



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**EVALUACIÓN DE CALIDAD DE IMAGEN EN
TOMOGRFÍA ÓPTICA DE LUMINISCENCIA POR
EXCITACIÓN SELECTIVA CON RAYOS X A
TRAVÉS DE PSNR Y SSIM**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

EUGENIO CANO SERRANO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ARNULFO MARTÍNEZ DÁVALOS

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2017





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Cano

Serrano

Eugenio

53 96 93 15

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

308039232

2. Datos del tutor

Dr.

Arnulfo

Martínez

Dávalos

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Gabriela

Murguía

Romero

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Luis Alberto

Medina

Velázquez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Manuel

Campos

García

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Patricia Raquel

Avilés

Mandujano

7. Datos del trabajo escrito.

Evaluación de Calidad de Imagen en Tomografía Óptica
de Luminiscencia por Excitación Selectiva con Rayos X
a través de PSNR y SSIM

88 p

2017

DEDICATORIAS

Lista de personas a las que NO está dedicada esta Tesis:

-Carlos Alexis Pérez Herrera.

Son todas.

A mi madre.

Cuyas enseñanzas de no copiar las tareas y de no hacer trampa en los exámenes aunadas a la prolongada lucha contra mis demonios internos provocaron que demorara seis años en terminar las materias de la licenciatura.

A mi padre.

Quien a pesar de la distancia siempre ha procurado estar al pendiente de mí.

A mi *Tomboy lover* favorito.

Por compartir toda una vida conmigo y por ayudarme a levantarme cuando yo estaba convencido de que iba a quedarme tendido para siempre.

A mi abuela materna.

Quien no lo logró, pero estoy seguro que habría estado muy feliz de haber sido testigo de esto.

A mi gato.

El amo y señor de mis días, de mi cama y de mi corazón.

A Karen.

Por escucharme, por buscarme, por preocuparse de mí, por quererme cuando nadie quería quererme y por ser la mejor amiga que la vida me ha dado.

Al Yang.

Por enseñarme lo mucho que uno puede aprender cuando se le enseña algo a alguien.

A mi hermano Pedro.

Por enseñarme el verdadero significado de la palabra *Schlampe*.

A mi hermano Lázaro.

Cuyo intercambio de nombres y links logró hacer amenas mis noches más solitarias.

A mi hermano Alan.

Por ser el mejor rival de FIFA en el mundo.

A mi ex hermano Víctor.

Con quien tengo una deuda tan grande que la vida entera no va a alcanzarme para saldarla.

A Vivian.

Por quererme como soy y por enseñarme la importancia de la magia, las acuarelas y los unicornios.

A Marisol.

Por enseñarme que el narcisismo no lo es todo: ES LO ÚNICO.

A Silvia.

Quien un día me habló de cuervos y filosofía y a quién jamás creí llegar a querer tanto.

A Wendy.

Por existir y por recordarme que, sin importar que, nunca debes abandonar tus sueños.

A Erly.

Quien me enseñó que hacer trampa es el método perfecto para ganarse una playera de *Maroon 5*.

A Sandra.

Mi bióloga y camarógrafa favorita, por estar ahí siempre que la he necesitado.

A Homar y Yanín.

Quiénes, sin conocerse, han sido mi inspiración y mi ideal de lo que creo debería ser un estudiante de Física.

A Edgar.

Por creer en mí más de lo que yo creía en mí mismo.

A mis amigos de las canchas.

Cuyas retas y partidos de basketball después de un examen desastroso o una semana entera de desvelo siempre supieron animarme para seguir intentándolo.

A Chayito.

Porque Chayito es amor y porque siempre me defiende cuando Mayo intenta burlarse de mí.

A Sami Zayn.

Cuya canción de entrada me motivaba de sobremanera a escribir este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

A mi Universidad por brindarme la oportunidad de estudiar lo que quería y de superarme como persona.

Al Dr. Arnulfo sin cuya paciencia nada de esto habría sido posible.

Al Dr. Medina por preocuparse por mí y por apoyarme cuando más lo necesitaba.

Al Dr. Manuel Campos por ayudarme a darme cuenta de lo poco que aprendí en mis cursos de mecánica de la licenciatura, a la Dra. Gabriela Murguía por recordarme lo bonito que es el electromagnetismo, a la M. en C. Patricia Avilés por no tener inconveniente con la amistad que mantengo con su hijo, a todos ellos por tomarse el tiempo de revisar y corregir este trabajo.

A los proyectos PAPIIT-UNAM IN108615 e IN110616, y CONACYT Problemas Nacionales 2015-612 por el apoyo recibido.

Contenido

Introducción.....	9
Capítulo 1 Interacción de Rayos X con Materia.....	11
1.1. Rayos X	11
1.2. Interacción de Rayos X con Materia	12
1.2.1. Dispersión Rayleigh	13
1.2.2. Absorción Fotoeléctrica.	13
1.2.3. Efecto Compton.....	14
1.2.4. Producción de Pares y Producción de Triplete.....	14
1.2.5. Interacción Fotonuclear.....	15
Capítulo 2 Tomografía y Métodos de Reconstrucción.....	17
2.1 Tomografía Computarizada.....	17
2.1.1. Detectores de Rayos X en CT	19
2.1.2. Generaciones de Tomógrafos.....	20
2.2 Tomografía Óptica de Luminiscencia por Excitación Selectiva con Rayos X (TORX).....	24
2.3 Efectos de la Atenuación en Tomografía de Emisión	26
2.3.1 Efectos de Atenuación y Conteo Conjugado.....	28
2.3.2 Corrección por Atenuación	30
2.4 Métodos de Reconstrucción.....	31
2.4.1 Métodos de Fourier	31
2.4.1.1 Geometría de Haz Paralelo	31
2.4.1.2 Geometría de Haz de Abanico	35
2.4.2 Operador de Proyección.....	37
2.4.3 Métodos Iterativos.....	40

2.4.3.1	Métodos Algebraicos	40
2.4.3.1.1	Método de Kaczmarz	40
2.4.3.1.2	Técnicas Simultáneas	41
2.4.3.2	Métodos Estocásticos	41
2.4.3.2.1	Algoritmo de Máxima Verosimilitud (MLEM)	42
2.4.3.2.2	Algoritmo de Maximización a Posteriori (MAP).....	45
Capítulo 3	Materiales y Métodos	48
3.1	Introducción.....	48
3.2.	Métodos de Evaluación de Calidad de Imagen	50
3.2.1.	Error Cuadrático Medio (MSE) y Cociente Señal a Ruido Máximo (PSNR) 50	
3.2.2.	Índice de Similitud Estructural (SSIM).....	51
3.3.	Datos Iniciales y Metodología.....	53
3.3.1.	Nomenclatura en las Tablas de Resultados	55
3.3.2.	Especificaciones de las Reconstrucciones.....	56
Capítulo 4	Resultados y Discusión.....	58
4.1.	Presentación y Análisis de Resultados	58
4.1.1.	Maniquí U	59
4.1.2.	Maniquí HC.....	70
4.1.3.	Maniquí IQ.....	75
4.2.	Discusión	80
4.2.1.	Conteo Conjugado.....	80
4.2.2.	Maniquí U	81
4.2.3.	Maniquí HC.....	82
4.2.4.	Maniquí IQ.....	82
4.2.5.	Discusión General	82

Conclusiones.....	85
Bibliografía.....	86
Glosario de Abreviaturas	88

Introducción

El descubrimiento de los rayos X por Wilhelm Röntgen en 1895 dio pie a la invención de la radiografía que es un antecedente claro de la tomografía computarizada (CT por sus siglas en inglés). La teoría matemática detrás de la reconstrucción CT data de 1917 cuando Johann Radon demostró matemáticamente que una función podía ser reconstruida a partir de un conjunto infinito de sus proyecciones. En 1937 el matemático polaco Stefan Kackzmarz desarrolló un método para encontrar soluciones aproximadas a sistemas lineales de muchas ecuaciones, que en 1970 sería adaptado por Gordon, Bender y Herman para usarlo en el campo de reconstrucción de imágenes tomográficas [Gordon et al., 1970]. El método de Kackzmarz inaugura los métodos iterativos en el campo de reconstrucción de imágenes y, buscando la manera de optimizar la convergencia, reducir los problemas de ruido y eliminar los artefactos en las imágenes reconstruidas; para ello se crean métodos algebraicos iterativos como DROP y SART, y métodos estocásticos iterativos como *Máxima Verosimilitud* (MLEM) y *Maximum a Posteriori* (MAP).

Después del rotundo éxito de la imagenología de transmisión, el desarrollo de distintas técnicas para obtener imágenes de una muestra dio origen a técnicas de imagenología de emisión como la Tomografía por Emisión de Positrones (PET). La Tomografía Óptica por excitación selectiva con Rayos X (TORX), que es la técnica de imagenología en la que está enfocada esta tesis, es una modalidad híbrida que combina características de imagenología de transmisión y de emisión.

Con el desarrollo de tantos algoritmos de reconstrucción y métodos de corrección para disminuir ruido, artefactos o degradación de la imagen causados por diversos factores, cabe hacer la pregunta de cuál de estos algoritmos combinado con qué técnica de corrección nos lleva a imágenes de mayor calidad a través de las que podamos obtener la información requerida de la muestra.

El objetivo de tesis es evaluar la calidad de imágenes reconstruidas por distintos algoritmos y sometidas a distintos métodos de corrección, a través del Cociente Señal a Ruido Máximo (PSNR) y el índice de Similitud Estructural (SSIM), que son métricas de referencia absoluta para evaluar la calidad de imágenes digitales.

En el Capítulo 1 se describen las propiedades más importantes de los rayos X, así como de los distintos procesos a través de los cuales interactúan con la materia. También se define el coeficiente de atenuación lineal μ que es un concepto fundamental para la reconstrucción de imágenes con datos obtenidos por CT.

En la primera parte del Capítulo 2 se presentan los principios fundamentales de la Tomografía Computarizada, la física involucrada, la descripción de la instrumentación necesaria para la adquisición de datos y las distintas generaciones CT con sus respectivas geometrías. En la segunda parte del mismo capítulo primeramente se revisan los métodos de reconstrucción tomográfica de Fourier: Retroproyección Filtrada (FBP por sus siglas en inglés). Después, se revisan los métodos iterativos, tanto algebraicos como estocásticos.

En el Capítulo 3 se estipulan los objetivos del trabajo, las características de los maniqués, los parámetros usados en los algoritmos de reconstrucción (FBP, SART y MLEM) y se mencionan los métodos de corrección por atenuación empleados. Posteriormente se presenta una descripción detallada de TORX y de la degradación de la imagen debido a efectos de atenuación en tomografía de emisión, así como de los métodos que se usaron en el trabajo para tratar de corregirlos (conteo conjugado, método multiplicativo de Chang y matriz de corrección ACF). Finalmente, se revisan los métodos de evaluación de calidad de imagen empleados, a saber: PSNR y SSIM.

En el Capítulo 4 se presentan los datos y los resultados obtenidos. Finalmente, en el Capítulo 5 se discuten los resultados y se elaboran las conclusiones de este trabajo. Se confirma la ventaja de los métodos iterativos sobre los de Fourier y se explica porqué los métodos de corrección por atenuación empleados en el trabajo no funcionan para corregir las imágenes obtenidas de los maniqués.

Capítulo 1

Interacción de Rayos X con Materia

Para obtener imágenes del interior del cuerpo humano se requiere del uso de alguna forma de energía que, salvo el caso de medicina nuclear, no sólo sea capaz de penetrar el tejido sino también de interactuar con él. Si la energía pasa de largo por el cuerpo sin interactuar no se podrá obtener información útil sobre la anatomía interna y reconstruir una imagen será imposible. Las diferentes formas de obtener una imagen variando el tipo de energía y la tecnología de adquisición reciben el nombre de modalidades. La tomografía computarizada es una modalidad que utiliza rayos X para producir imágenes transversales del cuerpo por lo que, para comprenderla, es necesario estudiar las propiedades de los rayos X y su interacción con la materia.

1.1. Rayos X

En 1895 Wilhelm Röntgen descubrió una radiación altamente penetrante que era emitida cuando electrones rápidos impactaban sobre un blanco. Röntgen nombró a esta radiación rayos X. La teoría electromagnética predice que una partícula cargada acelerada emitirá radiación y, claramente, un electrón que choca contra un blanco sufre una aceleración. A los rayos X producidos en estas circunstancias se les conoce como *bremstrahlung* o radiación de frenado y presentan un espectro de energía continuo. También hay producción de rayos X cuando electrones en un átomo cambian de un nivel energético a otro de menor energía. Estos rayos X tienen energías muy específicas que corresponden a la diferencia de energía entre los dos estados electrónicos, reciben el nombre de rayos X característicos o fluorescentes y presentan un espectro de energía discreto. Los rayos X también pueden ser captados por placas fotográficas por lo que, al poco tiempo de su descubrimiento, fueron empleados en hospitales para hacer radiografías.

En la práctica, los rayos X son generados en un tubo al vacío con un cátodo y un ánodo. Una corriente libera electrones en el cátodo por efecto termoiónico que son acelerados por una diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo y, finalmente, golpean el ánodo liberando energía en forma de calor, rayos X característicos y rayos X de frenado. Cabe señalar que el 99% de la energía de los electrones es liberada en forma de calor y apenas el 1% se emplea en la producción de rayos X [Suetens, 2009].

Los rayos X son capaces de ionizar la materia, es decir, de liberar electrones de sus átomos. En el contexto de los rayos X (y en general de la radiación indirectamente ionizante) la palabra interacción es aplicada a un proceso en el cual la energía y/o la dirección de la radiación son alterados [Greening, 1981]. Estos procesos son de naturaleza estocástica y se debe hablar de ellos en términos de la probabilidad de que ocurran. Dicha probabilidad puede ser expresada por medio de secciones eficaces o de coeficientes de interacción.

Uno de estos coeficientes de interacción es el coeficiente de atenuación lineal μ , que, en el contexto actual, se define como la probabilidad de que un fotón individual interactúe por unidad de material [Attix, 1986]. En la práctica se utiliza el coeficiente másico de atenuación lineal μ_m que se define como:

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.1)$$

Donde μ y ρ son el coeficiente de atenuación lineal y la densidad del material respectivamente.

Los rayos X son radiación electromagnética por lo que son fotones y, acorde a la teoría cuántica de la luz [Beiser, 1973] su energía está dada por:

$$E = h\nu \quad (1.2)$$

1.2. Interacción de Rayos X con Materia

Los rayos X pueden interactuar con electrones, núcleos atómicos o con los campos eléctricos generados por electrones o núcleos. En estos procesos, los rayos X pueden perder toda, parte o nada de su energía y su importancia radica en la energía transferida a los electrones que a su vez es impartida al material a través de interacciones Coulombianas a lo largo de sus trayectorias. A continuación, se discuten brevemente estas interacciones.

1.2.1. Dispersión Rayleigh

El fotón es dispersado a un cierto ángulo al chocar con un electrón; el átomo entero absorbe el impacto, siente una fuerza de retroceso (que es despreciable) y el fotón es dispersado casi sin pérdida de energía, por lo que esta interacción también recibe el nombre de dispersión coherente. La dispersión Rayleigh ocurre principalmente a energías bajas (<30 keV) [Suetens, 2009]. En la mayoría de las pruebas radiológicas no juega un papel importante pues el voltaje de operación de los equipos se encuentra entre 50 y 125 kV. El coeficiente másico de atenuación para dispersión Rayleigh $\frac{\sigma_R}{\rho}$ sigue la relación:

$$\frac{\sigma_R}{\rho} \tilde{\alpha} \frac{Z}{(h\nu)^2} \quad (1.3)$$

Donde σ_R es la probabilidad de ocurrencia de dispersión Rayleigh por unidad de material, ρ es la densidad del material, Z es el número atómico del material y $h\nu$ es la energía del fotón.

1.2.2. Absorción Fotoeléctrica.

Esta interacción se da entre fotones y electrones de las capas internas de los átomos que se encuentran más ligados al núcleo. El fotón es absorbido por el electrón que es inmediatamente eyectado del átomo con una energía cinética que, despreciando la energía cinética de retroceso del átomo, es igual a la diferencia entre la energía del fotón incidente $h\nu$ y la energía de amarre del electrón al átomo E_b [Attix, 1986].

$$T = h\nu - E_b \quad (1.4)$$

Debido a la energía de amarre, el umbral energético que debe cumplir un fotón para dar lugar a una absorción fotoeléctrica es $h\nu > E_b$. La probabilidad de que ocurra esta interacción aumenta con materiales de número atómico alto y para energías del fotón cercanas a E_b . Cuando la energía del fotón aumenta la ocurrencia de absorción fotoeléctrica disminuye. El coeficiente másico de atenuación para absorción fotoeléctrica $\frac{\tau}{\rho}$ cumple que:

$$\frac{\tau}{\rho} \tilde{\alpha} \left(\frac{Z}{h\nu}\right)^3 \quad (1.5)$$

Donde τ es la probabilidad de ocurrencia de efecto fotoeléctrico por unidad de material, ρ es la densidad del material, Z es el número atómico del material y $h\nu$ es la energía del fotón.

1.2.3. Efecto Compton

Un electrón de las capas externas, que se asume libre y en reposo, interacciona con un fotón que le transmite parte de su energía y lo eyecta del átomo a un cierto ángulo θ . El fotón es dispersado después de la colisión a un ángulo φ y tiene una nueva y más baja frecuencia. La componente Compton del coeficiente másico de atenuación $\frac{\sigma}{\rho}$ es proporcional a Z/A donde Z es el número atómico y A es la masa atómica. Esta cantidad varía lentamente para Z , excepto en el caso del Hidrógeno.

$$\frac{\sigma}{\rho} \sim \frac{Z}{A} \quad (1.6)$$

Donde σ es la probabilidad de ocurrencia de efecto Compton por unidad de material.

1.2.4. Producción de Pares y Producción de Triplete

En estos procesos el fotón interactúa con un campo Coulombiano y convierte su energía electromagnética a masa en reposo dando origen a un electrón y a un positrón. Un positrón es la anti-partícula del electrón. La producción de pares ocurre cuando el fotón interactúa con el campo Coulombiano del núcleo atómico, dado que la masa en reposo del electrón y del positrón es de 0.511 MeV la energía umbral del fotón para que ocurra este proceso es de 1.022 MeV. El excedente de energía en el fotón se reparte entre el par electrón-positrón en forma de energía cinética. La producción triple ocurre cuando el fotón interactúa con el campo Coulombiano de un electrón orbital. Puede demostrarse que el umbral para este efecto es de 2.044 MeV [Attix, 1986]. En la producción triple dos electrones y un positrón son eyectados del sitio de interacción.

El coeficiente másico de atenuación para estas interacciones está dado por la suma de las componentes de producción de pares y de producción triple y es aproximadamente proporcional a Z [Attix, 1986].

$$\frac{\kappa}{\rho} \sim Z \quad (1.7)$$

Donde κ es la probabilidad de ocurrencia de producción de pares y de producción de triplete por unidad de material, ρ es la densidad del material y Z es el número atómico del material.

El inverso de la producción de pares es la aniquilación. El positrón producido anteriormente, cuando está próximo a perder toda su energía cinética, se encuentra con un electrón y se aniquila emitiendo dos fotones de energía 0.511 MeV que viajan en direcciones opuestas.

1.2.5. Interacción Fotonuclear

Fotones con energías de algunos MeV interactúan con un núcleo que subsecuentemente emite energía usualmente en forma de neutrones y protones. Dado que es despreciable [Attix, 1986] la emisión de protones por lo general no se toma en cuenta. Sin embargo, los neutrones producidos en estos procesos pueden llevar a problemas de protección radiológica y deben considerarse para energías donde se presente esta interacción.

De estas interacciones las más importantes para la física radiológica en términos de transferencia de energía son la absorción fotoeléctrica, el efecto Compton y la producción de pares. La dispersión Rayleigh debe ser considerada cuando se trabaja a energías bajas y la interacción fotonuclear, salvo para tomar medidas de protección radiológica, es, en general, despreciada.

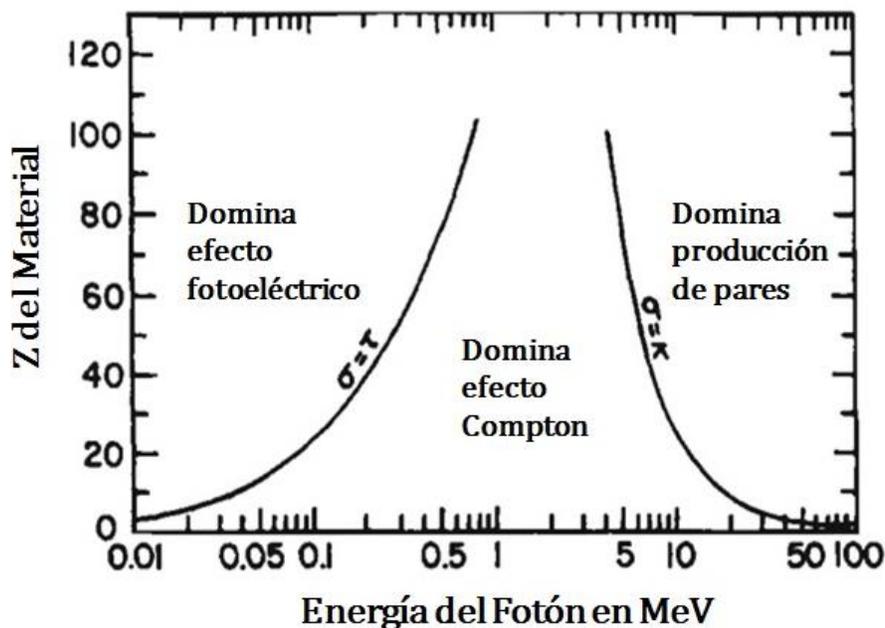


Figura 1.1 Importancia relativa de las tres interacciones principales de fotones con la materia.

(Attix, pág. 125)

Como se muestra en la figura 1.1, la absorción fotoeléctrica domina para energías suficientemente bajas en todos los materiales (100 keV), conforme aumenta la energía el efecto Compton se convierte en el proceso dominante y, pasando su umbral energético (1.022 MeV), predomina la producción de pares.

Las probabilidades de interacción de los procesos antes descritos son independientes entre ellas y, por ello, el coeficiente másico de atenuación lineal será igual a la suma de las probabilidades de que cada proceso ocurra individualmente [Greening, 1981], por lo que tenemos:

$$\mu_m = \frac{\tau}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho} + \frac{\sigma_R}{\rho} \quad (1.8)$$

El coeficiente másico de atenuación lineal es una función de la energía del haz de rayos X utilizado y del material en el que incidió dicho rayo. Así este coeficiente es característico de cada material y de cada energía. El objetivo de la tomografía es reconstruir un mapa de coeficientes de atenuación para generar una imagen.

Capítulo 2

Tomografía y Métodos de Reconstrucción

2.1 Tomografía Computarizada

La imagenología puede clasificarse en imagenología de emisión y de transmisión. En la imagenología de emisión, como por ejemplo la medicina nuclear, un fármaco que contiene un isótopo radiactivo es suministrado al paciente de forma oral, por inyección o inhalación. Una vez que el material se ha distribuido en el cuerpo, un detector de radiación es usado para hacer imágenes de proyección de los fotones emitidos debido al decaimiento radiactivo del isótopo. Estas son imágenes de emisión porque los radioisótopos emiten su energía desde dentro del paciente. En la imagenología de transmisión la fuente de energía está fuera del cuerpo, esa energía pasa a través del paciente y es detectada del otro lado. La tomografía es una técnica de imagenología de transmisión.

La radiografía fue la primera tecnología implementada para obtener imágenes médicas y es un antecedente claro de la tomografía computarizada (CT por sus siglas en inglés). Para obtener la imagen se coloca una fuente de rayos X a un lado del paciente, un detector del otro lado y se enciende la fuente. Una fracción importante de rayos X interacciona con el paciente, parte de ellos pasan a través de él y alcanzan al detector donde una imagen radiográfica es formada. La distribución homogénea de los fotones que entran al paciente es modificada por las diferentes propiedades de atenuación de su anatomía interna, estas propiedades son muy diferentes en tejidos como hueso, tejido blando y aire lo que resulta en distribuciones heterogéneas de rayos X sobre el detector. La imagen radiográfica es una foto de esta distribución de rayos X. Para una CT se repite el mismo procedimiento que en la radiografía, pero ahora para un número grande de ángulos rotando el tubo de rayos X alrededor del paciente. Una proyección se refiere a los datos recolectados a un ángulo en

específico. Los datos recolectados en cada proyección se sintetizan en la computadora para reconstruir una imagen tomográfica del paciente.

La ventaja de la CT sobre la radiografía es su capacidad de presentar cortes transversales de una proyección 3D del sitio de interés, eliminar la superposición de estructuras anatómicas y presentar una vista detallada no obstruida de la anatomía interna.

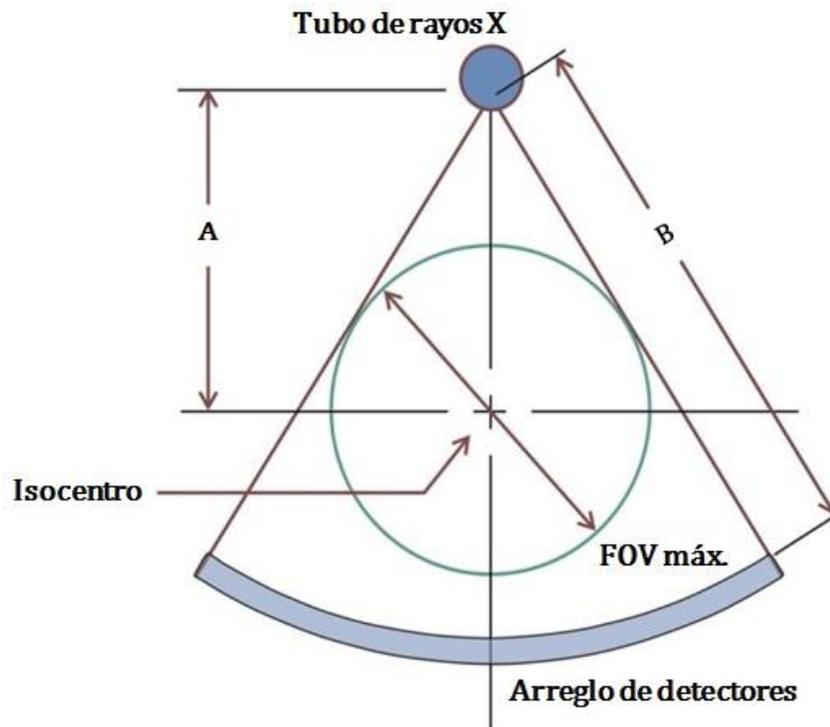


Figura 2.1 Geometría de un escáner CT en forma de abanico.

(Bushberg, pág. 319)

Una geometría de escáner CT de tipo abanico es presentada en la figura 2.1. El isocentro es el centro de rotación del gantry¹ y, en casi todos los casos, también es el centro de la imagen reconstruida. El campo de visión (FOV por sus siglas en inglés) es el ángulo sólido a través del cual el detector es sensible a los rayos X, por lo que representa el área de la superficie de corte estudiada y fuera de ella el coeficiente de atenuación lineal es cero.

¹ Coraza que aloja el tubo de rayos X, los colimadores y los detectores de un CT de radioterapia, con una abertura grande en donde se introduce al paciente.

Las imágenes CT modernas consisten en matrices de 512x512 pixeles donde cada entrada tiene un valor numérico al que se le asigna un tono de gris (número CT) que se expresa en Unidades Hounsfield (HU) y sigue la siguiente ecuación:

$$CT_{number} = \frac{\mu(x, y, z) - \mu_w}{\mu_w} \times 1000 \quad (2.9)$$

Donde $\mu(x, y, z)$ es el coeficiente de atenuación lineal promedio para un elemento de volumen (voxel) localizado en (x, y, z) y μ_w es el coeficiente de atenuación lineal del agua para el espectro de rayos X utilizado. Con esta definición, y dado que al aire se le asigna un coeficiente de atenuación lineal igual a cero, el número CT del agua es 0 HU y el del aire es -1000 HU. Los huesos caen del lado positivo de la escala de HU y su número CT va desde los cientos hasta más de 1000 dependiendo de su composición y estructura. El tejido adiposo por lo general se encuentra entre -80 y -30. Cabe aclarar que como la atenuación depende de la energía y del material, los valores HU de tejidos adiposos y blandos cambian ligeramente al variar la energía del tubo de rayos X.

2.1.1. Detectores de Rayos X en CT

Los más recientes detectores de rayos X usados en CT consisten en cristales centelladores acoplados a un fotodiodo. El cristal centellador convierte los rayos X incidentes en luz visible que luego es convertida en una señal eléctrica por un fotodiodo. La eficiencia de absorción de los cristales es tan alta que unos cuantos milímetros son necesarios para que el 96% de los rayos X incidentes sean absorbidos. Piezas centelladoras individuales son colocadas en una matriz reflectora para definir celdas detectoras. Un “rellenador opaco” es presionado en el espacio entre elementos detectores para reducir el cruce óptico entre detectores (figura 2.2). Un multicanal o sistema de adquisición de datos (DAS por sus siglas en inglés) es conectado al fotodiodo. El DAS integra la señal eléctrica y la convierte a voltaje utilizando un amplificador de transimpedancia, además efectúa la conversión de señal analógica a digital. Estos equipos presentan susceptibilidad a ruido electrónico lo que puede generar distorsiones en las imágenes.

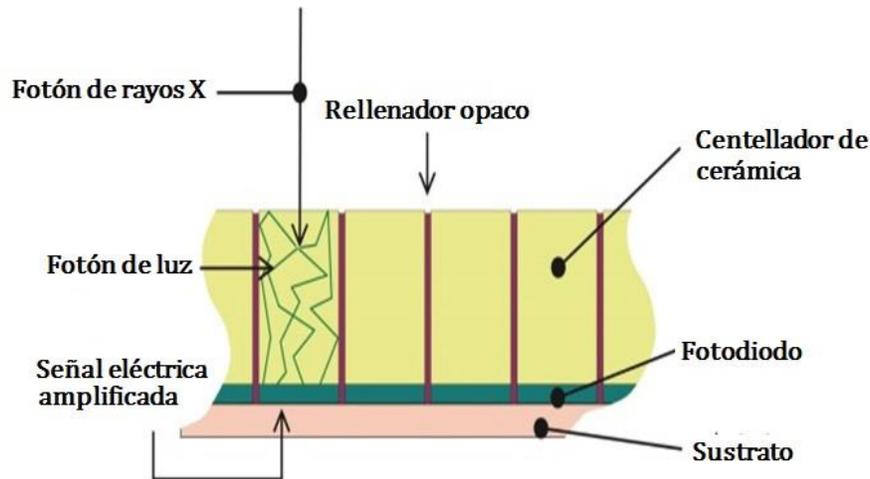


Figura 2.2 Detección de rayos X en un material centellador acoplado a un fotodiodo.

(Bushberg, pág. 330)

2.1.2. Generaciones de Tomógrafos

Una forma de clasificar los escáneres CT es el orden cronológico en el que fueron diseñados. Esta clasificación recibe el nombre de generaciones. Conocer esta clasificación resulta útil porque muchas veces las geometrías de adquisición de datos se refieren a la generación de CT correspondiente.

- 1ª generación. El diseño consiste en una sola fuente de rayos X y un sólo detector rígidamente acoplados. Un gran número de rayos paralelos son adquiridos conforme el ensamble fuente/detector se traslada a través del FOV. Una vez completada la adquisición, el sistema rota un grado y el ensamble se traslada en la dirección opuesta como se muestra en la figura 2.3. El patrón se repite hasta obtener los datos de 180°. Esta geometría de trasladar/rotar que usa un haz de lápiz recibe el nombre de 1ª generación. Los primeros escáneres de esta generación requerían de más de cuatro minutos y la reconstrucción de la imagen tardaba muchísimo tiempo. El tiempo de adquisición era entre 25 y 30 minutos y la resolución de la imagen muy pobre.

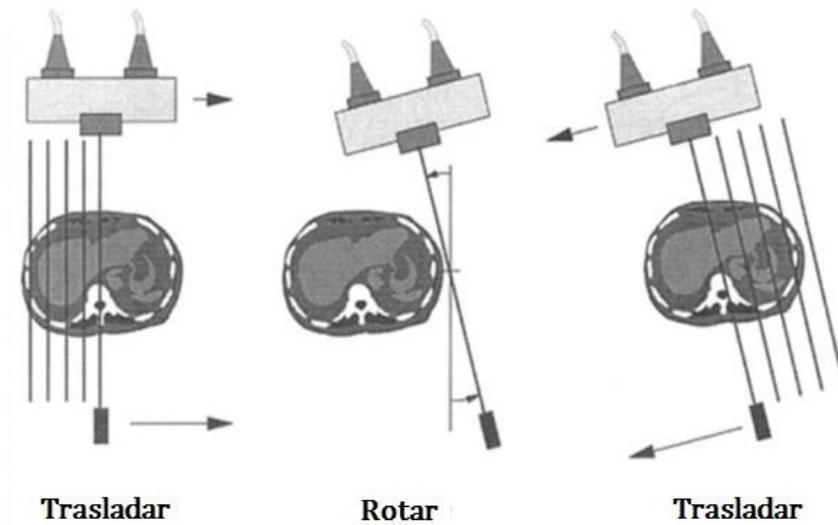


Figura 2.3 Primera generación de CT.

- 2ª generación. En la segunda generación se repite el movimiento de trasladar/rotar, pero se agregan más detectores y se cambia el haz de lápiz a un haz de abanico estrecho como se muestra en la figura 2.4. Al agregar detectores separados angularmente varias proyecciones pueden ser obtenidas en una sola transición. Los primeros escáneres CT de 2ª generación usaban tres detectores mientras que los últimos llegaron a usar más de cincuenta y tres, con lo que el tiempo promedio de adquisición se redujo a menos de 90 segundos y se obtuvieron imágenes reconstruidas de mayor tamaño.

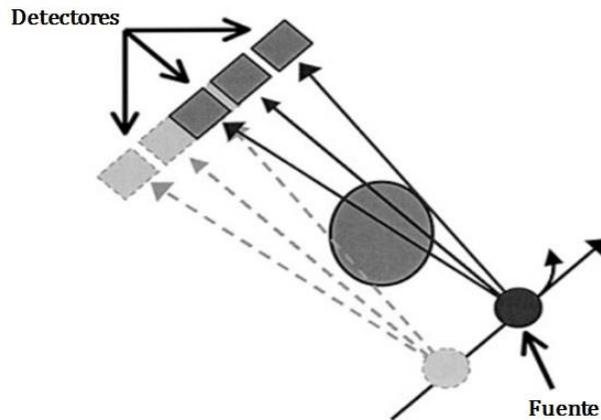


Figura 2.4 Segunda generación de CT.

- 3ª generación. No pasó mucho tiempo antes de que fuera evidente que usando la geometría de trasladar/rotar de la 1ª y 2ª generación no se podría reducir el tiempo de escaneo debido a las fuerzas inerciales empleadas en detener y luego invertir la traslación del ensamble del sistema fuente/detector. Para obtener escaneos de menor tiempo el movimiento traslacional debía irse. En la 3ª generación el tubo de rayos X y el arreglo de detectores son montados en una posición fija a un gantry rotatorio. El haz del tubo de rayos X es colimado a un haz en forma de abanico y dirigido a un arreglo de detectores en forma de arco. El tubo de rayos X y el arreglo de detectores rotan junto con el gantry alrededor del paciente para efectuar la adquisición de datos por lo que la geometría de 3ª generación recibe el nombre de rotar/rotar (figura 2.5). Esta geometría de CT es la más usada en escáneres modernos (escáneres helicoidales actuales están basados en pequeñas modificaciones a esta geometría). El tiempo promedio de escaneo en esta generación es aproximadamente de 5 segundos.

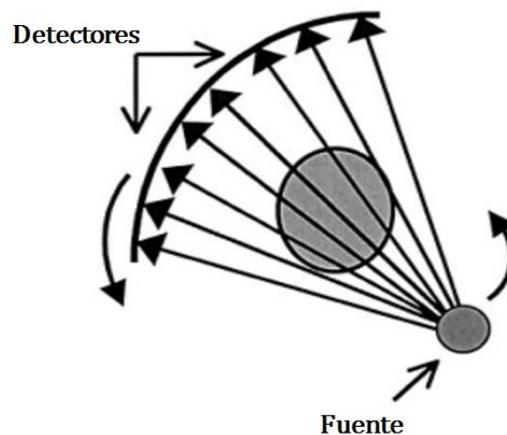


Figura 2.5 Tercera generación de CT

- 4ª generación. Debido a la relación fija de ángulo entre los detectores y la fuente de rayos X sobre el gantry de la 3ª generación pueden originarse artefactos de anillo en las imágenes reconstruidas. Los escáneres de 4ª generación fueron construidos para resolver esta problemática. En la 4ª generación tenemos un detector estacionario en forma de anillo y un tubo de rayos X rotatorio como se muestra en la figura 2.6. La

geometría de esta generación se conoce como rotar/fijo. Se requiere un arreglo de detectores que cubran 360° y canales electrónicos de alto costo para lograr la misma resolución espacial y dosis² que los sistemas de 3ª generación.

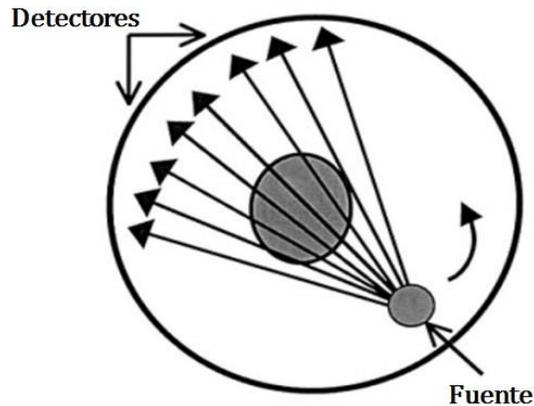


Figura 2.6 Cuarta generación de CT

En la actualidad ha habido mejoras en la estabilidad de algoritmos que vigilan y corrigen las fluctuaciones de ganancia electrónica en el detector, así como algoritmos para reducir los artefactos de anillo en imágenes CT. Estos procedimientos de corrección eliminan los artefactos de anillo en sistemas CT modernos de 3ª generación y hacen que sistemas de 4ª generación no sean muy usados debido a su alto costo [Bushberg, et al. 2012].

Imágenes CT de alta calidad pueden ser generadas al irradiar al paciente con una dosis alta de rayos X, sin embargo, el confort y la seguridad deben ser tomados en cuenta a la hora de obtener imágenes médicas. Una excesiva dosis al paciente para obtener una imagen CT de alta calidad no es aceptable. Lo que se busca en la práctica es un balance entre la seguridad del paciente y la calidad de la imagen [Bushberg, et al. 2012].

² El ICRU define la dosis como el valor esperado de la energía impartida por unidad de masa [Attix, 1986].

2.2 Tomografía Óptica de Luminiscencia por Excitación Selectiva con Rayos X (TORX).

En la sección 2.1 se mencionó que la imagenología podía clasificarse en imagenología de transmisión o de emisión. La imagenología de transmisión, como CT, es una modalidad anatómica de alta resolución espacial, mientras que la de emisión, como PET, es una modalidad funcional de alta sensibilidad. TORX es un sistema híbrido que utiliza estos dos principios, transmisión y emisión, de manera simultánea.

En lugar de utilizar radionúclidos, como en medicina nuclear, TORX utiliza nanopartículas luminiscentes que, al ser excitadas por rayos X, emiten fotones de luz con longitud de onda muy cercana al infrarrojo (NIR por sus siglas en inglés) lo que resulta conveniente para imagenología biomédica pues estos fotones se propagan largas distancias en tejido [Pratx et al., 2010]. Estas nanopartículas son activadas por electrones de alta energía que son producidos por la interacción de los rayos X con la materia, emiten fotones en el NIR que salen de la muestra y son captados por fotodetectores que miden el flujo de fotones ópticos. En TORX, además del fotodetector, se monta un sistema de fuente y detector de rayos X en lados opuestos de modo que, a la par de obtener información para reconstruir una imagen funcional de alta sensibilidad, se puede hacer imagenología de transmisión que proporcione información anatómica de alta resolución espacial (figura 2.7).

Uno de los nanofósforos utilizados en TORX es el oxisulfuro de gadolinio dopado con europio ($GOS:Eu^{3+}$) dada su alta sección eficaz para energías de rayos X de diagnóstico. Una de las ventajas de las nanopartículas fosforescentes es que el fondo óptico en TORX es despreciable en comparación a la señal luminiscente y, así, pequeñas cantidades de agentes inyectados pueden ser detectadas sin problema alguno.

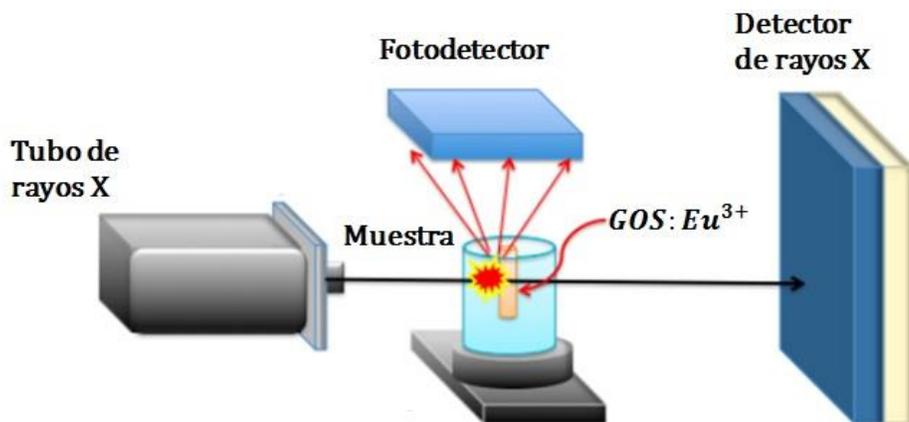


Figura 2.7 Sistema de imagenología TORX.

(Rosas, pág. 15)

Experimentos han reportado que, en TORX, la intensidad de luz producida es proporcional a la dosis de radiación en el tejido [Carpenter, 2010], por lo que cada fotón óptico generado tendrá asociado un costo de dosis. Como la calidad de imágenes mejora con un mayor número de cuentas de fotones ópticos, que a su vez es proporcional a la dosis y esta debe mantenerse lo más baja posible, los sistemas TORX deben ser capaces de reconstruir imágenes de alta calidad a partir de pocos fotones, es decir, con poca concentración de nanopartículas fosforescentes. Esto se logra a través de la excitación selectiva.

TORX es una CT con geometría de primera generación. La geometría de primera generación es necesaria en esta modalidad para asegurar una excitación selectiva, a saber: restringiendo la excitación de la muestra a un haz estrecho de rayos X el origen de los fotones ópticos puede ser inferido sin importar cuántas veces hayan sido dispersados o dónde se hayan detectado, por ello, usando excitación selectiva cada fotón óptico lleva consigo información localizada y con un limitado número de fotones ópticos pueden reconstruirse imágenes de alta calidad. Cabe señalar que la dispersión de rayos X en la muestra puede generar luz fuera del haz primario lo que produce una señal de fondo y afecta la calidad de la imagen, sin embargo, la contribución principal a la señal luminiscente viene del haz de radiación primaria.

También es importante mencionar que, en esencia, los rayos X no son atenuados por las nanopartículas fosforescentes ya que la absorción de éstas a bajas concentraciones, que es

como se trabaja en TORX, no es muy diferente a las regiones libres de tejido por lo que las nanopartículas no afectan significativamente la calidad de la imagen obtenida a partir de los datos recopilados por el detector de rayos X.

Los fotones ópticos generados con esta modalidad tienen una profundidad de penetración limitada en tejido biológico, por lo que TORX está enfocada a imagenología de animales pequeños.

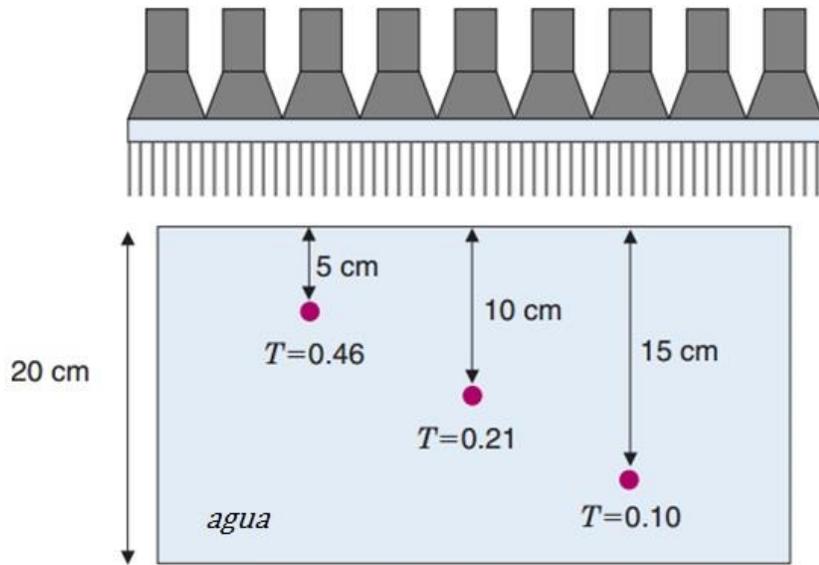
Una vez obtenidos los datos con TORX, para reconstruir las imágenes pueden emplearse los métodos de reconstrucción antes vistos (FBP, SART, MLEM), pero también se han propuesto métodos que, para calcular el operador de proyección, toman en cuenta efectos de absorción y dispersión de fotones [Li et al., 2014].

2.3 Efectos de la Atenuación en Tomografía de Emisión

Los métodos de reconstrucción empleados en tomografía de emisión asumen lo siguiente:

1. La señal recibida es proporcional a la energía liberada en la muestra (ya sea en términos de actividad en medicina nuclear o señal luminiscente en TORX).
2. La energía liberada fuera de la línea de respuesta no contribuye a la señal.

En el caso ideal de que estos supuestos se cumplan, la reconstrucción de la muestra resulta adecuada. Sin embargo, en la práctica la señal recibida de los puntos de emisión más cercanos al detector será más intensa que la recibida por los puntos de emisión que estén más lejos debido a la atenuación que sufre la energía por la cantidad de tejido que atraviesa antes de ser detectada.



Transmisión $T = e^{-\mu x}$
 Para rayos γ de 140 keV en agua, $\mu = 0.155 \text{ cm}^{-1}$

Figura 2.8 Atenuación de rayos γ emitidos por fuentes de ^{99m}Tc en agua.

(Cherry, pág. 287)

Más aún, a diferencia de imagenología de transmisión donde la señal recibida desde vistas opuestas es la misma, en imagenología de emisión esto no ocurre debido a efectos de atenuación. Por ejemplo, a un ángulo en el que el punto de emisión esté cerca del detector, en su vista opuesta este mismo punto será lejano y, debido a la atenuación de la luz, la señal detectada será mucho menor en la segunda vista que en la primera.

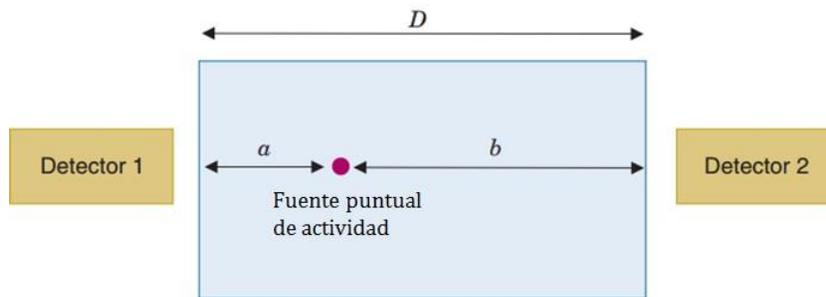


Figura 2.9 Fuente puntual de actividad. Vistas opuestas llevan a señales diferentes.

(Cherry, pág. 292^l)

Respecto al segundo supuesto del que parten los métodos de reconstrucción podemos decir que en la práctica tampoco se cumple pues la energía liberada fuera de la línea de respuesta debido a efectos de dispersión sí contribuye a la señal recibida y también pueden ocurrir otros eventos que contribuyan a la señal como penetración espacial a través del colimador. Debido a que los supuestos de los métodos de reconstrucción no se cumplen en la práctica, las imágenes obtenidas bajo los métodos revisados en este capítulo presentan artefactos y una calidad visual seriamente degradada [Cherry et al., 2012]. Para corregir estos problemas se deben usar aproximaciones modificadas de adquisición de datos o aplicar post-procesamiento a las imágenes adquiridas.

Factores como atenuación y dispersión pueden ser incorporados a la matriz del sistema implementada en métodos iterativos como SART y MLEM. Métodos como “Conteo Conjugado” introducen sus correcciones a los datos obtenidos y otros como el método multiplicativo de Chang opera directamente sobre la imagen previamente reconstruida [Cherry, 2012].

2.3.1 Efectos de Atenuación y Conteo Conjugado

Como se observa en la figura 2.9, a diferencia de tomografía de transmisión, medidas hechas desde vistas opuestas en tomografía de emisión llevan a señales diferentes por lo que un muestreo angular total (360°) es necesario. El conteo conjugado consiste en combinar los datos de vistas opuestas hasta obtener el equivalente de datos a un escaneo de 180° .

Sea I_1 e I_2 intensidades de señal obtenidas en vistas opuestas, una forma de combinar estas medidas por medio del conteo conjugado es usando el promedio aritmético:

$$I_A = \frac{I_1 + I_2}{2} \quad (2.10)$$

Otra manera es utilizando el promedio geométrico:

$$I_G = \sqrt{I_1 \times I_2} \quad (2.11)$$

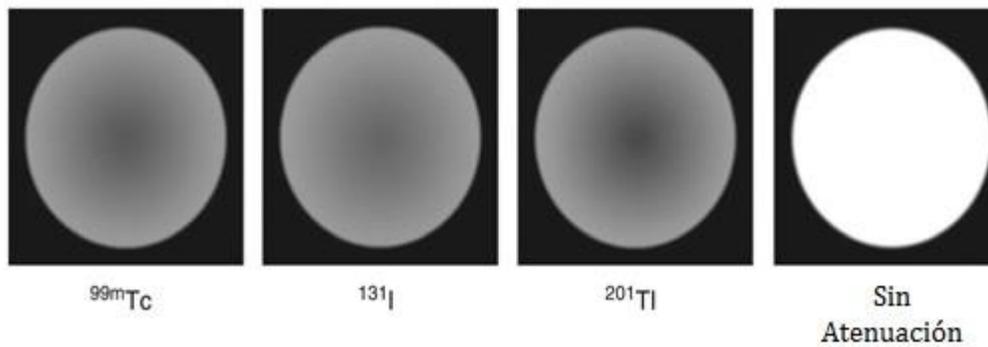


Figura 2.10 Efectos de atenuación en reconstrucciones de imagenología de emisión.
(Cherry, pág. 289)

En la figura 2.10 se muestran las reconstrucciones de un maniquí en forma cilíndrica lleno de agua que contiene una concentración uniforme de diferentes isótopos radiactivos. La degradación es más notable conforme la energía de los rayos γ liberados es más baja (el Tl-201 que emite a 70 keV) y también aumenta conforme se aumenta el diámetro del cilindro como puede constatarse en las referencias (Cherry et al., 2012).

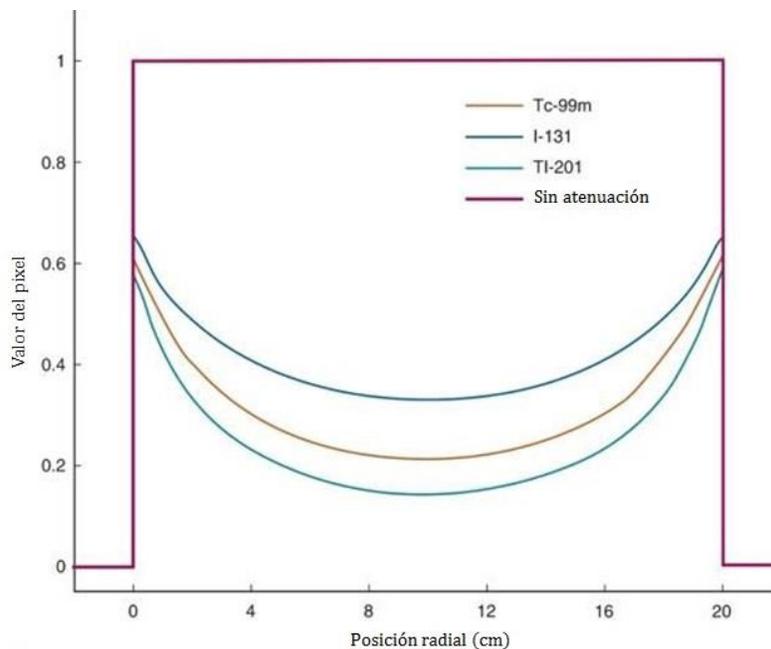


Figura 2.11 Perfil de reconstrucciones.
(Cherry, pág. 289)

En la figura 2.11 se observa un marcado decremento de la intensidad del perfil en el centro geométrico del maniquí donde los efectos de atenuación se maximizan. Los métodos que intenten corregir las reconstrucciones de la figura 2.10 deben buscar que los perfiles que presentan esta forma curva se asemejen al perfil constante de color morado en la figura 2.11.

2.3.2 Corrección por Atenuación

El conteo conjugado puede resolver el problema de que mediciones en vistas opuestas den resultados diferentes, pero no contempla ciertos factores de escala producidos por atenuación. Así que, para precisión cuantitativa, correcciones ligadas a la atenuación son necesarias. Uno de los métodos que puede emplearse para lograr esto, es el método multiplicativo de Chang [Cherry, 2012].

En el método de Chang se asume un coeficiente de atenuación lineal μ constante y se requiere conocer el tamaño real de la muestra. Puede asumirse un tamaño estándar o determinarse a partir de una imagen preliminar sin corregir.

Si no se asume un tamaño estándar, el primer paso consiste en reconstruir con cualquier método una imagen inicial $f'(x, y)$ sin correcciones por atenuación. Los contornos de esta imagen son utilizados para obtener un estimado del largo del camino de atenuación a través de la muestra para todas las proyecciones y a partir de esas distancias se calcula el factor de corrección por atenuación (ACF por sus siglas en inglés) para cada pixel (x, y) en la imagen con la siguiente fórmula:

$$ACF(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\mu d_i}} \quad (2.12)$$

Donde d_i es el tamaño del camino de atenuación para el pixel a la proyección i y N es el número de pixeles.

Finalmente, la imagen $f'(x, y)$ es corregida por multiplicación pixel a pixel con el ACF:

$$f(x, y) = f'(x, y) * ACF \quad (2.13)$$

Este método lleva a resultados satisfactorios cuando se emplea en imágenes del cerebro y abdomen, donde el supuesto de un coeficiente de atenuación lineal constante es bastante razonable ya que la cantidad de hueso y aire en estas zonas es bastante pequeña. En otras

zonas del cuerpo, como el tórax o la región pélvica, la presencia de pulmones y hueso llevan a que usar este método no resulte adecuado.

Cuando se trabaja con TORX, la suposición de un coeficiente de atenuación lineal constante en el FOV se traduce a una concentración de material luminiscente constante dentro del FOV.

2.4 Métodos de Reconstrucción

Una vez adquiridos los datos se procede a reconstruir la imagen. Las diferentes formas en que puede realizarse la reconstrucción reciben el nombre de métodos de reconstrucción. Los métodos de Fourier se basan en la solución analítica de Radon al problema de reconstruir una imagen a partir de todas las proyecciones de su coeficiente de atenuación lineal a distintos ángulos [Hansen, 2012]. La discretización de los datos, debido a que las computadoras sólo pueden manejar un número finito de elementos en el detector y en el campo de visión, reduce este problema a un sistema de ecuaciones lineales que, por lo general, está mal planteado. Los métodos iterativos son capaces de encontrar soluciones aproximadas a estos sistemas [Bruyant, 2002].

Los métodos de reconstrucción cambian de acuerdo a la geometría del CT utilizado.

2.4.1 Métodos de Fourier

2.4.1.1 Geometría de Haz Paralelo

Para geometría de haz paralelo (1ª generación de CT), se asume que el paciente está acostado a lo largo del eje z y que μ es cero fuera del FOV. Los haces de rayos X hacen un ángulo θ con el eje y y la intensidad sin atenuar de los rayos X es I_θ .

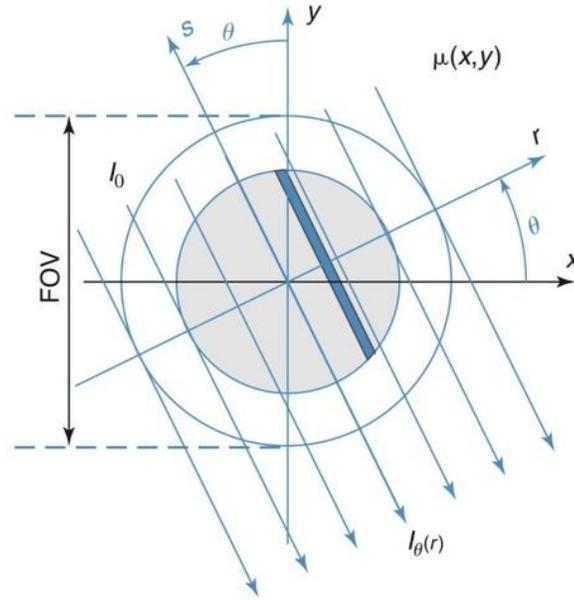


Figura 2.12 Geometría de haz paralelo. Coordenadas cartesianas y polares.
(Suetens, pág.36)

Efectuando un cambio de coordenadas cartesianas a polares obtenemos:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

Usando la ecuación (2.6) y partiendo de la ley de atenuación exponencial que atraviesa un material no homogéneo [Suetens, 2009] se obtiene que para un ángulo θ y para un tubo de rayos X monoenergético el perfil de intensidad medido como función de r es:

$$I_{\theta}(r) = I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(x,y) ds} = I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds} \quad (2.15)$$

Donde $L_{r,\theta}$ es la línea que hace un ángulo θ con el eje y a una distancia r del origen. En la práctica, el espectro de rayos X es polienergético, por lo que la ecuación (2.7) se usa como aproximación.

El perfil de atenuación se define:

$$p_{\theta}(r) = -\ln \frac{I_{\theta}(r)}{I_0} = \int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds \quad (2.16)$$

Donde $p_{\theta}(r)$ es la proyección de $\mu(x,y)$ a lo largo del ángulo θ .

Todas las proyecciones $p_\theta(r)$ resultan en un conjunto de datos 2D $p(r, \theta)$ llamado sinograma. La transformada de cualquier función en su sinograma es llamada la transformada de Radon.

$$p(r, \theta) = \mathcal{R}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds \quad (2.17)$$

El objetivo de la reconstrucción tomográfica es obtener la función original (los coeficientes de atenuación lineal) que generó las proyecciones medidas (el sinograma). Así, lo que necesitamos es una expresión para la transformada inversa de Radon.

$$f(x, y) = \mathcal{R}^{-1}\{p(r, \theta)\} \quad (2.18)$$

Sea $F(k_x, k_y)$ la transformada de Fourier 2D de $f(x, y)$ y $P_\theta(k)$ la transformada de Fourier 1D de $p_\theta(r)$. Entonces, por definición:

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.19)$$

$$P_\theta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(r) e^{-2\pi i(k \cdot r)} dr \quad (2.20)$$

Dejando variar θ , $P_\theta(k)$ se convierte en una función 2D $P(k, \theta)$ y el teorema de la proyección [Suetens, 2009] estipula que:

$$P(k, \theta) = F(k_x, k_y) \quad (2.21)$$

$$\text{Con} \begin{cases} k_x = k \cdot \cos \theta \\ k_y = k \cdot \sin \theta \\ k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \end{cases} \quad (2.22)$$

Basados en el teorema de la proyección, el siguiente algoritmo de reconstrucción para $f(x, y)$ puede ser utilizado:

1. Calcular la transformada de Fourier para todas las proyecciones $p_\theta(r)$:

$$\mathcal{F}_1\{p_\theta(r)\} = P_\theta(k) \quad (2.23)$$

2. Poner los valores de la función 1D $P_\theta(k)$ en un plano polar para obtener la 2D $P(k, \theta)$. Estos datos se cambian a coordenadas cartesianas para obtener $F(k_x, k_y)$.
3. Se calcula la 2D transformada inversa de Fourier y se obtiene $f(x, y)$:

$$\mathcal{F}_2^{-1}\{F(k_x, k_y)\} = f(x, y) \quad (2.24)$$

El cambio de coordenadas puede causar artefactos por lo que se prefiere la retroproyección filtrada (FBP por sus siglas en inglés) que usa la versión polar de la 2D transformada inversa de Fourier:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} P(k, \theta) |k| e^{i2\pi kr} dk d\theta \quad (2.25)$$

Con $r = x \cos \theta + y \sin \theta$. Definiendo:

$$P^*(k, \theta) = P(k, \theta) \cdot |k| \quad (2.26)$$

$$p^*(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(k, \theta) e^{i2\pi kr} dk \quad (2.27)$$

Sustituyendo (2.17) y (2.18) en (2.16) obtenemos:

$$f(x, y) = \int_0^\pi p^*(r, \theta) d\theta \quad (2.28)$$

Por lo que $f(x, y)$ puede ser reconstruida retroproyectando $p^*(r, \theta)$, que es la transformada inversa de Fourier 1D respecto a k de $P^*(r, \theta)$. El término $|k|$ se conoce como filtro *ramp*. Como una multiplicación en el espacio de Fourier puede ser escrita como la convolución en el dominio espacial, $p^*(r, \theta)$ puede ser escrito como:

$$p^*(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r', \theta) q(r - r') dr' \quad (2.29)$$

con

$$q(r) = \mathcal{F}^{-1}\{|k|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |k| e^{i2\pi kr} dk \quad (2.30)$$

La función $q(r)$ es llamada el kernel de convolución. Esto lleva al siguiente esquema de reconstrucción:

1. Filtrar el sinograma $p(r, \theta)$:

$$\forall \theta \quad p_\theta^*(r) = p_\theta(r) * q(r), \quad \text{ó}$$

$$P_\theta^*(k) = P_\theta(k) \cdot |k| \quad (2.31)$$

2. Retroproyectar el sinograma filtrado $p^*(r, \theta)$:

$$f(x, y) = \int_0^\pi p^*(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (2.32)$$

El filtro $|k|$ no es útil en la práctica por su naturaleza divergente. Para proyección de datos discretos el contenido útil de Fourier está limitado a frecuencias menores que una $k_{m\acute{a}x}$ por lo que el *ramp filter* $|k|$ puede ser limitado y cortado en $k_{m\acute{a}x}$. Este filtro recibe el nombre de filtro *Ram-Lak*. El *Ram-Lak* funciona bien para el caso de una imagen con poco ruido estadístico en sus proyecciones, pero al reducir la dosis de radiación al paciente en estudios con rayos X como CT, el conjunto de datos medidos son ruidosos a causa del ruido cuántico. Para estos casos se requiere usar de otros filtros capaces de afrontar esta problemática. Entre estos se encuentran el *Shepp-Logan*, *Hamming*, *Hann*, *Cosine*, *Butterworth*, etcétera [Kak, 1987].

2.4.1.2 Geometría de Haz de Abanico

Para geometrías de 3ª y 4ª generación las coordenadas utilizadas con detectores colocados a lo largo de un arco circular son (γ, β) . β es el ángulo entre la fuente y el eje y , y γ el ángulo entre el rayo que atraviesa el punto (x, y) y la línea central del abanico asociado. El *fan-angle* es el ángulo formado por el abanico. En la figura 2.13 las coordenadas (r, θ) usadas en geometría de haz paralelo son mostradas en conjunto con las coordenadas de geometría de abanico. Medidas de β en el intervalo $[0, \pi]$ no incluyen todas las medidas de líneas posibles en el caso de geometría de abanico. Un intervalo de medidas desde $[0, \pi + fan - angle]$ es requerido para incluir todas las líneas de medida.

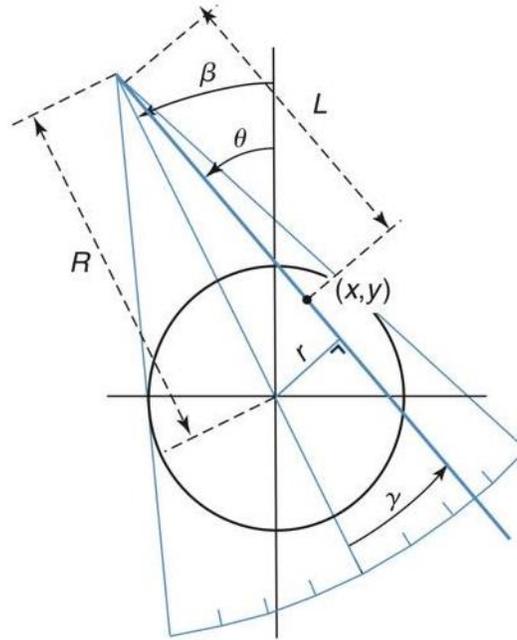


Figura 2.13 Geometría de haz de abanico con detectores sobre un arco circular.

(Suetens pág. 42)

Por simplicidad supongamos que tenemos todos los datos de β desde 0 a 2π . Dos posibles reconstrucciones pueden efectuarse:

1. Reordenar los datos en proyecciones paralelas y requiere interpolación.
2. Una ecuación adaptada para FBP.

Sustituyendo (2.20) en (2.21) y limitando r' a la integración de $[-FOV/2, FOV/2]$ obtenemos:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-FOV/2}^{FOV/2} p(r', \theta) \cdot q(x \cos \theta + y \sin \theta - r') dr' d\theta \quad (2.33)$$

El factor $1/2$ compensa por la integración de 0 a 2π . Usando las coordenadas de geometría de haz de abanico puede ser derivada la siguiente transformación de coordenadas:

$$\theta = \gamma + \beta \quad (2.34)$$

$$r = R \sin \gamma \quad (2.35)$$

Donde R es la distancia de la fuente al centro del FOV.

Introduciendo estas nuevas coordenadas en (2.25) obtenemos:

$$\begin{aligned}
f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-fan-angle}{2}}^{\frac{fan-angle}{2}} p(\gamma', \beta) \\
\cdot q(x \cos(\gamma + \beta) + y \sin(\gamma + \beta) - R \sin \gamma') \\
\cdot R \cos \gamma' d\gamma' d\beta
\end{aligned} \tag{2.36}$$

A partir de (2.28) puede demostrarse que:

$$\begin{aligned}
f(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{\frac{-fan-angle}{2}}^{\frac{fan-angle}{2}} [R \cos \gamma' \cdot p(\gamma', \beta)] \\
\cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - \gamma'}{\sin(\gamma - \gamma')} \right)^2 q(\gamma - \gamma') d\gamma' d\beta
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Donde L es la distancia desde el punto de la imagen (x, y) al ápice del abanico. Esta expresión es una FBP modificada y ponderada como $1/L^2$. La integral más interna es una convolución de $p(\gamma, \beta)$, ponderada con $R \cos \gamma$, con un kernel filtro modificado $\frac{1}{2}(\gamma \sin \gamma)^2 q(\gamma)$.

2.4.2 Operador de Proyección

Por la ecuación (2.9) y como básicamente la integral es la suma de los valores de f a lo largo de la línea $L_{r,\theta}$, p a veces es llamada suma de rayos. Como las computadoras sólo manejan datos finitos, en la práctica p y f son funciones de valores discretos, es decir, las variables x , y , r y θ tienen un número finito de posibles valores.

Desde un punto de vista matemático, el conjunto de valores del sinograma y de la imagen reconstruida pueden ser vistos como matrices o como vectores [Bruyant, 2002]. La imagen vector y el sinograma vector se obtienen al apilar los elementos de la matriz de la imagen y del sinograma en una sola columna. En estos vectores, el número de rayo se identifica con el índice i y el número de pixel con el índice j . Llamemos \mathbf{b} al vector que representa al sinograma y \mathbf{x} al vector imagen que queremos reconstruir. Puede demostrarse que el vector \mathbf{b} es el producto de una cierta matriz \mathbf{A} con el vector \mathbf{x} . Así, el valor b_i es la suma ponderada sobre los pixeles de la imagen:

$$b_i = \sum_j a_{ij} x_j \tag{2.38}$$

Esta es la fórmula discreta para la ecuación (2.9). Este producto, en notación matricial, puede ser escrito como $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde \mathbf{A} es llamado el operador de proyección.

Una forma de calcular los elementos a_{ij} de la matriz \mathbf{A} es la siguiente:

Supongamos que tenemos una imagen de cuatro pixeles numerados como se muestra en la figura 2.14, de tal forma que el pixel 1 es el renglón 1 de la imagen representada como vector columna, el pixel 2 es el renglón 2 y así sucesivamente.

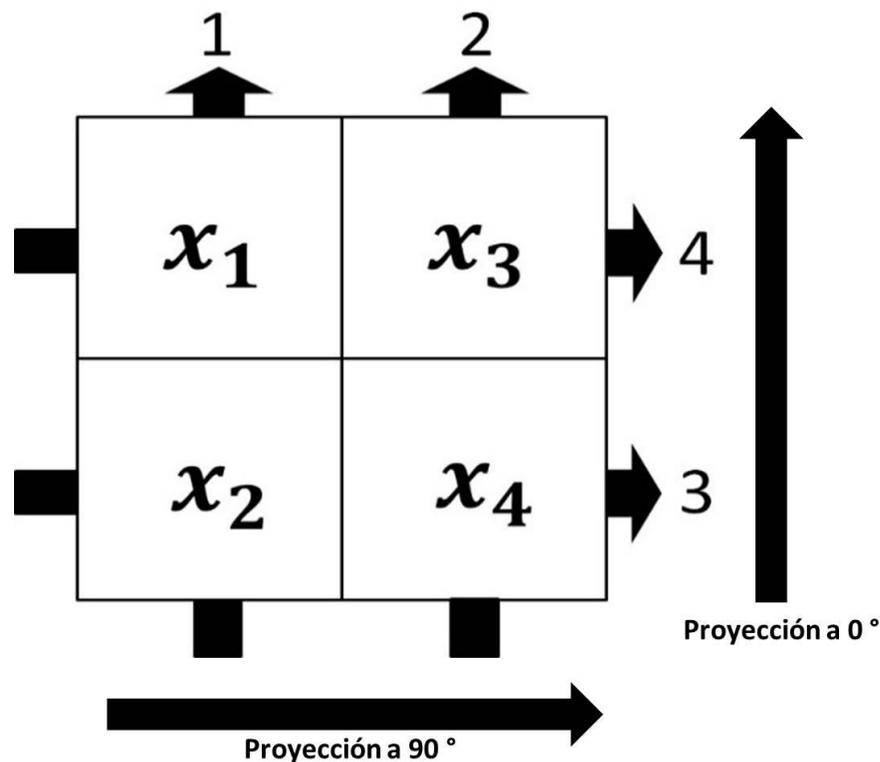


Figura 2.14 Ejemplo de una imagen de cuatro pixeles (x_1, x_2, x_3, x_4) y las proyecciones correspondientes a los rayos (1, 2, 3 y 4).

Hacemos dos proyecciones con haces paralelos. Una a 0 y otra a 90 grados como se muestra en la figura 2.9. En la primera proyección incide el rayo 1 y el rayo 2, en la segunda el rayo 3 y el rayo 4.

La entrada de la matriz a_{ij} es igual a 1 si el rayo i pasa por el pixel j , e igual a 0 si el rayo i no pasa por el pixel j . Con este procedimiento se reconstruye la siguiente matriz del sistema para la figura 2.9:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo el producto matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 \\ x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Así, por ejemplo, el rayo 1 recolecta información del pixel 1 y del pixel 2 que posteriormente es registrada por el detector.

Otra forma de abordar el problema consiste en definir a_{ij} como la longitud que recorre el rayo i en el pixel j . Para las proyecciones a 0 y 90 grados del último ejemplo y teniendo pixeles cuadrados de lado 1 obtendríamos los mismos resultados que con el método anterior. Sin embargo, para otros ángulos y para pixeles por donde sí pase el rayo tendremos valores en el intervalo (0,1) que serán más realistas ya que un rayo interactúa “menos” con un pixel si recorre menos distancia en él [Hansen, 2012].

La correcta determinación de los a_{ij} es muy importante porque los métodos iterativos usan el operador de proyección. Los valores se calculan considerando la geometría de adquisición y la fracción del pixel que contribuye al rayo, dependiendo de sus posiciones relativas y el ángulo de adquisición. Fenómenos físicos como atenuación y dispersión pueden ser modelados escogiendo los valores correctos para a_{ij} . La capacidad de modelar estos fenómenos es una gran ventaja de los métodos iterativos sobre la FBP.

Existen métodos directos que pueden resolver el problema $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$. Un método llamado inversión directa consiste en calcular la matriz inversa de \mathbf{A} y entonces $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Esto presenta varios problemas: 1) resulta excesivamente intensivo para computadoras modernas incluso para imágenes pequeñas de 64x64 pixeles; 2) la inversa de \mathbf{A} puede que no exista; 3) la inversa de \mathbf{A} puede no ser única y 4) la inversa de \mathbf{A} puede estar mal condicionada, es decir, pequeños cambios en \mathbf{b} pueden producir enormes diferencias en la reconstrucción de \mathbf{x} , verbigracia, cuando \mathbf{b} tiene ruido.

En la práctica, la matriz del sistema \mathbf{A} está mal condicionada debido al ruido en las proyecciones por lo que los métodos directos no se utilizan.

2.4.3 Métodos Iterativos

Para aplicar métodos iterativos a reconstrucción de imágenes requerimos del sinograma \mathbf{b} y del operador de proyección \mathbf{A} . De esa forma, el problema inverso a resolver es determinar \mathbf{x} a partir de que $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$. El principio de estos métodos es encontrar una solución por estimaciones sucesivas [Bruyant, 2002]. La proyección correspondiente al estimado actual es comparada con las proyecciones medidas. El resultado de esta comparación es usado para modificar el estimado actual y crear un nuevo estimado. Los algoritmos difieren en la manera en que la proyección medida y la estimada son comparadas y el tipo de corrección aplicada al estimado actual. Dentro de los métodos iterativos existen los métodos algebraicos y los estocásticos.

2.4.3.1 Métodos Algebraicos

2.4.3.1.1 Método de Kaczmarz

El método de *Kaczmarz* [Anton, 2014] es un algoritmo iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. En el campo de reconstrucción de imágenes a partir de sus proyecciones este método recibe el nombre de técnica de reconstrucción algebraica [Gordon *et al.*, 1970], o *ART* por sus siglas en inglés. El método de *Kaczmarz* puede aplicarse a cualquier sistema de ecuaciones lineales, pero sus ventajas computacionales respecto a otros métodos dependen de que el operador de proyección sea una matriz diluida, es decir, que muchas de sus entradas sean ceros, cosa que sucede en reconstrucción de imágenes médicas.

ART incluye el método de *Kaczmarz* más algunas variantes del mismo. En general son métodos secuenciales que actualizan la solución usando un renglón del operador de proyección a la vez.

El típico paso de estos métodos involucra el i -ésimo renglón a_i de \mathbf{A} y sigue la ecuación:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda \frac{b_i - \langle a_i, \mathbf{x}^k \rangle}{\|a_i\|_2^2} a_i \quad (2.39)$$

donde \mathbf{x}^k y \mathbf{x}^{k+1} son el estimado actual y el nuevo, respectivamente, b_i es el valor del sinograma en el i -ésimo renglón, $\|a_i\|_2^2$ es la norma euclidiana al cuadrado del renglón i , $\langle a_i, \mathbf{x}^k \rangle$ es el producto interior entre el renglón a_i y el vector imagen \mathbf{x}^k , a_i es el i -ésimo renglón de la matriz \mathbf{A} y λ es el parámetro de relajación y se agrega para reducir efectos del

ruido en el sinograma. La ecuación (2.31) es una ecuación general para todas las variantes del ART. En el método de *Kaczmarz* el índice i toma valores de $i = 1, 2, \dots, m$ donde m son el número de renglones de la matriz. En el método simétrico de *Kaczmarz* el índice i toma valores de $i = 1, 2, \dots, m - 1, m, m - 1, \dots, 3, 2$. En el método aleatorio de *Kaczmarz* se selecciona aleatoriamente un renglón i con probabilidad proporcional a la norma del renglón $\|a_i\|_2$.

2.4.3.1.2 Técnicas Simultáneas

Otro grupo de métodos iterativos de reconstrucción son las técnicas iterativas de reconstrucción simultánea (SIRT por sus siglas en inglés). La característica de estos métodos es que usan todos los renglones de \mathbf{A} simultáneamente en una iteración, es decir, funcionan con multiplicación de matrices. Dentro de estos métodos se encuentran Landweber, Cimmino, CAV, DROP y SART [Hansen, 2002].

Los métodos SIRT se basan en el algoritmo del gradiente y parten de la siguiente fórmula general:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda_k \mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{M} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^k) \quad (2.40)$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$

Algunos de los métodos utilizan la norma de los renglones $\|a_i\|_2$ y m que es el número de renglones de la matriz.

Para el método Landweber, la matriz \mathbf{T} y la matriz \mathbf{M} son la matriz identidad.

Para el método Cimmino, \mathbf{T} es la matriz identidad y $\mathbf{M} = \mathbf{D} = \frac{1}{m} \text{diag} \left(\frac{1}{\|a_i\|_2^2} \right)$.

Para el método CAV, \mathbf{T} es la matriz identidad y $\mathbf{M} = \mathbf{D}_S = \text{diag} \left(\frac{1}{\|a_i\|_S} \right)$ con

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\text{nnz}(\text{column } j))$$

Para el método DROP, $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ y $\mathbf{M} = m\mathbf{D}$.

Para el SART, $\mathbf{T} = \text{diag}(\text{suma de renglones})^{-1}$ y $\mathbf{M} = \text{diag}(\text{suma de columnas})^{-1}$

2.4.3.2 Métodos Estocásticos

Hasta ahora todas las soluciones dadas al problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, usando métodos de Fourier o técnicas algebraicas, han sido deterministas e ignoran por completo la naturaleza estocástica de la radiación. Los métodos de reconstrucción que toman en cuenta la naturaleza estocástica de la radiación reciben el nombre de métodos estocásticos.

2.4.3.2.1 Algoritmo de Máxima Verosimilitud (MLEM)

En el algoritmo de Máxima Verosimilitud (MLEM por sus siglas en inglés) se considera que los datos medidos son una muestra de un conjunto de variables aleatorias que siguen una cierta ley de probabilidad, por lo que tenemos un problema de estimación estadístico para datos incompletos. Cuando los modelos probabilísticos no se toman en cuenta para resolver el problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, la \mathbf{x} obtenida es la solución particular para las medidas del sinograma \mathbf{b} . Ahora, como vamos a tomar en cuenta la naturaleza estocástica de la radiación, el nuevo objetivo es encontrar una $\bar{\mathbf{x}}$ que produzca el sinograma \mathbf{b} con la máxima verosimilitud.

El algoritmo asume que la variable \mathbf{b} del sinograma y la \mathbf{x} de los coeficientes de atenuación lineal son variables aleatorias de Poisson.

Sea \bar{x}_j el coeficiente de atenuación lineal en el pixel j y a_{ij} los elementos del operador de proyección \mathbf{A} , entonces, la contribución del pixel j al sinograma es $a_{ij}\bar{x}_j$ y la entrada \bar{b}_i del sinograma es:

$$\bar{b}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\bar{x}_j \quad (2.41)$$

Por ley de Poisson, la probabilidad de detectar b_i en el detector i está dada por:

$$P(b_i) = \frac{e^{-\bar{b}_i} \bar{b}_i^{b_i}}{b_i!} \quad (2.42)$$

La función de verosimilitud $L(\bar{\mathbf{x}})$ se define como la probabilidad condicional de observar \mathbf{b} cuando el mapa de emisión es $\bar{\mathbf{x}}$. Dado que las variables de Poisson son independientes la probabilidad condicional es el producto de las probabilidades marginales, así, se obtiene que:

$$L(\bar{\mathbf{x}}) = P(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{x}}) = P(\mathbf{b}_1) P(\mathbf{b}_2) P(\mathbf{b}_3) \dots P(\mathbf{b}_n) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-\bar{b}_i} \bar{b}_i^{b_i}}{b_i!} \right) \quad (2.43)$$

Para encontrar la $\bar{\mathbf{x}}$ que origina \mathbf{b} con la máxima verosimilitud basta con derivar esta función y encontrar su máximo. Para lograr esto se considera la función:

$$l(\bar{\mathbf{x}}) = \ln[L(\bar{\mathbf{x}})] \quad (2.44)$$

Aplicando propiedades del logaritmo:

$$l(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \left(-\bar{b}_i + b_i \ln(\bar{b}_i) - \ln(b_i!) \right) \quad (2.45)$$

Sustituyendo (2.33) en (2.37):

$$l(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \left(-\sum_{j=1}^m a_{ij} \bar{x}_j + b_i \ln \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \bar{x}_j \right) - \ln(b_i!) \right) \quad (2.46)$$

Derivando respecto a \bar{x}_j :

$$\frac{\delta l(\bar{\mathbf{x}})}{\delta \bar{x}_j} = -\sum_{i=1}^n a_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{ij'} \bar{x}_j} a_{ij} = 0$$

Multiplicando por \bar{x}_j obtenemos:

$$-\bar{x}_j \sum_{i=1}^n a_{ij} + \bar{x}_j \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{ij'} \bar{x}_j} a_{ij} = 0$$

De donde puede deducirse que:

$$\bar{x}_j = \frac{\bar{x}_j}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{ij'} \bar{x}_j} a_{ij}$$

Definiendo $\tilde{b}_i = \sum_{j'=1}^m a_{ij'} \bar{x}_j$, el algoritmo MLEM es:

$$\bar{x}_j^{(k+1)} = \frac{\bar{x}_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\tilde{b}_i^{(k)}} a_{ij} \quad (2.47)$$

Donde $\bar{x}_j^{(k)}$ y $\tilde{b}_i^{(k)}$ son el pixel j actual y el estimado actual de la entrada i del sinograma respectivamente y $\bar{x}_j^{(k+1)}$ es el nuevo pixel j estimado. El término $\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\tilde{b}_i^{(k)}}$ es el radio entre el sinograma medido y el sinograma estimado y es un factor de corrección. Al multiplicar por los elementos de la matriz se obtiene el término $\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\tilde{b}_i^{(k)}} a_{ij}$ que es la retroproyección de la corrección desde el espacio del sinograma hacia el espacio de la imagen. La suma $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ que divide a $\bar{x}_j^{(k)}$ es un factor de normalización. Sea $R = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\tilde{b}_i^{(k)}} a_{ij}$ la ecuación (2.39) se convierte en:

$$\bar{x}_j^{(k+1)} = \bar{x}_j^{(k)} R \quad (2.48)$$

Y el MLEM se reduce a multiplicar el estimado actual $\bar{x}_j^{(k)}$ por un factor de corrección R . La ecuación (2.40) funciona pixel a pixel, pero extendiéndonos a la imagen I puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} \times \text{Retroproyección Normalizada de} \left(\frac{\text{Proyecciones Medidas}}{\text{Proyecciones de Imagen}^{(k)}} \right) \quad (2.49)$$

La ecuación (2.39) también puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{x}^{(k)} ./ \mathbf{R}) * [\mathbf{A}^T (\mathbf{b} ./ \tilde{\mathbf{b}}^{(k)})] \quad (2.50)$$

Donde $\mathbf{x}^{(k+1)}$ es el nuevo estimado de la imagen, $\mathbf{x}^{(k)}$ es el estimado actual de la imagen, \mathbf{R} es la matriz compuesta de las sumas sobre los renglones del operador de proyección, \mathbf{A}^T es la transpuesta del operador de proyección, \mathbf{b} son las medidas del sinograma, $\tilde{\mathbf{b}}^{(k)}$ es el estimado actual de medidas del sinograma, el símbolo $./$ denota división elemento a elemento entre matrices y $*$ denota la multiplicación entre dos matrices.

A diferencia de los métodos algebraicos, donde nuestro vector imagen inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ puede estar compuesto únicamente de elementos nulos, en el MLEM nuestro vector imagen inicial no puede serlo dado que el método iterativo es multiplicativo y un vector inicial cero permanecería en valores cero sin importar el número de iteraciones [Bruyant, 2002]. Por lo que la primera imagen puede ser un disco uniforme encerrado en el FOV (por ejemplo una matriz compuesta de solo 1's) o una imagen obtenida con FBP cuidando de que no haya pixeles con valores negativos (de haberlos estos valores deben ser mandados a cero o a un número positivo muy pequeño). Así, en el caso en el que la imagen inicial, las entradas del operador de proyección y los valores del sinograma sean no-negativas todas las imágenes producidas por el algoritmo serán no-negativas. Esto representa una ventaja importante respecto a la FBP o las técnicas algebraicas cuyas iteraciones pueden llevar a valores negativos sin sentido físico.

La tasa de convergencia del MLEM para llegar a una imagen aceptable es baja y tiene un alto costo computacional además de que el algoritmo en sí no tiene ningún parámetro para regular el ruido.

2.4.3.2.2 Algoritmo de Maximización a Posteriori (MAP)

Las imágenes reconstruidas con MLEM tienden a volverse ruidosas conforme el algoritmo emplea más iteraciones, ya que las imágenes ruidosas reconstruidas pueden llevar a proyecciones que sean muy cercanas a las proyecciones ruidosas medidas. Así, buscar que las proyecciones estimadas sean cercanas a las medidas no es del todo un criterio adecuado. Agregar un “conocimiento previo” al algoritmo como una restricción que pueda favorecer la convergencia del paso de maximización se le llama regularización. Este “agregado” se basa en una suposición de cómo debe ser la imagen verdadera y su función es reducir el ruido en las imágenes. Así, el algoritmo de maximización a Posteriori (MAP por sus siglas en inglés) busca que las proyecciones estimadas sean lo máximo posible cercanas a las proyecciones medidas y que las imágenes reconstruidas no sean demasiado ruidosas. Usando el teorema de Bayes, la probabilidad a posteori de la distribución de la imagen está dada por:

$$P(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{b}) = \frac{P(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{x}})P(\bar{\mathbf{x}})}{P(\mathbf{b})} \quad (2.51)$$

Donde $P(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{x}})$ es la función de verosimilitud descrita por (2.35), $P(\bar{\mathbf{x}})$ es la función de probabilidad *a priori* que define el “conocimiento previo” de la imagen y $P(\mathbf{b})$ es la distribución de probabilidad de las medidas.

Aplicando logaritmo natural a la ecuación (2.43):

$$\ln[P(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{b})] = \ln[P(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{x}})] + \ln[P(\bar{\mathbf{x}})] - \ln[P(\mathbf{b})] \quad (2.52)$$

Un prior bayesiano que fuerza la discretización local de la imagen es el prior de Gibbs: $P(\bar{\mathbf{x}}) = Ce^{-\beta U(\bar{\mathbf{x}})}$, donde U es la función de energía de $\bar{\mathbf{x}}$, β es el peso del prior y C es una constante de normalización. Sustituyendo (2.33) y el prior de Gibbs en (2.44) obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln[P(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{b})] &= \sum_{i=1}^n \left[-\sum_{j=1}^m a_{ij}\bar{x}_j + b_i \ln \left(-\sum_{j=1}^m a_{ij}\bar{x}_j \right) - \ln(b_i!) \right] + \ln(C) - \beta U(\bar{\mathbf{x}}) \\ &\quad - \ln[P(\mathbf{b})] \end{aligned}$$

Derivando obtenemos:

$$\frac{\delta \ln[P(\bar{\mathbf{x}}|\mathbf{b})]}{\delta \bar{x}_j} = -\sum_{i=1}^n a_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{ij'}\bar{x}_j} a_{ij} - \beta \frac{\delta U(\bar{\mathbf{x}})}{\delta \bar{x}_j} \quad (2.53)$$

Igualando el término de la derecha en (2.45) a cero, multiplicando por \bar{x}_j y despejando se obtiene:

$$\bar{x}_j = \frac{\bar{x}_j}{\sum_{i=1}^n a_{ij} + \beta \frac{\delta U(\bar{x}_j)}{\delta \bar{x}_j}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\sum_{j'=1}^m a_{ij', \bar{x}_j}} a_{ij}$$

Sea $\tilde{b}_i = \sum_{j'=1}^m a_{ij', \bar{x}_j}$, entonces el algoritmo MAP puede escrito como:

$$\bar{x}_j^{(k+1)} = \frac{\bar{x}_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^n a_{ij} + \beta \frac{\delta U(\bar{x}_j^{(k)})}{\delta \bar{x}_j}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\tilde{b}_i^{(k)}} a_{ij} \quad (2.54)$$

Que difiere del MLEM únicamente por el término prior.

Una opción para la función de energía es usar el prior cuadrático. De esta forma la función de energía se define como:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{x}_j} U(\bar{x}_j^{(k)}) = \sum_{a \in N_j} w_{ja} (\bar{x}_j^{(k)} - \bar{x}_a^{(k)}) \quad (2.55)$$

Donde N_j es un conjunto de pixeles en una vecindad del pixel j .

La suma de la diferencia del pixel j con el pixel a puede ser aproximado como la norma del gradiente del pixel j , al hacer esto, el peso w ya no depende del pixel a sino únicamente del j . Así la ecuación (2.47) puede escribirse como:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{x}_j} U(\bar{x}_j^{(k)}) = w_j \left\| \nabla \bar{x}_j^{(k)} \right\| \quad (2.56)$$

Sea \mathbf{G} la matriz compuesta por las normas de los gradientes de cada pixel de la imagen (dicha matriz puede ser calculada por medio de la función *imgradient* en MATLAB), entonces (2.48) puede ser escrita en forma matricial como:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{x}_j} \mathbf{U}(\bar{x}_j^{(k)}) = w_j \mathbf{G} \quad (2.57)$$

Y así, usando la notación de la ecuación (2.42), (2.46) puede ser escrita en su forma matricial como:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{x}^{(k)} ./ \mathbf{R} + \beta w_j \mathbf{G}) * [\mathbf{A}^T(\mathbf{b} ./ \tilde{\mathbf{b}}^{(k)})] \quad (2.58)$$

Notemos que el prior cuadrático fuerza la imagen a ser discreta en las orillas y esto lleva a que en la reconstrucción haya zonas borrosas.

Capítulo 3

Materiales y Métodos

3.1 Introducción

El objetivo del presente trabajo consistió en desarrollar códigos que implementaran algoritmos de reconstrucción iterativa, en concreto, SART y MLEM, y usar estos programas para evaluar la calidad de imagen por medio de métricas de referencia absoluta de un conjunto de reconstrucciones obtenidas a partir de los mismos datos utilizando métodos de Fourier o métodos iterativos. Las reconstrucciones fueron sometidas a diversos métodos de corrección por atenuación. Así, no sólo se evaluó la calidad de las imágenes sino también se determinó cuál de los algoritmos de reconstrucción empleados daba lugar a reconstrucciones de mayor calidad; también se evaluó qué tanto se corregían los efectos por atenuación al emplear los métodos de corrección. Todos los programas de reconstrucción y análisis utilizados en esta tesis se desarrollaron en el lenguaje de programación MATLAB R2014b.

Las imágenes presentadas en el trabajo se reconstruyeron usando sinogramas obtenidos a partir de simulación Monte Carlo del maniquí NEMA de calidad de imagen para tomografía óptica de luminiscencia por excitación selectiva con rayos X (TORX) [Rosas, 2015]. Este maniquí fue diseñado con el propósito de tener una metodología estandarizada para evaluar el rendimiento de un estudio PET para imagenología de animales pequeños [NEMA, 2008], pero también puede ser utilizado en TORX.

El maniquí NEMA es un cilindro hecho de polimetilmetacrilato con dimensiones internas de 50 mm de largo y 30 mm de diámetro. El cuerpo principal del maniquí está compuesto de una cámara cilíndrica rellenable de 30 mm diámetro y 30 mm de largo. Los restantes 20 mm de largo del maniquí son sólidos con cinco barras pequeñas atravesadas a 7 mm del centro del maniquí con diámetros de 1, 2, 3, 4 y 5 mm respectivamente. Hay una tapa que conecta a la región uniforme del maniquí y que sostiene dos cámaras de regiones frías. Una de estas cámaras es rellena de agua para simular atenuación y la otra se rellena de aire.

Las cámaras están compuestas de cilindros huecos de 15 mm de largo y 8 mm de diámetro interno (10 mm de diámetro externo y una pared de 1 mm de espesor).

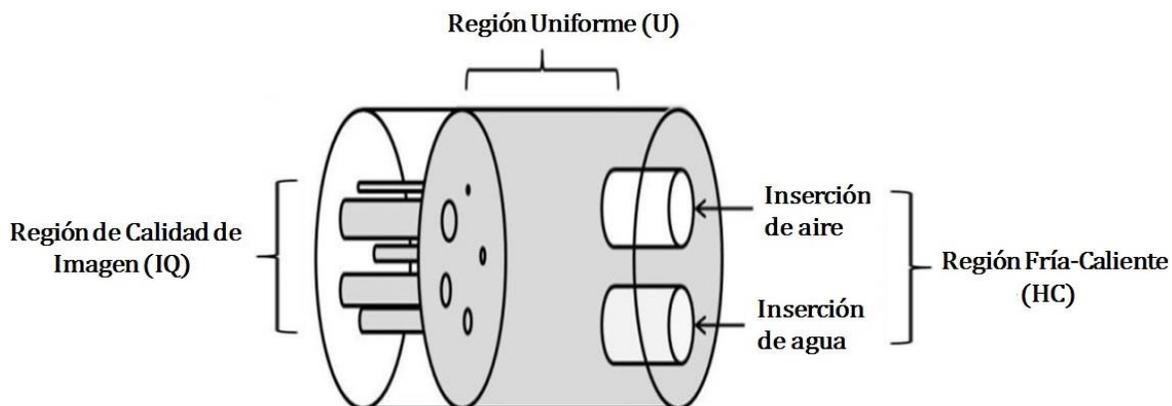


Figura 3.1 Maniquí NEMA de calidad de imagen

Los sinogramas presentados en este trabajo corresponden a las tres distintas regiones del maniquí de la figura 3.1, a saber: la región uniforme a la que llamaremos maniquí U, la región fría-caliente a la que llamaremos maniquí HC y la región de los cinco cilindros que corresponde a calidad de imagen a la que llamaremos maniquí IQ. Para estudios de PET, la zona sombreada de la figura 3.1 se rellena de radionúclidos diluidos en agua con actividad constante y en el caso de TORX se rellena con agua con concentración uniforme de material luminiscente. Las imágenes de referencia empleadas en este trabajo son las siguientes:

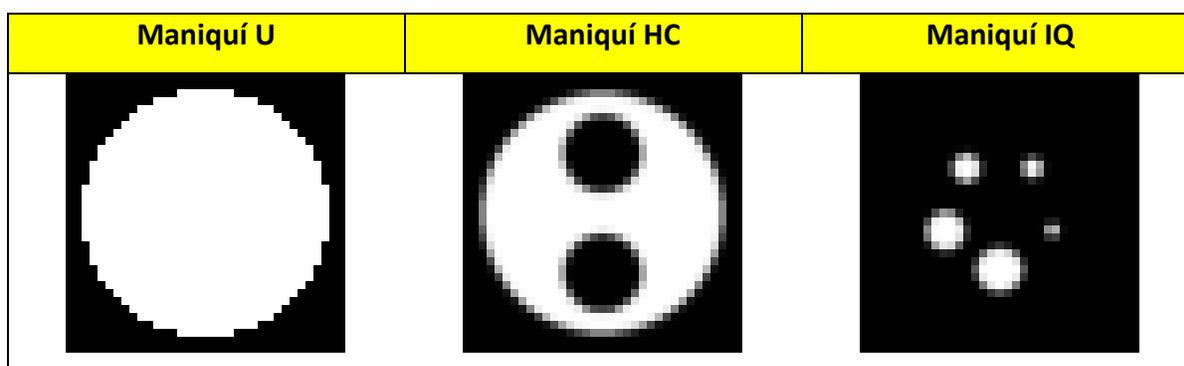


Figura 3.2 Imágenes de referencia utilizadas en la evaluación de calidad de imagen.

A continuación se explican las métricas de evaluación de calidad de imagen que se emplearon en este trabajo.

3.2. Métodos de Evaluación de Calidad de Imagen

Aunque el veredicto final sobre la calidad de una imagen la tiene el observador humano, también existen medidas objetivas para tratar de determinar su calidad. Así, los distintos métodos para evaluar la calidad de una imagen pueden clasificarse en subjetivos y objetivos. Los métodos subjetivos son aquellos que se basan únicamente en el juicio humano y no tienen sustento numérico alguno, mientras que los objetivos usan criterios numéricos específicos [Horé et al., 2010].

Una manera de definir métricas que cuantifiquen la calidad de una imagen, es midiendo la fidelidad de esta respecto a otra por medio de un método cuantitativo que describa el grado de similitud o, recíprocamente, de distorsión entre las dos imágenes.

Para que esta métrica funcione, se requiere de una copia de la imagen sin distorsión alguna contra la cual comparar a la que se le llama imagen de referencia. Las métricas que evalúan la calidad de una imagen comparándola con otra imagen de referencia reciben el nombre de métricas de referencia absoluta [Wang, 2004].

A continuación, se explican y discuten algunas métricas de referencia absoluta.

3.2.1. Error Cuadrático Medio (MSE) y Cociente Señal a Ruido Máximo (PSNR)

Sea $x = \{x_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ y $y = \{y_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ dos imágenes monocromáticas discretas donde N es el número de píxeles y x_i y y_i son los valores del i -ésimo píxel en x y y respectivamente. El error cuadrático medio (MSE por sus siglas en inglés) entre la imagen x y la imagen y se define como:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \quad (3.1)$$

Por convención x es la imagen de referencia y y es su aproximación ruidosa.

El MSE resta píxel a píxel entre las imágenes, eleva al cuadrado la diferencia para asegurar que la suma sólo contenga números positivos y luego promedia sobre el número de píxeles. Así el MSE es una cuantificación del grado de ruido en la imagen y . Es por ello, que en la literatura de procesamiento de imágenes, para obtener un número que represente el grado

de la calidad de imagen y no de su ruido [Wang et al., 2009] lo que se acostumbra es definir el cociente señal a ruido máximo (PSNR por sus siglas en inglés) como:

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{L^2}{MSE} \quad (3.2)$$

Donde L es el rango dinámico de las intensidades permitidas del pixel de la imagen, por ejemplo, si tenemos una imagen de 8 bits tendremos un rango dinámico de 255. El PSNR se expresa en una escala logarítmica de decibels porque muchas imágenes tienen un rango dinámico muy amplio [Wang, 2004].

El PSNR no sólo cambia de medir el nivel de ruido en MSE a medir la calidad de imagen, sino que también resulta útil cuando imágenes con rangos dinámicos diferentes están siendo comparadas, aunque, si ese no es el caso, el PSNR no proporciona información adicional al MSE.

El MSE tiene múltiples aplicaciones en el campo de procesamiento de señales. Es el criterio estándar para calcular la fidelidad de una señal, se utiliza para comparar métodos de procesamiento de señales (una imagen es, en esencia, una señal procesada) y también para optimizar algoritmos de procesamiento. No obstante, en muchas de estas aplicaciones, el MSE presenta desempeños pobres y sus fallas han sido ampliamente criticadas. Estudios han revelado que el MSE y, por consiguiente, el PSNR no sirven para discriminar contenido estructural en imágenes dado que varios tipos de degradaciones aplicadas a la misma imagen pueden llevar al mismo valor de MSE y PSNR [Wang et al., 2009].

En el campo de procesamiento de imágenes, el PSNR tiene una pésima reputación, pero irónicamente, es usado tanto como en otras áreas de procesamiento de señales.

3.2.2. Índice de Similitud Estructural (SSIM)

El índice de Similitud Estructural (SSIM por sus siglas en inglés) es una métrica de referencia absoluta que se diferencia del MSE y PSNR en que, estos últimos, estiman errores absolutos y el SSIM determina la calidad de la imagen midiendo la similitud estructural. Esta métrica de calidad de imagen parte del principio de que el sistema visual humano está adaptado para extraer información estructural de escenas visuales [Wang et al., 2009].

Supongamos que x y y son dos porciones locales tomadas en la misma locación de dos imágenes que están siendo comparadas. El SSIM local mide las similitudes de tres elementos en la porción, a saber: la similitud $l(x, y)$ de la luminosidad de la porción local, la similitud $c(x, y)$ del contraste de la porción local y la similitud $s(x, y)$ de las estructuras de la porción local. Estas similitudes locales son expresadas usando estadística simple y combinadas forman el SSIM local:

$$\begin{aligned} SSIM(x, y) &= l(x, y) \cdot c(x, y) \cdot s(x, y) \\ &= \left(\frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1} \right) \cdot \left(\frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \right) \cdot \left(\frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde μ_x y μ_y son el promedio en x y y respectivamente, σ_x y σ_y la desviación estándar en x y y respectivamente y σ_{xy} la covarianza entre x y y . Las constantes positivas C_1 , C_2 y C_3 son usadas para evitar un denominador nulo que lleve al SSIM a inestabilidad numérica.

El SSIM es simétrico $S(x, y) = S(y, x)$, acotado $-1 \leq S(x, y) \leq 1$ y cumple que $S(x, y) = 1$ si y solo si $x = y$. El SSIM se calcula con una “ventana deslizante” que se mueve pixel a pixel a través de la imagen lo que resulta en un mapa de valores de SSIM. El SSIM de la imagen total se calcula promediando los valores de SSIM locales.

Cambios en la luminosidad y contraste de la imagen que generalmente no degradan la estructura de la misma llevan a valores altos de SSIM, a diferencia del PSNR que resulta más sensible a dichos cambios, mientras que contaminación por ruido y compresión excesiva lleva a valores bajos de SSIM.

No obstante, existen estudios que apuntan a que los resultados de calidad de imagen obtenidos por medio del SSIM no son más correlacionados con el juicio humano de lo que lo es el PSNR. Se sugiera que la fórmula del SSIM no parte de un modelo adecuado de la percepción visual humana.

3.3. Datos Iniciales y Metodología

Los sinogramas obtenidos de la simulación Monte Carlo fueron los siguientes:

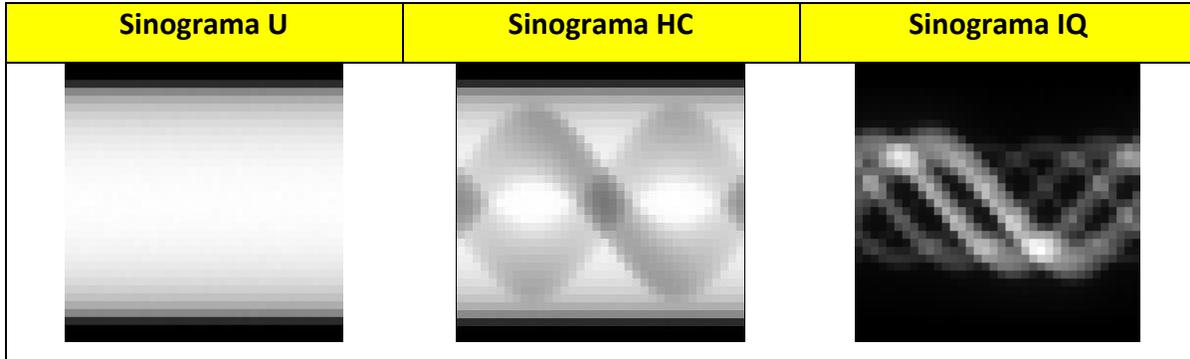


Figura 3.3 Sinogramas empleados en las reconstrucciones

Donde los sinograma U, HC e IQ corresponden a las secciones transversales de la figura 3.2. El maniquí U como se presentó en la figura 3.2 corresponde a agua con concentración del 1 mg/mL de $GOS:Eu^{3+}$ contenida en un cilindro de 30 mm de diámetro visto desde arriba, el maniquí HC es, en esencia, el mismo que U, pero con dos cavidades dentro del cilindro, una rellena de agua y la otra de aire. El IQ corresponde a los cinco cilindros de distintos diámetros que tienen la misma solución de agua con $GOS:Eu^{3+}$ que U y HC. En los maniqués el color blanco corresponde a un máximo de concentración de $GOS:Eu^{3+}$ en agua y el negro a regiones donde no hay material luminiscente. Computacionalmente, los pixeles negros son asignados con el valor numérico 0 y los blancos con 1. En el maniquí IQ de la figura 3.2 se observan regiones con un color intermedio, los pixeles correspondientes a estas regiones tienen asignado un valor numérico entre 0 y 1.

Los métodos de reconstrucción empleados fueron FBP, SART y MLEM y los de corrección por atenuación fueron el conteo conjugado (en su versión aritmética y geométrica) y el método multiplicativo de Chang. El método multiplicativo de Chang sólo fue empleado para el maniquí U, pues, de las imágenes de referencia, es el único que cumple que la concentración de $GOS:Eu^{3+}$ en agua es constante dentro del FOV. En las reconstrucciones hechas por este método se compararon los perfiles centrales de las reconstrucciones que se corrigieron por ACF respecto a los perfiles centrales de las que no.

Por último, se incorporó a priori la información de atenuación del maniquí directamente en la matriz del sistema. Esto se hizo multiplicando el ACF del método multiplicativo de

Chang por todos los renglones de la matriz A . De nuevo, dado que el ACF sólo pudo calcularse para el maniquí U, la matriz del sistema con información incorporado sobre atenuación (matriz ACF) sólo se usó en el sinograma del maniquí U.

En las figuras 4.2 y 4.3 se presenta esquemáticamente la manera en que fueron procesados los datos del sinograma U y del HC e IQ respectivamente.

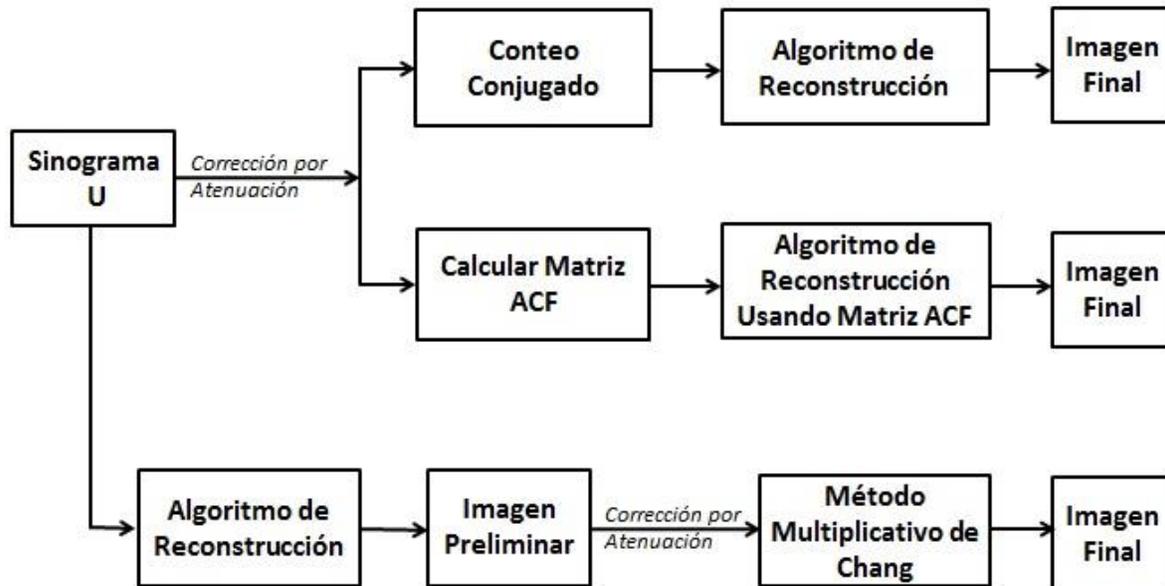


Figura 3.4 Esquema de procesamiento de datos para maniquí U.



Figura 3.5 Esquema de procesamiento de datos para maniquí HC e IQ.

Notemos que el conteo conjugado es un método de corrección que trabaja directamente sobre el sinograma y el método multiplicativo de Chang actúa sobre una imagen previamente reconstruida. En el caso de la matriz ACF, la corrección se hace sobre la matriz A del sistema y la nueva matriz del sistema se implementa en los algoritmos de reconstrucción.

3.3.1. Nomenclatura en las Tablas de Resultados

La nomenclatura de los datos en las tablas del siguiente capítulo es como sigue:

FBP: reconstrucción FBP sin corrección por atenuación alguna.

FBPA: reconstrucción FBP con corrección por conteo conjugado utilizando el promedio aritmético.

FBPG: reconstrucción FBP con corrección por conteo conjugado utilizando el promedio geométrico.

FBPACF: reconstrucción FBP con corrección por método multiplicativo de Chang (sólo para el maniquí U).

FBP: reconstrucción FBP utilizando la matriz ACF (sólo para el maniquí U).

Sart: reconstrucción SART sin corrección por atenuación alguna.

SartA: reconstrucción SART con corrección por conteo conjugado utilizando el promedio aritmético.

SartG: reconstrucción SART con corrección por conteo conjugado utilizando el promedio geométrico.

SartACF: reconstrucción SART con corrección por método multiplicativo de Chang (sólo para el maniquí U).

Sart: reconstrucción SART utilizando la matriz ACF (sólo para el maniquí U).

Mlem: reconstrucción MLEM sin corrección por atenuación alguna.

MlemA: reconstrucción MLEM con corrección por conteo conjugado utilizando el promedio aritmético.

MlemG: reconstrucción MLEM con corrección por conteo conjugado utilizando el promedio geométrico.

MlemACF: reconstrucción MLEM con corrección por método multiplicativo de Chang (sólo para el maniquí U).

Mlem: reconstrucción MLEM utilizando la matriz ACF (sólo para el maniquí U).

3.3.2. Especificaciones de las Reconstrucciones

Los parámetros utilizados en los métodos de reconstrucción fueron los siguientes:

Tabla 3.1 Parámetros utilizados en reconstrucciones

N	θ	P	D	F	L
35	0:10:350	35	35	0.8	0.7

Donde N es la raíz cuadrada del número de píxeles (i. e. la imagen consta de N^2 píxeles), θ son los ángulos utilizados (0, 10, 20, ..., 340, 350), p es el número de rayos, d es la separación entre el primer y el último rayo, F es la frecuencia de corte utilizada en FBP y L es el parámetro de relajación utilizado en SART.

La matriz del sistema fue calculada con la función *parallel_tomo* de la paquetería *AIR Tools* de MATLAB. Esta matriz se calcula a partir de geometría de haz paralelo, como la que se usa en TORX, utilizando el método descrito en la sección 2.4.2. La figura 4.4 muestra esquemáticamente el funcionamiento del código *parallel_tomo*.



Figura 4.4 Esquema de funcionamiento del código *parallel_tomo*.

Para FBP se utilizó la función *fbp* de la paquetería *AIR Tools*. Se probaron distintos filtros, se determinó cuál de ellos llevaban a las reconstrucciones con PSNR y SSIM más altos y estos se emplearon en las reconstrucciones del presente trabajo. Para el maniquí U se empleó el filtro *Shepp-Logan*, para el IQ el *Ram-Lak* y para el HC el *Cosine*.

Las reconstrucciones con SART y MLEM se realizaron con códigos escritos específicamente para este trabajo. El número k de iteraciones empleadas en estos métodos iterativos fue de 200 para el maniquí U y de 300 para el maniquí IQ y HC. En el caso de las reconstrucciones donde se empleó la matriz ACF el número de iteraciones fue $k = 100$. Se guardaron todas las imágenes obtenidas iteración por iteración y se evaluó el PSNR y SSIM de cada una de ellas. Los valores de PSNR y SSIM reportados en las tablas corresponden al valor máximo de todas estas iteraciones.

De manera genérica, la figura 3.6 muestra esquemáticamente el funcionamiento de los códigos de reconstrucción FBP, SART y MLEM.



Figura 3.6 Esquema de funcionamiento de los códigos de reconstrucción FBP, SART y MLEM.

Los datos de entrada de la figura 3.6 varían dependiendo del método de reconstrucción. Todos los algoritmos utilizan la matriz del sistema \mathbf{A} y el sinograma \mathbf{b} . Como ya se explicó, para FBP se usa el parámetro F así como un filtro. SART y MLEM requieren también del número de iteraciones k y, en el caso del primero, un parámetro de relajación L para regular el ruido.

Las imágenes que resultan al emplear métodos iterativos tienen valores de pixel muy grandes que no son comparables con las imágenes de referencia cuyos pixeles toman valores entre 0 y 1 por lo que, para poder usar métricas de referencia absoluta, es necesario normalizar las reconstrucciones. Sea x_i el pixel i de la imagen de referencia y y_i el pixel i de la reconstrucción. En el presente trabajo se normalizaron las reconstrucciones multiplicándolas por el siguiente factor de normalización:

$$f_N = \frac{\sum x_i}{\sum y_i} \quad (3.4)$$

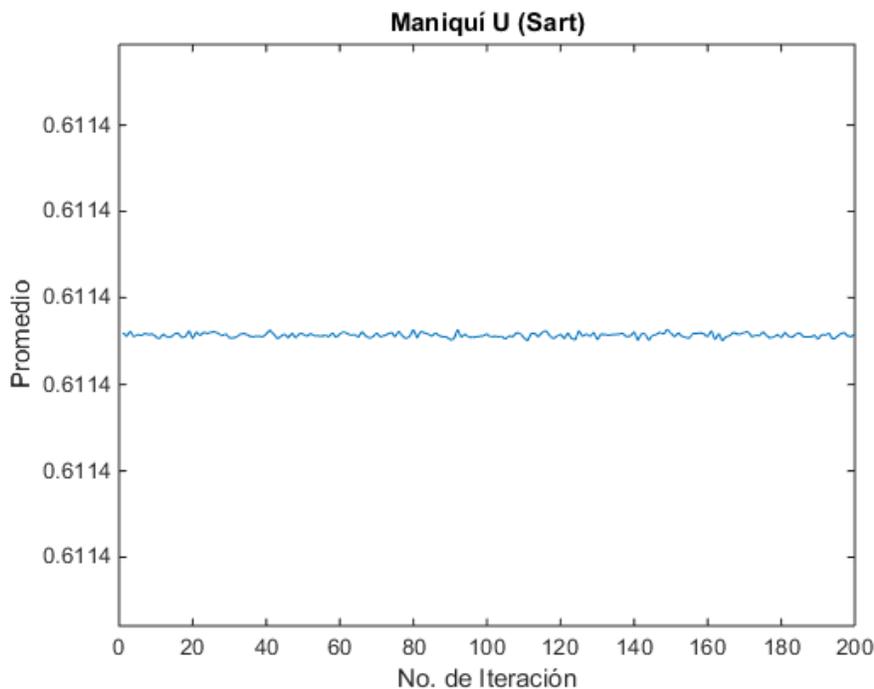
Donde el símbolo de suma denota la suma de todos los pixeles de la imagen de referencia y de los pixeles de la reconstrucción respectivamente.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

4.1. Presentación y Análisis de Resultados

Antes que nada, señalemos que el valor pixel promedio de las reconstrucciones para SART y MLEM en función del número de iteración, debido a que se normalizó con el factor de la ecuación (3.4) iteración por iteración, es, para todas las reconstrucciones, una constante con pequeñas oscilaciones, por lo que bastará con mostrar la gráfica del promedio correspondiente obtenida para **Sart** en el maniquí U.



Gráfica 4.1 Promedio de las iteraciones en reconstrucción **Sart**

Las gráficas de PSNR y SSIM para SART y MLEM con distintos métodos de corrección por atenuación tienen un comportamiento cualitativamente idéntico entre ellas, por lo que para el maniquí U sólo se presentan las correspondientes a las reconstrucciones **Sart** y

Mlem, para el maniquí HC las **SartG** y **MlemG** y para el maniquí IQ las correspondientes a **SartA** y **MlemA**.

Las imágenes reconstruidas **FBP**, **FBPA** y **FBPG**, así como las reconstrucciones **Sart**, **SartA**, **SartG**, **Mlem**, **MlemA** y **MlemG** que se presentan en las figuras 4.1, 4.3 y 4.4 son aquellas para las que se obtuvo el PSNR y SSIM máximos. Para el maniquí U también se presentan las reconstrucciones corregidas por el método de Chang (**FBPACF**, **SartACF** y **MlemACF**), así como las obtenidas utilizando la Matriz ACF (**FBP**, **Sart** y **Mlem**) en la figura 4.2.

El comportamiento cualitativo de los perfiles centrales para todas las reconstrucciones corregidas por ACF en el maniquí U es el mismo, por lo que se toma como muestra el perfil central de **MlemACF** para compararlo con el obtenido para **Mlem**.

4.1.1. Maniquí U

Los resultados numéricos y las gráficas obtenidas para el maniquí U fueron:

Tabla 4.1 Número de iteración, PSNR y SSIM máximos para reconstrucciones en maniquí U

FBP	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	FBP	13.9949	-	0.4815	-
	FBPA	13.9949	-	0.4815	-
	FBPG	13.9949	-	0.4815	-
	FBPACF	11.2778	-	0.4125	-
	FBP	10.8208	-	0.4074	-
SART	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	Sart	15.5354	44	0.5731	129
	SartA	15.5354	44	0.5731	129
	SartG	15.5355	44	0.5731	129
	SartACF	15.3592	44	0.5693	129
	Sart	No Hay Máx	-	No Hay Máx	-
MLEM	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	Mlem	16.0346	10	0.5985	41
	MlemA	16.0346	10	0.5985	41
	MlemG	16.0346	10	0.5985	41
	MlemACF	14.4177	10	0.5497	41
	Mlem	No Hay Máx	-	No Hay Máx	-

De la tabla 4.1 para las reconstrucciones con FBP y conteo conjugado, se obtuvo el mismo valor de PSNR en **FBP**, **FBPA** y **FBPG** (13.9949 dB). El valor obtenido para SSIM también fue el mismo para **FBP**, **FBPA** y **FBPG** (0.4815). Para las reconstrucciones con SART y conteo conjugado, se obtuvo el PSNR máximo con **SartG** (15.5355 dB en k=44), el mínimo en **Sart** y **SartA** (15.5354 dB en k=44) y la diferencia entre estos valores es de 0.0001 dB. El valor obtenido para SSIM fue el mismo para **Sart**, **SartA** y **SartG** (0.5731 en k=129). Para las reconstrucciones con MLEM, se obtuvo el mismo de PSNR y SSIM en **Mlem**, **MlemA** y **MlemG** (16.0346 dB en k=10 y 0.5985 en k=41 respectivamente).

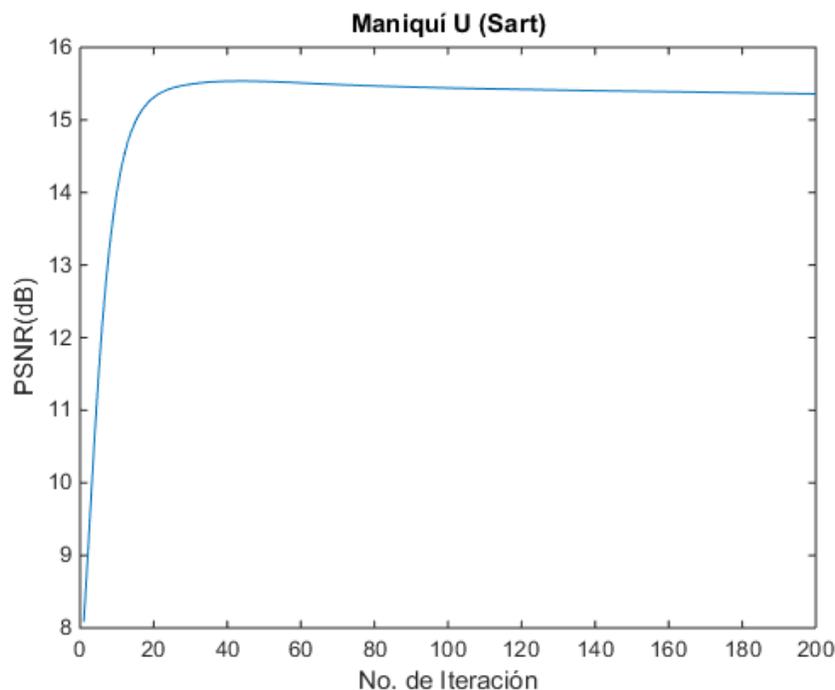
Al emplear el método multiplicativo de Chang, los datos de la tabla 4.1 nos indican que en FBP el PSNR de **FBPACF** disminuye respecto al máximo de la imagen original en 2.7171 dB y el SSIM también disminuye 0.069. Al emplearlo en SART el PSNR de **SartACF**

disminuye respecto al máximo de la imagen original en 0.1762 dB y el SSIM también disminuye en 0.0038. Al emplearlo en MLEM, el PSNR de **MlemACF** disminuye el PSNR obtenido en la imagen original un total de 1.6169 dB y el SSIM en 0.0488.

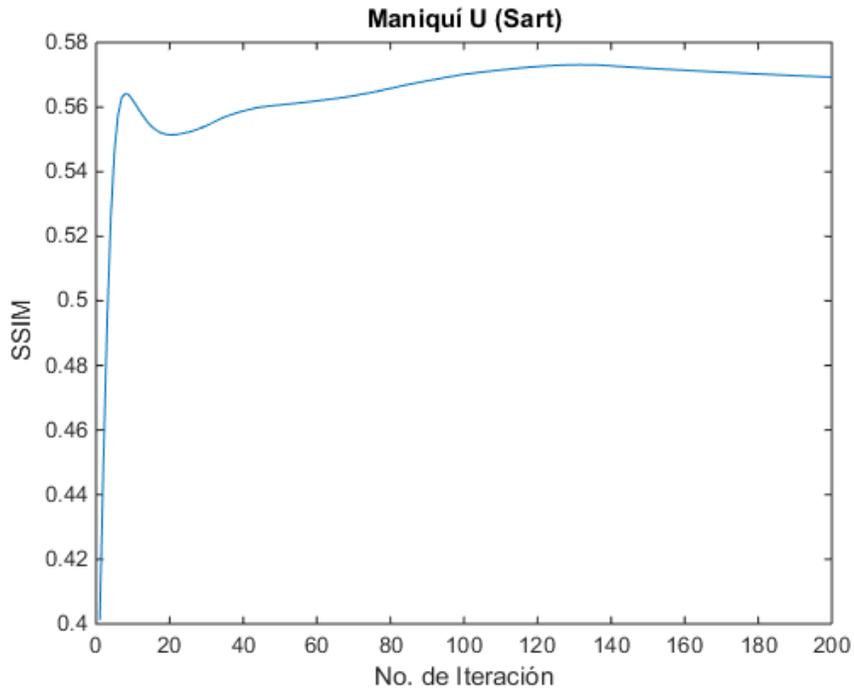
El PSNR mínimo y el SSIM más alejado de 1 de la tabla 4.1 corresponden a **FBP** seguida de las reconstrucciones donde se empleó el método multiplicativo de Chang (**FPBACF**, **SartACF** y **MlemACF**). Para **Sart** y **Mlem** ni siquiera podemos hablar de que se alcance un máximo por el comportamiento de las gráficas 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9.

El PSNR máximo obtenido para todas las reconstrucciones del maniquí U tuvo un valor de 16.0346 dB y corresponde a **Mlem**, **MlemA** y **MlemG**. Estas mismas reconstrucciones obtuvieron el SSIM más cercano a 1 con un valor correspondiente de 0.5985.

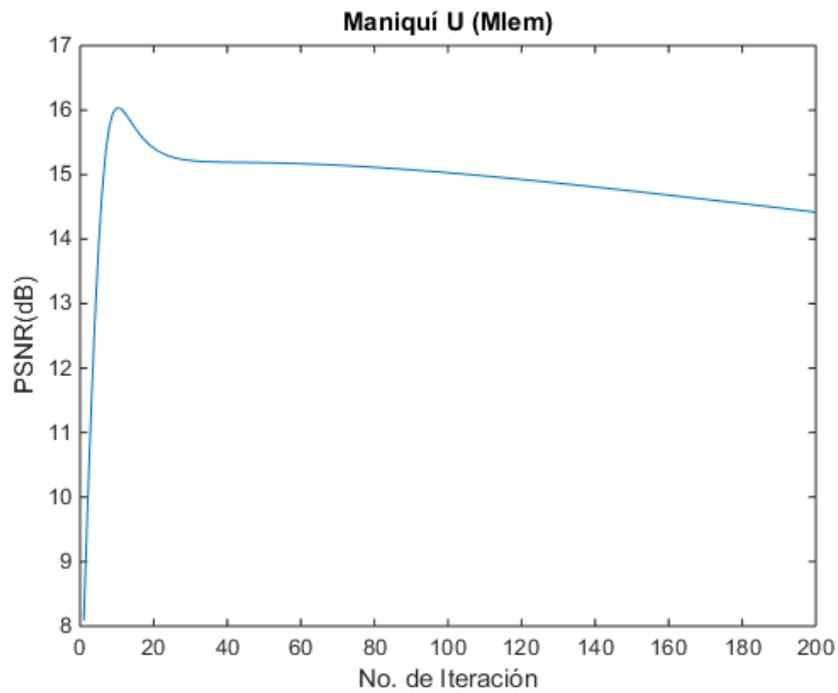
En SART el PSNR máximo (k=44) se alcanza antes que el SSIM más cercano a 1 (k=129), al igual que el PSNR máximo del MLEM (k=10) también se alcanza antes que el SSIM más cercano a 1 (k=41). De lo anterior, podemos decir que el PSNR y SSIM en el MLEM alcanzan su máximo y su valor más cercano a 1 respectivamente en un menor número de iteraciones que en SART.



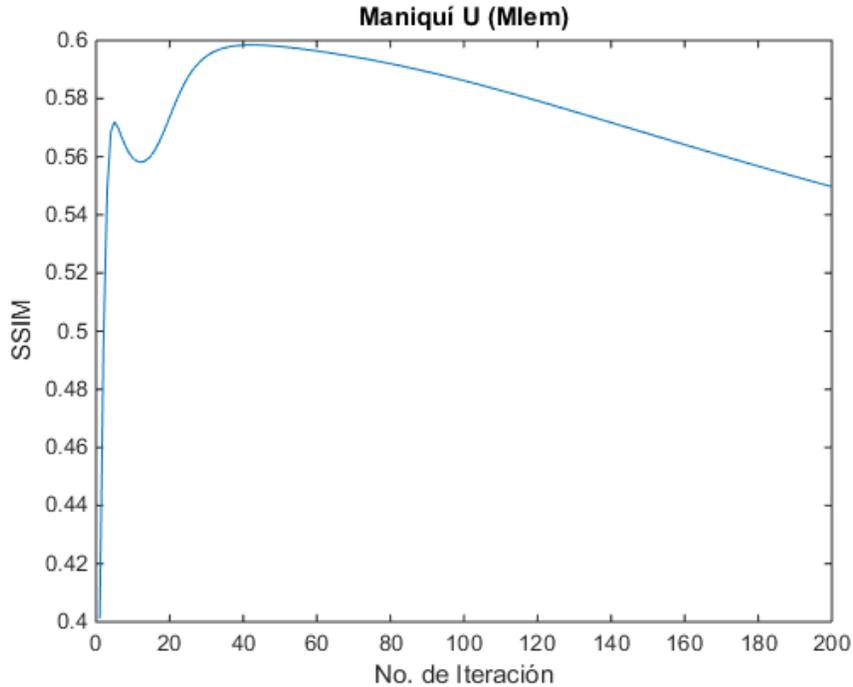
Gráfica 4.2 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **Sart**



Gráfica 4.3 SSIM de las iteraciones en reconstrucción **Sart**



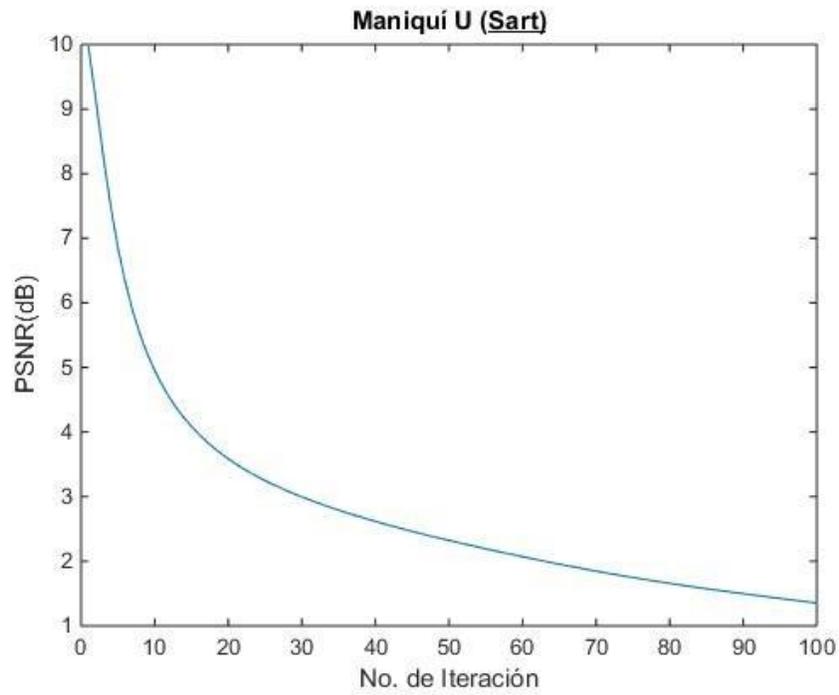
Gráfica 4.4 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **Mlem**



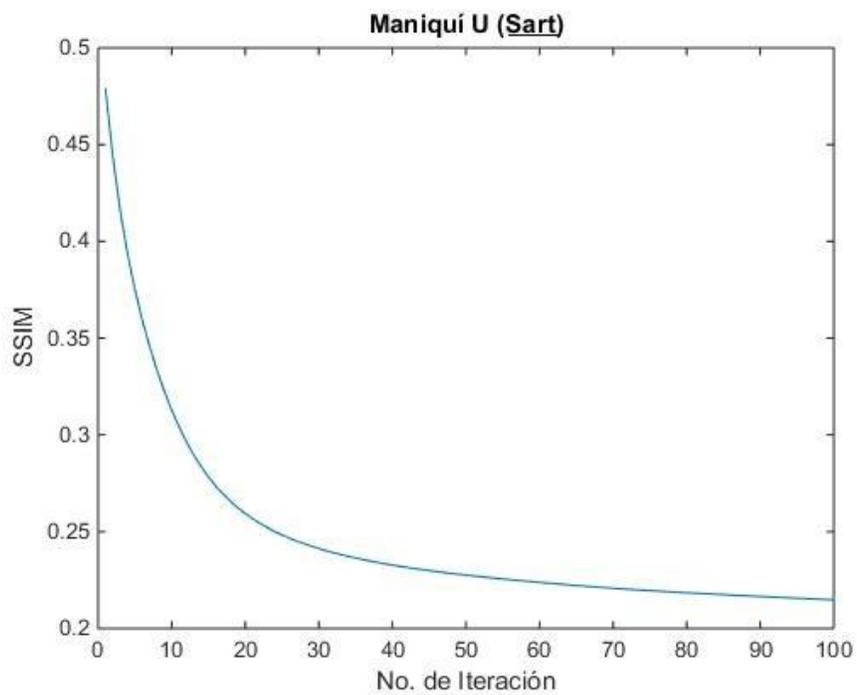
Gráfica 4.5 SSIM de las iteraciones en reconstrucción **Mlem**

En la gráfica 4.2 observamos que el PSNR del SART alcanza su máximo en la iteración $k=44$ y después la función decrece muy lentamente. En la gráfica 4.3 observamos que el SSIM del SART alcanza un primer máximo en las primeras iteraciones, después alcanza un mínimo y después su máximo global en $k=129$ después de lo cual se vuelve una función estrictamente decreciente. En la gráfica 4.4 observamos que el PSNR del MLEM alcanza su máximo en la iteración $k=10$, después de lo cual decrece abruptamente y posteriormente continua decreciendo, pero muy lentamente. En la gráfica 4.5 observamos que el SSIM del MLEM alcanza un primer máximo en las primeras iteraciones, después un mínimo y luego crece para alcanzar su máximo global en $k=41$ después de lo cual la función se vuelve estrictamente decreciente.

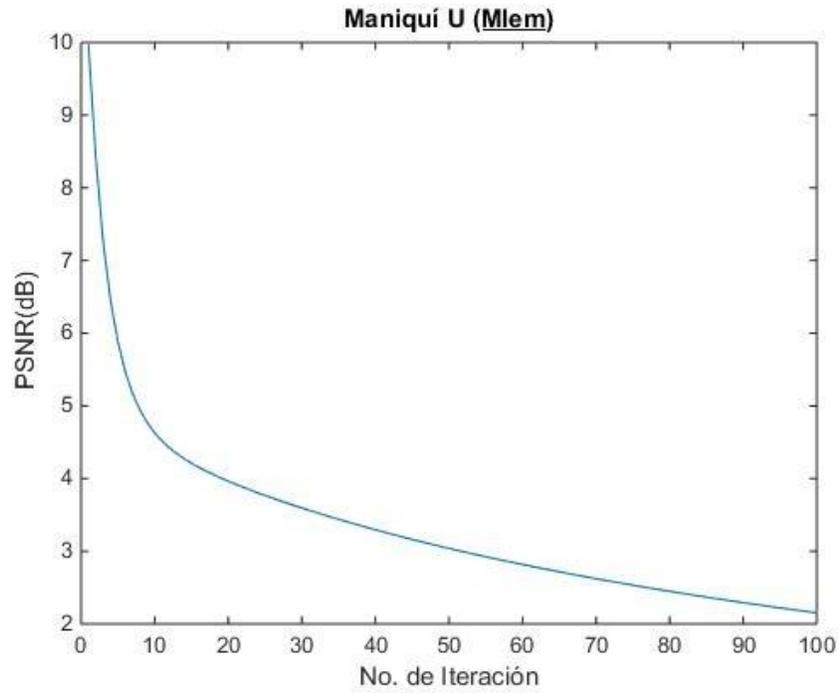
Las gráficas 4.6 a 4.9 muestran el PSNR y el SSIM en función del número de iteración para las reconstrucciones en las que se empleó la matriz ACF.



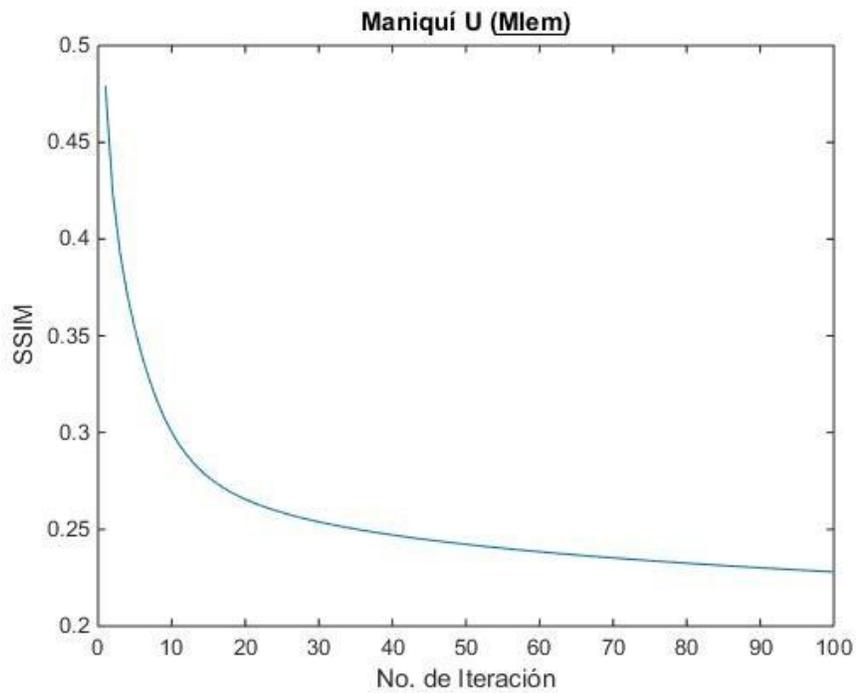
Gráfica 4.6 PSNR de las iteraciones en reconstrucción Sart



Gráfica 4.7 SSIM de las iteraciones en reconstrucción Sart



Gráfica 4.8 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **Mlem**



Gráfica 4.9 SSIM de las iteraciones en reconstrucción **Mlem**

Para **Sart** y **Mlem** las gráficas 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 muestran que el PSNR y SSIM para estas reconstrucciones sigue un comportamiento estrictamente decreciente por lo que no podemos hablar de que se alcance un máximo y, de hecho, a medida que las iteraciones aumentan nos alejamos rápidamente de la imagen que deseábamos reconstruir.

En la figura 4.1 (siguiente página) observamos que todas las imágenes reconstruidas presentan artefactos debido a la atenuación. No se presentan diferencias visuales sustanciales entre las imágenes con máximo PSNR y las de con SSIM más cercano a 1 obtenidas con el mismo método y corrección por atenuación. De todas las imágenes, las visualmente más parecidas a la imagen de referencia son las reconstruidas con MLEM.

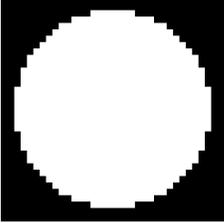
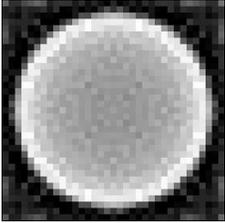
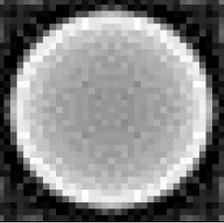
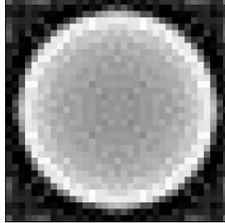
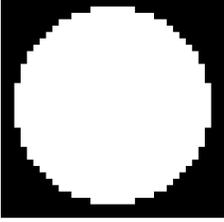
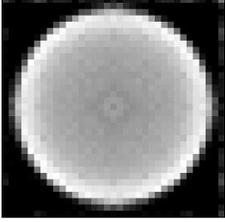
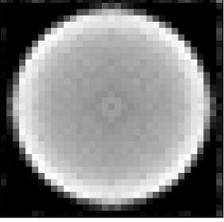
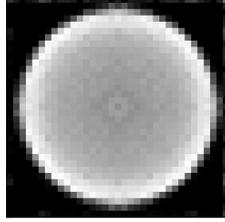
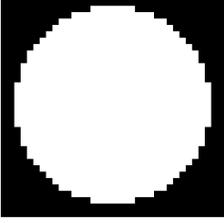
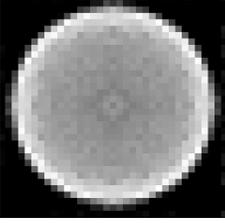
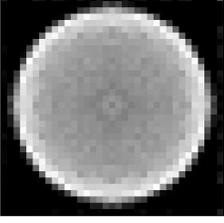
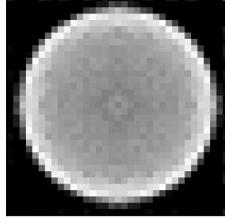
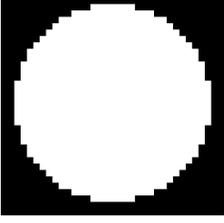
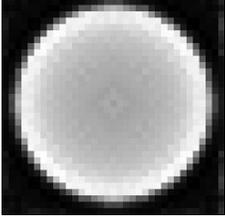
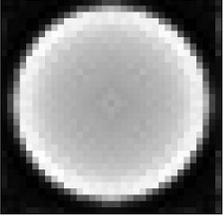
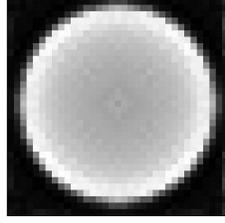
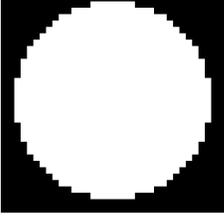
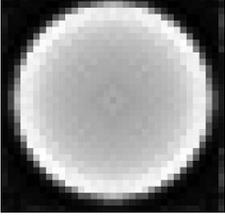
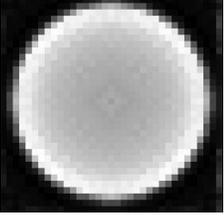
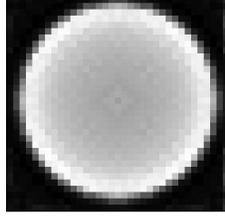
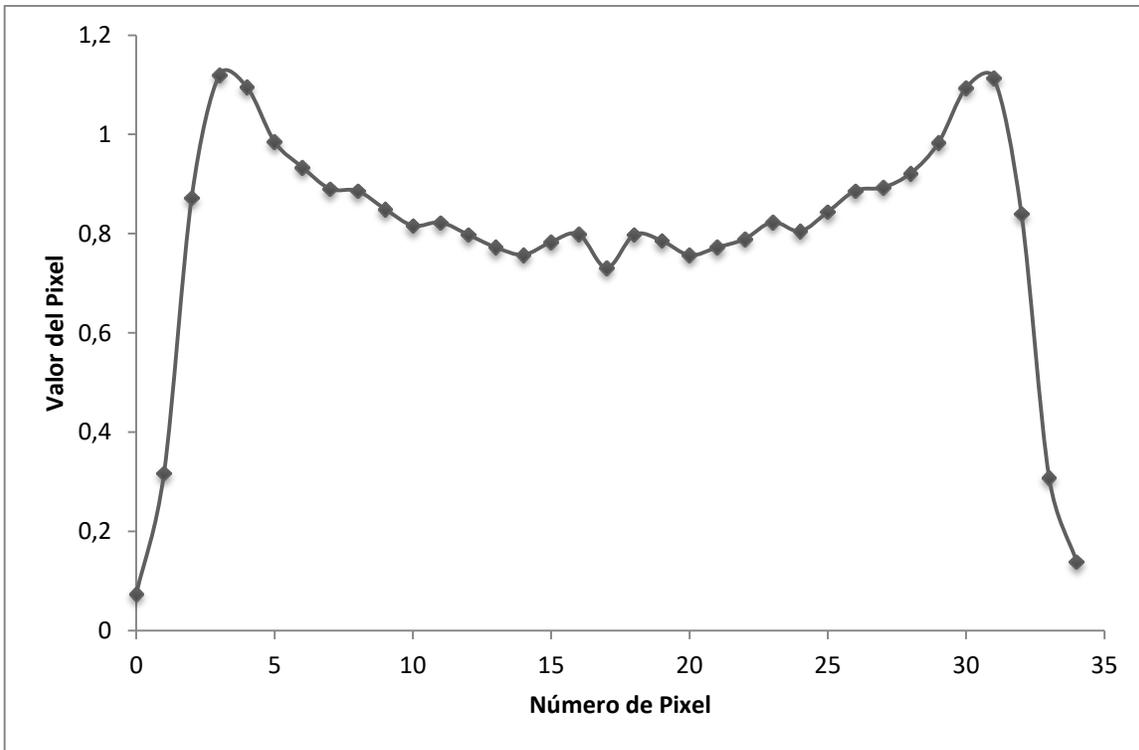
FBP	Referencia	FBP	FBPA	FBPG
				
SART (PSNR máx.)	Referencia	Sart (k=44)	SartA (k=44)	SartG (k=44)
				
SART (SSIM máx.)	Referencia	Sart (k=129)	SartA (k=129)	SartG (k=129)
				
MLEM (PSNR máx.)	Referencia	Mlem (k=10)	MlemA (k=10)	MlemG (k=10)
				
MLEM (SSIM máx.)	Referencia	Mlem (k=41)	MlemA (k=41)	MlemG (k=41)
				

Figura 4.1 Reconstrucciones FBP, SART y MLEM para maniquí U

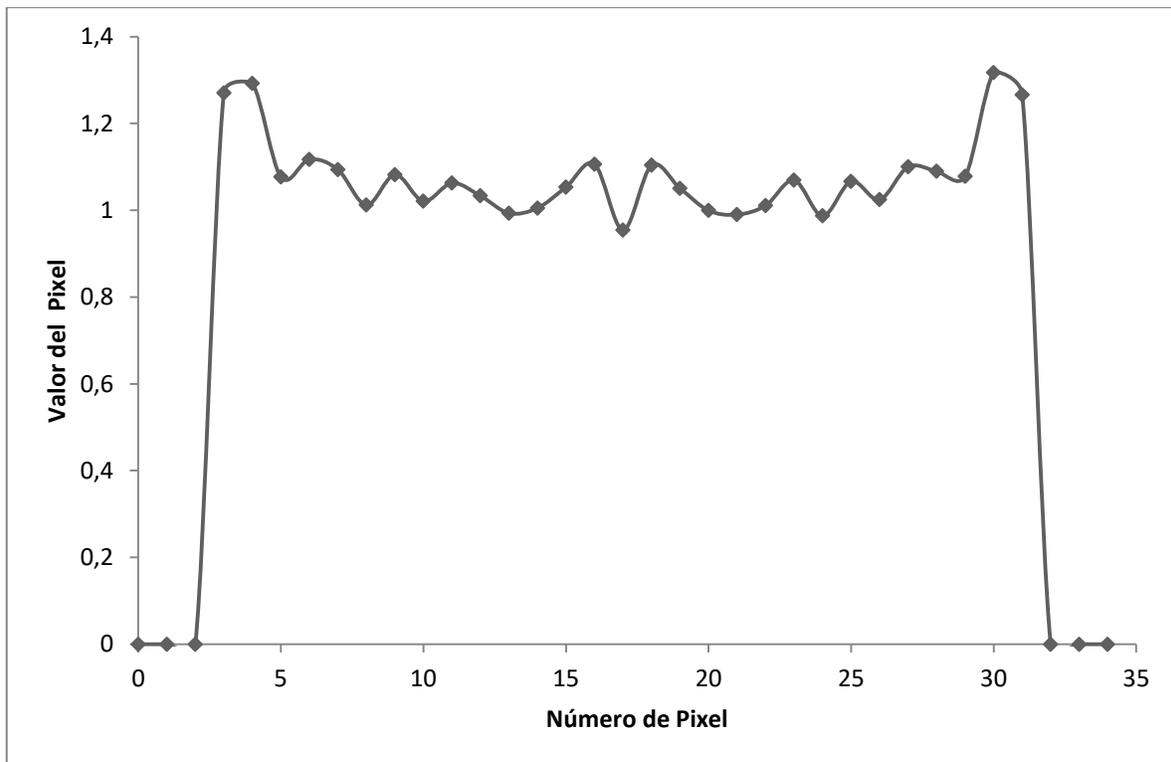
ACF (PSNR máx.)	Referencia	FBPACF	SartACF	MlemACF
ACF (SSIM máx.)	Referencia	FBPACF	SartACF	MlemACF
Matriz ACF	Referencia	<u>FBP</u>	<u>Sart</u> (k=100)	<u>Mlem</u> (k=100)

Figura 4.2 Reconstrucciones corregidas por ACF y reconstrucciones usando Matriz ACF

En la figura 4.2 tenemos las reconstrucciones corregidas por el método multiplicativo de Chang y las imágenes obtenidas utilizando la Matriz ACF. En estas imágenes no hay señal de fondo fuera del FOV en las reconstrucciones FBP y SART pues el factor ACF fue modificado de tal manera que al multiplicarlo por la imagen los pixeles fuera del FOV se hicieran cero. En la figura vemos claramente como **Sart** y **Mlem** son las imágenes que más difieren de las originales.



Gráfica 4.10 Perfil central de la reconstrucción Mlem.



Gráfica 4.11 Perfil central de la reconstrucción MlemACF.

En la gráfica 4.10 observamos el mismo perfil de atenuación de la figura 3.7. El método multiplicativo de Chang debería de volver constante el valor de todos los pixeles presentes en esta gráfica, sin embargo, en la gráfica 4.11, puede observarse que el ACF manda los pixeles a valores diversos mayores a 1.

4.1.2. Maniquí HC

Los resultados numéricos para el maniquí HC fueron:

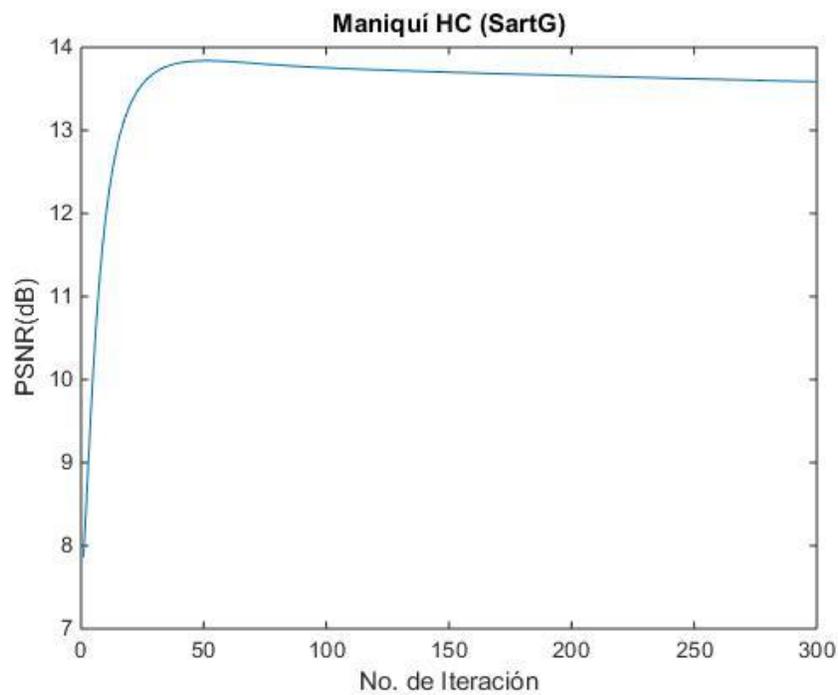
Tabla 4.2 *Número de iteración, PSNR y SSIM máximos para maniquí HC*

FBP	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	FBP	13.0026	-	0.5411	-
	FBPA	13.0026	-	0.5411	-
	FBPG	13.0061	-	0.5415	-
SART	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	Sart	13.8366	51	0.6256	237
	SartA	13.8366	51	0.6256	237
	SartG	13.8385	51	0.6268	272
MLEM	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	Mlem	13.5839	14	0.6606	100
	MlemA	13.5839	14	0.6606	100
	MlemG	13.5823	14	0.6608	99

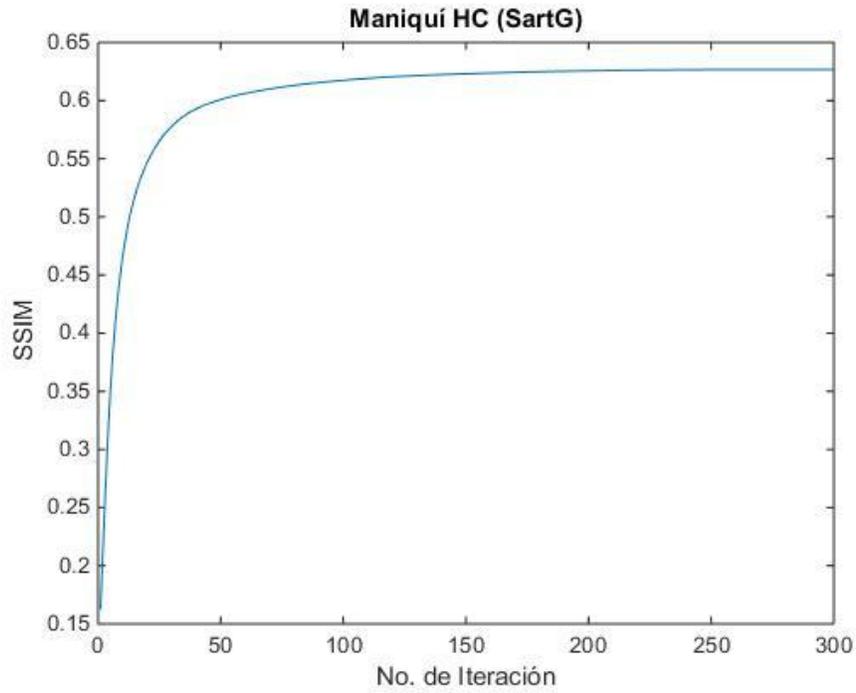
En la tabla 4.2, para las reconstrucciones con FBP, se obtuvo el PSNR máximo y el SSIM más cercano a 1 en **FBPG** (13.0061 dB y 0.5415), el mínimo en **FBP** y **FBPA** (13.0026 dB y 0.5411) y la diferencia entre estos valores es 0.0035 dB y 0.0004 respectivamente. Para las reconstrucciones con SART, se obtuvo el PSNR máximo y el SSIM más cercano a 1 con **SartG** (13.8385 dB en k=51 y 0.6268 en k=237), el mínimo en **Sart** y **SartA** (13.8366 dB en k=51 y 0.6256 en k=237) y la diferencia de estos valores es de 0.0019 dB y 0.0012 respectivamente. Para las reconstrucciones con MLEM, se obtuvo el PSNR máximo en **Mlem** y **MlemA** (13.5839 dB en k=14), el mínimo en **MlemG** (13.5823 dB en k=14) y la diferencia de estos valores es 0.0016 dB. Para estas mismas reconstrucciones se obtuvo el SSIM más cercano a 1 en **MlemG** (0.6608 en k=99), el mínimo en **Mlem** y **MlemA** (0.6606 en k=100) y la diferencia de estos valores es 0.0002.

El PSNR máximo obtenido para todas las reconstrucciones del maniquí HC tuvo un valor numérico de 13.8385 dB y corresponde a **SartG**. El SSIM más cercano a 1 se obtuvo en **MlemG** con un valor correspondiente de 0.6608.

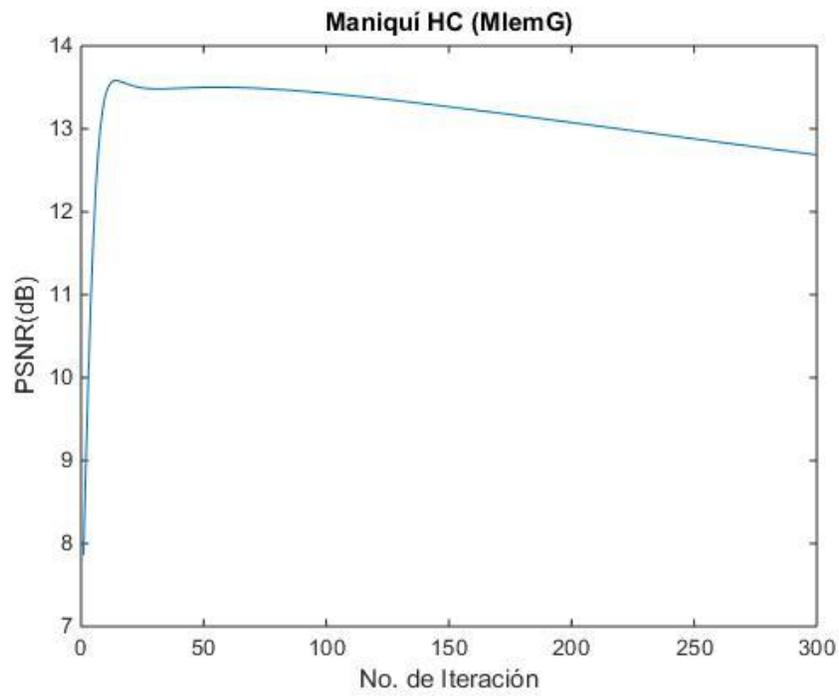
En SART el PSNR máximo ($k=51$) se alcanza antes que el SSIM más cercano a 1 ($k=237$ para **Sart** y **SartA** y $k=272$ para **SartG**), lo mismo ocurre para el PSNR máximo del MLEM ($k=14$) que se alcanza antes de que el SSIM llegue a su valor más cercano a 1 ($k=100$ para **Mlem** y **MlemA** y $k=99$ para **MlemG**), de esto último también concluimos que el PSNR y SSIM en el MLEM alcanzan su máximo y su valor más cercano a 1 respectivamente en un menor número de iteraciones que en SART.



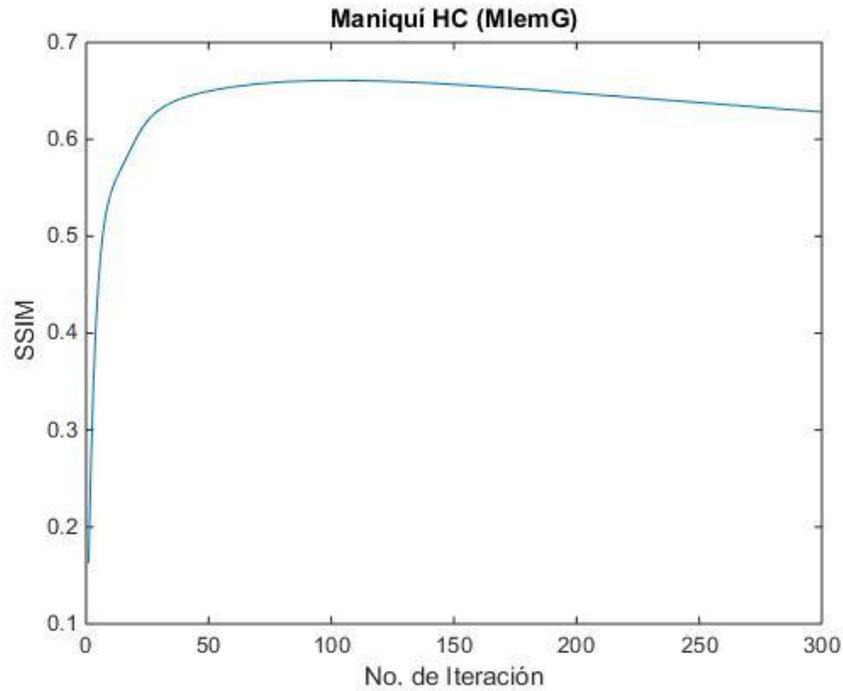
Gráfica 4.12 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **SartG**



Gráfica 4.13 SSIM de las iteraciones en reconstrucción **SartG**



Gráfica 4.14 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **MlemG**



Gráfica 4.15 SSIM de las iteraciones en reconstrucción **MlemG**

En la gráfica 4.12 observamos que el PSNR del SART alcanza su máximo global en $k=51$ y luego se vuelve una función estrictamente decreciente. En la gráfica 4.13 observamos que el SSIM del SART parece ser una función estrictamente creciente, pero al ver la tabla 4.2 notamos que la función alcanza su máximo en $k=272$ y a partir de ahí se vuelve una función que decrece muy lentamente. En la gráfica 4.14 observamos que el PSNR del MLEM alcanza su máximo en $k=14$ y luego se vuelve una función estrictamente decreciente. En la gráfica 4.15 observamos que el SSIM del MLEM alcanza su máximo absoluto en $k=99$ y después se vuelve una función estrictamente decreciente.

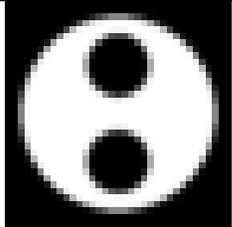
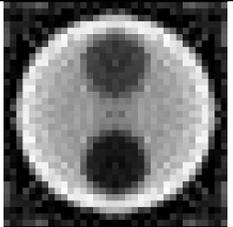
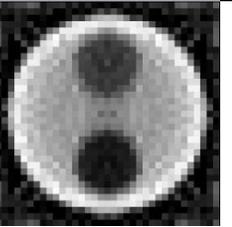
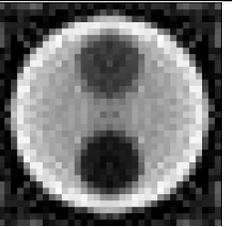
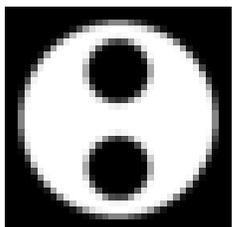
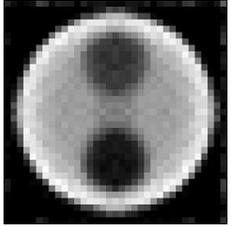
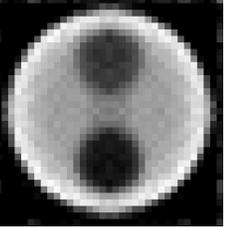
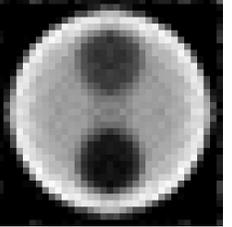
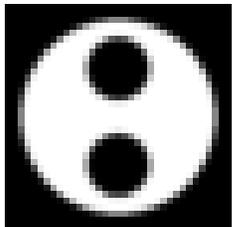
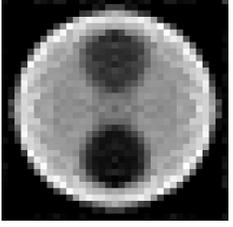
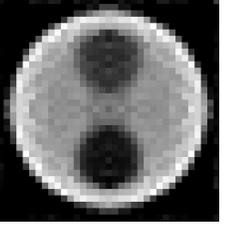
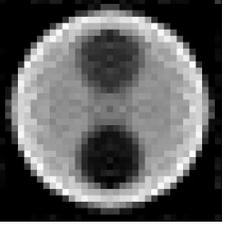
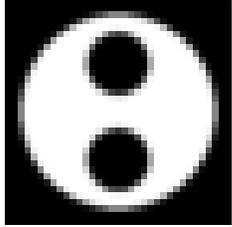
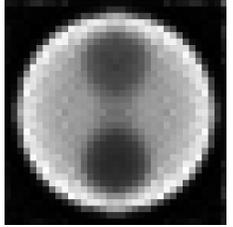
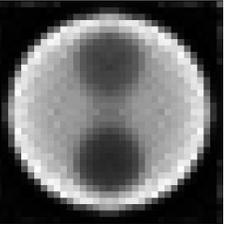
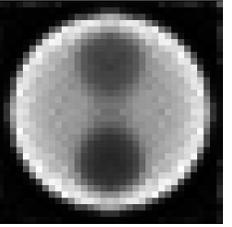
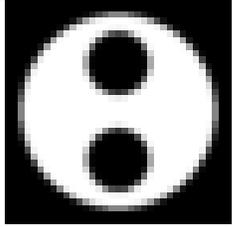
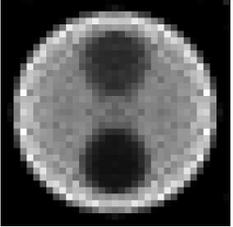
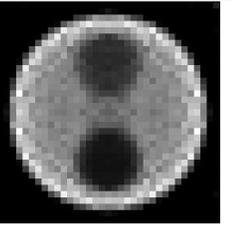
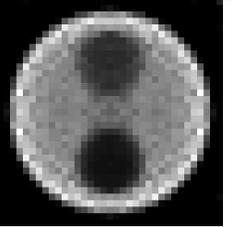
FBP	Referencia	FBP	FBPA	FBPG
				
SART (PSNR máx.)	Referencia	Sart (k=17)	SartA (k=17)	SartG (k=17)
				
SART (SSIM máx.)	Referencia	Sart (k=245)	SartA (k=245)	SartG (k=245)
				
MLEM (PSNR máx.)	Referencia	Mlem (k=8)	MlemA (k=8)	MlemG (k=8)
				
MLEM (SSIM máx.)	Referencia	Mlem (k=129)	MlemA (k=129)	MlemG (k=129)
				

Figura 4.3 Reconstrucciones FBP, SART y MLEM para maniquí HC

En la figura 4.3 vemos que todas las imágenes presentan artefactos debido a los efectos de atenuación. No se observan diferencias visuales sustanciales entre las reconstrucciones en las que se empleó el mismo método de reconstrucción y el mismo método de evaluación de calidad de imagen, pero sí las hay en MLEM entre las imágenes que obtuvieron PSNR máximo respecto a las que obtuvieron SSIM más cercano a 1. En las primeras las cavidades se ven difusas y en las segundas se ven mejor definidas.

4.1.3. Maniquí IQ

Los resultados numéricos para el maniquí IQ fueron:

Tabla 4.3 Número de iteración, PSNR y SSIM máximos para reconstrucciones en maniquí IQ

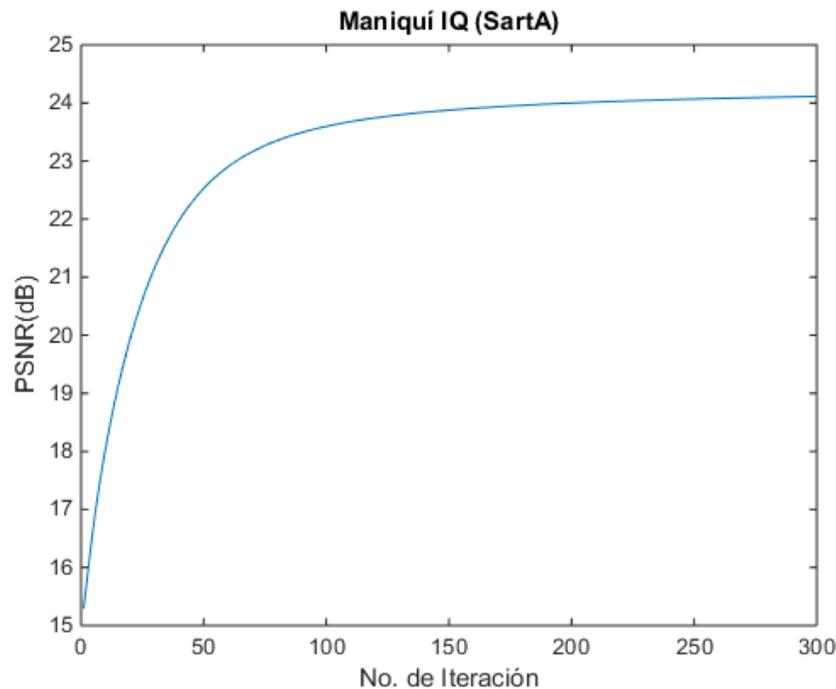
FBP	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	FBP	20.7922	-	0.3531	-
	FBPA	20.7922	-	0.3531	-
	FBPG	20.8228	-	0.3553	-
SART	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	Sart	24.1123	300	0.7818	300
	SartA	24.1123	300	0.7818	300
	SartG	24.2000	300	0.7827	300
MLEM	Reconstrucción	PSNR[dB]	k de PSNRmáx	SSIM	k de SSIMmáx
	Mlem	24.5771	117	0.8149	43
	MlemA	24.5771	117	0.8149	43
	MlemG	24.6136	117	0.8142	43

De la tabla 4.3, para las reconstrucciones con FBP, se obtuvo el PSNR máximo y el SSIM más cercano a 1 en **FBPG** (20.8228 dB y 0.3553), el mínimo en **FBP** y **FBPA** (20.7922 dB y 0.3551) y la diferencia entre estos valores es 0.0306 dB y 0.0022 respectivamente. Para las reconstrucciones con SART, se obtuvo el PSNR máximo y el SSIM más cercano a 1 en **SartG** (24.2000 dB en k=300 y 0.7827 en k=300), el mínimo en **Sart** y **SartA** (24.1123 dB y 0.7818 en k=300) y la diferencia entre estos valores es 0.0877 dB y 0.0009. Para las reconstrucciones con MLEM, se obtuvo el PSNR máximo en **MlemG** (24.6136 dB en k=117), el mínimo en **Mlem** y **MlemA** (24.5771 dB) y la diferencia entre estos dos valores es 0.0365 dB. Al usar SSIM con las mismas reconstrucciones se obtuvo el valor más

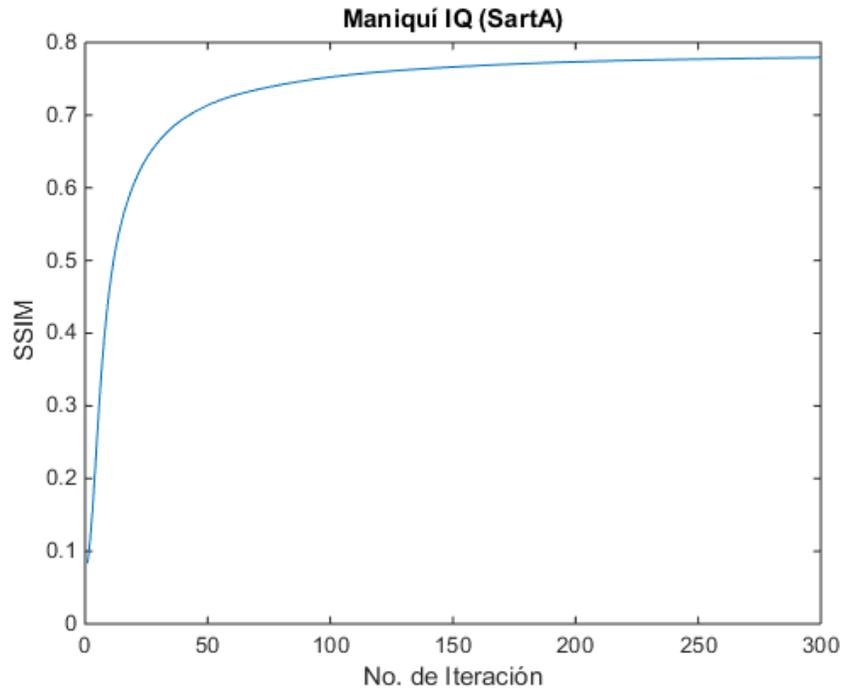
cercano a 1 en **Mlem** y **MlemA** (0.8149 en $k=43$), el más alejado en **MlemG** (0.8142 en $k=117$) y la diferencia entre estos dos valores es 0.007.

El PSNR máximo obtenido para todas las reconstrucciones del maniquí IQ tuvo un valor de 24.6136 dB y corresponde a **MlemG**. Las reconstrucciones que obtuvieron el SSIM más cercano a 1 con un valor correspondiente de 0.8149 fueron la **Mlem** y **MlemA**.

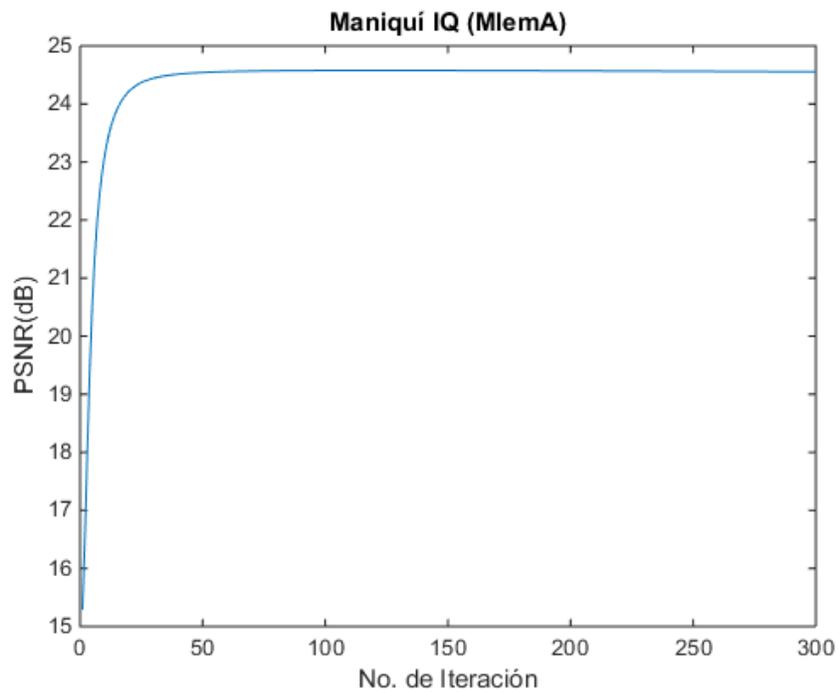
En SART el PSNR máximo ($k=300$) se alcanza simultáneamente con el SSIM más cercano a 1 ($k=300$), en tanto que el PSNR máximo del MLEM ($k=117$) se alcanza después de que el SSIM llega a su valor más cercano a 1 ($k=43$), de donde concluimos que el PSNR y SSIM en el MLEM alcanzan su máximo y su valor más cercano a 1 respectivamente en un menor número de iteraciones que en SART.



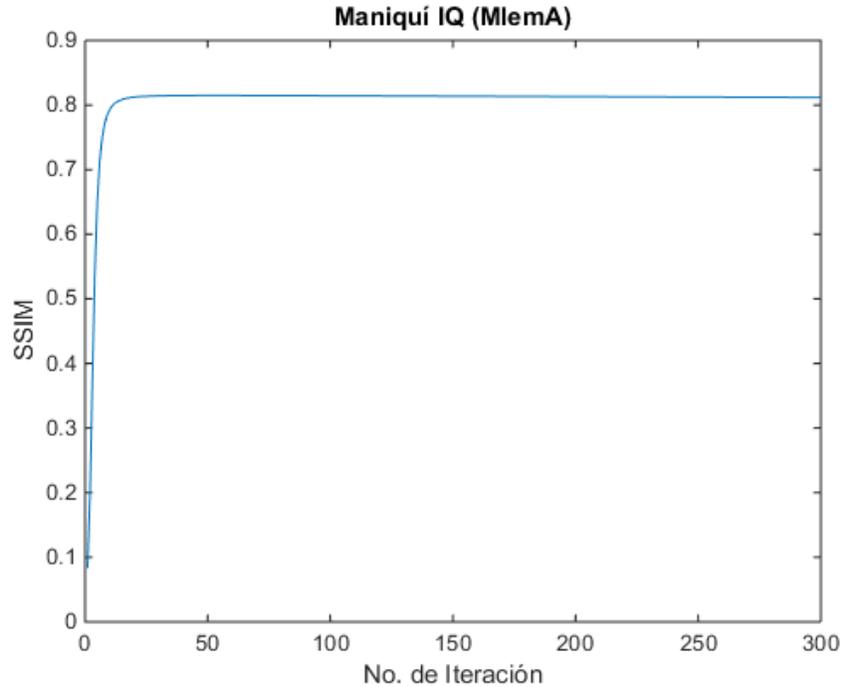
Gráfica 4.16 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **SartA**.



Gráfica 4.17 SSIM de las iteraciones en reconstrucción **SartA**



Gráfica 4.18 PSNR de las iteraciones en reconstrucción **MlemA**



Gráfica 4.19 SSIM de las iteraciones en reconstrucción *MlemA*

En la gráfica 4.16 observamos que el PSNR del SART es una función estrictamente creciente que después de un cierto número de iteración adquiere una tasa de crecimiento muy pequeña, por lo que el máximo se alcanza en la última iteración ($k=300$). En la gráfica 4.17 observamos que el SSIM del SART tiene exactamente el mismo comportamiento cualitativo que el PSNR en la gráfica 4.16, por lo que alcanza su valor más cercano a 1 en la última iteración ($k=300$). En la gráfica 4.18 y 4.19 pareciera que las reconstrucciones por MLEM siguen el mismo comportamiento que las de SART, pero al ver la tabla 4.3 notamos que aquí sí se alcanza un máximo antes de la última iteración, por lo que, en la gráfica 4.18, se alcanza el PSNR máximo en $k=117$ y después la función decrece a una tasa muy pequeña y, en la gráfica 4.19, el SSIM alcanza su valor más cercano a 1 en $k=43$ y luego la función decrece a una tasa muy pequeña.

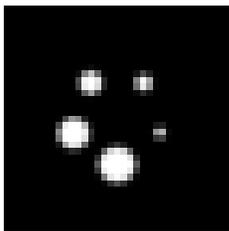
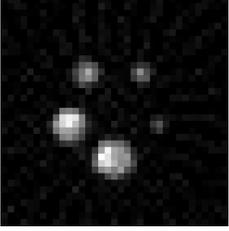
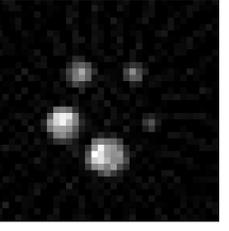
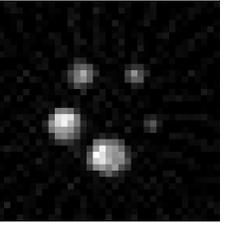
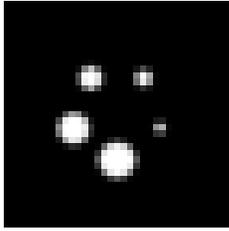
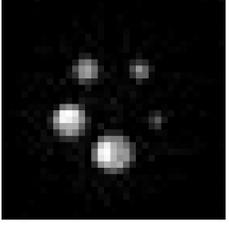
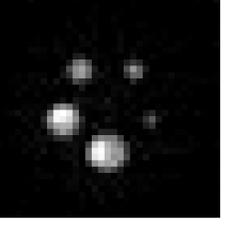
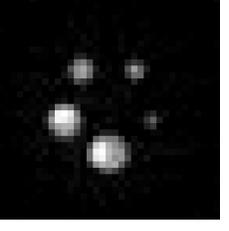
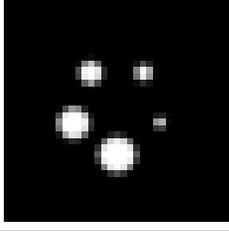
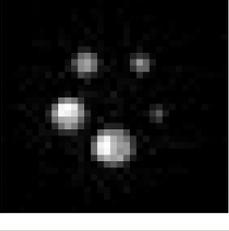
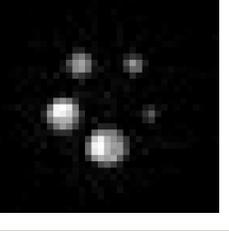
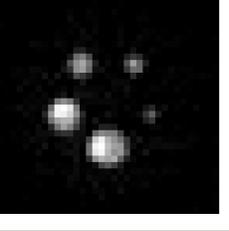
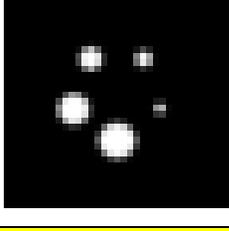
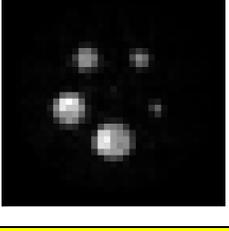
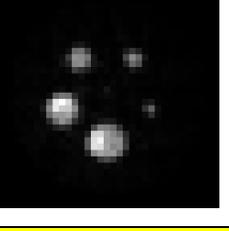
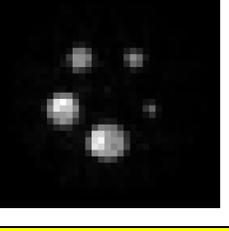
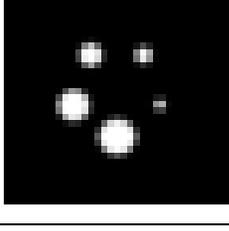
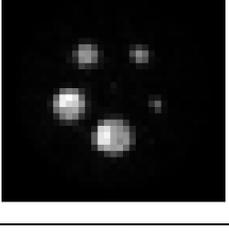
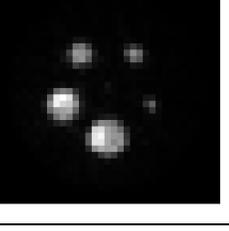
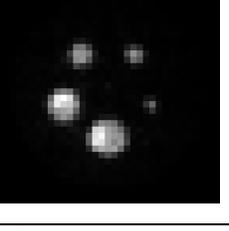
FBP	Referencia	FBP	FBPA	FBPG
				
SART (PSNR máx.)	Referencia	Sart (k=300)	SartA (k=300)	SartG (k=300)
				
SART (SSIM máx.)	Referencia	Sart (k=300)	SartA (k=300)	SartG (k=300)
				
MLEM (PSNR máx.)	Referencia	Mlem (k=10)	MlemA (k=10)	MlemG (k=10)
				
MLEM (SSIM máx.)	Referencia	Mlem (k=41)	MlemA (k=41)	MlemG (k=41)
				

Figura 4.4 Reconstrucciones FBP, SART y MLEM para maniquí IQ

En la figura 4.4 observamos que todas las imágenes presentan artefactos debido a los efectos de atenuación. No se observan diferencias visuales sustanciales entre las

reconstrucciones en las que se empleó el mismo método de reconstrucción, pero diferentes correcciones por atenuación, ya sea la correspondiente a PSNR máximo o a SSIM más cercano a 1. Debido a que las estructuras del maniquí dentro del FOV son muy pequeñas, salvo por el ruido de fondo presente en FBP y SART, visualmente no se aprecian diferencias sustanciales entre la imagen reconstruida por un método o por otro.

De manera general, en todas las reconstrucciones hechas por FBP para todos los maniqués se observa la presencia de ruido de fondo fuera del FOV, que disminuye en las reconstrucciones hechas por SART y desaparece casi por completo en las hechas por MLEM dada la naturaleza de ese método iterativo.

4.2. Discusión

4.2.1. Conteo Conjugado

Notemos que, para los datos obtenidos de todas las reconstrucciones, dado que el PSNR máximo y el SSIM más cercano a 1 resultaron iguales o casi iguales para reconstrucciones de un mismo algoritmo, pero con datos corregidos o no corregidos por conteo conjugado, podemos decir que la reconstrucción sin corrección y las corregidas con promedio aritmético o geométrico son la misma imagen o, al menos, imágenes muy cercanas entre sí. Así, el conteo conjugado no corrige en absoluto los efectos de la atenuación sobre la calidad de la imagen.

El conteo conjugado parte de la premisa de que, en general, medidas opuestas en imagenología de emisión son diferentes. Para el maniquí U tenemos un círculo uniforme de modo que en medidas opuestas los rayos X recorren la misma longitud de camino de material luminiscente en el maniquí y, así, la señal recibida por los aparatos es la misma. Para el maniquí HC tenemos el mismo círculo del maniquí U, pero con dos cavidades dentro de él. Debido a que estas cavidades están colocadas de manera simétrica alrededor del centro y al hecho de que la atenuación que sufre el haz al atravesar la cavidad rellena de agua no es considerable, medidas opuestas generan prácticamente la misma señal luminiscente. Para el maniquí IQ tenemos cinco cilindros de concentración uniforme distribuidos de tal manera que, de nuevo, tenemos cierto grado de simetría que hace que

medidas opuestas generen prácticamente la misma señal luminiscente. Debido a estas simetrías los PSNR y SSIM obtenidos para las imágenes reconstruidas con el mismo algoritmo sin aplicar corrección alguna y los corregidos por conteo conjugado aritmético o geométrico son los mismos o difieren por muy pocas unidades respectivamente. Por lo que, si hay alguna diferencia entre medidas opuestas, esta es tan pequeña que sólo puede ser “percibida” cuando se emplea el promedio geométrico ya que esta es la única reconstrucción que puede diferir ligeramente en su valor PSNR o SSIM respecto a la original. Cabe señalar que el maniquí IQ es, por así decirlo, el “menos simétrico” de los tres, pues presenta una mayor diferencia numérica entre los PSNR y SSIM obtenidos para la reconstrucción sin corrección y la corregida por promedio geométrico.

4.2.2. Maniquí U

Al emplear el método multiplicativo de Chang en FBP, SART y MLEM el criterio correspondiente del PSNR y el SSIM nos dicen que, no sólo no se corrigen los efectos de la atenuación, sino que la calidad de la imagen inicialmente reconstruida disminuye.

Para **Sart** y **Mlem** se obtuvo un PSNR y SSIM en función del número de iteración decreciente, por lo que emplear la matriz ACF para reconstruir estas imágenes no sirve.

Podríamos pensar que el método de Chang de alguna manera corrige los efectos de atenuación en el perfil del maniquí (gráfica 4.11), pero, según los criterios PSNR y SSIM, en realidad el método disminuye la calidad de la imagen. El método de Chang parte de la premisa de que el haz de rayos X es monoenergético y en el presente trabajo se utilizó un haz de rayos X polienergético además de que este método de corrección está pensado para utilizarse en PET en lugar de en TORX. Basados en esto y en los resultados numéricos obtenidos con PSNR y SSIM, el factor ACF sobreestima la corrección sobre el valor de los píxeles y en lugar de acercar sus valores más a 1 los aleja provocando los resultados obtenidos con los métodos de evaluación de calidad de imagen.

En general, para el maniquí U, los métodos de corrección por atenuación empleados no mejoran la calidad de la reconstrucción y, en el caso de Chang y la matriz ACF, incluso disminuyen la calidad de la misma.

4.2.3. Maniquí HC

Las diferencias visuales que se observan en la figura 4.3 entre las imágenes donde se obtuvo el PSNR máximo y las de SSIM más cercano a 1 para MLEM se deben a la naturaleza de los métodos de evaluación de calidad. El PSNR se basa en MSE que a su vez se basa en la diferencia al cuadrado pixel a pixel, por lo que, cuando esta diferencia es mínima el PSNR se maximiza. En las reconstrucciones para MLEM con PSNR máximo el MSE se minimiza cuando encuentra un balance entre los efectos de atenuación en el círculo, es decir, qué tan gris se torna éste, y el parecido entre la escala de gris en las cavidades reconstruidas respecto a las originales. El SSIM se basa en similitud estructural, la cual se maximiza cuando las dos cavidades de referencia alcanzan su máxima similitud con las de la imagen reconstruida aunque eso implique que los efectos de atenuación en el círculo sean más notorios. Así las reconstrucciones con SSIM más cercano a 1 presentan las cavidades de la imagen original mejor definidas que las correspondientes a PSNR máximo.

4.2.4. Maniquí IQ

En este maniquí se obtuvieron el PSNR y SSIM más altos. Esto se debe en parte a que tenemos círculos de diámetro pequeño con material luminiscente dentro de ellos y, como se vio en el capítulo 2, mientras menor sea este diámetro la degradación de la imagen debido a efectos de atenuación disminuye. También debemos considerar que los métodos de calidad de imagen aquí empleados evalúan la imagen completa, la mayor parte de este maniquí son píxeles de valor cero y las estructuras de interés ocupan muy poco espacio dentro del FOV. Es gracias a las contribuciones de estos píxeles “negros” que las reconstrucciones en este maniquí fueron las de mayor calidad. También hay que notar que los métodos iterativos, gracias a que reducen significativamente el ruido fuera de las regiones de interés, obtuvieron PSNR y SSIM más altos que los obtenidos con FBP.

4.2.5. Discusión General

Acorde a los criterios PSNR y SSIM, todos los métodos de corrección por atenuación empleados en el presente trabajo no mejoran la calidad de la imagen.

La simetría presente en los maniqués provoca que medidas opuestas sean prácticamente iguales y hace que el conteo conjugado, en su versión aritmética y geométrica, no sirva para corregir los efectos de atenuación.

El método multiplicativo de Chang utilizado en el maniqué U sobreestima las correcciones pixel por pixel por lo que no aumenta la calidad de la imagen. Para que este método funcione debe cambiarse el haz de rayos X utilizado por otro que pueda ser mejor aproximado con un haz monoenergético o quizás este método, originalmente formulado para PET, no pueda ser implementado en TORX. La forma en que se elaboró la matriz ACF es incorrecta y eso se ve reflejado en que las gráficas del PSNR y SSIM en función del número de iteración sean estrictamente decrecientes.

Dado que el método multiplicativo de Chang y la matriz ACF disminuyen la calidad de la imagen en lugar de aumentarla, para la siguiente discusión sólo se toman en cuenta las reconstrucciones sin corrección alguna y las corregidas por conteo conjugado. De todas estas reconstrucciones los PSNR más altos se obtuvieron para el maniqué IQ (entre 20 y 24 dB aproximadamente), seguido de los obtenidos para el maniqué U (entre 14 y 16 dB aproximadamente) y por último los obtenidos para el maniqué HC (entre 13 y 14 dB aproximadamente). Por otro lado, los SSIM más cercanos a 1 se obtuvieron con SART y MLEM para el maniqué IQ (entre 0.78 y 0.81 aproximadamente), seguido de los obtenidos con SART y MLEM para el maniqué HC (entre 0.62 y 0.66 aproximadamente), luego los obtenidos con SART y MLEM para el maniqué U (entre 0.57 y 0.59 aproximadamente), luego los obtenidos con FBP para HC (0.54 aproximadamente), luego los obtenidos para FBP en U (0.4815) y por último el SSIM obtenido para el maniqué IQ con FBP (0.35). De esto último se concluye que los métodos de evaluación de calidad de imagen empleados no son congruentes entre sí para todas las imágenes evaluadas porque, por ejemplo, el PSNR nos dice que la reconstrucción del maniqué IQ con FBP es una de las de mayor calidad, en tanto que el SSIM indica que esta reconstrucción es la de menor calidad de todas las imágenes evaluadas.

Dejando de lado los resultados obtenidos con SSIM para FBP en el maniqué IQ, el PSNR y SSIM más bajos obtenidos en las reconstrucciones fueron los del maniqué U y HC. Esto se debe a que los efectos de atenuación están ligados al diámetro del círculo en el maniqué U y a que ese círculo también está presente en HC

Para todas las reconstrucciones el MLEM tarda menos iteraciones en alcanzar su PSNR máximo y su SSIM más cercano a 1 que las que le toma al SART alcanzarlos.

Conclusiones

Basados en el criterio del PSNR, el algoritmo de reconstrucción que nos lleva a las imágenes de mayor calidad es MLEM para el maniquí U e IQ y el SART para HC. Para el maniquí U e IQ el algoritmo que da las reconstrucciones de mayor calidad después de MLEM es el SART, en tanto que para el maniquí HC las reconstrucciones de mayor calidad después del SART fueron las hechas con MLEM.

Basados en SSIM, el algoritmo de reconstrucción que nos lleva a las imágenes de mayor calidad es, para todas las reconstrucciones, el MLEM seguidas de las hechas con SART.

Basados en los criterios de PSNR y SSIM, las reconstrucciones de menor calidad se obtuvieron con FBP para todas las reconstrucciones con lo que queda clara la ventaja que se tiene al usar métodos iterativos en lugar de métodos de Fourier.

Considerando como criterio de convergencia el número de iteraciones que le toma al método iterativo llegar al paso donde el PSNR se maximiza o el SSIM alcanza su valor más cercano a 1, encontramos que el MLEM, para todas las reconstrucciones hechas en este trabajo, requiere de menos iteraciones para converger que el SART.

Bajo los criterios del PSNR y SSIM los métodos empleados para corregir la degradación de la imagen debido a efectos de atenuación (conteo conjugado, método multiplicativo de Chang y emplear la matriz ACF en las iteraciones) no funcionan. Para corregir imágenes obtenidas con TORX es necesario que se usen o desarrollen otros métodos de corrección más complejos como, por ejemplo, introducir los efectos de atenuación correctamente en la matriz del sistema.

Por último, el PSNR y el SSIM son métricas de referencia absoluta de calidad de imagen con fórmulas matemáticas muy sencillas que no sólo suelen contradecirse entre ellas sino que también son ampliamente criticadas dentro del campo de procesamiento de imágenes. Para futuros trabajos se propone indagar otras métricas más adecuadas y matemáticamente más complejas.

Bibliografía

- Anton H, Rorres C, “Elementary Linear Algebra”, Wiley, 11a edición (2014).
- Attix F.H., “Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry”, Wiley-VCH, (1986).
- Beiser B., “Concepts of Modern Physics”, McGraw-Hill, 2a edición, (1973).
- Bruyant P. P., “Analytic and Iterative Reconstruction Algorithms in SPECT”, *J. Nucl. Med.* 43-10 (2002) 1343-1358.
- Bushberg J., Seibert J. A. et al., “The Essential Physics of Medical Imaging”, Lippincott Williams and Wilkins, 3a edición (2012).
- Carpenter C. M., “Hybrid X-Ray/Optical Luminescence Imaging: Characterization of Experimental Conditions”, *Med. Phys.* 37(8), 4011-4011 (2010).
- Cherry S. R., Sorenson J. A., Phelps M. E., “Physics in Nuclear Medicine”, Elsevier, 4a edición (2012).
- Gordon R., Bender R., Herman G. (1970), "Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography", *J. Theoretical Biol.*, **29** (3): 471–481
- Greening J.R., “Fundamentals of Radiation Dosimetry”, Institute of Physics Publishing, (1981).
- Hansen P. C., “Tutorial: Algebraic Iterative Reconstruction”:
<http://www.imm.dtu.dk/~pcha/Talks/AIRtoolsTutorial.pdf>
- Horé A., Ziou D., “Image Quality Metrics: PSNR vs SSIM”, *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, IEEE Computer Society, (2010) 2366-2369.
- Kak A., Slaney M., “Principles of Computerized Tomographic Imaging”, New York: IEEE Press (1987).
- Li C., Martínez A., Cherry S. R., “Numerical Simulation of X-Ray Luminescence Optical Tomography for Small-Animal Imaging”, *J. Biomed. Opt.* 19-4 (2014) 046002-1/10
- National Electrical Manufacturers Association. NEMA Standard Publication NU 4-2008: Performance Measurements of Small Animal Positron Emission Tomographs. Rosslyn, VA: National Electrical Manufacturers Association; 2008.
- Prax G., Carpenter C.M., et al., “X Ray Luminescence Computed Tomography via Selective Excitation: A Feasibility Study”, *IEEE Trans. Med. Im.* 29-12 (2010) 1992-1999
- Rosas S., “Simulación Monte Carlo en Tomografía Óptica de Luminiscencia Estimulada por Rayos X”, Tesis de Maestría en Ciencias (Física Médica), Universidad Nacional Autónoma de México (2015).

Suetens P., "Fundamentals of Medical Imaging", Cambridge University Press, 2a edición (2009).

Wang Z., Bovik A. C., "Mean Squared Error: Love It or Leave It?", IEEE Signal Process. Mag. 1 (2009) 98-117.

Wang Z., Bovik A. C., Sheikh H.R., Simoncelli E. P., "", IEEE Trans. Im. Proc. 13-4 (2004) 600-612

Glosario de Abreviaturas

ACF: Factor de corrección por atenuación.

CT: Tomografía computarizada.

DAS: Sistema de Adquisición de datos.

DROP: Método algebraico iterativo en el campo de reconstrucción de imágenes.

FBP: Retroproyección filtrada.

FOV: Campo de visión.

HU: Unidades Hounsfield.

MAP: Algoritmo de maximización a posteriori.

MLEM: Algoritmo de máxima verosimilitud.

MSE: Error cuadrático medio.

NEMA: Maniquí cilíndrico de polimetilmetacrilato con dimensiones internas de 50 mm de largo y 30 mm de diámetro.

PET: Tomografía de emisión de positrones.

PSNR: Cociente señal a ruido máximo.

SART: Método algebraico iterativo en el campo de reconstrucción de imágenes.

SSIM: Índice de similitud estructural.

SIRT: Técnicas Iterativas de Reconstrucción Simultánea.

TORX: Tomografía óptica de luminiscencia por excitación selectiva con rayos X.