



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ALGUNAS COTAS  
UNIVERSALES PARA LA  
FUNCIÓN DESPLAZAMIENTO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M Á T I C O  
P R E S E N T A:**

**ARIEL MEDINA ANGEL**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.**

**2017**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno  
Medina  
Angel  
Ariel  
53 09 26 13  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
412051588
2. Datos del tutor  
Dr.  
Antonio  
Lascurain  
Orive
3. Datos del sinodal 1  
Dr.  
Pierre Michel  
Bayard
4. Datos del sinodal 2  
Dr.  
Alberto León  
Kushner  
Schnur
5. Datos del sinodal 3  
M. en C.  
José Antonio  
Gómez  
Ortega
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Vinicio Antonio  
Gómez  
Gutiérrez
7. Datos del trabajo escrito.  
Algunas cotas universales para la función desplazamiento  
41 p  
2017





# Introducción

La teoría de los grupos fuchsianos ha cobrado mucha importancia en las últimas décadas. Los trabajos de Alfhors y Bers impulsaron esta rama en la década de los 70s. Posteriormente, los trabajos de Thurston y Jørgensen revolucionaron la manera de estudiar las tres variedades, al mostrar que casi todas éstas tienen estructura hiperbólica cf. [2]. Posteriormente el estudio de estos grupos ha incidido de manera fundamental en el estudio de los mapeos cuasiconformes, la dinámica holomorfa y la teoría de Teichmüller.

El propósito de esta tesis es establecer cotas universales para la función desplazamiento para grupos discretos no elementales. La meta es acotar inferiormente a

$$M(g, h) = \inf_z \max\{\sinh \frac{1}{2}\rho(z, gz), \sinh \frac{1}{2}\rho(z, hz)\}$$

y

$$P(g, h) = \inf_z \sinh \frac{1}{2}\rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2}\rho(z, hz),$$

donde  $g$  y  $h$  son elementos que generan al grupo. La motivación es probar varios resultados que conducen al siguiente resultado:

*Si  $g$  y  $h$  generan un grupo discreto no elemental, entonces  $M(g, h) \geq 0.1318\dots$  y esta cota inferior es alcanzada por dos generadores elípticos del grupo triangular  $(0 : 2, 3, 7)$ .*

Esta cota universal fue obtenida por Yamada [9]. La existencia de una cota universal fue probada previamente por Marden [4]. La demostración de estos hechos pueden consultarse en [1], pp. 321-323.

Comenzamos estableciendo cotas para  $P(g, h)$  en los casos en que  $g$  es parabólica y  $h$  puede ser parabólica o hiperbólica. En ambos casos se establece la cota  $P(g, h) \geq \frac{1}{4}$ . Si el grupo que generan las transformaciones es

triangular, las cotas se mejoran, siendo para el caso parabólico-parabólico  $P(g, h) \geq 1$ , y para el caso parabólico-hiperbólico se tiene que  $P(g, h) \geq \frac{1}{2}$  (Teorema 2.0.1).

Se prueba que dichas cotas se alcanzan, lo que prueba que son las mejores (Ejemplo 1). Para esto usamos las funciones

$$g(z) = z + 1, \quad h(z) = \frac{z}{z + 1}, \quad f(z) = \frac{2z + 3}{z + 2},$$

donde  $g$  y  $h$  son parabólicas y  $f$  es hiperbólica. También se da una familia de funciones que exhiben la cota cuando el grupo generado por dos parabólicas no es triangular, demostrando que la cota dada para este caso es la mejor (véase el Ejemplo 2). Posteriormente se muestra que existe un grupo generado por un elemento parabólico  $g$  y uno elíptico  $h$  de tal manera que  $f = gh$  es un elemento hiperbólico y  $\langle g, h \rangle = \langle f, g \rangle$ , pero se observa que  $P(g, h) = 0$  y  $P(g, h) > \frac{1}{2}$ . Ésto muestra que este parámetro depende de la geometría de los generadores que se elijan y no del grupo generado (véase el Ejemplo 3). Se observa previamente que  $M(g, h)^2 \geq P(g, h)$ .

Es más conveniente trabajar con una cota para  $P(g, h)$ , dado que si alguno de los términos de  $\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz)$  es pequeño, el otro término es necesariamente grande. Ésto no se sigue de una cota para  $M(g, h)$ . Sin embargo en ambos casos, la evaluación de las mejores cotas inferiores está íntimamente ligado a las restricciones geométricas de  $g$  y  $h$ . Pero para los casos en que uno de los generadores es elíptico, se tiene que  $P(g, h) = 0$ , se trabaja entonces en acotar  $M(g, h)$ .

Un resultado prueba que si  $g$  es parabólica y  $h$  elíptica de orden  $q$ , si  $q \geq 3$  entonces  $M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{7}}$ . En específico, si  $q = 2$  entonces  $M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{8}}$ . En ambos casos, en la marcha de la demostración del resultado se exhiben las transformaciones con las cuales se alcanza dicha cota. La cota se mejora para el caso en que el grupo es triangular, en general, si  $q \geq 2$ , se tiene que  $M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , y se exhibe el grupo para el cual la cota se alcanza (véase el Teorema 2.0.2).

Otro resultado de esta tesis es que para el caso en que ambos generadores son elípticos de órdenes  $p$  y  $q$  respectivamente, se establece que si el grupo no es triangular, la desigualdad es estricta, es decir

$$M(g, h) > \left[ \frac{(\cos \frac{\pi}{p} + \cos \frac{\pi}{q})^2}{4 - (\cos \frac{\pi}{p} - \cos \frac{\pi}{q})^2} \right]^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

De hecho, se mejora la cota a desigualdad estricta en comparación a la que aparece en [1] p. 313 , que solamente establece que es mayor o igual. En el mismo teorema se prueba que efectivamente la cota establecida por Yamada se alcanza considerando a  $g$  y  $h$  elípticas de órdenes  $p = 2$  y  $q = 3$ , respectivamente cuando generan un  $(2, 3, 7)$ -grupo triangular (Teorema 2.0.5).

Para la demostración de este último teorema, se usa otro resultado el cual establece que dadas las transformaciones  $g$  y  $h$  elípticas de órdenes  $p$  y  $q$  respectivamente, tal que generan un  $(p, q, r)$ -grupo triangular, discreto y no elemental, si  $u$  y  $v$  son sus respectivos puntos fijos, entonces

$$\cosh\rho(u, v) \geq \frac{\cos\frac{\pi}{p} \cos\frac{\pi}{q} + \cos\frac{\pi}{r}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{p} \operatorname{sen}\frac{\pi}{q}}$$

(Teorema 2.0.4).

En la demostración de estos teoremas, se usan algunos trucos geométricos que nos ayudan a facilitar el cálculo de las cotas para  $M(g, h)$ , esto estableciendo *intervalos* en los cuales la cota se debe alcanzar, reduciendo los cálculos a estos conjuntos más fáciles de trabajar. El razonamiento para esto tiene cierta belleza y facilita la demostración.

A lo largo de toda la tesis se usan herramientas avanzadas de los grupos fuchsianos como son el teorema de Poincaré, la desigualdad de Jørgensen , la signatura de un grupo, teoremas sobre grupos triangulares, y resultados de trigonometría hiperbólica.





# Contenido

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. La métrica hiperbólica . . . . .	1
1.2. Clasificación de las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	3
1.3. La función desplazamiento . . . . .	5
1.4. Grupos de Isometrías . . . . .	9
1.5. Desigualdad de Jørgensen . . . . .	12
1.6. Regiones fundamentales y Teorema de Poincaré . . . . .	13
<b>2. Cotas universales para la función desplazamiento</b>	<b>17</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>



## CAPÍTULO 1

# Preliminares

### 1.1. La métrica hiperbólica

**Definición 1** Sea  $A$  una región en  $\mathbb{R}^n$ , una densidad en  $A$  es una función continua  $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Las densidades nos permiten medir longitudes de curvas de distintas maneras, en especial, dada una densidad  $\lambda$  en una región  $A$  y  $\gamma$  una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $A$ , definimos la  $\lambda$ -longitud de  $\gamma$  como

$$|\gamma|_\lambda = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

donde  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ . Esta función se extiende de manera natural a curvas  $\mathcal{C}^1$  por tramos. Ésto define una métrica dada por

$$\rho(z, w) = \inf \{ |\gamma|_\lambda \mid \gamma(a) = z, \gamma(b) = w \}.$$

En particular, el modelo para el plano hiperbólico del semiplano superior  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[z] > 0\}$ , se define con la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im}[z]},$$

llamada métrica hiperbólica (véase [1] p. 129 y [3] pp. 43-47.)

Usaremos también el modelo del disco de Poincaré

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

provisto con la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}.$$

Es bien conocido que las isometrías conformes en  $\mathbb{H}^2$  son los elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Respectivamente, las isometrías conformes en  $\Delta$  son aquellas definidas por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Otro hecho conocido que usaremos es que la distancia hiperbólica en  $\mathbb{H}^2$  está dada por la fórmula

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w]}. \quad (1.1)$$

Asímismo, en el disco la distancia está dada por

$$\sinh^2 \frac{1}{2}\rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}. \quad (1.2)$$

Usaremos también la siguiente fórmula que se deriva fácilmente de (1.1)

$$\sinh \frac{1}{2}\rho(z, w) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w])^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.3)$$

Todas estas se deducen de la invarianza de ciertas expresiones bajo la acción de las isometrías en el plano hiperbólico, dependiendo del modelo en el cual se trabaja (véase [3] pp. 52-53, 77).

Otro hecho que también es conocido es que la transformación conocida como la función de Cayley dada por

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es una biyección conforme del semiplano superior  $\mathbb{H}^2$  y el disco unitario  $\Delta$ , que además es una isometría hiperbólica entre ambos modelos del plano hiperbólico. Esto se sigue de la definición de las densidades en cada uno de los modelos. Más aún, la densidad en  $\Delta$  se define a partir de la densidad dada para el semiplano y de la función de Cayley (véase [1], pp. 129-131, y [3], pp. 59-60). Ésto nos permitirá trabajar arbitrariamente en cualquiera de los modelos según nos sea conveniente.

## 1.2. Clasificación de las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$

Se sabe que las transformaciones de Möbius están definidas por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1,$$

este grupo de matrices se denota con  $SL(2, \mathbb{C})$ . Se puede probar que el centro del grupo consiste de las matrices  $\pm Id$ , y al cociente de  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre su centro se le denota como  $PSL(2, \mathbb{C})$ , el grupo proyectivo especial lineal que además resulta ser isomorfo al grupo de las transformaciones de Möbius complejas (ver [3], pp. 8-12).

De lo anterior observamos que toda transformación de Möbius  $G$  es de la forma

$$G(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1,$$

de donde fácilmente se observa que  $G$  tiene al menos un punto fijo en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y si  $G \neq Id$ , entonces tiene a lo más dos puntos fijos, obtenemos de aquí una primera definición:

**Definición 2** Dada  $G$  una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $G$  es parabólica si fija exactamente un punto en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Se sabe que dada  $G$  parabólica, ésta es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una traslación, más aún, cualquier transformación parabólica es conjugada a la traslación  $z \rightarrow z + 1$ . Si  $G$  no es parabólica, entonces es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una transformación de la forma  $z \rightarrow \alpha z$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , esta transformación fija dos puntos, el origen y el punto al infinito.

**Definición 3** Sea  $G$  una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$  tal que fija exactamente dos puntos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , supongamos también que  $G$  es conjugada en  $PSL(2, \mathbb{C})$  a una transformación de la forma  $H(z) = \alpha z$ . Entonces:

- i) si  $|\alpha| = 1$ , a  $G$  se le llama elíptica;
- ii) si  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , a  $G$  se le llama hiperbólica;
- iii) si  $|\alpha| \neq 1$  y tampoco es real positivo, a  $G$  se le llama loxodrómica.

Las transformaciones parabólicas tienen la siguiente propiedad, dada  $G$  una transformación parabólica se tiene que  $tr^2(G) = 4$ . Esto se puede observar demostrando que el cuadrado de la traza es invariante bajo conjugación, y como ya mencionamos anteriormente, toda transformación parabólica es conjugada a una traslación de la forma  $z \rightarrow z + t$ , por lo tanto

$$tr^2(G) = tr^2 \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Para más detalle véase [3], pp. 20-23, 37-39.

Para las transformaciones elípticas, podemos expresar el coeficiente  $\alpha$  de norma unitaria como  $\alpha = e^{i\theta}$  con  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . Al valor  $\theta$  se le conoce como el ángulo de rotación de la transformación elíptica. Los puntos fijos de una isometría elíptica se encuentran uno en el plano hiperbólico y otro fuera de éste, y resulta que en el plano hiperbólico se tiene que cualquier isometría elíptica  $g$  está completamente determinada por su punto fijo  $v$  (en  $\mathbb{H}^2$  o  $\Delta$ ) y un número real  $\theta \in [-\pi, \pi)$ , su ángulo de rotación.

Las isometrías hiperbólicas tienen sus puntos fijos sobre la frontera del plano hiperbólico, ya sea en la recta real extendida o sobre la circunferencia unitaria dependiendo del modelo usado. Dada una isometría hiperbólica  $h$ , sus puntos fijos determinan una única geodésica cuyos extremos son dichos puntos, a ésta se le conoce como el eje de  $h$ .

Observese que si  $h(z) = kz$ , con  $k > 0$ , entonces de la identidad (1.3) se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) = \frac{|z - kz|}{2[(y)(ky)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{|z||k-1|}{2y\sqrt{k}}, \quad (1.4)$$

y fácilmente se observa que ésta alcanza su mínimo sobre todas las  $z$ 's el eje de  $h$ , es decir, el eje imaginario.

Como las distancias hiperbólicas se preservan bajo conjugación, para una isometría hiperbólica arbitraria  $h$ , definimos la longitud de traslación de  $h$ , denotada por  $T$ , como

$$T = \inf_z \rho(z, hz).$$

En el caso anterior entonces, dado que el mínimo se alcanza para  $z$ 's de la forma  $z = iy$ , se deduce fácilmente de (1.4) que

$$\sinh \left( \frac{1}{2} T \right) = \frac{|k-1|}{2\sqrt{k}}. \quad (1.5)$$

Esto se puede consultar con más detalle en [1], pp. 172-173.

### 1.3. La función desplazamiento

Dada  $g$  una isometría del plano hiperbólico, la expresión

$$z \mapsto \rho(z, gz)$$

nos dice cuánto desplaza la isometría a cada punto del plano complejo, es ésta fundamentalmente la función desplazamiento para la isometría dada. Trabajar con ella es un camino particularmente atractivo para el estudio de las isometrías del plano hiperbólico, sin embargo, esta expresión no es práctica al momento de trabajar, por lo cual es conveniente, por razones técnicas, definir la función desplazamiento de la siguiente manera:

**Definición 4** *Dada  $g$  una isometría en el plano hiperbólico, se define la función desplazamiento para  $g$  como*

$$z \mapsto \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz),$$

*cualquiera que sea el modelo que usemos.*

Esta función se evaluará puramente en términos geométricos. En el desarrollo de esta tesis trataremos de dar cotas inferiores para ciertas expresiones, ligadas íntimamente a la geometría de las isometrías del plano hiperbólico, que se definen a partir de las funciones desplazamiento de un par de isometrías dadas. Se verá más adelante que estas cotas dependerán fundamentalmente de la geometría de éstas y de el tipo de grupo que generen.

Primeramente mencionamos el teorema de la función desplazamiento, un resultado que nos dice como se comporta la función desplazamiento para isometrías hiperbólicas y elípticas.

**Teorema 1.3.1** (1) *Si  $h$  es hiperbólica con eje  $A$  y longitud de translación  $T$ , entonces:*

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) = \cosh \rho(z, A) \sinh \left( \frac{1}{2} T \right).$$

(2) *Si  $g$  es elíptica con punto fijo  $v$  y ángulo de rotación  $\theta$ , entonces*

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) = \sinh \frac{1}{2} \rho(z, v) \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|,$$

*donde  $\theta \in [-\pi, \pi)$ .*



Se usará este teorema para la demostración de los teoremas y resultados importantes que se mencionan en esta tesis, tomando un caracter fundamental, por lo cual consideramos conveniente dar una demostración para un mayor entendimiento. Para ello, necesitamos del siguiente resultado.

**Teorema 1.3.2** *Para cualquier triángulo hiperbólico con ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\frac{\pi}{2}$  con lados opuestos  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente, se tiene que*

$$\sinh b = \sinh c \operatorname{sen} \beta.$$

Véase la Figura 1.2.

Esta es una propiedad de los triángulos rectángulos hiperbólicos sin importar el modelo que usemos. La demostración puede consultarse en [1], pp.147. Teniendo este resultado podemos dar una demostración al teorema de la función desplazamiento.

DEMOSTRACIÓN. (del Teorema 1.3.1) Primeramente, para (1), por conjugación, podemos asumir que  $h$  actúa en  $\mathbb{H}^2$  y que  $h(z) = kz$ , con  $k > 0$ . De lo visto previamente en la sección 1.2, si en (1.4) se sustituye la identidad (1.5), se obtiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) = \frac{|z| |k-1|}{2y\sqrt{k}} = \frac{|z|}{y} \sinh \left( \frac{1}{2} T \right). \quad (1.6)$$

Finalmente, para  $z \in \mathbb{H}^2$  se define  $\rho(z, A) = \inf\{\rho(z, w) : w \in A\}$ , como en este caso  $A$  es el eje imaginario positivo, cada punto sobre éste es de la forma  $w = it$  ( $0 < t$ ), y de (1.1), se tiene que, si  $z = x + iy$ , entonces

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{|z - it|^2}{2\operatorname{Im}[it]\operatorname{Im}[z]} = 1 + \frac{|x + (y - t)i|^2}{2yt} = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} \\ &= \frac{|z|^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z|}{2y} \left( \frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y}. \end{aligned}$$

Observamos que la igualdad se alcanza cuando  $t = |z|$ , por lo tanto se tiene que  $\rho(z, A) = |z|/y$  (véase la Figura 1.1). Sustituyendo esta identidad en (1.6) se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) = \cosh \rho(z, A) \sinh \left( \frac{1}{2} T \right).$$

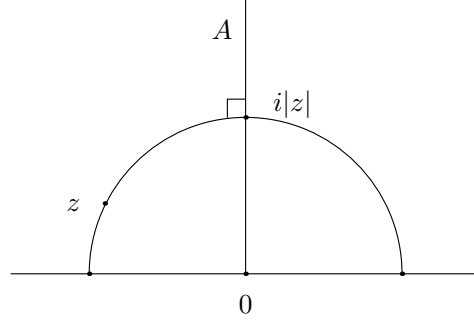


Figura 1.1: La distancia del punto  $z$  a la geodésica  $A$  se alcanza trazando la única geodésica que es ortogonal a  $A$  y pasa por  $z$ .

Para probar (2), supongamos que  $g$  actúa en  $\Delta$  y que  $g(z) = e^{i\theta}z$ . Como

$$\rho(z, e^{i\theta}z) = \rho(z, e^{2\pi i - i\theta}z)$$

y

$$\left| \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right| = \left| \operatorname{sen} \left( \pi - \frac{\theta}{2} \right) \right|,$$

podemos asumir que  $0 < \theta < \pi$  (los casos  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  son triviales).

Ahora consideramos el triángulo con vértices en  $0$ ,  $z$  y  $gz$ , éste tiene ángulos correspondientes  $\theta$ ,  $\alpha$  y  $\alpha$ . Construimos la bisectriz que pasa por el origen y obtenemos un nuevo triángulo que resulta ser un triángulo rectángulo con ángulos  $\alpha$ ,  $\beta = \frac{\theta}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Observamos ahora que los lados opuestos correspondientes tienen longitudes  $a$ ,  $b = \frac{1}{2}\rho(z, gz)$  y  $c = \rho(z, 0)$  (véase la Figura 1.2). Aplicando a este triángulo rectángulo el resultado del Teorema 1.3.2 se tiene que

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2}\rho(z, gz) = \operatorname{senh} \frac{1}{2}\rho(z, 0) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

Observamos que si  $\theta \in [-\pi, 0)$ , entonces  $g(z) = e^{i\theta}z$  es una rotación hiperbólica en sentido negativo, y  $g^{-1}(z) = e^{-i\theta}z$  es una rotación positiva por el mismo ángulo, la inversa de  $g$ . Como  $-\theta \in (0, \pi]$ , entonces todos los resultados en la demostración valen para  $g^{-1}$ , además

$$\rho(z, gz) = \rho(g^{-1}(z), g^{-1}(gz)) = \rho(z, g^{-1}z)$$

por lo tanto

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2}\rho(z, gz) = \operatorname{senh} \frac{1}{2}\rho(z, g^{-1}z) = \operatorname{senh} \frac{1}{2}\rho(z, 0) \operatorname{sen} \frac{-\theta}{2},$$

como la función *sen* es una función impar,  $|\text{sen } \theta/2| = |\text{sen}(-\theta/2)|$  entonces todo lo anterior vale para toda  $\theta \in [-\pi, \pi)$ .

Considerando  $g$  isometría elíptica arbitraria con ángulo de rotación  $\theta$  y punto fijo  $v$ , ésta es conjugada a la transformación  $z \rightarrow e^{i\theta}z$ , y por invarianza bajo conjugación se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2}\rho(z, gz) = \sinh \frac{1}{2}\rho(z, v) \left| \text{sen } \frac{\theta}{2} \right|.$$

□

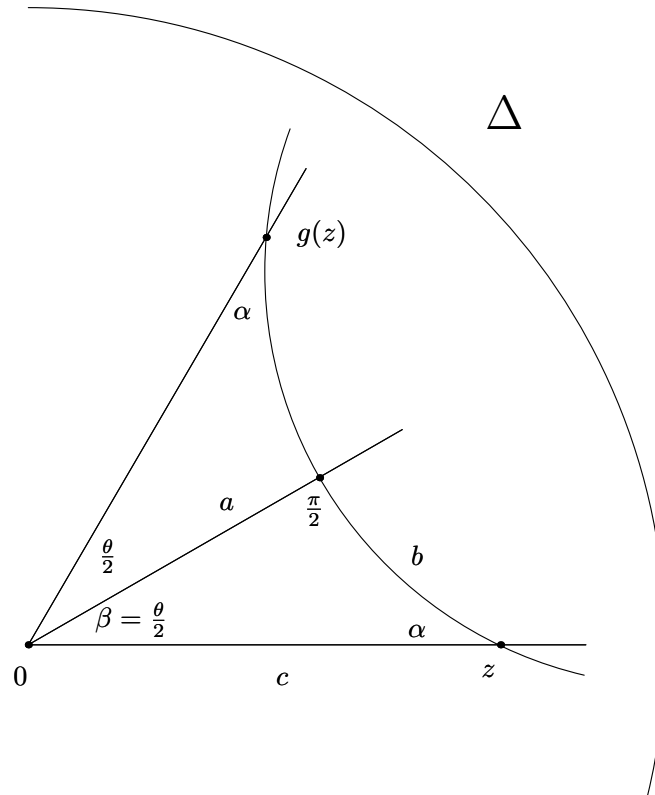


Figura 1.2:  $\sinh b = \sinh c \text{ sen } \beta$ .

## 1.4. Grupos de Isometrías

Se sabe que las isometrías definidas en cada uno de los modelos hiperbólicos tienen una estructura algebraica de grupo, se les conoce como el grupo de isometrías hiperbólicas. Para cada modelo, cada grupo tiene su propia descripción (véase [3], pp. 56, 63), usando la función de Cayley se relacionan estrechamente. La mayoría de los resultados se prueban de manera general para el grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$ , del cual ambos grupos de isometrías son subgrupos.

La operación para el grupo, es la composición si las tratamos como funciones en la esfera de Riemann, y la multiplicación de matrices si precisamente las tratamos en su forma matricial. El grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$  no es un grupo abeliano, en la gran mayoría de los casos estas transformaciones no conmutan, pero se sabe que dos transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$  distintas de la identidad conmutan si una preserva el conjunto de puntos fijos de la otra y viceversa, el conjunto de puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  para una transformación  $G$  lo denotaremos por  $F_G$ . Un importante resultado es el siguiente.

**Teorema 1.4.1** *Dos transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{R})$  distintas de la identidad conmutan si y sólo si fijan los mismos puntos.*

Su demostración se puede consultar en [3], pp. 88. A continuación vemos las definiciones para conjunto límite y conjunto ordinario, las cuales son necesarias para el estudio de los grupos discretos y no elementales, que son el tipo de grupos con los que trata esta tesis. Necesitamos algunas definiciones previas para esto.

**Definición 5** *Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ , decimos que  $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$  es un punto límite del grupo si existen  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  y transformaciones distintas  $G_n \in \Gamma$  tales que*

$$G_n(z) \mapsto \alpha,$$

*cuando  $n \mapsto \infty$ .*

El conjunto de puntos límite se denota por  $\mathbb{L}(\Gamma)$ , cuando el contexto es claro, solo se habla de  $\mathbb{L}$  para referirnos al conjunto límite del grupo. Al conjunto  $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{L}$  se le llama el conjunto ordinario, se denota por  $\mathbb{O}(\Gamma)$  o simplemente por  $\mathbb{O}$ . Resulta que si el conjunto límite es finito consiste de uno o dos puntos; de otra manera es una circunferencia, o toda la esfera de Riemann, o es un fractal (véase [3], para bellas ilustraciones véase [6]). Definimos ahora que un grupo sea discontinuo.

**Definición 6** *Se dice que un subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es discontinuo si el conjunto ordinario  $\mathbb{O}(\Gamma)$  no es vacío.*

Esta propiedad permite construir regiones fundamentales. Consideramos ahora la definición de grupo discreto.

**Definición 7** *Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ , se dice que  $\Gamma$  es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas,  $G_n \in \Gamma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $G_n \mapsto G$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $G$  es una matriz de  $2 \times 2$  con entradas complejas.*

Se sabe que si un grupo es discreto, entonces cualquier grupo conjugado a él es discreto, esto gracias a que la convergencia del producto de sucesiones convergentes de matrices converge al producto de sus límites.

Se tiene el siguiente resultado muy importante.

**Teorema 1.4.2** *i) Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  discontinuo, entonces  $\Gamma$  es discreto.*

*ii) Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$  discreto, entonces  $\Gamma$  es discontinuo.*

Observemos que en  $PSL(2, \mathbb{R})$  sus subgrupos tienen la propiedad de que ser discontinuo es equivalente a ser discreto. Más aún se tiene que el conjunto límite para estos subgrupos está contenido en la recta real. Los subgrupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  se les llama klenianos.

Las funciones hiperbólicas y loxodrómicas juegan un papel especial en los grupos discretos, un importante resultado es el siguiente.

**Teorema 1.4.3** *Sean  $G$  y  $H$  funciones de un subgrupo  $\Gamma$  en  $PSL(2, \mathbb{C})$ , tal que  $G$  es hiperbólica o loxodrómica, supongamos también que  $F_G \cap F_H$  consiste de exactamente un punto, entonces  $\Gamma$  no es discreto.*

Esto implica que en un grupo discreto un punto fijo de una transformación hiperbólica (o loxodrómica) no es un punto fijo de una parabólica y que los puntos fijos de dos transformaciones hiperbólicas o loxodrómicas son iguales o disjuntos.

**Definición 8** *Un grupo fuchsiano es un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{C})$  que preserva un "disco", es decir, es un grupo que es conjugado a un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

**Definición 9** *Se dice que un subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  es horocíclico, o de primera clase, si*

$$\mathbb{L}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}.$$

La definición anterior se extiende naturalmente a los grupos fuchsianos, y se sabe que si  $\Gamma$  es un grupo fuchsiano infinito, entonces  $\mathbb{L}(\Gamma) \neq \emptyset$ . Ahora definimos grupo elemental.

**Definición 10** *Se dice que  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  es elemental si  $\mathbb{L}(\Gamma)$  tiene a lo más 2 puntos, en caso contrario se dice que es no elemental.*

Nótese que los grupos elementales son necesariamente discretos, ya que en los grupos no discretos todos los puntos de la esfera de Riemann son puntos límite. Existen muchas propiedades geométricas muy interesantes de los conjuntos límite y ordinario, que dependen también de la geometría de los grupos, por ejemplo, que el conjunto límite para un grupo fuchsiano es cerrado, por lo tanto el conjunto ordinario para el mismo grupo es abierto. Los grupos discretos tienen una geometría de conjunto discreto identificándolos con matrices con entradas complejas. Mayores detalles en el tema e interpretaciones geométricas pueden consultarse [1] capítulo 8.

Otro tipo de grupos muy importante es el de los grupos triangulares. Dado un triángulo en el plano hiperbólico, con sus vértices en el plano o en la recta al infinito, si  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  denotan las reflexiones en cada uno de sus lados respectivamente, éstas generan un grupo (véase la Figura 1.3). Se sabe que si los ángulos en los vértices son de la forma  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ , donde  $p, q, r \in \mathbb{N}$  o alguno (o algunos) de ellos son  $\infty$  (*i.e.* el ángulo es 0), y se cumple la condición  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ,. El grupo generado por las palabras pares, es decir el subgrupo conforme, es discreto, y se le llama el grupo triangular  $(p, q, r)$ . Hablaremos más detalladamente de este tipo de grupos en la siguiente sección. Mientras tanto, mencionamos unos resultados propios de la trigonometría hiperbólica.

**Teorema 1.4.4 (Ley de Cosenos)** *Dado un triángulo con ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\theta$ , con lados opuestos  $a, b$  y  $c$  respectivamente, se tiene que*

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

De aquí se sigue el siguiente resultado

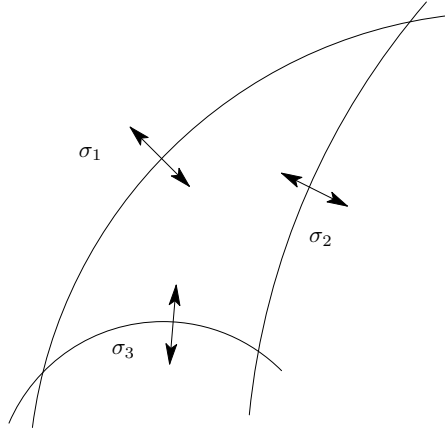


Figura 1.3: Las reflexiones en los lados de un triángulo hiperbólico generan un grupo triangular.

**Teorema 1.4.5** *Para cualquier triángulo con ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $0$ , donde  $c$  es el lado finito, se tiene que*

$$\cosh c = \frac{1 + \cos\alpha \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}.$$

La prueba de estos resultados y las observaciones previas se pueden consultar en [1] pp. 276-286; y con mayor detalle en [8].

## 1.5. Desigualdad de Jørgensen

Esta desigualdad fue descubierta por Troels Jørgensen en los años setenta. Juega un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de grupos fuchsianos y klenianos. Esencialmente dice que un par de generadores de un grupo discreto y no elemental no pueden estar ambas cerca de la identidad.

Primero mencionamos un resultado que se usa para la demostración de la desigualdad.

**Teorema 1.5.1** *Sea  $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $f \neq Id$ , tal que no es de orden dos. Dada  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  sea  $\phi(g) = gfg^{-1}$ . Si  $\phi^n(g) = f$  para alguna  $n$ , entonces  $\langle f, g \rangle$  es elemental.*

Ahora presentamos la desigualdad de Jørgensen y una idea que se usa en su demostración.

**Teorema 1.5.2 (Desigualdad de Jørgensen)** *Suponga que las transformaciones de Möbius  $g$  y  $h$  generan un grupo discreto no elemental, entonces*

$$|\operatorname{tr}^2(g) - 4| + |\operatorname{tr}[g, h] - 2| \geq 1.$$

Una idea que se usa en la demostración es la siguiente. Si  $g$  es de orden dos su traza es igual a cero y el teorema se cumple.

Supóngase entonces que  $g$  no es de orden dos. Se define inductivamente

$$h_0 = h \quad y \quad h_{n+1} = h_n g h_n^{-1}.$$

Si  $\langle g, h \rangle$  es discreto y no elemental y la desigualdad no se cumple, esto nos llevará a que  $h_n = g$  para alguna  $n$ , y por el Teorema 1.5.1 se tendrá que  $\langle g, h \rangle$  es elemental, lo cual contradice la hipótesis.

Existen grupos para los cuales la desigualdad es igualdad, estos grupos llamados extremos, en el caso fuchsiano son ciertos grupos triangulares. Esta desigualdad además ha sido generalizada para dimensiones mayores por F. W. Gehring y G. J. Martin. Para una demostración mas completa se puede consultar [10]. También puede verse [1], pp. 104-108.

## 1.6. Regiones fundamentales y Teorema de Poincaré

En esta última sección platicaremos un poco acerca de regiones fundamentales y el teorema de Poincaré. Dentro del mismo contexto veremos algunas nociones de ciclos de vértices y de círculos isométricos, las cuales son útiles para el entendimiento de algunas demostraciones que se verán más adelante.

Por la teoría de grupos sabemos que dado  $\Gamma$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , la acción de este grupo en  $\mathbb{C}$  define una partición que consiste de las órbitas que el grupo genera. Se define a partir de esto una región fundamental para el grupo de la siguiente manera:

**Definición 11** *Sea  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ , se dice que una región  $R$  es un dominio fundamental en  $\mathbb{H}^2$  para  $\Gamma$ , si se cumplen las siguientes condiciones:*



- (1) cualesquiera dos puntos  $z_1, z_2 \in R$  no son  $\Gamma$ -equivalentes;
- (2) dado  $w \in \mathbb{H}^2$ , existe  $z \in \tilde{R}$  y  $g \in \Gamma$ , tal que  $g(z) = w$ , donde  $\tilde{R}$  denota la cerradura de  $R$  en  $\mathbb{H}^2$ ;
- (3)  $\partial R$  tiene medida bidimensional de Lebesgue cero.

Es fácil probar que si  $\Gamma$  es un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  tal que admite una región fundamental, entonces  $\Gamma$  es discontinuo y por lo tanto también discreto.

**Definición 12** *Sea*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad c \neq 0,$$

una transformación en  $PSL(2, \mathbb{C})$ , el círculo isométrico de  $f$ , denotado por  $I(f)$ , se define como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |f'(z)| = 1\}.$$

Es fácil constatar que en efecto este conjunto es una circunferencia euclídeana. Estos círculos reciben ese nombre dado que la condición para la norma de la derivada, que sea unitaria en estos puntos, implica que la función sobre tal conjunto actúa euclídeamente. Se demuestra que es el único círculo donde la transformación actúa euclídeamente. Resulta que si  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ , la intersección del círculo isométrico con  $\mathbb{H}^2$  es una geodésica en tal modelo.

Toda geodésica divide el plano complejo en dos semiplanos, decimos que un polígono hiperbólico es convexo si es la intersección de los semiplanos correspondientes generados por las geodésicas a las que pertenecen sus lados. Se puede probar que si se tiene una región fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  que es un polígono convexo  $P$ , entonces su frontera consiste de segmentos de geodésicas llamados lados y puntos llamados vértices. Un lado es de la forma  $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ ,  $g \neq Id$ ,  $g \in G$ . Un vértice resulta ser un punto de la forma  $\tilde{P} \cap h(\tilde{P}) \cap g(\tilde{P})$  para  $g, h$  distintos entre sí y de la identidad,  $g, h \in G$ . Más aún, los lados del polígono se *aparean*, es decir, existe  $g \in G$  tal que  $g$  manda un lado a otro. Un ciclo de vértices es la intersección no vacía de una órbita con los vértices de  $\tilde{P}$ . Cuando la cerradura euclídeana de  $P$  se intersecta con la frontera euclídeana del plano hiperbólico, un intervalo maximal en esta frontera se le llama lado libre. Nótese que si un polígono tiene un lado libre, su área es infinita.

El teorema de Poincaré da condiciones para saber si un polígono hiperbólico convexo y con apareamientos de sus lados (dados por transformaciones de Möbius) es una región fundamental para el grupo generado por dichas transformaciones. Más aún, establece que el grupo generado por los apareamientos es fuchsiano. Las condiciones se centran en la suma angular de ciclos de vértices en la frontera del polígono. Esta suma tiene que ser  $2\pi/q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Se observan dos casos,  $q = 1$  y  $q > 1$ . Si  $q > 1$  entonces el ciclo tiene que ser elíptico, es decir, éste se encuentra conformado por puntos fijos de transformaciones elípticas. Si  $q = 1$ , entonces los vértices no son puntos fijos y les llamamos un ciclo accidental. Si el polígono tiene vértices en la recta al infinito, entonces se tiene que cumplir que éstos son ciclos finitos de puntos fijos de transformaciones parabólicas. Un enunciado preciso de este teorema y su prueba aparece en [1].

Se sabe que dado  $G$  un grupo fuchsiano finitamente generado, no elemental, se puede construir un polígono fundamental para  $G$  con un número finito de lados, cf. [1] p. 254. Se puede probar que al identificar los lados de  $\tilde{P}$  se obtiene una superficie  $S$ , de género  $g$ , que resulta ser una superficie de Riemann.  $G$  contiene un número finito, digamos  $s$ , de clases de subgrupos cíclicos parabólicos maximales. También contiene un número finito de clases de subgrupos cíclicos elípticos maximales, digamos  $r$ , con órdenes  $m_1, \dots, m_r$  respectivamente. El símbolo

$$(g : m_1, \dots, m_r; s)$$

es llamado la *signatura* de  $G$ ; cada parámetro es un entero no negativo y  $m_j \geq 2$ . Se tiene también el siguiente teorema

**Teorema 1.6.1** *Sea  $G$  un grupo fuchsiano finitamente generado del primer tipo con signatura  $(g : m_1, \dots, m_r; s)$ , entonces para cualquier polígono fundamental convexo  $P$  de  $G$*

$$h - \text{área}(P) = 2\pi \left[ 2g - 2 + s + \sum_{j=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_j} \right) \right].$$

Para una demostración véase [1] p. 269, más detalladamente en [7].

Volviendo a grupos triangulares, tenemos los siguientes resultados relacionados con la signatura.

**Teorema 1.6.2** *Un grupo  $G$  es un  $(p, q, r)$  grupo triangular si y sólo si éste es un grupo discreto de primera clase con signatura  $(0 : p, q, r)$ .*

Dado un par de transformaciones, digamos  $g$  y  $h$ , se define el conmutador de éstas de la siguiente manera:

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1},$$

no necesariamente  $[g, h] = [h, g]$ . Mencionamos ahora dos resultados que usaremos.

**Teorema 1.6.3** *Suponga que dos elementos parabólicos  $g$  y  $h$  generan un grupo fuchsiano no elemental, entonces  $\text{tr}[g, h] \geq 18$ .*

**Teorema 1.6.4** *Suponga que  $g$  es parabólica y que  $g$  y  $h$  generan un grupo fuchsiano no elemental  $G$ , entonces*

$$i) \text{tr}[g, h] \geq 3$$

$$ii) \text{Si } 3 \leq \text{tr}[g, h] < 6 \text{ entonces } G \text{ es un grupo triangular con signatura } (0 : 2, q, \infty).$$

Una demostración de estos resultados se puede consultar en [1] pp. 295-299, y con más detalle en [5].

El siguiente teorema se usará para demostrar un resultado en ésta tesis, previamente mencionamos una definición necesaria. La demostración al teorema se puede consultar en [1], p. 291, y con más detalle en [5], pp. 16-18.

**Definición 13** *Dado  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$  y  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , se define el subgrupo estabilizador de  $z$ , denotado por  $\Gamma_z$ , como*

$$\{g \in \Gamma \mid g(z) = z\}.$$

**Teorema 1.6.5** *Suponga que  $z \rightarrow z + 1$  genera el estabilizador de  $\infty$  en un grupo fuchsiano  $G$  que actúa en  $\mathbb{H}^2$ , y sean  $w_1, \dots, w_n$  vértices en un ciclo de orden  $q \geq 3$  que se encuentran en una región de la forma  $x_0 \leq x < x_0 + 1$ . Entonces*

$$\text{Im}[w_j] \leq \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{q}.$$

## CAPÍTULO 2

# Cotas universales para la función desplazamiento

Nuestro objetivo es obtener las mejores cotas inferiores de los conjuntos

$$M(g, h) = \inf_z \max\{\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz), \sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz)\}$$

y

$$P(g, h) = \inf_z \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz)$$

para distintas elecciones de  $g$  y  $h$  para las cuales  $\langle g, h \rangle$  es un subgrupo discreto y no elemental.

Observemos que dado cualquier punto  $z$  en el plano hiperbólico, sin importar el modelo que usemos ( $\mathbb{H}^2$  o  $\Delta$ ) se tiene que

$$\left(\max\{\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz), \sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz)\}\right)^2 \geq \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz),$$

por lo tanto, tomando el ínfimo sobre todas las  $z$ 's en el plano, se tiene

$$M(g, h)^2 \geq P(g, h).$$

Obviamente, una cota inferior para  $P(g, h)$  es preferible por el hecho de que si uno de los términos de  $\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz)$   $\sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz)$  es pequeño entonces el otro término es necesariamente grande. Esto no se sigue de una cota inferior para  $M(g, h)$ .

Si  $g$  o  $h$  es elíptica, entonces, al evaluar en el punto fijo se sigue que  $P(g, h) = 0$ , por lo que es necesario usar  $M(g, h)$ .

La desigualdad

$$M(g, h) \geq m$$

significa que para cada  $z$ , ya sea  $g$  o  $h$  mueve  $z$  al menos una distancia  $2\sinh^{-1}(m)$ . Se sabe que en todo caso

$$M(g, h) \geq 0.131846\dots$$

Marden probó la existencia de una cota inferior, ver [4]. Esta cota inferior, que es la mejor posible, fue obtenida por Yamada [9].

La evaluación de las mejores cotas inferiores para  $M(g, h)$  y  $P(g, h)$  está íntimamente conectada con las restricciones geométricas de  $g$  y  $h$ . Ambos límites numéricos y las restricciones geométricas se tratarán en esta tesis, excepto por los casos en que  $g$  es hiperbólica y  $h$  sea elíptica o hiperbólica.

Resulta que si  $\langle g, h \rangle$  es discreto, no elemental y no tiene elementos elípticos, entonces  $P(g, h) \geq 1$ , y esta cota es la mejor posible (véase [1], p. 198).

En el siguiente resultado obtenemos diferentes cotas inferiores para  $P(g, h)$ . Ésta va a depender de la clasificación de  $g$  y  $h$ , además también depende del tipo de grupo que generan.

**Teorema 2.0.1** *Sean  $g$  y  $h$  isometrías tales que  $\langle g, h \rangle$  es discreto y no elemental.*

- i) Si  $g$  y  $h$  son parabólicas, entonces  $P(g, h) \geq \frac{1}{4}$ . Si además  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular, entonces  $P(g, h) \geq 1$ .*
- ii) Si  $g$  es parabólica y  $h$  es hiperbólica, entonces  $P(g, h) \geq \frac{1}{4}$ . Si además  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular, entonces  $P(g, h) \geq \frac{1}{2}$ .*

*Estas cuatro cotas son las mejores posibles.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g$  parabólica y  $h$  parabólica o hiperbólica. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $g$  y  $h$  actúan en  $\mathbb{H}^2$ , además conjugando podemos suponer que  $g$  es la traslación  $z \rightarrow z + 1$ . Escribimos

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Como  $\langle g, h \rangle$  es no elemental y discreto, usamos el hecho de que en un grupo discreto los puntos fijos de las parabólicas y las hiperbólicas son disjuntos, por lo tanto  $c \neq 0$  (véase Teorema 1.4.3).

Se sigue que  $h$  tiene dos puntos fijos reales, posiblemente coincidentes, digamos  $u$  y  $v$ , usando la fórmula para los puntos fijos en términos de la traza, que denotamos por  $\chi$  (véase [3], p. 38), observamos que

$$\begin{aligned}
|c| |z - u| |z - v| &= |c| \left| \left( z - \frac{(a-d) + \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} \right) \left( z - \frac{(a-d) - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} \right) \right| \\
&= |c| \left| \left[ \left( z - \frac{a-d}{2c} \right) - \frac{\sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} \right] \left[ \left( z - \frac{a-d}{2c} \right) + \frac{\sqrt{\chi^2 - 4}}{2c} \right] \right| \\
&= |c| \left| \left( z - \frac{a-d}{2c} \right)^2 - \frac{\chi^2 - 4}{4c^2} \right| = |c| \left| z^2 - \frac{a-d}{c}z + \frac{(a-d)^2}{4c^2} - \frac{(a+d)^2 - 4}{4c^2} \right| \\
&= \left| cz^2 - (a-d)z + \frac{-ad+1}{c} \right| = |cz^2 - (a-d)z - b| \\
&= |z(cz + d) - (az + b)| = |z - hz| |cz + d|.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$|c| |z - u| |z - v| = |z - hz| |cz + d|. \quad (2.1)$$

Nótese también que  $|z - u| |z - v| \geq y^2$ , donde  $z = x + iy$ , por lo tanto, usando (2.1), se tiene

$$|z - hz| |cz + d| \geq |c|y^2. \quad (2.2)$$

Aplicando la fórmula de la distancia hiperbólica (1.3) a  $h$ , se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) = \frac{|z - hz|}{2[Im(z)Im(hz)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{|z - hz|}{2\sqrt{y\frac{y}{|cz+d|^2}}} = \frac{|z - hz||cz + d|}{2y}.$$

Además, para  $g$  claramente se obtiene

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) = \frac{1}{2y},$$

de donde, de estas últimas identidades y de (2.2) se sigue que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) = \frac{|z - hz| |cz + d|}{4y^2} \geq \frac{|c|}{4}. \quad (2.3)$$

Calculamos la traza del conmutador de las matrices definidas por  $g$  y  $h$ , que las denotamos por las mismas letras

$$\begin{aligned} [g, h] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d+c & -b-a \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c)(d+c) - c(b+d) & * \\ * & c(-b-a) + ad \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde

$$\text{tr}[g, h] = 2ad - 2bc + c^2 = 2 + c^2. \quad (2.4)$$

Aplicando ahora la desigualdad de Jørgensen, Teorema 1.5.2, como  $g$  es parabólica se tiene

$$|c| \geq 1.$$

Finalmente, se sigue de (2.3) que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) \geq \frac{1}{4}.$$

De donde para ambos casos  $P(g, h) \geq \frac{1}{4}$ .

Supongamos ahora que  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular. Si  $h$  es parabólica, del Teorema 1.6.3 y (2.4) se deduce que  $|c| \geq 4$ . Por lo tanto, de la desigualdad (2.3) es evidente que en este caso  $P(g, h) \geq 1$ . Si  $h$  es hiperbólica, del Teorema 1.6.4 se tiene  $\text{tr}[g, h] \geq 6$ , de donde por (2.4) tenemos que  $|c| \geq 2$  y finalmente sustituyendo en (2.3) concluimos que  $P(g, h) \geq \frac{1}{2}$  para este caso.  $\square$

Consideremos ahora funciones específicas, con estas probamos que en el Teorema 2.0.1 la cota inferior se alcanza para el caso de dos parabólicas, y que para el caso en que una de ellas es hiperbólica, nos podemos acercar a la cota dada tanto como queramos, en ambos ejemplos son grupos no triangulares.

**Ejemplo 1** Consideremos las isometrías  $g, h$  y  $f$  dadas por

$$g(z) = z + 1, \quad h(z) = \frac{z}{z+1}, \quad f(z) = \frac{2z+3}{z+2}.$$

Nótese que  $g$  y  $h$  son parabólicas con puntos fijos  $\infty$  y  $0$ , respectivamente y que generan un grupo discreto no elemental. Usando la identidad (2.3) para estas transformaciones en los puntos de la forma  $z = iy$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) &= \frac{|z - h(z)||z + 1|}{4y^2} \\ &= \frac{|iy - h(iy)||iy + 1|}{4y^2} = \frac{|iy - \frac{iy}{iy+1}||iy + 1|}{4y^2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

por lo que la cota se alcanza en el caso de dos parabólicas.

Consideremos ahora  $g$  y  $f$  para el segundo caso. Obsérvese que  $f$  es hiperbólica con puntos fijos  $\pm\sqrt{3}$ , por lo cual  $\langle g, f \rangle$  es un grupo discreto y no elemental (véase Teorema 1.4.3). Calculamos (2.3) para  $z = iy$ ,

$$\begin{aligned} \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, fz) &= \frac{|z - f(z)||z + 2|}{4y^2} \\ &= \frac{|iy - \frac{2iy+3}{iy+2}||iy + 2|}{4y^2} = \frac{|-y^2 - 3|}{4y^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4y^2}. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $y$  a  $+\infty$  observamos que la cota inferior es precisamente  $1/4$ , y es la mejor posible. Observemos también que tomando  $y$  arbitrariamente pequeña, dicho producto es tan grande como se quiera.

El siguiente ejemplo es para dos generadores parabólicos. Se da una gama de funciones haciendo variar un parámetro  $t$ , en este ejemplo se puede observar una transición de la cota cuando el parámetro varía haciendo que a partir de cierto valor el grupo generado por las dos funciones parabólicas sea triangular.

**Ejemplo 2** Sea  $g(z) = z + 1$  y sea  $h$  la reflexión en  $|z + t| = t$  seguida de la reflexión en  $x = 0$ , donde  $0 < t < \frac{1}{4}$ . Observemos que  $h$  es parabólica y fija el origen. Escribiendo

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

se tiene que  $b = 0$ , y es fácil ver que  $a = 1 = d$ , y como  $h(-2t) = 2t$ , un cálculo sencillo muestra que  $c = \frac{1}{t}$ . Por lo tanto

$$h(z) = \frac{z}{\left(\frac{z}{t}\right) + 1}.$$



Calculamos ahora en  $z = iy$ , la identidad (2.3),

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, gz) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, hz) &= \frac{|z - hz| |cz + d|}{4y^2} \\ &= \frac{\left| iy - \frac{iy}{t+1} \right| \left| \frac{iy}{t} + 1 \right|}{4y^2} = \frac{\left| -\frac{y^2}{t} \right|}{4y^2} = \frac{1}{4t}. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $t$  a  $\frac{1}{4}$ , se prueba que la cota inferior dada para este caso por el Teorema 2.0.1 es la mejor posible para el caso de dos parabólicas. Nótese que este grupo es de la segunda clase, esto se puede probar usando el teorema de Poincaré, el cual implica que la región acotada por  $\operatorname{Re}(z) = \pm \frac{1}{2}$  y los círculos  $|z - t| = t$  y  $|z + t| = t$  es una región fundamental para el grupo. Nótese además que cuando  $t \geq \frac{1}{4}$  el grupo se convierte en un grupo triangular y la cota es  $\frac{1}{4t} \leq 1$  que según el teorema es la mejor para cuando el grupo es triangular.

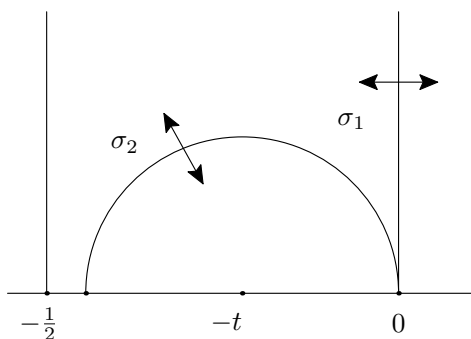


Figura 2.1:  $h$  parabólica,  $h = \sigma_1 \sigma_2$ , su punto fijo es el origen.

El siguiente ejemplo resulta curioso por el hecho de mostrar que el parámetro  $P$  no depende del grupo, sino de un par de generadores que consideremos. A continuación trabajamos con un generador parabólico y uno elíptico tales que no generan un grupo triangular.

**Ejemplo 3** Sea  $g(z) = z + 1$  y sea  $h$  un elemento elíptico de orden 2 que fija el punto  $iv$ , donde  $0 < v < \frac{1}{2}$ .

Obsérvese que  $\langle g, h \rangle$  es un grupo discreto no elemental, más aún, se sigue del teorema de Poincaré que

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |Re[z]| < \frac{1}{2}, |z| > v\}$$

es una región fundamental para el grupo (véase la Figura 2.2).

Como  $h$  intercambia 0 con  $\infty$ , si escribimos

$$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

entonces  $\alpha = 0 = \delta$ . Además, ya que  $h(iv) = iv$ , un cálculo sencillo muestra que

$$h(z) = \frac{-v^2}{z}.$$

Ahora consideremos  $f = gh$ , es decir,

$$f(z) = 1 - v^2/z = \frac{z/v - v}{z/v},$$

$f$  es hiperbólica con puntos fijos reales

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4v^2}}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4v^2}}{2}.$$

Calculamos ahora la identidad (2.3) para las transformaciones  $g$  y  $f$

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, gz) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, fz) &= \frac{|z - f(z)| |cz + d|}{4y^2} \\ &= \frac{|z - \frac{(z/v)-v}{z/v}| |z/v|}{4y^2} = \frac{|z^2/v - z/v + v|}{4y^2} = \frac{|z^2 - z + v^2|}{4vy^2}. \end{aligned}$$

Ahora, tomando  $z = iy$ , se tiene

$$\frac{|-y^2 - iy - v^2|}{4vy^2} = \frac{|-1 - \frac{i}{y} - \frac{v^2}{y^2}|}{4v} \rightarrow \frac{1}{4v},$$

cuando  $y \rightarrow +\infty$ . Como  $v$  es cualquier número entre 0 y  $\frac{1}{2}$ , entonces  $P(g, f)$  se acerca tanto como se quiera a  $\frac{1}{2}$ . Es claro que este grupo no es triangular ya que, por ejemplo, tiene área infinita (véase la Figura 2.2).

Observamos que  $\langle g, h \rangle = \langle g, f \rangle$ , sin embargo, dado que  $h$  es elíptica se tiene que  $P(g, h) = 0$ , lo cual muestra que el parámetro  $P$  depende de una pareja de transformaciones que generen el grupo, y no del grupo.

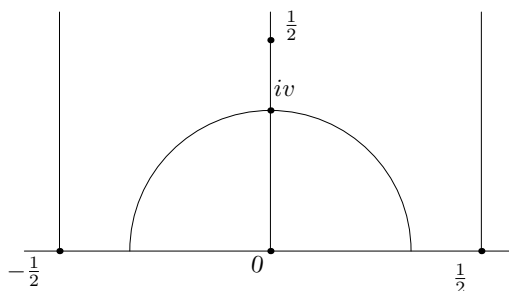


Figura 2.2: La región superior  $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |Re[z]| < \frac{1}{2}, |z| > v\}$  es una región fundamental para el grupo  $\langle g, h \rangle = \langle g, f \rangle$ .

Como observación, los subgrupos del Ejemplo 1 son triangulares. Esto se sigue del Teorema 2.0.1, ya que los subgrupos generados por dos parábolicas, o una parabólica y una hiperbólica, donde  $P(g, h)$  está entre  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{2}$ , y entre  $\frac{1}{4}$  y 1, respectivamente, son triangulares.

Ahora, consideremos grupos generados por una transformación elíptica y una parabólica, en este caso, como ya sabemos, trabajaremos en acotar  $M(g, h)$ .

**Teorema 2.0.2** *Sean  $g$  parabólica y  $h$  elíptica de orden  $q$ . Supóngase también que  $\langle g, h \rangle$  es discreto y no elemental.*

(1) Si  $q \geq 3$  entonces

$$M(g, h) \geq \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{[1 + 2\cos \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{q}]^{1/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

(2) Si  $q = 2$ , entonces  $M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{8}}$ .

(3) Si, además,  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular, entonces para  $q \geq 2$  se tiene que

$$M(g, h) \geq \left[ \frac{1 + \cos \frac{\pi}{q}}{3 - \cos \frac{\pi}{q}} \right]^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Todas estas cotas son las mejores posibles.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$m(z) = \max\left\{ \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz), \sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz) \right\},$$

podemos asumir que  $g$  y  $h$  actúan en  $\mathbb{H}^2$ , por conjugación también podemos suponer que  $g(z) = z + 1$  y  $h$  una rotación de ángulo  $0 < 2\theta \leq \pi$  alrededor de un punto  $w = iv$  con  $v > 0$ . Ésto dado que podemos conjuar por la transformación que envía el punto fijo parabólico a  $\infty$  y trasladar horizontalmente el punto fijo elíptico al eje imaginario, estas conjugaciones dejan invariante la distancia hiperbólica.

Para  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  arbitraria, sea  $z_1 = Im[z_0]i$ , y sea  $z_2$  el punto en el semirayo  $[w, \infty)$  tal que  $z_1$  y  $z_2$  son equidistantes de  $w$ . Entonces

$$Im[z_0] = Im[z_1] \leq Im[z_2], \quad (2.5)$$

y

$$\rho(z_0, w) \geq \rho(z_1, w) = \rho(z_2, w), \quad (2.6)$$

(véase la Figura 2.3). Dado que  $\sinh$  es una función creciente, se sigue del Teorema 1.3.1 y de (2.6)

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z_0, hz_0) \geq \sinh \frac{1}{2} \rho(z_1, hz_1) = \sinh \frac{1}{2} \rho(z_2, hz_2),$$

además, se sigue fácilmente de (2.5) que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z_0, gz_0) = \sinh \frac{1}{2} \rho(z_1, gz_1) \geq \sinh \frac{1}{2} \rho(z_2, gz_2).$$

Por lo tanto

$$m(z_0) \geq m(z_2).$$

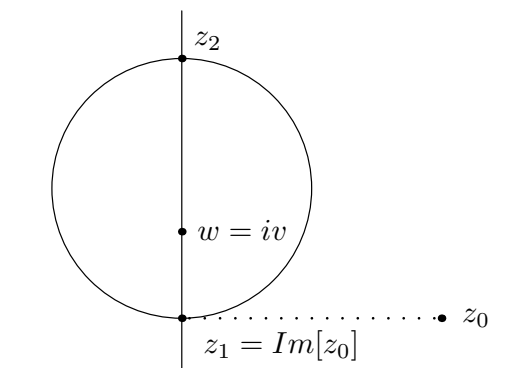


Figura 2.3: Se identifica cada  $z \in \mathbb{H}^2$  con un punto en  $[w, \infty)$ .

Como

$$M(g, h) = \inf_z m(z),$$

podemos centrar nuestra atención a  $m(z)$  para  $z$ 's de la forma  $z = iy$  donde  $y \geq v$ .

Haciendo variar  $y \in [v, \infty]$ ,  $\rho(iy, g(iy))$  decrece a cero. Además, usando el Teorema 1.3.1 observamos que  $\rho(iy, h(iy))$  crece de 0 a  $\infty$ . Entonces existe una única  $z_0 \in [w, \infty)$  tal que

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, gz) = \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, hz)$$

y este valor es precisamente  $M(g, h)$ .

Ahora, observamos que si  $z_0 = it$ , usando la identidad (1.3), se tiene

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z_0, gz_0) = \frac{1}{2t},$$

y usando el Teorema 1.3.1 obtenemos

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z_0, hz_0) = |\operatorname{sen} \theta| \operatorname{senh} \rho(it, iv) = |\operatorname{sen} \theta| \operatorname{seh} \left( \log \frac{t}{v} \right) = \frac{1}{2} |\operatorname{sen} \theta| \left( \frac{t}{v} - \frac{v}{t} \right).$$

Igualando estas dos últimas identidades y observando que  $|\operatorname{sen} \theta| = \operatorname{sen} \theta$ , dado que  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} &= \frac{1}{2} |\operatorname{sen} \theta| \left( \frac{t}{v} - \frac{v}{t} \right) \\ \Leftrightarrow v &= \operatorname{sen} \theta (t^2 - v^2) \\ \Leftrightarrow t^2 &= v^2 + \frac{v}{\operatorname{sen} \theta}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como  $h$  es de orden  $q$  (y  $h \neq I$ ), entonces  $2\theta \geq \frac{2\pi}{q}$ . Ahora, como la función  $\operatorname{sen}$  es creciente en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , entonces  $\operatorname{sen} \theta \geq \operatorname{sen} \frac{\pi}{q}$ . Además, considerando  $q \geq 3$ , del Teorema 1.6.5 aplicado a  $v$  se obtiene que

$$v \leq \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{q}.$$

Sustituyendo en (2.7), se sigue que

$$\begin{aligned} t^2 &= v^2 + \frac{v}{\operatorname{sen} \theta} \leq \left( \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{q} \right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \left( \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{q} \right) \\ &= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{\pi}{q} + \frac{1}{2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q}}{\cos \frac{\pi}{q}} \leq \frac{1}{4} \tan^2 \frac{\pi}{q} + \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{q}}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$4t^2 \leq \tan^2 \frac{\pi}{q} + \frac{2}{\cos \frac{\pi}{q}}.$$

Como  $M(g, h) = \frac{1}{2t}$ , entonces  $M(g, h)^2 = \frac{1}{4t^2}$ , y de lo anterior

$$M(g, h)^2 \geq \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{q} + \frac{2}{\cos \frac{\pi}{q}}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\tan^2 \frac{\pi}{q} + \frac{2}{\cos \frac{\pi}{q}}},$$

por lo tanto

$$M(g, h) \geq \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{[1 + 2\cos \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{q}]^{\frac{1}{2}}},$$

lo cual prueba la primera parte de la desigualdad (1).

Consideremos la función

$$\varphi(x) = \frac{x}{[1 + 2x - x^2]^{\frac{1}{2}}},$$

esta función es creciente en  $[0, 1]$ , dado que

$$\varphi'(x) = \frac{(1 + 2x + x^2)^{\frac{1}{2}} - (1 + 2x + x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - x)x}{1 + 2x - x^2} > 0,$$

por lo tanto la función

$$\phi(q) = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{[1 + 2\cos \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{q}]^{\frac{1}{2}}}$$

es creciente. En nuestro contexto esta función alcanza el mínimo en  $q = 3$ , sustituyendo este valor, tenemos

$$\phi(3) = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{[1 + 2\cos \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{[1 + 2(\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Así queda finalmente demostrado el primer inciso, y esta cota es la mejor posible para cualquier  $q > 2$ .

Para el caso  $q = 2$ ,  $h$  es una rotación donde  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , por lo tanto  $h$  intercambia 0 e  $\infty$ , entonces si

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

se sigue que  $a = 0 = d$  y  $b = -\frac{1}{c}$ , por lo tanto

$$h = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} [g, h] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ -c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & -\frac{1}{c} \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & \frac{1}{c} \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + 1 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde  $\text{tr}([g, h]) = c^2 + 2$ , y aplicando la desigualdad de Jørgensen, tenemos  $c \geq 1$  (ya que sin perder generalidad podemos suponer  $c \geq 0$ ).

Finalmente, el punto fijo de  $h$  es  $w = \frac{i}{c}$ , por lo tanto  $v = \frac{1}{c} \leq 1$ . Sustituyendo en (2.7) resulta  $t^2 \leq 2$ , y dado que  $M(g, h) = \frac{1}{2t}$  se concluye el resultado,

$$M(g, h) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Para el inciso (3) del teorema, supongamos que  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular. Como  $h$  es de orden  $q$ , alguna potencia de  $h$ , digamos  $h^n$ , es una rotación por ángulo  $\frac{2\pi}{q}$  alrededor de  $iv$  y  $\langle g, h^n \rangle (= \langle g, h \rangle)$  no es un grupo triangular. Para esta pareja de transformaciones se tiene entonces que la identidad (2.7) es

$$t^2 = v^2 + \frac{v}{\text{sen}\frac{\pi}{q}}. \quad (2.8)$$

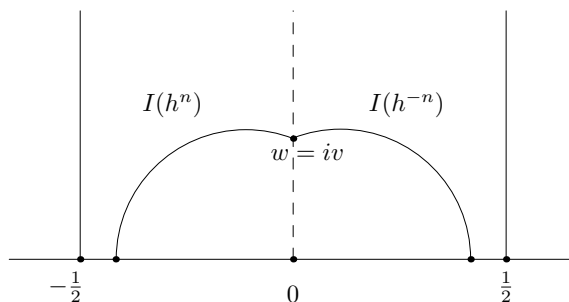


Figura 2.4: Los círculos isométricos de  $h^n$  y  $h^{-n}$  forman un ángulo de  $\frac{\pi}{q}$  con el eje imaginario.

Ahora, consideramos el cuadrilátero con lados  $\text{Re}(z) = \pm\frac{1}{2}$  y los círculos isométricos de  $h^n$  y  $h^{-n}$  (véase la Figura 2.4), resulta del Teorema de Poincaré que

la región descrita es un polígono fundamental para  $\langle g, h^n \rangle = \langle g, h \rangle$ . Esta región tiene lados libres, es decir, tiene área infinita, si así no lo fuera, el grupo sería triangular. Pues considerando el triángulo formado por el círculo isométrico de  $h$ , con las rectas  $x = -\frac{1}{2}$  y  $x = 0$ , si nombramos  $\sigma_3$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_1$  a las reflexiones en dichas rectas hiperbólicas, respectivamente, entonces  $h = \sigma_3 \circ \sigma_1$  y  $g = \sigma_1 \circ \sigma_2$ , y el grupo generado por estas reflexiones es igual al grupo generado por  $g$  y  $h$ , (véase la Figura 2.5).

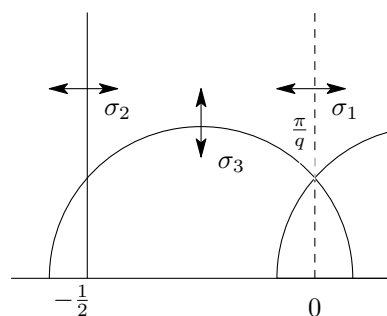


Figura 2.5:  $h = \sigma_3 \circ \sigma_1$ ,  $g = \sigma_1 \circ \sigma_2$ .

Considerando el círculo isométrico de  $h$ , éste tiene radio  $r$  y centro en  $-l$ , el segmento que une el centro del círculo con el punto fijo  $w = iv$  forma un ángulo igual a  $\frac{\pi}{q}$  con el eje real, como se muestra en la Figura 2.6. Tomando el triángulo formado por  $w$ ,  $-l$  y  $0$ , se sigue que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{q} = \frac{v}{r} \quad y \quad \tan \frac{\pi}{q} = \frac{v}{l},$$

de donde

$$r = \frac{v}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q}} \quad y \quad l = v \cot \frac{\pi}{q}.$$

Observemos que  $r + l \leq \frac{1}{2}$ , por lo tanto

$$\frac{v}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q}} + v \cot \frac{\pi}{q} \leq \frac{1}{2}.$$

Factorizando se tiene que

$$\frac{v}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q}} [1 + \cos \frac{\pi}{q}] \leq \frac{1}{2},$$



por consiguiente

$$v \leq \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q}}{2[1 + \cos \frac{\pi}{q}]}. \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8), se tiene

$$\begin{aligned} t^2 &\leq \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q}}{2[1 + \cos \frac{\pi}{q}]} \right)^2 + \frac{1}{2[1 + \cos \frac{\pi}{q}]} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 \frac{\pi}{q}) + 2[1 + \cos \frac{\pi}{q}]}{4[1 + \cos \frac{\pi}{q}]^2} = \frac{3 - \cos \frac{\pi}{q}}{4[1 + \cos \frac{\pi}{q}]}, \end{aligned}$$

de donde

$$4t^2 \leq \frac{3 - \cos \frac{\pi}{q}}{1 + \cos \frac{\pi}{q}}. \quad (2.10)$$

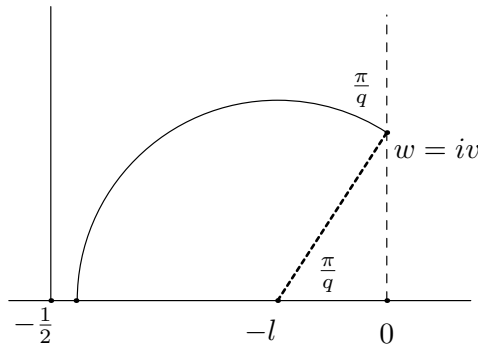


Figura 2.6:  $r + l < \frac{1}{2}$ .

Ahora consideremos la función

$$\varphi(x) = \frac{3 - x}{1 + x}, \quad x \in [0, 1],$$

derivando se tiene

$$\varphi'(x) = -\frac{4}{(1 + x)^2} < 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

por lo tanto esta función es decreciente en el intervalo  $[0, 1]$ . Se sigue entonces que

$$\phi(q) = \frac{3 - \cos \frac{\pi}{q}}{1 + \cos \frac{\pi}{q}}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq q,$$

es decreciente y alcanza su máximo en  $q = 2$ . Sustituyendo este valor en la función, se tiene que  $\phi \geq 3$ , por lo tanto, recuperando (2.10) se tiene que

$$4t^2 \leq \frac{3 - \cos \frac{\pi}{q}}{1 + \cos \frac{\pi}{q}} \leq 3.$$

Finalmente, sustituyendo esta desigualdad en la identidad que se obtuvo en la prueba de (1), es decir  $M(g, h)^2 = \frac{1}{4t^2}$ , tenemos

$$M(g, h) \geq \left[ \frac{1 + \cos \frac{\pi}{q}}{3 - \cos \frac{\pi}{q}} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

A continuación, trabajaremos con el caso en que los dos generadores son transformaciones elípticas, y trabajamos en buscar una cota para  $M(g, h)$ . Para esto, previamente consideremos los siguientes resultados que están basados fuertemente en la trigonometría hiperbólica.

**Teorema 2.0.3** *Sea  $g$  elíptica de orden  $p$  con punto fijo  $u$ , y  $h$  elíptica de orden  $q$  con punto fijo  $v$ . Supóngase también que  $\langle g, h \rangle$  es discreto y no elemental, pero no un grupo triangular. Entonces*

$$\cosh \rho(u, v) > \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{q}\right)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Existe  $g_1$  en  $\langle g \rangle$  tal que tiene ángulo de rotación  $\frac{2\pi}{p}$ , y existe también  $h_1$  en  $\langle h \rangle$  con ángulo de rotación igual  $\frac{2\pi}{q}$  tal que  $\langle g, h \rangle = \langle g_1, h_1 \rangle$ . Podemos asumir que son  $g$  y  $h$  las que tienen ángulos de rotación  $\frac{2\pi}{p}$  y  $\frac{2\pi}{q}$ , respectivamente. También, sin perder generalidad podemos asumir que  $g$  y  $h$  actúan en  $\Delta$ ,  $u = 0$  y  $v > 0$ . Construimos ahora los círculos isométricos de  $h$  y  $h^{-1}$  y los segmentos desde el origen que hacen un ángulo de  $\frac{\pi}{p}$  con  $(0, 1)$ , (véase la Figura 2.7). Los rayos  $L$  y  $L'$  son apareados por  $g$  y los rayos  $L_1$  y  $L'_1$  son apareados por  $h$ .

Si  $L$  y  $L_1$  se intersecan, entonces  $\langle g, h \rangle$  es un grupo triangular, como esto por hipótesis no sucede, consideremos el triángulo con vértices en  $u$ ,  $v_0$  y  $A$  en la Figura 2.7, aplicando el Teorema 1.4.5 a dicho triángulo tenemos que  $\cosh \rho(u, v)$  está acotado inferiormente por la cota dada. Esto dado que tomando una transformación conforme que mueva el punto  $v$  desde  $v_0$  hasta 1, la distancia hiperbólica entre  $u$  y  $v$  evidentemente crece y  $\cosh \rho(u, v)$  queda acotado inferiormente por el valor ya establecido por  $v_0$  y se sigue el resultado ( cf. [1], p. 313). □

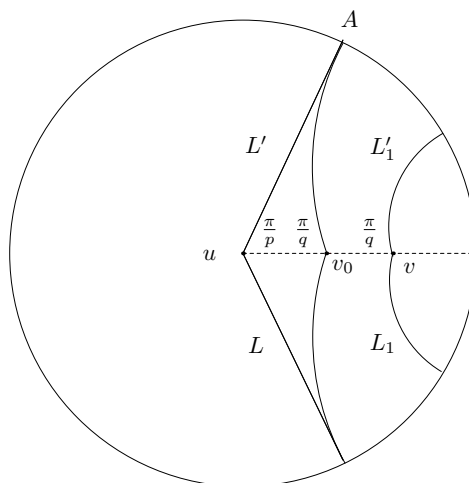


Figura 2.7:  $\cosh \rho(u, v_0) = \frac{1 + \cos(\pi/p)\cos(\pi/q)}{\operatorname{sen}(\pi/p)\operatorname{sen}(\pi/q)}$ .

El segundo resultado es importante para poder calcular la cota inferior para  $M(g, h)$  en el caso en que  $g$  y  $h$  son generadores elípticos y el grupo es triangular, ésto nos ayudará para demostrar que el  $(2, 3, 7)$  grupo triangular alcanza la cota universal, como lo demostró Yamada.

**Teorema 2.0.4** Sean  $g$  y  $h$  dos transformaciones elípticas de orden  $p$  y  $q$  respectivamente. Supongamos que  $G = \langle g, h \rangle$  es un grupo discreto, no elemental y triangular con signatura  $(p, q, r)$ . Si  $u$  y  $v$  son los respectivos puntos fijos de  $g$  y  $h$ , entonces se tiene que

$$\cosh \rho(u, v) \geq \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p} \operatorname{sen} \frac{\pi}{q}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad, supongamos que  $g$  y  $h$  actúan en  $\Delta$ ,  $u = 0$  y  $v \in (0, 1)$ . Además, que  $g$  y  $h$  son rotaciones con ángulos  $\frac{2\pi}{p}$  y  $\frac{2\pi}{q}$  alrededor de sus puntos fijos. Consideremos la geodésica que sale de  $0$  y forma un ángulo de  $\frac{2\pi}{p}$  con el segmento  $[0, 1]$ , así mismo la geodésica que pasa por  $v$  y forma un ángulo de  $\frac{2\pi}{q}$  con el segmento  $[0, v]$ . Se tienen dos casos posibles.

El primer caso es cuando las geodésicas consideradas anteriormente se intersectan (véase la Figura 2.8). En este caso, por los argumentos usuales observamos

que  $g = \sigma_2\sigma_1$  y  $h = \sigma_3\sigma_1$ . Se tiene también que  $\langle \sigma_2\sigma_1, \sigma_3\sigma_1 \rangle < G$ . Usamos el hecho de que el cuadrilátero con vértices en  $u, v, w_1$  y  $w_2$ , que denotaremos por  $\Theta$ , debe contener una región fundamental para el grupo  $G$ , que denotaremos por  $\Gamma$ , por lo tanto, se tiene que

$$h - \text{área}(\Gamma) \leq h - \text{área}(\Theta).$$

Véase [1], pp. 268-269, o [8].

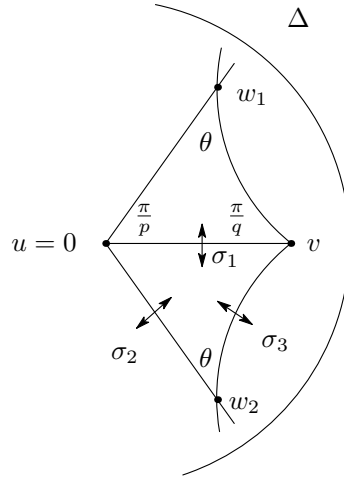


Figura 2.8: En el primer caso se intersectan las geodésicas formando un triángulo con ángulos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  y  $\theta$ .

Por el Teorema 1.6.1 se tiene que,

$$h - \text{área}(\Gamma) = 2\pi \left[ 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right],$$

y además se sabe que

$$h - \text{área}(\Theta) = 2\pi - \frac{2\pi}{p} - \frac{2\pi}{q} - 2\theta,$$

por lo tanto se concluye que  $\theta \leq \frac{\pi}{r}$ .

Finalmente, haciendo uso de la Ley de Cosenos para el triángulo  $uvw_1$  y la desigualdad anterior, dado que  $\cos$  es decreciente, se sigue que

$$\cosh \rho(0, v) = \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \theta}{\text{sen} \frac{\pi}{p} \text{sen} \frac{\pi}{q}} \geq \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r}}{\text{sen} \frac{\pi}{p} \text{sen} \frac{\pi}{q}}.$$

Para el segundo caso, en el que las geodésicas no se intersecan, consideremos la geodésica que pasa por  $v$  y tiene el mismo punto al infinito que la geodésica que sale del origen (véase la Figura 2.9). Al ángulo formado por ésta y el segmento  $[0, v]$  lo llamamos  $\theta$ . Considerando entonces el triángulo con ángulos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\theta$  y  $0$  que se forma, del Teorema 1.4.5 se sigue que

$$\cosh \rho(0, v) = \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \theta + 1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p} \operatorname{sen} \theta}.$$

Evidentemente  $\theta < \frac{\pi}{q}$ , entonces, como  $\operatorname{sen}$  es creciente y  $\cos$  es decreciente en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , y además  $\cos \frac{\pi}{r} \leq 1$ , se sigue de la identidad anterior que

$$\cosh \rho(0, v) = \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \theta + 1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p} \operatorname{sen} \theta} > \frac{\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{p} \operatorname{sen} \frac{\pi}{q}}.$$

□

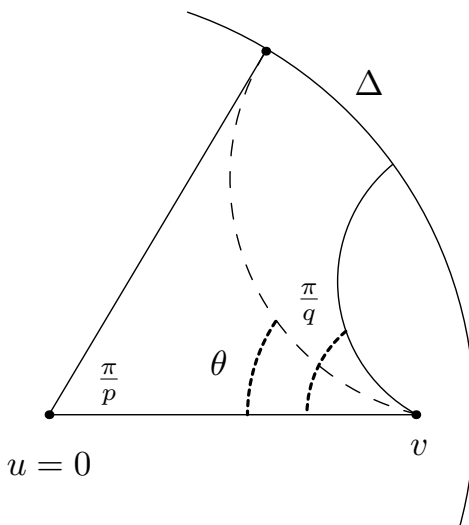


Figura 2.9: En el segundo caso construimos un triángulo auxiliar con ángulos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\theta$  y  $0$ .

Ahora tenemos ya los resultados necesarios para poder calcular la cota inferior para  $M(g, h)$ , donde  $g$  y  $h$  son generadores elípticos del grupo. Tenemos entonces el siguiente teorema en donde se alcanza la cota universal.

**Teorema 2.0.5** Sean  $g$  y  $h$  elementos elípticos de órdenes  $p$  y  $q$  respectivamente y suponga que  $\langle g, h \rangle$  es discreto y no elemental. Entonces

$$M(g, h) \geq \left[ \frac{4\cos^2(\frac{\pi}{7}) - 3}{8\cos\frac{\pi}{7} + 7} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.1318\dots$$

Si además  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular, entonces

$$M(g, h) > \left[ \frac{(\cos\frac{\pi}{p} + \cos\frac{\pi}{q})^2}{4 - (\cos\frac{\pi}{p} - \cos\frac{\pi}{q})^2} \right]^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Ambas cotas son las mejores posibles.

DEMOSTRACIÓN. Escribimos

$$m(z) = \max\left\{ \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz), \sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz) \right\}.$$

Si  $g$  o  $h$  es reemplazada por una rotación alrededor del mismo punto, pero con un ángulo de rotación menor, entonces la correspondiente  $m(z)$  decrece. Intuitivamente esto es evidente, formalmente se sigue de la fórmula de la distancia en el círculo tomando en (1.2) a  $z = 0$ . Entonces podemos asumir que  $g$  y  $h$  tienen ángulos de rotación  $\frac{2\pi}{p}$  y  $\frac{2\pi}{q}$  respectivamente. Asumimos también que actúan en  $\Delta$  y que sus puntos fijos son  $u = 0$  y  $v > 0$  respectivamente para  $g$  y  $h$ . Observamos del Teorema 1.3.1 que al alejarnos de  $u$  sobre el intervalo  $[0, 1)$  el valor  $\rho(z, gz)$  crece de cero a infinito. Y para todos los puntos sobre el círculo hiperbólico con centro en 0, su desplazamiento al aplicarle  $g$  es el mismo. Análogamente alejándonos de  $v$  en el intervalo  $(-1, v]$  el valor de  $\rho(z, hz)$  crece y el desplazamiento es el mismo sobre los círculos hiperbólicos con centro en  $v$ . Por lo tanto existe un  $x \in (0, v)$  tal que  $\rho(x, gx) = \rho(x, hx)$  (véase la Figura 2.10), y es precisamente en este punto que se tiene que  $M(g, h)$  es precisamente

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(x, gx) = \sinh\frac{1}{2}\rho(x, hx). \quad (2.11)$$

Escribimos

$$\rho(0, x) = t, \quad y \quad \rho(0, v) = d,$$

entonces

$$\rho(x, v) = d - t.$$

También escribimos

$$s_p = \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}, \quad c_p = \operatorname{cos}\frac{\pi}{p},$$

análogamente  $s_q$  y  $c_q$ .

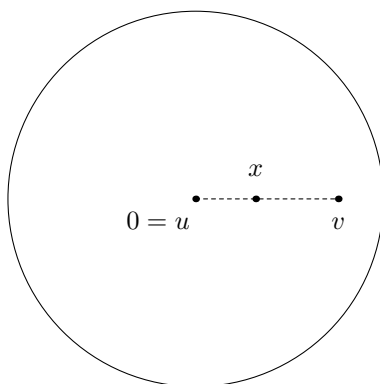


Figura 2.10:  $M(g, h) = \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, gx) = \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(x, hx)$ .

Usando la identidad para las isometrías elípticas del Teorema 1.3.1 y sustituyendo en (2.11), con la anterior notación se tiene que

$$s_p \operatorname{senh} t = s_q \operatorname{senh}(d - t), \quad (2.12)$$

desarrollando

$$s_p \operatorname{senh} t = s_q (\operatorname{senh} d \cosh t - \cosh d \operatorname{senh} t),$$

$$s_p \operatorname{senh} t + s_q \cosh d \operatorname{senh} t = s_q \operatorname{senh} d \cosh t,$$

$$\tanh t (s_p + s_q \cosh d) = s_q \operatorname{senh} d,$$

ésto es

$$\tanh t = \frac{s_q \operatorname{senh} d}{s_p + s_q \cosh d}. \quad (2.13)$$

Haciendo uso de la identidad pitagórica hiperbólica, se obtiene la identidad

$$\operatorname{senh}^2 t = \frac{\operatorname{senh}^2 t}{\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t} = \frac{\tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t}.$$

Sustituyendo en (2.12) se sigue que

$$M(g, h)^2 = s_p^2 \operatorname{senh}^2 t = \frac{s_p^2 \tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t},$$

usando ahora (2.13) tenemos que

$$M(g, h)^2 = \frac{s_p^2 \left( \frac{s_q \operatorname{senh} d}{s_p + s_q \cosh d} \right)^2}{1 - \left( \frac{s_q \operatorname{senh} d}{s_p + s_q \cosh d} \right)^2} = \frac{s_p^2 (s_q \operatorname{senh} d)^2}{(s_p + s_q \cosh d)^2 - (s_q \operatorname{senh} d)^2}$$

$$= \frac{s_p^2 s_q^2 \sinh^2 d}{s_p^2 + 2s_p s_q \cosh d + s_q^2 \cosh^2 d - s_q^2 \sinh^2 d} = \frac{s_p^2 s_q^2 [\cosh^2 d - 1]}{s_p^2 + s_q^2 + 2s_p s_q \cosh d}. \quad (2.14)$$

Considerando ésta última como una función de  $\cosh d$ , se tiene que es creciente, ya que un cálculo sencillo muestra que

$$\left( \frac{s_p^2 s_q^2 [\omega^2 - 1]}{s_p^2 + s_q^2 + 2s_p s_q \omega} \right)' = 2 \left[ \frac{s_p^3 s_q^3 \omega^2 + (s_p^4 s_q^2 + s_p^2 s_q^4) \omega + s_p^3 s_q^3}{(s_p^2 + s_q^2 + 2s_p s_q \omega)^2} \right] > 0,$$

donde  $\omega = \cosh d$ , que siempre es positivo y también  $s_p$  y  $s_q$  son positivos por como están definidos. Por lo tanto es creciente como función de  $\omega = \cosh d$ .

Si  $\langle g, h \rangle$  no es un grupo triangular, del Teorema 2.0.3 se tiene que

$$s_p s_q \cosh d > 1 + c_p c_q,$$

sustituyendo esta desigualdad en (2.14), se tiene que

$$\begin{aligned} M(g, h)^2 &= \frac{s_p^2 s_q^2 [\cosh^2 d - 1]}{s_p^2 + s_q^2 + 2s_p s_q \cosh d} > \frac{(1 + c_p c_q)^2 - s_p^2 s_q^2}{s_p^2 + s_q^2 + 2(1 + c_p c_q)} \\ &= \frac{1 + 2c_p c_q + c_p^2 c_q^2 - (1 - c_p^2)(1 - c_q^2)}{(1 - c_p^2) + (1 - c_q^2) + 2 + 2c_p c_q} = \frac{c_p^2 + c_q^2 + 2c_p c_q}{4 - c_p^2 - c_q^2 + 2c_p c_q} \\ &= \frac{(c_p + c_q)^2}{4 - (c_p - c_q)^2}. \end{aligned}$$

La cual es la cota establecida por el teorema para grupos no triangulares. Esta cota inferior es una función creciente fijando  $c_p$  o fijando  $c_q$ , y es además simétrica en  $c_p$  y  $c_q$  en los rangos permitidos. Entonces para  $p = 3$  y  $q = 2$ , que son los mínimos permitidos en nuestro contexto, se tiene que

$$M(g, h)^2 > \frac{(c_p + c_q)^2}{4 - (c_p - c_q)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 0\right)^2}{4 - \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{15},$$

lo cual establece la cota inferior para el caso en que los dos generadores son elípticos y el grupo es no triangular, y es la mejor posible.

Para  $q = 2$  y  $p = 2$  se tiene que  $gh$  es hiperbólica con puntos fijos  $x_1$  y  $x_2$  (véase la Figura 2.11). Es claro que  $\langle g, h \rangle$  deja invariante a  $\{x_1, x_2\}$ , por lo tanto el grupo sería elemental.

Solo queda establecer la primera (y más pequeña) cota inferior, el caso cuando el grupo generado es triangular. Supongamos que  $\langle g, h \rangle$  es un  $(m, n, r)$  grupo triangular. Considerando el conjunto de puntos elípticos en el plano hiperbólico, éstos pueden ser separados en tres conjuntos distintos según la clase a la que pertenecen,



ya sea  $m, n$  o  $r$ . Sin perder generalidad asociamos a  $g$  con los puntos de orden  $m$ ,  $g$  no necesariamente es de orden  $m$ , pero si sabemos que entonces existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\frac{2k\pi}{m} = \frac{2\pi}{p}$  con  $(k, m) = 1$ , y como anteriormente observamos, nos conviene considerar la menor rotación, así pues podemos suponer que  $m = p$ . Análogamente se puede suponer que  $n = q$ . Entonces, como anteriormente hemos observado, sin perder generalidad suponemos que  $g$  y  $h$  son elípticas con ángulos de rotación igual a  $\frac{2\pi}{p}$  y  $\frac{2\pi}{q}$  que actúan en  $\Delta$ , con puntos fijos  $u = 0$  y  $v > 0$  respectivamente. Entonces, por el Teorema 2.0.4 se tiene que

$$\cosh \rho(0, v) \geq \frac{c_p c_q + c_r}{s_p s_q}.$$

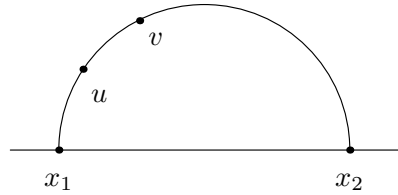


Figura 2.11: El caso  $p = 2$  y  $q = 2$  es un grupo elemental.

Sustituyendo la desigualdad anterior en la identidad (2.14), y sabiendo que es una función creciente de  $\cosh d$ , se tiene que

$$\begin{aligned} M(g, h)^2 &= \frac{s_p^2 s_q^2 [\cosh^2 d - 1]}{s_p^2 + s_q^2 + 2s_p s_q \cosh d} \geq \frac{s_p^2 s_q^2 \left[ \left( \frac{c_p c_q + c_r}{s_p s_q} \right)^2 - 1 \right]}{s_p^2 + s_q^2 + 2s_p s_q \left( \frac{c_p c_q + c_r}{s_p s_q} \right)} \\ &= \frac{(c_p c_q + c_r)^2 - s_p^2 s_q^2}{s_p^2 + s_q^2 + 2c_p c_q + 2c_r} = \frac{c_p^2 c_q^2 + 2c_p c_q c_r + c_r^2 - (1 - c_p^2)(1 - c_q^2)}{(1 - c_p)^2 + (1 - c_q)^2 + 2c_p c_q + 2c_r} \\ &= \frac{c_p^2 c_q^2 + 2c_p c_q c_r + c_r^2 - (1 - c_p^2 - c_q^2 + c_p^2 c_q^2)}{2 - (c_p^2 - 2c_p c_q + c_q^2) + 2c_r} = \frac{c_p^2 + c_q^2 + c_r^2 + 2c_p c_q c_r - 1}{2 + 2c_r - (c_p - c_q)^2}. \end{aligned}$$

Para hallar la cota inferior, debemos obtener el ínfimo de esta expresión sobre todas las  $p, q$  y  $r$  enteros positivos que satisfacen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

En general, tenemos que

$$2 + 2c_r - (c_p - c_q)^2 \leq 4,$$

entonces

$$M(g, h)^2 \geq \frac{1}{4}[c_p^2 + c_q^2 + c_r^2 + 2c_p c_q c_r - 1].$$

Observemos que esta última expresión es simétrica respecto de  $p, q$  y  $r$ , y si fijamos dos de ellos, la función es creciente respecto al tercero. Proponemos entonces  $p = 2$ , y así también nos deshacemos de dos sumandos. Sabemos que  $q$  no puede ser igual a 2 por la condición que deben de cumplir, por tanto, para tomar lo menos posible, proponemos  $q = 3$  y finalmente  $r = 7$ . En efecto tenemos que

$$\frac{c_2^2 + c_3^2 + c_7^2 + 2c_2 c_3 c_7 - 1}{2 + 2c_7 - (c_2 - c_3)^2} = \frac{(\frac{1}{2})^2 + c_7^2 - 1}{2 + 2c_7 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4\cos^2(\frac{\pi}{7}) - 3}{8\cos\frac{\pi}{7} + 7},$$

que es la cota dada por el teorema.

Por otro lado, si asumimos por el momento que alguno de  $p, q$  o  $r$  es al menos 8, otro al menos 3, entonces

$$M(g, h)^2 \geq \frac{1}{4}[\cos^2(\frac{\pi}{8}) + \cos^2(\frac{\pi}{3}) - 1] = 0.025\dots$$

que es una cota mayor a la establecida por el teorema, por lo tanto, en nuestra búsqueda de una cota inferior de  $M(g, h)$ , asumimos que  $p, q$  y  $r$  son a lo más 7, ésto reduce el problema a un número finito de cálculos. Sin embargo se pueden evitar la mayoría de los cálculos haciendo las siguientes consideraciones.

Si ninguno de  $p, q$  y  $r$  es dos, entonces dos son al menos 3, y el otro será al menos cuatro, entonces

$$M(g, h)^2 \geq \frac{1}{4}[2\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{\pi}{4}) + 2\cos^2(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - 1] = 0.088\dots$$

que es una cota mayor todavía. Entonces podemos asumir que alguno de  $p, q$  y  $r$  es 2, y ninguno es 3, por lo tanto son al menos 4 y 5, y entonces

$$M(g, h)^2 \geq \frac{1}{4}[\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1] > 0.038.$$

Se deduce que alguno de  $p, q$  o  $r$  es 2, otro es 3 y el tercero solo puede ser 7 dadas las restricciones que ya teníamos. La cota inferior es simétrica para  $p$  y  $q$ , y el numerador es simétrico en  $p, q$  y  $r$ . Entonces solo necesitamos maximizar

$$2 + 2c_r - (c_p - c_q)^2$$

sobre las posibilidades

$$(p, q, r) = (2, 3, 7), (2, 7, 3), (3, 7, 2),$$

pero observamos que el valor máximo de las tres posibilidades se da cuando

$$(p, q, r) = (2, 3, 7),$$

pues conviene en el denominador que  $c_r$  sea el mayor de los tres para maximizar la expresión. Observamos que ésta es la misma terna propuesta inicialmente. Calculando para esta terna se tiene que

$$\begin{aligned} M(g, h)^2 &\geq \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}) + \cos^2(\frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{\pi}{7}) + 2\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{7}) - 1}{2 + 2\cos(\frac{\pi}{7}) - [\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{3})]^2} \\ &= \frac{(\frac{1}{2})^2 + \cos^2(\frac{\pi}{7}) - 1}{2 + 2\cos(\frac{\pi}{7}) - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4\cos^2(\frac{\pi}{7}) - 3}{8\cos\frac{\pi}{7} + 7} = 0.017383, \end{aligned}$$

obteniendo la raíz cuadrada resulta la cota dada para el caso general en el que el grupo generado es triangular. □

Concluimos esta tesis con un resultado que describe una propiedad de los grupos elementales. Consideremos que algunos autores definen que  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es elemental si y sólo si existe una  $G$ -órbita finita en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ , esto usando las extensiones de Poincaré. Cf. [1], capítulo 8.

**Proposición 2.0.6** *Suponga que  $\langle f, g \rangle$  es elemental. Entonces, si  $v, fv, gv$  son puntos distintos en una circunferencia, con centro en  $w$  entonces, o bien*

- (i)  *$f$  y  $g$  son elípticas con punto fijo  $w$ , o*
- (ii) *alguna de  $f$  y  $g$  es elíptica de orden dos (no pueden ser ambas hiperbólicas).*

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  y  $g$  son elípticas de orden finito tal que ambas fijan el mismo punto  $w$ , entonces  $v, fv$  y  $gv$  están en un mismo círculo con centro en  $w$  y el grupo es elemental con  $w$  como único punto límite, por lo tanto el grupo también es elemental.

Ahora, si  $f$  es parabólica, podemos suponer que actúa en  $\mathbb{H}^2$  y que la órbita finita es  $\{\infty\}$ , por lo que  $g$  también debe ser parabólica, y dado que el grupo es elemental, su punto fijo solo puede ser  $\infty$ , entonces se tiene que  $u, fu$  y  $gu$  están sobre una recta, lo cual contradice que estén sobre una misma circunferencia hiperbólica.

Supongamos que  $f$  y  $g$  son hiperbólicas, dado que por hipótesis se tiene que el grupo es elemental, entonces éstas fijan el mismo eje, de donde se tiene que  $v, fv$  y  $gv$  están sobre un mismo hiperciclo y por lo tanto no pueden estar en un mismo círculo.

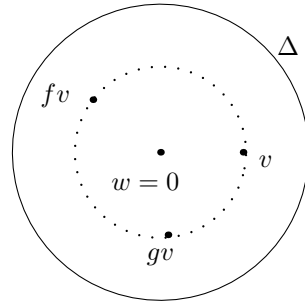


Figura 2.12: En  $\Delta$ ,  $v$ ,  $fv$  y  $gv$  sobre un círculo con centro en  $w = 0$ .

Si  $f$  es hiperbólica y  $g$  es elíptica, para que se cumpla la hipótesis de que el grupo sea elemental es necesario que  $g$  sea de orden dos, además se prueba que también es necesario que su punto fijo esté sobre el eje de  $h$ . Incluso es posible que el punto  $w$  sea el punto fijo de  $g$ , como en se ve en la Figura 2.13.

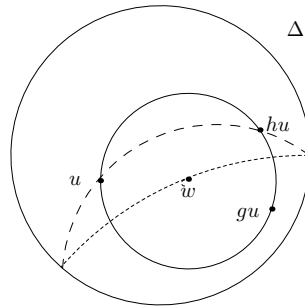


Figura 2.13: Caso elíptico-hiperbólico, grupo elemental.

Finalmente supongamos que ambas son elípticas, y que sus puntos fijos son distintos, entonces, para que el grupo sea elemental es necesario que las dos sean de orden dos, en otro caso, el grupo no sería elemental. Esta observación se hizo en la demostración del teorema anterior. Por lo tanto, se cumple que al menos una es elíptica de orden dos si ambas no son elípticas con el mismo punto fijo.

□



# Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [2] GROMOV, M., *Hiperbolic Manifolds (according to Thurston and Jørgensen)*; Bourbaki Seminar, vol. 1979/80. Lecture Note in Math Springer Berlin-New York, 1981.
- [3] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [4] MARDEN, A., Universal properties of fuchsian groups in the Poincaré metric; Discontinuous Groups and Riemann surfaces, *Annals of Math. Studies 79*, Princeton University Press, Princeton 1974.
- [5] MARTÍNEZ AGUILAR, C. E., *Restricciones universales para grupos fuchsianos*; Tesis de licenciatura, UNAM, 2016.
- [6] MUNFORD, D., SERIES, C. AND WRIGHT, D. *Indra's Pearls*; Cambridge University Press, 2001.
- [7] SAAVEDRA LUIS, H. A., *La Signatura de un grupo fuchsiano del primer o del segundo tipo*; Tesis de licenciatura, UNAM, 2014.
- [8] VILLASEÑOR LECHUGA, A., *Una introducción a los grupos fuchsianos triangulares*; Tesis de licenciatura, UNAM, 2014.
- [9] YAMADA, A., *On Marden's universal constant of fuchsian groups*, Kodai Math. J., 4(1981), 266-277.
- [10] ZÚÑIGA SILVA, O., *La desigualdad de Jørgensen*; Tesis de licenciatura, UNAM, 1996.