Sigma_y(p), -\Sigma_x(p))$ genere una dirección asintótica es que pertenezca al kernel de la matriz Hessiana de f

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}.$$

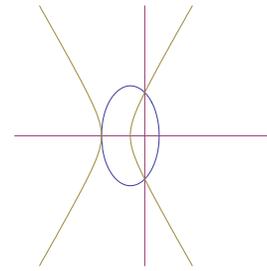
Sean

$$\begin{aligned}\kappa_f(x, y) &= f_{xx}(x, y)\Sigma_y(x, y) - f_{xy}(x, y)\Sigma_x(x, y) \text{ y} \\ \varrho_f(x, y) &= f_{xy}(x, y)\Sigma_y(x, y) - f_{yy}(x, y)\Sigma_x(x, y)\end{aligned}$$

polinomios de grado menor o igual que $5n - 7$. Notemos que las curvas algebraicas $\kappa_f(x, y) = 0$ y $\varrho_f(x, y) = 0$, pasan por los puntos críticos de $Hessf$. Además, se tiene lo siguiente.

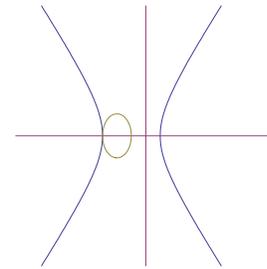
Observación 2.5 ([8]) Si S_f es genérica, un punto $p \in \mathbb{R}^2$ en la curva Hessiana de f es PE si y sólo si pertenece a las curvas $\kappa_f(x, y) = 0$ y $\varrho_f(x, y) = 0$.

Ejemplo 2.6 La curva Hessiana $Hessf = 0$ del polinomio $f(x, y) = x(y^2 - x^2) + y^2 + x^2$ es la elipse en la figura 2.8. Además el polinomio $Hessf$ tiene sólo un punto crítico, la superficie S_f tiene 3 puntos PE y las curvas $\kappa_f(x, y) = 0$, $\varrho_f(x, y) = 0$ (una hipérbola y las dos rectas) se intersecan en estos 4 puntos.



– Figura 2.8 –

Ejemplo 2.7 Las curva Hessiana del polinomio $f(x, y) = x(y^2 + x^2) + y^2 + x^2$ es una hipérbola, mientras que las curvas $\kappa_f(x, y) = 0$ y $\varrho_f(x, y) = 0$ son una elipse y dos rectas ortogonales, respectivamente. El único punto PE de f se localiza en la intersección de la elipse con una de las ramas de la hipérbola y la recta horizontal.



– Figura 2.9 –

Funciones auxiliares, análogas a los polinomios κ_f y ϱ_f , han sido consideradas para el estudio de ecuaciones diferenciales cuadráticas binarias, por ejemplo en los trabajos de L. S. Challapa [19], [18] y de manera más general, en ecuaciones diferenciales implícitas por J. W. Bruce en [14].

Cotas superiores para el número de puntos parabólicos especiales. Los puntos de una superficie algebraica compleja genérica pueden tener 1 ó 2 dos direcciones asintóticas. Los puntos con una dirección asintótica forman una curva no singular y son llamados *parabólicos*. En este contexto, un punto parabólico es llamado *especial* si la única dirección asintótica que hay en el punto, es tangente a la curva parabólica. V. S. Kulikov demostró el siguiente resultado.

Teorema 2.18 ([43]) *Cualquier superficie algebraica genérica S de grado n encajada en el espacio proyectivo complejo tiene $2n(n - 2)(11n - 24)$ puntos parabólicos especiales.*

Este número es una cota superior para el número de puntos parabólicos especiales de superficies algebraicas genéricas en $\mathbb{R}P^3$.

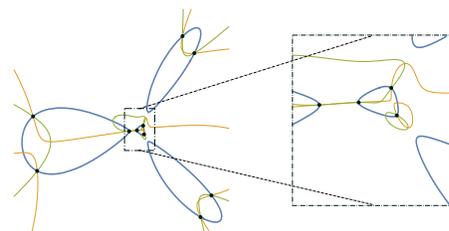
En el caso de superficies algebraicas S_f que son gráficas de funciones polinómicas, con $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, A. Ortiz demostró en [52] que $2(n - 2)(5n - 12)$ es una cota superior para el número de puntos PE de la gráfica de un polinomio real de grado n . En 2012, I. Hernández, A. Ortiz y F. Sánchez [34] modificaron esta cota superior reduciéndola a la mitad:

Teorema 2.19 ([34]) *Cualquier superficie S_f genérica en \mathbb{R}^3 que es la gráfica de un polinomio de grado n , tiene a lo más $(n - 2)(5n - 12)$ puntos PE.*

Esta cota superior para el número de puntos parabólicos especiales es realizable para $n = 3$. Por ejemplo, cualquier polinomio $f = f_1 + f_2 + f_3 \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 3 con S_f genérica y tal que $f_3(x, y)$ es el producto de tres factores reales lineales distintos, tiene una curva Hessiana con 3 puntos PE. Sin embargo, si $n \geq 4$ no se conocen ejemplos de polinomios con curvas Hessianas de grado $2n - 4$ y con exactamente $(n - 2)(5n - 12)$ puntos PE.

Teorema 2.20 ([35]) *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que su gráfica es una superficie genérica, $f_n(x, y)$ es hiperbólico y tal que $\tilde{\Pi}(S_f) = 0$ tiene buena multiplicidad en $(0, 0)$. Si la curva Hessiana es convexa, entonces en la frontera de la componente no acotada C_u hay a lo más $n(3n - 14) + 18$ puntos parabólicos especiales.*

En [54] se encontró un polinomio f de grado 4 tal que su curva Hessiana es compacta, con 4 óvalos y tal que C_u es hiperbólica. En [35], se probó que la curva Hessiana de f es convexa y que en la frontera de C_u hay 10 puntos parabólicos especiales, siendo 10 el valor de $n(3n - 14) + 18$ para $n = 4$. Utilizando las curvas $\kappa_f(x, y) = 0$ y $\varrho_f(x, y) = 0$ (curvas amarilla y verde), en la figura 2.10 se ilustra la distribución de los puntos PE en los óvalos de la curva Hessiana de f (curva azul).



– Figura 2.10 –

Apéndice al capítulo 2

En la sección 2.5 se definió el concepto de superficie genérica para gráficas de funciones polinómicas, con el propósito de detallar este concepto, introducimos lo siguiente. Una referencia para el material de este apartado es [4].

Variiedad de k -jets. Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable.

Definición. La variedad de k -jets de funciones de M en N , la cual denotamos con $J^k(M, N)$, es el conjunto de k -jets de las funciones diferenciables $f : M \rightarrow N$, en cada uno de los puntos de M .

Definición. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. La extensión de f a k -jets es la función que a cada $x \in M$ le asocia el k -jet de f en x : $J^k f : M \rightarrow J^k(M, N)$, $J^k f(x) = J_x^k f$.

Consideremos los siguientes conjuntos dentro de la variedad $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Sea Σ_0 el conjunto de extensiones a k -jets de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $(q, f(q))$ es un punto elíptico o un punto hiperbólico genérico de la superficie $z - f(x, y) = 0$. Entonces, Σ_0 es una subvariedad de $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de codimensión cero en $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Sea Σ_1 el conjunto de extensiones a k -jets de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $(q, f(q))$ es un punto parabólico genérico o un punto de inflexión genérico de la superficie $z - f(x, y) = 0$. Entonces, Σ_1 es una subvariedad de $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de codimensión uno.

Sea Σ_2 el conjunto de extensiones a k -jets de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $(q, f(q))$ es un punto parabólico especial, un punto de bi-nflexión o un punto hiperbólico especial de la superficie $z - f(x, y) = 0$. Entonces, Σ_2 es una subvariedad de $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de codimensión 2.

Decimos que un punto $p = (q, f(q))$ es *degenerado* si $f_{xx}(q) = f_{xy}(q) = f_{yy}(q) = 0$ ó si la suma del orden de contacto de sus dos rectas asintóticas es mayor que ocho ó si el 4-jet de f se agrupa como un cuadrado perfecto.

Sea Σ_d el conjunto de extensiones a k -jets de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $(q, f(q))$ es un punto degenerado. Entonces, Σ_d es una subvariedad de $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de codimensión mayor o igual que 3.

Definición. Una variedad diferenciable se llama *estratificada* si se ve como la unión finita de subvariedades disjuntas entre sí, llamadas *estratos*, y que satisfacen la siguiente condición: la cerradura de cada estrato E contiene a E mismo y a los estratos cuya dimensión es menor que la dimensión de E . Decimos que una función es *transversal a una subvariedad estratificada* si es transversal a cada estrato.

Ejemplo 2.8 La variedad $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ es una variedad estratificada en la que los estratos son las variedades $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ y Σ_d .

Definición. Decimos que la gráfica de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está en posición general si para cada punto $(q, f(q)) = p \in S$ se tiene que el k -jet de f en q , con $k \geq 4$, es transversal a la variedad estratificada $J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_d$.

Teorema 2.21 (Fuerte de Transversalidad de Thom) Sea M una variedad diferenciable y C una subvariedad de $J^k(M, N)$. El conjunto de funciones $f : M \rightarrow N$ tales que sus extensiones a k -jets son transversales a C es un conjunto denso en todas partes, el cual se obtiene como la intersección numerable de conjuntos abiertos del espacio de funciones diferenciables de M en N .

Corolario. El conjunto de gráficas de funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posición general es un conjunto denso en todas partes, el cual se obtiene como la intersección numerable de conjuntos abiertos del espacio de funciones diferenciables de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} .

Capítulo 3

Formas diferenciales cuadráticas binarias

3.1. Formas diferenciales cuadráticas

En esta sección S denotará una superficie diferenciable conexa y orientable.

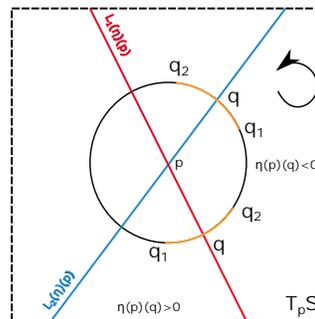
Definición. Decimos que η es una *forma diferencial cuadrática de clase C^r sobre S* si para cada punto $p \in S$ se cumple que:

1) $\eta(p)$ es una forma cuadrática sobre el espacio tangente $T_p S$.

2) Hay una carta coordenada $\varphi : U \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $p \in U$, y funciones A, B, C de clase C^r en $\varphi(U)$, tales que en estas coordenadas, η tiene la forma

$$A(x, y) dx^2 + 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dy^2. \tag{3.1}$$

Etiquetando las dos rectas de $\eta(p)^{-1}(0)$. Sea $p \in S$ tal que $\eta(p)^{-1}(0)$ es la unión de dos rectas transversales de una forma diferencial cuadrática η . Denotamos con $L_1(\eta)(p)$ (respectivamente con $L_2(\eta)(p)$) a la línea recta contenida en $\eta^{-1}(0)$ caracterizada como sigue [32]. Sea $C \subseteq T_p S$ una circunferencia con centro en p , de radio lo suficientemente pequeño y orientada positivamente. Un punto q está en la intersección $C \cap L_1(\eta)(p)$ (respectivamente en $C \cap L_2(\eta)(p)$) si existe un arco abierto (q_1, q_2) contenido en C con q en (q_1, q_2) tal que la forma cuadrática $\eta(p)$ es positiva (respectivamente negativa) en el subarco (q_1, q) y negativa (respectivamente positiva) en el subarco (q, q_2) (ver figura 3.1).



– Figura 3.1 –

De esta manera, cada forma diferencial cuadrática define dos campos de direcciones en el conjunto de puntos p tales que $\eta(p)^{-1}(0)$ es la unión de dos rectas transversales.

Definición. Sea η una forma diferencial cuadrática. Un punto $p \in S$ es llamado *punto singular* de η si $\eta(p)^{-1}(0) = T_p S$. Al conjunto de puntos singulares de η los denotamos con $Sing(\eta)$.

Observación 3.1 Además de los puntos $p \in S$ tales que $\eta(p)^{-1}(0) = T_p S$, otros autores también consideran que un punto $p \in S$ es un *punto singular de una forma cuadrática* η si $\eta(p)^{-1}(0)$ consiste de una sola recta, y que además ésta sea tangente a la curva $B^2 - AC = 0$ (ver [19] pág. 159). En este escrito, un punto singular de una forma cuadrática η es un punto p que satisface la definición anterior, es decir, un punto en el que $\eta(p)^{-1}(0) = T_p S$.

Definición. Una forma diferencial cuadrática η de clase C^r es llamada *positiva* si para todo punto $p \in S$ el subconjunto $\eta(p)^{-1}(0)$ de $T_p S$ es la unión de dos rectas transversales o todo el plano $T_p S$.

Cada forma diferencial cuadrática positiva η tiene asociada la terna $\{\mathcal{F}_1(\eta), \mathcal{F}_2(\eta), Sing(\eta)\}$, llamada *la configuración asociada a η* , donde $Sing(\eta)$ es el conjunto de puntos singulares de η y $\mathcal{F}_1(\eta)$ y $\mathcal{F}_2(\eta)$ son dos foliaciones sobre S , transversales entre sí en $S \setminus Sing(\eta)$. Éstas se distinguen de acuerdo a lo siguiente. La foliación $\mathcal{F}_1(\eta)$ (respectivamente $\mathcal{F}_2(\eta)$) es tangente a la recta $L_1(\eta)(p)$ (respectivamente a $L_2(\eta)(p)$) para cada punto p en $S \setminus Sing(\eta)$.

Definición. Sea $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo de clase C^{r+1} entre dos superficies regulares conexas orientadas y η una forma diferencial cuadrática C^r sobre S_1 . Denotamos con $\phi^* \eta$ a la forma diferencial cuadrática C^r en S_2 , tal que para cada $q \in S_2$ y cada vector $v \in T_q S_2$ está definida por

$$(\phi^* \eta)(q)(v) = \eta(\phi^{-1}(q))((d\phi_q^{-1})(v)).$$

Observación 3.2 ([28]) Sea η una forma diferencial cuadrática positiva definida en S_1 . Sean $\mathcal{F}_i(\eta), i = 1, 2$ las foliaciones definidas por la forma cuadrática η . Si $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo entre dos superficies regulares conexas orientadas y si $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que no se anula, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\phi(\mathcal{F}_i(\eta)) = \mathcal{F}_i(\phi^* \eta)$ en el conjunto de puntos donde ϕ preserva la orientación.
2. $\phi(\mathcal{F}_i(\eta)) = \mathcal{F}_{3-i}(\phi^* \eta)$ en el conjunto de puntos donde ϕ invierte la orientación.
3. $\mathcal{F}_i(\lambda \cdot \eta) = \mathcal{F}_i(\eta)$ si λ es una función positiva.
4. $\mathcal{F}_i(\lambda \cdot \eta) = \mathcal{F}_{3-i}(\eta)$ si λ es una función negativa.

Observación 3.3 ([30]) Sea η una forma diferencial cuadrática C^r definida en S . Son equivalentes las siguientes propiedades

1. La forma diferencial cuadrática η es positiva.
2. Para cada punto $p \in S$ existe una carta coordenada $\varphi : U \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que si $\varphi^*(\eta) = A(x, y) dx^2 + 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dy^2$, entonces $B^2 - AC \geq 0$ en $\varphi(U)$ y $(B^2 - AC)^{-1}(0) = A^{-1}(0) \cap B^{-1}(0) \cap C^{-1}(0)$.
3. Para todo punto $p \in S$, la propiedad 2 se cumple para cada carta coordenada alrededor de p .

3.2. Extensión de una ecuación diferencial cuadrática binaria a la recta al infinito

Ecuaciones diferenciales cuadráticas binarias polinómicas. Sean A, B y $C \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomios del mismo grado $m \geq 1$. A cada forma diferencial cuadrática $\eta = A(x, y) dx^2 + 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dy^2$ sobre \mathbb{R}^2 , le asociamos la siguiente *ecuación diferencial cuadrática binaria*

$$A(x, y) dx^2 + 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dy^2 = 0. \quad (3.2)$$

En algunas ocasiones vamos a escribir la ecuación (3.2) en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ B(x, y) & C(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 0.$$

Definición. A la función $B^2 - AC$ se le conoce como el *discriminante de la ecuación (3.2)* y a la curva $B^2 - AC = 0$ le llamamos *curva discriminante de la ecuación (3.2)*.

Definición. A un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le llamamos *punto singular de la ecuación (3.2)* si (x_0, y_0) es un punto singular de la forma diferencial cuadrática (3.1).

Notemos que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto singular de la ecuación (3.2) si y sólo si

$$A(x_0, y_0) = B(x_0, y_0) = C(x_0, y_0) = 0.$$

En el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(B^2 - AC)(x, y) \geq 0$, la ecuación (3.2) define dos campos de direcciones continuos. Estos campos de direcciones son transversales en el conjunto

$B^2 - AC > 0$ y coinciden en cada punto (x, y) de la curva $B^2 - AC = 0$. A estos campos de direcciones los denotamos con $L_1(\eta)$ y $L_2(\eta)$ de acuerdo a lo siguiente. En cada punto p tal que $(B^2 - AC)(p) > 0$, la recta $L_1(\eta)(p)$ (respectivamente $L_2(\eta)(p)$) es la recta que pertenece al campo de direcciones $L_1(\eta)$ ($L_2(\eta)$).

Los puntos singulares de la ecuación (3.2) están todos en la curva $B^2 - AC = 0$ y además son puntos singulares de los dos campos de direcciones $L_1(\eta)$ y $L_2(\eta)$. Si un punto singular p es aislado y existe una vecindad U de p tal que para todo $q \in U \setminus \{p\}$ se tiene $(B^2 - AC)(q) > 0$, entonces el índice de Poincaré en p con respecto a cada uno de los campos de direcciones coincide. Nótese además, que existen ecuaciones diferenciales cuadráticas con un punto singular aislado p y tal que $(B^2 - AC)(q) < 0$ para todo $q \in U \setminus \{p\}$, con U un abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a p .

Las curvas integrales del campo de direcciones $L_1(\eta)$ (respectivamente de $L_2(\eta)$) definen en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (B^2 - AC)(x, y) \geq 0\}$ una foliación $\mathcal{F}_1(\eta)$ (respectivamente una foliación $\mathcal{F}_2(\eta)$). Nos referiremos a estas foliaciones como *las foliaciones definidas por la ecuación (3.2) o la forma diferencial (3.1)*.

Sea $\eta = 0$ una ecuación diferencial cuadrática definida en \mathbb{R}^2 y $\mathcal{F}_i(\eta)$, $i = 1, 2$ las foliaciones definidas por $\eta = 0$. Notemos que si $\phi : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo entre dos abiertos conexos de \mathbb{R}^2 y si $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que no se anula en U , entonces las foliaciones asociadas a las ecuaciones diferenciales $\lambda \cdot \eta = 0$ y $\phi^* \eta = 0$ satisfacen las condiciones 1 a 4 de la observación 3.2.

Ecuaciones diferenciales cuadráticas binarias positivas. A la ecuación (3.2) la llamamos *positiva* si la forma diferencial cuadrática (3.1) es positiva.

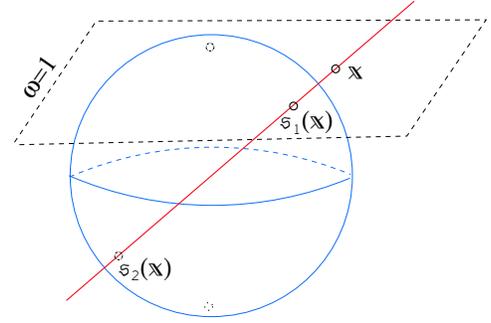
Ejemplo 3.1 Si los polinomios $A, B, C \in \mathbb{R}[x, y]$ satisfacen que $A = -C$ y las curvas algebraicas reales $B(x, y) = 0$ y $C(x, y) = 0$ se intersecan en un número finito de puntos, entonces la ecuación diferencial

$$-C(x, y) dx^2 + 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dy^2 = 0$$

es positiva y tiene un número finito de puntos singulares en \mathbb{R}^2 . En efecto, la función $B^2 + C^2$ es el discriminante de esta ecuación diferencial cuadrática y es no negativa.

Ejemplo 3.2 Si f es un polinomio homogéneo hiperbólico de grado mayor o igual que tres, entonces la ecuación diferencial de direcciones asintóticas $II(S_f) = 0$ es positiva. En este caso, el origen es el único punto singular de $II(S_f) = 0$.

Proyección central del plano sobre la esfera \mathbb{S}^2 . Con el propósito de extender las curvas integrales de la ecuación (3.2) al plano proyectivo real y estudiar su comportamiento en una vecindad de la recta al infinito, vamos a utilizar la proyección central del plano sobre la esfera \mathbb{S}^2 . Para ésto, vamos a identificar al plano \mathbb{R}^2 con coordenadas $\{(x, y)\}$ con el plano de ecuación $\omega = 1$ en $\mathbb{R}^3 = \{(u, v, \omega)\}$. La *proyección central del plano $\omega = 1$ sobre la esfera unitaria \mathbb{S}^2* , asocia a cada punto $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ dos puntos antípodas $s_1(\mathbf{x})$ y $s_2(\mathbf{x})$ sobre la esfera. Estos puntos son definidos por



$$s_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\vartheta(\mathbf{x})}(x, y, 1) \quad \text{y} \quad s_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\vartheta(\mathbf{x})}(x, y, 1)$$

donde

$$\vartheta(\mathbf{x}) = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La proyección central define un difeomorfismo entre el plano $\omega = 1$ y el hemisferio superior (respectivamente, con el hemisferio inferior). Ésto nos permite identificar la recta al infinito con el ecuador de la esfera. Por lo tanto, el comportamiento de la ecuación (3.2) en una vecindad de infinito puede ser estudiado en una vecindad del ecuador de la esfera.

En 1990, Víctor Guíñez demostró la siguiente proposición.

Proposición 3.1 ([28]) *Sea ζ una forma diferencial cuadrática polinomial positiva en \mathbb{R}^2 . La proyección central induce una forma diferencial cuadrática $s_1^*(\zeta)$ en el hemisferio norte de la esfera y una forma diferencial cuadrática $s_2^*(\zeta)$ en el hemisferio sur. Después de haber multiplicado por el factor ω^{n+4} , estas formas diferenciales cuadráticas se extienden a una forma diferencial cuadrática analítica ρ definida sobre toda la esfera.*

Algunas propiedades de la forma diferencial cuadrática ρ son las siguientes.

Observación 3.4 ([28]) Las foliaciones asociadas a ζ son enviadas por la proyección central en el hemisferio norte y en el hemisferio sur, en las dos foliaciones asociadas a la forma diferencial ρ . Además, los puntos singulares de ζ se proyectan en la esfera en puntos singulares de ρ .

Observación 3.5 ([28]) En cada punto p en el ecuador de la esfera, $\rho^{-1}(0)$ satisface una de las siguientes dos posibilidades. La primera es que $\rho^{-1}(0)$ es una línea recta en $T_p\mathbb{S}^2$, la cual es tangente al ecuador de \mathbb{S}^2 . En este caso, el ecuador es una curva integral de ρ en una vecindad de p . La segunda posibilidad es que $\rho^{-1}(0)$ coincide con $T_p\mathbb{S}^2$, por lo que p es un punto singular de ρ .

Observación 3.6 ([28]) Sea p un punto singular de ρ en el ecuador de \mathbb{S}^2 y $q = -p$ su punto antípoda (q es también un punto singular de ρ). Sean V y $-V$ vecindades lo suficientemente pequeñas de p y q , respectivamente. Sean U_+^3 el hemisferio superior y U_-^3 el hemisferio inferior de \mathbb{S}^2 y $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ las foliaciones asociadas a ρ . Si m es par, entonces en $V \cap U_+^3$ (y en $V \cap U_-^3$) las foliaciones \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 tienen el mismo comportamiento que en $-V \cap U_+^3$ (respectivamente en $-V \cap U_-^3$). Si m es impar, en $V \cap U_+^3$ (y en $V \cap U_-^3$) las foliaciones \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 tienen el mismo comportamiento que en $-V \cap U_-^3$ (respectivamente, en $-V \cap U_+^3$).

Observación 3.7 Si $\zeta = A(x, y) dx^2 + 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dy^2$ con A, B y $C \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomios del mismo grado, la proposición 3.1 es cierta aún si ζ no es positiva en \mathbb{R}^2 . Las foliaciones asociadas a ζ están definidas sólo en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (B^2 - AC)(x, y) \geq 0\}$, siendo éste, en general, un subconjunto propio de \mathbb{R}^2 . En consecuencia, las foliaciones asociadas a la forma diferencial ρ , están definidas en la proyección central de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (B^2 - AC)(x, y) \geq 0\}$.

Para construir, a partir de ζ , la forma diferencial ρ de la observación 3.7, con el mismo método empleado por Guíñez en [28], vamos a inducir una forma diferencial cuadrática analítica sobre \mathbb{S}^2 . Para ésto, vamos a usar la notación matricial de la ecuación (3.2).

Sea (u, v, ω) un punto en la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, con $\omega \neq 0$. La proyección central lleva a un punto $(x, y, 1)$, que pertenece al plano $\omega = 1$, en el punto $(u, v, \omega) \in \mathbb{S}^2$, de tal manera que las coordenadas del punto $(x, y, 1)$ y las del punto (u, v, ω) satisfacen las igualdades

$$x = \frac{u}{\omega}, \text{ y } y = \frac{v}{\omega}.$$

De estas ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\omega du - u d\omega}{\omega^2}, \\ dy &= \frac{\omega dv - v d\omega}{\omega^2}. \end{aligned}$$

En forma matricial, estas igualdades son escritas de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} \omega & 0 & -u \\ 0 & \omega & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ d\omega \end{pmatrix}.$$

Así, al sustituir x, y, dx y dy en la forma diferencial cuadrática (3.1) obtenemos

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right) (du \quad dv \quad d\omega) \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \\ -u & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 & -u \\ 0 & \omega & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ d\omega \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\omega^2}\right). \quad (3.3)$$

Donde $A = A(x, y) = A\left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right)$, $B = B(x, y) = B\left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right)$ y $C = C(x, y) = C\left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right)$.

Ahora, para eliminar denominadores en A, B y C multiplicamos a la forma (3.3) por ω^m y por ω^4 para eliminar el factor $\frac{1}{\omega^4}$. Al desarrollar los productos de las matrices intermedias obtenemos:

$$(du \ dv \ d\omega) \begin{pmatrix} \omega^2 A^* & \omega^2 B^* & -\omega(uA^* + vB^*) \\ \omega^2 B^* & \omega^2 C^* & -\omega(uB^* + vC^*) \\ -\omega(uA^* + vB^*) & -\omega(uB^* + vC^*) & u^2 A^* + 2uvB^* + v^2 C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ d\omega \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Donde

$$\begin{aligned} A^* &= A^*(u, v, \omega) = \omega^m A\left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right), \\ B^* &= B^*(u, v, \omega) = \omega^m B\left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right), \\ C^* &= C^*(u, v, \omega) = \omega^m C\left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Definición. Un punto (u_0, v_0, ω_0) en la esfera \mathbb{S}^2 es llamado punto singular de la forma diferencial (3.4) si las funciones que definen a esta forma diferencial se anulan simultáneamente en (u_0, v_0, ω_0) .

La forma diferencial (3.4) en cartas coordenadas de la esfera. Consideremos el atlas de la esfera \mathbb{S}^2 dado por el conjunto

$$\left\{ (\phi_i, U_+^i), (\psi_i, U_-^i) \mid i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Donde U_+^i es el subconjunto de \mathbb{S}^2 con la i -ésima coordenada positiva y ϕ_i es una función definida en U_+^i de la siguiente manera

$$\phi_i(y_1, y_2, y_3) = 1/y_i(y_j, y_k), \quad i \neq j, i \neq k, j < k.$$

De manera similar, U_-^i es el subconjunto de puntos de \mathbb{S}^2 con la i -ésima coordenada negativa y ψ_i es una función definida en U_-^i con la regla de correspondencia

$$\psi_i(y_1, y_2, y_3) = 1/y_i(y_k, y_j), \quad i \neq j, i \neq k, j < k.$$

La expresión local, en el abierto U_+^3 , de la forma diferencial cuadrática inducida en \mathbb{S}^2 es la forma diferencial cuadrática (3.1). Esto es debido a que ϕ_3 es la inversa de la proyección central restringida al hemisferio norte. En U_-^3 la expresión local de la forma diferencial cuadrática inducida en \mathbb{S}^2 es la misma forma (3.1) salvo el factor $(-1)^{n-2}$.

En el abierto U_+^2 , la expresión local de la forma diferencial cuadrática inducida en \mathbb{S}^2 se obtiene de la forma diferencial cuadrática (3.1) mediante el cambio de coordenadas (3.5).

$$(u, \omega) \mapsto \left(\frac{u}{\omega}, \frac{1}{\omega} \right). \quad (3.5)$$

En efecto, para el cambio de coordenadas (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\omega du - u d\omega}{(d\omega)^2}, \\ dy &= -\frac{d\omega}{(d\omega)^2}. \end{aligned}$$

Al sustituir dx y dy en la forma diferencial cuadrática (3.1) obtenemos la siguiente forma diferencial cuadrática.

$$(du \ d\omega) \begin{pmatrix} \omega^2 A^*(u, \omega) & -\omega (B^*(u, \omega) + u A^*(u, \omega)) \\ -\omega (B^*(u, \omega) + u A^*(u, \omega)) & u^2 A^*(u, \omega) + 2u B^*(u, \omega) + C^*(u, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ d\omega \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Donde $A^*(u, \omega) = \omega^m A\left(\frac{u}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right)$, $B^*(u, \omega) = \omega^m B\left(\frac{u}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right)$ y $C^*(u, \omega) = \omega^m C\left(\frac{u}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right)$.

En U_-^2 la expresión local de la forma diferencial cuadrática inducida en \mathbb{S}^2 es la misma forma diferencial cuadrática (3.6) salvo el factor $(-1)^{n-2}$. Este comportamiento, fue observado por Guínez en [28].

En el abierto U_+^1 , la expresión local de la forma diferencial cuadrática inducida en \mathbb{S}^2 se obtiene de la forma (3.1) mediante el cambio de coordenadas (3.7).

$$(v, \omega) \mapsto \left(\frac{1}{\omega}, \frac{v}{\omega} \right). \quad (3.7)$$

En efecto, para el cambio de coordenadas (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{d\omega}{(d\omega)^2}, \\ dy &= \frac{\omega dv - v d\omega}{(d\omega)^2}. \end{aligned}$$

Con el cambio de coordenadas (3.7) se tiene la siguiente forma diferencial cuadrática.

$$(dv \ d\omega) \begin{pmatrix} \omega^2 C^*(v, \omega) & -\omega (B^*(v, \omega) + v C^*(v, \omega)) \\ -\omega (B^*(v, \omega) + v C^*(v, \omega)) & v^2 C^*(v, \omega) + 2v B^*(v, \omega) + A^*(v, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv \\ d\omega \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

En este caso $A^*(v, \omega) = \omega^m A\left(\frac{1}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right)$, $B^*(v, \omega) = \omega^m B\left(\frac{1}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right)$ y $C^*(v, \omega) = \omega^m C\left(\frac{1}{\omega}, \frac{v}{\omega}\right)$.

Sobre U_-^1 la expresión local de la forma diferencial cuadrática inducida en \mathbb{S}^2 es la forma (3.8), salvo el factor $(-1)^{n-2}$.

Con esto, terminamos con la construcción de la forma diferencial cuadrática analítica ρ sobre \mathbb{S}^2 .

Observación 3.8 Es un cálculo directo ver que el discriminante de las ecuaciones asociadas a las formas (3.6) y (3.8) es $\omega^2 (A^*C^* - (B^*)^2)$. En cada caso, el polinomio $A^*C^* - (B^*)^2$ corresponde a deshomogeneizar respecto a las variables v y u , respectivamente, el polinomio obtenido de homogeneizar el polinomio $AC - B^2$ con respecto a la variable ω .

Se sigue de la observación 3.8 que la recta $\omega = 0$ en el plano de coordenadas $\{(u, \omega)\}$ (respectivamente en el plano de coordenadas $\{(v, \omega)\}$) pertenece al discriminante de la ecuación (3.6) (respectivamente de la ecuación (3.8)).

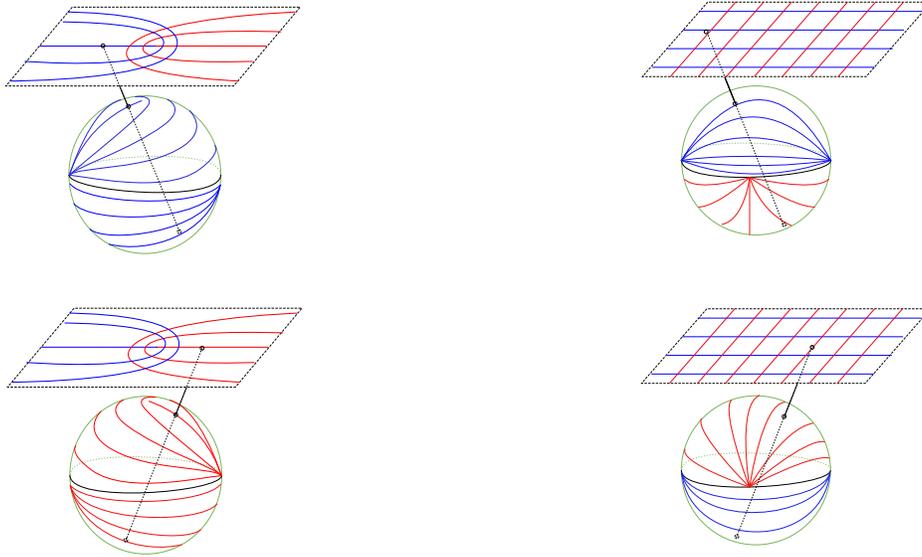
Proyección central de las foliaciones que define una forma diferencial cuadrática. Sea ζ una forma diferencial cuadrática tal que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (B^2 - AC)(x, y) > 0\} \neq \emptyset$ y tal que la curva $AC - B^2 = 0$ es no singular. Sean \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 las dos foliaciones que define ζ y \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 las dos foliaciones asociadas a la forma ρ .

Observación 3.9 Si el grado m de los polinomios A, B y C es impar, tanto en el hemisferio norte como en el hemisferio sur, la foliación \mathcal{H}_1 (respectivamente \mathcal{H}_2) es la proyección central de la foliación \mathcal{F}_1 (respectivamente \mathcal{F}_2). Si m es par, en el hemisferio norte la foliación \mathcal{H}_1 (respectivamente \mathcal{H}_2) es la proyección central de \mathcal{F}_1 (respectivamente \mathcal{F}_2) mientras que en el hemisferio sur \mathcal{H}_1 (respectivamente \mathcal{H}_2) es la proyección central de \mathcal{F}_2 (respectivamente \mathcal{F}_1), (ver figura 3.2).

Demostración. La observación 3.9 es consecuencia de lo siguiente. Primero, la proyección central del plano \mathbb{R}^2 sobre la esfera preserva la orientación en puntos del hemisferio superior y cambia la orientación en puntos del hemisferio inferior. Ésto puede ser verificado fácilmente pues los cambios de coordenadas (3.5) y (3.7) tienen Jacobiano positivo si $\omega > 0$, y tienen Jacobiano negativo si $\omega < 0$. Segundo, para obtener la forma (3.4) a partir de la ecuación (3.2) tuvimos que multiplicar primero por el factor ω^4 y luego por el factor ω^m . Así, si m es par, entonces ω^{m+4} es positivo si $\omega \neq 0$. Pero si m es impar, entonces ω^{m+4} es positivo si $\omega > 0$ y es negativo si $\omega < 0$. Así, la observación 3.9 se sigue de la observación (3.2). ■

En las expresiones locales de la forma diferencial cuadrática ρ definida en \mathbb{S}^2 , la observación 3.9 es la siguiente.

Observación 3.10 Sean \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 las foliaciones definidas por la forma diferencial (3.6). Para cada $i \in \{1, 2\}$ fijo, se tiene que si m es impar, entonces \mathcal{G}_i se obtiene mediante el cambio de coordenadas (3.5), de la foliación \mathcal{F}_i correspondiente a la forma diferencial (3.2). Si m es par, para valores positivos de ω , la foliación \mathcal{G}_i se obtiene mediante el cambio de coordenadas (3.5) de la foliación \mathcal{F}_i , mientras que para valores negativos de ω , \mathcal{G}_i se obtiene de la foliación \mathcal{F}_{3-i}



– **Figura 3.2** – Las foliaciones \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 y sus correspondientes proyecciones \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 sobre la esfera. A la izquierda el caso con m impar y a la derecha el caso con m par.

mediante el cambio de coordenadas (3.5). Se tiene una situación análoga para la ecuación (3.8) y el cambio de coordenadas (3.7).

La observación 3.9 fue demostrada por V. Guíñez en [28] para el caso en el que ζ es una forma diferencial cuadrática positiva. La prueba de la observación 3.9, es en esencia la misma que en el caso cuando ζ es positiva. Ésto es debido a que la restricción de ζ a cada componente conexa de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (B^2 - AC)(x, y) > 0\}$ es una forma diferencial cuadrática positiva.

Proyección central de puntos singulares de la ecuación (3.2). Notemos que las entradas de la matriz de 3×3 en la forma (3.4) son polinomios homogéneos de grado $m + 4$.

Observación 3.11 Sea (x_0, y_0) un punto singular de la ecuación diferencial (3.2). Entonces, la matriz de 3×3 en la forma (3.4) se anula en los puntos antípodas correspondientes al punto (x_0, y_0) vía la proyección central.

Demostración. Para mostrar ésto, basta ver que las funciones A^* , B^* y C^* se anulan en un punto (u_0, v_0, ω_0) , el cual se obtiene de un punto singular (x_0, y_0) mediante la proyección central. En efecto, si $(x_0, y_0) = \left(\frac{u_0}{\omega_0}, \frac{v_0}{\omega_0}\right)$ es un punto singular de (3.2), entonces

$$A^*(u_0, v_0, \omega_0) = \omega_0^m A\left(\frac{u_0}{\omega_0}, \frac{v_0}{\omega_0}\right) = \omega_0^m A(x_0, y_0) = 0.$$

Para las funciones B^* y C^* es análogo y así se tiene la observación. ■

Puntos singulares de la ecuación (3.4) en la recta al infinito. La siguiente proposición determina los puntos singulares de la forma (3.4) que están sobre el ecuador de la esfera.

Proposición 3.2 ([28]) *Los puntos singulares de la forma (3.4) que están en el ecuador de la esfera \mathbb{S}^2 , están definidos por la ecuación polinomial:*

$$u^2 A_m(u, v) + 2uvB_m(u, v) + v^2 C_m(u, v) = 0, \quad (3.9)$$

donde A_m, B_m y C_m son los polinomios homogéneos de mayor grado de A, B y C , respectivamente.

Notemos que en el ecuador de la esfera \mathbb{S}^2 la forma (3.4) se reduce a

$$(u^2 A^* + 2uvB^* + v^2 C^*) d\omega^2 = 0.$$

Por lo tanto, si $u^2 A^* + 2uvB^* + v^2 C^* \neq 0$ en un punto $(u, v, 0)$, entonces $d\omega = 0$. Lo que significa que si $p = (u, v, 0)$ no es punto singular en el ecuador de la esfera \mathbb{S}^2 , entonces $\rho^{-1}(0)$ es una línea recta en $T_p \mathbb{S}^2$, la cual es tangente al ecuador en p .

Debido a que sólo vamos a considerar ecuaciones diferenciales cuadráticas del tipo (3.2) tales que las tres funciones A, B y C tengan el mismo grado, entonces el polinomio en la ecuación (3.9) es el polinomio cero, o es producto de polinomios homogéneos de grado 2 irreducibles en \mathbb{R} , o bien, tiene al menos un factor lineal real. En el primer caso, es decir, si es el polinomio cero, todos los puntos en el ecuador de la esfera son puntos singulares de la forma (3.4). En el segundo caso, el polinomio en la ecuación (3.9) se anula únicamente en el origen del plano $\{(u, v)\}$. En consecuencia, la forma (3.4) no tiene puntos singulares en la recta al infinito. Por último, si el polinomio en (3.9), tiene al menos un factor lineal real. Entonces, los puntos singulares sobre la recta al infinito son aislados. En particular, si m es impar, la forma (3.4) tiene al menos un punto singular aislado en la recta al infinito.

Ejemplo 3.3 Consideremos las funciones $-A(x, y) = C(x, y) = a_1 x + a_2 y$ y $B(x, y) = b_1 x + b_2 y$, con $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. En este caso la ecuación (3.2) es lineal y positiva, además la forma (3.4) se vuelve:

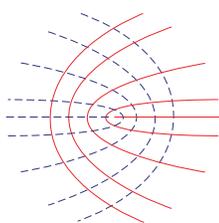
$$(du \quad dv \quad d\omega) \begin{pmatrix} -u\omega^2 a_1 - v\omega^2 a_2 & u\omega^2 b_1 + v\omega^2 b_2 & \omega(l(u, v)) \\ u\omega^2 b_1 + v\omega^2 b_2 & u\omega^2 a_1 + v\omega^2 a_2 & -\omega(m(u, v)) \\ \omega(l(u, v)) & -\omega(m(u, v)) & \varphi(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ d\omega \end{pmatrix},$$

$$\text{donde } l(u, v) = u^2 a_1 + uv(a_2 - b_1) - v^2 b_2,$$

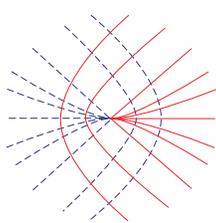
$$m(u, v) = u^2 b_1 + uv(a_1 + b_2) + v^2 a_2 \text{ y}$$

$$\varphi(u, v) = (-a_1)u^3 + (2b_1 - a_2)u^2 v + (a_1 + 2b_2)uv^2 + a_2 v^3.$$

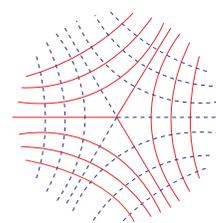
El polinomio $\varphi(u, v)$ determina el número de puntos singulares en la recta al infinito $\omega = 0$. Sea $\phi(v) = \varphi(1, v) = -a_1 + (2b_1 - a_2)v + (a_1 + 2b_2)v^2 + a_2v^3$ y supongamos que $\phi(v)$ no tiene raíces repetidas ni raíces en común con el polinomio $b_1 + (a_1 + b_2)v + a_2v^2$. Entonces, las curvas integrales de la ecuación lineal (3.2) están definidas en todo el plano y en una vecindad del origen son de tipo Lemon (figura 3.3), Monstar (figura 3.4) ó Star (figura 3.5) (ver [13] y [15]). Como el polinomio $\phi(v)$ no tiene raíces reales repetidas, entonces puede tener una raíz real o tres raíces reales distintas. Si sólo tiene una, corresponde al caso Lemon y se tiene que en la recta al infinito hay 1 punto singular. Si $\phi(v)$ tiene tres raíces reales distintas, entonces las curvas integrales son del tipo Star o del tipo Monstar. En ambos casos, hay 3 puntos singulares en la recta al infinito.



– Figura 3.3 –



– Figura 3.4 –



– Figura 3.5 –

Notemos que con la proyección central del plano sobre la esfera, a partir de una forma diferencial cuadrática positiva, se obtienen dos campos de direcciones definidos sobre toda la esfera. Cada punto singular que aparece en la recta al infinito es un punto singular de los dos campos de direcciones construidos sobre la esfera. Ésto muestra que, extender de manera independiente dos campos de direcciones, difiere de extender simultáneamente los dos campos de direcciones definidos por una ecuación diferencial cuadrática positiva, ésto, al menos en el caso con m par. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 El campo de direcciones constante $dx = 0$ se extiende al ecuador de la esfera con únicamente dos puntos singulares, los puntos de la forma $(0, \pm 1, 0)$. De manera similar, los puntos $(\pm 1, 0, 0)$ son los únicos puntos singulares en el ecuador de la esfera de la extensión del campo de direcciones $dy = 0$. Pero si consideramos la ecuación diferencial cuadrática constante $2dxdy = 0$, entonces los puntos $(0, \pm 1, 0)$ y $(\pm 1, 0, 0)$, son todos, puntos singulares de cada uno de los dos campos de direcciones obtenidos en la esfera.

Tipos topológicos de puntos singulares hiperbólicos en la recta al infinito de formas diferenciales positivas. Consideremos una ecuación diferencial de la forma (3.2) positiva.

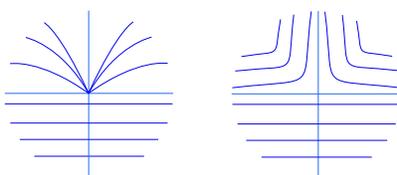
Definición. Un punto singular p en la recta al infinito de una forma diferencial cuadrática positiva es llamado *hiperbólico* si

1. El punto p es $(0, 1, 0)$ o $(0, -1, 0)$. Y en cualquiera de los dos casos se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial u} (C_m(0, \pm 1)) + 2B_m(0, \pm 1) \neq 0 \text{ y } (B_m^2 - A_m C_m)(0, \pm 1) > 0; \text{ o bien,}$$

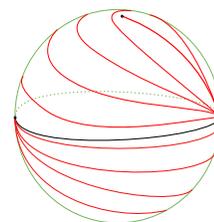
2. El punto p es de la forma $(1, v_0, 0)$ y satisface que $(B_m^2 - A_m C_m)(1, v_0) > 0$ y $(1, v_0)$ es una raíz simple de la ecuación $A_m(1, v_0) + 2uvB_m(1, v_0) + v^2C_m(1, v_0) = 0$.

Proposición 3.3 ([28]) *Sea (3.2) una ecuación diferencial cuadrática positiva. La configuración local en cada punto singular hiperbólico en la recta al infinito de la extensión de (3.2) es uno de los tipos que se muestran en la figura 3.6.*



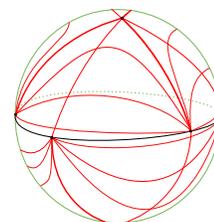
– Figura 3.6 – Tipos topológicos de puntos singulares hiperbólicos en la recta al infinito.

Ejemplo 3.5 La ecuación $-ydx^2 + 2xdxdy + ydy^2 = 0$ tiene un punto singular en el punto $(x, y) = (0, 0)$ del tipo lemon. Así, los puntos $(0, 0, \pm 1)$ son también singulares de tipo lemon y los puntos $(0, \pm 1, 0)$ son puntos singulares (en el ecuador) de la forma ρ , ambos del tipo topológico del lado izquierdo de la figura 3.6.



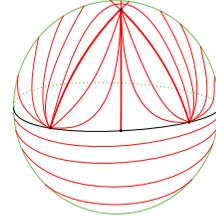
– Figura 3.7 –

Ejemplo 3.6 La ecuación $-ydx^2 - 2xdxdy + ydy^2 = 0$ tiene un punto singular en el punto $(x, y) = (0, 0)$ del tipo star. Los puntos $(0, \pm 1, 0)$, $\pm(1, 1, 0)$, y $\pm(1, -1, 0)$ son puntos singulares en el ecuador, todos del tipo topológico del lado izquierdo de la figura 3.6.



– Figura 3.8 –

Ejemplo 3.7 La ecuación $-ydx^2 + \frac{1}{2}xdxdy + ydy^2 = 0$ tiene un punto singular en el punto $(x, y) = (0, 0)$ del tipo monstar y su extensión tiene seis puntos singulares en el ecuador de la esfera. Los puntos $\pm(\sqrt{2}, 1, 0)$ y $\pm(-\sqrt{2}, 1, 0)$ son del del tipo topológico del lado izquierdo de la figura 3.6. Mientras que los puntos $(0, \pm 1, 0)$ son del tipo topológico del lado derecho de la figura 3.6.



– Figura 3.9 –

Capítulo 4

Campos de direcciones asintóticas.

Extensión a la recta al infinito

4.1. La forma diferencial cuadrática inducida por $II(S_f)$

Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n y

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - f(x, y) = 0\}$$

la gráfica de la función polinómica f . Asociada a esta superficie tenemos la *ecuación diferencial de direcciones asintóticas*

$$II(S_f) = f_{xx}(x, y) dx^2 + 2f_{xy}(x, y) dx dy + f_{yy}(x, y) dy^2 = 0.$$

En el conjunto de puntos que no son elípticos de la superficie S_f , la ecuación diferencial cuadrática $II(S_f) = 0$ define a los dos campos de direcciones asintóticas, los cuales siguiendo la notación del capítulo anterior (página 37) son denotados con $L_1(II(S_f))$ y $L_2(II(S_f))$. En cada punto hiperbólico, estos dos campos de direcciones son transversales. En el conjunto de puntos parabólicos de S_f dichos campos de direcciones coinciden.

Vamos a identificar a la superficie S_f con el plano real a través de la proyección $\pi : S_f \rightarrow \mathbb{R}^2$, la cual a cada punto $(x, y, z) \in S_f$ le asigna el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Además, la proyección π define un atlas diferenciable de S_f con sólo una carta coordenada. En este sistema de coordenadas de S_f tenemos que $II(S_f)$ es una forma diferencial cuadrática definida sobre todo el plano \mathbb{R}^2 .

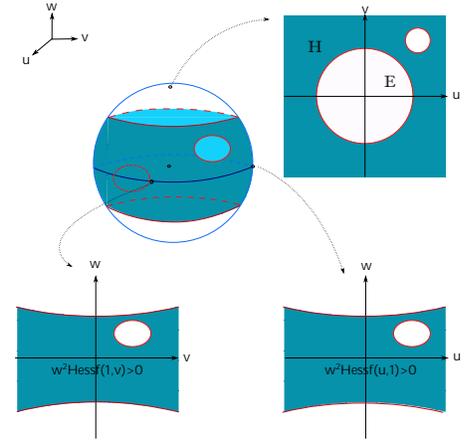
Por medio de la proyección central de \mathbb{R}^2 sobre la esfera \mathbb{S}^2 , asociada a $II(S_f)$ tenemos la siguiente forma diferencial cuadrática definida sobre \mathbb{S}^2 .

$$(du \ dv \ d\omega) \begin{pmatrix} \omega^2 f_{uu}^* & \omega^2 f_{uv}^* & -u\omega f_{uu}^* - v\omega f_{uv}^* \\ \omega^2 f_{uv}^* & \omega^2 f_{vv}^* & -u\omega f_{uv}^* - v\omega f_{vv}^* \\ -u\omega f_{uu}^* - v\omega f_{uv}^* & -u\omega f_{uv}^* - v\omega f_{vv}^* & u^2 f_{uu}^* + 2uv f_{uv}^* + v^2 f_{vv}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ d\omega \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{uu}^* &= f_{uu}^*(u, v, \omega) = \omega^m f_{uu} \left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega} \right), \\ f_{uv}^* &= f_{uv}^*(u, v, \omega) = \omega^m f_{uv} \left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega} \right), \\ f_{vv}^* &= f_{vv}^*(u, v, \omega) = \omega^m f_{vv} \left(\frac{u}{\omega}, \frac{v}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Con esta forma diferencial cuadrática buscamos obtener información de los campos de direcciones asintóticas definidos por la ecuación diferencial $II(S_f) = 0$. Notemos que a partir de la forma cuadrática (4.1) es posible obtener de manera simple su descripción en las cartas coordenadas (ϕ_i, U_+^i) de la esfera. El proceso para obtener tal descripción es equivalente a realizar lo siguiente. Primero omitimos en el vector $(du, dv, d\omega)$ y en su vector transpuesto la i -ésima entrada para cada i en el conjunto $\{1, 2, 3\}$. También, en la matriz de 3×3 de (4.1) omitimos tanto el i -ésimo renglón como la i -ésima columna, para así obtener una matriz de 2×2 . Por último, deshomonogeneizamos con respecto a la i -ésima variable a cada uno de los polinomios en las entradas de la matriz de 2×2 recién obtenida. Por ejemplo, al omitir $d\omega$ del vector $(du, dv, d\omega)$ y tanto el tercer renglón como la tercera columna de la matriz de 3×3 y deshomonogeneizar con respecto a ω a cada una de sus entradas, recuperamos a la forma $II(S_f)$. De manera similar obtenemos las correspondientes formas diferenciales cuadráticas (3.6) y (3.8).



– Figura 4.1 –

Notemos también que la forma diferencial cuadrática (4.1) satisface las propiedades enunciadas en las observaciones 3.4, 3.5, 3.6 y 3.9.

Recordemos que un punto $(u, v, \omega) \in \mathbb{S}^2$ que anula a la matriz de 3×3 de la forma diferencial cuadrática (4.1) es un punto singular de (4.1). Cada punto singular de (4.1) es un punto singular de los dos campos de direcciones tangentes a la esfera definidos por la forma diferencial (4.1).

Proposición 4.1 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 2$. El número de puntos singulares en el ecuador de la esfera de la ecuación (4.1) es igual al doble del número de distintos factores lineales reales de f_n , el polinomio homogéneo de mayor grado de f . Más aún, los puntos singulares en el ecuador de la esfera están determinados por los factores lineales reales de f_n .

La demostración de la proposición usa la siguiente igualdad, la cual es bastante conocida y que se obtiene de la identidad de Euler sobre polinomios homogéneos.

Lema 4.1 Sea $P(x, y)$ un polinomio homogéneo de grado m . Entonces se satisface que

$$m(m-1)P(x, y) = x^2P_{xx} + 2xyP_{xy} + y^2P_{yy}.$$

Demostración. En efecto, usando el teorema de Euler en los polinomios homogéneos P_x y P_y se tiene que:

$$\begin{aligned} (m-1)P_x &= xP_{xx} + yP_{xy}, \\ (m-1)P_y &= xP_{yx} + yP_{yy}. \end{aligned}$$

Ahora usando el teorema de Euler en el polinomio P se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} m(m-1)P &= x(m-1)P_x + y(m-1)P_y = x(xP_{xx} + yP_{xy}) + y(xP_{yx} + yP_{yy}) \\ &= x^2P_{xx} + 2xyP_{xy} + y^2P_{yy}. \end{aligned}$$

■

Demostración de la proposición 4.1. Una consecuencia de la proposición 3.2, es que los puntos singulares en el conjunto $\{(u, v, \omega) \in \mathbb{S}^2 \mid \omega = 0\}$ están definidos por la igualdad:

$$u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} f_n(u, v) + 2uv \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f_n(u, v) + v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_n(u, v) = 0. \quad (4.2)$$

Por el lema 4.1 la igualdad (4.2) es equivalente a:

$$n(n-1)f_n(u, v) = 0.$$

De esta igualdad se sigue la proposición. ■

Observación 4.1 Sea $S(u, v, \omega) = u^2 f_{uu}^*(u, v, \omega) + 2uv f_{uv}^*(u, v, \omega) + v^2 f_{vv}^*(u, v, \omega)$. Usando el lema 4.1 para cada entero $k \in \{2, \dots, n\}$, obtenemos que

$$S(u, v, \omega) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \omega^{n-k} f_k(u, v).$$

De la observación 2.2, se obtiene que si S_f es una superficie genérica y $q \in \mathbb{S}^2$ es un punto singular de (4.1), entonces q está en el ecuador de \mathbb{S}^2 .

Notación 1 Vamos a denotar con Y_1 y Y_2 a los dos campos de direcciones tangentes a la esfera definidos por la forma cuadrática (4.1). Al conjunto de puntos singulares del campo $Y_k, k \in \{1, 2\}$ lo denotamos con $Sing(Y_k)$.

Observación 4.2 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$. Un punto p en el ecuador de \mathbb{S}^2 es un punto singular de la forma cuadrática (4.1) si y sólo si p es un punto singular de los campos de direcciones Y_1 y Y_2 .

Demostración. Supongamos que $p = (1, 0, 0)$. En la carta $u = 1$, los campos Y_1 y Y_2 , restringidos al conjunto $\{(u, v, \omega) \in \mathbb{S}^2 \mid u > 0\}$, quedan descritos por la ecuación

$$\omega^2 f_{vv}^*(1, v, \omega) dv^2 + 2\omega B(1, v, \omega) dv d\omega + S(1, v, \omega) d\omega^2 = 0. \quad (4.3)$$

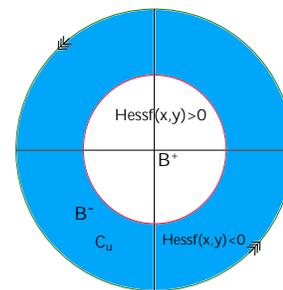
Donde $B(1, v, \omega) = -u\omega f_{uv}^*(1, v, \omega) - \omega f_{v\omega}^*(1, v, \omega)$ y $S(1, v, \omega) = f_{uu}^*(1, v, \omega) + v^2 f_{v\omega}^*(1, v, \omega) + \omega^2 f_{\omega\omega}^*(1, v, \omega)$. Así, p es un punto singular de la forma cuadrática (4.1) si y sólo si p es un punto singular de la ecuación (4.3). ■

4.2. Dominios hiperbólico y elíptico contenidos en $\mathbb{R}P^2$

Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $n \geq 3$ tal que su polinomio Hessiano $h(x, y) = Hess f(x, y)$ es de grado $2n - 4$ y sea $H(x, y, z) = 0$ la curva Hessiana proyectiva asociada a f . Como H es de grado par y $H(x, y, 1) = h(x, y)$, el signo de h en el punto (x, y) determina el signo de H en los puntos $t(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Por lo tanto, si en $\mathbb{R}P^2$ consideramos la curva Hessiana proyectiva y el conjunto de puntos donde H no se anula, entonces el conjunto de los puntos $[x : y : z]$ en $\mathbb{R}P^2$ tales que $H(x, y, z) < 0$ contiene al dominio hiperbólico de f . De manera similar, el conjunto de los puntos $[x : y : z]$ en $\mathbb{R}P^2$ tales que $H(x, y, z) > 0$ contiene al dominio elíptico de f .

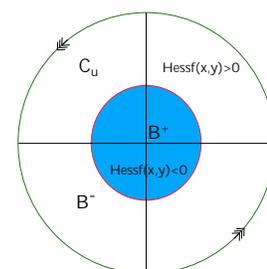
Por lo descrito en el párrafo anterior, el conjunto $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}$ puede coincidir con la superficie orientable B^+ o puede coincidir con la superficie no orientable B^- . Ésto depende directamente del polinomio Hessiano de f .

Ejemplo 4.1 Sea S_f una superficie genérica, con $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n , tal que su curva Hessiana es compacta y tal que el dominio elíptico está acotado. Entonces el dominio elíptico está contenido en la superficie orientable B^+ y el dominio hiperbólico está contenido en la superficie no orientable B^- . En este caso, la componente no acotada C_u es hiperbólica. Un ejemplo particular es el polinomio $f(x, y) = x(x^2 - y^2) - x^2 + 7xy + 5y^2 + 3x + y$ (ver figura 4.2).



- Figura 4.2 -

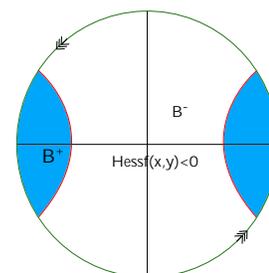
Ejemplo 4.2 Sea S_f una superficie genérica, con $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado n , tal que su curva Hessiana es compacta y tal que el dominio hiperbólico está acotado. Entonces el dominio elíptico está contenido en la superficie no orientable B^- y el dominio hiperbólico está contenido en la superficie orientable B^+ . En esta situación, la componente no acotada C_u es elíptica. Un ejemplo es el polinomio $f(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + 2x^3 + xy^2 + y^3 - x^2 + 7xy + 5y$ (ver figura 4.3).



- Figura 4.3 -

Cuando la curva Hessiana es compacta y no singular, se tiene que la superficie no orientable B^- contiene a la recta al infinito. A diferencia de este caso, tenemos lo siguiente.

Ejemplo 4.3 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n , tal que S_f es genérica y su curva Hessiana no es compacta en \mathbb{R}^2 . Entonces, ni el dominio hiperbólico ni el elíptico están acotados en \mathbb{R}^2 , por lo que la cerradura de cada uno de estos conjuntos en $\mathbb{R}P^2$ contiene puntos de la recta al infinito. Un ejemplo particular es el polinomio $f(x, y) = x(x^2 + y^2) - x^2 + 7xy + 5y^2 + 3x + y$ (ver figura 4.4).



- Figura 4.4 -

Nota 4.1 Si un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ se escribe en la forma $f(x, y) = \sum_{i=m}^n f_i(x, y)$ para algún entero $m \geq 0$ y de manera similar su polinomio Hessiano se escribe en la forma $Hessf(x, y) = \sum_{j=2m-4}^{2n-4} h_j(x, y)$, entonces $h_{2m-4} = Hessf_m$ y $h_{2n-4} = Hessf_n$.

La nota 4.1 implica que si el polinomio homogéneo de mayor grado h_{2n-4} del Hessiano de f tiene factores lineales reales, entonces la curva Hessiana proyectiva interseca a la recta al infinito en tantos puntos como el número de factores lineales reales distintos de h_{2n-4} .

El teorema 4.1 nos indica cómo encontrar polinomios reales cuya curva Hessiana cumpla las condiciones de los ejemplos 4.1 y 4.2.

Nótese que las conclusiones del teorema 4.1 fueron establecidas en [35], pero con una hipótesis adicional a las del teorema 4.1 (ver la primera parte del teorema 2.16).

Teorema 4.1 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$.*

1. *Supongamos que f_n es un polinomio homogéneo hiperbólico. Entonces la curva Hessiana de f es compacta en \mathbb{R}^2 y C_u es hiperbólica.*
2. *Si f_n es un polinomio homogéneo elíptico, entonces la curva Hessiana de f es compacta en \mathbb{R}^2 y C_u es elíptica.*

Demostración. Sólo vamos a demostrar 1. La prueba de 2 es similar. De la nota 4.1 tenemos que si escribimos al polinomio Hessiano de f como $Hessf(x, y) = \sum_{j=0}^{2n-4} h_j(x, y)$, donde $h_j(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado j , entonces $h_0(x, y) = Hessf_2(x, y)$ y $h_{2n-4}(x, y) = Hessf_n(x, y)$. Como f_n es un polinomio homogéneo hiperbólico, se tiene que $Hessf_n(x, y)$ no tiene factores lineales reales. En consecuencia, la curva Hessiana proyectiva $H(x, y, z) = 0$ no interseca a la recta al infinito. Por lo tanto, la curva $Hessf(x, y) = 0$ es compacta en \mathbb{R}^2 y el signo de $Hessf(x, y)$ es constante en C_u .

Sea $[u_0 : v_0 : 0]$ un punto en la recta al infinito $\omega = 0$. Supongamos que $u_0 \neq 0$ y tomemos el punto $[1 : v_0 : 0]$ como representante de $[u_0 : v_0 : 0]$. Para verificar cuál es el signo de H en C_u , notemos que en el punto $[1 : v_0 : 0]$ el polinomio $H(u, v, \omega) = \sum_{j=2}^{2n-4} \omega^{n-j} h_j(u, v)$ toma el valor $h_{2n-4}(1, v_0) = Hessf_n(1, v_0)$. Si f_n es hiperbólico, entonces el valor $Hessf_n(1, v_0)$ es negativo. Así, el polinomio $H(1, v, \omega)$ no se anula en el punto $[1 : v_0 : 0]$. Por consiguiente, existe una vecindad en $\mathbb{R}P^2$ del punto $[1 : v_0 : 0]$ donde $H(u, v, \omega)$ no se anula y tiene el mismo signo que $Hessf_n(u, v)$ en el punto $(1, v_0)$. ■

Observación 4.3 Para cada terna de números ϵ, d y k tales que ϵ es un número real positivo, $d \in \{2, 3, \dots\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, la curva Hessiana del polinomio $Nest_{d,\epsilon,k}^2 = (x + y) \cdot \epsilon^{k+[d/2]} + \prod_{j=1}^{[d/2]} (x^2 + y^2 - \epsilon^j)$ es compacta en \mathbb{R}^2 . Además, C_u es elíptica.

Demostración. En efecto, el polinomio $\prod_{j=1}^{[d/2]} (x^2 + y^2)$ es un polinomio homogéneo elíptico de grado d (ejemplo 2.5). Además, este polinomio es la componente homogénea de grado d del polinomio $Nest_{d,\epsilon,k}^2$ del ejemplo 1.1. Así, del teorema 4.1 se tiene que C_u es elíptica. ■

Corolario. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que su polinomio homogéneo f_n de mayor grado se factoriza como el producto de n factores lineales reales distintos cuyos ceros son rectas distintas. Entonces la curva Hessiana de f es compacta y la componente no acotada de su complemento en \mathbb{R}^2 es hiperbólica.

Demostración. Si f_n se factoriza como el producto de n factores lineales reales distintos, entonces f_n es hiperbólico (ejemplo 2.4). Así, el resultado se sigue del teorema 4.1. ■

Nota 4.2 En general, el polinomio homogéneo de mayor grado de f no determina si el conjunto de puntos elípticos (hiperbólicos) está contenido en la componente no orientable del complemento de la curva Hessiana proyectiva o si está contenido en la componente orientable (en la sección 6.2 se dan algunos polinomios que ejemplifican esta nota).

Lema 4.2 Si $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo hiperbólico, entonces f tiene al menos un factor lineal real. Además, cada factor lineal real de f tiene multiplicidad 1.

Demostración. Primero notemos que si un factor lineal de f tiene multiplicidad mayor que 1, entonces la curva Hessiana de f es no acotada. Así, basta probar que f tiene un factor lineal real.

Si $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo hiperbólico de grado impar entonces tiene al menos un factor lineal real.

Ahora supongamos que $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo hiperbólico de grado par y que f no tiene factores lineales reales. Del teorema 2.14 tenemos que $1 - \frac{k}{2} = \text{Ind}_f(0)$, donde k es el número de factores lineales reales de f . Además, si n es par, entonces $\text{Ind}_f(0)$ es un entero menor o igual que cero. Así, como $k = 0$, tenemos que $\text{Ind}_f(0) = 1$, lo cual no es posible porque g es de grado par. ■

Lema 4.3 Si $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo elíptico, entonces f no tiene factores lineales reales.

Demostración. Supongamos que f es elíptico y tiene un factor lineal real $l(x, y)$. Entonces la recta determinada por la ecuación $l(x, y) = 0$ en el plano $z = 0$, está contenida en S_f . Así, para cualquier punto $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $l(x, y) = 0$, se tiene que $\text{Hess}f(x, y) \leq 0$. Esto es una contradicción, pues f es elíptico. ■

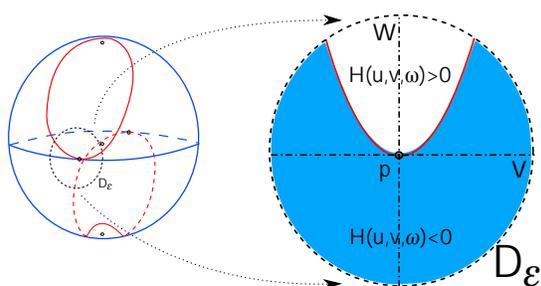
Consecuencias del lema 4.3. Todo polinomio homogéneo elíptico es de la forma $f = Q_1 \cdots Q_k$, para algún número natural k , donde cada $Q_i \in \mathbb{R}[x, y]$ es un polinomio homogéneo cuadrático e irreducible en \mathbb{R} . En particular, si f es un polinomio homogéneo elíptico entonces f es de grado par.

Demostración. En efecto, si f es un polinomio real homogéneo de grado impar, entonces tiene un factor lineal real. Así, f no es elíptico. ■

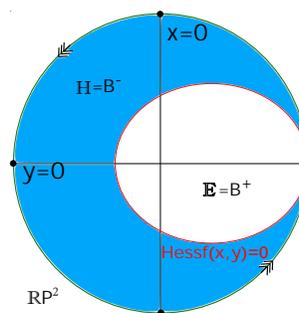
4.3. Índice de Poincaré de los puntos singulares en la recta al infinito

Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n tal que su curva Hessiana proyectiva $H(x, y, z) = 0$ es no singular y de grado $2n - 4$. Consideremos las superficies con frontera B^- y B^+ . Denotamos con b^- (respectivamente con b^+) al interior de B^- en \mathbb{RP}^2 (respectivamente de B^+). Tanto b^- como b^+ son una superficie no singular sin frontera. Una de ellas, b^+ , es orientable y la otra, b^- , es no orientable. Notemos que el polinomio H tiene signo constante en b^- y en b^+ . Además, el signo de H en b^- es opuesto al signo que tiene H en b^+ .

Observación 4.4 Sea $f = \sum_{i=0}^n f_i \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$. Si el polinomio homogéneo f_n tiene factores lineales múltiples, entonces f_n y su polinomio Hessiano tienen al menos un factor lineal común. Si los factores lineales de f_n son polinomios reales y alguno de ellos es múltiple, entonces la curva Hessiana proyectiva de f interseca a la recta al infinito en p , el punto singular de (4.1) determinado por el factor lineal múltiple de f_n . En este caso, no se garantiza que el índice de Poincaré del punto singular p exista. Esto es debido a que los campos de direcciones sobre la esfera podrían no estar definidos en todo un disco D_ϵ de radio ϵ , alrededor del punto singular p , para todo radio ϵ menor que cierto número real $\epsilon_0 > 0$ lo suficientemente pequeño (figura 4.5).



– Figura 4.5 –



– Figura 4.6 –

Ejemplo 4.4 La curva Hessiana del polinomio $f(x, y) = xy^2 + 7x^2 + 2xy + y^2$ es la parábola de ecuación $-4y^2 - 8y + 28x + 24 = 0$. Notemos que la región convexa del complemento en \mathbb{R}^2 de la parábola es elíptica mientras que la otra región del complemento en \mathbb{R}^2 es hiperbólica (figura 4.6). El punto $[1 : 0 : 0]$ es un punto singular en la recta al infinito y es también el único punto de la curva Hessiana proyectiva en la recta al infinito. No existe el índice de Poincaré del punto $[1 : 0 : 0]$ pues, las campos de direcciones asociados a la forma (4.1) sólo están definidos en el subconjunto de puntos de la esfera tales que $H(u, v, \omega) \leq 0$ (figura 4.5).

Definición. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n tal que su curva Hessiana proyectiva $H(x, y, z) = 0$ es no singular y de grado $2n - 4$. Decimos que un punto $[u_0 : v_0 : 0]$ en la recta al infinito de \mathbb{RP}^2 es *elíptico infinito*, *parabólico infinito* o *hiperbólico infinito* si el signo de H en $[u_0 : v_0 : 0]$ es positivo, cero o negativo, respectivamente.

El siguiente resultado establece condiciones con las cuales los puntos singulares de la forma (4.1) que están en el ecuador de la esfera tienen una vecindad contenida en \mathbb{S}^2 en la que están definidos los campos Y_1 y Y_2 . En tal caso, se tiene que existe el índice de Poincaré de cada punto singular con respecto a cada uno de los campos de direcciones determinados por la forma cuadrática (4.1). Por su parte, el teorema 4.2 muestra que todos los puntos singulares del campo $Y_k, k \in \{1, 2\}$ en el ecuador de la esfera tienen el mismo tipo topológico y el mismo índice de Poincaré.

Lema 4.4 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$. Supongamos que f_n no tiene factores repetidos. Si (u_0, v_0, ω_0) es un punto singular de (4.1), entonces $[u_0 : v_0 : \omega_0]$ es hiperbólico infinito. Más aún, si $[u_0 : v_0 : \omega_0]$ está en b^- (está en b^+) entonces $b^- \cap \mathbb{R}^2$ ($b^+ \cap \mathbb{R}^2$) es hiperbólico.*

Demostración. Supongamos que $\hat{\omega} = [u_0 : v_0 : \omega_0]$ está en b^- . vamos a demostrar que $\hat{\omega}$ es un punto hiperbólico infinito y que $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico. La prueba para cuando $\hat{\omega}$ está en b^+ es análoga. Supongamos que el punto $\hat{\omega} \in b^-$ está determinado por $l(x, y)$, un factor lineal real de f_n . Realizamos un cambio de coordenadas en el plano $\{(x, y)\}$ de tal manera que la recta $l(x, y) = 0$ sea la recta $y = 0$. Como consecuencia tenemos que $\hat{\omega} = [1 : 0 : 0]$. Como f_n no tiene factores lineales repetidos, existe un polinomio homogéneo $g(x, y)$ que no tiene al polinomio y como factor y tal que $f_n(x, y) = yg(x, y)$. Es un cálculo directo ver que $Hess f_n(x, y) = -(g_x(x, y))^2$. Así,

$$Hess f_n(\hat{\omega}) = Hess f_n(1, 0) = -(g_x(1, 0))^2 < 0.$$

Dado que

$$H(x, y, z) = \sum_{j=2n-4}^{2n-4} z^{2n-4} h_j \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right),$$

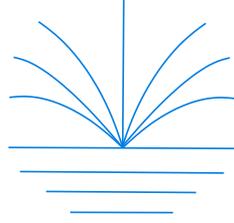
se tiene que

$$H(\hat{\omega}) = H(1, 0, 0) = h_{2n-4}(1, 0) = Hess f_n(1, 0) < 0.$$

Como H es una función continua, existe una vecindad $U \subseteq \mathbb{RP}^2$ de $\hat{\omega}$ tal que $H(q) < 0$, para todo $q \in U$. Esto prueba que $\hat{\omega}$ es un punto hiperbólico infinito y que $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico. ■

Teorema 4.2 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$. Supongamos que f_n no tiene factores repetidos. Entonces todos los puntos singulares del campo de direcciones $Y_k, k = 1, 2$ que están en el ecuador de \mathbb{S}^2 son del*

tipo topológico mostrado en la figura 4.7. Más aún, el índice de Poincaré del campo $Y_k, k = 1, 2$ en cada punto singular $(u_0, v_0, 0) \in \mathbb{S}^2$ es igual a $\frac{1}{2}$.



– Figura 4.7 –

Demostración. La demostración del teorema 4.2 está basada en la siguiente idea geométrica desarrollada por V. Guíñez en [29]. Considere un punto p en el ecuador de la esfera, el cual es un punto singular para ambas foliaciones asociadas a (4.1). En una vecindad $V \subset \mathbb{S}^2$ al rededor de p , tales foliaciones pueden ser estudiadas por alguna de las formas diferenciales cuadráticas (3.6) o (3.8). Realizando un cambio de coordenadas podemos suponer que $p = (1, 0, 0)$ y en este caso elegimos a la ecuación (3.8), la cual está definida en el plano $\{(v, \omega)\}$. A las foliaciones definidas por (3.8) las denotamos con \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 . Sea W una vecindad pequeña alrededor de p contenida en el plano $\{(v, \omega)\}$. El punto clave de la prueba es que una de las foliaciones, \mathcal{G}_1 por ejemplo, es tangente en $W_U = \{(v, \omega) \in W | \omega > 0\}$ a un campo vectorial con un punto singular de tipo nodo en p y es tangente en $W_L = \{(v, \omega) \in W | \omega < 0\}$ a un campo vectorial sin puntos singulares en W_L . Mientras que la foliación \mathcal{G}_2 es tangente a los mismos campos vectoriales pero en W_L y W_U respectivamente. Ahora comenzaremos a desarrollar esta idea.

Sea $(u_0, v_0, 0)$ un punto singular de la ecuación (4.1) en el ecuador de la esfera. Salvo un cambio de coordenadas lineal en el plano $\{(u, v, 0)\}$ podemos suponer que el punto singular es $(1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$. En la carta de coordenadas de \mathbb{S}^2 dadas por $\{(1, v, \omega)\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_{uu}^*(1, v, \omega) &= \sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial u^2} f_i(1, v), \\ f_{uv}^*(1, v, \omega) &= \sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} f_i(1, v) \text{ y} \\ f_{vv}^*(1, v, \omega) &= \sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_i(1, v). \end{aligned}$$

Para estudiar el comportamiento local de la extensión de los campos de direcciones asintóticas al rededor del punto $(1, 0, 0)$ vamos a usar la siguiente ecuación

$$(dv \ d\omega) \begin{pmatrix} \omega^2 f_{vv}^*(1, v, \omega) & \omega B(1, v, \omega) \\ \omega B(1, v, \omega) & S(1, v, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv \\ d\omega \end{pmatrix} = 0, \quad (4.4)$$

donde

$$\begin{aligned} B(1, v, \omega) &= -f_{uv}^*(1, v, \omega) - v f_{vv}^*(1, v, \omega), \\ S(1, v, \omega) &= f_{uu}^*(1, v, \omega) + 2v(f_{uv}^*(1, v, \omega)) + v^2(f_{vv}^*(1, v, \omega)). \end{aligned}$$

El origen $(0, 0)$ del plano $\{(v, \omega)\}$ es un punto singular de la ecuación (4.4). En consecuencia, este punto es singular para ambas foliaciones determinadas por la ecuación (4.4) y los índices de Poincaré de ambos campos de direcciones en $(0, 0)$ coinciden. Notemos que los campos de direcciones definidos por la ecuación (4.4) son

$$R_k(v, \omega) dv + 2S(v, \omega) d\omega = 0, k = 1, 2.$$

Donde $S(v, \omega) = S(1, v, \omega)$ y

$$R_k(v, \omega) = -2\omega B(1, v, \omega) + (-1)^k \sqrt{-4\omega^2 \left((f_{uu}^*(1, v, \omega))(f_{vv}^*(1, v, \omega)) - (f_{uv}^*(1, v, \omega))^2 \right)}.$$

También consideremos los campos vectoriales

$$Y_k(v, \omega) = (2S(v, \omega), \omega T_k(v, \omega)).$$

Donde

$$T_k(v, \omega) = -2B(1, v, \omega) + (-1)^k \sqrt{-4 \left((f_{uu}^*(1, v, \omega))(f_{vv}^*(1, v, \omega)) - (f_{uv}^*(1, v, \omega))^2 \right)}.$$

Las foliaciones definidas por la ecuación (4.4) son denotadas con $\mathcal{G}_k, k = 1, 2$, respectivamente. En efecto, estas foliaciones son tangentes a los campos de direcciones $-R_k(v, \omega) dx + 2S(v, \omega) dy = 0, k = 1, 2$, respectivamente.

Observación 4.5 La foliación \mathcal{G}_1 es tangente al campo vectorial Y_1 si $\omega > 0$ y es tangente al campo vectorial Y_2 si $\omega < 0$. Respectivamente, la foliación \mathcal{G}_2 es tangente al campo vectorial Y_2 si $\omega > 0$ y es tangente al campo vectorial Y_1 si $\omega < 0$.

Primero vamos a probar que uno de los campos vectoriales, Y_1 o Y_2 , tiene un punto singular en $(0, 0)$ y el otro es localmente tangente a un campo vectorial no singular. Veremos que el signo de uno de los coeficientes de f_n determina cuál de los dos campos vectoriales tiene un punto singular en $(0, 0)$.

Debido a que f_n no tiene factores lineales reales repetidos, si las coordenadas del punto singular son $(1, 0, 0)$, entonces f_n puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= y \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j-1,1} x^{n-j-1} y^j \right), \text{ con } a_{n-1,1} \neq 0, \\ &= a_{n-1,1} x^{n-1} y + a_{n-2,2} x^{n-2} y^2 + \cdots + a_{1,n-1} x y^{n-1} + a_{0,n} y^n. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Lema 4.5

1. Si $a_{n-1,1} > 0$, entonces el polinomio $T_1(v, \omega)$ se anula en $(0, 0)$ y el campo vectorial $Y_2(v, \omega) = (2S(v, \omega), \omega T_2(v, \omega))$ tiene un punto singular del tipo nodo en $(0, 0)$. Sea U una vecindad de $(0, 0)$ en el plano $\{v, \omega\}$, entonces el campo vectorial $Y_1(v, \omega) = (2S(v, \omega), \omega T_1(v, \omega))$ es tangente en $U \setminus \{\omega = 0\}$ a un campo vectorial no singular en $(0, 0)$.
2. Si $a_{n-1,1} < 0$, entonces el polinomio $T_2(v, \omega)$ se anula en $(0, 0)$, $Y_1(v, \omega)$ tiene un punto singular en $(0, 0)$ del tipo nodo y $Y_2(v, \omega)$ es tangente en $U \setminus \{\omega = 0\}$ a un campo vectorial no singular en $(0, 0)$.

Dividimos la prueba del lema 4.5 en tres pasos. Con los primeros dos pasos, probaremos que uno de los campos es tangente a un campo no singular en el origen.

Paso 1 Se cumple la siguiente igualdad:

$$T_1(v, \omega) T_2(v, \omega) = 4 \left(\sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_i(1, v) \right) S(v, \omega). \quad (4.6)$$

Además, $T_1(v, \omega)$ se anula en $(0, 0)$ ó $T_2(v, \omega)$ se anula en $(0, 0)$, pero $T_1(v, \omega)$ y $T_2(v, \omega)$ no se anulan simultáneamente en $(0, 0)$.

Demostración. Es un cálculo directo ver que se cumple la igualdad (4.6).

Ahora probaremos que $T_1(v, \omega)$ y $T_2(v, \omega)$ no se anulan simultáneamente en $(0, 0)$. Como $S(v, \omega) = \sum_{i=2}^n \omega^{n-i} (i(i-1) f_i(1, v))$ se anula en $(0, 0)$, entonces $n(n-1) f_n(1, 0) = 0$. Si por el contrario suponemos que $T_1(v, \omega)$ y $T_2(v, \omega)$ se anulan ambos en $(0, 0)$, obtenemos que

$$0 = T_1(0, 0) + T_2(0, 0) = -4B(1, 0, 0). \quad (4.7)$$

Como se cumple que

$$-B(1, v, 0) = v \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_n(1, v) + \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} f_n(1, v) = (n-1) \left(\frac{\partial}{\partial v} f_n(1, v) \right), \quad (4.8)$$

se sigue de (4.7) y (4.8) que $0 = -4B(1, 0, 0) = 4(n-1) \left(\frac{\partial}{\partial v} f_n(1, 0) \right)$. Esto es una contradicción, pues implica que $(1, 0)$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $f_n(1, v)$, lo cual se ha descartado.

Por último veremos que alguno entre $T_1(v, \omega)$ y $T_2(v, \omega)$ se anula en $(0, 0)$. De las igualdades

$$\frac{\partial}{\partial v} (f_n(1, 0)) = a_{n-1,1} \quad \text{y} \quad \text{Hess} f_n(1, 0) = -((n-1) a_{n-1,1})^2$$

se sigue que

$$\begin{aligned} T_k(0,0) &= 2(n-1) \frac{\partial}{\partial v} f_n(1,0) + (-1)^k \sqrt{-4\text{Hess}f_n(1,0)} \\ &= 2(n-1) a_{n-1,1} + (-1)^k 2(n-1) |a_{n-1,1}|. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $a_{n-1,1} > 0$, entonces $T_1(0,0) = 0$ y $T_2(0,0) = 4(n-1)a_{n-1,1}$. Por otra parte, si $a_{n-1,1} < 0$, entonces $T_2(0,0) = 0$ y $T_1(0,0) = 4(n-1)a_{n-1,1}$. Esto demuestra el paso 1. ■

Paso 2 1. Supongamos $a_{n-1,1} > 0$ y consideremos el campo vectorial

$$Z_1(v,\omega) = \left(T_2(v,\omega), 2\omega \left(\sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_i(1,v) \right) \right).$$

Entonces la siguiente igualdad se satisface:

$$T_2(v,\omega) Y_1(v,\omega) = 2S(v,\omega) Z_1(v,\omega),$$

Más aún, el campo vectorial $Z_1(v,\omega)$ es no singular en $(0,0)$.

2. Si $a_{n-1,1} < 0$, consideramos al campo vectorial

$$Z_2(v,\omega) = \left(T_1(v,\omega), 2\omega \left(\sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_i(1,v) \right) \right).$$

Este campo vectorial es no singular en $(0,0)$ y satisface la siguiente igualdad

$$T_1(v,\omega) Y_2(v,\omega) = 2S(v,\omega) Z_2(v,\omega).$$

Demostración. Supongamos que $a_{n-1,1} > 0$ para demostrar la parte 1 (el caso con $a_{n-1,1} < 0$ es análogo). Como $T_2(0,0) \neq 0$, el campo vectorial $Z_1(v,\omega)$ es no singular en $(0,0)$. Por último tenemos que

$$\begin{aligned} & T_2(v,\omega) Y_1(v,\omega) \\ &= T_2(v,\omega) (2S(v,\omega), \omega T_1(v,\omega)) \\ &= (2S(v,\omega) T_2(v,\omega), \omega T_1(v,\omega) T_2(v,\omega)) \\ &= \left(2S(v,\omega) T_2(v,\omega), 4\omega \left(\sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_i(1,v) \right) S(v,\omega) \right) \\ &= 2S(v,\omega) \left(T_2(v,\omega), 2\omega \left(\sum_{i=2}^n \omega^{n-i} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f_i(1,v) \right) \right). \end{aligned}$$

Con ésto concluimos la prueba del paso dos. ■

Como consecuencia del paso 2 tenemos que $Z_1(v,\omega)$ es tangente a la foliación \mathcal{G}_1 si $\omega > 0$ y es tangente a la foliación \mathcal{G}_2 si $\omega < 0$.

Paso 3 1. Si $a_{n-1,1} > 0$, entonces $(0,0)$ es un punto singular del campo vectorial $Y_2(u, \omega)$ de tipo nodo.

2. Si $a_{n-1,1} < 0$, entonces $(0,0)$ es un punto singular del campo vectorial $Y_1(u, \omega)$ de tipo nodo.

Demostración. Nuevamente vamos a suponer que $a_{n-1,1} > 0$. El caso con $a_{n-1,1} < 0$ es análogo. Para mostrar el paso 3, analizamos la matriz asociada a la parte lineal del campo vectorial $Y_2(u, \omega)$ en $(0,0)$. Esta matriz está dada por

$$\begin{aligned} DY_2(0,0) &= \left(\begin{array}{cc} 2\frac{\partial}{\partial v}S(v, \omega) & 2\frac{\partial}{\partial \omega}S(v, \omega) \\ \omega\frac{\partial}{\partial v}T_2(v, \omega) & \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega T_2(v, \omega)) \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} 2n(n-1)\frac{\partial}{\partial v}f_n(1,0) & 2\frac{\partial}{\partial \omega}S(0,0) \\ 0 & T_2(0,0) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 2n(n-1)a_{n-1,1} & 2\frac{\partial}{\partial \omega}S(0,0) \\ 0 & 2(n-1)a_{n-1,1} + 2(n-1)|a_{n-1,1}| \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 2n(n-1)a_{n-1,1} & 2\frac{\partial}{\partial \omega}S(0,0) \\ 0 & 4(n-1)a_{n-1,1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz $DY_2(0,0)$ tiene dos valores propios no nulos con el mismo signo. Así, el paso tres está probado. ■

Esto concluye la prueba del lema 4.5.

Por último, el lema 4.5 y la observación 4.5 muestran el teorema 4.2. ■

Corolario. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $n \geq 3$ tal que f_n no tiene factores repetidos.

1. Si la curva Hessiana proyectiva no interseca a la recta al infinito, entonces

$$0 \leq \sum_{q \in \text{Sing}(Y_k)} \text{Ind}(q) \leq n, k = 1, 2.$$

2. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva tiene intersección no vacía y transversal con la recta al infinito, entonces

$$0 \leq \sum_{q \in \text{Sing}(Y_k)} \text{Ind}(q) \leq n - 2, k = 1, 2.$$

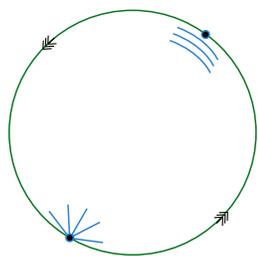
Demostración. Las desigualdades de la parte 1 se siguen de la proposición 4.1 y del teorema 4.2. Para demostrar las desigualdades de la parte 2, notemos que debido a que f_n no tiene factores lineales reales repetidos, todos los factores lineales reales de f_n tienen multiplicidad 1.

En consecuencia, como la curva Hessiana proyectiva tiene intersección no vacía y transversal con la recta al infinito entonces f_n tiene a lo más $n - 2$ factores lineales reales. En efecto, si f_n tuviera n distintos factores lineales reales, entonces f_n sería un polinomio homogéneo hiperbólico (ejemplo 2.4), y por el teorema 4.1 la curva Hessiana de f sería compacta en \mathbb{R}^2 , lo cual es una contradicción a la hipótesis de que la curva Hessiana proyectiva interseca la recta al infinito. Así, la parte 2 se sigue del teorema 4.2. ■

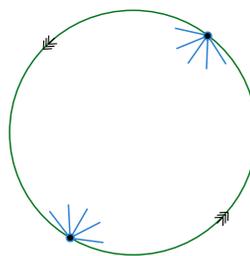
Definición. La restricción de un campo de direcciones $Y_k, k = \{1, 2\}$ al hemisferio superior o al inferior de S^2 la llamamos *una extensión a $\mathbb{R}P^2$ de los campos de direcciones asintóticas de S_f* y la denotamos con $X_k, k = \{1, 2\}$.

Observación 4.6 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n no tiene factores repetidos. Sea m es el número de factores lineales reales de f_n . Si $q \in S^2$ es un punto singular de (4.1) que está en el ecuador de S^2 , entonces $[q] \in \mathbb{R}P^2$ es un punto singular de los dos campos X_1 y X_2 .

1. Si n es impar, entonces X_k tiene m puntos singulares en la recta al infinito de tipo topológico igual al de la figura 4.8. En particular, el índice de Poincaré de X_k en cada uno de estos puntos singulares es igual a $\frac{1}{2}$.
2. Si n es par, entonces X_k tiene $\frac{m}{2}$ puntos singulares en la recta al infinito de tipo nodo (ver figura 4.9). En particular, el índice de Poincaré de X_k en cada uno de estos puntos singulares es igual a 1.



– Figura 4.8 –



– Figura 4.9 –

Observación 4.7 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que f_n no tiene factores repetidos. Si m es el número de factores lineales reales de f_n , entonces

$$0 \leq \sum Ind([q]) = \frac{m}{2} \leq \frac{n}{2},$$

donde la suma corre sobre los m puntos singulares $[q]$ del campo X , que están en la recta al infinito. Si además suponemos que la curva Hessiana proyectiva tiene intersección no vacía y

transversal con la recta al infinito, entonces

$$0 \leq \sum \text{Ind}([q]) = \frac{m}{2} \leq \frac{n-2}{2}.$$

Demostración. Notemos que para cualquier $n \geq 3$ se tiene que

$$\sum_{q \in \text{Sing}(Y_k)} \text{Ind}(q) = 2 \sum_{[q] \in \text{Sing}(X_k)} \text{Ind}([q]).$$

Así, la observación 4.7 es consecuencia del corolario en la página 64. ■

4.4. Fórmulas tipo Poincaré-Hopf

En esta sección y la subsecuente vamos a suponer que estamos bajo las condiciones del siguiente caso.

Caso 1 *La superficie b^- contiene al subconjunto de puntos hiperbólicos y b^+ contiene al subconjunto de puntos elípticos. Si esto sucede, $b^- \cap \mathbb{R}^2$ coincide con el dominio hiperbólico y $b^+ \cap \mathbb{R}^2$ con el dominio elíptico; respectivamente, decimos que $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico y $b^+ \cap \mathbb{R}^2$ es elíptico. En esta situación tenemos que*

$$\begin{aligned} B^+ &= \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \geq 0\}, \\ B^- &= \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Primero vamos a considerar a la superficie no orientable con frontera $\mathbb{M}_\tau \subset B^-$. Las componentes conexas de la frontera de \mathbb{M}_τ son los τ óvalos exteriores de la curva Hessiana proyectiva. Al número de puntos parabólicos especiales en la frontera de \mathbb{M}_τ con tangencia interior (tangencia exterior) los vamos a denotar con $P_i^{\mathbb{M}_\tau}$ (con $P_e^{\mathbb{M}_\tau}$).

Teorema 4.3 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $n \geq 3$ tal que su gráfica es una superficie genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es transversal a la recta al infinito, que el número de óvalos exteriores de esta curva es igual a τ y que B^- contiene al dominio hiperbólico de f . Entonces, para cada $k \in \{1, 2\}$ se tiene que*

$$\sum \text{Ind}([q]) = 1 - \tau + \frac{P_i^{\mathbb{M}_\tau} - P_e^{\mathbb{M}_\tau}}{2},$$

donde la suma corre en todos los puntos singulares $[q]$ del campo X_k tales que $[q] \in \mathbb{M}_\tau$.

Demostración. La cubierta doble $2\mathbb{M}_\tau \subset \mathbb{S}^2$ de \mathbb{M}_τ es una superficie orientable compacta con frontera (proposición 1.4). La frontera de $2\mathbb{M}_\tau$ tiene el doble de componentes conexas que la frontera de \mathbb{M}_τ . Así, $\chi(2\mathbb{M}_\tau) = 2(1 - \tau)$. Sea \mathbb{Y}_k uno de los dos campos de direcciones asociados a (4.1) sobre \mathbb{S}^2 y consideremos $\mathbb{Y}_k|_{2\mathbb{M}_\tau}$ la restricción de \mathbb{Y}_k a $2\mathbb{M}_\tau$. Así, tenemos un campo de direcciones en $2\mathbb{M}_\tau$ con $2P_i^{\mathbb{M}_\tau}$ tangencias interiores, $2P_e^{\mathbb{M}_\tau}$ tangencias exteriores y un número entero $k(\mathbb{M}_\tau) \geq 0$ de puntos singulares de $\mathbb{Y}_k|_{2\mathbb{M}_\tau}$ sobre el ecuador de la esfera. Usamos el teorema 2.15 y la proposición 1.4 para obtener que

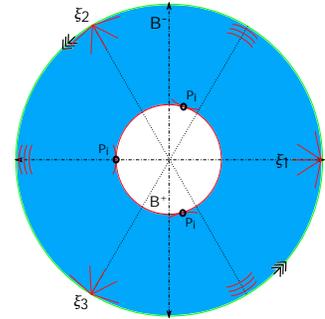
$$\sum Ind(q) = 2(1 - \tau) + \frac{2P_i^{\mathbb{M}_\tau} - 2P_e^{\mathbb{M}_\tau}}{2},$$

donde la suma corre en todos los puntos singulares q del campo \mathbb{Y}_k tales que $q \in 2\mathbb{M}_\tau$. Como

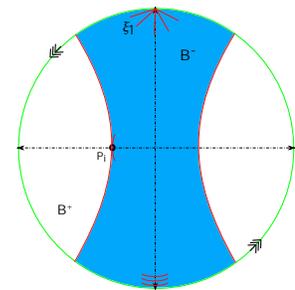
$$\sum Ind(q) = 2 \sum Ind([q]),$$

se sigue la igualdad del teorema. ■

Ejemplo 4.5 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 3 tal que S_f es genérica y su polinomio homogéneo f_3 de grado 3 es el producto de 3 polinomios lineales distintos. Entonces, su curva Hessiana es compacta, conexa y tiene tres puntos parabólicos especiales con tangencia interior. En este caso la curva Hessiana es una elipse, la superficie \mathbb{M}_τ es homeomorfa a una banda de Möbius compacta y coincide con B^- . Por lo tanto, $\tau = 1, P_i = 3, P_e = 0$ y $\sum Ind([q]) = \frac{3}{2}$, en este caso hay tres puntos singulares de los campos \mathbb{X}_k en la recta al infinito.



Ejemplo 4.6 Si f es de grado 3, S_f es genérica y f_3 tiene sólo un factor lineal real también se tiene que \mathbb{M}_τ es homeomorfa a una banda de Möbius compacta y coincide con B^- . Pero aquí, $\tau = 1, P_i = 1, P_e = 0$. Entonces se cumple que $\sum Ind([q]) = \frac{1}{2}$, pues sólo hay un punto singular de cada campo \mathbb{X}_k en la recta al infinito.



Ejemplo 4.7 Sea $f = l_1 l_2 \cdots l_n \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $n \geq 3$, el cual es el producto de n polinomios lineales $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}[x, y]$. Supongamos que f es un polinomio factorizable en posición general. Entonces, la curva Hessiana de f es no singular, compacta, con $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ óvalos exteriores y tiene $n(n - 2)$ puntos parabólicos especiales con tangencia interior, esto es, $P_i = n(n - 2), P_e = 0$ (ver teorema 2.11). Al considerar la extensión a la recta al infinito de los campos de direcciones asintóticas de $f = l_1 l_2 \cdots l_n$, se tiene que hay n puntos singulares del

campo en \mathbb{X}_k en la recta al infinito. Además, B^- coincide con $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}$ y ambos con \mathbb{M}_τ . En este caso $\chi(\mathbb{M}_\tau) = 1 - \tau = 1 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \sum \text{Ind}([q]) &= 1 - \tau + \frac{P_i^{\mathbb{M}_\tau} - P_e^{\mathbb{M}_\tau}}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-2) \\ &= \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Si la curva Hessiana proyectiva asociada a un polinomio con coeficientes reales f no tiene óvalos anidados, entonces todos los óvalos son exteriores. En este caso, \mathbb{M}_τ coincide con B^- y en consecuencia el teorema 4.3 es global. Es decir, considera a todo el dominio hiperbólico y por lo tanto, a todos los puntos singulares en la recta al infinito y a todos los puntos PE. En caso que la curva Hessiana proyectiva asociada a f tenga óvalos anidados, entonces \mathbb{M}_τ está contenido propiamente en B^- y el teorema 4.3 sólo es válido en \mathbb{M}_τ . Sin embargo, el teorema 4.3 y la propiedad aditiva de la característica de Euler, nos permiten obtener el siguiente resultado, el cual es global, incluso si \mathbb{M}_τ está contenido propiamente en B^- .

Teorema 4.4 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ tal que S_f es una superficie genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es transversal a la recta al infinito y que el dominio hiperbólico de f está contenido en B^- . Sean P_i (P_e) el número de puntos PE en $\partial(B^-)$ con tangencia interior (tangencia exterior). Entonces,*

$$\sum \text{Ind}([q]) = \chi(B^-) + \frac{P_i - P_e}{2},$$

donde la suma corre en todos los puntos singulares $[q]$ del campo \mathbb{X}_k .

En la prueba del teorema 4.4, vamos a considerar la superficie no orientable B^- . La hipótesis del teorema 4.4 pide que B^- coincida con el conjunto $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}$. Así, las componentes conexas de B^- pueden ser puestas en tres distintos grupos.

El primer grupo se constituye únicamente con \mathbb{M}_τ . Notemos que \mathbb{M}_τ es la única componente conexa de B^- que no es orientable, por lo tanto, los dos grupos restantes contienen sólo componentes conexas orientables. El segundo grupo contiene a todas las componentes conexas orientables de B^- que tienen en su interior al menos un punto singular en la recta al infinito. A estas componentes las denotamos con D_1, \dots, D_s . En el tercer grupo están las componentes conexas orientables de B^- que no tienen ningún punto singular en la recta al infinito. A estas

componentes las denotamos con E_1, \dots, E_r . Con esta notación, se tiene que B^- puede ser escrito de la siguiente manera

$$B^- = \mathbb{M}_\tau \cup D_1 \cup \dots \cup D_s \cup E_1 \cup \dots \cup E_r.$$

El número de puntos PE con tangencia interior que están en la frontera de \mathbb{M}_τ (respectivamente en ∂D_l y en ∂E_t) son denotados con $P_i^{\mathbb{M}_\tau}$ (respectivamente, con $P_i^{D_l}$ y con $P_i^{E_t}$). De forma similar, el número de puntos PE con tangencia exterior que están en la frontera de \mathbb{M}_τ (respectivamente en ∂D_l y en ∂E_t) son denotados con $P_e^{\mathbb{M}_\tau}$ (respectivamente, con $P_e^{D_l}$ y con $P_e^{E_t}$).

Lema 4.6 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, tal que S_f es una superficie genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es transversal a la recta al infinito y que el dominio hiperbólico de f está contenido en B^- .*

1. *Sea D_α una componente conexa orientable de B^- , que contienen en su interior al menos un punto singular en la recta al infinito. Supongamos que $\xi_1^{D_\alpha}, \dots, \xi_{k_{D_\alpha}}^{D_\alpha}$ son los $k_{D_\alpha} \in \mathbb{N}$ puntos singulares en la recta al infinito que están en D_α de alguno de los campo \mathbb{X}_k fijo. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{k_{D_\alpha}} \text{Ind}(\xi_j^{D_\alpha}) = \chi(D_\alpha) + \frac{P_i^{D_\alpha} - P_e^{D_\alpha}}{2}.$$

2. *Sea E_β una componente conexa orientable sin puntos singulares en la recta al infinito. Entonces*

$$0 = \chi(E_\beta) + \frac{P_i^{E_\beta} - P_e^{E_\beta}}{2}.$$

Demostración. La prueba del lema 4.6 usa también el teorema de Poincaré-Hopf para superficies con frontera.

1. La preimagen $\Pi^{-1}(D_\alpha) \subseteq \mathbb{S}^2$ de D_α tiene dos componentes conexas, digamos D_α^1 y D_α^2 . Consideremos $\Upsilon_1|_{D_\alpha^1}$ la restricción a D_α^1 de Υ_1 . Usando el teorema 2.15 tenemos

$$\sum_{j=1}^{k_{D_\alpha}} \text{Ind}(\xi_j^{D_\alpha^1}) = \chi(D_\alpha^1) + \frac{P_i^{D_\alpha^1} - P_e^{D_\alpha^1}}{2}.$$

Como D_α es difeomorfo a D_α^1 y los correspondientes campos de direcciones en D_α y D_α^1 también lo son, entonces obtenemos la igualdad

$$\sum_{j=1}^{k_{D_\alpha}} \text{Ind}(\xi_j^{D_\alpha}) = \chi(D_\alpha) + \frac{P_i^{D_\alpha} - P_e^{D_\alpha}}{2}.$$

2. Sean E_1, \dots, E_r las componentes conexas de B^- que no contienen puntos singulares en la recta al infinito. La preimagen $\Pi^{-1}(E_\beta) \subseteq \mathbb{S}^2$ de cada E_β tiene dos componentes conexas $E_\beta^1 \subset \mathbb{S}^2$ and $E_\beta^2 \subset \mathbb{S}^2$. Consideremos $Y_1|_{E_\beta^1}$ la restricción a E_β^1 de Y_1 y observemos que $Y_1|_{E_\beta^1}$ no tiene puntos singulares. Por lo tanto, el primer miembro de la igualdad del teorema 2.15 es cero, esto es

$$0 = \chi(E_\beta^1) + \frac{P_i^{E_\beta^1} - P_{S_e}^{E_\beta^1}}{2}.$$

De esto se sigue la igualdad requerida. ■

Demostración del teorema 4.4. Observemos que

$$\begin{aligned} \sum Ind([q]) &= \sum_{j=1}^{k_{M_\tau}} Ind(\xi_j^{M_\tau}) + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{j=1}^{k_{D_\alpha}} Ind(\xi_j^{D_\alpha}), \\ \chi(B^-) &= \chi(M_\tau) + \sum_{\alpha=1}^s \chi(D_\alpha) + \sum_{\beta=1}^r \chi(E_\beta), \\ \frac{P_i - P_e}{2} &= \frac{P_i^{M_\tau} - P_e^{M_\tau}}{2} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{P_i^{D_\alpha} - P_e^{D_\alpha}}{2} + \sum_{\beta=1}^r \frac{P_i^{E_\beta} - P_{S_e}^{E_\beta}}{2}. \end{aligned}$$

Así, la igualdad $\sum Ind([q]) = \chi(B^-) + \frac{P_i - P_e}{2}$ se obtiene del lema 4.6 como sigue:

$$\begin{aligned} \sum Ind([q]) &= \sum_{j=1}^{k_{M_\tau}} Ind(\xi_j^{M_\tau}) + \sum_{\alpha=1}^s \sum_{j=1}^{k_{D_\alpha}} Ind(\xi_j^{D_\alpha}) + 0 \\ &= \chi(M_\tau) + \frac{P_i^{M_\tau} - P_e^{M_\tau}}{2} + \sum_{\alpha=1}^s \chi(D_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^s \frac{P_i^{D_\alpha} - P_e^{D_\alpha}}{2} + \sum_{\beta=1}^r \chi(E_\beta) + \sum_{\beta=1}^r \frac{P_i^{E_\beta} - P_{S_e}^{E_\beta}}{2} \\ &= \chi(B^-) + \frac{P_i - P_e}{2}. \end{aligned}$$

■

4.5. Cotas superiores para los puntos PE con tangencias interiores y exteriores

Teorema 4.5 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$ con S_f genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva no es tangente a la recta al infinito y que el conjunto de puntos hiperbólicos está contenido en B^- . Sea P_i (P_e) el número de puntos PE en $\partial(B^-)$ con tangencia interior (con tangencia exterior). Si f_n tiene k factores lineales, entonces*

$$P_i \leq \frac{(n-2)(8n-21)}{2} + \frac{k}{2} \quad y \quad P_e \leq \frac{(n-2)(8n-21)}{2} + 1 - \frac{k}{2}.$$

Demostración. Del teorema 4.4 tenemos

$$\frac{P_i - P_e}{2} = \sum \text{Ind}([q]) - \chi(B^-).$$

De la desigualdad (1.1) tenemos las siguientes,

$$-\frac{3(n-2)(n-3)}{2} - 1 \leq -\chi(B^-) \leq \frac{3(n-2)(n-3)}{2}. \quad (4.9)$$

Por la proposición 4.1 y el teorema 4.2, tenemos que $\sum \text{Ind}([q]) = \frac{k}{2}$. Así, las desigualdades (4.9) son equivalentes a las siguientes

$$-3(n-2)(n-3) + k - 2 \leq P_i - P_e \leq 3(n-2)(n-3) + k. \quad (4.10)$$

Del teorema 2.19 se tiene que $P_i + P_e \leq (n-2)(5n-12)$. De esta desigualdad y de las desigualdades (4.10) se tiene que

$$\begin{aligned} 2P_i &\leq (n-2)(3n-9) + (n-2)(5n-12) + k \\ 2P_e &\leq (n-2)(5n-12) + (n-2)(3n-9) - k + 2 \end{aligned}$$

De estas desigualdades se sigue el resultado. ■

En el caso que la curva Hessiana de f sea convexa, compacta y $b^- \cap \mathbb{R}$ sea hiperbólico, L. Hernández, A. Ortiz y F. Sánchez mostraron que $n(3n-14) + 18$ es una cota superior para el número de puntos PE en la frontera de C_u (ver [35] o el teorema 2.20). En el siguiente resultado, reencontramos esta cota superior (cuando k , el número de factores lineales de f_n , es igual al grado de f). Además, dependiendo del número de factores lineales reales distintos de f_n , obtenemos cotas superiores para el número de puntos PE en \mathbb{M}_τ .

Teorema 4.6 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n con S_f genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva es convexa, no tiene nidos de óvalos y no es tangente a la recta al infinito. Si $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico y f_n tiene k factores lineales, entonces S_f tiene a lo más $(n-2)(3n-9) + k$ puntos PE.*

Demostración. Como la curva Hessiana es convexa en \mathbb{R}^2 y $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico, entonces todos los puntos PE son puntos con una tangencia interior. Así, como $P_e = 0$, el resultado se sigue de la desigualdad $P_i - P_e \leq 3(n-2)(n-3) + k$. ■

4.6. Superficies S_f con dominio hiperbólico contenido en B^+

En esta sección vamos a considerar superficies S_f que cumplan con las condiciones descritas en el siguiente caso.

Caso 2 La superficie b^- contiene al subconjunto de puntos elípticos y b^+ contiene al subconjunto de puntos hiperbólicos. Si esto se cumple, $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es llamado elíptico y $b^+ \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico. En este caso

$$\begin{aligned} B^+ &= \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \leq 0\}, \\ B^- &= \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid H(x, y, z) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Cuando B^+ contiene al conjunto de puntos hiperbólicos, todas las componentes conexas de B^+ son orientables. Utilizando el teorema de Poincaré-Hopf para superficies con frontera en cada componente conexa de B^+ , se obtiene el siguiente resultado.

Observación 4.8 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n con S_f genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana Proyectiva no es tangente a la recta al infinito y que el conjunto de puntos hiperbólicos está contenido en B^+ . Sean P_i (P_e) el número de puntos PE en $\partial(B^+)$ con tangencia interior (tangencia exterior). Entonces

$$\sum \text{Ind}([q]) = \chi(B^+) + \frac{P_i - P_e}{2}.$$

Nuevamente, con la observación 4.8, las observaciones 4.6 y 4.7 y las desigualdades de Petrowsky se demuestra el teorema siguiente.

Teorema 4.7 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado n con S_f genérica y tal que f_n no tiene factores repetidos. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva no es tangente a la recta al infinito y que el conjunto de puntos hiperbólicos está contenido en B^+ . Sea P_i (P_e) el número de puntos PE en $\partial(B^+)$ con tangencia interior (con tangencia exterior). Entonces

$$P_i \leq \frac{(n-2)(8n-21)}{2} + \frac{k}{2} \quad y \quad P_e \leq \frac{(n-2)(8n-21)}{2} + 1 - \frac{k}{2}.$$

Demostración. De la observación 4.8 tenemos

$$\frac{P_i - P_e}{2} = \sum \text{Ind}([q]) - \chi(B^+)$$

De la desigualdad de Petrowsky (1.7) tenemos la siguiente desigualdad,

$$-\frac{3(n-2)(n-3)}{2} - 1 \leq -\chi(B^-) \leq \frac{3(n-2)(n-3)}{2}.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{3(n-2)(n-3)}{2} - 1 + \frac{k}{2} \leq \sum \text{Ind}([q]) - \chi(B^-) \leq \frac{3(n-2)(n-3)}{2} + \frac{k}{2}$$

De esta desigualdad, junto con $P_i + P_e \leq (n-2)(5n-12)$, se obtienen las desigualdades para P_i y P_e . ■

4.7. Gráficas de polinomios hiperbólicos

En esta sección, primero veremos que en el caso de polinomios homogéneos hiperbólicos, la conclusión del teorema 4.2 es también cierta.

Observación 4.9 Sea $f_n \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio homogéneo hiperbólico de grado $n \geq 3$. Entonces el índice de Poincaré en cada punto singular $(u_0, v_0, 0) \in \mathbb{S}^2$ de la forma (4.1) es $\frac{1}{2}$ y es del tipo topológico ilustrado en la figura 4.7.

Demostración. Como f_n es un polinomio homogéneo hiperbólico, la forma $II(S_{f_n})$ es positiva. De la proposición 3.3 tenemos que los puntos singulares de (4.1) en el ecuador de la esfera pueden ser de alguno de los tipos ilustrados en la figura (3.6). Además, como f_n es hiperbólico, entonces f_n no tiene factores lineales reales repetidos. Si q es un punto singular de (4.1) en el ecuador de la esfera, realizamos un cambio de coordenadas de tal manera que q sea el punto $(1 : 0 : 0)$. De esta manera, f_n puede ser escrito en la forma $f_n(x, y) = y \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j-1,1} x^{n-j-1} y^j \right)$, con $a_{n-1,1} \neq 0$. Así, la prueba del teorema 4.2 se aplica a este caso y se obtiene que el único tipo topológico posible es el de la figura 4.7. ■

La observación 4.9 junto con el teorema de Poincaré-Hopf nos permite dar otra demostración del siguiente teorema, el cual fue demostrado por V. I. Arnold en un contexto más amplio (ver en [2] los resultados siguientes: Teorema 2, pág. 1030, Teorema 3 pág. 1031, Teorema 4 pág. 1032 y el primer párrafo en la pág. 1035).

Teorema (V. I. Arnold, [2]). Sea $f(x, y)$ un polinomio homogéneo hiperbólico de grado n con k factores lineales reales. Si $ind_f(0)$ denota al índice en $(0, 0)$ con respecto a cada uno de los dos campos de direcciones asintóticas de S_f , entonces $Ind_f(0) = 1 - \frac{k}{2}$.

En su trabajo, V. I. Arnold relaciona la condición de que una función homogénea de grado n sea hiperbólica con la teoría de Morse. El método usado en [2] para la prueba de este teorema, es el siguiente. Arnold considera a los polinomios homogéneos en coordenadas polares, $f(x, y) = r^n F(\theta)$, donde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica de período 2π . Él demuestra que el índice de Poincaré, del campo de direcciones asintóticas de f en el origen, se relaciona con el número de puntos críticos de la función F de la siguiente manera:

$$ind_f(0) = 1 - \frac{1}{4} \# \left\{ \theta \in [0, 2\pi) \mid \frac{d}{d\theta} F(\theta) = 0 \right\}.$$

Como el número de puntos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que anulan a la derivada de F , coincide con el número, de puntos en el intervalo $[0, 2\pi)$ que anulan a F (siendo este número menor o

igual que $2n$), entonces se tiene que:

$$\text{ind}_f(0) = 1 - \frac{1}{4} \# \{ \theta \in [0, 2\pi) \mid F(\theta) = 0 \}.$$

La prueba del teorema de Arnold que aquí se propone es la siguiente.

Demostración. Como $f(x, y)$ es un polinomio homogéneo hiperbólico, entonces $II(S_f)$ es positiva. Así, los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$ son puntos singulares de los dos campos de direcciones Y_1 y Y_2 determinados por (4.1) en la esfera. Además de estos dos puntos singulares, tenemos otros posibles puntos singulares en el ecuador de la esfera, ξ_1, \dots, ξ_k con $k \leq n$ y sus respectivos k puntos antípodas ξ'_1, \dots, ξ'_k , los cuales también son puntos singulares de cada una de los campos de direcciones determinados por (4.1). Consideramos uno de estos campos de direcciones, por ejemplo Y_1 . De la observación 4.9 tenemos que $\text{ind}(\xi_i) = \frac{1}{2} = \text{ind}(\xi'_i)$, para cada $i = 1, \dots, k$. Por lo tanto, del teorema de Poincaré-Hopf tenemos que

$$2 \sum_{i=1}^k \text{ind}(\xi_i) + 2 \text{ind}_{f_n}(0) = 2 = \chi(\mathbb{S}^2). \quad (4.11)$$

De esto tenemos que $\sum_{i=1}^k \text{ind}(\xi_i) + \text{ind}_{f_n}(0) = 1$. Como $\sum_{i=1}^k \text{ind}(\xi_i) = \frac{k}{2}$, el resultado se sigue. ■

4.8. Algunas restricciones para gráficas de polinomios

El problema 1997-6 en la lista de problemas de Arnold [6] es atribuido a D. A. Panov y pregunta lo siguiente.

¿Existe una función genérica f definida sobre el plano, tal que la curva parabólica de S_f sea conexa y tal que los campos de direcciones asintóticas sobre esta curva parabólica tengan sólo un punto parabólico especial y éste sea de índice +1? Si la curva parabólica de S_f es conexa y no singular, ¿es cierto que el número de puntos parabólicos especiales con índice -1 es mayor o igual que el número de puntos parabólicos especiales con índice +1?

Con los siguientes resultados, en el caso de funciones polinómicas, obtenemos una respuesta a la primera pregunta del problema de Panov. La siguiente proposición y el corolario son una aplicación de los resultados obtenidos al extender los campos de direcciones asintóticas a la recta al infinito.

Proposición 4.2 *No existe $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, tal que:*

1. *La superficie S_f^n es genérica y tiene sólo un punto (PE) de índice +1.*

2. El polinomio f_n no tiene factores repetidos.
3. La curva Hessiana proyectiva de f es conexa y transversal a la recta al infinito.
4. La superficie B^- contiene al dominio hiperbólico de f .

Demostración. Para la demostración supongamos que existe f con las propiedades enunciadas en la proposición. Como S_f es una superficie genérica tal que la curva Hessiana proyectiva de f es conexa, transversal a la recta al infinito y B^- contiene al conjunto de puntos hiperbólicos, se cumplen todas las hipótesis del teorema 4.4. Por lo tanto, se cumple la igualdad

$$\sum \text{Ind}([q]) = \chi(B^-) + \frac{P_i - P_e}{2},$$

donde la suma corre sobre todos los puntos singulares $[q]$ del campo \mathbb{X}_k . Además $\chi(B^-) = 0$, pues en este caso B^- es una banda de Möbius cerrada. Como S_f tiene sólo un punto parabólico especial de índice positivo, entonces el número P_i es igual a cero y P_e es igual a 1 (observación 2.4). De esto obtenemos que

$$\sum \text{Ind}([q]) = \frac{-1}{2}.$$

Esta igualdad no es posible pues $\sum \text{Ind}([q]) \geq 0$. ■

Corolario. No existe $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, tal que su gráfica S_f sea una superficie genérica, con f_n sin factores repetidos y tal que la curva Hessiana de f sea conexa, compacta en \mathbb{R}^2 , con C_u hiperbólica y con sólo un punto parabólico especial de índice positivo.

Demostración. Si existiera un polinomio f con todas las características enunciadas en el corolario, entonces la curva Hessiana proyectiva de f sería conexa y transversal a la recta al infinito. Además, como C_u sería hiperbólica, entonces B^- contendría al conjunto de puntos hiperbólicos de f . Así, existiría un polinomio f con todas las propiedades enunciadas en la proposición 4.2, lo cual no es posible. ■

Observación 4.10 Es conocido que no existe un polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que S_f sea genérica y tal que su curva Hessiana sea compacta, conexa, con C_u elíptica y con sólo un punto parabólico especial de índice positivo. Ésto es debido a que, en este caso, el dominio hiperbólico es homeomorfo a un disco. Por tanto, al considerar el levantamiento de los campos de direcciones asintóticas al espacio de 1-jets, lo que se obtiene es un campo vectorial tangente a una superficie homeomorfa a la esfera, el cual tiene sólo un punto singular. En virtud del teorema de Poincaré-Hopf, el índice de Poincaré del campo vectorial en el punto singular debe ser 2, lo cual es una contradicción a que S_f sea genérica.

También es posible dar casos que dan respuesta afirmativa a la segunda pregunta del problema de Panov.

Proposición 4.3 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado $n \geq 3$, tal que su gráfica S_f sea una superficie genérica. Supongamos que f_n no tiene factores repetidos, la curva Hessiana de f es transversal a la recta al infinito y que B^- (B^+) contiene al conjunto de puntos hiperbólicos. Si $\chi(B^-) \leq 0$ ($\chi(B^+) \leq 0$, respectivamente), entonces el número de puntos parabólicos especiales con índice negativo es mayor o igual al número de puntos parabólicos especiales con índice positivo.*

Demostración. Primero consideremos el caso en el que B^- contiene al conjunto de puntos hiperbólicos. Como el índice de Poincaré de cada uno de los campos de direcciones \mathbb{X}_x en cada punto singular $[q]$ en la recta al infinito es mayor o igual que cero tenemos que al considerar todos los puntos singulares $\sum \text{Ind}([q]) \geq 0$. Así, de la igualdad del teorema 4.4, se obtiene que $0 \leq \chi(B^-) + \frac{P_i - P_e}{2}$. Por lo tanto, si $\chi(B^-) \leq 0$ entonces $\frac{P_i - P_e}{2}$ es mayor o igual a cero.

En caso en el que B^+ contiene al conjunto de puntos hiperbólicos se sigue de manera similar usando la observación 4.8. ■

Parte II

Teoría clásica de invariantes y Curvas Hessianas

Capítulo 5

Teoría clásica de invariantes de polinomios homogéneos

Invariant theory has already been pronounced dead several times, and like the phoenix it has been again and again rising from its ashes.

Jean A. Dieudonné

5.1. Introducción

En este capítulo se introducen algunos conceptos pertenecientes a la *teoría clásica de invariantes*, la cual se encarga de estudiar propiedades intrínsecas o geométricas de polinomios (ver [50]). Antes de presentar los conceptos, iniciaremos con un poco de historia sobre la teoría en su primer periodo (ver [20], [23] y [50]). Para el lector interesado en una lista detallada de referencias sobre la historia y sobre la teoría misma, recomendamos [50].

El primer periodo en la historia de la teoría clásica de invariantes inició cuando George Boole (1815-1864) encontró algunos de los invariantes de los polinomios homogéneos de grado n en m variables. Influenciado por Boole, Arthur Cayley (1821-1895) logró sentar las bases de la teoría de invariantes. En sus trabajos Cayley consideró formas multilineales, las cuales incluyen como casos particulares a los polinomios homogéneos. Con dicha aproximación, Cayley encontró nuevos invariantes de polinomios homogéneos. Además, encontró una conexión con la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Cayley le anunció dicha conexión a James Joseph Sylvester (1814-1897), quien en breve obtuvo resultados propios.

Durante la década de 1860 y la de 1870, los matemáticos alemanes Siegfried Aronhold (1819-1884), Alfred Clebsch (1833-1872) y Paul Gordan (1837-1912) llevaron la teoría de invariantes en aquel primer periodo a su punto más alto. Dentro de los desarrollos en este periodo, destacan: el método simbólico, establecido por Aronhold, el cual permite realizar el cálculo de los invariantes y covariantes (invariantes son un tipo particular de covariantes); las aportaciones de Clebsch a la teoría de representaciones y a la mecánica cuántica; el teorema demostrado por Gordan, que garantiza que hay sólo un número finito de invariantes independientes para polinomios de una variable.

Debido a que ciertas combinaciones polinomiales de covariantes de polinomios homogéneos son también covariantes, un problema que fue considerado consistió en encontrar una lista finita mínima de covariantes *fundamentales o independientes* de tal forma que cualquier covariante fuera un polinomio en los covariantes independientes. En 1890 David Hilbert demostró la existencia de dichas listas de covariantes independientes. En la actualidad, a una lista finita de covariantes independientes se le conoce como *base de Hilbert*.

Cabe hacer notar que las bases de Hilbert de polinomios homogéneos en dos variables de grado menor o igual que seis ya eran conocidas por Cayley. Sin embargo, él afirmó que los polinomios homogéneos en dos variables de grado mayor o igual que siete no tienen una base de Hilbert finita. Quien refutó esta afirmación fue Gordan en 1868. La prueba del teorema de finitud que realiza Gordan es constructiva, por lo tanto, es posible producir listas completas de covariantes independientes de polinomios homogéneos en dos variables de cualquier grado. Sin embargo, el método de prueba de Gordan sólo ha sido llevado a la práctica en polinomios homogéneos en dos variables de grado a lo más ocho.

5.2. Invariantes y covariantes

En esta sección vamos a considerar polinomios homogéneos (formas) en dos variables (binarias) con coeficientes en $K = \mathbb{C}$ o en $K = \mathbb{R}$. La presentación de este capítulo está basado principalmente en [50] y en [31]. La mayoría de los resultados (todos hasta los de la sección 5.4) fueron consultados en estos libros. Los resultados de la sección 5.5 pueden ser consultados en [51] (página 60).

El espacio de formas binarias de grado fijo. A cada forma binaria $Q(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}$ de grado n , le asociamos la $(n + 1)$ -tupla $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)$, formada por los coeficientes de $Q(x, y)$. Sea

$$C_K(n) = \left\{ \mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \mid a_j \in K, j = 0, \dots, n \right\}, \text{ con } K = \mathbb{C}, \mathbb{R}.$$

Decimos que $C_K(n)$ es el espacio de coeficientes del conjunto de formas binarias Q de grado n con coeficientes en K .

Acción del grupo de transformaciones lineales invertibles en las formas binarias. Consideremos el cambio de coordenadas $\bar{x} = \alpha x + \beta y, \bar{y} = \gamma x + \delta y$, definido por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(K, 2).$$

Bajo la transformación lineal inducida por A , los coeficientes a_i de la forma $Q(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}$ son enviados en los coeficientes \bar{a}_i de una nueva forma $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$.

La relación entre las formas $Q(x, y)$ y $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$ es, $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{Q}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = Q(x, y)$. Mientras que los coeficientes de $Q(x, y)$ y $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$ están relacionados en la siguiente manera

$$\bar{a}_i = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \left(\sum_{j=\max\{0, i+k-n\}}^{\min\{i, k\}} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k-j} \alpha^j \beta^{k-j} \gamma^{i-j} \delta^{n+j-i-k} \right), i = 0, \dots, n.$$

Invariantes y covariantes de formas binarias. La propiedad que busca generalizar la definición de invariante es la descrita por el discriminante de una forma cuadrática binaria, mediante la acción del grupo general lineal $GL(2, K)$ en el espacio de coeficientes $C_K(n)$. Esto es, los discriminantes Δ y $\bar{\Delta}$ de dos formas binarias cuadráticas $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ y $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{a}x^2 + 2\bar{b}xy + \bar{c}y^2$, relacionadas por la transformación lineal inducida por A , satisfacen la igualdad

$$\Delta = ac - b^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (\bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \bar{\Delta}.$$

Definición. Sean $\bar{\mathbf{a}}$ los coeficientes de la forma binaria \bar{Q} de grado n con coeficientes en K , la cual se obtiene de Q mediante la transformación lineal $A \in GL(K, 2)$. Un *invariante* de la forma $Q(x, y)$ es una función $I(\mathbf{a}) = I(a_0, \dots, a_n)$ que depende de los coeficientes de $Q(x, y)$ y que satisface la igualdad:

$$I(\mathbf{a}) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^k I(\bar{\mathbf{a}}).$$

La potencia k a la que está elevada el valor del determinante de la matriz A es llamada el *peso del invariante*.

Los invariantes son de fundamental importancia en la geometría de formas binarias, sin embargo, es necesario considerar funciones que no sólo dependan de los coeficientes sino también de las variables independientes x y y .

Definición. Un *covariante* de una forma binaria $Q(x, y)$ de grado n con coeficientes en K es una función $J(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = J(a_0, \dots, a_n, x, y)$ que depende tanto de los coeficientes $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)$ como de

las variables $\mathbf{x} = (x, y)$, la cual, salvo una potencia del determinante de la transformación lineal A no cambia, esto es,

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = (\alpha\beta - \gamma\delta)^k J(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{x}}).$$

Notemos que los invariantes son covariantes que no dependen explícitamente de las variables $\mathbf{x} = (x, y)$. Si el peso de un covariante (o invariante) J es $k = 0$, entonces llamamos a J un *covariante absoluto*.

Ejemplos de invariantes y covariantes.

Ejemplo 5.1 El ejemplo más simple de un covariante de una forma binaria Q , es la misma forma binaria Q . El peso de este covariante es $k = 0$.

Ejemplo 5.2 Si Q es de grado 2, su discriminante es un invariante de peso 2.

Ejemplo 5.3 El discriminante Δ de la forma cúbica

$$Q(x, y) = a_3x^3 + 3a_2x^2y + 3a_1xy^2 + a_0y^3,$$

es un invariante de peso 6. Donde, $\Delta = a_0^2a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 - 3a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_3$.

Ejemplo 5.4 Sea $Q(x, y)$ una forma binaria de grado n , el Hessiano $H = Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2$ de Q es un covariante de la forma Q de peso 2.

El siguiente resultado describe el significado geométrico del Hessiano como covariante de Q (ver [31] y [50]).

Proposición 5.1 Sea $Q(x, y)$ una forma binaria de grado n y H su Hessiano. Entonces $H \equiv 0$ si y sólo si $Q(x, y) = (cx + dy)^n$ es la n -ésima potencia de una forma lineal.

Ejemplo 5.5 Si K y L son dos covariantes de una forma binaria Q , entonces el Jacobiano J de K y L , es también un covariante de $Q(x, y)$. Donde

$$J = \frac{\partial(K, L)}{\partial(x, y)} = K_xL_y - K_yL_x.$$

Si K tiene grado m y peso k , L tiene grado l y peso j , entonces el Jacobiano J es un polinomio de grado (a lo más) $m + l - 2$ y un covariante de peso $k + j + 1$.

Nota 5.1 Ambos covariantes, el Hessiano de una forma binaria y el Jacobiano de dos covariantes de una forma Q son *polinomios diferenciales homogéneos*, lo que significa que pueden ser expresados

como polinomios en Q y sus derivadas. De hecho, todo invariante y covariante polinomial de una forma binaria puede ser escrito como un polinomio diferencial homogéneo. El teorema fundamental de la teoría clásica de invariantes provee un mecanismo para construir polinomios diferenciales los cuales dan origen a los invariantes y covariantes clásicos.

5.3. Bases de Hilbert

Debido a que algunas combinaciones polinomiales de covariantes son también covariantes, un problema algebraico importante es dar una lista mínima de covariantes que genere a todos los demás covariantes. Una lista con dicha propiedad es llamada una base de Hilbert.

Definición. Sean Q_1, \dots, Q_l formas binarias.

1. Una familia finita de invariantes I_1, \dots, I_m forma una *base de Hilbert* si todo invariante puede ser escrito como una función polinomial $I = P(I_1, \dots, I_m)$ de los invariantes básicos I_j .
2. Una familia finita de covariantes J_1, \dots, J_k forma una *base de Hilbert* si todo covariante puede ser escrito como una función polinomial $J = P(J_1, \dots, J_k)$ de los covariantes básicos.

David Hilbert probó que las bases de Hilbert existen para cualquier familia de formas (en cualquier número de variables). A continuación listamos una base de Hilbert para las formas de grado 1, 2 y 3.

Proposición 5.2 Una forma binaria lineal $Q(x, y) = ax + by$ tiene un único covariante básico, a saber, la forma misma $Q(x, y)$.

Proposición 5.3 Una base de Hilbert de covariantes de una forma binaria cuadrática $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ consiste de la forma misma y su discriminante $\Delta = ac - b^2$. Más aún, para cada forma binaria cuadrática Q , todo covariante polinomial J de Q se escribe como el producto de una potencia de Q y una potencia de su discriminante Δ , es decir, $J = Q^l \Delta^m$, además, J tiene peso $2m$.

Proposición 5.4 Una base de Hilbert de covariantes de una forma binaria cúbica $Q(x, y) = a_3x^3 + 3a_2x^2y + 3a_1xy^2 + a_0y^3$ consiste de $Q(x, y)$ misma, su Hessiano $H = Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2$, su discriminante $\Delta = a_0^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 - 3a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_3$, y el Jacobiano $B = \frac{\partial(Q, 2H)}{\partial(x, y)}$ de las formas Q y $2H$.

5.4. Formas normales de las formas binarias complejas y reales de grado 4

Ahora nos enfocaremos en formas binarias de grado cuatro con coeficientes en $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

$$Q(x, y) = a_4x^4 + 4a_3x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_1xy^3 + a_0y^4.$$

Proposición 5.5 Una base de Hilbert de covariantes de una forma binaria Q de grado 4 consiste de la forma misma, su Hessiano H , el Jacobiano $T = \frac{\partial(Q, 2H)}{\partial(x, y)}$ y de los invariantes

$$i = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad y \quad j = \det \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

El peso del invariante i es 4, mientras que el peso del invariante j es 6.

Formas normales complejas. Existe un significado geométrico al hecho de que los dos invariantes i y j se anulen simultáneamente. La forma Q de grado 4 es la cuarta potencia de una forma lineal o tiene como factor a una potencia cúbica de una forma lineal si y sólo si $i = j = 0$. Como i es de peso 4 y j es de peso 6 se tiene que i^3 y j^2 son de peso 12. Además, el cociente $\frac{i^3}{j^2}$ es un invariante absoluto. Cualquier combinación lineal de i^3 y j^2 es un invariante relativo de peso 12. El más importante entre éstos es el discriminante $\Delta = i^3 - 27j^2$ el cual se anula si y sólo si la forma cuártica tiene factores lineales múltiples.

Tales observaciones junto con otras combinaciones polinomiales de los covariantes permiten, tanto en el caso complejo como en el caso real, clasificar a las formas binarias grado cuatro. A continuación presentamos una lista de formas normales, que representan a las órbitas de las formas binarias de grado cuatro bajo la acción del grupo de transformaciones lineales invertibles de \mathbb{C}^2 .

Tipo	Forma Normal	Condiciones Algebraicas
I	$x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4, \mu \neq \pm\frac{1}{3}$	$i^3 - 27j^2 \neq 0$
II	$6x^2y^2 + y^4$	$i^3 - 27j^2 = 0, 2iH - 3jQ \neq 0$
III	$6x^2y^2$	$2iH - 3jQ = 0, i \neq 0$
IV	$4x^3y$	$i = j = 0, H \neq 0$
V	x^4	$i = j = 0, H = 0$
VI	forma idénticamente cero	$Q \equiv 0$

(5.1)

Formas normales reales. En el caso real, las formas normales obtenidas de hacer actuar el grupo $GL(2, \mathbb{R})$ en el espacio de coeficientes $C_{\mathbb{R}}(4)$ de las formas binarias reales de grado 4, están dadas en la tabla (5.2).

Tipo	Forma Normal/ Condiciones algebraicas
I_a	$x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4, \mu < -\frac{1}{3}.$ $i^3 - 27j^2 > 0, H < 0; 12H^2 - iQ^2 > 0.$
I_b, I_c	$\alpha(x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4), \mu > -\frac{1}{3}, \alpha = \pm 1.$ $i^3 - 27j^2 > 0, \alpha Q > 0, H \geq 0$ o $12H^2 - iQ^2 < 0.$
I_d	$x^4 + 6\mu x^2 y^2 - y^4.$ $i^3 - 27j^2 < 0.$
$II_{a,b,c,d}$	$6\alpha x^2 y^2 + \beta y^4, \alpha = \pm 1, \beta = \pm 1$ $\alpha j < 0, \alpha\beta(2iH - 3jQ) \geq 0.$
$III_{a,b}$	$6\alpha x^2 y^2, \alpha = \pm 1$ $\alpha j < 0, H \leq 0.$
$III_{c,d}$	$\gamma(x^2 + y^2)^2, \gamma = \pm 1$ $\gamma j > 0, H \geq 0.$
IV	$4x^3 y$ $i = j = 0, H \neq 0.$
$V_{a,b}$	$\alpha x^4, \alpha = \pm 1$ $H \equiv 0$
VI	forma idénticamente cero $H \equiv 0$

(5.2)

Las formas del tipo I_a se factorizan como el producto de cuatro formas lineales reales distintas. La condición algebraica $H < 0$ significa que el Hessiano H se anula sólo en el origen de \mathbb{R}^2 y es negativo en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Por su parte, las formas del tipo I_b y I_c son aquellas en las que todos sus factores lineales son formas con coeficientes complejos. La forma del tipo I_b es definida (semi-)positiva y I_c es definida (semi-)negativa.

En cambio, las formas normales del tipo I_d son aquellas que se pueden factorizar como el producto de dos factores lineales distintos y dos complejos distintos. Por último, las formas normales del tipo II, III, IV, V son formas con al menos un factor lineal múltiple, es decir, su discriminante $i^3 - 27j^2$ es igual a cero.

Proposición 5.6 *Sea Q una forma de grado 4 sobre \mathbb{R} y H su Hessiano. Supongamos que Q no tiene*

factores lineales múltiples. Entonces Q y H no tienen ningún factor lineal en común.

Demostración. Sólo hay que demostrar la proposición para las formas normales I_a, I_b, I_c y I_d . Haremos los cálculos para el tipo I_d ; los otros casos son análogos. Si $Q(x, y) = x^4 + 6\mu x^2 y^2 - y^4$, entonces $HessQ(x, y) = 144 [\mu x^4 + (-1 - 3\mu^2)x^2 y^2 - \mu y^4]$. El resultante entre Q y su Hessiano es el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6\mu & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6\mu & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6\mu & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6\mu & 0 & -1 \\ 144\mu & 0 & 144(-1 - 3\mu^2) & 0 & -144\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 144\mu & 0 & 144(-1 - 3\mu^2) & 0 & -144\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144\mu & 0 & 144(-1 - 3\mu^2) & 0 & -144\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 144\mu & 0 & 144(-1 - 3\mu^2) & 0 & -144\mu \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es el polinomio $(144)^4 (9\mu^2 + 1)^4$. Así, el resultante de $Q(x, y)$ y $HessQ(x, y)$ no tiene raíces reales, por lo que Q y H no tienen ningún factor lineal en común. ■

Proposición 5.7 Sea $Q = \alpha\varphi^2$, donde φ es una forma cuadrática y $\alpha = \pm 1$. Entonces $H = (12^2) \frac{1}{3} \Delta_\varphi \cdot \varphi^2$, donde Δ_φ es el discriminante de la forma cuadrática φ .

Demostración. Basta probar esta propiedad para las formas normales $III_{a,b}$ y $III_{c,d}$.

El Hessiano de la forma $g(x, y) = 6\alpha x^2 y^2$ es la forma $-432\alpha^2 x^2 y^2$. Notemos que aquí 6 es el discriminante del polinomio cuadrático $6xy$ así, la proposición se cumple. Mientras que de la forma $\gamma(x^2 + y^2)^2$ el Hessiano es $48x^4 \gamma^2 + 96x^2 y^2 \gamma^2 + 48y^4 \gamma^2 = 48\gamma^2 (x^2 + y^2)^2$. ■

5.5. Polinomios Hessianos de las formas normales reales

Hessianos de las formas normales reales con discriminante no nulo. Dado un polinomio homogéneo de grado n , su polinomio Hessiano es de grado $2n - 4$ (o el polinomio nulo). En el caso en que Q sea de grado 4 su polinomio Hessiano H es también de grado 4 (o nulo). Como H es un covariante de Q , sus invariantes i_H y j_H son también invariantes de Q , lo cuales se pueden expresar en términos de i y j , pues éstos últimos son invariantes básicos de Q . Así, es posible obtener una clasificación aún más detallada de los polinomios homogéneos de grado 4 (ver también [51]). Una consecuencia de esta clasificación es la siguiente. Un polinomio homogéneo Q de grado 4 se escribe como el producto de cuatro formas lineales reales distintas si y sólo si Q es un polinomio homogéneo hiperbólico. Así, el espacio de polinomios hiperbólicos de grado

cuatro consiste de los polinomios con forma normal del tipo I_a . En [2], V. I Arnold demostró que este espacio es conexo.

Proposición 5.8 *El polinomio Hessiano H de un polinomio homogéneo Q del tipo I_a tiene la forma normal $-(x^4 + 6\bar{\mu}x^2y^2 + y^4)$ para algún $\bar{\mu} = \frac{-1+3\mu^2}{6|\mu|} \in (-\frac{1}{3}, \infty)$, donde $\mu \in (-\infty, -\frac{1}{3})$. Así, H es del tipo I_c si $\mu \neq -1$ y es del tipo III_d si $\mu = -1$.*

Demostración. Notemos que el Hessiano de la forma normal $x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4, \mu < -\frac{1}{3}$, es:

$$H(x, y) = 144\mu x^4 + (144 - 432\mu^2)x^2y^2 + 144\mu y^4. \quad (5.3)$$

Los invariantes de $H(x, y)$ son:

$$\begin{aligned} i &= 1728(3\mu^2 + 1)^2, \\ j &= 373\,248\mu^6 - 1866\,240\mu^4 + 622\,080\mu^2 - 13\,824, \\ i^3 - 27j^2 &= 2^{20}3^{12}\mu^2(9\mu^4 - 10\mu^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Notemos que el discriminante $i^3 - 27j^2$ de $H(x, y)$ es no negativo y en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{3})$ se anula si $\mu = -1$. Esta observación sobre el discriminante de $H(x, y)$, implica que si $\mu = -1$ entonces $H(x, y)$ es del tipo $III_{c,d}$ pues $H(x, y) = -144(x^2 + y^2)^2$. Observemos que todos los valores de μ en los que el discriminante de $H(x, y)$ se anula son $\mu = \pm -1, 0$ y $\pm\frac{1}{3}$. Los valores de μ iguales a 1 y 0 corresponden a formas del tipo I_b y I_c tales que sus Hessianos tienen factores lineales múltiples: si $\mu = 0$ entonces $H(x, y) = 144x^2y^2$ y si $\mu = 1$, entonces $H(x, y) = 144(x - y)^2(x + y)^2$. Si el valor de μ es igual a $-\frac{1}{3}$, entonces $H(x, y) = -48(x - y)^2(x + y)^2$, el cual pertenece al tipos $III_{a,b}$ y si $\mu = \frac{1}{3}$, entonces $H(x, y) = 48(x^2 + y^2)^2$, el cual pertenece al tipo $III_{c,d}$.

Para llevar al polinomio 5.3 a su forma normal, usamos la transformación lineal invertible

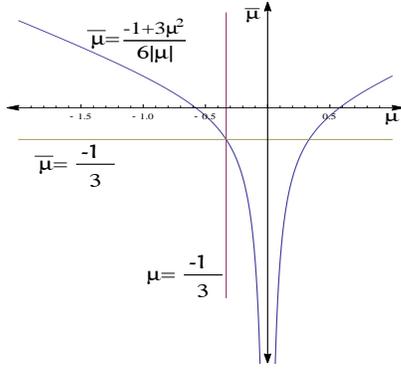
$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{-144\mu}}\tilde{x}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{-144\mu}}\tilde{y}. \quad (5.4)$$

Con esta transformación obtenemos el polinomio homogéneo

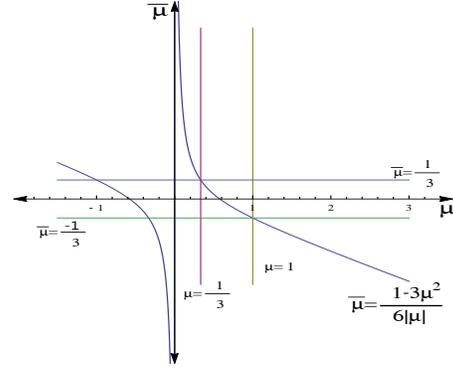
$$\frac{\mu}{|\mu|}x^4 + 6\frac{(1 - 3\mu^2)}{6|\mu|}x^2y^2 + \frac{\mu}{|\mu|}y^4, \mu < -\frac{1}{3}.$$

Notemos que $\frac{\mu}{|\mu|} = -1$ pues $\mu < 0$. El coeficiente $\bar{\mu} = -\frac{1-3\mu^2}{6|\mu|}$ toma los valores del intervalo $(\frac{1}{3}, \infty)$ si $\mu < -\frac{1}{3}$ (ver figura 5.1). De esto se obtiene que $H_a(x, y)$ está en la órbita de alguna forma normal del tipo I_c , si $\mu \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ y $\mu \neq -1$. ■

Proposición 5.9 *El polinomio Hessiano H de un polinomio Q del tipo I_b y I_c tiene alguna de las siguientes formas normales*



– Figura 5.1 –



– Figura 5.2 –

1. Si $\mu \in (-\frac{1}{3}, 0)$, entonces $H(x, y) = -(x^4 + 6\bar{\mu}x^2y^2 + y^4)$ y $\bar{\mu} = \frac{-1+3\mu^2}{6|\mu|} \in (-\infty, -\frac{1}{3})$. Así, H es del tipo I_a .
2. Sea $H(x, y) = x^4 + 6\bar{\mu}x^2y^2 + y^4$, con $\bar{\mu} = \frac{1-3\mu^2}{6\mu}$.
 - a) Si $\mu \in (0, \frac{1}{3})$, entonces $\bar{\mu} \in (\frac{1}{3}, \infty)$. Así, H es del tipo I_b .
 - b) Si $\mu \in (\frac{1}{3}, 1)$, entonces $\bar{\mu} \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Por lo que H es del tipo I_b .
 - c) Si $\mu \in (1, \infty)$, entonces $\bar{\mu} \in (-\infty, -\frac{1}{3})$. En este caso, H es del tipo I_a .
3. Si $\mu = 0$ entonces $H(x, y) = 144x^2y^2$ es del tipo $III_{a,b}$, si $\mu = \frac{1}{3}$ entonces $H(x, y) = 48(x^2 + y^2)^2$ el cual pertenece al tipo $III_{c,d}$ y si $\mu = 1$, entonces $H(x, y) = 144(x - y)^2(x + y)^2$ es del tipo $II_{a,b,c,d}$.

Demostración. El polinomio Hessiano de $\alpha(x^4 + 6\mu x^2y^2 + y^4)$ con $\mu > -\frac{1}{3}$, $\alpha = \pm 1$, es

$$H_{b,c}(x, y) = 144\mu x^4 + (144 - 432\mu^2)x^2y^2 + 144\mu y^4.$$

Los invariantes de $H_{b,c}(x, y)$ son:

$$\begin{aligned} i &= 1728(3\mu^2 + 1)^2, \\ j &= 373\,248\mu^6 - 1866\,240\mu^4 + 622\,080\mu^2 - 13\,824, \\ i^3 - 27j^2 &= 2^{20}3^{12}\mu^2(9\mu^4 - 10\mu^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Para probar 1, supongamos que $\mu \in (-\frac{1}{3}, 0)$. Observemos que $i^3 - 27j^2 > 0$ en el intervalo $(-\frac{1}{3}, 0)$.

El polinomio $H_{b,c}$ es llevado por la transformación lineal (5.4) en el polinomio:

$$-\left(x^4 - 6\frac{(1-3\mu^2)}{6|\mu|}x^2y^2 + y^4\right).$$

El coeficiente $a_2 = -\frac{1-3\mu^2}{6|\mu|} = \bar{\mu}$ de $H_{b,c}(x, y)$ varía en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{3})$ (ver figura 5.1) y los coeficientes a_4 y a_0 valen $\frac{\mu}{|\mu|} = -1$. Por lo tanto, $H_{b,c}$ tiene un representante en las formas normales del tipo I_a .

Notemos que si $\mu = 0$, entonces $H_{b,c}(x, y) = 144x^2y^2$ el cual tiene factores lineales repetidos.

Ahora empezamos con la prueba de 2. Si μ toma valores positivos, entonces $H_{b,c}$ tiene la forma normal

$$x^4 + 6\frac{(1-3\mu^2)}{6\mu}x^2y^2 + y^4. \quad (5.5)$$

En efecto, basta aplicar a $H_{b,c}(x, y)$ la transformación lineal

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{144\mu}}\tilde{x}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{144\mu}}\tilde{y}. \quad (5.6)$$

Para probar 2a) supongamos que $\mu \in (0, \frac{1}{3})$. Notemos que en este caso, el coeficiente $a_2 = \frac{1-3\mu^2}{6\mu} = \bar{\mu}$ de (5.5) toma los valores del intervalo $(\frac{1}{3}, \infty)$ (ver figura 5.2). Así, $H_{b,c}$ tiene un representante en las formas normales del tipo I_b o I_c .

Ahora probaremos 2 b). Si $\mu \in (\frac{1}{3}, 1)$, el polinomio $H_{b,c}$ tiene la forma normal (5.5) con $\mu \in (\frac{1}{3}, 1)$ y el coeficiente $a_2 = \frac{(1-3\mu^2)}{6\mu} = \bar{\mu}$ de (5.5) toma los valores del intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (ver figura 5.2). Así, el Hessiano $H_{b,c}$ tiene representantes en las formas I_b o I_c .

Si $\mu = 1$, $H_{b,c}(x, y) = 144(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 144(x^2 - y^2)^2$ es un polinomio con factores lineales repetidos.

Por último, probemos 2c). En el caso que $\mu \in (1, \infty)$, el coeficiente $a_2 = \frac{1-3\mu^2}{6\mu} = \bar{\mu}$ de (5.5) toma los valores del intervalo $(-\infty, -\frac{1}{3})$ (ver figura 5.2). Así, $H_{b,c}$ tiene representantes en las formas canónicas del tipo I_a . ■

Observemos que los polinomios Hessianos del inciso 1 de la proposición 5.9 efectivamente son representantes de las órbitas del tipo I_a . Esto se debe a que éstas son la imagen de las formas normales del tipo I_a mediante la transformación lineal

$$T(x, y) = \frac{1}{\sqrt[4]{-2-6\mu}}(x+y, x-y),$$

tomando $\bar{\mu} = \frac{1-\mu}{1+3\mu}$. Así, cualquiera de las dos familias uniparamétricas funcionan como representantes de la misma clase de polinomios homogéneos (ver [51]).

Proposición 5.10 *El polinomio Hessiano de un polinomio homogéneo Q del tipo I_d tiene alguna de las siguientes formas normales*

1. $-x^4 + 6\frac{(-3\mu^2-1)}{6|\mu|}x^2y^2 + y^4, \mu < 0.$
2. $-144x^2y^2, \mu = 0.$
3. $x^4 + 6\frac{(-3\mu^2-1)}{6|\mu|}x^2y^2 - y^4, \mu > 0.$

Demostración. Ahora, procedemos a analizar la forma normal del tipo I_d , $x^4 + 6\mu x^2y^2 - y^4$. Sus invariantes toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} i &= a_4a_0 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = 3\mu^2 - 1, \\ j &= -\mu^3 - \mu, \\ i^3 - 27j^2 &= -81\mu^4 - 18\mu^2 - 1. \end{aligned}$$

El Hessiano de la forma normal I_d es el polinomio

$$H_d(x, y) = 144\mu x^4 + (-432\mu^2 - 144)x^2y^2 + (-144\mu)y^4.$$

Los invariantes de $H_d(x, y)$ son los siguientes,

$$\begin{aligned} i &= 1728(3\mu^2 - 1)^2, \\ j &= 373\,248\mu^6 + 1866\,240\mu^4 + 622\,080\mu^2 + 13\,824, \\ i^3 - 27j^2 &= -2^{20}3^{12}\mu^2(9\mu^4 + 10\mu^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

El discriminante $i^3 - 27j^2$ de $H_d(x, y)$ es negativo si $\mu \neq 0$. Esto implica que el Hessiano de una forma del tipo I_d es otra forma del tipo I_d si $\mu \neq 0$. Así, si una forma binaria de grado cuatro se factoriza como el producto de dos formas lineales reales y dos formas lineales complejas, entonces su Hessiano también tiene esa propiedad. El caso singular de la familia uniparamétrica $x^4 + 6\mu x^2y^2 - y^4$ es cuando $\mu = 0$. Pues en este caso, el Hessiano tiene sólo un factor lineal real y uno complejo, cada uno con multiplicidad 2, el cual es del tipo $III_{a,b}$.

Con las transformaciones lineales (5.4) y (5.6) podemos llevar $H_d(x, y)$ a las formas normales escritas en el enunciado de la proposición. ■

Polinomios Hessianos de las formas normales reales con discriminante nulo. Una propiedad de los polinomios homogéneos con discriminante nulo es que sus polinomios Hessianos tienen discriminante nulo. En el caso de polinomios de grado cuatro, los Hessianos de los polinomios del tipo $II_{a,b,c,d}$, $III_{a,b}$, $III_{c,d}$ pertenecen, respectivamente, al mismo tipo:

En efecto, para los polinomios con forma normal del tipo $II_{a,b,c,d}$, $6\alpha x^2y^2 + \beta y^4$, $\alpha = \pm 1, \beta = \pm 1$, su Hessiano es el polinomio $144y^4\alpha\beta - 432x^2y^2\alpha^2$. Los polinomios con forma normal del tipo $III_{a,b}$

$6\alpha x^2 y^2, \alpha = \pm 1$, tienen al polinomio $-432x^2 y^2 \alpha^2$ como su Hessiano. El polinomio $48\gamma^2 (x^2 + y^2)^2$ es el Hessiano de los polinomios con forma normal del tipo $III_{c,d}, \gamma (x^2 + y^2)^2, \gamma = \pm 1$.

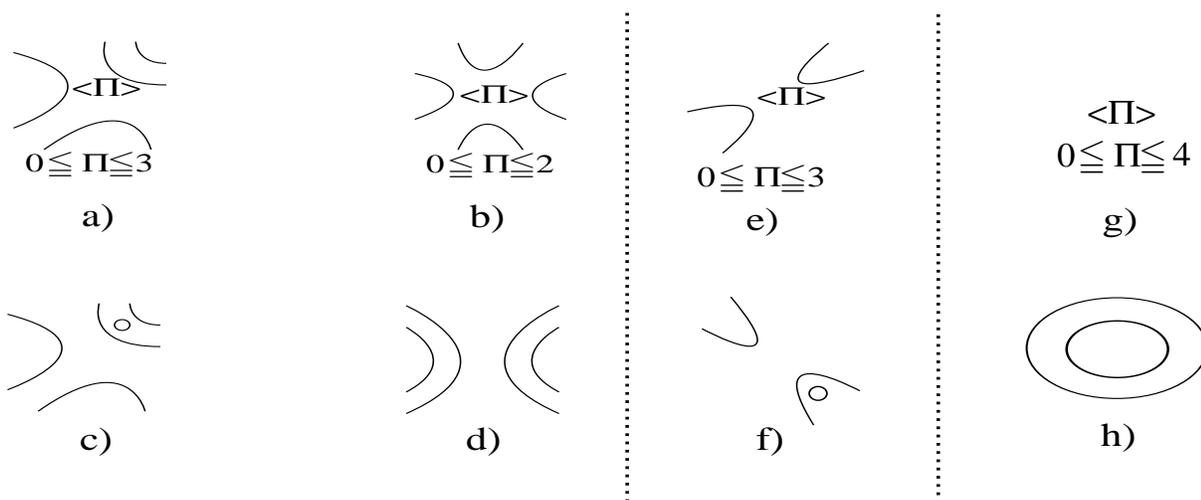
Los polinomios con forma normal del tipo $IV, 4x^3 y$, tienen por Hessiano al polinomio $-144x^4$, es decir, su Hessiano es del tipo V_b . En cambio, el Hessiano de los polinomios del tipo V y VI es el polinomio cero (ver proposición 5.1), es decir, la forma nula.

Capítulo 6

Gráficas de polinomios de grado cuatro

6.1. Configuraciones de las curvas Hessianas de grado 4

Configuraciones de curvas algebraicas no singulares de grado 4 en \mathbb{R}^2 transversales a la recta al infinito. Sea C una curva algebraica en \mathbb{R}^2 no singular de grado 4. Supongamos que C tiene, entre sus componentes conexas, un número Π de óvalos con $0 \leq \Pi \leq 4$ y que éstos no están anidados. Denotamos con $\langle \Pi \rangle$ a la unión de los Π óvalos de la curva C . Notemos que si C no es compacta en \mathbb{R}^2 , entonces tiene otras componentes conexas no compactas.



– Figura 6.1 –

Los diagramas en la figura 6.1 corresponden a todas las configuraciones de curvas algebraicas en \mathbb{R}^2 de grado 4 no singulares y sin tangencias en la recta al infinito que son obtenidas al perturbar el germen de una curva en un punto por el que pasan 4 ramas de la curva transversales

entre sí (ver [71], pág 1107).

¿Cuáles configuraciones son realizadas por curvas Hessianas de grado 4? La mayoría de las configuraciones mostradas en la figura 6.1, son realizables por curvas Hessianas de grado 4 (las cuales provienen algún polinomio de grado 4). Por ejemplo, en [52] y [54] se exhiben polinomios de grado cuatro tales que su curva Hessiana es compacta con Π igual a 3 y 4. Así, curvas Hessianas compactas de grado cuatro con 0, 1, 2, 3 o 4 óvalos existen. En efecto todas las configuraciones mostradas en las figuras 6.1 g) y h) son realizables por curvas Hessianas de grado cuatro.

En el caso en el que la curva Hessiana no es compacta, en [54] se muestra que existen polinomios tales que su curva Hessiana tiene 2 componentes conexas no compactas junto con tres óvalos (ver figura 6.1 e) con $\Pi = 3$); también se muestra que es realizable la configuración con cuatro componentes conexas no compactas y dos óvalos (figura 6.1 b) $\Pi = 2$). En estos dos ejemplos, la curva Hessiana proyectiva tiene cuatro óvalos y la recta al infinito interseca a uno y a dos de estos óvalos, respectivamente.

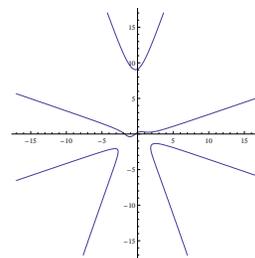
Por otro lado, nótese que dado $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4, conocemos el comportamiento del polinomio Hessiano de la parte homogénea f_4 de f . En consecuencia, conocemos el número de componentes conexas de la curva Hessiana de f que intersecan a la recta al infinito.

Proposición 6.1 *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4 tal que su gráfica es genérica.*

1. *Si los factores lineales de f_4 son complejos y la forma normal $\alpha(x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4)$, con $\alpha = \pm 1$ representa a f_4 para algún $\mu \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ entonces la curva Hessiana $\text{Hess}f(x, y) = 0$ tiene alguna de las configuraciones a), b), c) o d) de la figura 6.1.*
2. *Supongamos que f_4 tiene dos factores lineales complejos distintos, dos factores lineales reales distintos y que no es equivalente a la forma $x^4 - y^4$, entonces la curva Hessiana $\text{Hess}f(x, y) = 0$ tiene alguna de las configuraciones e) o f) de la figura 6.1.*
3. *Si todos los factores lineales de f_4 son reales y distintos, entonces la curva Hessiana $\text{Hess}f(x, y) = 0$ es compacta y tiene alguna de las configuraciones g) o h) de la figura 6.1.*
4. *Si los factores lineales de f_4 son complejos y la forma normal $\alpha(x^4 + 6\mu x^2 y^2 + y^4)$, con $\alpha = \pm 1$ y $\mu \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$, representa a f_4 . Entonces la curva Hessiana $\text{Hess}f(x, y) = 0$ es compacta y tiene alguna de las configuraciones g) o h) de la figura 6.1.*

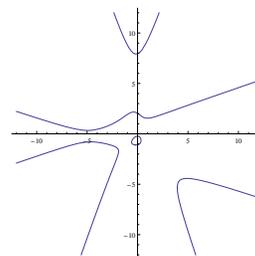
Las figuras de las curvas Hessianas para los siguientes ejemplos fueron realizados con el software Mathematica.

Ejemplo 6.1 Consideremos $f(x, y) = x^4 - \frac{2}{3}x^2y^2 + y^4 + x^3 + 6x^2y + xy^2 + 0.7y^3 + x^2 + 8xy + 7y^2$. La curva Hessiana de f tiene la configuración del inciso a) de la figura 1 con $\Pi = 0$ (ver también figura 6.2).



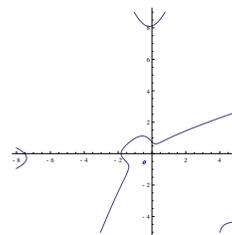
– Figura 6.2 –

Ejemplo 6.2 Sea $f(x, y) = x^4 - \frac{2}{3}x^2y^2 + y^4 + x^3 + 6x^2y - 6xy^2 + 0.7y^3 + x^2 - 6xy - 7y^2$, la curva Hessiana de f tiene la configuración del inciso a) de la figura 1 con $\Pi = 1$ (figura 6.3).



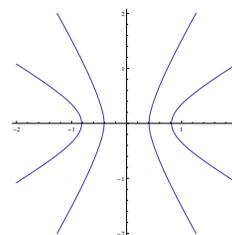
– Figura 6.3 –

Ejemplo 6.3 Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 + 6x^2y - 6xy^2 + (0.7)y^3 + x^4 - \frac{6}{9}x^2y^2 + y^4$. La curva Hessiana de f tiene la configuración del inciso c) de la figura 1 (ver también figura 6.4).



– Figura 6.4 –

Ejemplo 6.4 La curva Hessiana del polinomio $f(x, y) = -x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + x^2 - y^4 - y^2$ tiene la configuración del inciso d) de la figura 1 (ver también figura 6.5).



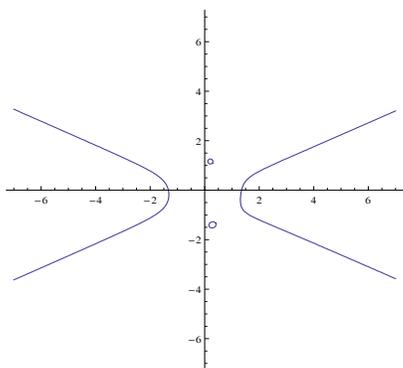
– Figura 6.5 –

Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4 tal que su gráfica es genérica. Supongamos que todos los factores lineales de f_4 son reales y distintos. Se sigue de la clasificación por medio de sus invariantes y covariantes que f_4 es un polinomio homogéneo hiperbólico (ver proposición 5.8). En efecto, f_4 es representado por alguna de las formas del tipo I_n . En este caso, la curva Hessiana de f es compacta y más aún, la componente no acotada $b^- \cap \mathbb{R}^2$ de su complemento en \mathbb{R}^2 es hiperbólica (mientras que la componente acotada es elíptica). Por otro lado, si f_4 es un polinomio homogéneo elíptico, entonces la curva Hessiana de f es compacta y la componente no acotada $b^- \cap \mathbb{R}^2$ de su complemento es elíptica (en este caso la componente acotada es hiperbólica). A diferencia

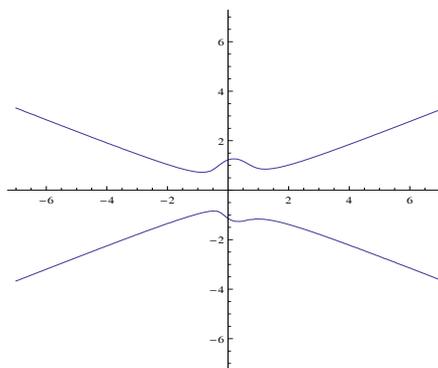
de estos casos en los que f_4 determina si $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es elíptica o hiperbólica tenemos la siguiente observación.

Observación 6.1 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4. Supongamos que la curva Hessiana proyectiva de f es no singular e interseca a la recta al infinito de manera transversal en al menos dos puntos. Entonces el polinomio homogéneo de mayor grado f_4 no necesariamente determina si $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico o elíptico.

Para ver que la observación es correcta, vamos a dar ejemplos de polinomios $f = f_4 + f_3 + f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4 de tal forma que al modificar la parte cuadrática f_2 , la parte del plano $b^- \cap \mathbb{R}^2$ cambia de elíptica a hiperbólica. Las figuras de las curvas Hessianas fueron realizadas con el software Mathematica.



– Figura 6.6 –



– Figura 6.7 –

Consideremos el siguiente polinomio con $\mu = 1$

$$f(x, y) = x^4 + 6\mu x^2 y^2 - y^4 + 3x^2 y - 3xy^2 - 10x^2 + 10y^2.$$

Su polinomio Hessiano es

$$\begin{aligned} \text{Hess}f(x, y) = & 144x^4 - 576x^2y^2 - 144y^4 - 72x^3 - 216x^2y \\ & + 216xy^2 - 72y^3 - 36x^2 + 36xy + 444y^2 + 120x + 120y - 400. \end{aligned}$$

La curva Hessiana $\text{Hess}f(x, y) = 0$ es representada en la figura 6.6. Como la parte cuadrática de $f(x, y)$ es $-10x^2 + 10y^2$, el origen es un punto hiperbólico. El punto $(0, 0)$ no está en el interior de ningún óvalo de la curva Hessiana de f . Esto es debido a que si hacemos $x = 0$, las raíces del polinomio $\text{Hess}f(0, y) = -144y^4 - 72y^3 + 444y^2 + 120y - 400$, tienen parte imaginaria no nula. Así, $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos hiperbólicos y $b^+ \cap \mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos elípticos.

Por otro lado, sea $\mu = 1$ y consideremos el polinomio

$$g(x, y) = x^4 + 6\mu x^2 y^2 - y^4 + 3x^2 y - 3xy^2 + x^2 + 10y^2.$$

El polinomio Hessiano de $g(x, y)$ es

$$\begin{aligned} \text{Hess}g(x, y) = & 144x^4 - 576x^2 y^2 - 144y^4 - 72x^3 - 216x^2 y \\ & + 216xy^2 - 72y^3 + 228x^2 + 36xy + 180y^2 - 12x + 120y + 40. \end{aligned}$$

La figura 6.7 representa a la curva Hessiana $\text{Hess}g(x, y) = 0$. En este caso el origen es un punto elíptico y la curva Hessiana proyectiva consiste de sólo un óvalo. En este caso $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es elíptico y $b^+ \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico.

Tal comportamiento aparece también en curvas Hessianas con mas puntos de intersección con la recta al infinito. Por ejemplo, sea

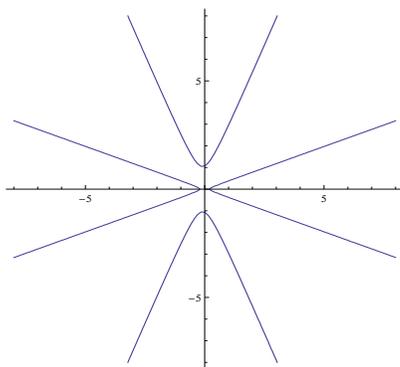
$$f(x, y) = -\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 y^2 + y^4\right) - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{27}y^2.$$

La curva Hessiana de f (figura 6.8) tiene cuatro componentes conexas no compactas en \mathbb{R}^2 , además $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es elíptico.

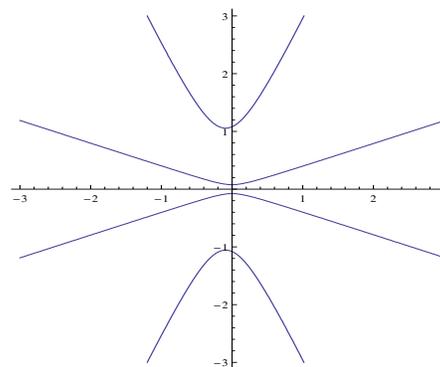
En cambio, la curva Hessiana proyectiva del polinomio

$$g(x, y) = -\left(x^4 - \frac{6}{7}x^2 y^2 + y^4\right) - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{27}y^2,$$

consiste de dos óvalos anidados mientras que $b^- \cap \mathbb{R}^2$ es hiperbólico. En este caso, la curva Hessiana se ilustra con la figura 6.9.



– Figura 6.8 –



– Figura 6.9 –

6.2. Polinomios homogéneos Hessianos de grado cuatro

Sea $C_{\mathbb{R}}(4) = \{ \mathbf{a} = (a_{4,0}, a_{3,1}, a_{2,2}, a_{1,3}, a_{0,4}) \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}, 0 \leq i, j \leq 4, i + j = 4 \}$. Consideremos la función $H_4 : C_{\mathbb{R}}(4) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(4)$ tal que a cada tupla de coeficientes $\mathbf{a} = (a_{4,0}, \dots, a_{0,4})$ del polinomio homogéneo de grado 4, $Q(x, y) = a_{4,0}x^4 + 4a_{3,1}x^3y + 6a_{2,2}x^2y^2 + 4a_{1,3}xy^3 + a_{0,4}y^4$, le asigna los coeficientes $\mathbf{b} = (b_{4,0}, \dots, b_{0,4}) \in C_{\mathbb{R}}(4)$ de su polinomio Hessiano $H(x, y) = \text{Hess}Q(x, y)$,

$$\begin{aligned} b_{4,0} &= 144(a_{2,2}a_{4,0} - a_{3,1}^2), \\ b_{3,1} &= \frac{144}{4}(2a_{1,3}a_{4,0} - 2a_{2,2}a_{3,1}), \\ b_{2,2} &= \frac{144}{6}(-3a_{2,2}^2 + a_{0,4}a_{4,0} + 2a_{1,3}a_{3,1}), \\ b_{1,3} &= \frac{144}{4}(2a_{0,4}a_{3,1} - 2a_{1,3}a_{2,2}), \\ b_{0,4} &= 144(a_{0,4}a_{2,2} - a_{1,3}^2). \end{aligned}$$

Una de las propiedades básicas de la función H_4 es la siguiente. Supongamos que $H_4(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $H_4(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^2\mathbf{b}$. Esto muestra que H_4 no es inyectiva.

Proposición 6.2 H_4 no es suprayectiva.

Demostración. En efecto, el polinomio x^3y no es el Hessiano de ningún polinomio homogéneo $Q \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4. Para probar esto, consideremos un polinomio $Q(x, y)$ de grado 4 arbitrario y $\text{Hess}Q(x, y)$ su Hessiano. El polinomio $Q(x, y)$ está en la órbita de alguna de las formas normales y $\text{Hess}Q(x, y)$ está en la órbita del Hessiano de esta forma normal. Así, para probar la proposición, basta observar que ningún Hessiano de las formas normales reales de la tabla (5.2) es del tipo IV, es decir, de la forma $4x^3y$ (ver proposiciones 5.8, 5.9, 5.10 y la sección 5.5). ■

Observación 6.2 Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ de grado 4. Supongamos que la parte homogénea de grado 4 de f es $f_4(x, y) = x^3y$, entonces f no es el Hessiano de ningún polinomio de grado 4.

Bibliografía

- [1] Aicardi F., *Geometrical properties of generic real surfaces at the special parabolic points*, Preprint.
- [2] Arnold V. I., *Astroidal Geometry of Hypocycloides and the Hessian topology of Hyperbolic polynomials*, Russ. Math. Surv. **56** No. 6, 1019-1083 (2001).
- [3] Arnold V. I., *Distribution of ovals on the real plane of algebraic curves, of involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integer-valued quadratic forms*, Funct. Anal. Appl. **5** No. 3, 169-176 (1971).
- [4] Arnold V. I., *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- [5] Arnold V. I., *Index of a singular point of a vector field, the Petrowskii-Oleinik inequality, and mixed Hodge structures*, Funct. Anal. Appl. **12** No. 1, 1-12 (1978).
- [6] Arnold V. I., *Arnold's Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
DOI 10.1007/b138219
- [7] Arnold V. I., *On the problem of a Given Gaussian curvature function*, Topol. Method. Nonl. An. **11**, 199-206 (1998).
- [8] Arnold V. I., *Remarks on parabolic curves on surfaces and on the higher-dimensional Möbius-Sturm theory*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **31**:4, 3-18, (1997); English transl., Funct. Anal. Appl. **31**:4, 227-239 (1997).
- [9] Arnold V. I., *Topological problems of the theory of wave propagation*, Usp. Math. Nauk **51**, No. 1, 3-50 (1996); English transl., Russ. Math. Surv. **51**:1, 1-47 (1996).
- [10] Banchoff T., Thom R., *Sur les points paraboliques des surfaces erratum et compléments*, C. R. Acad. Sci. Paris **291**, 503-505 (1980)
- [11] Benedetti R., Risler J. J., *Real algebraic and semialgebraic sets*, Hermann, Paris, 1990.

- [12] Bertrand B., Brugallé E., *On the number of connected components of the parabolic curve*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348**, no. 5-6, 287–289, (2010).
- [13] Bruce J. W., Fidal D. L., *On binary differential equations and umbilics*, P. Roy. Soc. Edinb. **111A**, 147-168 (1989).
- [14] Bruce J. W., Tari F., *On the multiplicity of implicit differential equations*, J. Differ. Equ. **148**, 122-147 (1998).
- [15] Bruce J. W., Tari F., *On binary differential equations*, Nonlinearity **8**, 255-271 (1995).
- [16] Camacho-Calderon A., Ortiz-Rodríguez A., *On The realization problem of real algebraic plane curves as Hessian curves*, J. Geom. **105**, 495-506, (2014).
- [17] Čeponkus A. L., *On nest of real plane algebraic curves*, Lith. Math. J. **16:4**, 634-637 (1976). doi:10.1007/BF00968380
- [18] Challapa L. S., *Index of quadratic differential forms*, in: Real and complex singularities, Contemp. Math. **459**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 179-193 (2008).
- [19] Challapa L. S., *Invariants of binary differential equations*, J. Dyn. Control Syst. **15:2**, 157-176 (2009). doi:10.1007/s10883-009-9066-z
- [20] Crilly T., *The rise of Cayley's invariant theory (1841–1862)*, Hist. Math. **13**, No. 3, 241-254, (1986).
[http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860\(86\)90091-1](http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860(86)90091-1)
- [21] Dara L., *Singularités génériques des équations différentielles multiformes*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **6** No. 2, 95-128 (1975).
- [22] Davydov A. A., *Qualitative Theory of Control Systems*, Translations of Math. Monographs. Amer. Math. Soc. **141**, 1994.
- [23] Dieudonné J. A., Carrell J. B., *Invariant theory, old and new*, Adv. Math. **4** No. 1, 1-80, (1970).
[http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708\(70\)90015-0](http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708(70)90015-0)
- [24] Guadarrama-García M. A., *Índice de Poincaré-Hopf de ecuaciones diferenciales binarias cuadráticas en un punto singular aislado*, Tesina de Maestría, UNAM, 2012.
- [25] Gudkov D. A., *The topology of real algebraic varieties*, Russ. Math. Surv. **29:4**, 1-79 (1974).

- [26] Gudkov D. A., Utkin G. A., *The topology of curves of degree 6 and surfaces of degree 4*, (Russian), Uchen. Zap. Gorkov. Univ. **87**, 1969; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. **112**,(1978).
- [27] Gudkov D. A., Krakhnov A. D., *On the periodicity of the Euler characteristic of real algebraic $M - 1$ -manifolds*, Funktsional Anal. i Prilozhen. **7** no. 2, 15-19 (1973) (Russian); English transl., Funct. Anal. Appl. **7** No. 2, 82-98 (1973).
- [28] Guíñez V., *Locally stable singularities for positive quadratic differential forms* J. Differ. Equ. **110**, 1-37 (1994).
- [29] Guíñez V., *Nonorientable Polynomial Foliations on the Plane* J. Differ. Equ. **87**, 391-411 (1990).
- [30] Guíñez V., *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** No. 2, 477-502, (1988).
- [31] Gurevich G.B., *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland, 1964.
- [32] Gutiérrez C., Guíñez V., *Positive quadratic differential forms: linearization, finite determinacy and versalunfolding*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Sér. 6, **5** No. 4, 661-690 (1996).
- [33] Harnack A., *Über vieltheiligkeit der ebenen algebraischen curven*, Math. Ann. **10**, 189-199 (1876).
- [34] Hernández-Martínez L. I., Ortiz-Rodríguez A., Sánchez-Bringas F., *On the Affine Geometry of the Graph of a Real Polynomial*, J. Dyn. Control Syst. **18**, No. 4, 455-465 (2012).
- [35] Hernández-Martínez L. I., Ortiz-Rodríguez A., Sánchez-Bringas F., *On the Hessian geometry of a real polynomial hyperbolic near infinity*. Adv. Geom. **13** No. 2, 277-292 (2013).
- [36] Hilbert D., *Über die reellen Züge algebraischer Curven*, Math. Ann. **38**, 115-138 (1891).
- [37] Hirsch M. W., *Differential Topology*, Graduate texts in mathematics 33, New York: Springer Verlag, 1976.
- [38] Hopf H., *Differential Geometry in the Large*, Lectures Notes 1000, Springer-Verlag, 1989.
- [39] Kharlamov V. M., *A generalized Petrowsky inequality*, Func. Anal. Appl. **8** No. 2, 132-137 (1974). doi:10.1007/BF01078598
- [40] Kharlamov V. M., *A generalized Petrowsky inequality II*, Func. Anal. Appl. **9** No.3 , 266-268 (1975). doi:10.1007/BF01075611

- [41] Kharlamov V. M., *New relations for the Euler characteristic of real algebraic manifolds*, *Funct. Anal. Appl.* **7** No. 2, 147-150 (1973). doi:10.1007/BF01078887
- [42] Kergosien L., Thom R., *Sur les points paraboliques des surfaces*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, **290**, pp. 705-710 (1980).
- [43] Kulikov V. S., *Calculation of singularities of an imbedding of a generic algebraic surface in projective space P^3* , *Funct. Anal. Appl.* **17** No. 3, 15-27 (1983).
- [44] Labs O., *A List of Challenges for Real Algebraic Plane Curve Visualization Software*, *Nonlinear Computational Geometry*, edited by I. Emiris and F. Sottile and T. Theobald, IMA Volume 151, Springer. pp. 137-164.
- [45] Lawson T., *Topology: A Geometric Approach*, Oxford University Press, 2003.
- [46] Landis E. E., *Tangential singularities*, *Funct. Anal. Appl.* **15** No. 2, 103-114 (1981).
- [47] Marin A., *Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles*, *Publ. Math. Univ. Paris VII* **9**, 51-68 (1980).
- [48] Martínez-Ojeda E., Ortiz-Rodríguez A., *On the Complex and Real Hessian Polynomials*, *Int. J. Math. Math. Sci.* vol. 2010, Article ID 962719, 22 pages, (2010). doi:10.1155/2010/962719
- [49] Möbius A. F., *Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung*, *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Math-Phys. Klasse I*, 1-82 (1852).
- [50] Olver P. J., *Classical Invariant Theory*, 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [51] Olver P. J., *Classical Invariant Theory and the Equivalence Problem for Particle Lagrangians. I. Binary Forms*, *Adv. in Math.* **80** No. 1, 39-77 (1990).
- [52] Ortiz-Rodríguez A., *Quelques aspects sur la géométrie des surfaces algébriques réelles*, *Bull. Sci. Math.* **127** No. 2, 149-177 (2003).
- [53] Ortiz-Rodríguez A., Sánchez-Bringas F., *On the Arnold's conjecture on hyperbolic homogeneous polynomials*, <http://arxiv.org/pdf/1301.2364.pdf>
- [54] Ortiz-Rodríguez A., Sottile F., *Real Hessian Curves*, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3), **13** no. 1, 157-166 (2007).
- [55] Panov D. A., *Especial points of surfaces in a three-dimensional projective space*, *Funct. Anal. Appl.* **34** no. 4, 276-287 (2000).

- [56] Panov D. A., *Parabolic curves and gradient mappings*, Tr. Mat. Inst. Steklova **221**, 271-288 (1998).
- [57] Petrowsky I., *On The Topology Of Real Plane Algebraic Curves*, Ann. Math. **39** No. 1, 189-209 (1938).
- [58] Platonova O. A., *Singularities of a relative position of a surface and a line*, Russ. Math. Surv. **36** No. 1, 248-249 (1981).
- [59] Pugh C. C., *A generalized Poincaré index formula*, Topology **7**, 217-226 (1968).
- [60] Ragsdale V., *On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves*, Am. J. Math. **28**, 377-404 (1906).
- [61] Rokhlin V., *Complex Topological Characteristics of Real Algebraic Curves*, Russ. Math. Surv. **33** No. 5, 85-98 (1978).
- [62] Rokhlin V., *Congruences modulo 16 in Hilbert's sixtieth problem*, Funct. Anal. Appl. **6** No. 4, 301-306 (1972). doi:10.1007/BF01077649
- [63] Rokhlin V., *Proof of the Gudkov's hypothesis*, Funct. Anal Appl. **6** No. 2, 136-138 (1972).
- [64] Salmon G., *A Treatise in Analytic Geometry of Three Dimensions*, Chelsea Publ., 1927.
- [65] Segre B., *The non-singular cubic surfaces*, Clarendon Press, Oxford 1942.
- [66] Scherback O. P., *Projectively dual space curves and Legendre singularities*, Tr. Tbilis. Univ. 232-233, Ser. Mat., Mekh., Astron., **13-14**, pp. 280-336 (1982) English transl., Selecta Math. Sov., **5** No. 4, 391-421 (1986).
- [67] Uribe-Vargas R., *A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve*, Mosc. Math. J. **6**, 731-768, 772 (2006).
- [68] Viro O. Ya., *Curves of degree 7, curves of degree 8: and the Ragsdale conjecture*, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, **254** (1980), 1305-1310; English transl., Soviet Math Dokl. **22**, 566-570 (1980).
- [69] Viro O. Ya., *Planar real curves of degree 7 and 8: New prohibitions*, (Russian), Izv Akad. Nauk SSSR Ser. Mat, **47**, 1135-1150 (1983); English transl., Math. USSR-Izv **23** 409-422 (1984).
- [70] Viro O. Ya., Kharlamov V. M., *Extensions of the Gudkov-Rohlin congruence*, Lecture Notes in Math. 1346, 357-406 (1988), Springer-Verlag, Heidelberg and New-York.

- [71] Viro O. Ya., *Real algebraic plane curves: constructions with controlled topology*, (Russian), *Algebra i Analiz*, **1**, 1-73 (1989); English transl., *Leningrad Math. J.* **1** No. 5, 1059-1134 (1990).
- [72] Wilson G., *Hilbert's Sixteenth problem*, *Topology* **17**, 53-73 (1978).
- [73] Zeuthen, H. G., *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre*, *Math. Ann.* **7**, 410-432 (1874)