



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS ESTADÍSTICOS PARA LA VALUACIÓN DE
DERIVADOS CLIMÁTICOS EN TEMPERATURA Y
PRECIPITACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
ACTUARIO

PRESENTA
CHRISTIAN RICARDO HERMOSA MONTES DE OCA.

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. EDUARDO SELIM MARTÍNEZ MAYORGA.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Junio 2017





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Con mucho amor,
a mis papás,
a mi amor, Frida Natalia,
a mi hermano,
a mis abuelitos,
a mi familia.*

Agradecimientos

Con el mayor de los agradecimientos a mis padres por su apoyo en todas las etapas de mi vida, por enseñarme a ser una persona fuerte y persistente, por darme aliento siempre para seguir adelante. Por darme la paciencia y sabiduría para afrontar mis problemas. Por apoyarme todos los días de mi carrera, ayudándome en casa y en la distancia. Por siempre creer en mí, por sus enseñanzas, por todo el esfuerzo que hacen para que nunca me haga falta nada y por haberme dado la vida.

Agradezco a Frida Natalia por darme amor incondicional desde el primer momento, por estar en todo momento a mi lado, por motivarme e impulsarme a alcanzar mis metas, por ayudarme a nunca darme por vencido y dar lo mejor de mí. Por mostrarme que la vida es una aventura maravillosa y siempre todo es mejor tomando su mano, por ser la mejor novia. Siempre le estaré agradecido por llenarme de confianza y valentía para alcanzar mis sueños. Por llenarme de una felicidad incomparable y demostrarme en un sin fin de maneras que el amor verdadero sí existe.

A mi hermano por tener plena confianza en mi capacidad, por hacerme reír aún en momentos difíciles, por siempre cuidar de mí y preocuparse por mi bienestar, por ser un gran hermano. Por sus consejos, por ayudarme a ser una mejor persona.

A Eduardo que me guió desde un principio en este proyecto, por el tiempo que dedicó a ayudarme y platicar conmigo y mejorar. Por ser un gran amigo y maestro desde principios de mi carrera y creer en mí. Por sus consejos para mi vida y desarrollo profesional.

Agradezco a mis abuelitos, que aunque ya no están aquí, siempre se preocuparon por mi bienestar y mi desarrollo personal, por estar pendientes de mí en todo momento y darme todo su cariño. Por todas las enseñanzas y consejos que me obsequiaron cuando estuvieron a mi lado y mostrarme que la vida es larga y hermosa.

A mis sinodales por el tiempo dedicado a mi trabajo, por sus consejos, reuniones y pláticas acerca de mi trabajo. Por su empeño en hacer de éste un mejor trabajo.

Christian Ricardo Hermosa Montes de Oca

Índice general

Introducción	1
1. Derivados climáticos	3
1.1. El clima	3
1.2. Derivados financieros: elementos básicos	4
1.2.1. Opciones financieras	6
1.2.2. Contratos <i>forward</i>	8
1.3. Valuación tradicional de productos financieros derivados	10
1.3.1. Modelo Black & Scholes	10
1.4. Concepto de derivado climático	11
1.5. Desarrollo histórico del derivado climático	12
1.5.1. Operadores de cobertura y especuladores, mercado primario y secundario	13
1.6. Beneficios del uso de derivados climáticos	15
1.7. Los derivados climáticos y el seguro	15
1.8. Participantes en el mercado climático	17
1.9. La temperatura como factor subyacente en la emisión de derivados climáticos	17
1.9.1. Causas del calentamiento global	18
1.9.2. Consecuencias del cambio climático	19
1.10. La anatomía de un derivado climático	22
1.11. Algunas aplicaciones prácticas del uso de derivados climáticos	23
1.12. Variables climáticas e índices	25
1.12.1. Índices <i>Degree Day</i>	26
1.12.1.1. <i>Heating Degree Days</i>	26
1.12.1.2. <i>Cooling Degree Days</i>	27
1.12.2. Índices <i>Cumulative Average Temperature</i>	28
1.12.3. Índices sobre eventos climáticos	29
1.13. Clasificación de índices climáticos	29
1.14. Estructuras de payoff	30
1.14.1. <i>Swap</i>	30

1.14.2. Opciones <i>call</i>	31
1.14.3. Opciones <i>put</i>	32
1.14.4. <i>Collars</i>	33
1.14.5. <i>Straddles</i>	33
1.14.6. <i>Strangles</i>	34
1.14.7. Binarios	34
1.14.8. <i>Spreads y Baskets</i>	34
1.15. Métodos de valuación en derivados climáticos	35
1.15.1. Método actuarial	36
1.15.2. <i>Historical Burn Analysis</i> (HBA)	36
1.15.3. Modelación diaria (DAT)	37
1.16. Recolección y corrección de la información	38
2. Valuación de Derivados climáticos sobre temperatura	39
2.1. Introducción	39
2.2. Algunos índices climáticos	42
2.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas	43
2.3.1. La integral estocástica	45
2.3.2. Propiedades de la integral estocástica	48
2.3.3. Lema de Itô	48
2.4. Resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas sobre temperatura	50
2.5. Valuación bajo la suposición de normalidad	52
2.5.1. Opciones y futuros CAT y PAC	53
2.5.2. Opciones y Futuros HDD y CDD	60
2.6. Paridad <i>Put-Call</i>	66
2.7. Precio de Mercado de Riesgo	67
2.8. Simulación y estimación de modelos estocásticos sobre temperatura	68
2.9. Estimación de parámetros	69
2.9.1. La temperatura media	69
2.9.2. Proceso <i>driving</i>	70
2.9.3. Reversión a la media	70
2.10. Estimación de parámetros	71
2.10.1. Estimación de la media	71
2.10.1.1. Estimación mediante mínimos cuadrados	71
2.10.1.2. Series de Fourier truncadas	73
2.10.2. Estimación de σ para el modelo de temperatura	73
2.10.2.1. Discretización del modelo de temperatura	73
2.10.2.2. Series de Fourier truncadas	74
2.10.3. Estimación del parámetro de reversión a la media κ para el modelo de temperatura	74
2.10.3.1. Función de estimación martingala	74

3. Modelación discreta de temperatura para la valuación de derivados climáticos	77
3.1. Revisión de conceptos de series de tiempo	77
3.1.1. Estimación de la autocovarianza	80
3.1.2. Modelos ARMA	81
3.1.3. Análisis espectral de una serie de tiempo	82
3.1.3.1. El periodograma	84
3.2. Propiedades de los DATs	84
3.3. Procesos discretos para la modelación del proceso de temperatura	85
3.4. Procesos integrados y fraccionales en series de tiempo	87
3.4.1. Modelos ARIMA	87
3.4.2. Identificación en modelos ARIMA	89
3.4.3. Modelos de memoria larga	91
3.4.4. Estacionariedad, causalidad e invertibilidad en procesos ARFIMA	94
3.4.5. Densidad espectral de modelos ARFIMA	95
3.4.6. Función de autocovarianza	95
3.4.7. Autocorrelación Parcial	96
3.4.8. Caracterización de un modelo ARFIMA	97
3.4.9. Estimación del parámetro de diferenciación	97
3.5. Modelos con heterocedasticidad	98
3.5.1. Procesos GARCH(r, s)	99
3.6. Modelo ARFIMA(p, d, q)-GARCH(r, s) sobre temperatura	101
3.6.1. Implementación del modelo TV-ARFIMA(p, d, q)-GARCH(r, s)	104
3.7. Modelación y pronóstico	105
4. Derivados climáticos sobre precipitación	107
4.1. Humedad atmosférica y precipitación	108
4.1.1. El ciclo hidrológico	109
4.2. Correlación temperatura-precipitación	109
4.3. Diferencias entre un modelo de temperatura y uno de precipitación	112
4.4. Modelo multiplicativo para modelación de precipitación	113
4.4.1. Transformada de Esscher de riesgo neutral	114
4.5. Modelo de precipitación diaria	115
4.6. Proceso de ocurrencia	116
4.7. Proceso de cantidad de lluvia	116
4.8. Teoría de valores extremos aplicado a la modelación de precipitación	117
4.8.1. Teoría de valores extremos	118
4.8.2. Distribución Pareto Generalizada (GPD)	119
4.8.3. Momentos de la función GPD	120
4.9. Modelo Gamma-Pareto Generalizado para el monto de precipitación r_t	121
4.10. Estacionalidad en un modelo de precipitación	122

4.11. Contratos derivados climáticos sobre precipitación	123
Conclusión	125
Apéndices	129
A. Aspectos generales de simulación	131
A.1. Simulación estocástica	131
A.1.1. Convergencia de orden fuerte	131
A.1.2. Convergencia de orden débil	131
A.2. Métodos de simulación para ecuaciones diferenciales estocásticas	132
A.2.1. Aproximación de Euler	132
A.2.1.1. Simulación de una trayectoria Browniana	133
A.2.1.2. Ejemplo para un modelo de temperatura	133
A.2.2. Aproximación de Milstein	134
Referencias	135

Introducción

El cambio climático es uno de los temas más importantes de esta época, no existe actividad humana que pueda realizarse sin un hogar, sin un planeta en dónde vivir.

Este hecho crítico lleva a una serie de eventos climáticos que podrían convertirse de algo cotidiano a algo catastrófico, condiciones de crecimiento acelerado desmesurado que conducen a observar mediciones meteorológicas cada vez más impactantes.

Como se verá desarrollado en este trabajo, los derivados climáticos son una herramienta que ayuda a las empresas/gobiernos a reparar el daño económico que condiciones meteorológicas provoquen en sus ingresos, es decir, para aquellas instituciones cuyas ganancias estén altamente relacionadas con el comportamiento climático.

Si bien, éste es un tema actual que enfrenta muchos retos, pues al ser necesario establecer un modelo que capture las características adecuadas para simular el comportamiento futuro de las condiciones climáticas, se encuentra que estos modelos climáticos cada vez fallan más debido a que en la actualidad se presentan eventos que jamás se habían observado antes. De manera preocupante un modelo debe incorporar a su ecuación una tendencia quizás más acelerada que una lineal, para estimar datos, pues cada año nuevo, las mediciones se convierten en las más calientes jamás observadas.

El objetivo de este trabajo es resumir y difundir la información que engloba la literatura en derivados climáticos, enfocando la atención en índices cuya variable meteorológica será la temperatura; así como dar una breve semblanza de lo que hasta ahora se ha desarrollado para modelos de precipitación, con a penas cuatro años de comercialización estandarizada por parte del CME (*Chicago Mercantile Exchange*), institución económica clave que encabeza transacciones y acuerdos en productos financieros derivados climáticos desde 1999 hasta la actualidad.

El trabajo que se redacta a continuación sigue la siguiente estructura.

En el Capítulo 1, se revisa la definición, usos, historia y ventajas del uso de un derivado

climático contrastándolo con un esquema de seguros. El objetivo de este capítulo es introducir la configuración que requiere un contrato de derivados climáticos así como la posible estructura financiera que siga éste. Resaltar la importancia del porqué una empresa puede recibir beneficios de un contrato como tal y los posibles contratos existentes, es decir, dependiendo de la actividad económica que tenga la compañía, existirá alguna relación entre las ganancias de ésta con el comportamiento del clima.

En el Capítulo 2, se revisa un modelo probabilista, para establecer los primeros modelos climáticos descritos por ecuaciones diferenciales estocásticas, que al resolverse usando el lema de Itô, se encuentra que no tienen una solución explícita y única por lo que es necesario, considerar el precio de mercado del riesgo, que ajusta los precios obtenidos a precio de mercado, para lograr esto es necesario un cambio de medida P a una medida equivalente Q .

Posteriormente, se revisa a detalle como es posible estimar los parámetros que requieren los modelos presentados en las primeras secciones del capítulo, los que dependen del tiempo, se verá que los métodos de estimación son relativamente sencillos matemáticamente hablando, pero computacionalmente complicados.

Cambiando el enfoque en el Capítulo 3, se revisa la modelación discreta para la valuación de derivados climáticos, haciendo uso de herramientas en series de tiempo y de nueva cuenta se revisa la construcción de modelos propuestos por la literatura con series de memoria larga y así tener un modelo con esta propiedad y además con una estructura dependiente del tiempo. Asimismo, los modelos suponen heteroscedasticidad en la varianza de los residuales del modelo.

Finalmente, desde otro panorama, en el Capítulo 4 se hará una breve revisión de modelos climáticos indexados a la precipitación, lo que cambia por completo el esquema que se revisa para el caso de la temperatura, ya que ésta no puede modelarse suponiendo un movimiento Browniano (como en las ecuaciones diferenciales estocásticas) ya que los datos de precipitación se sugiere sean estudiados con distribuciones pertenecientes a la familia de distribuciones para valores extremos.

Capítulo 1

Derivados climáticos

Con la finalidad de establecer el esquema de trabajo de interés a lo largo de este estudio se revisará primero la “definición” del clima y posteriormente la de un instrumento financiero derivado, sus usos, formas de valuación, entre otras lo que permitirá tener un mayor entendimiento y llevar una lectura fluida, es por ello que para poder avanzar a la definición de un derivado climático se estudian algunos elementos clave para avanzar a la definición de interés de esta tesis.

1.1. El clima

Es fundamental para este trabajo saber ¿qué es el clima?, por lo que se introduce en ésta sección una idea básica sobre este concepto.

Comenzando por algunos conceptos generales ¿qué es la atmósfera?, esta es una envoltura gaseosa compuesta de distintos elementos que rodea a la Tierra. La superficie rodea las partes líquidas y sólidas del planeta, justo donde todos los seres vivos habitan, por lo que cualquier cambio en la atmósfera los afecta directamente.

Dentro de los componentes físicos del planeta como la vegetación y el relieve, uno de los más importantes es el clima ya que éste influye sobre los demás modificándolos. Estos factores de manera combinada son los que determinan el estado de la atmósfera, que se conocen como *elementos del tiempo atmosférico y el clima*. Los cuales se enlistan de la siguiente manera:

- Temperatura.
- Precipitación y humedad.
- Dirección y fuerza del viento.

- Presión atmosférica.

El *tiempo atmosférico*, se define como el conjunto total de las propiedades físicas de la atmósfera dentro de un periodo de tiempo corto, es decir, es un estado momentáneo de la atmósfera.

Por otra parte, el *clima* es el conjunto de fenómenos meteorológicos que caracterizan el estado de la atmósfera en un punto de superficie terrestre. Es decir, el clima varía de un lugar a otro, mientras que el *tiempo atmosférico* de un día a otro.

Las causas y elementos del clima que provocan cambios de un lugar a otro o bien de una estación de medición a otra, se conocen como *factores climáticos*, dichos factores son:

- Altitud, que se define como la altura de dicha superficie en comparación con el nivel del mar.
- Latitud, que se define como distancia angular con el Ecuador.
- Relieve, que se define como configuración superficial de la tierra.
- Corrientes marinas.

Estos factores son los que determinan el clima de algún lugar, influyendo con diferente intensidad y formando una combinación que hacen variar de manera diferente originando distintas clases de climas. Por lo que el estudio del clima se basa en analizar detenidamente cada uno de estos elementos.

1.2. Derivados financieros: elementos básicos

La incertidumbre es un concepto que afecta diariamente a inversionistas, empresarios, administradores de fondos y personas físicas que juegan en un mercado financiero ¹. Estos participantes desean minimizar el riesgo al que se encuentran expuestos y así optimizar el funcionamiento de sus portafolios de inversión, ganancias y fondos. Una herramienta útil para administrar, controlar, medir y reducir el riesgo financiero es el uso de contratos de derivados financieros que ofrece el mercado.

Algunos de los puntos importantes con respecto al uso de productos derivados, es que éstos proporcionan avances en el desarrollo e internacionalización del sistema financiero de un país, además de que promueven estabilidad macroeconómica al facilitar el control de riesgos menores en intermediarios financieros y entidades económicas.

¹Un mercado financiero es un espacio físico o virtual en el que un número de participantes negocian sobre instrumentos financieros, cuyo precio se determina por las condiciones de oferta y demanda.

Definición 1.2.1. *Derivado financiero*

Un producto financiero *derivado* es un contrato entre dos o más partes con un precio determinado por las fluctuaciones en el precio de uno o más *activos subyacentes*.

Los instrumentos derivados financieros actualmente se aplican a diversas áreas como: crédito, tasas de interés, divisas o bien derivados sobre mercancía, es decir, prácticamente cualquier cosa podría convertirse en un *activo subyacente* de un producto financiero derivado. Podría decirse que éstos permiten comprar o vender (pagar o cobrar) cierta cantidad de un activo dependiendo del comportamiento que tenga durante un periodo de tiempo que determinará el pago o cobro a realizar.

Algunos de los derivados financieros más utilizados son los siguientes:

- Opción *call*: Contrato en el cual el comprador, paga una prima y adquiere el derecho pero no la obligación, de comprar un *activo subyacente* a un precio pactado en una fecha futura. El vendedor está obligado a cumplir el compromiso del contrato.
- Opción *put*: Contrato en el cual el comprador, paga una prima y adquiere el derecho pero no la obligación, de vender un *activo subyacente* a un precio pactado en una fecha futura.
- *Forward*: Contrato entre dos partes, que establece la cantidad y precio específicos de un *activo subyacente* definiendo la fecha y forma de entrega futuras.
- Futuros: Instrumentos *estandarizados* que permiten fijar hoy el precio de compra o venta de un activo para ser pagados y entregados en una fecha futura.
- *Swaps*: Instrumento que permite el intercambio de flujos (por ejemplo tasa fija por variable) o posiciones en distintos vencimientos o divisas.

Se puede clasificar a los derivados de varias maneras, una de ellas es como la siguiente:

- *Derivados no estandarizados*: También conocidos como *Over The Counter* (OTC). Se caracterizan por ser contratos bilaterales, en donde las condiciones de la transacción están completamente especificadas. Su principal ventaja es que el contrato puede diseñarse a la medida dependiendo las necesidades del inversionista. La desventaja, es que no siempre es sencillo encontrar una contraparte dispuesta a realizar el negocio. Así como el riesgo de contraparte o crédito, es decir, que alguna de las partes entre en dificultades financieras y no pueda cumplir sus obligaciones. Los más comunes son: *forwards* y *swaps*.

- *Derivados estandarizados*: Se negocian en mercados organizados, como Bolsas de Valores y bajo condiciones preestablecidas. Las características y especificaciones del subyacente y periodo del contrato se determinan por la institución que regula el negocio. El precio es el único que es determinado por el mercado. En estos productos el riesgo de contraparte existe pero en menor grado, sin embargo, es más complicado que el producto ajuste a las necesidades del inversionista.

1.2.1. Opciones financieras

Los elementos que caracterizan una opción son:

- Precio *strike*: Es aquel que paga (recibe) el comprador (vendedor) por el activo.
- Ejercicio: Es el acto de hacer efectivos los derechos del producto financiero derivado, al precio *strike* que tenga en ese momento el el *activo subyacente*.
- Vencimiento: Es la fecha en la que la opción se puede ejercer.
- Estilo de una opción: Determina el tiempo al que se puede ejercer. El estilo *europeo* consiste en que sólo puede ejercerse la opción al final del periodo. Si el comprador de la opción tiene el derecho a ejercer a cualquier fecha durante el periodo de duración de ésta entonces se conoce como de estilo *americano* y si el comprador puede ejercer sólo en ciertos periodos establecidos, pero no durante toda la duración del contrato entonces es una opción *Bermuda*.
- Valor subyacente: Activo financiero (acciones, bonos, índices bursátiles, mercancía, etc.) que es objeto de un contrato que sirve como referencia ya que de acuerdo a su comportamiento se establecerá el pago futuro del contrato.
- *Payoff*: Función de pagos, cuya estructura depende del tipo de opción o contrato del derivado financiero.

Dentro de los contratos en derivados existen dos posiciones a elegir, que dependen del interés que tengan los participantes del mercado financiero. Se conocen como posición *corta* y *larga* y se consideran como estrategias de venta y compra respectivamente. Para el caso de opciones:

- *Call* larga: Es una opción en la cuál se adquiere el derecho, más no la obligación de comprar el subyacente a un precio y fecha establecidos.
 - *Call* corta: Se adquiere la obligación de vender si la contraparte ejerce su derecho a comprar.
 - *Put* larga: Es una opción en la cuál se adquiere el derecho, más no la obligación de vender el subyacente a un precio y fecha establecidos.
-

- *Put* corta: Se adquiere la obligación de comprar si la contraparte ejerce su derecho a vender.

Para este tipo de opciones el *payoff* puede representarse de acuerdo a la siguiente figura:

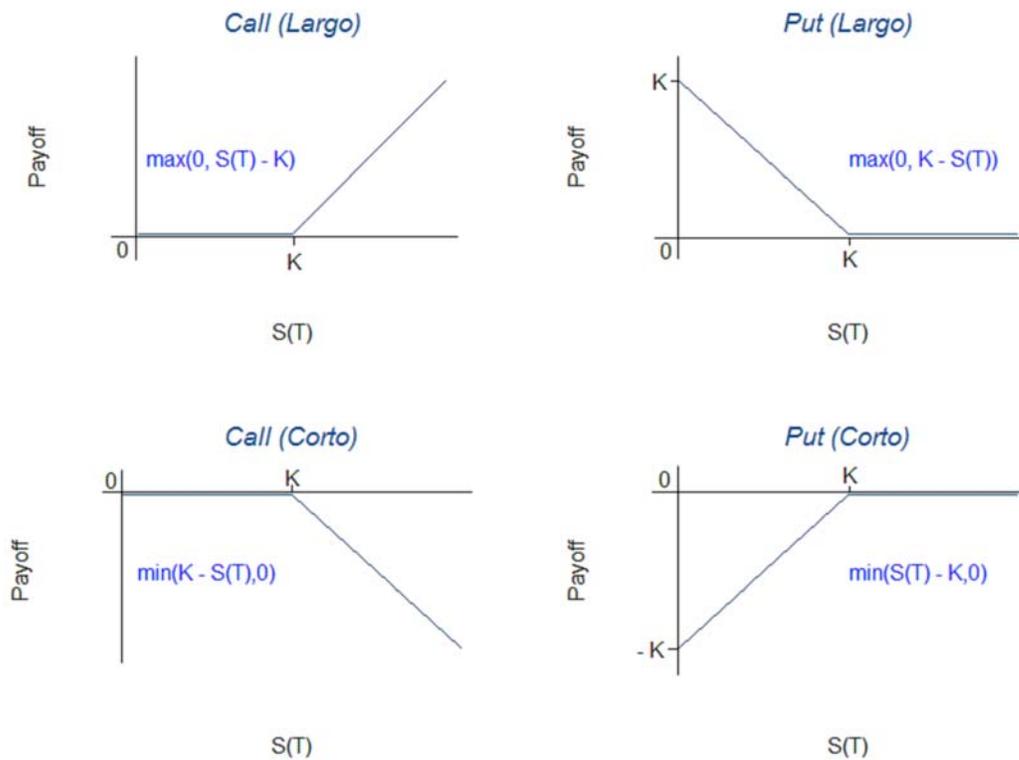


Figura 1.1: Funciones de *payoff* correspondientes para opciones en posiciones largas y cortas. Elaboración propia.

En dichas representaciones de *payoff* el cambio de pendiente está dado por el precio *strike* que se estableció en el contrato, la pendiente de la recta siempre será 1 o -1 para este tipo de portafolios con un sólo instrumento y $S(T)$ representa el valor del subyacente al tiempo T , expiración del contrato (esta notación para el precio del subyacente en la fecha de ejercicio se utilizará únicamente para esta sección).

La manera de interpretar este tipo de gráficas es la siguiente: una persona que desea cubrirse contra incrementos en el precio de un activo subyacente podría comprar un una opción *call*, es decir, entraría en una posición *larga* en un *call*, con el deseo de que el precio del subyacente supere la cantidad K preestablecida, así obteniendo un *payoff* de $S(T) - K$. Esta idea es análoga para las otras opciones, dependiendo de la posición que

desea el poseedor del contrato. Asimismo existen portafolios con funciones de *payoff* más elaboradas, compuestas por más de una opción que grafican un *payoff* diferente.

1.2.2. Contratos *forward*

En esta sección se revisan las definiciones, de contratos *forwards*, cuya principal diferencia entre las opciones radica en que son contratos que sustentan obligaciones y no derechos, como el caso de una opción.

Definición 1.2.2. *Contrato forward*

Contrato en el cual, el día de hoy, se establecen los términos bajo los cuáles se hará la compra o venta de manera obligatoria de algún activo subyacente, especificando una fecha en el futuro.

En dichos contratos, además:

- Especifica la cantidad y el tipo exacto del activo que el vendedor debe entregar.
- Especifica la logística de entrega, como el tiempo, lugar y fecha.
- Especifica el precio que el comprador deberá pagar en la fecha de entrega.
- Obliga al vendedor a vender y al comprador a comprar, sujeto a las condiciones establecidas.

Observación 1.2.1.

Los contratos de *futuros* son similares a los contratos *forward*, en el sentido de que crean la obligación de comprar o vender a un precio predeterminado a una fecha futura, con la diferencia de que los primeros son estandarizados y los segundos no lo son. ∇

Así como las opciones, todo contrato *forward* tiene un comprador y un vendedor, por lo que surgen de nuevo las posiciones: *larga* (el comprador) y *corta* (el vendedor). Generalmente una posición larga es aquella que hace dinero cuando el precio aumenta y la posición corta obtiene beneficio cuando el precio disminuye, por tanto, el *payoff* para cada posición está determinado por las siguientes expresiones:

$$\text{Payoff Forward largo: } = S(T) - K$$

$$\text{Payoff Forward corto: } = K - S(T) ;$$

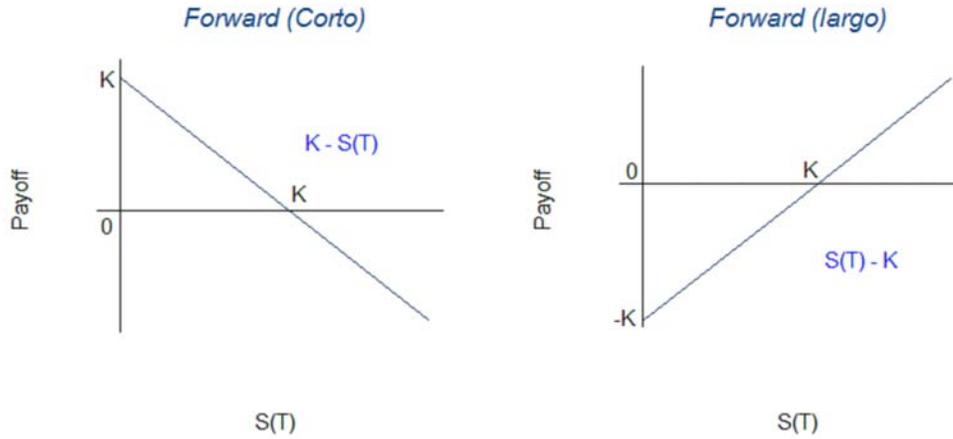


Figura 1.2: *Payoff de un contrato forward corto y largo. Elaboración propia.*

al igual que las opciones, la pendiente de crecimiento (decrecimiento) del *payoff* tiene pendiente 1 (-1), es por ello que este tipo de contratos es posible utilizarlos para encontrar el valor de una opción, conociendo al menos alguno de ellos, usando la paridad *put-call* la cuál establece que:

$$f = C(S, T, K) - P(S, T, K) ; \tag{1.2.1}$$

donde $C(S, T, K)$ y $P(S, T, K)$ denotan el *payoff* de una opción *call* y una opción *put* respectivamente con el mismo subyacente, *strike* y vencimiento, es decir, el *payoff* de un *forward largo* se puede determinar por la “suma” del *payoff* de un *call largo* y un *put largo*, donde realmente es necesario comprender que en la expresión (1.2.1) el término $-p$ actúa como un *put corto*, ya que

$$-\max \{K - S(T), 0\} = -(\min \{-[K - S(T), 0]\}) = \min \{S(T) - K, 0\} ;$$

es decir, justo el *payoff* de un *put corto*.

Es posible ver que el precio de un *forward largo*, en el momento t_0 (inicio del periodo del contrato), está definido por:

$$f = S(t_0) - Ke^{-r(T-t_0)} ;$$

es decir, la diferencia entre el precio del subyacente en t_0 y el valor presente el precio *strike* con una tasa de interés continua r y fija para el intervalo $[t_0, T]$ es decir, el periodo del contrato. Análogamente, el precio de un *forward corto* queda determinado por:

$$f = Ke^{-r(T-t_0)} - S(t_0).$$

1.3. Valuación tradicional de productos financieros derivados

Existen varios métodos para la valuación de una opción, entre ellos existen los árboles binomiales o bien la fórmula de Black & Scholes, sin embargo, dependiendo de la forma de ejercer la opción (forma *americana*, *europea* o *bermuda*) y ya que los modelos de interés que surgirán más adelante en este trabajo serán todos de tipo *europeo* basta con recordar la conocida fórmula de Black & Scholes para la valuación de opciones europeas.

1.3.1. Modelo Black & Scholes

Para explicar el modelo de Black & Scholes primero se tomará como referencia el modelo binomial, el cual supone que durante un periodo de tiempo, el precio del activo subyacente puede moverse hacia arriba o hacia abajo por una cantidad específica (es decir, que el precio del activo subyacente sigue una distribución binomial) bajo este supuesto se puede encontrar el precio sin arbitraje de una opción. En dicho modelo binomial se puede cambiar el número de pasos en los cuales cambia el precio, pero una vez que éste se vuelve lo suficientemente grande, el valor se aproxima al valor límite para una opción. Entonces se pueden tener una infinidad de pasos en un árbol binomial y es posible demostrar que mientras el número de pasos crece, el precio de la opción se aproxima a la fórmula de Black & Scholes.

La fórmula de Black & Scholes para un *call* sobre un activo que paga dividendos ² de manera continua a la tasa δ es

$$C(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Se^{-\delta T} \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) ;$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} ; \quad (1.3.1)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} ; \quad (1.3.2)$$

y:

- S es el precio actual del activo.
- K es el precio *strike* de la opción.
- σ es la volatilidad del cambio de precio del activo
- r es la tasa de interés libre de riesgo convertible de manera continua.
- T es el tiempo de expiración del contrato.

²Remuneración periódica que recibe el poseedor de la opción (comprador), como beneficio por ser accionista de la compañía (vendedor).

- δ es la tasa de pago de dividendos del activo.
- $\Phi(x)$ es la función de distribución normal estándar valuada en x .

Análogamente para una opción *put* la fórmula de Black & Scholes establece que:

$$P(S, K, \sigma, r, T, \delta) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - Se^{-\delta T}\Phi(-d_1);$$

donde d_1 y d_2 están dados por (1.3.1) y (1.3.2) respectivamente, además es necesario recordar que por la simetría de la distribución normal se cumple que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta este hecho, se puede establecer la paridad *put-call* para opciones europeas, según el precio por Black & Scholes, es decir:

$$P(S, K, \sigma, r, T, \delta) = C(S, K, \sigma, r, T, \delta) + Ke^{-rT} - Se^{-\delta T}.$$

1.4. Concepto de derivado climático

Un derivado climático es una herramienta que utiliza una compañía en la que sus ingresos están altamente correlacionados con el comportamiento del clima, usándolos como parte de una estrategia de administración del riesgo que surge de probables adversidades climáticas que pudieran afectar sus ganancias. Actúan como productos financieros cuyo *payoff* depende del valor de algún índice climático que se mide durante un periodo acordado entre el comprador y el vendedor del contrato. Este índice puede estar vinculado al alza o baja en las temperaturas observadas, al nivel de lluvia, a la velocidad del viento, etc. En la fecha de expiración se determina la cantidad que deberá recibir el comprador del producto.

Los derivados climáticos están relacionados más frecuentemente al riesgo volumétrico que la compañía enfrenta, que al riesgo del precio. Por ejemplo, una compañía distribuidora de gas podría vender menos cantidad de gas durante un invierno “caliente” en cuyo caso le preocupará más la cantidad de gas vendido, que el precio al que lo está vendiendo; esto debido a que una compañía no puede cambiar constantemente el precio de su producto únicamente porque le conviene.

Son vastos los beneficios que se consiguen al usar una herramienta como ésta. Primero, al ayudar a reducir la volatilidad en las ganancias, se reduce el riesgo de sufrir grandes pérdidas o bien caer en bancarrota. Segundo, reducen la volatilidad en el precio de la acción de la empresa (si es que cotiza en la Bolsa de Valores) y esto provoca que el precio de la misma suba. La tasa de interés con la que la compañía puede conseguir préstamos monetarios decrece, entre otros.

1.5. Desarrollo histórico del derivado climático

La necesidad de productos climáticos surgió de la creación de un mercado climático ³ el cual se desarrolló rápidamente. Desde sus inicios en 1996, las empresas energéticas ya tenían herramientas para cubrirse de incrementos en el precio de una unidad energética. Sin embargo, la competencia fue incrementando, la demanda de energía era incierta. Por lo tanto, los derivados climáticos fueron desarrollados como una herramienta efectiva para cubrir el riesgo volumétrico, más que el riesgo en el precio.

La primera transacción de derivados climáticos tuvo lugar entre 1996 y 1997. La transacción fue realizada por *Aquila Energy* como una opción suscrita a un contrato energético. La primera transacción de un derivado climático pública fue entre *Koch Energy* y *Enron* en 1997 con el fin de transferir el riesgo del clima adverso. El trato fue respecto a un índice de temperatura en Milwaukee para el invierno entre 1997 y 1998. Desde entonces, el mercado climático se ha expandido rápidamente y así, años después este tipo de transacciones se extendieron a Europa, Asia y Australia.

Un año después, en Septiembre de 1999, el *Chicago Mercantile Exchange* (CME) lanzó el primer negocio en bolsa de derivados climáticos. Inicialmente los derivados climáticos se ofrecían en apenas 10 ciudades las cuales se escogieron de acuerdo a la población, a las variaciones estacionales de temperatura y las actividades observadas en mercados OTC. El sistema regulado que ofrecía el CME ayudó al mercado a evolucionar. Además, la transparencia de las transacciones aumentó desde que los precios de los contratos se volvieron públicos, consecuentemente el mercado climático atrajo nuevos participantes.

En 2004, el valor nominal de derivados climáticos del CME fue de 2,200 millones de dolares y creció diez veces a 22,000 millones para septiembre de 2005, con intereses que excedían los 300,000 dólares y un volumen que sobrepasaba 630,000 contratos. Por otra parte en el mercado OTC seguía siendo más activo que el intercambio, entonces el *spread de compra/venta* (diferencia entre la compra y venta entre divisas) era bastante grande.

De acuerdo a la encuesta anual realizada por la *Weather Risk Management Association* (WRMA) en 2009, se estimó un valor nominal de derivados climáticos en intercambio comercial y OTC en 2008/2009 de 15,000 millones, comparado con el año previo de 32,000 millones y 22 mil en 2005 y 2006. Aunque el total en el número de contratos decreció, gracias a un rechazo general de mercados financieros, el mercado climático sigue desarrollándose, ampliando sus alcances geográficos, cartera de clientes y relaciones con otros mercados financieros y aseguradores.

³Enfoque de un mercado en el que se puede expresar, medir y transferir riesgo en términos de temperatura, precipitación, nevadas u otras variables meteorológicas que pueden medirse.

Estados Unidos	Canadá	Europa	Japón
Atlanta	Calgary	Londres	Tokio
Chicago	Edmonton	París	Osaka
Cincinnati	Montral	Amsterdam	Hiroshima
Nueva York	Toronto	Berlin	
Dallas	Vancouver	Essen	
Filadelfia	Winnipeg	Estocolmo	
Portland		Barcelona	
Tucson		Roma	
Des Moines		Madrid	
Las Vegas		Oslo-Blindern	
Detroit		Praga	
Minneapolis			
Houston			
Sacramento			
Salt Lake City			
Baltimore			
Boston			
Kansas City			
Colorado Springs		Australia	
Jacksonville		Bankstown, Sydney	
Little Rock		Brisbane Aero	
Los Angeles		Melbourne Regional	
Raleigh Durham			
Washington D.C			

Cuadro 1.1: Ciudades donde se realizan transacciones de derivados climáticos. Fuente: Grupo CME.

Actualmente el CME realiza este tipo de transacciones en 24 ciudades de los Estados Unidos, 11 en Europa, 6 en Canadá, 3 en Australia y 3 en Japón (Cuadro 1.1).

1.5.1. Operadores de cobertura y especuladores, mercado primario y secundario

Toda transacción de un instrumento climático se hace entre dos partes, de las cuales los *operadores de cobertura* serán aquellos que desean reducir o eliminar el riesgo climático que corren mientras que los *especuladores* son los que hacen negocio vendiendo contratos climáticos. Así, las transacciones entre operadores de cobertura y especuladores se conocen como el mercado primario, mientras que operaciones especulador-especulador se conocen como el mercado secundario.

La comercialización especulador-especulador se hace con la finalidad de reducir el riesgo que adquirieron previamente al vender otros derivados climáticos (en este caso, ellos también son operadores de cobertura) o simplemente porque piensan que pueden hacer dinero haciéndolo.

Ocasionalmente se realizan contratos directamente entre dos operadores de cobertura, al hacerlo pueden cubrirse de manera simultánea, sin embargo es poco común, pues es complicado que dos compañías tengan riesgos climáticos iguales u opuestos.

Desde el punto de vista del especulador, el que puede ser un banco, una compañía de seguros, una compañía reaseguradora, compañía de energía o bien un fondo de inversión, vender derivados climáticos es algo atractivo por dos razones, la primera es que el *payoff* que genera un derivado climático generalmente es independiente a las otras maneras tradicionales de inversión o aseguramiento en los mercados financieros comunes, como resultado de esto una compañía de seguros puede emitir derivados climáticos relativamente baratos como una manera alternativa de aseguramiento ya que el riesgo de la compañía crecerá en menor cantidad. De manera similar, los fondos de cobertura o inversión pueden utilizar derivados climáticos ya que sus ganancias son independientes con otros activos que tengan, como lo son capitales y bonos.

Y la segunda, un portafolio de derivados climáticos puede ser de bajo riesgo debido a que un contrato climático potencialmente tendrá una compensación.

Un mercado climático ideal sería aquel en donde todos los participantes tuvieran riesgos climáticos iguales y de montos opuestos para cada riesgo. En donde los especuladores retendrían muy poco riesgo al ser simplemente un punto intermedio entre dos operadores de cobertura y el riesgo podría ser intercambiado casi al precio real, con una muy pequeña o nula prima de riesgo.

Existen varias maneras en las que puede comercializarse un derivado climático. En el mercado primario las operaciones son usualmente OTC en el sentido de que se hacen en privado entre dos contrapartes. En cambio, la mayoría del mercado secundario es comercializado a través de corredores de bolsa, quienes fungen como intermediarios y convencen a los participantes del mercado para hacer tratos. Una gran parte del mercado secundario tiene lugar en el CME, el cual actualmente enlista una serie de contratos de derivados climáticos, los cuales están suscritos a la temperatura de cada mes durante el año, el CME juega el papel de brindar transparencia en los precios y reduce el riesgo de crédito entre las contrapartes.

1.6. Beneficios del uso de derivados climáticos

Los derivados climáticos están diseñados para ayudar a las compañías a asegurarse así mismas contra eventos meteorológicos considerados como no catastróficos. Incluyendo temporadas frías o calientes, secas o lluviosas, con vientos rápidos o lentos y muchas más. A pesar de la gran lista de posibles índices y variables climáticas, la experiencia de quienes usan esta herramienta, se han enfocado más en derivados climáticos asociados a la temperatura, ya que las demás condiciones climáticas son generadas como una consecuencia de ésta, es por ello que la investigación y desarrollo de este instrumento financiero ha sido enfocada en su mayoría a la temperatura.

Una compañía que usa derivados climáticos como parte de su estrategia de cobertura, puede reducir el riesgo relacionado con el clima. Y como resultado, la volatilidad en sus ganancias, año con año, será significativamente reducida. Organizaciones gubernamentales también pueden hacer uso de estos instrumentos, a nivel estatal o nacional, con el fin de evitar crecimientos inesperados en sus gastos.

El clima puede afectar los ingresos de la compañía directamente reduciendo el volumen de ventas, por ejemplo un parque diversiones que desea cubrirse contra los días lluviosos en los que habrá menos visitantes, deseará participar en un contrato suscrito en la lluvia. Igualmente, una compañía de electricidad que desea reducir una baja demanda en electricidad debido a un cálido invierno puede usar un derivado climático. Por otra parte una organización gubernamental puede hacer uso de estos derivados con el objetivo de evitar un incremento en el gasto para limpiar caminos y carreteras en días nevados. En el Cuadro 1.2 se presentan varios ejemplos de coberturas climáticas.

Las estrategias de comercio cambian de compañía a compañía y los derivados climáticos se pueden usar para crear portafolios de inversión con ventajas de varias maneras. Puede obtenerse un mayor rendimiento mientras se mantenga el riesgo en niveles bajos, mediante un portafolio que contenga derivados climáticos y también de mercancías debido a la correlación entre el clima y los precios de algunos productos. Además de esto, considerar estos instrumentos en un portafolio accionario reduciría el riesgo debido a la baja correlación entre los derivados climáticos y el amplio mercado financiero tradicional.

1.7. Los derivados climáticos y el seguro

Así como en un instrumento climático y en una póliza de seguro que resarce las pérdidas ocasionadas por un desastre meteorológico, se tiene como finalidad ayudar a las empresas a reducir pérdidas provocadas por eventos climáticos.

Industria	Tipo de Clima	Riesgo
Agrícola	Temperatura / Precipitación	Pérdidas importantes de cosechas debido a temperaturas o lluvias extremas.
Compañías aéreas	Vientos	Cancelación de vuelos durante días ventosos.
Aeropuertos	Heladas	Aumento en costos operacionales.
Parques de diversiones	Temperatura / Precipitación	Reducción de visitantes durante días fríos o lluviosos.
Productores de bebidas	Temperatura	Reducción de ventas durante veranos fríos.
Compañías para material de construcción	Temperatura / Nevada	Reducción de ventas durante inviernos intensos (los sitios de construcción cierran).
Compañías constructoras	Temperatura / Nevadas / Lluvias	Retraso en itinerarios de trabajo.
Consumidores de energía	Temperatura	Altos costos en calefacción o refrigeración durante inviernos fríos y veranos calientes.
Industria energética	Temperatura	Reducción de ventar durante inviernos calientes o veranos fríos.
Hotelera	Temperatura / Precipitación	Menor número de visitantes durante periodos fríos o lluviosos.
Generación de energía hidroeléctrica	Precipitación	Menos ganancias durante periodos de sequía.
Municipios gubernamentales	Nevadas	Incremento en gastos de limpieza durante inviernos con altas nevadas.
Estación de esquí	Nevadas	Reducción de ingresos durante inviernos con poca nieve.
Transporte	Viento / Nieve	Cancelación de servicios de envío debido a vientos fuertes o en el caso terrestre a caminos bloqueados.

Cuadro 1.2: Industrias con exposición a riesgos climáticos y tipo de riesgos.

Las empresas hacen uso de ambas herramientas para cubrirse de las fluctuaciones de las condiciones climáticas y ambas son propuestas para proteger a aquel que resulte afectado por ellas. Pero si se analiza más a fondo existen claras diferencias entre ellos. Ya que los contratos para aseguramiento están suscritos a la ocurrencia de un evento raro, extremo, por ejemplo una helada u honda de calor intensas, un huracán o inundación. Eventos que podrían causar una catástrofe y esto impactaría los ingresos de la compañía. Contrariamente, los derivados climáticos están siempre suscritos a eventos climáticos no catastróficos, los cuales tienen una alta probabilidad de ocurrencia, por ejemplo cambios en la temperatura o lluvias cotidianas.

Además de esto, el funcionamiento de un derivado climático es más ágil, ya que cuando se compra un instrumento derivado climático, se asegura recibir un pago en una fecha determinada, siempre y cuando el evento por el que el comprador desea cubrirse haya ocurrido, no importa de que manera el clima haya provocado la pérdida. De otra manera, para el caso del vendedor del instrumento, éste logra reducir altos costos administrativos así como los gastos por el ajuste de la pérdida, justo como los que se requieren en una póliza de seguros.

Por otra parte, en el área de seguros, la compañía aseguradora al ser la que tiene que realizar el pago si ocurre un evento desfavorable, ésta se vuelve un poco estricta con sus condiciones y la compañía que desea cubrirse del riesgo, tiene que aceptar el trato mediante el pago de una prima que exija la aseguradora. Esto es más sencillo con un derivado climático, las condiciones del contrato, en las cuales la compañía que comprará el producto puede sentir más libertad para establecer las condiciones contractuales, con la finalidad de diseñar un contrato cuyo *payoff* sea dependiente a la magnitud del fenómeno climático.

1.8. Participantes en el mercado climático

Hasta el momento, se explicó que los derivados climáticos, de manera similar a los derivados de crédito y en cierta manera los derivados sobre divisas, difieren de la mayoría de los demás instrumentos derivados, ya que el activo subyacente es algo que no se puede almacenar o comercializar, simplemente se mide para determinar el monto del pago que tendrá que realizarse al final del periodo del contrato. A pesar de ello, el mercado climático, está organizado de igual manera que cualquier otro mercado financiero, la mayoría de las transacciones se llevan a cabo entre operadores de cobertura (aquellas compañías que desean comprar el instrumento para cubrir sus negocios) y especuladores (aquellos que ofrecen la cobertura, como lo son bancos, compañías de seguro y reaseguro, grandes compañías energéticas e instituciones de inversiones especiales). Por supuesto, el resto de las operaciones se llevan a cabo en el mercado secundario, únicamente entre mismos especuladores.

El mercado de derivados climáticos históricamente ha estado compuesto de la siguiente manera:

Hasta el momento se ha comprobado la existencia de una alta correlación entre el precio de la electricidad y el comportamiento de la temperatura, por lo que el sector energético es el principal participante en el mercado climático. En segundo lugar, se encuentra el sector agrícola, ya que los granjeros usan contratos climáticos para protegerse de pérdidas por lluvias intensas, sequías o incluso nevadas. El sector de comercio minorista y construcción también han incrementado su participación.

1.9. La temperatura como factor subyacente en la emisión de derivados climáticos

El clima del planeta está en constante cambio, calentamientos y enfriamientos periódicos, es un ciclo natural balanceado que ha ocurrido desde el inicio de los tiempos. Sin embargo, durante el último siglo ha habido un notable periodo de calentamiento que pudiera no deberse por completo a este ciclo natural, pues está comprobado que las actividades

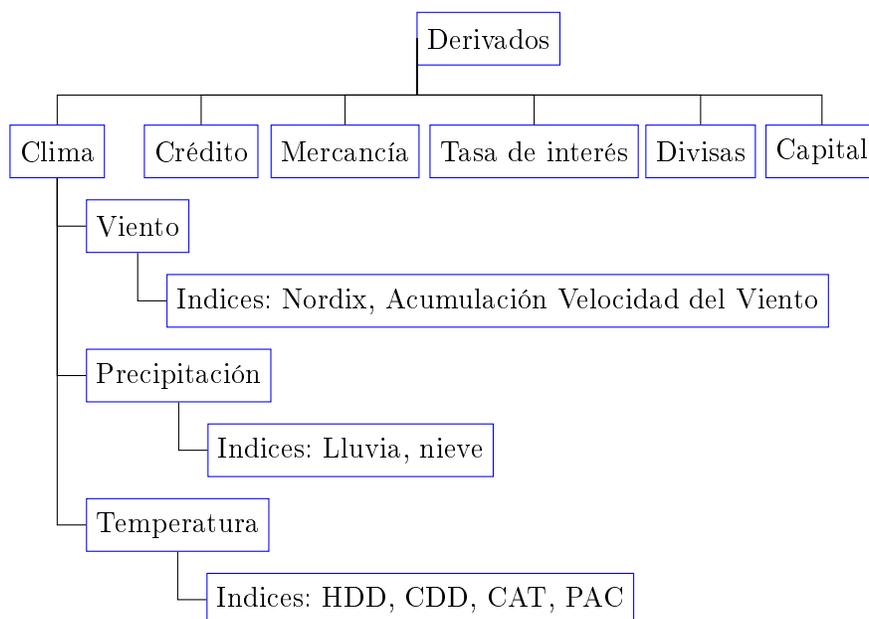


Figura 1.3: Categorías de derivados financieros. Fuente: Alexandridis & Zapranis. (2013) *Weather derivatives modeling and pricing weather-related risk*. pp. 5.

humanas son ser parte en la exacerbación del ciclo de calentamiento natural del planeta.

1.9.1. Causas del calentamiento global

El efecto invernadero en los planetas es la manera natural de calentar la tierra. La cual es una onda de radiación de onda corta que entra en la atmósfera desde el espacio, donde ésta se convierte en calor y éste tiene una longitud de onda de radiación más larga, de manera que los gases invernadero absorben esta longitud de onda más larga, pero reflejan hacia el espacio la mayor parte de la radiación y mantienen la temperatura de la superficie de la Tierra en un promedio de 15°C , sin ellos la temperatura podría llegar a ser de 218°C . Es por esto que los niveles altos de gases invernadero en la atmósfera exacerbaban el ciclo natural y aumentan la temperatura promedio de la Tierra.

Los gases invernadero se producen naturalmente y también por actividades humanas. Los principales son: el dióxido de carbono, el ozono, el vapor de agua, el metano y clorofluorocarbonos (CFCs), que en grandes cantidades pueden contribuir al calentamiento global. El dióxido de carbono puede producirse por procesos naturales y por actividades humanas. Las plantas lo usan durante la fotosíntesis que por lo general naturalmente se equilibra con la cantidad de dióxido de carbono producido por la respiración del organismo, además la incineración de combustibles fósiles y bosques ha aumentado la cantidad total de producción de dióxido de carbono y éste ha permanecido en la atmósfera durante casi 200 años,

llevándola a ser 300 % más alta que antes de la Revolución Industrial.

El metano se genera naturalmente por la respiración anaerobia en tierra, por gases liberados en vertederos de basura y en los intestinos de algunos animales, en particular ganado y ovejas. Por lo que un aumento de ganado y agricultura llevaría a un aumento dramático en la producción de dicho gas.

El ozono por otra parte, es una capa que existe naturalmente en la atmósfera y se encuentra entre 12-50 kilómetros por encima de la Tierra, su tarea es absorber la radiación ultravioleta que entra en la atmósfera de la Tierra.

El vapor de agua desempeña un papel fundamental en el calentamiento global y el efecto invernadero, ya que cuando se encuentra en forma de nubes puede refrescar la superficie de la Tierra bloqueando los rayos de sol, pero también puede aumentar la temperatura al fungir como una manta de aislamiento pues una alta concentración de vapor de agua en los cielos, exacerba el efecto invernadero.

Por último los clorofluorocarbonos se encuentran en *sprays* del aerosol, neveras y otras fuentes sintéticas, pueden durar hasta 60 años en el aire y se piensa que son la causa del ensanchamiento dramático del agujero en la capa de ozono de la Tierra que se encontró en 1980.

1.9.2. Consecuencias del cambio climático

El calentamiento global tiene dos consecuencias principales: un incremento en la temperatura y a su vez incremento en el nivel del mar. Un incremento persistente en la temperatura promedio de la Tierra podría provocar fatalidades a nivel global pues está comprobado que un incremento de tan solo 4°C podría llevar al derretimiento de los glaciares y capas de hielo alrededor del mundo. Actualmente existen unos 25 millones de kilómetros cúbicos de hielo en la superficie de la Tierra. Tan sólo el fusiónamiento de la capa de hielo de Groenlandia podría incrementar el nivel del mar por 7.4 metros, inundando todas las islas de baja altitud. Un incremento en la temperatura podría traer ondas de calor más frecuentes, altas tasas de evaporación y precipitación, las cuales podrían ciertamente incrementar la fuerza y frecuencia de ciclones tropicales. (*Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC).)

El cambio climático puede no ser el principal responsable de los recientes costos extraordinarios por desastres naturales, pero es sumamente probable que esto afecte para futuras catástrofes. Según el IPCC, un aumento de gases invernadero en la atmósfera incrementará temperaturas sobre la mayor parte de la superficie de la Tierra, aunque el cambio exacto varíe regionalmente. Más incierto, pero posible, los resultados de un aumento en la tempe-

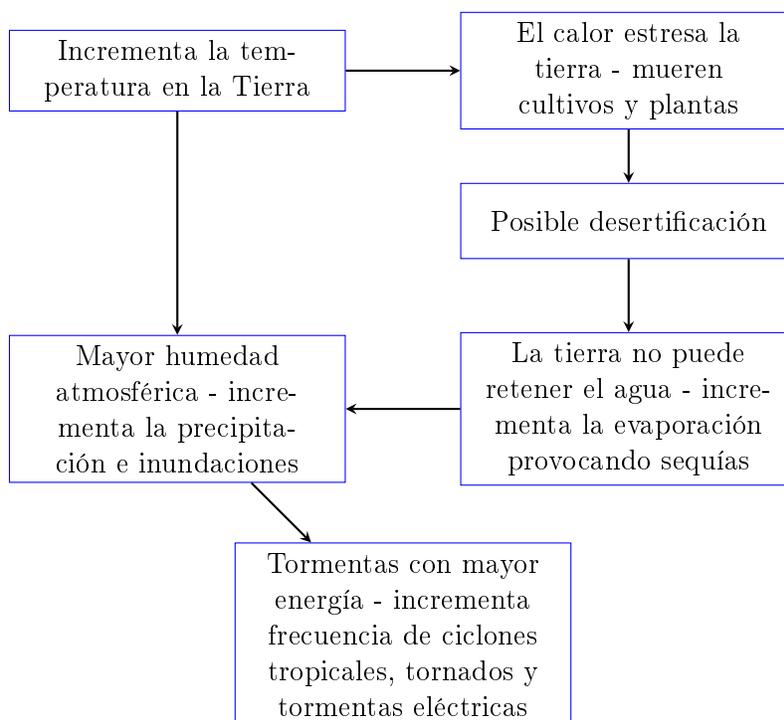


Figura 1.4: *Consequences of climate change, Fuente: IPCC*

ratura global incluyen el peligro mayor de sequías y aumento en la intensidad de tormentas, incluso ciclones tropicales con velocidades de viento más rápidas.

Los cambios del clima no sólo afectan las temperaturas promedio, sino también conllevan a temperaturas extremas, aumentando la probabilidad de catástrofes relacionados con el clima. Si el cambio climático global hace que la temperatura media global se eleve, habrá menos tiempo frío y una mayor probabilidad de calor extremo. Un aumento de la variabilidad de temperaturas ampliará los extremos de temperatura, tanto fríos como calientes.

El resultado combinado entre un incremento en la temperatura sobre la Tierra, la reducción de la diferencia entre la temperatura de los polos y el ecuador y un incremento de la humedad podría incrementar intensamente ciclos de sequías e inundaciones en tanto que caiga la precipitación en una sola y duradera tormenta sobre esas regiones, en vez de varias y pequeñas. Una atmósfera más caliente y húmeda también puede provocar tormentas tropicales (huracanes), haciéndolos más impredecibles y difícil de medir.

El calentamiento acelerado comenzó desde 1980, ha incrementado la temperatura de los mares en 0.3 grados Celsius, y esto debería incrementar la máxima velocidad potencial

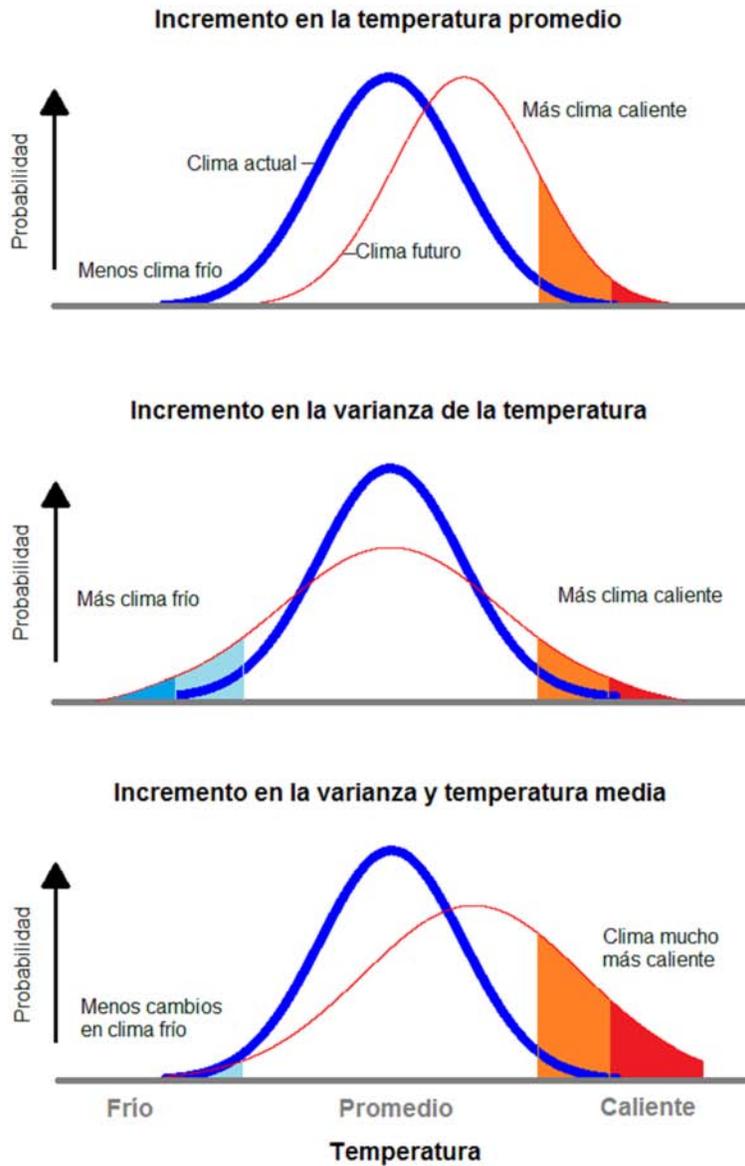


Figura 1.5: *The Rising Cost of Natural Hazards. NASA, 2005.*

de los huracanes en un nudo ⁴, de acuerdo a los modelos de intensidad de huracanes (IPCC).

⁴El nudo es una medida de velocidad utilizada tanto para navegación marítima como aérea, equivalente a 1852 metros por hora.

Suficientes son las razones para elevar el interés sobre las consecuencias del calentamiento global, más aún para aquellos cuyos ingresos dependen del comportamiento climático. Con la finalidad de introducir el concepto de instrumentos derivados cuya finalidad es reducir el riesgo de pérdidas, se desglosan a continuación las propiedades y bases de su funcionamiento.

1.10. La anatomía de un derivado climático

Un derivado climático está compuesto de los siguientes elementos:

- Estación climática de referencia: Todos los contratos meteorológicos se basan en las observaciones actuales del tiempo de una o varias estaciones meteorológicas específicas. La mayoría de las transacciones toman como referencia una sola estación, aunque algunos contratos pueden estar enlazados a una combinación ponderada de lecturas de estaciones múltiples y otros en la diferencia en observaciones en estaciones.
 - Índice climático: El índice subyacente de un derivado meteorológico define la medida de tiempo, cuándo y cómo ocurrirán las liquidaciones del contrato. Los índices más comunes en el mercado son *Heating Degree Days* (HDDs) y *Cooling Degree Days* (CDDs), éstos miden la variación de la temperatura diaria respecto a una media establecida, durante una temporada y se utilizan en la industria energética ya que guardan correlación con el consumo de energía. Existe índices similares que también se usan para otras variables, por ejemplo, la precipitación acumulada o el número de días durante los cuales la nevada excede un nivel predefinido.
 - Periodo: Todos los contratos tienen una fecha de inicio y fecha de término que definen el período durante el cual se calcula el índice subyacente. Los periodos más comunes en el mercado son del 1° de noviembre al 31 de marzo para contratos del invierno y del 1° de mayo al 30 de septiembre para contratos de verano, sin embargo ha incrementado el volumen de productos con duración de un mes y contratos de una semana ya que el mercado así lo ha solicitado.
 - Estructura: Los derivados meteorológicos están basados en estructuras de derivados tales como: *puts*, *calls*, *swaps*, *collars*, *straddles* y *strangles*. Los atributos claves de estas estructuras son el precio *strike* (el valor del índice subyacente en el cual el contrato comienza a pagar), el *tick size* (el monto que se gana por incremento de unidad en el índice meteorológico más allá del *strike*), y el límite (la liquidación financiera máxima del contrato).
 - Prima: El comprador de un derivado meteorológico paga una prima al vendedor que está normalmente entre 10 y el 20 % del valor nominal del contrato, sin embargo esto puede variar considerablemente según el perfil del riesgo del contrato.
-

1.11. Algunas aplicaciones prácticas del uso de derivados climáticos

Ya se ha hablado de la estructura que tiene el mercado climático, los diferentes sectores que hacen uso de estos instrumentos así como los beneficios que obtienen de ellos. A continuación se presentan ejemplos de contratos y condiciones para algunos sectores que en años pasados han usado esta herramienta:

- Aerolíneas

Una aerolínea sufre de problemas constantes por gastos ocasionados debido a las condiciones climáticas que provocan retrasos en sus vuelos. Previo a esto la aerolínea tomó medidas preventivas suponiendo que esto se normalizaría año con año, sin embargo, ha empeorado.

Reto: El corporativo de la aerolínea se encuentra en el aeropuerto *Chicago O'Hare*, ahí se encontró que había una fuerte correlación entre la precipitación en la zona del corporativo y los minutos de retraso en el resto de la red. Sabiendo esto, escogieron cubrirse contra las precipitaciones en el corporativo más que en el resto de la red.

Estructura: La aerolínea estimó que por cada 0.25" de precipitación la aerolínea tenía un gasto de \$500,000 debido a los gastos operacionales ineficientes. Sabiendo que el promedio de 10 años de la precipitación en *Chicago O'Hare* es de 35" y una desviación de 0.5". Ya que la aerolínea escogió cubrirse de los años extremos, el *payoff* del derivado pagaba \$1'000,000 por cada 0.25" sobre 40" de precipitación.

- Agricultura

Algunos granjeros enfrentan un riesgo financiero debido a la variabilidad de exceso/insuficiencia de lluvia. Dependiendo de la etapa de desarrollo del plantío, la interacción del clima con los cultivos esperados varía. Una opción *call*, basada en un promedio ponderado de la precipitación, podría otorgar un beneficio si el nivel de lluvia excede un nivel predeterminado. Así el siguiente contrato es acordado

- Estructura: Opción *call* con promedio ponderado de precipitación
 - Periodo: Junio 2012 - Agosto 2012
 - Estación meteorológica: (Las mediciones se toman de 3 diferentes estaciones)
 - 33 % *Grand Island, Nebraska*.
 - 33 % *Hastings, Nebraska*.
 - 34 % *Kearney, Nebraska*.
 - *Strike*: 12.65 pulgadas de precipitación acumulada
 - *Tick Size*: \$ 335,656 por pulgada
 - Límite: \$2,000,000
-

- Entretenimiento y Parques de Diversiones

La lluvia puede estropear las actividades al aire libre, si los ingresos de una compañía dependen de este tipo de actividades, un exceso de lluvia puede ser lo peor para ellos. Un contrato de lluvia puede ayudar a estabilizar los ingresos que sean sensibles al clima.

Es necesario para ello escoger el nivel de lluvia que impacte las actividades durante los días u horas del periodo de cobertura, durante el evento o temporada de operación. Considerando en este caso, un contrato de acumulación de lluvia con un nivel máximo por día, o que cubra contra un cierto número de días lluviosos, o un sólo día en exceso lluvioso. Por ejemplo:

- Estructura: Opción *call* de precipitación
- Periodo: Mayo 2012-Septiembre 2012
- Estación meteorológica: *Atlanta Hartsfield*
- Día lluvioso: Un día con más de 2 pulgadas de precipitación durante el día
- Índice de Lluvia: Número total de días lluviosos durante el periodo
- *Strike*: 4 días lluviosos
- *Tick Size*: \$1,000,000 por día lluvioso
- *Payoff*: $(\text{Índice de Lluvia} - \text{Strike}) * \text{Tick Size}$

- Combustible para calefacción

Las compañías de distribución de combustible para calefacción son afectadas por variaciones en la temperatura, dependen de inviernos “fríos” en los que los consumidores necesitan calentar sus hogares y negocios. Por tanto, un invierno “caliente” provocaría un descenso en la demanda de combustible, lo que se traduciría en menos ventas y por tanto menos ingresos. Una posible solución para esto sería un *swap* climático

- Estructura: *Swap* sobre acumulación de días calientes
- Periodo: Noviembre 2012-Marzo 2013
- Vendedor: *HeatCo*.
- Comprador: *Renaissance Trading Ltd* (RTL)
- Estación meteorológica: *Boston*
- *Strike*: 43 días calientes
- *Tick Size*: \$25,000 por día caliente
- Límite: \$10,000,000

(RTL paga por abajo de 43 días calientes registrados (*strike*), *HeatCo* paga por encima de 43 días)

- Limpieza de Nieve

Los negocios usan varios parámetros para asignar el presupuesto de gasto anual para remover la nieve. Independientemente de cómo se reuna el dinero, cada año las nuevas condiciones climáticas pueden causar que dichos fondos sean insuficientes, como resultado de esto es necesario usar dinero que se tenía planeado para otro uso.

Mediante un derivado climático es posible proporcionar cobertura contra un nivel excesivo de gasto de limpieza de nieve, por ejemplo, si la cantidad de nieve diaria durante el periodo de cobertura excede un nivel definido en el contrato, se hace un pago al comprador de éste. De esta manera se escoge el nivel de nieve que pueda poner en riesgo los fondos de la compañía y se establece un contrato

- Estructura: *Call* sobre acumulación de nieve
- Periodo: Diciembre 2012 - Marzo 2013
- Estación: *Columbus* (OH) Puerto Columbus IAP
- Comprador: *SnowCo*
- *Strike*: 35 pulgadas de nieve acumulada
- *Tick Size*: \$25,000 por pulgada
- Límite: \$250,000

1.12. Variables climáticas e índices

Dado que el clima puede afectar a varios tipos de empresas de diferentes maneras, los derivados climáticos están basados en diversas variables climáticas que pueden depender de una o más condiciones meteorológicas. La más usada es la temperatura tomando observaciones por hora, máxima y mínima o promedios diarios, de las cuales el promedio de la temperatura es el que más se usa, simplemente tomando el punto medio entre la temperatura máxima y mínima observadas durante el día⁵. Además de la temperatura el viento y precipitación también se usan como variables subyacentes de los derivados climáticos, aunque estos no están tan desarrollados.

La relación precisa entre la variable climática y el impacto sobre el negocio que desea cubrirse, debe estudiarse con cuidado si es que se desea diseñar un instrumento con la mejor estructura posible. En las siguientes secciones se presentan posibles índices que son usados por la mayoría de los participantes del mercado climático, a menos que se desee diseñar un índice más específico para el cliente.

⁵Se considera que la modelación de temperatura se logra de la mejor manera tomando mediciones promedio. Es decir, la *oscilación térmica diaria* (diferencia entre la temperatura máxima y mínima observadas durante un día) dividida entre dos. (Enriqueta. (1980))

Durante el desarrollo del trabajo, los índices utilizados en temperatura, tendrán como variable la temperatura media definida de la siguiente manera

Definición 1.12.1. *Temperatura media*

Dada una estación meteorológica j , sea T_{ij}^{max} y T_{ij}^{min} las temperaturas máxima y mínimas observadas durante el día i medidas (en grados Celsius). Se define la temperatura promedio del día i medida por la estación j como:

$$T_{ij} := \frac{T_{ij}^{max} + T_{ij}^{min}}{2}.$$

1.12.1. Índices *Degree Day*

Los índices *Degree Day* se originaron en el sector energético y se diseñaron para tener una alta correlación con la demanda doméstica para aire acondicionado o calefacción. Los índices *degree day* se clasifican en dos tipos: *cooling degree day* y *heating degree day*, que se describen a continuación.

1.12.1.1. *Heating Degree Days*

Durante el invierno, los *Heating Degree Days* (HDDs) son usados para medir la demanda de calefacción y por tanto para medir que tan frío es el invierno (entre más frío sea, habrá más HDDS). Existen varias maneras de definir un HDD en la industria energética, pero la definición del mercado para el número de HDDS, durante el día i es

Definición 1.12.2. *Degree Day*

Para una localidad dada, un *degree day* es el valor que representa la diferencia entre la temperatura del día i y un valor predeterminado T_{ref} .

Este valor se usa para medir el gasto de energía para calefacción o aire acondicionado.

Definición 1.12.3. *Heating Degree Day*

Sea T_i la temperatura media del día i . Se define un *Heating Degree Day* (HDD_i : medido durante invierno) por la cantidad

$$HDD_i = \text{máx} \{T_{ref} - T_i, 0\} ;$$

donde T_i es la temperatura media del día i y T_{ref} es la temperatura de referencia del lugar del contrato.

De esta manera

Definición 1.12.4. *Índice HDD*

Se define el Índice HDD como la suma de los HDDs durante el periodo del contrato $[\tau_1, \tau_2]$, con n número de días, donde $\tau_2 = \tau_1 + n - 1$, es decir:

$$H_n := \sum_{i=0}^{n-1} HDD_{\tau_1+i}.$$

Varias de las localidades donde son comercializados los derivados climáticos, son lugares lo suficientemente fríos en épocas durante el año, para que la temperatura nunca supere los $18^\circ\text{C}/65^\circ\text{F}$, por tanto el número de HDDs por día se considerará positivo.

1.12.1.2. *Cooling Degree Days*

Los *Cooling Degree Days* (CDD) se utilizan en verano para medir la demanda de energía que se usa para aire acondicionado y por tanto son una medida de qué tan caliente es (entre más caliente sea el verano, mayor número de CDDs habrá). Aunque los sistemas de calefacción pueden funcionar con electricidad y gas, la mayoría de los sistemas de aire acondicionado funcionan con electricidad, y por tanto los CDDs son de gran importancia para el mercado energético. De esta manera, el número de CDDs en un día particular se define como

Definición 1.12.5. *Cooling Degree Day*

Sea T_i la temperatura media del día i . Se define un *Cooling Degree Day* (CDD_i : medido durante verano) por la cantidad

$$CDD_i = \max \{T_i - T_{ref}, 0\} ;$$

donde T_i es la temperatura media del día i y T_{ref} es la temperatura de referencia del lugar del contrato.

De esta manera se puede definir el correspondiente índice,

Definición 1.12.6. *Índice CDD*

Se define el Índice CDD como la suma de los CDDs durante el periodo del contrato $[\tau_1, \tau_2]$, con n número de días, donde $\tau_2 = \tau_1 + n - 1$, es decir:

$$C_n := \sum_{i=0}^{n-1} CDD_{\tau_1+i} ;$$

Para el caso de los *Cooling Degree Days*, existen pocas localidades donde la temperatura sea lo suficientemente caliente para mantenerse por encima de los $18^\circ\text{C}/65^\circ\text{F}$ en verano.

Observación 1.12.1.

Para ambos índices se cumplen que la suma del número de HDDs y CDDs durante un periodo, es simplemente una medida del tamaño de la desviación de la temperatura media durante el día de la temperatura base o de referencia. Ambos índices podrán tener el valor de 0, cuando la temperatura media sea exactamente igual a la de referencia y también es posible notar que estas variables no pueden tomar valores negativos dada su definición. ∇

1.12.2. Índices *Cumulative Average Temperature*

Los índices *cumulative average temperature* (CAT) se definen como la suma de la temperatura media diaria durante el periodo del contrato

Definición 1.12.7. *Índice CAT*

Se define el Índice CAT como la suma de la temperatura media diaria durante el periodo del contrato $[\tau_1, \tau_2]$, con n número de días, donde $\tau_2 = \tau_1 + n - 1$ como:

$$CAT_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_{\tau_1+i} .$$

Este tipo de índices se utilizan principalmente para localidades de Europa en verano.

1.12.3. Índices sobre eventos climáticos

Los índices de eventos se conocen como índices de días críticos, usualmente se definen como la cantidad de días durante el periodo del contrato, en los cuales ocurre cierto evento meteorológico, por ejemplo, la cantidad de días en que la temperatura supera un límite.

Un ejemplo reciente de este tipo de índices fue un índice exótico que medía el número de días congelados entre los meses de Noviembre a Marzo, donde se consideraba un día congelado cuando a las 7 de la mañana la temperatura estaba por debajo de -3.5°C , o la temperatura a las 10 de la mañana estuviera por debajo de -1.5°C , este contrato ayudó a una compañía constructora en Estados Unidos, que adquirió el contrato para diseñar un sistema de protección para los trabajadores de la compañía.

1.13. Clasificación de índices climáticos

Básicamente los índices climáticos que serán usados a lo largo del trabajo pueden clasificarse en dos tipos: *aditivos separables o no separables* y *lineales o no lineales*. Los *aditivos* son aquellos que son la suma de índices diarios, mientras que los *lineales*, están medidos diariamente como una función lineal de la variable climática. Por ejemplo:

- Los índices CAT son aditivos separables y lineales
- Los índices *Degree Day* son aditivos separables pero no lineales
- Un índice sobre algún evento, que cuente el número de días en el cuál la temperatura o lluvia superen un cierto nivel, es aditivo separable pero no lineal
- Un índice sobre algún evento, que cuente el número de periodos de n días en los cuales la temperatura máxima supere un cierto nivel preestablecido no es ni aditivo separable ni lineal.

Dichos conceptos serán importantes, ya que si un índice es separable, entonces el valor esperado del índice será la suma de los valores esperados de los índices diarios, si es lineal, entonces el valor esperado del índice será una función lineal del valor esperado de la variable climática diaria.

1.14. Estructuras de payoff

Los índices climáticos descritos en la sección anterior, están definidos de tal manera que encapsulen la variabilidad climática durante un periodo para los propósitos de un contrato climático, por tanto el contrato se establece en un sentido financiero al momento de medir el índice y este usarlo dentro de una función de *payoff*, la cuál describe precisamente quién debe pagar a quién al final del contrato. En teoría, cualquier función puede ser usada como una función de *payoff*, pero en la práctica solo se utilizan sencillas estructuras de *payoff*. Las cuáles serán utilizadas como punto de vista del comprador del contrato, el cuál se dirá, tendrá una posición larga y el vendedor del contrato, tendrá una posición corta el cuál tendrá exactamente el *payoff* opuesto. A continuación se presentan las estructuras de *payoff* más utilizadas en el mercado y sus respectivas funciones.

1.14.1. Swap

El *payoff*, ρ , de un contrato *swap* largo está dado por

$$\rho(I) = \begin{cases} -L_{\$} & \text{si } I < L_d \\ D \cdot (I - K) & \text{si } L_d \leq I \leq L_u \\ L_{\$} & \text{si } I > L_u \end{cases} ;$$

donde

- I es el valor numérico del índice del contrato
- D es el *tick size* del contrato
- K es el valor *strike*
- $L_{\$}$ es el límite del contrato (si es que hay) en términos monetarios
- L_d es el límite inferior expresado en términos del I
- L_u es el límite superior expresado en términos del I

y $L_{\$} = D \cdot (K - L_d)$ y $L_{\$} = D \cdot (L_u - K)$ Finalmente el *payoff* se puede escribir de las siguientes maneras

$$\rho(I) = \max \{-L_{\$}, \min(D \cdot (I - K), L_{\$})\} = \min \{L_{\$}, \max(D \cdot (I - K), -L_{\$})\} ;$$

éstas últimas expresiones son más fáciles de manejar para implementaciones computacionales.

La finalidad de los límites inferior L_d y superior L_u es acotar la pérdida o ganancia para alguna de las partes en juego en el contrato, ya que si las condiciones climáticas resultan ser en extremosas, provocarían que el índice climático creciera sin control y éste generará una pérdida o ganancia que pudiera no ser cubierta por el comprador del contrato. En general, $L_d = -L_u$, es decir, son iguales pero opuestos, por supuesto podría haber un contrato para el que estos difieran, pero es poco común en la práctica que esto suceda, o bien, también existen contratos para los cuales no existen límites, en cuyo caso, la estructura de *payoff*, es una función lineal del índice climático, dada por

$$\rho(I) = D \cdot (I - K).$$

La mayoría de los contratos comercializados de manera OTC son contratos con límites, mientras que los contratos en el CME no los tienen. Además de esto, la mayoría de los *swaps*, no tiene un precio, es decir, no existe una prima que el comprador deba pagar, este tipo de involucran a las contrapartes en un sentido de juego de suma cero, y la ganancia o pérdida del contrato es igual al *payoff*. Cuando el contrato se pacta, las contrapartes simplemente intercambian el contrato, y acuerdan pagar al otro de acuerdo al clima que se presente en un tiempo futuro, dependiendo de si este se comporta de una manera, sólo una parte obtendrá un beneficio mientras que el otro lo obtendrá si se comporta en el otro sentido, de esta manera, un contrato *swap* es como hacer una apuesta sobre el clima futuro. Un contrato *swap* largo, tiene la función económica de proteger al comprador contra valores altos del índice, la desventaja para éste, es que tiene que pagar al vendedor del contrato para valores bajos del índice. En este sentido, ellos intercambian el riesgo y juegan papeles simétricos. La pérdida de alguno es la ganancia del otro.

Como se describió anteriormente, los contratos *swap* no tienen prima, por lo que el valor strike podría probablemente ser establecido a un nivel para el cuál el valor esperado del *payoff* sea cercano a cero, con la posibilidad de desplazarse ligeramente para compensar uno de los riesgos que asuma una de las partes. En algunos casos, este valor *strike* será calculado como el valor esperado del índice para el contrato haciendo así que el *payoff* sea cercano a cero.

1.14.2. Opciones *call*

El *payoff*, ρ , para un contrato *call* largo está dado por

$$\rho(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I < K \\ D \cdot (I - K) & \text{si } K \leq I \leq L \\ L_{\S} & \text{si } I > L; \end{cases}$$

donde $L_{\$} = D \cdot (L - K)$, o de otra manera:

$$\rho(I) = \min \{L_{\$}, \max(D \cdot (I - K), 0)\} = \max \{0, \min(D \cdot (I - K), L_{\$})\} ;$$

para este caso, el comprador del contrato tiene la función económica de protegerse contra valores altos del índice, mismo que al inicio del contrato paga una prima al vendedor y éste al final del contrato paga al comprador el *payoff* dependiendo del valor del índice. Para valores bajos del índice claramente el *payoff* vale 0. El comprador, si es un operador de cobertura, probablemente no le importa este resultado, ya que si está usando el contrato para cubrirse de valores bajos del índice, entonces esto será bueno para el negocio. Para valores del índice por encima del *strike* el vendedor paga un monto que sea proporcional a la diferencia excedida, cuya constante de proporcionalidad es el *tick size*. Este crecimiento del *payoff* está acotado por los límites del contrato si es que los tiene.

Teniendo esto, la ganancia general para el comprador de una opción es igual al *payoff* menos la prima que haya pagado por esta.

Como se ha visto hasta ahora, las opciones *call* y los *swaps* protegen al comprador del contrato contra valores altos en el índice, la diferencia entre ellos radica en que un *call* largo involucra un pago único de una prima por adelantado, mientras que para un *swap* largo el *payoff* completo es aleatorio en dos direcciones. Es por esto, que la mayoría de las compañías prefieren cubrir su riesgo climático usando opciones más que exponerse a la posibilidad de tener que realizar un *payoff* impredecible al final de un contrato *swap*.

Finalmente, para valuar una opción *call*, es necesario determinar la prima y una vez que haya sido vendido es necesario calcular la distribución de los posibles resultados y aspectos específicos de su distribución.

1.14.3. Opciones *put*

El *payoff*, ρ , de un contrato *put* largo está dado por

$$\rho(I) = \begin{cases} L_{\$} & \text{si } I < K \\ D \cdot (K - I) & \text{si } L \leq I \leq K \\ 0 & \text{si } I > L ; \end{cases}$$

donde $L_{\$} = D \cdot (K - L)$, de nueva cuenta esto puede escribirse como

$$\rho(I) = \min \{L_{\$}, \max(D \cdot (K - I), 0)\} = \max \{0, \max(D \cdot (K - I), L_{\$})\} ;$$

En este caso, contrariamente, el producto tiene la función económica de proteger al comprador contra valores bajos del índice, es decir, para valores altos no hay *payoff* al igual

que una opción call, al inicio del contrato el vendedor recibe una prima y al final del periodo, éste paga un *payoff* al comprador, dependiendo del valor del índice y este *payoff* será proporcional a la cantidad de veces que el índice este por debajo del *strike* multiplicado por el tick size.

1.14.4. Collars

Una posición *collar* larga consiste en una combinación (portafolio) de un *call* largo y un *put* corto, usualmente con diferentes *strikes* pero el mismo límite y *tick size*. Estos tiene una estructura de *payoff* de la siguiente manera

$$\rho(I) = \begin{cases} -L_{\$} & \text{si } I < L_d \\ D \cdot (I - K_1) & \text{si } L_d \leq I < K_1 \\ 0 & \text{si } K_1 \leq I < K_2 \\ D \cdot (I - K_2) & \text{si } K_2 \leq I \leq L_u \\ L_{\$} & \text{si } I > L_u ; \end{cases}$$

donde $L_{\$} = D \cdot (L_u - K_2)$ y $L_{\$} = D \cdot (K_1 - L_d)$ o bien

$$\rho(I) = \max \{-L_{\$}, \min [D \cdot (I - K_1), \max (0, \min (D \cdot (I - K_2), L_{\$}))]\} ;$$

Y K_1 es el precio *strike* del *put* corto y K_2 es el *strike* del *call* largo y $K_1 < K_2$.

Una posición *collar* larga, proporciona protección contra valores altos del índice para valores más allá de un cierto intervalo y al igual que un contrato *swap* estos se establecen de tal forma que no tengan un costo, es decir, no es necesario pagar una prima.

1.14.5. Straddles

Una posición *straddle* larga consiste en la combinación de un *call* largo y un *put* largo con el mismo *strike*, *tick size* y límite. Una estructura *straddle* tiene el siguiente *payoff*

$$\rho(I) = \begin{cases} L_{\$} & \text{si } I < L_d \\ D \cdot (K - I) & \text{si } L_d \leq I < K \\ D \cdot (I - K) & \text{si } K \leq I \leq L_u \\ L_{\$} & \text{si } I > L_u ; \end{cases}$$

donde $L_{\$} = D \cdot (K - L_d)$ y $L_{\$} = D \cdot (L_u - K)$ o bien puede ser escrito como

$$\rho(I) = \min \{L_{\$}, \max [D(K - I), \min (D \cdot (I - K), , L_{\$})]\}.$$

Un contrato *straddle* largo cubre contra valores bajos y altos del índice y por tanto suele se más caro en términos de una prima más grande ya que el comprador de éste recibe un *payoff* para todos los valores del índice excepto cuando $I = K$.

1.14.6. *Strangles*

Un *strangle* largo, consiste en la combinación de un *call* largo y un *put* largo pero con diferentes *strikes* donde el *strike* del *put* es usualmente menor que el del *call* y su función de *payoff* está dada por

$$\rho(I) = \begin{cases} L_{\$} & \text{si } I < L_d \\ D \cdot (K_1 - I) & \text{si } L_d \leq I < K_1 \\ 0 & \text{si } K_1 \leq I < K_2 \\ D \cdot (I - K_2) & \text{si } K_2 \leq I \leq L_u \\ L_{\$} & \text{si } I > L_u ; \end{cases}$$

donde $L_{\$} = D \cdot (K_1 - L_d)$ y $L_{\$} = D \cdot (L_u - K_2)$

$$\rho(I) = \text{mín} \{L_{\$}, \text{máx} [D \cdot (K_1 - I), \text{máx} (0, \text{mín}(D \cdot (I - K_2), L_{\$}))]\} ;$$

Una posición *strangle* larga protege al comprador contra valores altos y bajos del índice, pero paga sólo cuando el índice se mueve cierta distancia. Estos contratos suelen ser un poco más baratos que los *straddles*.

1.14.7. Binarios

Una opción binaria larga, tiene una función de *payoff* de la forma

$$\rho(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I < K \\ L_{\$} & \text{si } I \geq K ; \end{cases}$$

este tipo de opciones pueden ser consideradas como un caso especial de una opción *call*, en cuyo caso si el índice I se considera continuo y tiene un *tick size* infinito, este será una opción *call*. En el caso cuando el índice I sea discreto para ciertos valores, con espacio ΔI el tick será igual a $\frac{L_{\$}}{\Delta I}$

1.14.8. *Spreads y Baskets*

Un contrato *spread* está diseñado con una función de *payoff* que paga según la diferencia climática entre dos locaciones, por ejemplo un *spread* París - Londres puede depender de un índice que sea la diferencia de HDDs entre París y Londres.

Un contrato *basket* depende de varias localidades, por ejemplo, un *basket* EUA, podría depender de las temperaturas en Nueva York, Chicago y San Francisco.

Este tipo de contratos sirven para empresas que corren riesgos en varios lugares y desean minimizar el número y costo de transacciones que harían con derivados por separado.

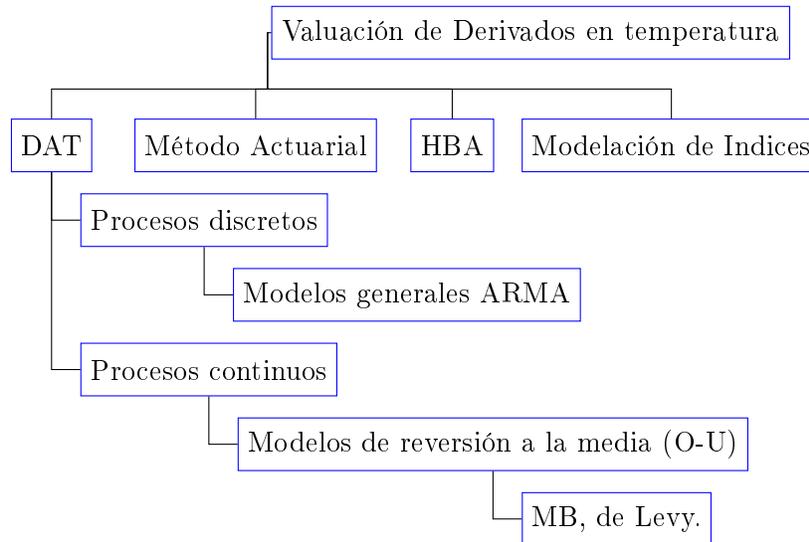


Figura 1.6: *Métodos para estimación y modelación de índices de temperatura*

1.15. Métodos de valuación en derivados climáticos

El mercado climático se ha desarrollado de manera acelerada desde sus inicios y el nivel de participantes del mercado climático también ha crecido significativamente. Sin embargo existen aún varias limitaciones de este mercado, ya que al ser un mercado incompleto no existe un método de valuación completamente aceptado por las compañías como lo es el modelo de Black & Scholes, en el caso tradicional. Además de esto muchas compañías tienen que lidiar con un riesgo espacial (distancia de la estación meteorológica al lugar de cobertura) y un riesgo base (confianza de las mediciones de la estación meteorológica) importante, los que podrían reducirse primero expandiendo la lista de compañías que pudieran ser capaces de relacionar sus pérdidas con el clima y así la lista de ciudades donde el CME comercializa estos productos crecería.

Sin embargo hasta ahora existen ya varios métodos que utilizan la mayoría de los participantes del mercado climático. El más sencillo de éstos se conoce como *Historical Burn Analysis* (HBA) el cuál es muy fácil de entender y de replicar, sin embargo, tiende a ser sesgado y tener poca precisión, por ello el valor obtenido es considerado como una primera aproximación. Por otro lado la modelación diaria de la variable climática en juego, se puede modelar su valor, tomando a consideración una considerable cantidad de observaciones pasadas o bien se puede modelar el índice del contrato. Este tipo de modelaciones se considera pueden ser de manera discreta o continua.

1.15.1. Método actuarial

Esta metodología de valuación se utiliza ampliamente en la industria aseguradora, en este método, se usan bases de datos con información meteorológica y de pronóstico con la finalidad de hallar la distribución de todos los posibles resultados del índice del contrato, mientras que los datos históricos se usan para calcular el valor esperado del *payoff*.

Este método se basa en un análisis estadístico y es poco usado en contratos cuya variable subyacente sea poco recurrente o predecible, y como este es el caso para la mayoría de los derivados climáticos, este método no se considera el más apropiado a menos que el contrato esté suscrito en eventos climáticos raros o extraños como lo son un frío o calor extremo. Más aún la estimación del valor esperado del *payoff* es en el mundo real, lo que significa que la aproximación actuarial únicamente es correcta cuando el *payoff* esperado es el mismo que en el mundo real y en el mundo de riesgo neutral.

1.15.2. *Historical Burn Analysis* (HBA)

Esta metodología de valuación es muy sencilla de implementar y calcular computacionalmente, teniendo una buena fuente de información, este método responde a la pregunta: ¿Cuánto debería pagarse ahora si se tuviera una opción similar cada año en el pasado?. Trabaja bajo la suposición de que la historia climática de n años pasados se repetirá con la misma verosimilitud. Para esto se realizan los siguientes pasos:

1. Reunir en una base de datos información histórica climática.
2. Hacer algunas correcciones a los datos, en caso de existir datos faltantes.
3. Calcular el índice del contrato (HDD,CDD,CAT, etc.).
4. Calcular el *payoff* resultante del contrato para cada año en el pasado.
5. Calcular el promedio de dichos montos.
6. Traer a valor presente dicho valor.
7. Finalmente considerar la prima de riesgo.

Concretamente, el HBA se considera como una referencia mercado, la cual da una idea de la distribución de los *payoffs* potenciales del contrato. Entonces, si el riesgo climático es calculado como la desviación estándar de los *payoff*, entonces el precio del contrato será:

$$F^{HBA}(t) = PV(t, T) \times ((\mu \pm \alpha) \times \sigma) ;$$

donde $PV(t, T)$ es el factor de descuento de la fecha de maduración T al tiempo t , μ es el *payoff* promedio histórico, σ es la desviación estándar histórica de los *payoff* y α es un

valor positivo que denota la tolerancia al riesgo.

Este método al ser el más sencillo de calcular, tiene varias desventajas, algunas de ellas son por ejemplo, conseguir la información necesaria, el método tiende a ser sesgado y de baja precisión. No se obtiene algún modelo que pueda hacer un pronóstico.

1.15.3. Modelación diaria (DAT)

Por otra parte se encuentra el método de modelación diaria, que puede pronosticar la variable sobre la que está basada el contrato. Este método consiste en:

1. Reunir en una base de datos información histórica climática.
2. Hacer algunas correcciones a los datos, en caso de ser necesario.
3. Escoger el modelo para los datos.
4. Simular el posible comportamiento climático en el futuro.
5. Calcular el valor del índice del contrato, y el valor contingente para cada patrón simulado.
6. Traer a valor presente dicho valor.

Estudios más recientes han encontrado modelos que pueden usarse para simular el comportamiento futuro de la variable meteorológica, en su mayoría la temperatura. Este modelo estimado puede usarse para encontrar el índice correspondiente y por tanto valuar varios derivados climáticos. Estos métodos pueden tener una mayor precisión que el HBA ya que puede hacerse un pronóstico usando los datos históricos disponibles. Una ventaja de encontrar un modelo que describa correctamente el clima dentro de una localidad puede servir para varios contratos que tengan la misma variable climática subyacente en el contrato, aunque estos tengan índices distintos.

A partir de estos métodos también es posible encontrar una representación de un índice climático así como su distribución. Sin embargo, no es sencillo encontrar un buen modelo que describa las mediciones diarias del clima y se corre el riesgo de tener un mal modelo y éste provoque grandes errores en el cálculo de los posibles *payoffs* para un contrato.

Estudios más recientes proponen que la modelación del DAT (Daily Average Temperature) puede hacerse mediante procesos discretos (series de tiempo) y continuos (procesos de difusión) en ambos casos se usan procesos de reversión a la media.

1.16. Recolección y corrección de la información

Uno de los principales problemas que se tienen con el tipo de información requerida para una valuación climática, es la falta de datos en una base de datos, en dicha base de datos podrían existir valores faltantes para algún día debido a que el equipo de medición pudo fallar para dicho día o bien podrían presentarse datos atípicos que pudieran ser por condiciones climáticas extremas o bien por un mal funcionamiento del instrumento y estos distorsionen la información y por tanto afecten el modelo climático.

Para el caso de los datos atípicos deberá tenerse sumo cuidado para tratarlos y analizar las posibles razones que causaron dicha observación mientras que para el caso cuando existan vacíos en la base de datos se usará el siguiente procedimiento para rellenar el espacio.

Sea T_i la temperatura media del día i que aparece faltante en la base de datos. Primero se calculará la temperatura promedio del dicho día i en particular a lo largo de los años y se denotará por $T_{ma,i}$, después se calculará el promedio de la temperatura para los 7 días anteriores y los 7 días posteriores al día i , esta medición se denotará por $T_{md,i}$, entonces el valor faltante será remplazado por el promedio de dichas cantidades anteriores:

$$T_{i,miss} = \frac{(T_{ma,i} + T_{md,i})}{2};$$

donde

$$T_{ma,i} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N T_{i,a};$$

y

$$T_{md,i} = \frac{\sum_{j=1}^7 T_{i-j} + \sum_{j=1}^7 T_{i+j}}{14};$$

dicha estadística es sencilla de implementar computacionalmente y resulta funcional.

Capítulo 2

Valuación de Derivados climáticos sobre temperatura

2.1. Introducción

En este capítulo se presentarán algunos modelos para la valuación de derivados climáticos enfocados a mediciones de temperatura, que en su mayoría se desarrollarán bajo el supuesto de una distribución normal¹.

Particularmente se presentarán las definiciones y resultados probabilísticos en respuesta a los índices CAT, HDD, CDD y PAC (*Pacific Rim*).

Cuando el mercado es *completo*, puede obtenerse una única medida de probabilidad de riesgo neutral² \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} , donde \mathbb{P} es la medida de probabilidad del mundo real. Este cambio de medida convierte un proceso estocástico (en este caso el comportamiento de la temperatura) en una martingala. Por tanto, los derivados financieros pueden valuarse bajo la medida equivalente de riesgo neutral \mathbb{Q} tomando el valor esperado del *payoff* del derivado traído a valor presente.

Un mercado completo....

Sin embargo, el mercado climático es un mercado *incompleto* en el sentido de que el subyacente climático no puede ser almacenado o comercializado, podría decirse que el pro-

¹Hasta ahora, los modelos climáticos en su mayoría suponen una distribución normal para el comportamiento aleatorio que presenta la temperatura. En algunos casos resulta ser más útil otro tipo de distribución dependiendo de los datos observados.

²Una medida de riesgo neutral o bien una medida martingala equivalente, es aquella en la cuál se hace el supuesto de que el valor presente de los activos financieros en un mercado completo, es igual a las ganancias esperadas en el futuro descontadas a una tasa libre de riesgo. Además de ello se hace la hipótesis de ausencia de arbitraje. El nombre se deriva del hecho de que el inversionista se posiciona justo en el centro del espectro de riesgo al que se expone, de tal manera que no es conservador pero tampoco muy arriesgado.

ducto subyacente es algo intangible. Más aún el mercado es relativamente *ilíquido*, esto por corresponder a un concepto difícilmente cuantificable. Es por ello que en mercados incompletos no es posible encontrar un valor o precio del derivado suponiendo condiciones libres de arbitraje. En otras palabras, existen muchas martingalas equivalentes bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q} , por tanto, sólo pueden encontrarse intervalos para el precio de eventos contingentes, los que se ajustan considerando el precio de mercado de riesgo, el cuál se analiza más adelante.

Dicho cambio de medida, del mundo real al mundo de riesgo neutral bajo una dinámica de un movimiento Browniano, puede lograrse usando el Teorema de Girsanov. Este teorema describe cómo cambia la dinámica de un proceso estocástico cuando su medida original se cambia por una medida de probabilidad equivalente. Este teorema es especialmente importante en matemáticas financieras pues indica como convertir de la medida física o real que describe la probabilidad de que un instrumento subyacente tome un valor en particular a una medida de riesgo neutral.

Para llegar al Teorema de Girsanov, se requiere presentar primero algunos elementos necesarios. De esta manera, sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, B_t un proceso browniano unidimensional $\{B_t = B(t)\}_{t \geq 0}$ (con respecto a \mathbb{P}) con filtración asociada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (siendo \mathcal{F}_t una subálgebra de \mathcal{F} a cada tiempo t) y sea $\{X_t = X(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico (real valuado) adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y una constante $T > 0$. Entonces se tiene que

$$\int_0^T X_t^2 dt < \infty \quad \text{c.s.}$$

Teniendo X_t , considérese $M_t := e^{Y_t}$ con

$$Y_t := -\frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds + \int_0^t X_s dB_s.$$

En notación diferencial se tiene

$$dY_t = -\frac{1}{2} X_t^2 dt + X_t dB_t, \quad Y_0 = 0;$$

aplicando el cálculo de Itô se obtiene

$$dM_t = e^{Y_t} dY_t + \frac{1}{2} e^{Y_t} X_t^2 dt = M_t X_t dB_t, \quad M_0 = 1,$$

o bien en su forma integral

$$M_t = 1 + \int_0^t M_s X_s dB_s$$

De lo cuál que el proceso de Itô M_t (siendo una integral estocástica) es una \mathcal{F}_t -martingala (con respecto a \mathbb{P}). En particular para cada $t \in [0, T]$ se tiene que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_0] = 1.$$

En vista de lo anterior, se introduce la medida de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) como:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_T \mathbf{I}_A]; \quad \mathbb{Q}_t(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t \mathbf{I}_A], \quad 0 < t < T.$$

Obsérvese que para $0 \leq t \leq T$, se tiene que $M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_T | \mathcal{F}_t]$ (ya que M_t es una martingala) y así para toda $A \in \mathcal{F}_t$ se tiene que

$$\mathbb{Q}_t(A) = \mathbb{Q}(A)$$

Teorema 2.1.1. *Teorema de Girsanov*

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, B_t un proceso browniano unidimensional $\{B_t = B(t)\}_{t \geq 0}$ (con respecto a \mathbb{P}) con filtración asociada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ (siendo \mathcal{F}_t una subálgebra de \mathcal{F} a cada tiempo t) y sea $\{X_t = X(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico (real valuado) adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y una constante $T > 0$. Sea

$$W_t := B_t - \int_0^t X_s ds, \quad t \in [0, T];$$

Entonces, para cualquier $T > 0$ fija, el proceso $W_{t \geq 0}, 0 \leq t \leq T$ es un movimiento Browniano- \mathcal{F}_t sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ (es decir, con respecto a \mathbb{Q} .)

Así, al usar esta transformación, el valor esperado del *payoff* de varios contratos climáticos puede ser estimado. Sin embargo, el comportamiento estocástico de la variable climática estará representado mediante una ecuación diferencial estocástica y esta deberá resolverse mediante el Lema de Itô cuando se considere un movimiento Browniano.

Tradicionalmente, los eventos contingentes financieros son valuados bajo condiciones libres de arbitraje, como lo hace el modelo de Black & Scholes, donde uno de los principales supuestos es que el comportamiento del subyacente siga una caminata aleatoria, donde la probabilidad de subida o bajada del precio del subyacente (en el caso de derivados climáticos, el índice climático), es la misma. Esta premisa, claramente no se cumple en el caso de los derivados climáticos y por tanto no es posible construir un portafolio libre de riesgo. Por ello, la metodología de Black & Scholes es inapropiada por varias razones, entre ellas, una de las principales es que los derivados climáticos tienen un *payoff* en forma asiática, es decir, acumulan valores sobre todo el periodo del contrato.

Además, el clima es completamente impredecible, en el sentido de que éste no sigue un comportamiento como el de una caminata aleatoria ³, al contrario, el clima muestra una tendencia de reversión a la media, ya que éste tiende a moverse dentro de un intervalo bien definido largo plazo. Además de esto, los derivados climáticos en muchos casos tienen un límite de pago, como medida de seguridad de las partes contratantes a diferencia de las opciones estándar de Black & Scholes.

A partir de esto, surgen dos alternativas para obtener el valor justo del instrumento. La primera aproximación, el *Historical Burn Analysis* (HBA) que se explicó en el capítulo anterior. Y el segundo, modelar el comportamiento futuro de la temperatura, en un sentido discreto o continuo.

2.2. Algunos índices climáticos

La lista de contratos en el mercado climático es extensa y está en constante crecimiento. El CME ofrece varios contratos en opciones y futuros climáticos. Los cuales son productos basados en índices orientados a clima mensual y estacional promedio en 46 ciudades en todo el mundo. En Europa los contratos climáticos durante los meses de verano están basados en el índice *Cumulative Average Temperature* (CAT). El índice CAT es la “suma” de los DATs sobre la duración del contrato. Donde la temperatura promedio o media, se calcula como el promedio simple entre las temperaturas máxima y mínima observadas durante el día. El valor del índice CAT durante el intervalo de tiempo $[\tau_1, \tau_2]$ está dado por

$$CAT = \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds ;$$

donde la temperatura es medida en grados Celsius. Los contratos CAT, tienen duración mensual o duración estacional. Los contratos de opciones y futuros, se comercializan en los meses: Abril, Mayo, Junio, Julio, Agosto, Septiembre y Octubre.

Por otra parte en Estados Unidos, Canadá y Australia, los contratos climáticos del CME están basados en los índices HDD y CDD. Donde un HDD es el número de grados que se registran por debajo de una temperatura de referencia y un CDD es el número de grados registrados por encima de una temperatura de referencia, es decir,

$$HDD = \text{máx} \{ \text{Temperatura de referencia} - \text{Temperatura promedio por día}, 0 \} ;$$

³La teoría de una caminata aleatoria explica que los cambios del precio de una acción, son independientes e idénticamente distribuidos. En otras palabras, el movimiento de mercado en días pasados no puede utilizarse para predecir el movimiento futuro de la acción, únicamente la probabilidad de subida o bajada del precio del subyacente tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

$CDD = \text{máx} \{0, \text{Temperatura promedio por día} - \text{Temperatura de referencia}\}.$

La temperatura de referencia en EU usualmente es 65°F y en Europa y Japón es de 18°C . Y los contratos de esta clase pueden realizarse en los meses de: Noviembre, Diciembre, Enero, Febrero, Marzo, Abril y Octubre.

Además, para tres ciudades de Japón, existe un derivado climático basado en el índice Pacific Rim (PAC). El cuál es el promedio simple del índice CAT sobre el periodo del contrato

$$PAC = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds ;$$

en este tipo de contratos PAC, la temperatura promedio se calcula tomando observaciones durante las 24 horas del día.

A continuación se estudia cómo se utilizan las ecuaciones diferenciales estocásticas, específicamente el proceso de difusión Ornstein-Uhlenbeck siendo éste caracterizado por revertir a la media, lo cuál resulta sumamente útil pues la temperatura es un proceso que muestra una fuerte estacionalidad. Más aún, las ecuaciones diferenciales estocásticas son adecuadas cuando se desea hacer una aproximación continua a un proceso que es discreto y además este posee un comportamiento real y suave, razón por la que son de mucha ayuda en ciencias biológicas y físicas.

2.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Cuando se analiza un sistema de variables aleatorias residuales en un sentido discreto en algunos casos es sencillo determinarlas como un ruido blanco Gaussiano, esto significa que a cada tiempo t , el proceso puede ser perturbado por un proceso independiente con distribución Gaussiana. Para el caso análogo continuo, el sistema debe satisfacer

$$\frac{dX_t}{dt} = a(X_t) + b(X_t)W_t ; \quad (2.3.1)$$

donde $W_{t \geq 0}$ es un ruido blanco Gaussiano en tiempo continuo, cuya amplitud depende del estado del sistema en función de $b(X_t)$.

Siguiendo la intuición, de manera ingenua la ecuación (2.3.1) puede escribirse en su forma integral como

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_u) du + \int_0^t b(X_u) dW_u ; \quad (2.3.2)$$

técnicamente hablando el término “ecuación diferencial estocástica” es incorrecto y uno debería referirse en vez como ecuaciones integrales estocásticas, sin embargo la expresión

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t ; \quad (2.3.3)$$

es una abreviación de (2.3.2) y es más común encontrarla en la literatura.

Así, puede interpretarse diciendo que en un pequeño periodo de tiempo Δt , el cambio en X_t está dado por $a(X_t)\Delta t$ el que se perturba por un proceso Gaussiano con media 0 y varianza $b(X_t)^2\Delta t$. A este tipo de procesos (2.3.3) se les conoce como procesos de difusión.

Este tipo de procesos tienen una solución inicial X_0 la cuál puede ser aleatoria o no, si fuera aleatoria, por ejemplo $X_0 = Z$ entonces debería ser independiente a la σ -álgebra generada por W_t y debe satisfacer que $\mathbb{E}(Z)^2 < \infty$.

Este tipo de procesos estocásticos están compuestos de dos funciones $a(\cdot, \cdot)$ y $b^2(\cdot, \cdot)$ que se conocen como coeficientes de *drift* y de *difusión* de la ecuación diferencial estocástica, respectivamente. Es importante destacar que aunque no se mencione a lo largo del texto, se supondrá que los coeficientes son medibles⁴ y son tales que

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T \sup_{|x| \leq R} (a(X_t, t) + b^2(X_t, t)) dt < \infty \right\} = 1 ;$$

para cualesquiera $T, R \in [0, \infty)$.

A continuación se presentan algunos supuestos que se harán de manera continua en este capítulo.

Suposición 2.3.1. *Condición de Global Lipschitz (GL)*

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, existe una constante $K < \infty$ tal que

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| < K|x - y| ; \quad (\text{GL})$$

Suposición 2.3.2. *Condición de Crecimiento lineal (CL)*

Para toda $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$, existe una constante $C < \infty$ tal que

$$|a(x, t) + b(x, t)| < C(1 + |x|) ; \quad (\text{CL})$$

Esta condición de crecimiento lineal controla que el comportamiento de la solución X_t no explote en un tiempo finito. Teniendo estas condiciones es posible establecer el siguiente

⁴Sean (X, \mathcal{A}) y (Y, \mathcal{B}) dos espacios medibles con \mathcal{A}, \mathcal{B} σ -álgebras. Una función $f : X \rightarrow Y$ es medible si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$

teorema.

Teorema 2.3.1. *Existencia y unicidad*

Para cualesquiera $T > 0$, $a(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot)$ funciones medibles que satisfagan las condiciones (CL) y (GL) la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T ;$$

y solución condición X_0 tiene una única solución continua, adaptada y fuerte con la propiedad de que

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T |X_t|^2 dt \right\} < \infty.$$

El teorema anterior, establece que la solución es de tipo *fuerte*, esto esencialmente es lo que asegura la unicidad del resultado, sin embargo es posible obtener soluciones *débiles* bajo otras condiciones. Por supuesto una solución *fuerte* es *débil*, pero el caso contrario no es necesariamente cierto.

2.3.1. La integral estocástica

Para introducir la idea de la integral estocástica, se revisan algunos conceptos de análisis clásico, que sirven de ayuda para el entendimiento del cálculo estocástico

Definición 2.3.1.

Dadas dos funciones continuas f y g como elementos de $\mathcal{L}^2[0, T]$, tomando una partición de $[0, T]$ en subintervalos de tamaño Δt y tomando límite se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(u)dg(u) &:= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{T/\Delta t - 1} f(n\Delta t)(g((n+1)\Delta t) - g(n\Delta t)) \\ &= \int_0^T f(u)g'(u)du ; \end{aligned}$$

Este límite se conoce como integral de Riemann Stieltjes de f con respecto a g .

Observación 2.3.1.

Los espacios $\mathcal{L}^p(\mu)$ se definen como espacios de funciones $f : X \rightarrow C$ medibles y tales que

$|f|^p$ es integrable. En ese caso, la definición anterior, indica un espacio vectorial normado, cuyos elementos son funciones que son doblemente integrables y medibles. ∇

Justo como puede interpretarse la integral de Riemann como el área bajo la curva, si f y g' son no negativas, la integral de Stieltjes acepta la interpretación de volumen dentro de un cuerpo. Donde el ancho del cuerpo en un punto t está dado por $g'(t)$ y $f(t)$ puede interpretarse como la altura de este. Si f y g' toman valores negativos, entonces puede representarse el cuerpo como la diferencia entre dos funciones no negativas y después recuperar la interpretación de esta como *volumen*. Nótese que cuando $g(t) = t$, se tiene la integral de Riemann.

Las integrales de tipo Stieltjes es común encontrarlas en el área de probabilidad, por ejemplo, si $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X , entonces

$$\mathbb{E}(g_X(x)) = \int g_X(x) dF_X(x);$$

idealmente sería mejor definir la integral de Stieltjes para el caso cuando $g = W$, con W un movimiento Browniano. Sin embargo, una trayectoria finita de W es no diferenciable en ningún punto, con probabilidad 1. Esto hace que la interpretación de dW_t sea muy complicada y la solución a este problema es reinterpretar el límite en la Definición 2.3.1 como un límite en media cuadrática.

Definición 2.3.2.

Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ converge a X en media cuadrática si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(X_n - X)^2 \right] = 0.$$

Entonces es posible introducir la integral de Itô de un proceso con respecto a un movimiento Browniano como el límite en media cuadrática de la integral de Riemann- Stieltjes. Es decir:

Definición 2.3.3.

La integral de Itô de un proceso X de 0 a T con respecto a un movimiento Browniano W se define como

$$\int_0^T X_u dW_u := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N X_{n\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}); \quad (2.3.4)$$

donde $N = T/\Delta t - 1$ y *l.i.m* denota el límite en media cuadrática.

Para que el lado derecho de (2.3.4) converja debe cumplirse que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{n=0}^N X_{n\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) \right)^2 \right] < \infty;$$

expandiendo el cuadrado es posible ver que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{n=0}^N X_{n\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t} X_{m\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) (W_{(m+1)\Delta t} - W_{m\Delta t})]; \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

es necesario que X_{t_1} sea independiente del incremento Browniano $W_{t_2} - W_{t_1}$ siempre y cuando $t_2 > t_1$, entonces asumiendo que $m > n$ se sigue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [X_{n\Delta t} X_{m\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) (W_{(m+1)\Delta t} - W_{m\Delta t})] \\ &= \mathbb{E} [X_{n\Delta t} X_{m\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})] \mathbb{E} [(W_{(m+1)\Delta t} - W_{m\Delta t})] \\ &= 0; \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

esto se cumple de manera similar cuando $m < n$, entonces la ecuación anterior indica que la mayoría de los términos en (2.3.5) son 0. Usando la propiedad de independencia del movimiento Browniano es posible simplificar (2.3.5) como

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t} X_{m\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) (W_{(m+1)\Delta t} - W_{m\Delta t})] \\ &= \sum_{n=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t}^2 (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})^2] \\ &= \sum_{n=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t}^2] \mathbb{E} [(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})^2] \\ &= \sum_{n=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t}^2] \Delta t; \end{aligned}$$

intercambiando el orden de la esperanza y el límite se tiene

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t}^2] \Delta t = \mathbb{E} \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N X_{n\Delta t}^2 \Delta t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_u^2 du \right];$$

En otras palabras, para que el límite en media cuadrática tenga sentido, el integrando X (posiblemente aleatorio) debe ser un elemento de $\mathcal{L}^2[0, T]$ con la propiedad de que X_{t_1} sea siempre independiente de $W_{t_2} - W_{t_1}$ cuando $t_2 > t_1$, si se cumplen estas condiciones se dice que X es un proceso no anticipado e integrable en media cuadrática.

La propiedad de un proceso no anticipado en el integrando garantiza que la esperanza de la integral de Itô sea 0. Es decir, para cualquier elección de Δt

$$\sum_{n=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t} (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})] = \sum_{n=0}^N \mathbb{E} [X_{n\Delta t}] \mathbb{E} [W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}] = 0.$$

2.3.2. Propiedades de la integral estocástica

Teniendo la definición de la integral de Itô de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ adaptado a la filtración creada por un movimiento Browniano tal que $\int_0^T \mathbb{E} (X_s)^2 ds < \infty$ se tienen las siguientes propiedades de dicha integral, sin pruebas, las cuáles serán utilizadas en varias ocasiones a lo largo de este trabajo.

- Si X_t es Itô integrable entonces

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T X_s dW_s \right) = 0;$$

y

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dB_s \right]^2 = \int_0^t \mathbb{E} [X_s^2] ds \quad (\text{Isometría de Itô}).$$

- Linealidad: Si X_t y Y_t son dos procesos Itô integrables y $a, b \in \mathbb{R}$ dos constantes, entonces:

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dW_t = a \int_0^T X_t dW_t + b \int_0^T Y_t dW_t.$$

- De la propiedad de linealidad anterior se tiene que

$$\int_0^T a dW_t = a \int_0^T dW_t = aW_T.$$

2.3.3. Lema de Itô

Recordando que la varianza del incremento de un movimiento Browniano estándar $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ satisface $\text{Var}[\Delta W_t] = \Delta t$, es posible observar que la desviación estándar de este es $\sqrt{\Delta t}$, por tanto el tamaño usual del incremento Browniano debe seguir dicho orden, este hecho es justo lo que le da al cálculo estocástico un sentido completamente

diferente para su análisis. Supóngase que se tiene una función continua G y un proceso de difusión X . Por el teorema de Taylor se tiene que

$$G(X_{t+\Delta t}) = G(X_t) + G'(X_t)\Delta X_t + \frac{1}{2}G''(X_t)\Delta X_t^2 + \dots ; \quad (2.3.7)$$

donde $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$. Si X es una función continua, es posible descartar los términos después de los dos primeros del lado derecho de (2.3.7) y se puede esperar una buena aproximación de $G(X_{t+\Delta t})$ para valores pequeños de Δt . Sin embargo, como ΔW_t , es de orden $\sqrt{\Delta t}$ se tiene

$$\begin{aligned} \Delta X_t^2 &= (X_{t+\Delta t} - X_t)^2 \\ &= \left(\int_t^{t+\Delta t} a(X_u)du + \int_t^{t+\Delta t} b(X_u)dW_u \right)^2 \\ &\approx (a(X_t)\Delta t + b(X_t)\Delta W_t)^2 \\ &= a^2(X_t)\Delta t^2 + 2a(X_t)b(X_t)\Delta t\Delta W_t + b^2(X_t)\Delta W_t^2 ; \end{aligned}$$

donde $b^2(X_t)\Delta W_t^2$ es de orden Δt , de hecho

$$\mathbb{E}[\Delta W_t^2] = \Delta t ;$$

y

$$\text{Var}[\Delta W_t^2] = 2\Delta t^2 ;$$

por ello la varianza de ΔW_t^2 es realmente pequeña para valores pequeños de Δt . Esto sugiere que mediante $\Delta t \rightarrow 0$, los valores que toma ΔW_t^2 se acercan aún más a los de Δt con alta probabilidad, usando esta heurística para obtener una nueva estimación de $G(X_{t+\Delta t})$ se tiene:

$$\begin{aligned} G(X_{t+\Delta t}) &\approx G(X_t) + G'(X_t)\Delta X_t + \frac{1}{2}G''(X_t)b^2\Delta W_t^2 \\ &\approx G(X_t) + G'(X_t)(a(X_t)\Delta t + b(X_t)\Delta W_t) + \frac{1}{2}G''(X_t)b^2\Delta t . \end{aligned}$$

en media cuadrática.

Lo que se ha hecho hasta el momento es despreciar todos los términos de un orden mayor que Δt en (2.3.7), si se reordenan los términos restantes y se toma el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene que

$$dG(X_t) = \left(G'(X_t)a(X_t) + \frac{1}{2}G''(X_t)b^2(X_t) \right) dt + G'(X_t)b(X_t)dW_t ;$$

o en su forma integral

$$G(X_t) = G(X_0) + \int_0^t \left(G'(X_u)a(X_u) + \frac{1}{2}G''(X_u)b^2(X_u) \right) du + \int_0^t G'(X_u)b(X_u)dW_u ;$$

este resultado se conoce como *lema de Itô*.

Una vez que se introdujo a grandes rasgos la teoría de cálculo estocástico de Itô se usará un resultado análogo en secciones posteriores con la finalidad de encontrar solución a procesos de difusión sobre temperatura.

2.4. Resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas sobre temperatura

En las secciones anteriores como se mencionó, la temperatura sigue un comportamiento de reversión a la media, en el sentido de que la temperatura no puede desviarse de su media en el corto plazo. Por tanto, la estructura estocástica más apropiada que describe una dinámica similar es el proceso de Ornstein- Uhlenbeck en su forma general

$$dT_t = dS(t) + \kappa(t) (T_t - S(t)) dt + \sigma(t)dB_t ;$$

que será denotado por O-U.

Para esto es necesario resolver la ecuación diferencial estocástica usando el Lema de Itô.

Lema 2.4.1. Lema de Itô

Sea x una variable que sigue un proceso de Itô

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz ;$$

donde dz es un proceso de Wiener. Y la variable x tiene coeficiente de *drift* a y varianza b^2 . Entonces el proceso $G(x, t)$ sigue también un proceso de Itô

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz ; \quad (2.4.1)$$

con coeficiente de *drift*

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) ;$$

y varianza

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} b \right)^2 ;$$

de aquí, que la siguiente proposición se cumple:

Proposición 2.4.1.

Si el DAT sigue un proceso de reversión a la media O-U con velocidad de reversión a la media variante en el tiempo y media y varianza estacionarias:

$$dT_t = dS(t) + \kappa(t)(T_t - S(t))dt + \sigma(t)dB_t; \quad (2.4.2)$$

entonces una solución está dada por:

$$T_t = S(t) + e^{\int_0^t \kappa(u)du}(T_0 - S(0)) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dB_s;$$

donde T_t es la temperatura al tiempo t , $\kappa(t)$ es la velocidad de reversión a la media dependiente del tiempo, $S(t)$ es una función determinista que modela la media histórica en el momento t y $\sigma(t)$ es la volatilidad diaria de las variaciones de temperatura y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es el proceso Browniano de los residuales.

Demostración: Para simplificar la ecuación diferencial estocástica, sea $\tilde{T}_t = T_t - S(t)$ (operación en donde se supone fijo $S(t)$), entonces la ecuación (2.4.2) se reescribe de la siguiente manera

$$d\tilde{T}_t = \kappa(t)\tilde{T}_t dt + \sigma(t)dB_t;$$

para resolver la ecuación diferencial estocástica, la transformación

$$G(\tilde{T}_t) = e^{-\int_0^t \kappa(u)du} \tilde{T}_t,$$

resulta conveniente.

Nótese que ambos procesos satisfacen la misma condición inicial

$$\tilde{T}_0 = G(\tilde{T}_0),$$

así, para aplicar el lema de Itô es necesario calcular las primeras derivadas parciales de G , donde

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\kappa(t)e^{-\int_0^t \kappa(u)du} \tilde{T}_t,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tilde{T}} = e^{-\int_0^t \kappa(u)du},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tilde{T}^2} = 0,$$

los coeficientes de la ecuación diferencial están dados por

$$\kappa(t)\tilde{T}_t, \sigma(t),$$

de esta manera se tiene por (2.4.1)

$$dG(\tilde{T}_t) = \left(\kappa(t)\tilde{T}_t e^{-\int_0^t \kappa(u)du} - \kappa(t)\tilde{T}_t e^{-\int_0^t \kappa(u)du} \right) dt + \sigma(t)e^{-\int_0^t \kappa(u)du} dB_t ,$$

simplificando esta expresión se obtiene entonces que

$$dG(\tilde{T}_t) = \sigma(t)e^{-\int_0^t \kappa(u)du} dB_t ,$$

integrando la ecuación anterior sobre el intervalo $[0, t]$, se tiene que

$$G(\tilde{T}_t) - G(\tilde{T}_0) = \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dB_s ,$$

sustituyendo G , se tiene entonces que

$$e^{-\int_0^t \kappa(u)du} \tilde{T}_t - \tilde{T}_0 = \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dB_s ,$$

reacomodando términos se tiene que

$$\tilde{T}_t = e^{\int_0^t \kappa(u)du} \tilde{T}_0 + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dB_s ,$$

cómo $\tilde{T}_t = T_t - S(t)$, se obtiene

$$T_t - S(t) = e^{\int_0^t \kappa(u)du} (T_0 - S(0)) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dB_s ,$$

finalmente se obtiene la solución a la proposición

$$T_t = S(t) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} (T_0 - S(0)) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dB_s .$$

□

Nótese que para este caso se supone que el proceso que siguen los residuales del modelo de temperatura sigue un movimiento Browniano B_t . Como se verá más adelante este resultado será usado directamente para encontrar los precios teóricos de los derivados climáticos suscritos en los índices CAT, HDD, CDD y PAC.

2.5. Valuación bajo la suposición de normalidad

En esta sección, se presentan fórmulas de valuación de derivados climáticos sobre algunos índices climáticos, bajo el supuesto de una distribución Gaussiana para el proceso de residuales. Particularmente, se encontrarán las fórmulas de valuación de futuros y opciones CAT, HDD, CDD y PAC.

2.5.1. Opciones y futuros CAT y PAC

El objetivo de esta sección es encontrar una expresión para el valor futuro de un contrato CAT. Sin embargo, al tratar con un mercado incompleto, existen una gran cantidad de medidas de riesgo neutral y a su vez al escoger una de ellas, la simulación del proceso determinará un conjunto de soluciones acotadas en un intervalo, por lo que no existe una solución libre de arbitraje. Con la intención de encontrar una fórmula de valuación, primero se encontrará una medida de probabilidad equivalente, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ que sea de riesgo neutral, para la que todos los activos serán martingalas después de haberlas llevado a valor presente. Así entonces, si \mathbb{Q} es una medida de riesgo neutral y r es la tasa de interés constante durante el periodo del contrato, entonces el precio libre de arbitraje de un contrato CAT al tiempo $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ está dado por

$$e^{-r(\tau_2-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_t dt - F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t \right] = 0 ;$$

como F_{CAT} es \mathcal{F}_t -adaptado, el precio futuro del CAT sería

$$F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_t dt | \mathcal{F}_t \right] ; \quad (2.5.1)$$

de esta manera, es pertinente usar el teorema de Girsanov, así bajo la medida equivalente \mathbb{Q} tenemos

$$W_t = B_t - \int_0^t \theta(u) du ;$$

o equivalentemente,

$$dW_t = dB_t - \theta(t) dt ; \quad (2.5.2)$$

por tanto, combinando las ecuaciones (2.4.2) y (2.5.2) el proceso estocástico que describe el comportamiento de la temperatura bajo la medida de probabilidad \mathbb{Q}^θ es

$$dT_t = dS(t) + (\kappa(t)(T_t - S(t)) + \sigma(t)\theta(t)) dt + \sigma(t)dW_t ;$$

donde $\theta(t)$ es una función medible, acotada y con valores reales que denotará el precio de riesgo de mercado, que podrá ser calculado de los datos históricos, precisamente, $\theta(t)$ puede ser calculado observando el precio de mercado de los contratos pasados. Así, este precio de mercado del riesgo ajustará el precio del derivado que arroje el modelo a valor de mercado.

Proposición 2.5.1. *Si el DAT sigue un proceso de reversión a la media O-U, con velocidad de reversión a la media variante en el tiempo, media y varianza estacionarias, bajo la medida equivalente \mathbb{Q}*

$$dT_t = dS(t) + (\kappa(t)(T_t - S(t)) + \sigma(t)\theta(t)) dt + \sigma(t)dW_t ; \quad (2.5.3)$$

entonces puede encontrarse una solución explícita usando la fórmula de Itô y ésta está dada por:

$$\begin{aligned} T_t = & S(t) + e^{\int_0^t \kappa(u) du} (T_0 - S(0)) + e^{\int_0^t \kappa(u) du} \int_0^t \sigma(s)\theta(s) e^{-\int_0^s \kappa(u) du} ds \\ & + e^{\int_0^t \kappa(u) du} \int_0^t \sigma(s) e^{-\int_0^s \kappa(u) du} dW_s ; \end{aligned}$$

Demostración: De la misma manera que la Proposición 2.4.1 para simplificar la ecuación diferencial estocástica, sea $\tilde{T}_t = T_t - S(t)$, entonces la ecuación (2.5.3) queda de la siguiente manera

$$d\tilde{T}_t = \left(\kappa(t)\tilde{T}_t + \sigma(t)\theta(t) \right) dt + \sigma(t)dW_t ;$$

para resolver la ecuación diferencial estocástica, la transformación

$$G(\tilde{T}_t) = e^{-\int_0^t \kappa(u) du} \tilde{T}_t ,$$

resulta conveniente.

Nótese que ambos procesos satisfacen la misma condición inicial

$$\tilde{T}_0 = G(\tilde{T}_0).$$

Así, para aplicar el lema de Itô es necesario calcular las primeras derivadas parciales de G, donde

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\kappa(t) e^{-\int_0^t \kappa(u) du} \tilde{T}_t ,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tilde{T}} = e^{-\int_0^t \kappa(u) du} ,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tilde{T}^2} = 0 ,$$

los coeficientes de la ecuación diferencial están dados por

$$\kappa(t)\tilde{T}_t + \sigma(t)\theta(t), \sigma(t) ,$$

de esta manera se tiene por (2.4.1)

$$dG(\tilde{T}_t) = \left(\left(\kappa(t)\tilde{T}_t + \sigma(t)\theta(t) \right) e^{-\int_0^t \kappa(u) du} - \kappa(t)\tilde{T}_t e^{-\int_0^t \kappa(u) du} \right) dt + \sigma(t) e^{-\int_0^t \kappa(u) du} dW_t ,$$

simplificando esta expresión se obtiene

$$dG(\tilde{T}_t) = \left(\sigma(t)\theta(t)e^{-\int_0^t \kappa(u)du} \right) dt + \sigma(t)e^{-\int_0^t \kappa(u)du} dW_t ,$$

integrando la ecuación anterior sobre el intervalo $[0, t]$, se tiene que

$$G(\tilde{T}_t) - G(\tilde{T}_0) = \int_0^t \sigma(s)\theta(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} ds + \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dW_s ,$$

sustituyendo G , se tiene entonces que

$$e^{-\int_0^t \kappa(u)du} \tilde{T}_t - \tilde{T}_0 = \int_0^t \sigma(s)\theta(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} ds + \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dW_s ,$$

reacomodando términos se tiene que

$$\tilde{T}_t = e^{\int_0^t \kappa(u)du} \tilde{T}_0 + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)\theta(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} ds + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dW_s ,$$

cómo $\tilde{T}_t = T_t - S(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} T_t - S(t) &= e^{\int_0^t \kappa(u)du} (T_0 - S(0)) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)\theta(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} ds \\ &\quad + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dW_s , \end{aligned}$$

finalmente se obtiene la solución a la proposición

$$\begin{aligned} T_t &= S(t) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} (T_0 - S(0)) + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)\theta(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} ds \\ &\quad + e^{\int_0^t \kappa(u)du} \int_0^t \sigma(s)e^{-\int_0^s \kappa(u)du} dW_s ; \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

como se quería demostrar. □

Observación 2.5.1.

Si \mathbb{Q} es una clase de medidas de probabilidad de riesgo neutral equivalente a \mathbb{P} , $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, y \mathbb{Q}^θ pertenece a la clase de dichas probabilidades definidas por el teorema de Girsanov, parametrizada por θ , entonces se tomará para valuaciones de riesgo neutral y para simplificar notación dicha medida será referida como \mathbb{Q} en todo momento. ▽

Si se reemplaza la expresión que se obtuvo en (2.5.4) en (2.5.1) se puede encontrar el precio futuro de un contrato sobre el índice CAT al tiempo t , donde $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$, mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2.

El precio futuro de un contrato CAT, para $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ está dado por

$$F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds | \mathcal{F}_t \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(s) ds + I_1 + I_2 ; \quad (2.5.5)$$

donde

$$I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t ds ;$$

y

$$I_2 = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \left(\int_t^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_0^s \kappa(z) dz} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^0 \kappa(z) dz} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^0 \kappa(z) dz} ds du \right. \\ \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_u^{\tau_2} e^{\int_0^s \kappa(z) dz} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^0 \kappa(z) dz} ds du \right) .$$

Demostración: De las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.4) y de la definición de \tilde{T}_t se tiene que

$$F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds | \mathcal{F}_t \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(s) ds + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{T}_s ds | \mathcal{F}_t \right] ;$$

de la isometría de Itô, y el hecho de que T_t es una función acotada para $T_s, 0 \leq s \leq t$, entonces $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{T}_s | \mathcal{F}_t \right] ds$ converge y es posible intercambiar el orden entre la esperanza y la integral usando el Teorema de Fubini, de tal forma que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{T}_s ds | \mathcal{F}_t \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\tilde{T}_s | \mathcal{F}_t \right] ds ; \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t ds + e^{\int_t^s \kappa(u) du} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_t^s \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} du ds = I_1 + I_2 ;$$

De aquí que

$$I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t ds ;$$

y

$$I_2 = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} du ds \\ = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{I}_{[t,s]}(u) \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} du ds ;$$

donde $\mathbb{I}_{[t,s]}$ es cero fuera del intervalo $[t, s]$. Entonces cambiando el orden de las integrales

$$I_2 = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \int_t^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{I}_{[t,s]}(u) \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^t \kappa(z) dz} ds du ;$$

separando la integral exterior en dos partes se tiene

$$I_2 = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \left(\int_t^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{I}_{[t,s]}(u) \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} ds du \right. \\ \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{I}_{[t,s]}(u) \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} ds du \right) ;$$

donde la segunda parte de la expresión es cero cuando $s > u$. Por tanto, cambiando los límites de la integral interior se obtiene

$$I_2 = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \left(\int_t^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} ds du + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_u^{\tau_2} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} ds du \right) ;$$

o equivalentemente

$$I_2 = e^{\int_t^s \kappa(u) du} \left(\int_t^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_0^s \kappa(z) dz} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^0 \kappa(z) dz} ds du \right. \\ \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_u^{\tau_2} e^{\int_0^s \kappa(z) dz} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_u^0 \kappa(z) dz} ds du \right).$$

□

La proposición anterior, da una expresión para el precio futuro de un CAT al tiempo $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$, es decir, el precio antes de que comience periodo del contrato. Por tanto (2.5.5) es una valuación fuera del periodo. Para el caso cuando el contrato ya estuviera iniciado es posible modificar la fórmula mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.5.3.

El precio futuro de un CAT para $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ está dado por

$$F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^t T_s ds + F_{\text{CAT}}(t, t, \tau_2).$$

Demostración: Por la Proposición 2.5.2 se tiene que

$$F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^t T_s ds + \int_t^{\tau_2} T_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = \int_{\tau_1}^t T_s ds + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\tau_2} T_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = \int_{\tau_1}^t T_s ds + F_{\text{CAT}}(t, t, \tau_2) ;$$

nótese que el primer término ya se conoce al tiempo t ya que se refiere a las temperaturas pasadas, mientras que el segundo es estocástico.

□

Por consiguiente, el comportamiento del precio futuro de un CAT, bajo la medida \mathbb{Q} está dado por la siguiente proposición.

Proposición 2.5.4.

El comportamiento de $F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2)$ bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{Q} es

$$dF_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \Sigma_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2)dW_t ;$$

donde

$$\Sigma_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \sigma(t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} ds.$$

Demostración: Como $F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2)$ es una martingala bajo \mathbb{Q} , entonces la proposición se encuentra después de una aplicación directa de la fórmula de Itô. Poniendo atención únicamente en la parte estocástica dW_t pues el coeficiente de *drift*, es cero bajo \mathbb{Q} , se tiene que

$$\frac{dF_{\text{CAT}}}{dT} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} ;$$

por tanto

$$dF_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \sigma(t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} ds dW_t.$$

□

Usando esta proposición es posible estimar el precio de una opción *call* sobre un CAT.

Proposición 2.5.5.

El precio de una opción *call* a tiempo $t \leq \tau$, sobre un futuro CAT con precio strike K y tiempo de ejercicio $\tau \leq \tau_1$ es

$$C_{\text{CAT}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(\tau-t)} \left\{ (F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K) \Phi(d(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) + \Phi'(d(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) \sqrt{\int_t^\tau \Sigma_{\text{CAT}}^2(s, \tau_1, \tau_2) ds} \right\};$$

donde

$$d(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = \frac{F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K}{\sqrt{\Sigma_{t,\tau}^2}};$$

y

$$\Sigma_{t,\tau}^2 = \int_t^\tau \Sigma_{\text{CAT}}^2(s, \tau_1, \tau_2) ds;$$

y Φ es la función de distribución normal estándar.

Demostración: El precio de una opción *call* por definición está dado por

$$C_{\text{CAT}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(\tau-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{F_{\text{CAT}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0\} | \mathcal{F}_t];$$

de la Proposición 2.5.4 se tiene que el comportamiento del precio futuro bajo \mathbb{Q} puede escribirse como

$$dF_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) = \Sigma_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) dW_t;$$

integrando sobre $[t, \tau]$ se tiene

$$F_{\text{CAT}}(\tau, \tau_1, \tau_2) = F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) + \int_t^\tau \Sigma_{\text{CAT}}(s, \tau_1, \tau_2) dW_s;$$

de lo cual se tiene que $F_{\text{CAT}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K$ condicionado a $F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K$, sigue una distribución normal con media $F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K$ y varianza

$$\int_t^\tau \Sigma_{\text{CAT}}^2(s, \tau_1, \tau_2) ds.$$

Se puede demostrar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{F_{\text{CAT}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0\} | \mathcal{F}_t] = \sqrt{\Sigma_{t,\tau}^2} \Psi \left(\frac{F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K}{\sqrt{\Sigma_{t,\tau}^2}} \right);$$

donde $\Psi(x) = x\Phi(x) + \Phi'(x)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{máx}\{F_{\text{CAT}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0\} | \mathcal{F}_t] &= \sqrt{\Sigma_{t,\tau}^2} \left\{ \frac{F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K}{\sqrt{\Sigma_{t,\tau}^2}} \Phi(d(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) \right. \\ &\quad \left. + \Phi'(d(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) \right\} \\ &= (F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) - K) \Phi(d(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) \\ &\quad + \Phi'(d(t, \tau, \tau_1, \tau_2)) \sqrt{\Sigma_{t,\tau}^2}; \end{aligned}$$

descontando a valor presente con la tasa libre de riesgo r se obtiene el resultado. □

Como se mencionó en secciones anteriores, el índice PAC es el promedio simple del índice CAT sobre el periodo del contrato, por ello, el precio futuro libre de arbitraje de un contrato PAC al tiempo $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ está dado por

$$e^{-r(\tau_2-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} T_{\tau} d\tau - F_{\text{PAC}}(\tau, \tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_t \right] = 0;$$

y como F_{PAC} es \mathcal{F}_t -adaptado, el precio futuro de un contrato PAC está dado por

$$F_{\text{PAC}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds | \mathcal{F}_t \right]; \quad (2.5.6)$$

pero observando (2.5.1) y (2.5.6), es posible concluir que

$$F_{\text{PAC}}(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2);$$

y por tanto, de manera similar el precio de una opción *call* sobre un futuro PAC está dado por

$$C_{\text{PAC}}(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} C_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2).$$

2.5.2. Opciones y Futuros HDD y CDD

A continuación, se presentarán las fórmulas de valuación para contratos CDD y HDD, donde los índices CDD y HDD sobre el periodo $[\tau_1, \tau_2]$ están dados por

$$\begin{aligned} HDD_{(\tau_1, \tau_2)} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{máx}\{c - T_s, 0\} ds; \\ CDD_{(\tau_1, \tau_2)} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{máx}\{T_s - c, 0\} ds; \end{aligned}$$

con c constante.

Es posible ver que las ecuaciones de valuación serán similares para ambos índices. De esta manera, si \mathbb{Q} es la medida de probabilidad de riesgo neutral y r es la tasa de interés compuesto, constante durante el periodo, entonces el precio futuro de un contrato HDD libre de arbitraje, al tiempo $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ está dado por

$$e^{-r(\tau_2-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max(c - T_s) ds - F_{\text{HDD}}(\tau, \tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_t \right] = 0,$$

de nueva cuenta, al ser F_{HDD} \mathcal{F}_t -adaptado, el precio futuro de un HDD es

$$F_{\text{HDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max\{c - T_s, 0\} ds \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.5.7)$$

Análogamente, el precio de un contrato CDD al tiempo $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ está dado por

$$F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max\{T_s - c, 0\} ds \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.5.8)$$

Considerando las ecuaciones (2.5.1), (2.5.7) y (2.5.8) se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.5.6. *Paridad HDD-CDD*

Los precios de los contratos CAT, HDD y CDD están relacionados de la siguiente manera

$$F_{\text{HDD}}(t, \tau_1, \tau_2) - F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = c(\tau_2 - \tau_1) - F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2).$$

Demostración: Es posible ver que

$$\max\{c - T_s, 0\} = c - T_s + \max\{T_s - c, 0\};$$

Por tanto, reemplazando en la expresión anterior por (2.5.7) se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\text{HDD}}(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max\{c - T_s, 0\} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} (c - T_s + \max\{T_s - c, 0\}) ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} cds \mid \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max\{T_s - c, 0\} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= c(\tau_2 - \tau_1) - F_{\text{CAT}}(t, \tau_1, \tau_2) + F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2); \end{aligned}$$

despejando se obtiene el resultado. □

Esta proposición indica que las fórmulas de valuación de futuros de índices CDD y HDD están relacionadas, por ello se enfocará la atención únicamente a encontrar fórmulas de los índices CDD.

Proposición 2.5.7.

El precio futuro de un CDD para $0 \leq t \leq \tau_1 \leq \tau_2$ está dado por

$$\begin{aligned} F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max \{T_s - c, 0\} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu(t, s) \Psi \left(\frac{m(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t)}{\nu(t, s)} \right) ds ; \end{aligned}$$

donde

$$m(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t) = S_s + e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t + e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \int_t^s \sigma(u) \theta(u) e^{-\int_t^s \kappa(z) dz} du - c ;$$

y

$$\nu^2(t, s) = e^{2 \int_t^s \kappa(z) dz} \int_t^s \sigma^2(u) e^{-2 \int_t^s \kappa(z) dz} du ;$$

donde $\Psi(x) = x\Phi(x) + \Phi'(x)$ y Φ es la función de distribución normal estándar.

Demostración: De (2.5.7) y (2.5.4) se tiene que

$$F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max \{T_s - c\} ds \mid \mathcal{F}_t \right] ;$$

y usando la isometría de Itô, se puede intercambiar la esperanza y la integral de tal manera que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \max \{T_s - c\} ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\max \{T_s - c\} \mid \mathcal{F}_t] ds ;$$

donde T_s bajo \mathbb{Q} se distribuye normal con media y varianza:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [T_s \mid \mathcal{F}_t] = S_s + e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t + e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \int_t^s \sigma(u) \theta(u) e^{-\int_t^s \kappa(z) dz} du$$

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}} [T_s | \mathcal{F}_t] = e^{2 \int_t^s \kappa(z) dz} \int_t^s \sigma^2(u) e^{-2 \int_t^s \kappa(z) dz} du ;$$

respectivamente. Por tanto, $T_s - c$ tiene una distribución normal, con media $m(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t)$ y varianza $\nu^2(t, s)$ y la proposición se sigue de las propiedades de una distribución normal.

□

En la proposición anterior, de nueva cuenta, se obtiene el precio futuro del contrato CDD antes de que comience el periodo $t \leq \tau_1 \leq \tau_2$, por ello la proposición siguiente enuncia una expresión para el precio de un contrato ya iniciado.

Proposición 2.5.8.

El precio futuro de un CDD para $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ está dado por

$$F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^t \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds + F_{\text{CDD}}(t, t, \tau_2).$$

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{\tau_1}^t \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds + \int_t^{\tau_2} \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_{\tau_1}^t \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\tau_2} \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_{\tau_1}^t \text{máx} \{T_s - c, 0\} ds + F_{\text{CDD}}(t, t, \tau_2) \end{aligned}$$

Nótese que el primer término es conocido al tiempo t al referirse a temperaturas pasadas, mientras que el segundo es estocástico.

□

De manera similar a los contratos CAT, el comportamiento de los precios futuros de un CDD bajo \mathbb{Q} está dado por la siguiente proposición.

Proposición 2.5.9.

El comportamiento de $F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2)$ para $0 \leq t \leq \tau_1$ bajo \mathbb{Q} , está dado por

$$dF_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \Sigma_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) dW_t ;$$

donde

$$\Sigma_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \sigma(t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \Phi \left(\frac{m \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right)}{\nu(t, s)} \right) ds ;$$

y Φ es la distribución normal estándar.

Demostración: Como $F_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2)$ es una martingala bajo \mathbb{Q} , entonces aplicando la fórmula de Itô es posible ver que el término de *drift* es cero, así, poniendo atención únicamente a la parte estocástica del proceso y notando que $\nu(t, s)$ no depende de T_t y que

$$m' \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right) = \frac{dm \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right)}{dT} = e^{\int_t^s \kappa(z) dz} ;$$

y sustituyendo $\Psi'(x) = \Phi(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\text{CDD}}}{dT} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu(t, s) \Psi \left(\frac{m \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right)}{\nu(t, s)} \right) ds \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu(t, s) \Psi' \left(\frac{m \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right)}{\nu(t, s)} \right) \frac{m' \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right) \nu(t, s)}{\nu^2(t, s)} ds \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \Phi \left(\frac{m \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right)}{\nu(t, s)} \right) ds ; \end{aligned}$$

y por tanto se tiene

$$dF_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2) = \sigma(t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \Phi \left(\frac{m \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t \right)}{\nu(t, s)} \right) ds dW_t.$$

En la Proposición 2.5.9 el término $\Sigma_{\text{CDD}}(t, \tau_1, \tau_2)$ representa la volatilidad en la estructura de los futuros CDD. Por esto, el precio de una opción *call* sobre un futuro CDD puede

encontrarse de acuerdo a la siguiente proposición.

Proposición 2.5.10.

El precio de una opción *call* sobre un futuro CDD, al tiempo $t \leq \tau$ con precio *strike* K , y tiempo de ejercicio $\tau \leq \tau_1$ es

$$C_{\text{CDD}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(\tau-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu(t, s) Z(t, s, \tau, \tilde{T}_t) ds - K, 0 \right\} \right];$$

donde

$$Z(t, s, \tau, \tilde{T}_t) = \tilde{\Psi} \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t + \int_t^s \sigma(u) \theta(u) e^{\int_t^s \kappa(z) dz} du + \Sigma(s, t, \tau) Y \right),$$

$$\tilde{\Psi}(t, s, x) = \Psi \left(\frac{m(t, s, x)}{\nu(t, s)} \right),$$

$$\Sigma^2(s, t, \tau) = \int_t^{\tau} \sigma^2(u) e^{2 \int_u^s \kappa(z) dz} du$$

y Y es una variable aleatoria normal estándar.

Demostración: El precio de la opción por definición es

$$C_{\text{CDD}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(\tau-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\max \{ F_{\text{CDD}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0 \} | \mathcal{F}_t];$$

por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\text{CDD}}(\tau, \tau_1, \tau_2) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu(t, s) \tilde{\Psi} \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \right) ds \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nu(t, s) \tilde{\Psi} \left(t, s, e^{\int_t^s \kappa(z) dz} \tilde{T}_t + \int_t^{\tau} \sigma(u) \theta(u) e^{\int_t^s \kappa(z) dz} du \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\tau} \sigma(u) e^{\int_u^s \kappa(z) dz} dW_u \right) ds; \end{aligned}$$

por tanto, la integral dentro de la esperanza es independiente de \mathcal{F}_t y tiene varianza $\int_t^{\tau} \sigma^2(u) e^{2 \int_u^s \kappa(z) dz} du$. Tomando entonces esperanza condicional se obtiene el resultado.

□

2.6. Paridad *Put-Call*

En la sección anterior se mostraron resultados enfocados a una opción *call*, pero con la finalidad de poder tener disponibles dichos resultados para una opción *put* a continuación se muestra la *paridad put-call* que permite ir de un lado a otro de la ecuación para valuar la opción deseada, ya que la finalidad del capítulo es tener el modelo probabilista adecuado para la valuación de opciones europeas *put* y *call*. Hasta el momento se ha denotado $C_{\text{Indice}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2)$ como el precio de una opción *call* a tiempo $t \geq 0$ con tiempo de ejercicio $\tau \geq t$ y $\tau \leq \tau_1$, basado en mediciones durante el periodo $[\tau_1, \tau_2]$ donde el índice puede ser un HDD, CDD o bien un CAT. Ahora bien, una opción *call* tiene una función de *payoff* al tiempo τ como

$$\text{máx} \{F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0\} ;$$

mientras que un contrato de una opción *put* con precio de ejercicio K , paga al tiempo τ

$$\text{máx} \{K - F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2), 0\} ;$$

y se denotará el precio al tiempo $t \geq \tau$ para una opción *put* por $P_{\text{Indice}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2)$. Entonces, el precio sin arbitraje de una opción *put*, siguiendo lo establecido en la sección anterior estaría dado por

$$P_{\text{Indice}}(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(\tau-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{K - F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2), 0\} | \mathcal{F}_t] ;$$

de esta manera se tiene que:

Proposición 2.6.1. *Paridad Put-Call*

Los precios de los contratos *put* y *call* están relacionados de la siguiente manera

$$C_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) - P_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) = e^{-r(\tau-t)} F_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) - e^{-r(\tau-t)} K.$$

Demostración:

Observando que

$$\text{máx}(x - K, 0) - \text{máx}(K - x, 0) = x - K ;$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Tomando x como $F_{\text{Indice}}(t, \tau_2, \tau_2)$ y tomando esperanzas bajo la medida de probabilidad \mathbb{Q} se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0\} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{K - F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2), 0\} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [F_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) - K | \mathcal{F}_t] ; \end{aligned}$$

descontando a valor presente con la tasa r y usando el hecho de que F_{Indice} es una martingala \mathcal{F}_t adaptada se tiene finalmente que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2) - K, 0\} | \mathcal{F}_t] &- \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\text{máx} \{K - F_{\text{Indice}}(\tau, \tau_1, \tau_2), 0\} | \mathcal{F}_t] \\ C_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) - P_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) &= e^{-r(\tau-t)} F_{\text{Indice}}(t, \tau_1, \tau_2) - e^{-r(\tau-t)} K. \end{aligned}$$

□

Para recordar, una opción *call* HDD o CDD del CME es un contrato que otorga al propietario del contrato el derecho, pero no la obligación de comprar un futuro HDD/CDD a un precio específico, usualmente llamado el precio de ejercicio o precio strike, análogamente una opción *put* HDD/CDD da el derecho al propietario, pero no la obligación de vender un futuro contrato HDD/CDD. Estas opciones sobre futuros en el CME todas son de tipo europeo, es decir, solo pueden ejercerse en la fecha de expiración.

2.7. Precio de Mercado de Riesgo

Como se mencionó anteriormente, al ser el mercado climático un mercado incompleto, existen una infinidad de soluciones determinadas por un intervalo para el precio de un derivado climático, valuado tomando la esperanza condicional bajo \mathbb{Q} , dicho precio en el mercado es ajustado por una cantidad llamada *precio de mercado del riesgo* que tiene la función de adaptar precios a valor de mercado para los contratos climáticos.

Entonces, para poder dibujar o estimar trayectorias bajo la medida de probabilidad \mathbb{Q} es necesario poder determinar el precio de mercado de riesgo, el cuál dependerá del tiempo y estará denotado por $\theta(t)$.

Como la temperatura es un activo no comerciable, no existen en el mercado instrumentos de réplica para éste, por ello la característica de ser un mercado incompleto, en este contexto toda medida equivalente \mathbb{Q} será una probabilidad de riesgo neutral, pero de acuerdo a Karatzas & Shreve (2001), se supondrá la existencia de una medida \mathbb{Q} que puede ser parametrizada para completar el mercado, denotada por \mathbb{Q}_{θ_t} la cuál calcula el precio libre de arbitraje de una temperatura futura como:

$$F_{(t, \tau_1, \tau_2)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{\theta_t}} [\rho_t(T_t) | \mathcal{F}_t];$$

con $t \in [0, T]$ y $\rho_t(T_t)$ es una función de *payoff* sobre la temperatura T_t para alguno de los índices: CAT, HDD, CDD o PAC, y θ_t es una función real, continua y acotada que denota el precio de mercado de riesgo.

Teorema 2.7.1. *Precio de Mercado de Riesgo*

Si un mercado financiero \mathcal{M} es viable, entonces existe un proceso $\theta(\cdot)$ con valores en \mathbb{R} , llamado precio de mercado de riesgo, tal que para casi toda $t \in [0, T]$ (bajo la medida de Lebesgue) la prima de riesgo $b(t) + \delta(t) - r(t)I$ se relaciona con $\theta(t)$ por la ecuación (Karatzas & Shreve (2001))

$$b(t) + \delta(t) - r(t)I = \sigma(t)\theta(t) \quad \text{c.s.};$$

donde I denota el vector de tamaño N con todas sus componentes igual a 1, $b(t)$ es la tasa media de retorno, $\delta(t)$ define la tasa de dividendos, $\sigma(t)$ denota la volatilidad y $r(t)$ determina la tasa de interés libre de riesgo.

Observación 2.7.1.

En la definición anterior se menciona un mercado financiero viable, éste es aquel en el cual no existen oportunidades de arbitraje. . ∇

Para el caso de derivados climáticos, al ser derivados que no pagan dividendos, se considera $\delta(t) = 0$.

A pesar del trabajo de Karatzas & Shreve, la mayoría de los autores que trabajan con derivados climáticos relajan el supuesto de dependencia del tiempo (por tanto se considera constante) de esta medida ya que para hacerla efectiva, es necesario contar con información de mercado de los precios que han tenido los productos en el mercado y hacer una comparación con las estimaciones realizadas, para notar la diferencia de los precios, sin embargo, los derivados climático al ser aún productos comercializados en escasos países la información de mercado se acota a aquellos países que juegan en el mercado climático.

2.8. Simulación y estimación de modelos estocásticos sobre temperatura

Un modelo climático, es una representación de la interacción de la atmósfera y las propiedades físicas de ésta, es una prueba complicada que un modelo sea capaz de estimar eventos contingentes que no se han presentado en el pasado.

Además de esto los modelos deben considerar una cantidad razonable de años de observación (se recomiendan en la literatura de 25 a 30 años) para que el modelo cuente con suficiente información del comportamiento climático y puedan realizarse estimaciones de parámetros, que hasta ahora se ha observado que éstos dependen del tiempo pues las mediciones climatológicas revelan variaciones año con año y dentro del mismo año, por tanto,

si estos parámetros se suponen constantes el modelo subestima eventos futuros al utilizarlo para fines de pronóstico.

En secciones anteriores se presentaron resultados “concretos” para ecuaciones diferenciales estocásticas sobre temperatura para contratos de opciones y futuros, sin embargo aún resta hallar la manera de estimar los parámetros que requieren dichos modelos para que éstos puedan utilizarse con fines de pronóstico del comportamiento de la temperatura para la valuación de derivados climáticos. Esta sección se enfoca la atención para la clase de modelos de reversión a la media que se han estado usando, así como métodos de estimación de parámetros para dichos modelos.

2.9. Estimación de parámetros

El objetivo de la sección es explicar el proceso estocástico que describe el movimiento de la temperatura. Para ello es requerido estimar los parámetros de éste, los que dependen del tiempo, es decir, estos varían dependiendo de la calidad y cantidad de datos que contenga la información meteorológica.

El hecho de que los parámetros del modelo estén indexados al tiempo complica su estimación, debido a que la teoría desarrollada para este propósito supone que dichos parámetros (media, varianza, velocidad de reversión a la media) permanecen constantes en el tiempo, razón por la que los métodos de estimación para procesos de difusión no se utilizan y en cambio se hace uso de herramientas estadísticas más sencillas para encontrarlos.

2.9.1. La temperatura media

Se sabe que la temperatura es un proceso estacional, con variaciones mayores en invierno que en verano, y que a su vez sigue una tendencia alcista. Asimismo, su comportamiento oscila dentro del periodo de un año comportándose como una secuencia de olas, que pueden ser descritas como un movimiento sinusoidal, que pudiera tener la forma

$$\sin(\omega t + \psi) ;$$

donde t denota el tiempo medido en días, como el periodo de oscilación de dicha función es anual, se tiene que $\omega = 2\pi/365$. Además de esto, la temperatura parece aumentar el tamaño de sus oscilaciones, es decir, parece seguir una tendencia ascendente la cuál puede deberse naturalmente al calentamiento global y sintéticamente al efecto de calentamiento por razones urbanas en las grandes ciudades, es por ello que esta tendencia débil, se supondrá lineal.

Naturalmente, el estimador razonable para la media sería de la forma

$$S(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m T_{t,j};$$

es decir, el promedio histórico a lo largo de m años para una fecha en particular. Sin embargo, gracias a la explicación anterior, también es posible determinar la media mediante la siguiente ecuación

$$S(t) = A + Bt + C \sin(\omega t + \psi); \quad (2.9.1)$$

donde los parámetros A, B (coeficientes de tendencia lineal), C (amplitud de onda) y ψ (parámetro de fase, punto inicial de la onda sinusoidal) son escogidos mediante el método de mínimos cuadrados de tal manera que la curva ajuste a los datos con una gran precisión.

2.9.2. Proceso *driving*

Desafortunadamente, la temperatura no sigue un comportamiento determinístico y es realmente complicada de simular, por ello es necesario agregar cierta aleatoridad, como en el modelo (2.4.2) que contiene un proceso de Wiener estándar ($B_t, t \geq 0$) y de hecho, es razonable este ajuste, no sólo por su amigable tratamiento matemático sino porque también se considera que las diferencias de temperatura siguen una distribución normal.

Asimismo, la variación cuadrática $\sigma^2(t) \in \mathbb{R}^+$, varía a lo largo del año pero para facilitar su estimación se considera constante para cada uno de los meses del año, es decir se tomará σ_μ^2 para $\mu = 1, 2, \dots, 12$ pues es posible que ésta no cambie mucho durante un mes. Especialmente durante el invierno, la variación cuadrática o varianza es más grande que durante el resto del año, por tanto se supondrá $\sigma(t)$ como:

$$\sigma_\mu = \begin{cases} \sigma_1, & \text{durante Enero} \\ \sigma_2, & \text{durante Febrero} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_{12}, & \text{durante Diciembre;} \end{cases}$$

donde $\{\sigma_\mu\}_{\mu=1}^{12}$ son constantes positivas. Por tanto el proceso *driving* de la temperatura sería $(\sigma_\mu W_t, t \geq 0)$ dependiendo del mes μ .

2.9.3. Reversión a la media

Resulta razonable que la temperatura, no puede elevarse día a día durante un periodo de tiempo largo, es por esto que el modelo de la temperatura es de reversión a la media, ya que ésta no puede alejarse de su media por periodos de tiempo cortos, en otras palabras el proceso estocástico debe tener la propiedad de reversión a la media.

De acuerdo con el modelo (2.4.2) se tiene que

$$dT_t = dS(t) + \kappa(t) (T_t - S(t)) dt + \sigma(t) dB_t ;$$

donde $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ determina la velocidad de reversión a la media, la cuál varía durante el tiempo.

Para este modelo Dornier & Queruel (2000) agregaron el término $dS(t)$, al modelo $dT_t = \kappa(t) (T_t - S(t)) dt + \sigma(t) dB_t$ para que éste, realmente revierta a la media, estableciendo que

$$\frac{dS(t)}{dt} = A + \omega C \cos(\omega t + \psi).$$

2.10. Estimación de parámetros

Continuando con la estructura dependiente del tiempo propuesta en la sección anterior, se presentan los métodos de estimación que se han utilizado hasta la fecha para los parámetros de un modelo de reversión a la media.

2.10.1. Estimación de la media

2.10.1.1. Estimación mediante mínimos cuadrados

En la sección anterior, se propuso la función

$$S(t) = A + Bt + \sin(\omega t + \psi) ;$$

para el cuál, los parámetros A, B, C y ψ son desconocidos, para encontrar dichos valores numéricos, se ajustará la función

$$Y(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) ; \quad (2.10.1)$$

a los datos de temperatura usando el método de mínimos cuadrados y significa que se debe escoger el vector de parámetros $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ que resuelva la ecuación

$$\min_{\xi} \|\mathbf{Y} - \mathbf{S}\|^2 ; \quad (2.10.2)$$

donde \mathbf{Y} y \mathbf{S} son los vectores con los elementos de (2.10.1) y el vector de datos, respectivamente. De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} A &= a_1 \\ B &= a_2 \\ C &= \sqrt{a_3^2 + a_4^2} \end{aligned}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{a_4}{a_3}\right).$$

Demostración:

Dado que se desea obtener el vector $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ que minimice (2.10.2) entonces se desea que

$$(Y(t) - S(t))^2 = 0;$$

y bajo las definiciones correspondientes de $Y(t), S(t)$ según (2.10.1) y (2.9.1) respectivamente. Se tiene que

$$(a_1 + a_2t + a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) - (A + Bt + C \sin(\omega t + \psi)))^2 = 0;$$

de tal manera

$$a_1 + a_2t + a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) = A + Bt + C \sin(\omega t + \psi);$$

De lo cual es posible ver que $A = a_1$ y $B = a_2$ por lo que resta hallar los valores de la ecuación

$$a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \psi);$$

y por la propiedad del seno de la suma de ángulos se tiene que

$$a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) = C [\sin(\omega t) \cos(\psi) + \cos(\omega t) \sin(\psi)];$$

por lo que

$$a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) = (C \cos(\psi)) \sin(\omega t) + (C \sin(\psi)) \cos(\omega t);$$

Para lo cuál necesariamente

$$a_3 = C \cos(\psi); \tag{2.10.3}$$

y

$$a_4 = C \sin(\psi); \tag{2.10.4}$$

por tanto despejando C de (2.10.3) y (2.10.4) se obtiene

$$\frac{a_3}{\cos(\psi)} = \frac{a_4}{\sin(\psi)} \Rightarrow \tan(\psi) = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{a_4}{a_3}\right);$$

ahora tomando los cuadrados de (2.10.3) y (2.10.4) y sumándolos se obtiene que

$$\begin{aligned}
C^2 \cos(\psi)^2 + C^2 \sin(\psi)^2 &= a_3^2 + a_4^2 \\
C^2 [\cos(\psi)^2 + \sin(\psi)^2] &= a_3^2 + a_4^2 \\
C^2 &= a_3^2 + a_4^2 \\
C &= \sqrt{a_3^2 + a_4^2}.
\end{aligned}$$

□

2.10.1.2. Series de Fourier truncadas

Otro método de estimación para la componente estacional propuesto por Benth & Saltyte-Benth (2012), es hacer una aproximación mediante series de Fourier a $S(t)$ la cuál se supone como una función determinista por simplicidad. La expansión entonces es de la siguiente manera:

$$S(t) = a + bt + \sum_{l=1}^L \left(\alpha_l \cos\left(\frac{2\pi lt}{365}\right) + \sum_{p=1}^P \alpha_p \sin\left(\frac{2\pi pt}{365}\right) \right);$$

donde: a y b reflejan una tendencia de crecimiento lineal, los que deben estimarse a partir de un conjunto de observaciones así como los parámetros L y P , se pueden escoger utilizando el criterio de Akaike. El modelo captura con precisión las variaciones anuales de la media de temperatura así como su amplitud y frecuencia mediante las funciones sinusoidales.

2.10.2. Estimación de σ para el modelo de temperatura

2.10.2.1. Discretización del modelo de temperatura

Siguiendo con la estimación de los parámetros del modelo, en esta sección se propondrán estimadores para σ a partir de los datos que se encuentran en la literatura de derivados climáticos. Este parámetro para fines prácticos se tomará como un valor mensual, ya que las variaciones en la temperatura durante un mes son relativamente pequeñas, es por ello que, dado un mes específico μ con N_μ número de días, con temperaturas observadas durante el mes $T_j, j = 1, \dots, N_\mu$. El primer estimador se basa en la variación cuadrática de T_t

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=0}^{N_\mu-1} (T_{j+1} - T_j)^2;$$

el segundo estimador puede hallarse discretizando la ecuación (2.4.2) y tomando el resultado como una ecuación de regresión, se tiene (para el mes μ) que

$$T_j = S(j) - S(j-1) + (1 + \kappa(j))T_{j-1} - \kappa(j)S(j-1) + \sigma_\mu \varepsilon_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N_\mu; \quad (2.10.5)$$

donde $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{N_\mu-1}$ son variables aleatorias normales independientes. Tomando $\tilde{T}_j = T_j - (S(j) - S(j-1))$ se puede escribir (2.10.5) como

$$\tilde{T}_j = (1 + \kappa(j))T_{j-1} - \kappa(j)S(j-1) + \sigma_\mu \varepsilon_{j-1};$$

la que puede ser vista como una regresión de la temperatura de hoy con base a la temperatura del día ayer. Por tanto, un estimador para σ_μ es (Brockwell & Davis, (1991))

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{N_\mu - 2} \sum_{j=1}^{N_\mu} \left(\tilde{T}_j - (1 + \hat{\kappa}_j)T_{j-1} + \hat{\kappa}_j S(j-1) \right)^2.$$

2.10.2.2. Series de Fourier truncadas

Otro método de estimación de la volatilidad propuesto por Benth & Saltyte-Benth (2012), es hacer una transformación de Fourier a $\sigma^2(t)$ la cuál se supone como una función determinista por simplicidad, ya que una estocástica es más razonable pero más complicada de modelar. La expansión entonces es de la siguiente manera:

$$\sigma^2(t) = a + bt + \sum_{i=1}^I c_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{365}\right) + \sum_{j=1}^J c_j \sin\left(\frac{2\pi j t}{365}\right);$$

donde: a y b reflejan una tendencia de crecimiento lineal, los que deben estimarse a partir de un conjunto de observaciones así como los parámetros I, J , se pueden escoger utilizando el criterio de Akaike. El modelo captura con precisión las variaciones anuales de la media de temperatura así como su amplitud y frecuencia mediante las funciones sinusoidales.

Y finalmente para que esté completo el estimador, es necesario encontrar el estimador correspondiente para $\kappa(t)$ lo cuál se analizará a continuación.

2.10.3. Estimación del parámetro de reversión a la media κ para el modelo de temperatura

2.10.3.1. Función de estimación martingala

Finalmente, para completar el modelo Ornstein Uhlenbeck de temperatura se estima el parámetro de velocidad de reversión a la media $\kappa(t)$. Para el cuál varios autores lo consideran como un parámetro constante κ encontrándolo mediante una *estimating-function*

martingale.

Es decir, de acuerdo con Bhowan, (2003) si la temperatura sigue el proceso

$$dT_t = a(T_t, t; \xi)dt + b(T_t, t; \xi)dB_t ;$$

entonces un estimador insesgado para ξ es el cero de la función martingala dada por

$$G_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{a}(T_{(i-1)\Delta}; \xi)}{b^2(T_{(i-1)\Delta}; \xi)} (T_{i\Delta} - \mathbb{E}[T_i|T_{i-1}]) ; \quad (2.10.6)$$

donde $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \xi}$.

Por tanto, tomando el proceso como en (2.4.2) pero esta vez tomando a κ constante, es decir

$$dT_t = dS(t) + \kappa(T_t - S(t))dt + \sigma(t)dB_t ;$$

e integrando entre i e $i - 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} G(\tilde{T})_i - G(\tilde{T})_{i-1} &= \int_{i-1}^i \sigma(s) e^{-\int_0^s \kappa ds} dB_s \\ e^{-\int_0^i \kappa du} \tilde{T}_i - e^{-\int_0^{i-1} \kappa du} \tilde{T}_{i-1} &= \int_{i-1}^i \sigma(s) e^{-\int_0^s \kappa ds} dB_s \\ e^{-\kappa \cdot i} \tilde{T}_i &= e^{-\kappa \cdot (i-1)} \tilde{T}_{i-1} + \int_{i-1}^i \sigma(s) e^{-\int_0^s \kappa ds} dB_s \\ \tilde{T}_i &= e^{-\kappa \cdot (i-1) + \kappa \cdot i} \tilde{T}_{i-1} + e^{\kappa \cdot i} \int_{i-1}^i \sigma(s) e^{-\int_0^s \kappa ds} dB_s \\ T_i &= S(i) + e^{\kappa} (T_{i-1} - S(i-1)) + e^{\kappa \cdot i} \cdot \int_{i-1}^i \sigma(s) e^{-\int_0^s \kappa ds} dB_s ; \end{aligned}$$

y tomando la esperanza condicional $\mathbb{E}[T_i|T_{i-1}]$

$$\mathbb{E}[T_i|T_{i-1}] = S(i) + e^{\kappa} (T_{i-1} - S(i-1)) ;$$

sustituyendo en (2.10.6) se obtiene

$$G_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{T_{i-1} - S(i-1)}{\sigma^2(i-1)} [T_i - S(i) - e^{\kappa} (T_{i-1} - S(i-1))] ;$$

resolviendo para κ finalmente se obtiene

$$\kappa = \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{T_{i-1} - S(i-1)}{\sigma^2(i-1)} [T_i - S(i)]}{\sum_{i=1}^n \frac{T_{i-1} - S(i-1)}{\sigma^2(i-1)} [T_{i-1} - S(i-1)]} \right).$$

Sin embargo, en un reciente estudio (Zapranis,(2008)) se encuentra que éste tiene también dependencia del tiempo y por tanto es necesario considerarla. En su trabajo se presenta un análisis en un contexto de riesgo neutral, en el cuál encontraron que estimar este valor de forma diaria reduce significativamente la variación que se discrimina al tomar dicho valor anual. Por ejemplo, si la temperatura del día de hoy se encuentra alejada de la temperatura promedio de la temporada (un día frío en verano por ejemplo) entonces se espera que la velocidad de reversión a la media sea grande, es decir, que la diferencia entre la temperatura del día de hoy y la del día de mañana sea grande.

La temperatura se observa que no puede alejarse de su media en gran cantidad, en el corto plazo (reversión a la media) por lo que también es posible considerar a dicho parámetro $\kappa(t)$ como un valor mensual, que permanece constante durante cada mes del año, es decir $\kappa(t) = \kappa_\mu$ para $\mu = 1, \dots, 12$ de esta manera, la *estimating-function martingale* quedaría de la siguiente manera:

$$\kappa_\mu = \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_\mu} \frac{T_{i-1} - S(i-1)}{\sigma_\mu^2(i-1)} [T_i - S(i)]}{\sum_{i=1}^{N_\mu} \frac{T_{i-1} - S(i-1)}{\sigma_\mu^2(i-1)} [T_{i-1} - S(i-1)]} \right).$$

Esta estimación de la misma manera que para el caso de la varianza, relaja la hipótesis de que este valor cambia día con día exigiendo una estimación diaria.

Capítulo 3

Modelación discreta de temperatura para la valuación de derivados climáticos

Como se comentó en el primer capítulo, la teoría matemática desarrollada para la valuación de derivados climáticos se ha ramificado a varias áreas de estudio, en la literatura se han utilizado diferentes técnicas para la modelación de la variable subyacente del derivado.

Justo como se revisó y estudió un análisis continuo mediante el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas sobre temperatura, para este capítulo se tiene el objetivo de estudiar la teoría y métodos que se han propuesto en la literatura en cuanto a un enfoque discreto, para lograrlo se pondrán en contexto modelos estadísticos en series de tiempo para encaminarse hacia la valuación de un derivado climático.

El objetivo de este capítulo es resumir un tipo de modelación conocida como Modelación Diaria (*Daily modeling*), la cuál involucra ajustar un modelo de series de tiempo a las mediciones diarias de temperatura y entonces usar el modelo final para simular un gran número de escenarios pronosticando la evolución del comportamiento futuro de la temperatura y entonces poder generar una muestra grande de valores sintéticos para dicho índice I y entonces poder utilizarlos para obtener el precio justo de un producto financiero derivado climático mediante el método Monte Carlo.

3.1. Revisión de conceptos de series de tiempo

En esta sección se dará un breve recorrido por el análisis de series de tiempo, en particular conceptos importantes como las funciones de autocovarianza y autocorrelación. Asimismo se resalta la importancia de la estacionariedad, ya que dicha propiedad es la que juega un papel central en este análisis pues “reemplaza” la hipótesis de un comportamiento independiente e idénticamente distribuido en las observaciones de una serie de tiempo. Ra-

zón por la que se comienza con nociones de estacionariedad.

Definición 3.1.1. *Función de Autocovarianza*

Dada una serie de tiempo $\{X_t\}$, la función de autocovarianza se define como el producto de los segundos momentos es decir,

$$\gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)];$$

para cualesquiera s y t

Propiedades:

- $\gamma_X(s, t) = \gamma_X(t, s)$
- $\gamma_X(t, t) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)^2] = \text{Var}(X_t)$

Esta función mide la dependencia que existe entre dos puntos de la serie de tiempo en diferentes momentos del tiempo. Es decir, una serie “suave” muestra autocovarianzas altas incluso si la diferencia $|s - t|$ es grande. Contrariamente, si la serie de tiempo es “agitada” (con muchos picos) esta función tendrá valores cercanos a cero.

Definición 3.1.2. *Función de autocorrelación*

Dada una serie de tiempo $\{X_t\}$ la función de autocorrelación está definida como

$$\rho_X(s, t) = \frac{\gamma_X(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)\gamma_X(t, t)}}.$$

La función de autocorrelación mide la capacidad de predicción lineal de las observaciones, es decir, predecir x_t usando únicamente x_s ($s < t$). Es posible demostrar que $-1 \leq \rho_X(s, t) \leq 1$ usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz que implica que $|\gamma_X(s, t)|^2 \leq \gamma_X(s, s)\gamma_X(t, t)$. Si es posible predecir x_t perfectamente a partir de x_s , entonces su función de autocorrelación será 1.

A menudo resulta necesario predecir una serie Y_t a partir de X_t , es decir, con base en el comportamiento de una serie diferente. Entonces resultan útiles las definiciones siguientes.

Definición 3.1.3. *Función de covarianza-cruzada*

Dadas dos series de tiempo $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$, la función de covarianza-cruzada (CCVF) entre dos series X_t y Y_t es

$$\gamma_{XY}(s, t) = \text{Cov}(X_s, Y_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_{X_s})(Y_t - \mu_{Y_t})];$$

y por tanto es posible definir su correlación.

Definición 3.1.4. *Función de correlación-cruzada*

Dadas dos series de tiempo $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$, la función de correlación-cruzada (CCF) está dada por

$$\rho_{XY}(s, t) = \frac{\gamma_{XY}(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)\gamma_Y(t, t)}}.$$

Hasta ahora, al haber presentado las definiciones de ciertas medidas de dependencia, no se han hecho supuestos sobre el comportamiento de la serie de tiempo, por tanto se continúa con nociones de regularidad a partir de un concepto conocido como *estacionariedad*.

Definición 3.1.5. *Estacionariedad estricta (o estacionariedad de primer orden)*

Se dice que un proceso $\{X_t\}$ es estrictamente estacionario si los vectores $(X_1, \dots, X_k)'$ y $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})'$ tienen la misma distribución conjunta, para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{Z}$.

La siguiente conceptualización de estacionariedad, relaja las condiciones de la Definición 3.1.5 basándose únicamente en los dos primeros momentos de X_t , sin embargo, exige su existencia por supuesto.

Definición 3.1.6. *Estacionariedad débil (o estacionariedad de segundo orden)*

Se dice que un proceso $\{X_t\}$ es débilmente estacionario si

- $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{E}(X_t) = m$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h)$ para cualesquiera $t, h \in \mathbb{Z}$.

La función $\gamma_X(h)$ ($\rho_X(\cdot) := \gamma_X(\cdot)/\gamma_X(0)$) se conoce como función de autocovarianza (autocorrelación) de un proceso estacionario $\{X_t\}$.

El ejemplo más sencillo de un proceso estacionario de segundo orden es un ruido blanco, ya que es posible construir procesos estacionarios más complejos a partir de este.

Definición 3.1.7. *Ruido blanco*

El proceso $\{\varepsilon_t\}$ es llamado ruido blanco débil si, para alguna constante positiva σ^2 :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.
- $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$ para cualesquiera $t \in \mathbb{Z}$, con $h \neq 0$.

Observación 3.1.1. *Ruido blanco fuerte*

Es importante notar que la suposición de independencia se requiere en un ruido blanco débil. Dicha supuesto de independencia es de suma importancia en el análisis de series de tiempo, sin embargo puede remplazarse a veces por la hipótesis más fuerte de que:

- Las variables ε_t y ε_{t+h} sean independientes e idénticamente distribuidas.

Así entonces, puede llamarse al proceso ε_t como un ruido blanco fuerte. ∇

3.1.1. Estimación de la autocovarianza

El análisis clásico de series de tiempo se centra en la estructura de segundo orden del proceso. Para el caso de proceso estacionarios Gaussianos, estos están completamente caracterizados por su media y su función de autocovarianza, mientras que los procesos no Gaussianos, su media y autocovarianza son tan solo una herramienta para determinar la

estructura de dependencia en los datos. En la práctica, dichos momentos son desconocidos y por tanto deben estimarse a partir de una realización de tamaño n de la serie de tiempo, denotada por x_1, \dots, x_n . Para estimar $\gamma(h)$ generalmente se usa la función de autocovarianza muestral (ACVF) dada por

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (x_j - \bar{x})(x_{j+h} - \bar{x}) := \hat{\gamma}(-h);$$

para $0 \leq h < n$ y donde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ denota la media muestral de los datos. Teniendo esto es posible también estimar la función de autocorrelación (ACF) muestral como

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \quad \text{para } |h| < n.$$

3.1.2. Modelos ARMA

El objetivo de un análisis de series de tiempo es construir un modelo para el proceso estocástico subyacente, este modelo entonces se usa para estudiar la estructura causal del proceso y por tanto obtener predicciones óptimas de éste.

La clase de modelos ARMA es la más usada para la predicción de procesos estacionarios de segundo orden. Estos modelos pueden ser vistos como una consecuencia de un resultado fundamental debido a Wold (1983), el cuál establece el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Representación de un proceso estacionario*

Sea X_t un proceso estacionario de segundo orden, centrado y no determinístico, entonces se dice que éste admite una representación finita de promedios móviles de la forma

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}; \tag{3.1.1}$$

donde ε_t es el proceso de innovación de X_t , es decir,

$$\varepsilon_t = X_t - \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_t)$$

y \mathcal{F}_t es la filtración generada por las $X_s, 0 < s < t$ observaciones pasadas. Truncando la suma infinita en (3.1.1) se obtiene el proceso

$$X_t(q) = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q c_i \varepsilon_{t-i};$$

Tomando a consideración el teorema anterior es posible escribir la siguiente definición.

Definición 3.1.8. *Proceso ARMA(p, q)*

Un proceso estacionario de segundo orden X_t , es llamado ARMA(p, q), con $p, q \in \mathbb{Z}^+$, si existen coeficientes reales $c, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ tales que

$$X_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = c + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}; \quad (3.1.2)$$

donde ε_t se conoce como el proceso de innovación lineal de X_t .

Observación 3.1.2.

Una característica importante que distingue un proceso estacionario de uno no estacionario es el rol de las constantes.

- En un proceso estacionario, la constante es despreciable y puede ser sustraída su media de las observaciones y por tanto se trabajaría con un proceso de media cero y al ser un proceso estacionario, ambas formas del proceso tienen las mismas propiedades básicas ya sea con media distinta de cero o igual a cero.
- Contrariamente para el caso de procesos no estacionarios, la constante, si es que existe, tiene un papel importante ya que es posible represente alguna propiedad permanente en todo el conjunto de observaciones. ∇

3.1.3. Análisis espectral de una serie de tiempo

Cualquier serie de tiempo puede expresarse como una combinación de ondas sinusoidales con diferentes periodos (el tiempo que le toma completar un ciclo completo) y amplitudes (valores máximos y mínimos durante dicho ciclo). Es decir, dicho fenómeno que produce la serie puede ser estudiado mediante expresiones en series de Fourier ¹. Por tanto resulta sumamente útil este hecho para analizar el comportamiento periódico que pudiera tener una serie de tiempo.

El objetivo fundamental del análisis espectral es identificar las frecuencias dominantes en un conjunto de observaciones y encontrar una explicación para algún fenómeno empírico

¹Expansión de una función periódica $f(x)$, expresada en términos de senos y cosenos. Es un análisis armónico que permite descomponer en términos individuales una función, que combinándolos se obtiene una aproximación de buena precisión para fines prácticos.

del comportamiento del sistema a partir del cual las mediciones son realizadas. Para el caso de series de tiempo sobre temperatura, es importante encontrar expresiones que precisen el comportamiento de fluctuaciones en las observaciones debidas a las estaciones durante el año, así como fenómenos como *El Niño*² el cuál puede afectar las mediciones por cierto periodo de tiempo.

En esta sección se resume una aproximación para manipular la correlación producida por una serie estacionaria, comenzando por la transformación de la serie en una combinación lineal que ajusta varios senos y cosenos con diferentes frecuencias a los datos observados.

El periodograma se usa para identificar los periodos dominantes (o bien, frecuencias) de una serie de tiempo. Es una herramienta ampliamente útil que identifica el ciclo dominante de una serie, particularmente cuando los ciclos no están “acomodados” de manera mensual o trimestral (para el caso de series con fechas).

Para series de tiempo a tiempo discreto, los siguientes conceptos relacionados con funciones sinusoidales resultarán útiles.

- El *periodo* (T) es el número de oscilaciones que se necesitan para completar con ciclo de la función coseno (seno).
- La *frecuencia* ($\omega = 1/T$) es la fracción del ciclo completo para que se completa un solo periodo de tiempo.

Suponiendo ahora, que la serie de tiempo $\{X_t\}$, fuera ajustada por la función coseno como

$$X_t = A \cos(2\pi\omega t + \varphi) ;$$

donde:

- A es la amplitud de onda, determina el valor absoluto máximo que alcanza la curva.
- ω es la frecuencia y controla cuán rápido oscila la curva.
- φ es el parámetro de fase, éste determina el punto inicial para una función sinusoidal (medido en grados).

Además resultarán importantes las siguiente identidades que se usan para determinar el periodograma de una serie de tiempo.

$$A \cos(2\pi\omega t + \varphi) = \alpha_1 \cos(2\pi\omega t) - \alpha_2 \sin(2\pi\omega t) ; \quad (3.1.3)$$

²Fenómeno climático asociado al calentamiento del Pacífico oriental ecuatorial, el cuál se manifiesta en forma cíclica, con una amplitud de entre 3 y 8 años, cuya fase de enfriamiento se denomina como *La Niña*.

con $\alpha_1 = A \cos(\varphi)$ y $\alpha_2 = -A \sin(\varphi)$. Y de manera similar

$$A \sin(2\pi\omega t + \varphi) = \alpha_1 \sin(2\pi\omega t) + \alpha_2 \cos(2\pi\omega t) ;$$

con $\alpha_1 = A \cos(\varphi)$ y $\alpha_2 = A \sin(\varphi)$.

Como una generalización del método de estimación de la media $S(t)$ en el capítulo anterior, se tiene que $A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ y $\varphi = \arctan(\alpha_2/\alpha_1)$ para el caso de la suma de ángulos en seno y $\varphi = \arctan(-\alpha_2/\alpha_1)$ para la suma de ángulos en coseno.

3.1.3.1. El periodograma

En el análisis espectral el objetivo es analizar la serie vista como la suma de funciones de cosenos y senos con amplitudes y frecuencias variantes, por lo que es indispensable identificar las frecuencias o periodos de la serie observada. El *periodograma* dibuja la medida de la importancia de un patrón de oscilación así como su frecuencia.

Tomando que $X_t = A \cos(2\pi\omega t + \varphi)$ como (3.1.3) se puede definir X_t como una combinación de funciones sinusoidales con diferentes frecuencias y amplitudes como

$$x_t = \sum_{k=1}^q [\alpha_{k1} \cos(2\pi\omega_k t) + \alpha_{k2} \sin(2\pi\omega_k t)] ;$$

donde α_{k1}, α_{k2} para $k = 1, 2, \dots, q$ son variables aleatorias independientes con media cero y varianza σ_k^2 y ω_k distingue la frecuencia de variación en el tiempo.

Usando la independencia de α y la identidad trigonométrica tomando a x_t como en (3.1.3) se tiene que $\text{Cov}(x_{t+h}, x_t) = \sigma^2 \{ \cos(2\pi\omega[t+h]) \cos(2\pi\omega t) + \sin(2\pi\omega[t+h]) \sin(2\pi\omega t) \} = \sigma^2 \cos(2\pi\omega h)$, ya que $\text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, es posible demostrar que la función de autocovarianza del proceso está dada por

$$\gamma(h) = \sum_{k=1}^q \sigma_k^2 \cos(2\pi\omega_k h) ;$$

y esta función es la suma de componentes periódicas con pesos proporcionales a la varianza σ_k^2 . Por tanto, x_t es un proceso estacionario de media cero y tiene varianza

$$\gamma(0) = \mathbb{E}(x_t^2) = \sum_{k=1}^q \sigma_k^2.$$

3.2. Propiedades de los DATs

Para la construcción de un contrato de derivados climáticos sobre temperatura, como se revisó en el primer capítulo, la variable que se usa para medir la información de temperatura

diaria se conoce como *Daily Average Temperature*, con base en esta variable se construyen índices que se toman como el activo subyacente del contrato.

Cao & Wei (2000) estudiaron mediante procesos discretos el comportamiento de la temperatura media, aseveraron que el análisis discreto captura características únicas sobre el DAT y construyendo un entorno de trabajo bajo los supuestos acerca del DAT:

- Ésta sigue un ciclo predecible.
- Se mueve alrededor de una media estacional.
- Es afectada por el calentamiento global y efectos urbanísticos.
- Parece tener cambios autorregresivos.
- La volatilidad es mayor en invierno que en verano.

En la literatura se puede encontrar una gran lista de modelos propuestos, discretos y continuos, adaptados a mediciones de temperatura de diferentes países, pero existe algo en común con ellos y es que todos suponen estas características. Ahora, se revisará la teoría en procesos discretos para modelar la variable de temperatura, que es la más estudiada hasta el momento, ya que las necesidades del mercado han exigido su acelerado desarrollo.

3.3. Procesos discretos para la modelación del proceso de temperatura

Algunos autores como Moreno (2000) en sus primeros intentos discretizan la ecuación diferencial estocástica que describe el comportamiento de la temperatura, observando que dicha representación podía ser vista como un modelo AR, teniendo que

$$T_{t+1} = T_t + (S(t+1) - S(t)) + \kappa(S(t) - T_t) + \sigma(t)\varepsilon_t.$$

donde la volatilidad del proceso se modela como un proceso estacional dado por

$$\sigma(t) = 1 + \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Entonces, el proceso de temperatura según Carmona (1999) está dado (en términos generales) por

$$T_{t+1} = S(t+1) + AR(p);$$

sin embargo, al tratar de estudiar la temperatura con dicho modelo, se percataron que la distribución de los residuales no se mantenía constante a lo largo del año. Es decir, estos eran independientes pero no idénticamente distribuidos. Por tanto este procedimiento no podía ser utilizado para simular la temperatura.

Continuando con la mejoría del modelo de pronóstico Cao & Wei (2004) mejoraron la estructura existente, incorporando el precio de mercado de riesgo asociado con la temperatura, el cuál, descubrieron tiene un importante efecto en el precio de opciones, más que en precios *forward*, esto debido a la función de *payoff* que tienen respectivamente.

Más adelante en Bellini (2005) encontró variaciones en la estacionalidad en la media y varianza de la temperatura, razón por la que es difícil utilizar un modelo para pronosticar largos periodos de tiempo, ya que la precisión del modelo iría perdiendo fuerza para estimar valores diarios. En ese mismo año Campbell & Diebold (2005) usaron un análisis de series de Fourier con *lags* autoregresivos, para modelar la temperatura media estacional así como la estacionalidad en la varianza con efectos autoregresivos

$$T_t = S(t) + \sum_{k=m}^M \rho(t-k)T_{t-k} + \sigma(t)\varepsilon_t,$$

donde

$$S_t = a + bt + \sum_{l=1}^L \alpha_l \cos\left(\frac{2\pi lt}{365}\right) + \sum_{p=1}^P \alpha_p \sin\left(\frac{2\pi pt}{365}\right);$$

y

$$\sigma(t)^2 = a + bt + \sum_{i=1}^I c_i \cos\left(\frac{2\pi it}{365}\right) + \sum_{j=1}^J c_j \sin\left(\frac{2\pi jt}{365}\right) + \sum_{r=1}^R a_r \varepsilon_{t-r}^2;$$

con $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ independientes e idénticamente distribuidas. Este modelo incorpora el patrón estacional de la volatilidad y media, mientras que a su vez reduce el número de parámetros a estimar. La tendencia que incluye la media estacional se debe al efecto del calentamiento global. Los parámetros L, P son estimados usando el criterio de Akaike ³. Este modelo consigue más precisión pues considera las variaciones de amplitud y frecuencia en el comportamiento de la media.

Posteriormente se propusieron modelos ARMA sin embargo, Caballero (2002) argumenta que los procesos ARMA resultan ineficientes debido a la existencia de *memoria larga*, es decir, un decaimiento lento (hiperbólico) en su ACF.

Por lo cuál propone el uso de modelos ARFIMA los cuales pueden reproducir la estructura de covarianza y correlación en los datos observados de manera precisa y parsimoniosa.

³Método para la selección de un modelo para un conjunto de datos. Es aquél que minimiza la distancia de Kullback-Leibler entre el modelo ajustado y los datos. Definido como $AIC = -2\ln(L) + 2k$ con L como la función de verosimilitud máxima del modelo y K el número de parámetros estimados en dicho modelo. El criterio toma el menor AIC para escoger el mejor modelo

Finalmente para Caporin (2008), incorpora en su modelo *Time-Varying ARFIMA* una estructura ARFIMA con parámetros dependientes del tiempo considerando una estructura GARCH en su varianza. Este modelo se estudiará a detalle en secciones posteriores.

3.4. Procesos integrados y fraccionales en series de tiempo

Dentro del análisis de series de tiempo, hay interés en las series no estacionarias, cuya característica puede localizarse en su media, varianza, autocorrelación entre otras características de la distribución de la variable de estudio. En este conjunto de series las más importantes son las de tipo integradas, que tienen la propiedad de que al ser *diferenciados* se obtiene un proceso estacionario y cuyo orden es el número de diferencias realizadas para obtener dicho proceso estacionario.

Estos modelos pueden distinguirse si se observa que el ACF de un proceso ARMA disminuye geoméricamente y roza el cero después de unos cuantos *lags*, mientras que el ACF de un proceso *integrado* disminuirá linealmente en el tiempo (característica que indica que un proceso no es estacionario aún) decayendo hacia cero. En este sentido, existe una clase de procesos estacionarios cuyo ACF decae mucho más lento que un proceso ARMA o el proceso *integrado*, y es conocido como *proceso de memoria larga* (propiedad que será analizada más adelante). Esta característica de decaimiento en la autocorrelación se ha encontrado en grandes observaciones de series de tiempo climatológicas, por lo que éstas se asocian a modelos integrados y de memoria larga.

Una manera visual de hallar procesos de memoria larga es observando su ACF, ya que en éste podrán observarse autocorrelaciones muy pequeñas y éstas caerán hacia cero lentamente para *lags* grandes. A diferencia de un proceso *integrado* el ACF que cae linealmente pero con autocorrelaciones mayores y éstas convergen más rápido al cero.

3.4.1. Modelos ARIMA

A manera de introducción, se revisan las propiedades de los modelos no estacionarios *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA), son aquellos que como su nombre lo indica, pueden incluir términos autoregresivos, de promedios móviles y operadores de diferencias. Son de interés pues de éstos se desprenderán, en forma anidada (bajo ciertas condiciones), los procesos de memoria larga que serán de ayuda más adelante para la valuación de un derivado climático mediante el pronóstico de un modelo de tales características.

Un modelo ARIMA es aquel que obedece a la Definición 3.4.1

Definición 3.4.1. *Proceso ARIMA(p, d, q)*

Sea d un entero positivo. El proceso $\{Z_t\}$ es un *ARIMA(p, d, q)* si, para $k = 0, \dots, d-1$, el proceso $\nabla^k Z_t$ no es un proceso estacionario, pero $\nabla^d Z_t$ es un proceso *ARMA(p, q)*, y cumple la ecuación

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) (1 - L)^d Z_t = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t ; \quad (3.4.1)$$

con $d \in \mathbb{Z}^+$.

donde:

- p es el orden de la parte estacionaria autoregresiva.
- d es el número de raíces (orden de integración del proceso).
- q es el orden de la parte de promedios móviles.

Usando el operador de diferencias $\nabla = 1 - L$, el proceso (3.4.1) se puede escribir más compacto como

$$\Phi_p(L) \nabla^d Z_t = \Theta_q(L) \varepsilon_t ;$$

donde $\Phi_p(L)$ y $\Theta_q(L)$ son los operadores *AR* de orden p y *MA* de orden q respectivamente, ambos en el operador *lag* L .

En esta clase de modelos, *Integrated* significa que teniendo que $\{U_t\} = \{\nabla^d Z_t\}$ es un proceso estacionario, $\{Z_t\}$ se considera como la suma (integración) de U_t . Es decir, si

$$U_t = (1 - L) Z_t ;$$

definiendo

$$(1 - L)^{-1} = 1 + L + L^2 + L^3 + \dots ;$$

resulta que

$$Z_t = (1 - L)^{-1} U_t = \sum_{j=-\infty}^t U_t ;$$

Estos modelos, son caracterizados por el hecho de que su función de autocorrelación tiene coeficientes que decrecen lentamente aún después de un gran número de *lags*, todo modelo *ARIMA* no estacionario tiene ésta propiedad general.

Proposición 3.4.1.

Cualquier proceso que sea la suma de una tendencia lineal y un proceso estacionario, es decir, de la forma

$$Z_t = a + bt + \varepsilon_t ;$$

con $\{\varepsilon_t\}$ un proceso estacionario, será un proceso integrado.

Demostración:

Tomando una primera diferencia en la serie Z_t se tiene

$$\begin{aligned} w_t &= z_t - z_{t-1} = a + bt + \varepsilon_t - (a + b(t-1) + \varepsilon_{t-1}) \\ &= b + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} ; \end{aligned}$$

y como b es constante (es decir, despreciable para el caso de procesos estacionarios) y $\nabla\varepsilon_t$ es un proceso estacionario (siendo la diferencia entre dos procesos estacionarios), entonces w_t también lo es.

Nótese que al hacer la diferencia, en el proceso restante queda una constante, que es la pendiente de un crecimiento lineal determinista, por tanto, este resultado es válido para cualquier tendencia que sea una suma polinomial de orden h y cualquier proceso estacionario, es decir:

$$Z_t = p_t + \varepsilon_t ;$$

donde

$$p_t = a + bt + ct^2 + \dots + dt^h ;$$

entonces, diferenciando el proceso h veces se obtendría un proceso estacionario de promedios móviles.

3.4.2. Identificación en modelos ARIMA

Como cualquier modelo, para identificarlo, es necesario prestar atención tanto a la gráfica de la serie de tiempo de las observaciones y buscar elementos básicos como tendencia, estacionalidad, *outliers*, y comportamiento de varianza, así como a su ACF y PACF.

Pero también en la literatura (Box & Jenkins (2010)), es posible encontrar algunas pistas que ayudan para la identificación del modelo como son las siguientes:

- Gráfica de los datos: Se deben buscar elementos clave como tendencia y estacionalidad. Con esto no será posible determinar el modelo preciso; sin embargo, se logra apreciar una evidente tendencia lineal ya sea ascendente o descendente, puede ser necesaria una primera diferencia o bien si se aprecia una tendencia cuadrática se podría necesitar

una segunda diferencia. En raros casos se necesitan más de dos. Puesto que el exceso de diferenciación podría crear niveles de dependencia innecesarios en los datos. Para los casos en los que se puede apreciar una tendencia pero a la vez un incremento en la varianza de los datos se deberá considerar una transformación logarítmica o de raíz cuadrada para suavizar el comportamiento de las observaciones.

- ACF y PACF: Una vez que se ha diferenciado la serie, si el PACF de la serie diferenciada muestra una caída brusca en la autocorrelación al *lag* 1, es decir, si la serie está *subestimada*, entonces se requiere agregar un término más orden del modelo AR. Contrariamente, en el ACF de la serie diferenciada, si la autocorrelación en el primer *lag* cae repentinamente y ésta es negativa, entonces la serie está *sobre estimada* y se debe considerar agregar un término más al orden de la componente MA del modelo.

Es decir, el orden de un modelo, se basa en el comportamiento de su función de autocorrelación, que requiere de un análisis cuidadoso, pues a veces se proponen varios modelos con base a la observación de dicha función de los datos y después de ello, si se tienen varios modelos para un mismo conjunto de datos, estos tendrán que ser revisados por varios criterios como:

- A veces el que tenga menor número de parámetros.
- Examinando los errores estándar de los valores de predicción y tomando el que tenga los errores más pequeños para observaciones futuras.
- Comparar los modelos de acuerdo a estadísticas como AIC⁴ o BIC⁵, escogiendo aquel que tenga el menor valor en ellas ya que la estadística combina la estimación de la varianza con los valores del tamaño de muestra y el número de parámetros en el modelo.

Por supuesto es necesario cuidar que el número de diferencias sea el adecuado pues éste determinará si el modelo está subestimado o sobre estimado, más aún, para los modelos de memoria larga este parámetro es un número real volviendo aún más complicado determinar la exactitud a la cuál debe diferenciarse el modelo para obtener uno estacionario. En cuanto a este parámetro d de diferencias existen varias maneras de poder encontrarlo, tales como las que se explicarán más adelante en el texto.

Ya que se trabajará con procesos particulares de un modelo ARIMA, que tendrán la característica distintiva de que el parámetro de diferencias d no será un número entero, es

⁴Método que sirve para la selección de un modelo para un conjunto de datos. Es aquel que minimiza la distancia de Kullback-Leibler entre el modelo ajustado y los datos. Se define como $AIC = -2\ln(L) + 2k$ con L como la función de máxima verosimilitud del modelo y K el número de parámetros estimados en dicho modelo. Este criterio de selección toma el menor AIC para escoger el mejor modelo.

⁵Criterio de Información Bayesiano o Criterio de Schwarz, siendo $BIC(\mathcal{M}) = -2\log L(\mathcal{M}) + p(\mathcal{M}) \cdot \log(n)$, teniendo dos modelos estimados, el de menor BIC es el que se prefiere.

posible llevar a cabo el procedimiento de Box & Jenkins para la estimación y modelación de un modelo ARIMA, teniendo cuidado únicamente con el parámetro d .

Dado un conjunto de observaciones propias de una serie de tiempo, el objetivo del procedimiento Box & Jenkins es construir un modelo ARIMA, considerando las transformaciones preliminares oportunas sobre los datos, el procedimiento se enfoca en procesos invertibles estacionarios Gaussianos. Dicho procedimiento sigue los siguientes pasos:

1. Análisis preliminar: crear las condiciones tales que los datos pueden ser considerados como una realización de un proceso estocástico Gaussiano invertible y estacionario.
2. Identificación: Especificar los órdenes p, d, q del modelo ARIMA así como el comportamiento de la varianza del modelo. En este paso es importante reconocer el rol que juega el comportamiento de la función de autocorrelación empírica.
3. Estimación: Estimar los parámetros del modelo ARIMA de manera eficiente, consistente y suficiente (máxima verosimilitud).
4. Diagnóstico: Revisar si el modelo es bueno usando alguna prueba sobre los parámetros y residuales del modelo. Nótese que incluso cuando en este paso el modelo se rechaza, esto se convierte en una herramienta importante para mejorar el modelo.
5. Utilizar el modelo: Si el modelo aprueba la sección de diagnóstico, entonces se puede utilizar para interpretar un fenómeno o bien para hacer un pronóstico de éste.

Siguiendo estos pasos, lo primero sería determinar el orden del modelo de memoria larga que se propondrá, una vez teniendo esto será necesario profundizar en el comportamiento de la varianza, que tendrá un modelo propio y solo así, podrá hacerse uso del modelo para pronóstico de temperatura.

3.4.3. Modelos de memoria larga

Una amplia clase de procesos de series de tiempo se describen por la ecuación

$$(1 - L)^d Z_t = U_t;$$

donde:

- $\{Z_t\}$ es la serie de tiempo.
 - L es el operador *lag*.
 - $(1 - L)$ es el operador diferencia, el cuál se utiliza para remover tendencias en una serie de tiempo.
-

- d es una constante dentro del intervalo $(-1, 1/2)$.
- $\{U_t\}$ es un proceso estacionario.

De cumplirse lo anterior, se dice que $\{Z_t\}$ es un proceso integrado de orden d , es decir, el proceso es estacionario después de su d -ésima diferencia, además, dicho valor d determina la propiedad de memoria del proceso, donde:

- Si $d = 0$, entonces se dice que el proceso es de memoria corta.
- Si $d > 0$ y $d \in \mathbb{Z}$ se dice que el proceso tiene memoria persistente, generalmente $d = 1, 2$.
- Si $d \in \mathbb{Q}$, se dice que Z_t es un proceso fraccionalmente integrado, con los casos:
 - Si $0 < d < 1/2$ entonces Z_t es un proceso estacionario de memoria larga.
 - Si $1/2 < d < 1$, entonces Z_t no es estacionario pero tiene memoria larga, con reversión a la media.
 - Si $1 < d$ entonces Z_t es no estacionario, sin revertir a la media.

Para mayor comprensión se define la propiedad de memoria larga de una serie de tiempo.

Definición 3.4.2. *Memoria larga*

Sea $\gamma(h) = \langle Z_t, Z_{t+h} \rangle$ la función de autocovarianza en el lag h de un proceso estacionario $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$. Se define la propiedad de memoria larga como

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty.$$

De esta manera una clase de modelos de memoria larga, son los *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) introducidos por Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981) donde:

Definición 3.4.3. *Modelo ARFIMA*

Un proceso ARFIMA $\{Z_t\}$ puede definirse por

$$\Phi(L)Z_t = \Theta(L)(1-L)^{-d}\varepsilon_t; \quad (3.4.2)$$

donde $\Phi(L) = 1 + \Phi_1L + \dots + \Phi_pL^p$ y $\Theta(L) = 1 + \Theta_1L + \dots + \Theta_qL^q$ son los operadores autorregresivo y de promedios móviles respectivamente, que no tienen raíces en común y $(1-L)^{-d}$ es el operador fraccional definido por la expansión binomial

$$(1-L)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j L^j = \eta(L);$$

y $d \in \mathbb{R}$ es el parámetro de diferenciación fraccional.

Donde $\eta_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)}$.

Este tipo de modelos de memoria larga, han sido identificados con frecuencia en series de tiempo meteorológicas, en las cuales su ACF tiene un decaimiento lento y pueden interpretarse como que éstas son *integradas* de orden 1, tomando una diferencia, sin embargo, el decaimiento de la ACF de un proceso de memoria larga es un tanto diferente, ya que éste cae más rápido para el primer *lag* que en un proceso *integrado* y a su vez es mucho más lento para *lags* más grandes.

El modelo más sencillo de un proceso de memoria larga es una generalización de una caminata aleatoria, donde

$$(1-L)^d Z_t = \varepsilon_t;$$

aquí es necesario considerar que d no es un entero, así, se puede escribir, por el teorema del binomio de Newton que

$$(1-L)^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (1)^{d-i} (-L)^i = \sum_{i=0}^d \eta_i L^i;$$

y por tanto, los coeficientes de la suma se definen por

$$\eta_i = \binom{d}{i} (-1)^i = \frac{d!}{(d-i)!i!} (-1)^i = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d-i+1)} (-1)^i; \quad (3.4.3)$$

Esto último por la coincidencia de la función Gamma con la función factorial ($\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = a!$) con $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Así, para generalizar la definición, cuando d no es un entero, se puede aprovechar que la función Gamma está definida para cualquier número real, así

$$(1 - L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i L^i ;$$

donde los coeficientes de la expansión infinita están dados por (3.4.3).

3.4.4. Estacionariedad, causalidad e invertibilidad en procesos ARFIMA

El siguiente teorema muestra la existencia de una solución estacionaria a un proceso ARFIMA, incluyendo la causalidad, invertibilidad y unicidad.

Teorema 3.4.1.

Considere el proceso ARFIMA definido por (3.4.2). Suponiendo que los polinomios $\Phi(\cdot)$ y $\Theta(\cdot)$ no tienen raíces en común y que $d \in (-1, 1/2)$, entonces

1. Si las raíces de $\Phi(\cdot)$ caen fuera del círculo unitario, entonces existe una única solución estacionaria a (3.4.2) dada por

$$Z_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} ;$$

donde $\Psi(L) = (1 - L)^{-d} \Theta(L)/\Phi(L)$.

2. Si las raíces de $\Phi(\cdot)$ caen fuera del disco unitario cerrado, entonces la solución de $\{Z_t\}$ es causal.
3. Si las raíces de $\Theta(\cdot)$ caen fuera del disco unitario cerrado, entonces la solución de $\{Z_t\}$ es invertible.

Observación 3.4.1.

En el teorema anterior $d \in (-1, 1/2)$ extiende el resultado para $d \in (-1/2, 1/2)$, la cuál define invertibilidad en un proceso fraccional para $d \in (-1, 1/2)$. ∇

3.4.5. Densidad espectral de modelos ARFIMA

Bajo las condiciones establecidas en el Teorema 3.4.4, la densidad espectral para un proceso ARFIMA definido por (3.4.2) se puede escribir como

$$\begin{aligned} f_Z(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \frac{|\Theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-i\lambda})|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} [2 \sin(\frac{\lambda}{2})]^{-2d} \frac{|\Theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-i\lambda})|^2}; \end{aligned}$$

y se puede demostrar que

$$f_Z(\lambda) \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(1)|^2}{|\Phi(1)|^2} |\lambda|^{-2d},$$

para $|h| \rightarrow 0$.

Considerando un proceso ARFIMA como

$$\Phi(L)Z_t = \Theta(L)(1 - L)^{-d} \varepsilon_t.$$

Tomando de manera inversa la ecuación anterior y a $U_t = (1 - L)^d X_t$, siendo un proceso ARMA(p, q). La densidad espectral del proceso ARFIMA está dada por

$$f_Z(\lambda) = f_u(\lambda) (2 \sin(\lambda/2))^{-2d}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]; \quad (3.4.4)$$

donde $f_u(\lambda)$ es la densidad espectral del proceso U_t .

3.4.6. Función de autocovarianza

Empezando por la función de autocovarianza de un proceso ARFIMA($0, d, 0$) se tiene que

$$\gamma(h) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(1 - d)\Gamma(d)} \frac{\Gamma(h + d)}{\Gamma(1 + h - d)};$$

y por tanto la función de autocorrelación queda definida de la siguiente manera

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(1 - d)}{\Gamma(d)} \frac{\Gamma(h + d)}{\Gamma(1 + h - d)}.$$

Para el caso general de un proceso ARFIMA(p, d, q), es necesario observar que el polinomio de promedios móviles $\Phi(L)$ en (3.4.2) se puede escribir como

$$\Phi(L) = \prod_{i=1}^p (1 - \rho_i L).$$

Suponiendo que las raíces de $\Phi(L)$ tienen multiplicidad 1, puede demostrarse que

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{i=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(i) \xi_j C(d, p+i-h, \rho_j);$$

con

$$\psi(i) = \sum_{k=\max(0,i)}^{\min(q,q+i)} \theta_k \theta_{k-i};$$

$$\xi_j = \left[\rho_j \prod_{i=1}^p (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{m \neq j} (\rho_j - \rho_m) \right]^{-1};$$

y

$$C(d, h, \rho) = \frac{\gamma_0(h)}{\sigma^2} [\rho^{2p} \beta(h) + \beta(-1) - 1];$$

donde $\beta(h) = F(d+h, 1, 1-d+h, \rho)$ y $F(a, b, c, x)$ es la función Gaussiana hipergeométrica (Gradshteyn & Ryzhik (2000)).

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a \cdot b}{\gamma \cdot 1!} x + \frac{a \cdot (a+1) \cdot b \cdot (b+1)}{\gamma \cdot (\gamma+1) \cdot 2!} x^2 + \dots$$

3.4.7. Autocorrelación Parcial

Hasta el momento en la literatura no se ha encontrado una expresión explícita del PACF para un modelo ARFIMA. Sin embargo se ha encontrado que ésta tiene un comportamiento asintótico para el valor absoluto de la PACF de un *proceso de ruido fraccional*, que tiene como PACF a

$$\phi_{nj} = - \binom{n}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(n-d-j+1)}{\Gamma(-d)\Gamma(n-d+1)};$$

para $j = 1, \dots, n$. Así la autocorrelación parcial es simplemente

$$\phi_{nn} = \frac{d}{n-d};$$

y por tanto $\phi_{nn} \sim d/n$ para n grande. Así, para un proceso ARFIMA con $d \in (0, 1/2)$ se tendría

$$|\phi_{nn}| \sim \frac{d}{n} \quad n \rightarrow \infty;$$

Existe un tipo de modelos ARFIMA que poseen una estructura en el proceso de su varianza que determina la precisión del modelo. Dichas características serán presentadas a continuación, todo con la finalidad de seguir el modelo propuesto por Caporin (2008) para el comportamiento dependiente del tiempo de la temperatura.

3.4.8. Caracterización de un modelo ARFIMA

De la misma manera que un proceso ARMA(p, q) J. R. M. Hosking (1981), establece que cuando $0 < d < 1/2$ existe una constante positiva C tal que para h grande

$$\rho(h) \approx C \cdot h^{2d-1};$$

es decir, la ACF de un proceso ARFIMA decae hiperbólicamente hacia cero y no es absolutamente sumable, es decir $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \rho(h)$ no converge, justo como en la Definición 3.4.2.

3.4.9. Estimación del parámetro de diferenciación

Para determinar el orden de un modelo ARFIMA es posible seguir el procedimiento Box & Jenkins para determinar los órdenes autoregresivos y de promedios móviles, sin embargo es necesario tener cuidado con la estimación del parámetro de diferenciación fraccional d , para el que se han propuesto métodos paramétricos y semiparamétricos.

Los procedimientos de máxima verosimilitud requieren que el modelo esté especificado por completo. En cambio los métodos semiparamétricos no exigen la especificación de la componente de corto plazo o bien la componente ARMA(p, q).

A continuación se presentan algunos estimadores para el parámetro de diferenciación, de los tipos semiparamétrico y paramétrico.

1. *Estimador GPH: Geweke & Porter-Hudak (1983)*. (semiparamétrico)

Considerando la densidad espectral del proceso ARFIMA(p, d, q) de la forma (3.4.4).

Tomando logaritmo sobre esta, se obtiene

$$\ln(f_Z(\lambda_j)) = -2d \cdot \ln(2 \sin(\lambda_j/2)) + \ln(f_U(\lambda_j)).$$

Los autores muestran que para λ cercana a cero, $j = 1, 2, \dots, m \ll (n/2)$ y tal que $m/n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la estimación de d puede hacerse tomando la regresión mediante mínimos cuadrados ordinarios de

$$Y_j = c + dX_j + \varepsilon_j;$$

donde

$$Y_j = \ln(I_Z(\lambda_j)), X_j = \ln(2 \sin(\lambda_j/2))^{-2};$$

y donde

- ε_j es un proceso i.i.d.
- λ_j son las frecuencias de la serie de Fourier con $\lambda_j = 2\pi j$.

- $I_Z(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}(k) \cos(k\lambda_j) \right]$, es la j -ésima ordenada del periodograma del proceso.

Sin embargo este estimador pierde precisión en muestras finitas, y cuando existe una componente *AR* o *MA* con parámetros cerca a la unidad, el estimador es insesgado e ineficiente. (Agiakloglou, Newbold & Wohar (1993)).

2. Estimador SPR (paramétrico)

Brockwell & Davis (1991) muestran que el periodograma no es un estimador consistente de la densidad espectral. Por esto, Valderio A. Reisen (1994), da un estimador consistente como una versión suavizada del periodograma. Dicho estimador (SPR), se obtiene reemplazando la función de densidad espectral por el periodograma suavizado dado por

$$I_Z^S(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\nu}^{\nu} \kappa \left(\frac{1}{\nu} \hat{\gamma}(k) \cos(\lambda_k) \right) ;$$

donde $\kappa(\cdot)$ es la ventana de Parzen (función matemática utilizada para evitar discontinuidades en el procesamiento de datos). Así, el estimador SPR se obtiene aplicando mínimos cuadrados ordinarios al modelo de regresión anterior, usando el periodograma suavizado.

Para este estimador, solo se pierde precisión cuando el orden de la parte AR y/o MA están cerca a la unidad.

3.5. Modelos con heterocedasticidad

Para el caso de las series de tiempo climáticas, resulta interesante profundizar en el tercer paso del procedimiento de Box & Jenkins, en el cual se estudia el comportamiento de la varianza del proceso.

Con la finalidad de plantear el concepto de *heterocedasticidad*, se plantea el ejemplo del modelo de regresión clásico, que supone que los residuales e_t son idénticamente distribuidos con media cero y varianza σ^2 (es decir, $\mathbb{E}(e_i|X_i) = 0$ y $\text{Var}(e_i|X_i) = \sigma^2$) donde X_i es $\{X_{i2}, \dots, X_{ik}\}$ para $i = 1, 2, \dots, n..$

Ya que la varianza es una medida de dispersión de los valores observados de la variable dependiente (y alrededor de la línea de regresión $\beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$) homocedasticidad significa que dicha dispersión es la misma a lo largo de todas las observaciones. Sin embargo, dicha situación no siempre resulta ser cierta, en dicho caso se dice que los datos tienen la propiedad de heterocedasticidad, en donde cada observación tiene una medida de

dispersión o varianza diferente.

En el supuesto caso que se encontrara esta propiedad en los datos, sería totalmente equívoco no considerarlo para la construcción de un modelo de pronóstico, ya que depreciar el comportamiento en la varianza de los datos provocaría errores de pronóstico mucho mayores, depreciando la calidad del modelo de pronóstico y por tanto, para el caso de derivados climáticos, el modelo pondría en riesgo la ganancia/pérdida de las partes del contrato.

Han sido pocos los que han analizado modelos discretos climáticos, para la valuación de instrumentos derivados; sin embargo, en esos modelos se ha encontrado que tienen mejor precisión si se supone que la varianza tiene la propiedad de heterocedasticidad. Más aún, en las ciudades concurridas, donde por la infraestructura es posible que las mediciones de temperatura o de cualquier variable climática varíen significativamente incluso de una estación a otra. Además de ello debido a los procesos de urbanización que han modificado irreversiblemente el comportamiento meteorológico, actualmente es normal que la temperatura de un día a otro varíe en gran medida como resultado del calentamiento global. Por tanto, resulta interesante incluir dicha propiedad en los modelos de series de tiempo como lo hacen los modelos GARCH que se estudiarán a continuación.

3.5.1. Procesos GARCH(r, s)

Los modelos Autoregresivos Condicionales Heterocedásticos (ARCH) por sus siglas en inglés, fueron introducidos por Robert F. Engle (1982) y fueron extendidos por Tim Bollerslev (1986) a modelos Generalizados ARCH (GARCH). En dichos modelos el concepto clave es la *varianza condicional*, esto es, la varianza condicionada al pasado, es decir, ésta se expresa como una función lineal de los cuadrados de valores pasados de la serie de tiempo. Comenzando por la definición de un proceso GARCH, basado en sus dos primeros momentos condicionales, se tiene que:

Definición 3.5.1. *Proceso GARCH*(r, s)

Un proceso $\{\varepsilon_t\}$ es llamado proceso GARCH(r, s) si sus dos primeros momentos condicionales existen y satisfacen

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t), t \in \mathbb{Z}$.
2. Existen constantes $\omega, \alpha_i, i = 1, \dots, s$ y $\beta_j, j = 1, \dots, r$ tales que

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^s \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3.5.1)$$

La ecuación (3.5.1) también puede ser escrita de manera más sencilla como

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2, \quad t \in \mathbb{Z};$$

donde L es el operador de retraso estándar ($L^i \varepsilon_t^2 = \varepsilon_{t-i}^2$ y $L^i \sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$ para cualquier $i \in \mathbb{Z}^+$) y α y β son los polinomios de grado s, r respectivamente:

$$\alpha(L) = \sum_{i=1}^s \alpha_i L^i, \quad \beta(L) = \sum_{j=1}^r \beta_j L^j.$$

Observación 3.5.1.

Tomando, la innovación del proceso ε_t^2 , como la variable $v_j = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ y sustituyendo en (3.5.1) la variable $\sigma_{t-j}^2 = \varepsilon_{t-j}^2 - v_{t-j}$ se obtiene la representación

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^r \beta_j v_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}; \quad (3.5.2)$$

donde $p = \max\{r, s\}$, con la convención $\alpha_i = 0$ ($\beta_j = 0$) si $i > s$ ($j > r$). La ecuación (3.5.2) tiene la estructura de un modelo ARMA(p, r) que permite hacer predicciones lineales de manera más sencilla computacionalmente. Bajo algunas condiciones adicionales (estacionariedad de segundo orden de ε_t^2) es posible decir que si ε_t admite una representación GARCH(r, s), entonces ε_t^2 es un proceso ARMA(p, r). ∇

Definición 3.5.2. *Proceso GARCH(r, s) fuerte*

Sea (η_t) una sucesión i.i.d. con distribución η . El proceso $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso GARCH(p, q) fuerte (con respecto a la sucesión η_t) si:

$$\begin{cases} \varepsilon_t &= \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^s \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^r \beta_j \sigma_{t-j}^2 ; \end{cases}$$

donde α_i y β_j son constantes no negativas y ω es estrictamente positiva.

3.6. Modelo ARFIMA(p, d, q)-GARCH(r, s) sobre temperatura

En cuanto al uso de series de tiempo siempre es requerido sumo cuidado para la selección de un modelo, ya que en la literatura se han propuesto una gran lista de clases de modelos que se cree que ajustan bien a los datos. Todo autor considera tener el mejor modelo, sin embargo, estudiando concretamente la temperatura se ha aceptado generalmente que tiene la propiedad de tener memoria larga, comportamiento relacionado íntimamente con la función de autocorrelación de la serie y como una generalización de un proceso ARMA, así, dentro de una estructura para modelos con memoria larga los modelos más estudiados han sido los de tipo ARFIMA.

Como se ha visto la temperatura es un proceso no determinista, que gracias al calentamiento global y procesos de urbanización se mantiene en constante cambio, por ello el modelo de temperatura que se construya en este capítulo deberá considerar que los parámetros de este, varíen durante el tiempo, pues de ser así, la precisión del modelo podría quedarse truncada por el supuesto de que es un sistema constante, lo cuál es falso.

Esta variación en el tiempo convierte en un reto computacional en cuanto a la modelación y estimación del modelo. En este caso el modelo estimado tendrá que ser corregido y/o modificado cada determinado periodo para que la valuación goce de mayor precisión. De acuerdo a ello y a las investigaciones de Caporin (2008) y Caballero & Jewson (2002) el modelo ARFIMA considerado tendrá la propiedad de variar durante el tiempo.

Como se ha explicado los derivados climáticos sobre temperatura han sido los más utilizados por el mercado climático y por tanto mayormente estudiados, por lo que en esta área financiera es más sencillo hallar literatura relacionada con estos derivados climáticos. Sin embargo, haciendo una revisión de varias fuentes de información, son pocos los investigadores que revisan en sus artículos y publicaciones la propiedad de variación en el tiempo, que representa los hallazgos de cambios en el comportamiento de memoria de las temperaturas

observadas. Es por ello que para este modelo se considera una función periódica para la media $S(t)$, una función periódica para la varianza $\nu(t)$ y finalmente una estructura GARCH en la varianza del modelo, generando así la siguiente representación según Caporin (2008)

$$\Phi_t(L) (1 - L)^{d(t)} [T_t - S(t)] = \Theta_t(L)\varepsilon_t ; \quad (3.6.1)$$

donde $\varepsilon_t = \nu(t)\sigma_t Z_t$, $Z_t \sim N(0, 1)$ i.i.d. es decir, se supondrá que el proceso de innovación $\{Z_t\}$ es independiente e idénticamente distribuido con distribución normal de media cero y varianza unitaria, los parámetros del modelo dependerán del tiempo y σ_t^2 obedecerá a una estructura GARCH.

Observación 3.6.1.

Según Kokoszka & Taquq (1995) la forma de la ecuación (3.6.1) podría no ser única. Por ejemplo, supóngase que $\{Y_t\}$ es una solución estacionaria a (3.6.1) con $d > 0$ y sea ξ una variable aleatoria con varianza finita. Entonces el proceso estacionario $X_t = Y_t + \xi$ también es una solución a (3.6.1) ya que en dicho caso, los coeficientes $\{\pi_j\}$ de la serie $(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j L^j = \pi(L)$ son absolutamente convergente y $\pi(1) = 0$. Por ello, en el caso del mercado climático, es de mayor ayuda encontrar un proceso estacionario solución al modelo que tenga la propiedad de ser “único” y a diferencia de Caporin (2008) se tomará el modelo ARFIMA (3.6.1) con la representación (3.4.2). ∇

La aproximación por series de tiempo sobre temperatura, tiene como finalidad identificar un modelo que sea capaz de replicar los datos meteorológicos históricos. Una vez hecho esto, mediante simulaciones Monte Carlo, se estima la evolución futura de la variable subyacente al derivado climático, por tanto el índice climático basado en dicha variable y finalmente la distribución del *payoff* del contrato.

Como se sabe, la variable T_t se caracteriza por un patrón periódico fuerte en su media, que está asociado a la evolución de las estaciones durante el año, siguiendo la estructura de trabajo estándar de Campbell y Diebold (2005) se modelará T_t como se sigue

$$T_t = a + bt + \sum_{l=1}^L \alpha_l \cos\left(\frac{2lt\pi}{365}\right) + \sum_{p=1}^P \alpha_p \sin\left(\frac{2pt\pi}{365}\right) + Y_t = S(t) + Y_t ; \quad (3.6.2)$$

donde $\{Y_t\}$ es la serie estacional ajustada (la cuál puede presentar heteroscedasticidad).

Dicha manera de modelar la componente de la media como una función periódica determinista, en forma de Series de Fourier truncadas, se revisó anteriormente como una de las

formas de modelación de los parámetros dependientes del tiempo de las ecuaciones diferenciales estocásticas sobre temperatura, que contiene dos elementos principales, el primero un polinomio de tendencia que se refiere a los procesos urbanísticos que provocan alzas en las temperaturas y una función periódica sinusoidal asociada con el movimiento de la media dentro del año en cada estación.

Priorizando entonces la estructura de $\{Y_t\}$, se modela ésta con una estructura de tipo ARFIMA que intenta ajustar el comportamiento volátil en los valores de temperatura. En algunos estudios, se sugiere incorporar la característica de la dependencia del tiempo, pues se ha notado que a lo largo de la historia, el comportamiento del modelo sugiere cambios en el nivel de memoria de las mediciones durante el año, es por ello que dichos periodos de cambios, serán considerados tomando $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_S\}$ como una partición del año en S sub-periodos llamados, estaciones, por simplicidad. Nótese que S podría ser diferente de 4 y así se considerará que $S = 12$, es decir, A_i denotará el mes i , de esta manera se propone la siguiente parametrización para Y_t :

$$\Phi_t(L)Y_t = \Theta_t(L)(1-L)^{-d_t}\varepsilon_t;$$

$$d_t = \begin{cases} d_1 & t \in A_1 \\ d_2 & t \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ d_S & t \in A_S \end{cases} \quad \Phi_t(L) = \begin{cases} \Phi_1(L) & t \in A_1 \\ \Phi_2(L) & t \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_S(L) & t \in A_S \end{cases} \quad \Theta_t(L) = \begin{cases} \Theta_1(L) & t \in A_1 \\ \Theta_2(L) & t \in A_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Theta_S(L) & t \in A_S \end{cases};$$
(3.6.3)

donde d_t es el coeficiente de memoria variante en el tiempo y $\Phi_t(L)$ y $\Theta_t(L)$ son los polinomios dependientes del tiempo, AR y MA en el operador lag , respectivamente y ε es el proceso de innovación. Nótese que tomando este supuesto, los órdenes p y q de los polinomios AR y MA , podrían cambiar dependiendo del periodo $A_i \in \mathbb{A}$ donde se encuentre el modelo.

Ahora, definiendo la estructura que conduce el proceso de innovación, la varianza de ε_t debe caracterizarse por dos principales elementos: el primero, una componente periódica relacionada con el riesgo de cambio climático durante el tiempo y la segunda, una componente de heteroscedasticidad con una estructura de tipo GARCH. Siguiendo las aportaciones de Andersen y Bollerslev (1997 y 1998), se modela ε_t como un modelo multiplicativo

$$\varepsilon_t = \nu(t)\sigma(t)z_t,$$

donde el término de innovación z_t se distribuye $N(0, 1)$ i.i.d., $\sigma^2(t)$ es la varianza condicional de tipo GARCH y $\nu(t)$ es una componente de varianza periodica determinista. Según Caporin (2008) la estructura de $\nu(t)$ se sugiere de la siguiente manera

$$\log(\varepsilon_t^2) = \tilde{\varepsilon}_t = \log(\nu(t)^2) + \log(\sigma^2(t)z_t^2) = \log(\nu^2(t)) + \log(\eta_t^2) = \tilde{\nu}(t) + \tilde{\eta}_t;$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_t = \tilde{\nu}(t) + \tilde{\eta}_t &= \tilde{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^R \tilde{\alpha}_i t^i + \sum_{j=1}^W \tilde{\delta}_j \cos\left(\frac{2jt\pi}{365}\right) + \sum_{l=1}^H \tilde{\gamma}_l \sin\left(\frac{2lt\pi}{365}\right) + \tilde{\eta}_t ; \\ \nu(t) &= \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\nu}(t)\right) ;\end{aligned}\quad (3.6.4)$$

Nótese que la estructura de la varianza toma la misma forma que la de la media, en el modelo inicial, es decir, como una variable estacional con tendencia. Por otra parte, para la componente no periódica de la varianza, considerando que los datos tienen un comportamiento de memoria larga, se sugiere el modelo FIGARCH ⁶ (*Fractionally Integrated-GARCH*) como sigue:

$$\sigma^2(t) = \omega + \beta(L)\sigma_t^2 + \left[1 - \beta(L) - \varphi(L)(1 - L)^d\right] \sigma_t^2 z_t^2 ,$$

donde ω es la varianza condicional constante, $\beta(L)$ y $\varphi(L)$ son dos polinomios en el operador (*lag*) y d identifica el coeficiente de memoria larga de la varianza y para que este sea estacionario, es necesario que d sea menor a 1. Siguiendo la estructura de trabajo de Caporin (2008), se presenta en la siguiente sección la metodología propuesta en su artículo para estimación e implementación del modelo.

3.6.1. Implementación del modelo TV-ARFIMA(p, d, q)-GARCH(r, s)

La serie de pasos presentados a continuación se proponen con la finalidad de estimar el proceso para la temperatura, de manera que éste pueda ser estimado con suficiente rapidez y eficiencia computacional.

1. *Componente periódica en la media.* Los parámetros del modelo (3.6.2) pueden estimarse utilizando una regresión estándar ordinaria. Sin embargo, como los residuales y la serie ajustada Y_t presenta autocorrelación y heteroscedasticidad, pueden crecer los errores estándar. Por lo cual se sugiere usar una heteroscedasticidad de Newey-West ⁷ y autocorrelaciones consistentes con los errores estándar de manera que puedan escogerse correctamente los regresores.
2. *Estimación de la estructura ARFIMA.* Para esto, se estima la estructura ARFIMA variante en el tiempo como en (3.6.3) tomando una Cuasi-Máxima Verosimilitud, por lo que se maximiza la función de verosimilitud

$$L(d_1, \dots, d_{12}, \phi_{1,1}, \dots, \phi_{P,12}, \theta_{1,1}, \dots, \theta_{Q,12}, \sigma^2) \approx -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma^2} \right)$$

⁶Puede considerarse que la volatilidad en un modelo tiene memoria larga, cuando la autocorrelación de los cuadrados de las observaciones de la serie de tiempo, decaen muy lentamente a lo largo del tiempo. Para reproducir dicha propiedad en un modelo con heteroscedasticidad se utiliza un modelo FIGARCH.

⁷Utilizado para corregir la correlación entre errores estándar de estimación y el tiempo, en un modelo con presencia de heteroscedasticidad.

con

$$\varepsilon_t = \Theta_t(L)^{-1} \Phi_t(L) (1-L)^{d_t} \hat{y}_t$$

y

$$\hat{y}_t = x_t - \hat{\mu}_t.$$

Es decir, este paso depende de la correcta estimación del primer paso. Nótese que el polinomio de memoria larga, tiene la siguiente expansión dependiente del tiempo

$$(1-L)^{d_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(d_t)$$

$$\pi_0(d_t) = 1, \quad \pi_j(d_t) = \prod_{1 \leq i \leq j} \frac{i-1-d_t}{i}.$$

3. *Estimación de la varianza:* Para obtener los coeficientes estimados en (3.6.4) se utiliza una estimación por mínimos cuadrados en los residuales estimados considerando una transformación logarítmica. Dada la presencia de correlación en los residuales, es decir, un comportamiento GARCH en σ_t^2 , los errores estándar tienen que ser estimados utilizando una corrección Newey-West.
4. *Estimación de la estructura GARCH en los residuales estandarizados* $\hat{\eta}_t = \hat{v}_t \hat{\varepsilon}_t$. De la misma manera, se considera una Cuasi-Máxima Verosimilitud ⁸, para determinar los coeficientes que maximicen:

$$L(\omega, \lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r) \approx -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_t^2) + \frac{\hat{\eta}_t^2}{\sigma_t^2} \right);$$

donde σ_t^2 sigue la ecuación (3.6.4). Después de esto, únicamente se calculan los residuales estandarizados $\hat{z}_t = \hat{\sigma}_t^{-1} \hat{\eta}_t^2$ los cuales podrían ser utilizados para identificar una posible distribución y así mejorar los pasos 2 y 4 utilizando una mejor función de verosimilitud.

3.7. Modelación y pronóstico

Para el modelo que se presentó anteriormente, al ser un modelo realmente complejo visto desde un punto de vista computacional existen limitados estudios para el comportamiento asintótico de los coeficientes estimados, es decir, la estructura dependiente del tiempo

⁸La *Cuasi-Máxima Verosimilitud* es esencialmente el mismo método que se usa en Máxima Verosimilitud (ML), la diferencia clave es que en CML se permite una aproximación (buena o mala) de la función de verosimilitud, mientras que el método convencional ML supone que la función de verosimilitud postulada es correcta.

incorpora un nivel de dificultad mayor para la estimación y uso del modelo para fines de pronóstico de la variable de temperatura.

Sin embargo, el modelo que se presentó considera en sí, un vasto conjunto de aportaciones matemáticas que hasta el momento se han realizado en el área de modelación discreta para derivados climáticos, considerándolo así como uno de los mejores métodos de estimación del proceso de temperatura para la valuación de derivados climáticos.

Es posible encontrar información relacionada con modelación discreta, para la valuación de derivados climáticos, sin embargo los modelos utilizados cuentan con una estructura más simple o tienen un menor número de parámetros a estimar. Motivo por el que se sigue trabajando para mejorar esta estructura, pues se ha encontrado que los modelos suelen mostrar un decaimiento en la función de autocorrelación perdiendo precisión en el comportamiento estacional a largo plazo. Esto lleva a una subestimación de los valores de temperatura, y considerando que se necesita hacer pronóstico de observaciones diarias o bien de un periodo completo de interés para el contrato, los modelos fallan.

Capítulo 4

Derivados climáticos sobre precipitación

Los capítulos anteriores se centraron a derivados climáticos sobre temperatura, ya que estos instrumentos son los que más se negocian actualmente y por tanto son los más estudiados. Esto sucede debido a que el mercado energético es el que más utiliza estos instrumentos financieros y sus ganancias están altamente correlacionadas con el comportamiento de la temperatura. Por tanto, la literatura en la última década ha estado enfocada principalmente a modelos cuyo activo subyacente es la temperatura, además, el mercado de derivados climáticos en el *Chicago Mercantile Exchange* (CME) está compuesto 99 % por temperatura y el 1 % restante es para contratos *Pacific Rim* (PAC) en Japón, precipitación y velocidad del viento para algunas ciudades de Europa.

Cabe señalar que hasta el 2011 el CME aceptó comercializar contratos sobre precipitación y hasta ahora el monto total de este tipo de contratos ha sido casi nulo, pues las empresas aún no confían del todo en la modelación de precipitación como para entrar en un contrato de derivados climáticos sobre esta.

Sin embargo, como se menciona en el primer capítulo, el comportamiento de la temperatura en la atmósfera determina casi en su totalidad el comportamiento de la precipitación y velocidad del viento. Si la temperatura aumenta entonces también se eleva la probabilidad de que las lluvias suban de intensidad y se presenten en un gran número de ciudades por lo que empresas (cuyas ganancias se vean afectadas o beneficiadas por la precipitación) así como gobiernos (que requieran hacer reparaciones de daños causados por la precipitación) sentirán más necesidad de protegerse y así utilizar derivados climáticos sobre precipitación como alternativa.

A continuación se presentan algunos conceptos necesarios para una mejor comprensión de los derivados climáticos sobre precipitación.

4.1. Humedad atmosférica y precipitación

La atmósfera contiene una cantidad escasa de vapor de agua en su composición; sin embargo, es uno de los gases atmosféricos más interesantes por estudiar ya que éste genera fenómenos que mantienen en constante cambio el clima del planeta, y es indispensable destacar las razones por las cuales es de interés:

1. Cuanto mayor sea la cantidad de vapor de agua en el aire, será mayor la capacidad de la atmósfera para generar precipitaciones y a su vez tormentas eléctricas.
2. La cantidad de vapor de agua representa la energía potencial de condensación que se libera, formando nubes que son únicamente vehículos de energía que fácilmente se transportan de un lugar a otro con la energía del viento.

Dentro de la atmósfera el vapor del agua sigue un proceso compuesto de 4 fases:

- *Evaporación*: Proceso por el que el agua en estado líquido pasa a un estado gaseoso.
- *Condensación*: Este es inverso a la evaporación, es decir, el vapor de agua (gas) pasa a un estado líquido.
- *Sublimación*: Proceso por el que el hielo pasa al estado gaseoso sin pasar por el estado líquido.
- *Precipitación*: Es la caída de agua en su estado líquido (lluvia) o sólido (nieve y granizo) hacia la superficie terrestre. Estrictamente existen dos tipos de eventos de precipitación:
 - *Convectiva*: La *convección* es una forma de transmisión de calor que se efectúa únicamente en los fluidos como resultado del movimiento de porciones de un fluido que se desplazan de la parte más caliente a la parte más fría. Por tanto, la precipitación *convectiva* ocurre cuando la superficie terrestre en un punto se vuelve más caliente que sus alrededores, provocando inestabilidad en la humedad atmosférica, debido a la evaporación violenta. De esta manera se forman nubes convectivas como la *cumulonimbus*¹, que provoca precipitaciones que caen rápidamente y con alta intensidad.
 - *Eventos de gran escala o precipitación estratiforme*. Esta ocurre cuando grandes masas de aire (nubes) se elevan, moviéndose unas sobre otras y así provocando precipitación.

Esto quiere decir, que los modelos de instrumentos financieros de derivados climáticos sobre precipitación pueden enfocarse a las lluvias y nevadas, ya que ambos eventos pueden provocar pérdidas significativas.

¹Nube de gran escala en forma de columna, formada por aire cálido y húmedo que puede desencadenar lluvias intensas y tormentas eléctricas.

4.1.1. El ciclo hidrológico

Este ciclo es uno de los procesos más importantes que todo el tiempo se lleva a cabo, ya que sin la existencia de éste, la vida en el planeta Tierra no sería posible. El primer paso se da en los mares y ríos, comenzando por la evaporación del agua. Posteriormente, ese vapor de agua es arrastrado por las corrientes de viento hacia los continentes, de esa manera, el agua concentrada en las alturas se condensa al sufrir una baja de temperatura y esta cae al suelo y posteriormente escurre al subsuelo o bien llena los ríos y lagos y estos desembocan en el océano y así volviendo a su punto inicial.

Es indispensable destacar que la capacidad que el aire tiene para retener vapor de agua depende de la temperatura, entre más caliente, se pueden acumular más moléculas de agua en el aire esperando a una etapa de enfriamiento para así condensarse y convertirse en precipitación. En otras palabras, en un escenario de calentamiento global la intensidad de las tormentas en todo el mundo sería tan fuerte que cada vez que lloviera sería una catástrofe, ya que mientras la temperatura comience a elevarse continuamente, la capacidad de la atmósfera para retener agua sería mayor.

Por tanto, habría etapas en las que las sequías abundarían el planeta, pero al llegar el anochecer o bien a cualquier baja de temperatura, el aire alcanzaría su *punto de rocío* (el cual se define más adelante) y toda el agua condensada caería sin control, creando tormentas de nieve, tormentas de granizo, de lluvia, ventiscas, sistemas de baja presión, tormentas eléctricas, huracanes o ciclones. Por tanto, se presentan afectaciones a ciudades enteras y empresas que dependan del comportamiento de ésta, inclusive a las que no, sucediendo de manera prematura e inesperada en comparación a las que ahora suelen presentar.

4.2. Correlación temperatura-precipitación

La temperatura al *punto de rocío*, es aquella en la cual las nubes o bien vehículos de transporte para vapor de agua, pierden su capacidad para retener el agua que contienen, es ese punto en la temperatura a la que comienza a llover. Asimismo, dado que una mayor temperatura permite que se retenga una mayor cantidad de vapor de agua en la atmósfera existe una relación entre subidas de temperatura y la intensidad de las precipitaciones.

B.J. ter Kuile, (2009) muestra la relación, de dependencia existente entre valores de precipitación y temperatura. En su metodología supone que el último 5% de los datos (refiriéndose a las observaciones más altas) para una base de datos de mediciones de precipitación, se puede modelar usando una distribución Pareto Generalizada (GPD, por sus siglas en inglés). Un punto importante para entender los cambios extremos en la precipitación es la relación *Clausius-Clapeyron*, que expresa la cantidad de vapor de agua en la

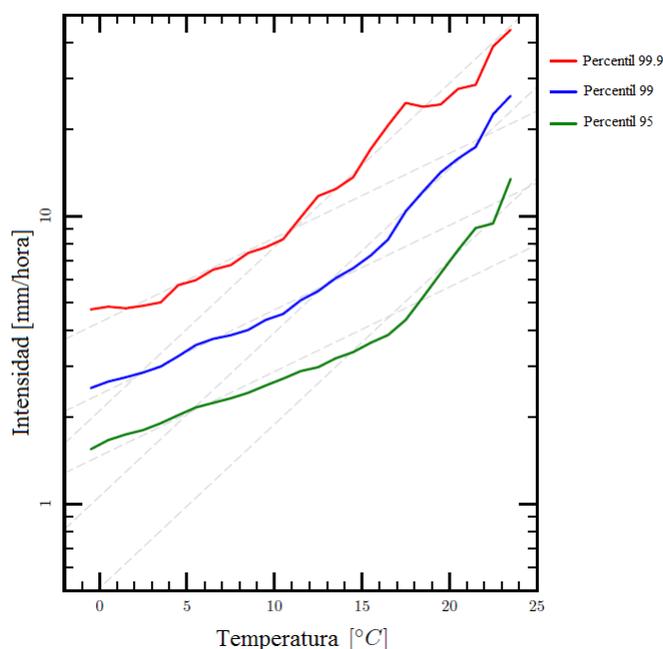


Figura 4.1: Fuente: B.J. ter Kuile, *The relation between temperature and precipitation*, Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut. 2009.

atmósfera como una función de la temperatura y presión atmosférica.

En un primer análisis (Figura 4.1) se muestran los percentiles de precipitación 95 %, 99 % y 99.9 % como función de la temperatura promedio diaria, y cuyo valor se obtiene, realizando un ajuste de una distribución GPD al último 5 % de los datos. (B.J. ter Kuile, 2009)

Donde se observa que es una relación casi directa entre alzas en temperatura e intensidad de la precipitación. Esto significa que para umbrales de temperatura entre 10 y 25°C la acumulación de precipitación en el cielo, es capaz de provocar lluvias con intensidades mayores a 10 milímetros.

Para hacer una clasificación en términos de los tipos de precipitación que se mencionaron con anterioridad (convectivos y de gran escala), se utiliza una variable conocida como código climático (CC) para diferenciar la clase de eventos. Para este análisis se separa esta variable en dos grupos, un $CC \geq 80$ y otro $CC < 80$ (un CC mayor a 80 está asociado a un evento de precipitación convectiva o intensa, mientras que uno menor a 80 se asocia a

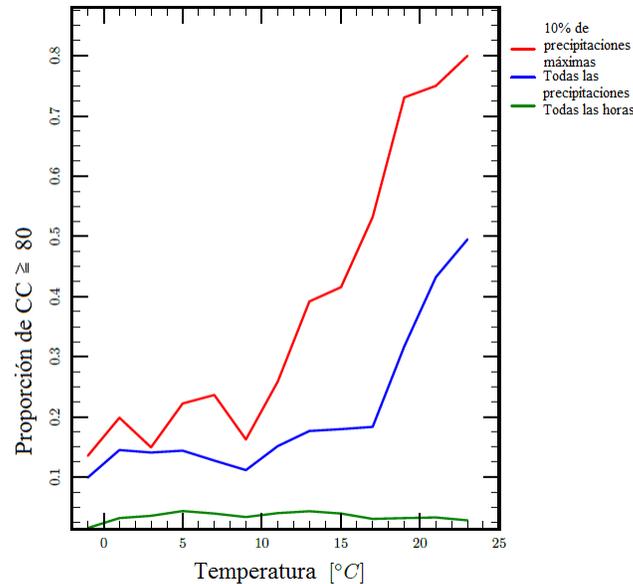


Figura 4.2: Fuente: B.J. ter Kuile, *The relation between temperature and precipitation*, Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut. 2009.

escasa o nula precipitación), de manera que en la Figura 4.2 se representan proporciones de códigos climáticos igual o mayores a 80, mostrando observaciones para el 10 % de las horas más intensas de lluvia. En este gráfico se puede observar que la proporción de $CC \geq 80$ es mucho mayor para eventos de precipitación a gran escala que para todos los eventos, esto es una consecuencia de que un gran número de horas secas (sin precipitación) tienen un $CC < 80$. Ese 10 % de horas de precipitación con una proporción mayor a 80 indican que es más probable tener eventos de precipitación extrema, o a gran escala, que eventos *convectivos*.

Tomando ahora de manera conjunta la relación Clausis-Clapeyron vista en la Figura 4.1 y la variable de diferenciación de eventos de precipitación vista en la Figura 4.2. Se observa en la Figura 4.3 que precipitaciones convectivas son el resultado de un incremento en la pendiente de los percentiles de precipitación como función de la temperatura.

Hasta ahora, la modelación de un índice de precipitación para a un contrato de derivados climáticos, se hace de manera independiente, es decir, sólo se enfoca la atención a mediciones de precipitación. Sin embargo, Kuile (2009) establece que existe una relación importante entre el comportamiento de la temperatura y el de la precipitación, por lo que es posible pensar en un modelo que bajo alguna transformación paramétrica o bien condicionado a un umbral de temperaturas sería posible determinar un modelo conjunto para la

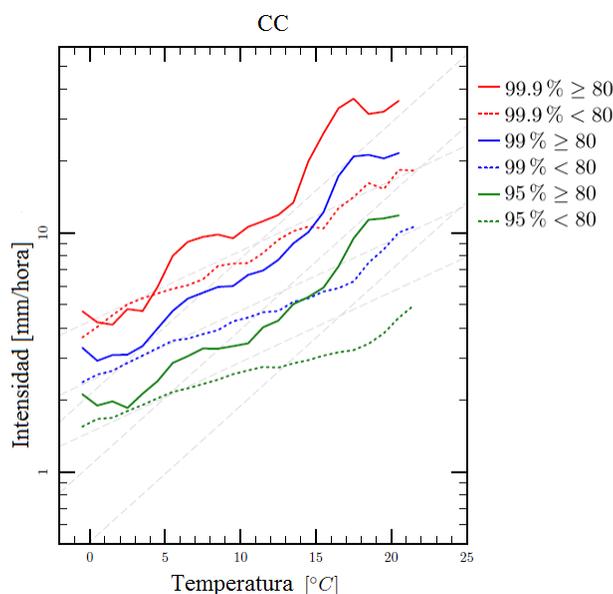


Figura 4.3: Fuente: B.J. ter Kuile, *The relation between temperature and precipitation*, Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut. 2009.

valuación de un derivado climático ya sea sobre temperatura o bien precipitación.

4.3. Diferencias entre un modelo de temperatura y uno de precipitación

Aún habiendo la posibilidad de usar un modelo conjunto para la valuación de un derivado climático, en este capítulo se estudia únicamente un modelo para precipitación. Pero para llegar a ello existen algunas peculiaridades por las que vale la pena prestar atención al caso de la modelación de precipitación.

De manera opuesta a los modelos de temperatura, en los derivados sobre precipitación si se desea hacer una modelación diaria de la cantidad de lluvia, debe considerarse que éste es un evento binario, es decir, no existen puntos intermedios entre la ocurrencia o no de ésta. Por lo que no es natural modelar esta variable subyacente como un movimiento Browniano. Más aún, el comportamiento de la precipitación no muestra un camino suave o de crecimiento paulatino, ya que es un proceso que puede mostrar saltos abruptos y en ocasiones extremos.

La precipitación sólida o líquida, se considerará como un evento con propiedad Markoviana, es decir, que es un evento que depende únicamente de la última observación, ya que dentro de su dinámica estocástica, la probabilidad de lluvia de un día a otro puede

considerarse más alta si es que el día anterior fue un día lluvioso. También, es importante considerar que la precipitación es una variable con muchas mediciones nulas, al existir periodos secos y mojados en toda región del planeta, no todos los días del año llueve, puesto que la distribución de los datos está concentrada en el cero. Para el caso de un enfoque discreto, la modelación con series de tiempo enfrenta problemas al tratarse de un proceso no estacionario y no existe una media estacional a la cual el proceso revierta.

Estas diferencias complican estadística y probabilísticamente representar la precipitación en un modelo climático. La estructura de un modelo debe permitir incrementos repentinos o bien valores extremos, en respuesta a este problema los índices de precipitación para instrumentos del CME consideran uno del tipo “acumulado”, es decir, se suman las mediciones de precipitación durante el periodo de tiempo del contrato y al final si el valor del índice supera un valor preestablecido entonces hay un pago para el comprador.

4.4. Modelo multiplicativo para modelación de precipitación

Brenda López (2013), se propone un procedimiento de valuación de un contrato climático $F_{CR}(t; \tau_1, \tau_2)$ enfocado a encontrar la distribución del índice de precipitación acumulada (CR, por sus siglas en inglés) CR_t , definido como la suma de precipitación durante el periodo $[\tau_1, \tau_2]$, es decir,

$$CR_t = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} R_t;$$

donde R_t denota la precipitación del día t .

Después, se toma la esperanza condicional tomando la información disponible hasta el momento t , es decir, \mathcal{F}_t (la σ -álgebra generada por las observaciones pasadas) bajo una medida de riesgo neutral \mathbb{Q} ², de igual manera que para el caso de derivados climáticos sobre temperatura. Es decir, el precio libre de arbitraje, para un contrato futuro sobre la acumulación de lluvia $F_{CR}(t, \tau_1, \tau_2)$, está dado por

$$e^{-r(\tau_2-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} (R_t - F_{CR}(t, \tau_1, \tau_2)) \middle| \mathcal{F}_t \right] = 0 ;$$

donde r es la tasa de interés compuesta continua a la cuál se descuenta la esperanza bajo la transformada de Esscher.

²La existencia de una medida equivalente \mathbb{Q} puede considerarse cierta en mercados viables (aquellos para los cuáles no existan oportunidades de arbitraje), esto por el primer teorema fundamental de la valuación de activos.

Como F_{CR} es \mathcal{F}_t -adaptado, entonces el precio futuro de un contrato CR está dado por:

$$F_{\text{CR}}(t; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}^Q[CR_t(\tau_1, \tau_2)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^Q \left[\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} R_t | \mathcal{F}_t \right] ; \quad (4.4.1)$$

donde R_t es la cantidad de precipitación al tiempo de ocurrencia t .

A diferencia del caso de temperatura, cuando se realiza un cambio de medida, para considerar el precio de mercado de riesgo, se utiliza el teorema de Girsanov para obtener una martingala equivalente bajo \mathbb{Q} . En este caso esa medida equivalente se encuentra utilizando la transformación de Esscher, la cual se puede ver como una generalización del teorema de Girsanov para procesos de saltos³, esto en el único sentido de que el teorema de Girsanov es un cambio de medida que preserva las propiedades de normalidad de la distribución del proceso browniano, de manera similar la transformada de Esscher conserva las propiedades distribucionales de un proceso de saltos en el sentido de que transforma su función de distribución acumulada, modificando el argumento por una transformación lineal, es decir, ésta preserva la forma de la distribución del índice después del cambio de medida.

4.4.1. Transformada de Esscher de riesgo neutral

El mercado climático como se mencionó es un mercado incompleto, ya que en éste no existen activos que se puedan comercializar y por tanto es imposible construir un portafolio de replica. Por tanto, solo es posible determinar intervalos para el precio de instrumentos derivados climáticos, que estarán determinados por el ínfimo y el supremo de los valores esperados del índice bajo \mathbb{Q} traídos a valor presente. Para escoger la medida equivalente \mathbb{Q} se utiliza la transformada de Esscher parametrizada por θ , que representa el precio de mercado de riesgo.

Gerber y Shiu (1994), utilizaron la transformada de Esscher en un sentido financiero, extendiendo el cambio de medida para una variable aleatoria a un proceso estocástico y aplicándolo a resolver un problema de valuación de opciones. Además mostraron que cuando el mercado es incompleto, la transformada de Esscher da una medida de riesgo neutral que puede justificarse como la representación del deseo del inversionista para maximizar sus ganancias esperadas.

La finalidad de la transformada de Esscher es cambiar la función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria X a una nueva densidad de probabilidad $f_X(x; \theta)$ dada por:

$$f_X(x; \theta) = \frac{e^{\theta x} f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_X(x) dx}. \quad (4.4.2)$$

³Proceso estocástico a tiempo discreto, cuyos movimientos son denominados como: saltos, se modela como un proceso Poisson.

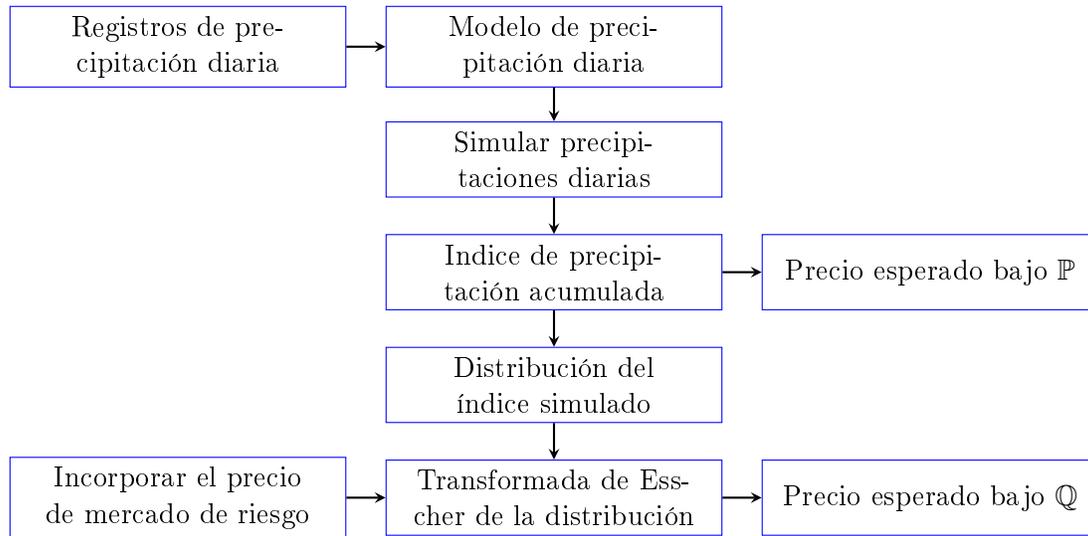


Figura 4.4: Estructura de modelación general. Fuente: *Pricing Rainfall Derivatives at the CME*, Brenda López, et. al. (2013).

Observación 4.4.1.

En la ecuación (4.4.2) es posible ver que el denominador es la función generadora de momentos de la variable aleatoria X ($\mathcal{M}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)$) evaluada en θ . ∇

Una ventaja del uso de la transformada de Esscher, es que se puede aplicar a cualquier distribución $f_X(x)$ y que las propiedades estadísticas del modelo se conservan, esto en el sentido de que el factor de riesgo del activo subyacente de un contrato de derivados sigue siendo independiente de los incrementos del proceso estocástico que éste sigue, después de hacer el cambio de medida.

4.5. Modelo de precipitación diaria

En la Figura 4.4 se observa la metodología utilizada hasta el momento para modelar la precipitación, donde la cantidad de lluvia R_t se describe como el producto de un proceso de cantidad de lluvia r_t por un proceso de ocurrencia X_t

$$R_t = r_t \cdot X_t ; \tag{4.5.1}$$

donde las variables r_t y X_t se modelan de manera independiente en secciones posteriores.

4.6. Proceso de ocurrencia

El proceso de ocurrencia $\{X_t\}$ se modela como un proceso binario, en donde $X_t = 1$ para un día lluvioso y $X_t = 0$ para un día seco, de tal manera que si

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si no llueve} \\ 1 & \text{si llueve;} \end{cases}$$

entonces $\{X_t\}$ es un proceso de Markov de dos estados, lo que implica que la probabilidad de que llueva el día t depende únicamente de las condiciones del día $t - 1$. El proceso se describe mediante las probabilidades de transición p_t^{01} y p_t^{11} que capturan la probabilidad de que llueva basándose en si el día anterior fue un día lluvioso:

$$\begin{aligned} p_t^{01} &= \mathbb{P}[X_t = 1 | X_{t-1} = 0] \\ p_t^{11} &= \mathbb{P}[X_t = 1 | X_{t-1} = 1]; \end{aligned}$$

Brenda López *et. al.* (2013), modela las probabilidades de transición utilizando Series de Fourier ya que éstas cambian diariamente durante el año.

Los coeficientes de la serie se estiman maximizando las funciones de log-verosimilitud (Woolhiser & Pegram, (1979)), y el orden de la serie de Fourier se termina utilizando el criterio de Akaike (AIC). Además las probabilidades permanecen constantes entre años, es decir, $p_t^{x1} = p_{t+365}^{x1}$ con $x = 0, 1$.

Este proceso de ocurrencia puede simularse de manera recursiva, utilizando una variable aleatoria uniforme $u_{1,t} \sim \text{Unif}(0, 1)$ con valor inicial X_0 , de la siguiente manera

$$X_t^{sim} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{1,t} \leq p_t^{x1} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases};$$

Nótese que p_t^{x1} requiere conocer el valor del proceso de ocurrencia del día anterior X_{t-1} para así poder decidir si usar p_t^{01} o bien p_t^{11} .

4.7. Proceso de cantidad de lluvia

Continuando con el trabajo de Brenda López (2013), el proceso de monto o cantidad de lluvia r_t se supone seguir una distribución exponencial mixta de acuerdo a la siguiente ecuación

$$f(r_t) = \frac{\alpha_t}{\beta_t} \exp\left(\frac{-r_t}{\beta_t}\right) + \frac{1 - \alpha_t}{\gamma_t} \exp\left(\frac{-r_t}{\gamma_t}\right); \quad (4.7.1)$$

donde $\beta_t, \gamma_t \geq 0$ y $0 < \alpha_t < 1$. Así (4.7.1) es la suma de sus distribuciones exponenciales una con una media grande β_t y otra con una media $\gamma_t < \beta_t$, combinadas mediante el parámetro

α_t . Los coeficientes también se estiman utilizando series de Fourier truncadas, donde los coeficientes de la serie se estiman maximizando la función de log-verosimilitud y finalmente el orden se determina a partir del criterio AIC.

Cuando se estiman los parámetros α_t, β_t y γ_t , el proceso de monto de lluvia, puede simularse con dos variables aleatorias independientes uniformes $u_{2,t}, u_{3,t} \sim Unif(0, 1)$ independientes ambas de $u_{1,t}$ mediante:

$$r_t^{sim} = r_{\min} - \delta_t \log(u_{2,t}) ;$$

donde r_{\min} describe el mínimo monto que se detecta como lluvia (0.01 pulgadas = 0.254 mm) y δ_t está dado por

$$\delta_t = \begin{cases} \beta_t & \text{si } u_{3,t} \leq \alpha_{t,k} \\ \gamma_t & \text{si } u_{3,t} > \alpha_{t,k} ; \end{cases}$$

La elección de $\alpha_{t,k}$ depende de a partir de qué valor de precipitación ésta se considere extrema o bien ligera.

Después de realizar la simulación de r_t y X_t entonces es posible simular el comportamiento futuro de R_t , al repetir esta simulación un número considerable de veces entonces será posible encontrar una distribución para el índice acumulado y entonces poder utilizar la transformación de Esscher para incorporar el precio de mercado de riesgo.

Como se puede apreciar en el modelo (4.7.1), el hecho de combinar dos distribuciones en las que una tiene una media más pequeña de la otra, tiene como finalidad estimar valores para precipitaciones pequeñas y extremas, ponderando las distribuciones dependiendo del valor de α_t .

El propósito del texto, en la siguiente sección es proponer un modelo mixto diferente al propuesto por Brenda López *et. al.* (2013), para lo cuál primero se deben presentar algunos conceptos en teoría de valores extremos para mayor entendimiento.

4.8. Teoría de valores extremos aplicado a la modelación de precipitación

Actualmente es un tema de interés para algunos sectores industriales saber el comportamiento de la precipitación, pero particularmente en eventos extremos que puedan tener un impacto económico a gran escala. El calentamiento global es el que ha modificado el comportamiento de las lluvias en todo el mundo, retrasando o adelantando las épocas de lluvia o bien provocando periodos de sequías largos y un periodo muy corto de lluvias intensas. Una de las razones por las que los modelos de precipitación existentes fallen, es que en muchos casos se han considerado distribuciones de probabilidad que tienen colas ligeras y no son de ayuda para aproximar la los datos para lluvias intensas y por tanto el impacto

económico o social que provoquen no puede ser estimado.

Ante esto, se han desarrollado modelos que se concentran únicamente en cantidades grandes de lluvia y descartan las observaciones pequeñas. Esta clase de modelos pertenecen a la familia de distribuciones de la Teoría de Valores Extremos (EVT, por sus siglas en inglés), que en la mayoría de los casos tienen mejor precisión para el caso de precipitaciones extremas.

Con el motivo de proponer un modelo diferente al considerado en la sección anterior, se comienza por un breve contexto dedicado a la introducción de teoría de valores extremos.

4.8.1. Teoría de valores extremos

Suponga que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución F . Sea $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ el máximo de n variables aleatorias. Y sea $w(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$ el punto extremo superior de F , entonces

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = (F(x))^n ;$$

es decir, M_n converge casi seguramente a $w(F)$. Bajo ciertas circunstancias, puede demostrarse que existen constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ y $H(\cdot)$ una función continua, tales que

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = (F(a_n x + b_n))^n \rightarrow H(x) ; \quad (4.8.1)$$

si $n \rightarrow \infty$.

De la misma manera

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) \rightarrow H\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) = H^*(x) ; \quad (4.8.2)$$

con $H^*(x)$ continua.

Si se cumplen (4.8.1) y (4.8.2) para elecciones correctas de a_n y b_n , entonces se dice que H es una distribución acumulada de valores extremos y F está dentro del dominio de atracción de H , denotado por $F \in C(H)$.

El teorema de Fisher-Tippett & Gnedenko asegura que si existe H , entonces debe ser de alguno de los tres tipos:

$$\begin{aligned} H(x) &= \exp(-e^{-x}), & x \in \mathbb{R} & \quad (\text{Gumbel}) \\ H(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \end{cases}, & & \quad (\text{Frechet}) \\ H(x) &= \begin{cases} \exp(-|x|^\alpha) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, & & \quad (\text{Weibull}) ; \end{aligned}$$

Estos tres tipos de distribuciones se pueden agrupar mediante la distribución de valores extremos generalizada (GEV, por sus siglas en inglés)

$$H(x) = \exp \left\{ - \left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\psi} \right) \right)_+^{-1/\xi} \right\} ; \quad (4.8.3)$$

donde $x_+ := \max(x, 0)$, μ es un parámetro de posición, $\psi > 0$ es un parámetro de escala y ξ es parámetro de forma. Si $\xi \rightarrow 0$ corresponde al caso Gumbel, $\xi > 0$ a la distribución Frechet con $\alpha = 1/\xi$ y $\xi < 0$ corresponde al caso Weibull con $\alpha = -1/\xi$.

Evidentemente el valor de ξ determina el comportamiento de la cola de H , de la siguiente manera:

- $\xi > 0$ representa el caso de cola pesada.
- $\xi = 0$ representa una cola exponencial.
- $\xi < 0$ es una cola corta o acotada, con punto final finito en $\mu - \xi/\psi$.

Definición 4.8.1.

Se dice que H es *máxima-estable* si

$$H^k(a_k x + b_k) = H(x), k = 1, 2, \dots ;$$

para algunas a_k y b_k .

En otras palabras, tomando potencias de H resulta que sólo se hacen cambios en los parámetros de posición y escala. La conexión con los extremos, es que una distribución es máxima-estable si y sólo si es una distribución del tipo GEV.

4.8.2. Distribución Pareto Generalizada (GPD)

Definición 4.8.2.

La variable aleatoria X tiene distribución Pareto Generalizada $GP(\sigma(u), \xi, u)$ si la función de distribución acumulada de X está dada por

$$GP(\sigma(u), \xi, u) = \left\{ 1 - \left\{ 1 + \xi \left(\frac{x}{\sigma(u)} \right) \right\}_+^{-1/\xi}, \quad \xi \neq 0 \quad \sigma(u) > 0 \right.$$

donde u denota el umbral de observaciones extremas, y $\sigma(u)$, ξ son los parámetros de escala y forma de la distribución.

Balkema & Haan (1974) y Pickands (1975), demuestran que si $F \in C(H)$, donde H es $\text{GEV}(\sigma, \xi)$, para alguna σ, ξ , se cumple que

$$\lim_{u \rightarrow w(F)} \sup_{0 < x < w(F) - u} \left| \frac{1 - F(u + x)}{1 - F(u)} - \left\{ 1 + \xi \left(\frac{x}{\sigma(u)} \right) \right\}_+^{-1/\xi} \right| \rightarrow 0; \quad (4.8.4)$$

en donde $\left\{ 1 + \xi \left(\frac{x}{\sigma(u)} \right) \right\}_+^{-1/\xi}$ es la función Pareto Generalizada (GPD) y está definida para cualquiera de los casos $0 < x < \infty$ ($\xi \geq 0$) o $0 < x < -\sigma(u)/\xi$ ($\xi < 0$). Donde ξ y σ son los parámetros de forma y escala de la distribución, respectivamente.

Observación 4.8.1.

Se puede notar que dentro del límite (4.8.4) se tiene la distribución de x condicionada a que exceda un umbral (límite) establecido u . Por ello la distribución GPD se conoce también como *Excedente de umbrales*. Motivo por el cuál es la función de distribución más utilizada para la modelación de eventos extremos de precipitación, pues un contrato climático sobre precipitación en la mayoría de los casos, realizará un pago si el nivel de lluvia durante un periodo $[\tau_1, \tau_2]$ supera un umbral preestablecido. ∇

La distribución GPD es máxima-estable en el sentido de que el exponente ξ no depende del umbral que se escoja, siempre y cuando sea lo suficientemente grande para que se cumpla la convergencia. Esto es realmente un problema, pues es complicado saber si el umbral es lo suficientemente grande. Para el caso de datos de precipitación, lo más sencillo es establecer varios umbrales y hacer pruebas de convergencia a éstos, considerando que entre más grande sea este límite las observaciones que lo excedan serán cada vez menos y por tanto el error en la varianza puede incrementar considerablemente.

4.8.3. Momentos de la función GPD

Los momentos de la distribución Pareto Generalizada, se pueden obtener cuando ξ es suficientemente pequeña, es decir si, $\xi \rightarrow 0$ es posible demostrar que la Pareto Generalizada tiende a una función exponencial $GP(X, 0, \sigma(u)) \rightarrow 1 - \exp(-x/\xi)$. Por tanto, la función generadora de momentos de la Pareto Generalizada, se aproxima a la de una exponencial⁴, con $\lambda = 1/\xi$. Es decir,

$$\mathbb{E} \left(1 + \xi \frac{X}{\sigma(u)} \right)^r = \frac{1}{1 - r \cdot \xi};$$

⁴Si $X \sim \exp(\lambda)$ entonces su función generadora de momentos, está dada por $M_X(r) = \lambda/(\lambda - r)$

si $(1 - r \cdot \xi) > 0$. El r -ésimo momento existe si $\xi < 1/r$ y por tanto, todos los momentos existen para $-1/2 < \xi < 0$. La media y varianza entonces, son

$$\frac{\sigma(u)}{1 - \xi} \quad \text{y} \quad \frac{\sigma^2(u)}{(1 - \xi)^2 (1 - 2\xi)} ;$$

respectivamente.

Se denota la ecuación (4.8.5) como $GP(\sigma(u), \xi, u)$. Modelo que establece la base de la modelación de excedencias de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre un umbral u .

$$F(x) \approx 1 - w(u) \left\{ 1 + \xi \left(\frac{x - u}{\sigma(u)} \right) \right\}^{-1/\xi} ; \quad (4.8.5)$$

donde $w(u) = 1 - F(u)$ es la probabilidad de exceder el umbral u ya sea $u < x < \infty$ ($\xi \geq 0$) o bien $u < x < u - \sigma(u)/\xi$ ($\xi < 0$).

Esta distribución se utiliza para modelación del nivel de retorno⁵, definiendo una variable x_T tal que $F(x_T) = 1 - 1/(nw(T))$, donde n es el número de observaciones independientes e idénticamente distribuidas durante un año. Invirtiendo (4.8.5) se obtiene

$$x_T = u - \frac{\sigma(u)}{\xi} \left\{ 1 - (nw(T))^\xi \right\}.$$

La estimación máxima verosímil de $w(u)$ es la proporción empírica de las excedencias sobre el umbral u , mientras que la estimación máxima verosímil de ξ y $\sigma(u)$ solo existen para muestras grandes para las cuales $\xi > -1$ y éstas estimaciones entonces son asintóticamente normales y eficientes cuando $\xi > -1/2$ (Grimshaw, (1993)).

4.9. Modelo Gamma-Pareto Generalizado para el monto de precipitación r_t

Una de las aplicaciones de la teoría de valores extremos, es que ésta ayuda a modelar el número de excedencias de lluvia, es decir, cantidades extremas de lluvia que sean más grandes que un umbral establecido u , indicando que esta variable se puede aproximar mediante

⁵Los conceptos de *nivel de retorno* y *periodo de retorno* se utilizan para expresar información acerca de un evento extraño, como lo puede ser un evento meteorológico extremo. El *nivel de retorno* con un *periodo de retorno* de $T = 1/p$ años, es un umbral grande $x(p) = u$ cuya probabilidad de exceder dicho umbral es p . Por ejemplo si la probabilidad de una inundación es $p = 0.01$, entonces su periodo de retorno (hasta que vuelva a suceder) es $T = 1/0.01 = 100$ años.

una distribución GPD si el número de observaciones y el umbral son lo suficientemente grandes. En otras palabras, la probabilidad de que la cantidad de lluvia r_t sea más grande que m dado que $r_t > u$ está dada por

$$\mathbb{P}(r_t > m | r_t > u) = \left(1 + \xi \left(\frac{r_t - u}{\sigma(u)}\right)\right)_+^{-1/\xi}. \quad (4.9.1)$$

Recordando la ecuación (4.7.1) en esta sección se propone un modelo mixto Gamma-Pareto Generalizado, en el cual las lluvias ligeras se modelan con una distribución Gamma, ya que esta refleja las colas ligeras de la precipitación mediana y ligera con buena precisión, mientras que la distribución GPD engloba aquellas precipitaciones extremas (Frigessi *et al.*, (2003)). De esta manera

$$f(r_t) = (1 - \alpha_t)g_1(r_t) + \alpha_t g_2(r_t); \quad (4.9.2)$$

donde $g_1(r_t)$ denota una distribución Gamma valuada en r_t y $g_2(r_t)$ es una distribución GPD valuada en r_t .

En donde la elección de α_t se toma a partir del valor que tome la ecuación

$$\alpha_t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{r_t - \mu_t}{\tau_t}\right); \quad (4.9.3)$$

donde μ_t representa la precipitación promedio y τ_t representa la velocidad de transición entre g_1 y g_2 .

Este modelo se presenta con el argumento de estudios meteorológicos donde las precipitaciones ligeras y extremas son modeladas con la mayor precisión utilizando una distribución Gamma y Pareto Generalizada, respectivamente. (M. Vrac & P. Naveau (2007)).

De esta forma se propone que el monto de lluvia r_t en el modelo multiplicativo (4.5.1), sea modelado mediante (4.9.2).

Observación 4.9.1.

En los modelos propuestos por Vrac, (2007) y Brenda López *et al.* (2013) los parámetros del modelo mixto para simular el comportamiento del monto de lluvia, se suponen dependientes del tiempo. ▽

4.10. Estacionalidad en un modelo de precipitación

Cuando se aplica la teoría de valores extremos, implícitamente se supone que la precipitación es un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas,

lo que por supuesto no es cierto debido a ser un evento cuya ocurrencia está altamente determinada por el comportamiento del día anterior, es decir, tiene persistencia (de poco más de un par de días) y es un evento estacional. Con la finalidad de manejar esta estacionalidad, se propone dividir un año en 4 partes (estaciones del año) y así aplicar EVT a cada una de las estaciones. Al hacer esto, resultarían 4 diferentes distribuciones GEV, G_1, \dots, G_4 , una para cada estación. O bien esta división anual también se puede hacer para cada mes, teniendo 12 periodos por año, así se obtiene un modelo con mayor precisión a corto plazo, mostrando la probabilidad de excedencias por mes con una GEV diferente. Dicha aproximación ajusta mejor a una serie de observaciones de precipitación diaria.

4.11. Contratos derivados climáticos sobre precipitación

Una vez que se haya completado la simulación y modelación de los datos futuros de precipitación, es decir, teniendo un conjunto de observaciones para el modelo multiplicativo (4.5.1), entonces es posible tomar el modelo acumulado $CR_t(\tau_1, \tau_2) = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} R_t$ y así encontrar el valor esperado para un índice de acumulación de lluvia $F_{CR}(t, \tau_1, \tau_2)$, tomando esperanza con respecto a la medida de riesgo neutral obtenida por la transformada de Esscher es posible encontrar el precio justo para el instrumento derivado climático. O bien simular un gran número de valores para el índice y obtener el precio mediante una aproximación Monte Carlo.

Teniendo el valor de dicho índice para el periodo (τ_1, τ_2) , se puede seguir cualquier estructura de un contrato financiero derivado climático, como las propuestas en el primer capítulo de este trabajo, ocupando el valor del índice de precipitación como I .

Conclusión

Los derivados climáticos son instrumentos financieros que recientemente comenzaron a desarrollarse. Como se analiza en este trabajo, las consecuencias del cambio climático repercuten en los ingresos de las compañías y éstas necesitan una herramienta para resarcir sus pérdidas. Asimismo se rescatan ideas acerca de la ventaja del uso de productos financieros derivados climáticos sobre el de un seguro. Son instrumentos con mucho potencial, no sólo para utilizarse en potencias mundiales, sino en todo el mundo, pues el calentamiento global se distribuye por todo el planeta en distintas formas y magnitudes. Cabe señalar que están diseñados para eventos no catastróficos, al menos para los que hoy día son llamados así, pero estos incrementarán su fuerza e impacto y en un futuro no muy lejano serán más frecuentes, por lo que la utilización de este tipo de contratos pudiera incrementarse.

Queda mucho por hacer en este tema, debido a que la información disponible es de baja calidad, los modelos climáticos fallan al presentarse eventos que jamás habían sucedido y generalmente los investigadores que comprenden de mejor manera este tipo de modelación cuentan con el equipo en paleoclimatología, antropología, arqueología y paleobotánica, para comprender el comportamiento de los datos. Incrementando la calidad de mediciones meteorológicas es posible elaborar un análisis HBA, o encontrar una distribución de un índice mediante simulaciones Monte Carlo. Asimismo, hablar del precio de mercado de riesgo en un modelo es algo hasta ahora casi siempre teórico pues para tomarlo a consideración es necesario contar con precios de contratos reales que sirvan de ajuste para los precios estimados.

Los principales enfoques que se encuentran en la literatura son el continuo y discreto, cada uno con sus respectivos argumentos. Dentro de un análisis continuo se justifica que la temperatura es un proceso continuo, mientras que en un enfoque discreto se argumenta debido a que las bases de datos de mediciones de temperatura se encuentran los datos en tiempo discreto. Pero para ambos casos se sabe que los parámetros de un modelo dependen del tiempo, problema que convierte en un complicado reto computacional la simulación y pronóstico de procesos climáticos, ya que dichos parámetros tienen que actualizarse a cada momento en el tiempo. Razón por la que la precisión de los modelos permanece acotada, pues para aligerar la condición de dependencia del tiempo, se suponen parámetros constantes, constantes por periodos de tiempo o bien modelos más sencillos, como lo es el HBA.

El principal índice climático en el mercado es hasta la fecha, la temperatura, pues además las condiciones atmosféricas dependen en gran parte del comportamiento de ésta y el principal mercado que utiliza los derivados climáticos es el mercado energético, cuya relación con el comportamiento de la temperatura es alta. Sin embargo, recientemente surge el interés por mejorar los modelos para precipitación y velocidad del viento, ambos vagamente estudiados para la valuación de derivados climáticos, debido a las complejidades que surgen para su modelación, motivo por el que las empresas prefieren utilizar un contrato en temperatura aunque sus pérdidas sean provocadas específicamente por precipitación o velocidad del viento.

Para el caso de precipitación, es complicado encontrar avances literarios, pues hasta el momento se tiene desarrollado muy poco. En el último capítulo se revisa que ajustar un modelo ponderado Gamma (para observaciones de precipitación moderada) y Pareto Generalizado (para precipitaciones extremas) puede ser un buen modelo para la simulación de datos de precipitación, tomando en cuenta que la distribución Pareto Generalizada pertenece a la familia de distribuciones de valores extremos y se encuentra que ésta ajusta de buena manera para las colas pesadas. El único problema es la determinación del umbral para el cuál la precipitación se considere como extrema, ya que éste depende de cada zona geográfica y de una serie de simulaciones a los datos.

Como se revisa a lo largo del trabajo, el mercado climático es un mercado incompleto, en el sentido de que no se pueden construir portafolios de réplica para el activo subyacente del contrato o bien que la información estocástica es mayor que la información determinista que se tiene de los datos. Es un mercado ilíquido y que para la valuación de estos contratos se requiere hacer un cambio de medida de riesgo neutral para tomar esperanza condicional sobre el valor esperado del *payoff*. Dicho cambio de medida se logra mediante la utilización del Teorema de Girsanov que convierte el proceso estocástico en una martingala. Sin embargo, al realizar dicho cambio de medida se encuentra que existen muchas martingalas equivalentes que pudieran determinar un precio diferente, por lo que el valor del contrato se considera como un valor dentro de un intervalo definido por el ínfimo y el supremo de las simulaciones realizadas para la valuación del contrato.

Por otra parte, los enfoques de series de tiempo para la modelación de contratos de temperatura y el uso de valores extremos para la simulación de precipitación son dos propuestas recientes para la modelación de índices climáticos que deben robustecerse para que éstas sean mayormente utilizadas. Para el caso de series de tiempo sobre temperatura, el problema surge en la inmensa cantidad de modelos propuestos y que no se tiene con certeza cuál es el mejor de ellos, en este trabajo se presenta una composición de las aportaciones de la literatura, consolidando un sólo modelo.

En cuanto a la utilización de teoría de valores extremos para precipitación, se llega a un mayor número de dificultades ya que la determinación del umbral que establece una precipitación extrema debe escogerse en base a una serie de simulaciones y si éste no se escoge de la mejor manera, la varianza de los datos podría incrementarse o reducirse de manera inadecuada y el modelo carecería de precisión, de la misma manera el parámetro de ponderación del modelo Gamma-Pareto Generalizado se elige con base a observaciones históricas y experiencia por parte de los compradores o vendedores de contratos de derivados climáticos.

Por último, en el Capítulo 4 se revisó la modelación del índice que entra como activo subyacente de un contrato de derivados sobre precipitación pero no se especificó un modelo para un contrato de derivados como en el Capítulo 2 para el caso de temperatura. Sin embargo, la atención se enfoca en la modelación del índice para así escoger la opción o contrato de derivados deseada por el cliente y continuar a su valuación mediante la esperanza condicional del valor esperado del *payoff* tomando en este caso la transformada de Esscher para lograr el cambio de medida de riesgo neutral adecuado. No se especifica para alguna opción en específico ya que no se sabe si en el mercado la utilización de opciones es común o bien de contratos *swap* o de *futuros*.

El trabajo cierra de manera satisfactoria el enfoque que se deseó desde un principio. Sin embargo, se encontraron durante el camino, áreas de oportunidad en cuanto a la modelación de datos climáticos, que representan un reto computacional y matemático pero que más adelante podría mejorarse.

Apéndices

Apéndice A

Aspectos generales de simulación

A.1. Simulación estocástica

Existen dos objetivos principales en la simulación de una trayectoria de un proceso solución a una ecuación diferencial, el primero es el interés en la trayectoria completa o bien en el valor esperado de alguna función del proceso como pueden ser sus momentos o su distribución. Los métodos de simulación frecuentemente se basan en aproximaciones discretas de una solución continua a una ecuación diferencial estocástica, los cuáles están clasificados de acuerdo a sus diferentes propiedades, en la literatura se pueden encontrar principalmente dos criterios: los de convergencia *fuerte* y *débil*. Que se explican a continuación.

A.1.1. Convergencia de orden fuerte

Una aproximación a tiempo discreto $Y^{(\delta)}$ de un proceso a tiempo continuo Y , con δ como el máximo incremento de tiempo de la discretización, se dice ser de orden *fuerte* de convergencia γ para Y si para cualquier horizonte de tiempo fijo T se cumple que

$$\mathbb{E} \left(\left| Y_T^{(\delta)} - Y_T \right| \right) \leq C \cdot \delta^\gamma, \quad \text{para todo } \delta < \delta_0 ;$$

con $\delta_0 > 0$ y C es una constante independiente de δ .

A.1.2. Convergencia de orden débil

De manera similar a la convergencia fuerte, $Y^{(\delta)}$ converge débilmente a Y con orden β si para cualquier horizonte de tiempo fijo T y para toda función g continua y diferenciable con crecimiento polinomial, se cumple que

$$\left| \mathbb{E}_g(Y_T) - \mathbb{E}_g(Y_T^{(\delta)}) \right| \leq C \cdot \delta^\beta, \quad \text{para todo } \delta < \delta_0 ;$$

con $\delta_0 > 0$ y C una constante independiente de δ .

Los esquemas de aproximación de algún orden de convergencia fuerte frecuentemente tienen mayor orden que los de convergencia débil, un caso de esto es la aproximación o esquema de Euler, que es de convergencia fuerte con orden $\gamma = \frac{1}{2}$ y débilmente convergente con orden $\beta = 1$ (bajo ciertas condiciones de suavidad en los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica). A continuación se presentan algunos métodos de aproximación numérica.

A.2. Métodos de simulación para ecuaciones diferenciales estocásticas

A.2.1. Aproximación de Euler

Uno de los métodos de aproximación más usado en la práctica es el esquema de *Euler*, que originalmente se utilizaba para generar soluciones para ecuaciones diferenciales determinísticas. La idea del algoritmo es la siguiente. Dado un proceso de Itô $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t ;$$

con solución inicial determinística X_0 y partición del intervalo $[0, T]$, tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. La aproximación de Euler de X es un proceso estocástico continuo Y que satisface el esquema iterativo

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i, t_i)(t_{i+1} - t_i) + b(Y_i, t_i)(W_{i+1} - W_i) ; \quad (\text{A.2.1})$$

para $i = 0, 1, \dots, N - 1$ con $Y_0 = X_0$ donde $Y_i = Y_{t_i}$ y $W_i = W_{t_i}$, usualmente el incremento $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ es constante, es decir $\Delta t = 1/N$. Entre dos puntos de tiempo cualesquiera t_i y t_{i+1} el proceso puede definirse considerando una interpolación lineal del tal manera que Y_t

$$Y_t = Y_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(Y_{i+1} - Y_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

De (A.2.1) puede simularse el proceso Y donde únicamente es necesario simular el incremento del proceso de Wiener. Como se mencionó el esquema de *Euler* es de orden $\gamma = \frac{1}{2}$ y es de convergencia fuerte, es decir, existen constantes $C > 0$ y $\delta_0 > 0$ tales que

$$\mathbb{E}(|X_T - Y_{t_N}|) \leq C \cdot \delta^{0.5} ;$$

para cualquier partición de $[0, T]$ con tamaño máximo $\delta \in (0, \delta_0)$.

A.2.1.1. Simulación de una trayectoria Browniana

Para el esquema anterior, sólo resta saber como simular un proceso Browniano, para esto, dado un incremento de tiempo fijo $\Delta t > 0$, se puede simular fácilmente una trayectoria de un proceso de Wiener en el intervalo de tiempo $[0, T]$. De hecho, para $W_{\Delta t}$ se cumple que

$$W_{\Delta t} = W_{\Delta t} - W_0 \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1);$$

lo cual se cumple para cualquier incremento $W_{t+\Delta t} - W_t$, es decir

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t) \sim \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1);$$

por tanto, es posible simular una trayectoria mediante el siguiente procedimiento.

Dividir el intervalo $[0, T]$ en una partición tal que $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ con $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Establecer $i = 1$ y $W_0 = W_{t_1} = 0$ e iterar el siguiente algoritmo:

1. Generar un (nuevo) número aleatorio z de una distribución normal estándar
2. $i = i + 1$
3. Hacer $W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + z \cdot \sqrt{\Delta t}$
4. Si $i \leq N$, iterar desde 1.

Este método de simulación es válido solamente en los puntos de la partición, pero entre cualesquiera dos puntos t_i y t_{i+1} la trayectoria usualmente se aproxima mediante una interpolación lineal.

A.2.1.2. Ejemplo para un modelo de temperatura

Para el modelo (2.4.2) sobre la temperatura, utilizando el método de Euler, es posible aproximar su solución como se muestra a continuación:

Primero, podemos ver a (2.4.2) $dT_t = dS(t) + \kappa(t)(T_t - S(t))dt + \sigma(t)dB_t$ como

$$dT_t = \frac{dS(t)}{dt} + \kappa(t)(T_t - S(t))dt + \sigma(t)dB_t;$$

donde $\frac{dS(t)}{dt} = A + \omega C \cos(\omega t + \psi)$. Sea A_t el proceso aproximado a T_t entonces, por (A.2.1) se tiene:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= A_t + (A + \omega C \cos(\omega t + \psi) + \kappa(t)(A_t - S(t)))\Delta t + \sigma(t)(B_{t+1} - B_t) \\ A_{t+1} &= A_t + A\Delta t + \omega C \cos(\omega t + \psi)\Delta t + \kappa(t)A_t\Delta t - \kappa(t)S(t)\Delta t + \sigma(t)(B_{\Delta t}); \end{aligned}$$

ya que $\Delta t = 1$ para todo t y $W_{t+1} - W_t \sim N(0, 1)$ se tiene finalmente :

$$A_{t+1} = (1 - \kappa(t))A_t + A + \omega C \cos(\omega t + \psi) - \kappa S(t) + \sigma(t)(B_{\Delta t}) ; \quad (\text{A.2.2})$$

donde $\kappa(t)$, $S(t)$ y $\sigma(t)$ pueden modelarse con los métodos propuestos en secciones anteriores.

A.2.2. Aproximación de Milstein

El esquema de Milstein hace uso del lema de Itô para incrementar la precisión de la aproximación al proceso añadiendo un término de segundo orden. Si se denota b_x como la derivada parcial de $b(x, t)$ con respecto a x , entonces la aproximación de Milstein es

$$\begin{aligned} Y_{i+1} = & Y_i + a(Y_i, t_i)(t_{i+1} - t_i) + b(Y_i, t_i)(W_{i+1} - W_i) \\ & + \frac{1}{2}b(Y_i, t_i)b_x(Y_i, t_i) \left\{ (W_{i+1} - W_i)^2 - (t_{i+1} - t_i) \right\} ; \end{aligned}$$

o bien

$$Y_{i+1} = Y_i + a\Delta t + b\Delta W_t + \frac{1}{2}b \cdot b_x \left\{ (\Delta W_t)^2 - \Delta t \right\} ;$$

este esquema de aproximación tiene orden de convergencia fuerte y débil igual a 1, es decir, existen constantes $C > 0$ y $\delta_0 > 0$ tales que para cualquier función polinomial g

$$|\mathbb{E}(g(X_t)) - \mathbb{E}(g(Y_{t_N}))| \leq C \cdot \delta ;$$

para cualquier partición de tamaño máximo $\delta \in (0, \delta_0)$.

Para este caso, el ejemplo quedaría de la misma manera que para el Método de Euler, ya que el término $b_x(Y_i, t_i)$ (parcial de $b(Y_i, t_i)$ con respecto a X_t) es cero para toda t , haciendo que el proceso aproximado sea exactamente igual que (A.2.2).

Referencias

- Alonso, A. & García, C. (2012), *Time series analysis: Integrated and long memory processes*. Universidad Carlos III de Madrid.
- Andersen & Bollerslev (1997,1998) *Answerins the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecast*. International Economic Review.
- Agiakloglou, C., P. Newbold, and M. Wohar, (1993), *Bias in an estimator of the fractional difference parameter*. *Journal of Time Series Analysis*.
- Benth, F. & Benth, J. (2012), *Modeling and pricing in financial markets for weather derivatives*. World Scientific Publishing.
- Bibby, B. & Sorensen, M., (1995) *Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes*. Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability.
- Caballero, R. & Jewson, A. (2002), *Long Memory in surface air temperature: detection, modelling and applications to weather derivative valuation*. *Climate Research, Forthcoming*.
- Campbell, S. & Diebold, F., (2005), *Weather forecasting for weather derivatives*. Journal of the American Statistical Association.
- Caporin, M. & Pres, J. (2006), *A memory time varying ARFIMA model for weather derivative pricing*. Department of Economics, University of Padova.
- Cao, M. & Jason, W. (2004), *Weather derivatives valuation and market price of weather risk*. *Journal of Futures Markets*.
- Carmon, R. (1999), *Calibrating degree day options*. In: *3rd seminar on stochastic analysis, random field and applications*. Ecole Polytechnique de Lausanne, Ascona, Switzerland.
- Coles, S. & Davison, A. (2008), *Statistical modelling of extreme values*. Springer.

-
- Francesca, B. (2005), *The weather derivatives market: modelling and pricing temperature*. Faculty of Economics, University of Lugano.
 - Franco, C. & Zakoian, J. (2010), *GARCH Models: Structure, statistical inference and financial applications*. Wiley.
 - Frigessi, O. & H. Rue. (2003) *A dynamic mixture model for unsupervised tail estimation without threshold selection*. *Extremes*.
 - Gerber, H. & Elias, S. (1994) *Option pricing by Esscher Transforms*, *Transactions of the Society of Actuaries*.
 - Grieser, J. (2012), *Analyzing Extreme Rain*. Journal of Applied Meteorology and Climatology.
 - Hosking, J. (1981) *Fractional differencing*, *Biometrika*, Vol. 68.
 - Jewson, S., & Brix, A. (2005), *Weather Derivative Valuation: The meteorological, financial and mathematical foundations*. Cambridge. 10-28.
 - Kénitra, M. (2005), *Temperature stochastic modeling and weather derivatives pricing: empirical study with Moroccan data*. African Statistical Journal.
 - Kokoszka, PS. & Taqqu, MS. (1995) *Fractional ARIMA with stable innovations*. *Stochastic Processes Application*.
 - Kuile, B.J., (2009), *The relation between temperature and precipitation*. Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut.
 - Lopez Cabrera, B., Odening, M. & Ritter, M. (2013), *Pricing rainfall derivatives at the CME*. Humboldt-Universität zu Berlin.
 - Lopez Cabrera, B., Karl, W. (2009), *Implied market price of weather risk*. Center for Applied Statistics & Economics, Humboldt-Universität zu Berlin.
 - M. Iacus, S. (2008), *Simulation and inference for stochastic differential equations, with R examples*. Springer.
 - Palma, W. (2007), *Long-memory time series: Theory and methods*. 40-47, 116-120. Wiley.
 - Peter, J. B. (1991), *Time Series: Theory and Methods*. Springer.
 - Pigl, J. (2007), *Weather derivatives*. Department of Monetary Theory and Policy, Faculty of Finance and Accounting, University of Economics, Praga.
-

-
- Riebeek, H. & Simmon, R. (2005), *The rising cost of natural hazards*. Earth Observatory. NASA.
 - Robert F. Engle (1982) *Autoregressive conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*, Vol. 50.
 - Smith, R. (2009), *Extreme Value Theory*. Department of Statistical and Operations Research, University of North California.
 - Vrac, M. & Naveau, P. (2007), *Stochastic downscaling of precipitation: From dry events to heavy rainfalls*. AGU Journal, Water Resources Research.
 - Valderio, R. (2005), *Local bootstrap approaches for fractional differential parameter estimation in ARFIMA models*. Federal University of Tocantins.
 - Woolhiser & Pegram (1979), *Maximum Likelihood Estimation of Fourier Coefficients to Describe Seasonal Variations of Parameters in Stochastic Daily Precipitation Models*. Department of Civil Engineering, University of Nasal, Republic of South Africa.
 - Zapranis, A. & Alexandridis, A. (2013), *Weather derivatives: Modeling and pricing weather-related risk*. Springer. 1-16, 55-80, 165-189.
 - Zapranis, A. & Alexandridis, A. (2007), *Weather derivatives pricing: Modeling the seasonal residual variance of an Ornstein-Uhlenbeck temperature process with neutral networks*. Department of Accounting and Finance, University of Macedonia of Economic and Social Sciences.
-

