



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Efectos Magneto-hidrodinámicos  
Producidos por Variaciones del  
Flujo de Electrólitos en  
Micro-canales**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Ingeniero Mecatrónico**

**PRESENTA:**

Marcel-André Ramírez Trocherie

**DIRECTOR DE TESIS:**

Dr. José Enrique Guzmán Vázquez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Jurado Asignado**

Presidente: **Dr. Federico Méndez Lavielle**  
Secretario: **Dr. Marco Reyes Huesca**  
Suplente: **Dr. Sergio Cuevas García**  
Suplente: **Dr. Frédéric Trillaud Phigi**  
Vocal: **Dr. Enrique Guzmán Vázquez**

## Agradecimientos

A la UNAM que me vio crecer y me nutrió de saberes.

A mi Tutor por su incomparable guía a lo largo de esta formación.

A mi colegas del Instituto de Ingeniería por la crítica siempre vital y ante todo subjetiva; por ese apoyo incondicional.

A mis grandes amistades de la facultad por siempre estar ante situaciones inclementes.

A mis amigos pese a que no entendiesen con claridad la investigación que desempeñaba.

A mi hermana por darme conocimientos fuera de los esperados.

A mi gata pattes blanches que me acompañaba en esos momentos de estudio inacabables.

Por sobre todo a mis Padres que siempre me han impulsado ha ser mejor y por alentarme en mi formación pese a que no fuese siempre del todo convencional

# Resumen

En el presente trabajo se condensa la investigación teórico-experimental realizada en el ámbito del MHD (Magnetohidrodinámica), específicamente en micro generadores de corriente. Los experimentos se realizaron en el Lab On a Chip (laboratorio de BioMEMS) de la Facultad de Ingeniería.

El fenómeno estudiado a lo largo de la tesis, es la interacción de fluidos incompresibles y eléctricamente conductores moviéndose en canales de sección transversal rectangular ante campos magnéticos perpendiculares al flujo. Ello con lleva la conjunción de los fenómenos de mecánica de fluidos y electromagnéticos.

En el capítulo(2) se desarrollaron varios modelos analíticos estacionarios del fenómeno descrito. Se partió de modelos simplificados incrementando gradualmente su afinidad con la realidad. Cabe recalcar que el modelo con más realismo contempla tantos los efectos magnéticos (Fuerza de Lorentz) como las pérdidas viscosas en las cuatro paredes e incluso un posible deslizamiento en las mismas.

En el capítulo (3)se muestra el montaje y construcción experimental , con la finalidad de comprobar la existencia del fenómeno descrito en la hipótesis. El montaje experimental consta de un canal de sección cuadrada ( $1.2 \times 10^{-3}m$ ) y una longitud de ( $2.35 \times 10^{-2}$  m) con un campo magnético uniforme en todo el canal de ( $0.5T$ ) y un dispositivo de bombeo de desplazamiento positivo. Situándonos con ello a pequeñas escalas.

Posteriormente en los capítulos (3, 4). Se explica la experimentación realizada y los resultados obtenidos con el montaje previo así como las variables a medir y los regímenes de trabajo, variando el parámetro del Reynols de  $Re = 2 \times 10^1$  a  $Re = 1.5 \times 10^2$  y manteniendo constante el Hartman en  $Ha = 4.37 \times 10^{-2}$  . El análisis comparativo se realizo entre los resultados obtenidos analíticamente y los experimentales.

El objetivo principal de la investigación es demostrar la existencia de corrientes generadas por el fenómeno previamente descrito.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>x</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Relevancia del problema . . . . .	2
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Objetivos y alcances . . . . .	5
1.4. Hipótesis de trabajo . . . . .	6
<b>2. Modelo Matemático</b>	<b>7</b>
2.1. Formulación del problema . . . . .	7
2.2. La aproximación magnetohidrodinámica . . . . .	9
2.3. Modelo para un micro-generador MHD . . . . .	10
2.3.1. Caso I: canal con deslizamiento finito en dos paredes . . . . .	11
2.3.2. Caso II: canal sin deslizamiento en las cuatro paredes . . . . .	13
2.3.3. Caso III: canal con deslizamiento finito en las cuatro paredes . . . . .	18
2.4. Flujo volumétrico . . . . .	19
2.5. Densidad de corriente inducida . . . . .	20
2.6. Distribución de la densidad de carga . . . . .	20

2.7. Predicciones teóricas del perfil de Hartmann . . . . .	22
<b>3. Experimentos de Laboratorio</b>	<b>25</b>
3.1. Fluidos de trabajo . . . . .	25
3.1.1. Procedimiento de síntesis . . . . .	27
3.1.2. Molaridad . . . . .	27
3.1.3. Densidad . . . . .	28
3.1.4. Comportamiento reológico . . . . .	29
3.1.5. Propiedades eléctricas . . . . .	29
3.2. Micro-canales . . . . .	31
3.2.1. Diseño . . . . .	31
3.2.2. Procedimiento de polimerización de PDMS . . . . .	32
3.3. Arreglo experimental . . . . .	33
3.3.1. Montaje Eléctrico . . . . .	35
3.3.2. Montaje Hidráulico . . . . .	35
3.3.3. Montaje de los imanes . . . . .	36
3.4. Técnicas de medición . . . . .	37
3.5. Series experimentales . . . . .	38
<b>4. Análisis de Resultados</b>	<b>39</b>
4.0.1. Mediciones de la corriente inducida . . . . .	39
4.1. Mediciones de la presión . . . . .	41
4.2. Resultados de otros casos . . . . .	42
4.3. Características estacionarias de la corriente . . . . .	45
4.4. Discusión . . . . .	46
<b>5. Conclusiones</b>	<b>50</b>

<i>CONTENIDO</i>	VI
5.1. Contribuciones . . . . .	51
5.2. Recomendaciones y trabajo futuro . . . . .	52
<b>A. Ecuaciones Fundamentales</b>	<b>54</b>
A.1. Ecuaciones del campo electromagnético . . . . .	54
A.2. Ecuaciones del campo hidrodinámico . . . . .	59



# Lista de Figuras

1.1. Gráfica obtenida de la pagina oficial de IEA International Energy Agency (2016) . . . . .	2
2.1. Diagrama del micro-canal. El campo magnético externo es perpendicular a la dirección de flujo, el sistema de referencia se localiza en el punto medio de la sección transversal y es un sistema dextrogiro (componente $x$ ) ingresa al interior del documento) . . . . .	7
2.2. $Ha = 0$ . . . . .	23
2.3. $Ha = 1$ . . . . .	23
2.4. $Ha = 10$ . . . . .	23
2.5. $Ha = 100$ . . . . .	23
2.6. Perfiles de velocidad a presión constante y $Ha$ variable . . . . .	24
3.1. Iones en medios acuosos. . . . .	26
3.2. Propiedades reológicas del fluido. Densidad del fluido $\rho$ como función de la fracción molar del cloruro de sodio $M$ . . . . .	28
3.3. Propiedades fluido NaCl a diferentes $M$ , viscosidad $\mu$ contra Molaridad $M$ . Datos experimentales con respectivas desviaciones (Ex), regresión lineal de datos experimentales (Re) . . . . .	29
3.4. Propiedades eléctricas del fluido. Conductividad eléctrica $\sigma$ , como función de la fracción molar $M$ de cloruro de sodio. Ex datos experimentales y Re regresión lineal de los datos . . . . .	30

3.5. 1) PDMS, 2) Micro canal Canal, 3) Paredes conductoras , 4)Paredes no conductoras . . . . .	31
3.6. Montaje experimental sin imanes . . . . .	33
3.7. Bomba de marca . . . . .	34
3.8. 1)Bomba, 2) Dispositivo MHD, 3)Electrómetro, 4) Transductor de presión, 5) Resistencia de carga . . . . .	34
3.9. . . . .	35
3.10. imán de dimensiones $47.63mm \times 22.23mm \times 9.84mm$ , . . . . .	36
3.11. . . . .	36
3.12. . . . .	37
4.1. Muestra obtenida a $20 \mu L/min$ . . . . .	39
4.2. $I$ vs $t$ obtenido a $20 \frac{\mu l}{min}$ . . . . .	40
4.3. $P$ vs $t$ obtenido a $20 \frac{\mu l}{min}$ . . . . .	42
4.4. $P$ vs $t$ y $I$ vs $t$ . . . . .	44
4.5. $30 \frac{\mu l}{min}$ . . . . .	45
4.6. Corriente (I) en A contra Gasto (Q) en $m^3/s$ . . . . .	46
4.8. $Re$ regresión lineal, $Ex$ Datos Experimentales . . . . .	47
4.9. ( $Te$ )Teórico , $Ex$ Eperimental . . . . .	47
4.10. ( $Pr$ )Proporcionalidad, $Ex$ Experimental . . . . .	48
4.11. ( $Re$ )Regresión, $Ex$ Experimental . . . . .	48

# Lista de Tablas

3.1. Tabla de molaridad contra conductividad en NaCl . . . . .	30
3.2. Matriz experimental de fluido de trabajo NaCl . . . . .	38

# Nomenclatura

## Mayúsculas

- $B$  — Campo Magnético ( $T$ ).
- $C$  — Constante dimensional.
- $E$  — Campo Eléctrico ( $\frac{V}{m}$ ).
- $F$  — Fuerza ( $\frac{Kg\,m}{s^2}$ ).
- $H$  — Ancho del canal ( $m$ ).
- Ha — Número adimensional de Hartmann.
- $I$  — Corriente eléctrica ( $A$ ).
- $J$  — Densidad de corriente ( $\frac{A}{m^2}$ ).
- Re — Número adimensional de Reynolds.
- Re<sup>m</sup> — Número adimensional de Reynolds magnético.
- $M$  — Molaridad ( $\frac{mol}{L}$ ).
- $P$  — Presión ( $KPa$ ).
- $Q$  — Gasto volumétrico ( $\frac{m^3}{s}$ ).
- $T$  — Temperatura ( $C$ ).
- $V$  — Volumen ( $m^3$ ).

## Minúsculas

- $h$  — Profundidad del canal ( $m$ ).
- $i$  — Raíz de menos uno (-).
- $n$  — Índice de sucesiones.
- $\hat{n}$  — Vector normal a la superficie.
- $v$  — Velocidad ( $\frac{m}{s}$ ).
- $t$  — Tiempo (número de muestras).

## Letras griegas

- $\alpha$  — El principio de todo (-).
- $\pi$  — Número Irracional (-).
- $\epsilon$  — Permitividad eléctrica del medio  $\left(\frac{F}{m}\right)$ .
- $\lambda$  — Valor característico(eigenvalor).
- $\mu$  — Viscosidad cinemática ( $Pa \cdot s 10^{-1}$ ).
- $\mu_m$  — Permeabilidad magnética del medio  $\left(\frac{N}{A^2}\right)$
- $\rho$  — Densidad  $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$ .
- $\varrho$  — Densidad volumétrica de carga  $\left(\frac{C}{m^3}\right)$ .
- $\sigma$  — Conductividad eléctrica  $\left(\frac{S}{m}\right)$ .

# Capítulo 1

## Introducción

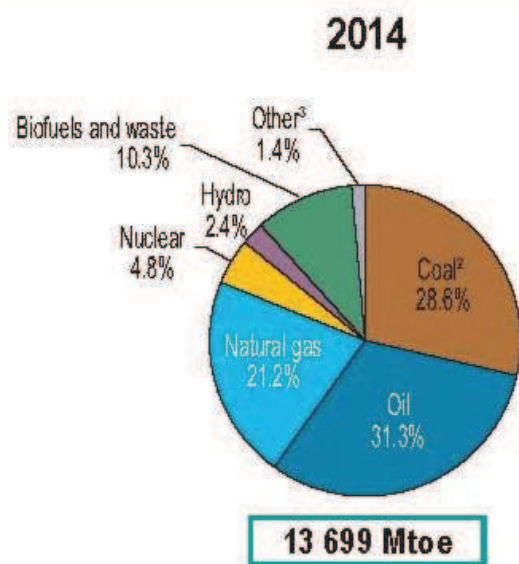
La magnetohidrodinámica (normalmente nombrada MHD) es la ciencia que conjunta el estudio de la mecánica de fluidos y el fenómeno electromagnético. La conjunción de estas disciplinas se debe a que, si colocamos un fluido conductor en movimiento en presencia de un campo electromagnético se generan corrientes al interior del fluido que a su vez provocan fuerzas que modifiquen la dinámica del fluido. Esta ciencia permite comprender fenómenos tales como el movimiento interno del sol (movimiento de plasma), la generación del campo magnético de la tierra (movimiento de metales líquidos) y el comportamiento de los ferrofluidos. Las ecuaciones que describen el fenómeno son las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Maxwell.

En el caso particular de la generación de energía eléctrica, esta ciencia ya es de gran utilidad. Un ejemplo de ello son los reactores Tokamak. La gran ventaja que presentan es la ausencia de partes móviles y pérdidas únicamente por fricción viscosa y disipación térmica. En este tipo de reactores el control del movimiento de plasmas es fundamental por los requerimientos de seguridad y operación que poseen estos generadores. Dadas las elevadas temperaturas y condiciones extremas de confinamiento de los plasmas, la implementación de los reactores Tokamak se ha visto obstaculizada.

Motivado por las dificultades presentes a gran escala así como por la escasez en la investigación de este tema, se ha migrado el estudio de la generación de energía a escalas y condiciones más viables.

## 1.1. Relevancia del problema

Debido a la creciente crisis energética mundial, han surgido numerosas alternativas que sustituyan a los combustibles fósiles. Sin embargo en los últimos años la incorporación y el surgimiento de energías alternas ha sido pobre en comparación con la actual utilización de combustibles fósiles tal y como se muestra en la figura (1.1).



**Figura 1.1:** Gráfica obtenida de la página oficial de IEA International Energy Agency (2016)

Por otra parte, el aumento en las últimas décadas de la utilización de MEMS (microelectronic and microelectromechanical systems) aumentado de forma desmesurada. Sin embargo la gran problemática de los mismos es la interconexión con el mundo exterior, puesto que requieren de energía eléctrica estos se encuentran subyugados ya sea a conexiones eléctricas macro o pilas siendo las últimas contaminantes y grandes en comparación de los MEMS. Provocando la búsqueda de una fuente de energía eléctrica a micro escala no contaminante.

Debido a la facilidad con la que es posible manejar los regímenes laminares de flujo y la poca inversión monetaria requerida para la construcción de microcanales, se ha decidido trabajar la problemática en micro escala.

Como consecuencia directa, es posible crear un control riguroso en cuanto las concentraciones y gastos volumétricos.

## 1.2. Antecedentes

Historicamente el MHD a acarreado gran interes en la comunidad científica sobre todo por la complejidad para analizarle. Desde el surgimiento mismo del concepto Alfvén (1942).

Ryabinin & Khozhainov (1967) , proponen una solución analítica para el campo de velocidades de flujos incompresibles, MHD en tuberías de sección transversal rectangular. El modelo está hecho asumiendo que dos de las paredes constituyen los polos magnéticos, y suponiendo que el Reynolds magnético es  $Rem \ll 1$  . Por otra parte asumen que los transitorios electromagnéticos son instantáneos.<sup>en</sup> el caso que tratan, y los modelan en concordancia. Cabe observar que esto no necesariamente es cierto en términos generales, especialmente en el caso de los electrolitos. La solución permite calcular en particular la pérdida de presión durante el transitorio de corta duración. La solución de estos autores coincide en los detalles con la solución aquí propuesta. Es importante recalcar que el trabajo Ryabinin y Khozhainov carece de validación experimental. Esto difiere fundamentalmente del trabajo presentado en esta tesis que sí está soportado por evidencia experimental. Finalmente, otro aspecto que vale la pena señalar es que la solución de estos autores no permite considerar los casos en los que no se satisface la condición de no-deslizamiento. A diferencia de este, el modelo propuesto en esta tesis sí incluye dichos efectos.

Lei et al. (2009) proponen una solución analítica para el campo de velocidades de un flujo incompresible bajo efectos electro-viscosos en microcanales de sección transversal rectangular considerando paredes de PDMS y vidrio (hidrofóbico e hidrofílico, respectivamente). Específicamente consideran tres paredes con deslizamiento (PDMS) y una sin él (vidrio). Aunque no considera efectos magnéticos la aportación de Lei et al. (2009) son las múltiples condiciones de frontera. Cabe recalcar que al igual que Ryabinin & Khozhainov (1967), los autores no incluyen una validación experimental, si bien reproducen los resultados mediante un simulación numérica.

Ramos (2007), Aporta una clasificación de las micro-bombas impulsadas por campos electromagnéticos, en movimiento de flujos en micro-fluidica por medio de MHD y EHD. Específicamente en los dispositivos MHD en conductos de sección transversal rectangular, propone modelos matemáticos globales del movimiento en los que no se aporta el perfil de velocidades y tan solo se aporta los casos máximos. Cabe denotar que atribuye los gradientes de presión a los efectos del campo eléctrico y magnético  $\Delta P = \sigma E_0 B_0$ , asi como el uso de las nociones de diámetro hidráulico para la utilización de nociones de canales de sección circular. Trabaja con nociones de No aporta ecuación que describa el campo de velocidades solamente describe



las velocidades máximas y gastos máximos a diferencia del trabajo presente.

Lekner (2007), Postula soluciones analíticas para flujos de Hagen Poiseuille incompresibles incluyendo canales infinitamente largos de sección transversal rectangular, lamentablemente no incluye efectos magnéticos y sus estudios son puramente teóricos.

Berker (1963), proponen soluciones analíticas para el campo de velocidades y el gasto para flujos estacionarios de Hagen-Poiseuille estacionarios, Específicamente es de interés su solución para tuberías de sección transversal rectangular. El modelo incorpora los efectos de la viscosidad debido a las cuatro paredes. El modelo no incorpora fuerzas magnéticas ni posibles deslizamientos en las paredes a diferencia del realizado en el presente trabajo. El estudio realizado por Berker (1963) es puramente teórico y no aporta validaciones experimentales de sus modelos.

Manyonge et al. (2012), realizan un estudio puramente matemático y llegan a soluciones analíticas para flujos estacionarios de Hagen-Poiseuille con campo magnetico inclinado, el modelo esta generado con la idealización de un conducto con dos paredes infinitamente largas y porosas. Lo más resaltante del estudio es la incorporación de una inclinación en el campo magnético. Sin embargo el estudio es puramente matemático y no aporta validaciones experimentales así como el echo de considerar la afectación de solo 2 paredes a diferencia del presente trabajo, la primera solución obtenida por Manyonge et al. (2012) pose gran similitud con la primera idealización resuelta en el presente trabajo.

Jang & Lee (2000), Trabaja tanto el aspecto teóricos como el experimental de los dispositivos MHD a micro escala en su modalidad de bombas , Sus modelos se encuentran limitados puesto que asumen solo efectos de dos paredes y en el ámbito de la micro-fluidica las distancias son tan serranas que resulta atrevido ignorar las afectaciones causadas por las otras paredes, A diferencia de los modelos presentados en este trabajo.

Ueno (1991), trabaja analítica y numéricamente en los efectos MHDde flujos incompresibles canales de sección transversal rectangular. Su mayor aportación es incorporar un campo magnético no constante de forma espacial específicamente con una función periódica senoidal, pese a que los modelos y las simulaciones numéricas son de alta calidad , no especifica ni da muestras de la existencia de un campo magnético con la forma que declara. A diferencia del la presente tesis que da muestras de un caso en el cual ocurre lo descrito.

Davidson (2016), Aporta un marco general del MHD , las ecuaciones que lo gobiernan y las formas de modelarlo. En el ámbito de Generadores MHD llega a las misma solución que se a propuesto como nuestra primera solución analítica (ec 2.21), no propone soluciones más

apegadas a la realidad tales como las que se proponen en el presente documento.

### 1.3. Objetivos y alcances

El objetivo general de la investigación es el de evaluar la capacidad para inducir una densidad de corriente significativa en un microdispositivo de flujo, cuando éste opera en régimen permanente bajo la acción de un campo magnético estático aplicado externamente.

#### **Alcances:**

- Desarrollar un modelo experimental para estudiar la densidad de corriente inducida.
- Desarrollar la metodología requerida para medir de manera directa la densidad de corriente en el microdispositivo.
- Desarrollar las técnicas de filtrado de señales y de análisis necesarias para procesar la información obtenida en el laboratorio.
- Desarrollar la técnica necesaria para medir directamente la presión de operación del microdispositivo.
- Evaluar de manera indirecta el flujo volumétrico del electrolito.
- Desarrollar un modelo matemático para explicar el principio de funcionamiento del dispositivo en la escala propuesta.
- Incorporar en el modelo matemático las dos condiciones de frontera que se presentan en la escala considerada, y que están dictadas por el tipo de materiales de construcción: a) cuando se cumple la condición de no-deslizamiento, y b) cuando sí se cumple la condición de deslizamiento.
- Evaluar numéricamente el modelo matemático para establecer la forma de los perfiles de flujo con las dos condiciones de frontera de interés.
- Validar el modelo matemático con los datos experimentales.

## **1.4. Hipótesis de trabajo**

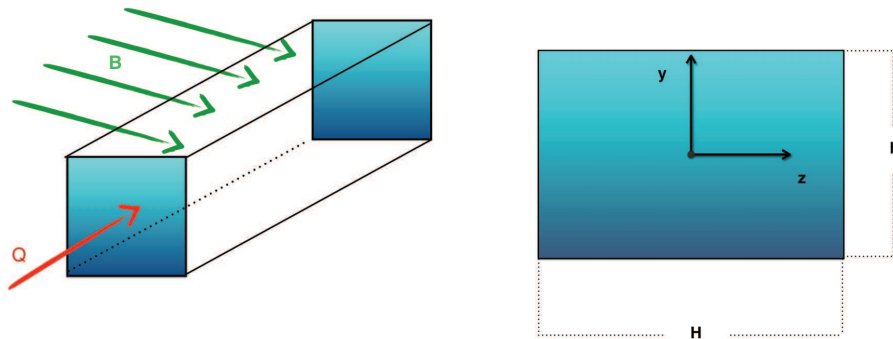
La densidad de corriente inducida en un electrolito con alta conductividad eléctrica es directamente proporcional al flujo de entrada en el régimen permanente de operación del dispositivo.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

### 2.1. Formulación del problema

El proceso físico considerado refiere al flujo de un electrolito saturado, que se mueve a través de un microcanal de sección transversal rectangular, y que se encuentra completamente inmerso en un campo magnético externo de tipo estático. La figura 2.1 ilustra esquemáticamente el arreglo correspondiente.



**Figura 2.1:** Diagrama del micro-canal. El campo magnético externo es perpendicular a la dirección de flujo, el sistema de referencia se localiza en el punto medio de la sección transversal y es un sistema dextrogiro (componente  $x$ ) ingresa al interior del documento)

Todo el dispositivo (es decir, el micro-canal en su totalidad) se encuentra inmerso dentro del campo magnético  $\mathbf{B}$  aplicado externamente. Dicho campo es producido por dos imanes permanentes de Neodimio que tienen forma de placa. Éstos imanes pueden ser colocados a una distancia predeterminada para regular la intensidad del campo en

la zona del canal. Por su lado, el micro-canal está alineado dentro de la región de mayor uniformidad del campo magnético, con el objeto de evitar los efectos de borde.

Por un extremo del canal ingresa un cierto flujo volumétrico  $\mathbf{Q}$  de un electrolito con conductividad eléctrica conocida  $\sigma$ . Posteriormente éste es evacuado a presión atmosférica por el extremo opuesto, el cual ha sido especialmente diseñado a fin de evitar los efectos asociados a la descarga (por ejemplo los de tensión superficial).

Al pasar el electrolito por el campo magnético, se induce en éste una densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$  que es transversal al flujo. En principio, la corriente movilizada en el fluido,  $\mathbf{I}$ , puede ser recolectada en las paredes conductoras del microcanal. La carga eléctrica acumulada en dichas paredes produce un efecto similar al observado en un capacitor convencional. Gracias a la diferencia de potencial entre ambas paredes,  $\Delta V$ , la carga se puede hacer fluir a través de un circuito eléctrico externo para alimentar una resistencia de carga.

En las aplicaciones de pequeña escala, por ejemplo en un micro-canal, el número de Reynolds magnético es  $Re^m = \mu \sigma U_0 L \ll 1$ . Asimismo, el número de Hartmann suele ser  $Ha = B_0 L \sqrt{\sigma/\mu} \leq 1$  para los fluidos típicos.

El  $Re^m$  es una relación entre la advección magnética y la difusión magnética, en el experimento los valores de este numero estan acotados,  $1.31 \times 10^{-12} \geq Re^m \leq 1.31 \times 10^{-11}$ , lo que indica que los efectos advectivos dominan sobre los efectos difusivos en el proceso

El  $Ha$  es una relación de fuerzas, las fuerzas magnéticas por un lado y por el otro las fuerzas viscosas, indica que fuerzas dominan el fenómeno estudiado. En nuestro caso de estudio,  $Ha = 4.37 \times 10^{-2}$ , por lo tanto si bien dominan las fuerzas viscosas no es del todo evidente .

Finalmente, cabe mencionar que el principio de operación descrito es el que corresponde a la configuración tipo generador de este arreglo. La operación tipo bomba también es posible mediante una modificación menor en la que se invierte el sentido de operación. Todo el proceso ocurre a temperatura ambiente, y los efectos de calentamiento en el fluido por efecto Joule son despreciables en el límite considerado.

## 2.2. La aproximación magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica<sup>1</sup> es la ciencia que estudia la dinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de campos electromagnéticos. Por tal motivo, se hace indispensable considerar simultáneamente las ecuaciones de la hidrodinámica y del electromagnetismo. Estas ecuaciones se describen con detalle en el apéndice A.

Bajo ciertas condiciones es posible simplificar dicho conjunto de ecuaciones para modelar muchos casos de interés práctico. En particular, en la aproximación magnetohidrodinámica cabe hacer las siguientes simplificaciones:

1. El flujo es no-relativista.
2. El campo magnético externo es estacionario.
3. La corriente de desplazamiento puede ser ignorada.
4. La densidad de corriente convectiva en la Ley de Ohm puede ser ignorada.
5. La parte eléctrica en la Fuerza de Lorentz puede ser ignorada.
6. Para el electrolito  $\mu \approx \mu_0$ .
7. Los campos inducidos son mucho más pequeños que los aplicados (i.e.  $Re^m = \mu \sigma Q_l/a \ll 1$ ).

El conjunto simplificado de ecuaciones, a partir del cual se desarrolla el modelo del sistema que nos ocupa, es el siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Este concepto fue introducido en 1942 por el científico sueco Hannes Alfvén, mientras estudiaba los procesos de la ionósfera terrestre.

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.6)$$

Es importante señalar que el Número de Reynolds del flujo en  $Re = \rho u b / \mu \ll 1$  esta en el orden  $Re = 1.5 \times 10^2$ . Esto corresponde a un flujo laminar, de tal manera que los efectos turbulentos son inexistentes. Los términos inerciales serán descartados puesto que se desea por el momento conocer el fenómeno en su estacionario. Dado que todos los términos de la derivada material desaparecen de la formulación, la versión final de las ecuaciones es lineal y permite una solución analítica. El acoplamiento, sin embargo, es evidente. Los valores particulares de las variables y parámetros se especifican en el capítulo 3.

### 2.3. Modelo para un micro-generador MHD

El momento de un flujo incompresible que transcurre en régimen estacionario a través de un canal infinito de sección transversal constante, y sobre el cual actúa un campo magnético externo, está gobernado por la ecuación de Navier-Stokes (ec. 2.2)

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B} = 0. \quad (2.7)$$

En esta expresión  $P$ ,  $\mu$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{J}$ , y  $\vec{B}$ , representan la presión promedio, la viscosidad dinámica, el campo de velocidades, la densidad de corriente inducida, y el campo magnético aplicado externamente. Es importante señalar que se hace la suposición de que  $\vec{B}$  es uniforme a lo largo del conducto.

El último término del lado derecho de la ecuación corresponde a la fuerza magnética. La densidad de corriente inducida que aparece en este término está dada por la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.8)$$

Evidentemente  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se refieren a los campos eléctrico y magnético externos. Puesto que en nuestro caso de estudio  $\vec{E} = \vec{0}$ , la expresión se simplifica a

$$\vec{J} = \sigma \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.9)$$

En consecuencia, la fuerza magnética se escribe de la siguiente manera

$$\vec{F}_{mag} = \vec{J} \times \vec{B} = \sigma \vec{v} \times \vec{B} \times \vec{B}. \quad (2.10)$$

El proceso de flujo es tal que los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí. Esto significa que la  $F_{mag}$  es antiparalela a la velocidad y se manifiesta, efectivamente, como una fuerza de frenado cuya magnitud es

$$F_{mag} = \sigma v B^2. \quad (2.11)$$

Este es el modelo básico que se aplica en las siguientes subsecciones para los diferentes casos concretos. Estos casos incluyen condiciones de frontera específicas en el contorno de la sección transversal del canal.

### 2.3.1. Caso I: canal con deslizamiento finito en dos paredes

Como primera aproximación se propone un modelo 1-D en el que se consideran los efectos viscosos asociados únicamente a dos paredes del conducto. Dado que todas las fuerzas son colineales, basta desarrollar la componente relevante de la ec. (2.2)

$$-\frac{\partial P_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \sigma v_x B^2 = 0. \quad (2.12)$$

De las componentes restantes se concluye que  $\partial P/\partial y = \partial P/\partial z = 0$ . La velocidad axial es exclusivamente función de la coordenada  $x$ , y el gradiente de presión es constante. Se trata de una ecuación ordinaria, no-homogénea, y por tanto admite una solución general del tipo  $v_x(y) = v_{x_h} + v_{x_p}$ , donde  $v_{x_h}$  corresponde a la solución homogénea y  $v_{x_p}$  a la solución particular. Concretamente, la solución particular es

$$v_{x_p} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \frac{1}{\sigma B^2}$$

En relación con la solución homogénea, sigue que las raíces del polinomio característico (o de Cauchy)

$$\mu \lambda^2 - B^2 \sigma \lambda^0 = 0$$

son

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{B^2 \sigma}{\mu}} \in \mathbb{R}.$$

En términos de estas raíces, la solución homogénea queda como

$$v_{x_h}(y) = c_1 e^{y \sqrt{\frac{B^2 \sigma}{\mu}}} + c_2 e^{-y \sqrt{\frac{B^2 \sigma}{\mu}}}.$$



Se concluye de lo anterior que la solución general está dada por

$$v_x(y) = c_1 e^{y\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + c_2 e^{-y\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Las constantes se determinan a partir de las condiciones de frontera. Concretamente, puesto que hay una condición de deslizamiento finito en las dos caras del canal, se produce el siguiente sistema simultáneo

$$v_s = v_x(y = h/2) = c_1 e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + c_2 e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$v_s = v_x(y = -h/2) = c_1 e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + c_2 e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Éste sistema, se resuelve mediante las siguientes sustituciones

$$0 = (c_1 - c_2)e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + (c_2 - c_1)e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} \quad (2.16)$$

$$0 = (c_1 - c_2)(e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}}) \quad (2.17)$$

$$0 = c_1 - c_2 \quad (2.18)$$

$$c_1 = c_2 = c. \quad (2.19)$$

De lo anterior puede concluirse inmediatamente que

$$c = \frac{v_s + \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}}{e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}}}. \quad (2.20)$$

El campo de velocidad solicitado establece las características del perfil de Hartmann<sup>2</sup>

$$\vec{v} = \left[ c \cosh(y\lambda) - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right] \hat{i}. \quad (2.21)$$

Es importante hacer notar que el perfil de Hartmann difiere fundamentalmente del perfil clásico de Hagen-Poiseuille

$$v_x(r) = \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) V_0. \quad (2.22)$$

Esto se debe al efecto que produce el frenado de Hartmann sobre el flujo. No obstante, en el límite  $B \rightarrow 0$ , se recupera el perfil de Hagen-Poiseuille como caso particular.

---

<sup>2</sup>Vale la pena recordar que el gradiente de presión es negativo.

De mayor interés aún, es la manera en la que se distribuye la densidad de carga a través del fluido. Entonces, dado que el régimen de flujo es permanente y el campo magnético externo es estático (funge como un campo eléctrico), es posible considerar (ver ecuación (2.6)):

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.23)$$

Sustituyendo el resultado (2.21) se obtiene

$$\vec{E} = - \left[ Bc \cosh(y\lambda) - \frac{1}{\sigma B} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right] \hat{j}. \quad (2.24)$$

Incorporando este resultado a Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon}, \quad (2.25)$$

se obtiene

$$\varrho = -\epsilon\lambda Bc \sinh(y\lambda). \quad (2.26)$$

Existiendo una variación espacial de la densidad de carga volumétrica.

### 2.3.2. Caso II: canal sin deslizamiento en las cuatro paredes

Ahora se aborda el problema 2-D, en el que las cuatro paredes conforman la sección transversal del canal producen efectos viscosos. La ecuación (2.2) en este caso se reduce a

$$-\frac{\partial P_x}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \sigma v_x B^2 = 0. \quad (2.27)$$

Haciendo

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - v_x \frac{B^2 \sigma}{\mu} = 0 \quad (2.28)$$

surge la cantidad  $B^2 \sigma / \mu = \text{Ha}^2 / L^2$ , en la que se identifica al Número de Hartmann (Ha). La cantidad  $L$  es una longitud característica del sistema. Puesto que se trabaja con un canal rectangular se propone el uso de el diámetro hidráulico  $D_h$  como longitud característica (Apéndice A)

Evidentemente, la expresión (2.28) es una ecuación diferencial parcial, lineal, de coeficientes constantes, y no-homogénea. La solución se obtiene por medio del método de separación de variables, en el que se propone formalmente

$$v_x = \gamma(y)G(z). \quad (2.29)$$

Sustituyendo en la ecuación homogénea se obtiene

$$G(z) \frac{d^2 \gamma(y)}{dy^2} + \gamma(y) \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = \gamma(y) G(z) \frac{\text{Ha}^2}{L^2}. \quad (2.30)$$

Dividiendo entre  $\gamma G$  se obtiene

$$\frac{1}{\gamma(y)} \frac{d^2 \gamma(y)}{dy^2} + \frac{1}{G(z)} \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = \frac{\text{Ha}^2}{L^2}. \quad (2.31)$$

Al separar la ecuación se produce el siguiente sistema simultáneo de ecuaciones

$$\frac{1}{G(z)} \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = \lambda_z^2, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\gamma(y)} \frac{d^2 \gamma(y)}{dy^2} = -\lambda_y^2, \quad (2.33)$$

y

$$\frac{\text{Ha}^2}{L^2} + \lambda_y^2 = \lambda_z^2. \quad (2.34)$$

Las constantes de separación  $\lambda$  son los valores propios que aparecen en la solución general del problema original, la solución debe satisfacer simetría en ambos ejes debido a las condiciones de frontera. Las soluciones de las ecuaciones anteriores se escriben como

$$G(z) = C_1 \cosh(\lambda_z z) + A, \quad (2.35)$$

y

$$\gamma(y) = C_2 \cos(\lambda_y y) + B. \quad (2.36)$$

Para determinar el valor de las constantes de integración es necesario considerar las condiciones de frontera en cada dirección. En las dos paredes sin deslizamiento se tiene

$$v_x(h/2, z) = 0 = \gamma(h/2)G(z). \quad (2.37)$$

Por tanto, una solución no-trivial requiere que  $\gamma$  satisfaga la condición

$$0 = C_2 \cos\left(\lambda_y \frac{h}{2}\right) + B, \quad (2.38)$$

que es posible solo si  $B = 0$  (independientemente del tamaño del canal). Los valores propios posibles son los siguientes

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

Éste último resultado se puede reescribir de manera más clara como

$$\lambda_y = \frac{\pi n}{h}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.40)$$

Fijados los valores en la dirección  $y$ , se procede a calcular los valores propios en la dirección  $z$ , de modo que

$$\lambda_{zn} = \sqrt{\frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{h}\right)^2}. \quad (2.41)$$

Esto requiere satisfacer la segunda condición de frontera

$$v_x(y, H/2) = 0 = \gamma(y)G(H/2) \quad (2.42)$$

que conduce a

$$\therefore 0 = C_1 \cosh\left(\lambda_{zn} \frac{H}{2}\right) + A. \quad (2.43)$$

Nuevamente, la solución no-trivial implica

$$C_1 = \frac{-A}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}, \quad (2.44)$$

por lo que la función  $G$  queda especificada como

$$G_n(z) = \left[1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}\right] A_n. \quad (2.45)$$

Finalmente, la solución global se expresa de la siguiente manera

$$v_x(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}\right] \cos(\lambda_{yn} y). \quad (2.46)$$

Los coeficientes  $A_n$  se determinan requiriendo que la solución satisfaga a la ecuación diferencial original (2.27) en términos del forzamiento. Entonces es necesario sustituir las derivadas correspondientes al Laplaciano

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{yn}^2 A_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}\right) \cos(\lambda_{yn} y) \quad (2.47)$$

y

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{zn}^2 A_n \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})} \cos(\lambda_{yn} y). \quad (2.48)$$

en la ecuación original (2.27). Tras la sustitución se llega a la igualdad

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right) A_n \cos(\lambda_{yn} y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x}, \quad (2.49)$$

que se puede reacomodar como sigue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right)^{-1} \left( \lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right) A_n \cos(\lambda_{yn} y) = 1. \quad (2.50)$$

Claramente se trata de un desarrollo de Fourier en serie de cosenos, cuyos coeficientes se calculan aprovechando la propiedad de ortogonalidad usual de las funciones circulares.

Es importante reconocer que la función  $f(x) = 1$  es un miembro del conjunto básico de funciones trigonométricas, que son ortogonales en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ ; es decir,  $\phi_n \in \{1, \dots, \cos(n\pi x/l), \sin(n\pi x/l), \dots\}$ . Consecuentemente se satisfacen las condiciones

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad (2.51)$$

y

$$\int_a^b \phi_n^2(x) dx \neq 0 \quad (2.52)$$

para  $n, m = 0, 1, 2, \dots$  en el intervalo  $[a, b]$ , y es lícito asumir la representación formal de la función  $f(x) = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \dots$ . Evidentemente la expansión (2.50) es una representación de este mismo tipo, puesto que tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (2.53)$$

con  $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . En particular, se observa que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \implies a_0 = 2 \quad (2.54)$$

como era de esperar.

Estas consideraciones son de gran importancia, porque el dominio válido de la solución debe concretarse exclusivamente el interior del canal. En éste caso los valores propios obtenidos,  $\lambda_{yn}$ , cumplen exactamente estas mismas condiciones ya que

$$\lambda_{yn} = \frac{n\pi}{h} = \frac{2n\pi}{L}, \quad (2.55)$$

siendo  $L = 2h$  el intervalo de longitud indicada previamente. Entonces, para realizar el cálculo hacemos

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos(\lambda_{ym} y) dy - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} \cos(\lambda_{ym} y) dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} D_n \cos(\lambda_{ym} y) \cos(\lambda_{yn} y) dy. \quad (2.56)$$

Realizando las integrales queda

$$D_n = \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{yn} y)}{\lambda_{yn} 2h} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{yn} y)}{\lambda_{yn} 2h} \Big|_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}}, \quad (2.57)$$

y evaluando

$$D_n = \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{yn} \frac{h}{2}) - \operatorname{sen}(-\lambda_{yn} \frac{h}{2})}{\lambda_{yn} 2h} + \frac{-\operatorname{sen}(\lambda_{yn} \frac{3h}{2}) + \operatorname{sen}(\lambda_{yn} \frac{h}{2})}{\lambda_{yn} 2h}. \quad (2.58)$$

Ahora se sustituye el valor de  $\lambda_{yn}$  para obtener

$$D_n = \frac{\operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{2h} \frac{h}{2}) - \operatorname{sen}(-\frac{2n\pi}{2h} \frac{h}{2})}{\frac{2n\pi}{2h} 2h} + \frac{-\operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{2h} \frac{3h}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{2h} \frac{h}{2})}{\frac{2n\pi}{2h} 2h}, \quad (2.59)$$

de la que surge finalmente

$$D_n = \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.60)$$

Esta última expresión se puede reescribir en forma alternativa como

$$D_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\pi(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.61)$$

Ahora se realiza la sustitución de este resultado en la correspondiente definición de los coeficientes

$$D_n = \left( \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right)^{-1} \left( \lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right) A_n. \quad (2.62)$$

Sigue que

$$\frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} = \left( \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right)^{-1} \left( \lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right) A_n, \quad (2.63)$$

de la cual resulta finalmente

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} \left( \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right) \left( \lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right)^{-1}. \quad (2.64)$$

Nuevamente, esta expresión se puede reescribir en la forma más conveniente

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\mu \lambda_{zn}^2 \pi (2n-1)} \left( \frac{-\partial P_x}{\partial x} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.65)$$

La solución general para el perfil de Hartmann es en este caso

$$v_x(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})} \right) \cos(\lambda_{yn} y), \quad (2.66)$$

en la que

$$\lambda_z^2 = \frac{Ha^2}{L^2} + \lambda_y^2,$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h},$$

y

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\mu \lambda_{zn}^2 \pi(2n-1)} \left( \frac{-\partial P_x}{\partial x} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

### 2.3.3. Caso III: canal con deslizamiento finito en las cuatro paredes

Ahora se considera el caso en el que existe una velocidad de deslizamiento finita en las cuatro paredes que conforman la sección transversal del canal. La ecuación de transporte es la misma que en el caso anterior (ecuación (2.27)), pero las condiciones de frontera ahora son no-homogéneas. Se procede, entonces, a probar la solución

$$v_x^* = v_x + v_s$$

$$v_x = \gamma(y)G(z)$$

$$v_x(y = \pm h/2) = v_x(z = \pm H/2) = v_s, \quad (2.67)$$

en la que  $v_s$  representa la velocidad de deslizamiento. La sustitución en la ecuación (2.27) conduce a

$$-\frac{\partial P_x}{\mu \partial x} - \frac{B^2 \sigma v_w}{\mu} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - v_x \frac{B^2 \sigma}{\mu} = 0. \quad (2.68)$$

Resalta inmediatamente el nuevo término constante que aparece en la ecuación. En este sentido, el contorno de las paredes constituye una equipotencial del flujo.

Desde el punto de vista operativo, el esquema de resolución cambia muy poco porque solamente el término no-homogéneo requiere modificación. Por esta razón es posible plantear directamente el perfil de Hartmann como

$$v_x(y, z) = v_w + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})} \right) \cos(\lambda_{yn} y), \quad (2.69)$$

donde

$$\lambda_{zn}^2 = \frac{Ha^2}{L^2} + \lambda_y^2,$$

$$\lambda_{yn} = \frac{\pi(2n-1)}{h},$$

y

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\lambda_{zn}^2 \pi(2n-1)} \left( \frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} - v_w \frac{B^2 \sigma}{\mu} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ésta es la solución más general posible que describe el proceso físico planteado. Cabe señalar que este problema no posee discontinuidades en el dominio, ni tampoco en las condiciones de frontera. Sin embargo, el caso más realista en el que dos de las paredes satisfacen la condición de no-deslizamiento, mientras que las otras dos no la satisfacen, sí presentan tales discontinuidades. Este caso queda para ser desarrollado en un trabajo futuro.

## 2.4. Flujo volumétrico

Con los perfiles de Harmtmann obtenidos en la sección anterior se puede calcular el flujo volumétrico  $Q$  y, por consiguiente, la densidad de corriente inducida  $\vec{J}$  y la corriente total  $I$  que se puede hacer circular por la carga externa.

Por definición

$$Q = \int \vec{v} \cdot \hat{n} da, \quad (2.70)$$

Puesto que la velocidad es perpendicular al área transversa, siendo ésta la sección rectangular la integral doble se simplifica.

$$Q = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_x dydz, \quad (2.71)$$

Sustituyendo la ecuación (2.69) se llega

$$Q = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_{wall} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn}z)}{\cosh(\lambda_{zn}(\frac{H}{2}))} \right) \cos(\lambda_{yn}y) dydz, \quad (2.72)$$

Obteniendo finalmente

$$Q = v_{wall} hH + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( H - \frac{2 \tanh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}{\lambda_{zn}} \right), \quad (2.73)$$

donde

$$\lambda_z^2 = \frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \lambda_y^2,$$



$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N},$$

y

$$A_n = \frac{8}{\lambda_{zn}^2 \pi(2n-1)\lambda_{yn}} \left( \frac{-\partial P_x}{\mu \partial x} - v_{wall} \frac{B^2 \sigma}{\mu} \right) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

## 2.5. Densidad de corriente inducida

A partir del gasto previamente calculado se puede inferir la velocidad media del flujo. El canal tiene una sección transversal de área  $A_t = hH$ , de modo que

$$Q = \int \vec{v} \cdot \hat{n} da = \beta \bar{v}_n A_t, \quad (2.74)$$

donde  $\bar{v}_n = \bar{v} \cos(0)$  es la velocidad normal promedio, y  $\beta$  es un factor de corrección. Cuando el campo externo  $B$  es suficientemente grande el perfil de Hartmann se hace relativamente plano, y el campo de velocidades en el micro-canal se hace relativamente uniforme. Entonces  $\beta \approx 1$  y

$$\bar{v}_n \approx \frac{Q}{A_t}. \quad (2.75)$$

La densidad promedio de corriente inducida es (ver ecuación (2.6))

$$\vec{J} \approx \frac{\sigma Q}{hH} \hat{i} \times \vec{B}. \quad (2.76)$$

Finalmente la corriente que se puede hacer circular por una carga externa está dada por

$$I \approx \bar{J} A_c, \quad (2.77)$$

en la que  $A_c$  representa la sección del conductor eléctrico.

## 2.6. Distribución de la densidad de carga

Al establecerse la densidad de corriente  $\vec{J}$  en el fluido, la carga iónica del electrolito también se distribuye con un perfil específico a lo largo de la sección transversal. La forma de esta distribución se puede calcular a partir de la ecuación (2.6) y del perfil de Hartmann. Por ejemplo, para el caso sin deslizamiento en toda la sección transversal se considera (2.66).

El campo eléctrico es entonces

$$E(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} -BA_n \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn}z)}{\cosh(\lambda_{zn}(\frac{H}{2}))} \right) \cos(\lambda_{yn}y) \hat{j} \quad (2.78)$$

Con

$$\lambda_z^2 = \frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \lambda_y^2$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{\mu\lambda_{zn}^2\pi(2n-1)} \left( \frac{-\partial P_x}{\partial x} \right) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Incorporando la solución de campo eléctrico obtenida (2.78) a la ecuación de Maxwell del campo eléctrico (A.11), se llega a la distribución de densidad de carga .

$$\varrho(y, z) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} B\lambda_y A_n \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn}z)}{\cosh(\lambda_{zn}(\frac{H}{2}))} \right) \sin(\lambda_{yn}y) \quad (2.79)$$

Con

$$\lambda_z^2 = \frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \lambda_y^2$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{\mu\lambda_{zn}^2\pi(2n-1)} \left( \frac{-\partial P_x}{\partial x} \right) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

La distribución satisface el requisito de conservación de la carga. En otras palabras, satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.80)$$

Esto se comprueba fácilmente porque para un proceso estacionario tenemos

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\varrho \vec{v}_x) = \nabla \varrho \cdot \vec{v}_x + \varrho \nabla \cdot \vec{v}_x = 0. \quad (2.81)$$

Como el flujo es incompresible el segundo término es cero; por otra parte el gradiente de la densidad de carga y la velocidad son ortogonales, y el término correspondiente también se hace cero. En consecuencia

$$\nabla \cdot (\rho_e \vec{v}_x) = 0 \quad (2.82)$$

como es debido para satisfacer la conservación de la carga.

## 2.7. Predicciones teóricas del perfil de Hartmann

El modelo numérico se elaboró con base en las ecuaciones obtenidas en el capítulo presente . La serie de imágenes de la figura 2.5 muestra los perfiles de velocidad de Hartmann para diferentes valores del número de Hartmann,  $Ha$ .

El efecto que tiene el número de Hartmann es evidente. Según aumenta el campo magnético externo, aumenta también el  $Ha$  y el perfil de velocidades se hace menos parabólico. Con campos magnéticos intensos se alcanza una situación límite en la que el frenado magnético produce un perfil prácticamente plano. En este caso, como la velocidad es muy similar en todos los puntos, el flujo volumétrico disminuye notablemente. Como resultado, para mantener el flujo solicitado es preciso incrementar la presión del sistema de flujo. No obstante, esto plantea una limitación práctica debido al tamaño del dispositivo.

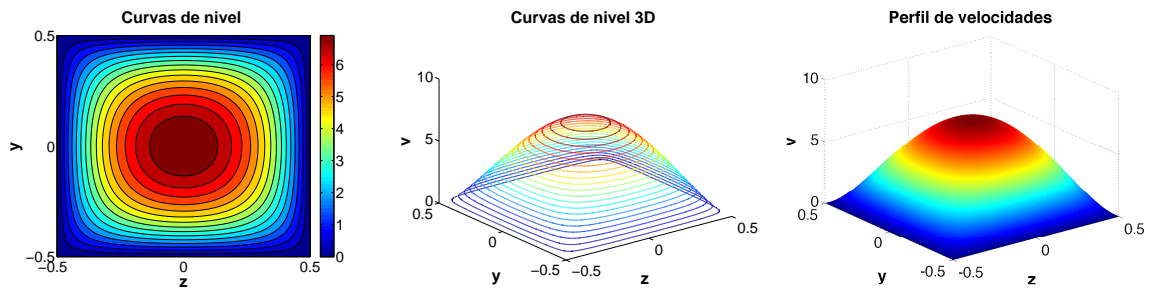


Figura 2.2:  $Ha = 0$ .

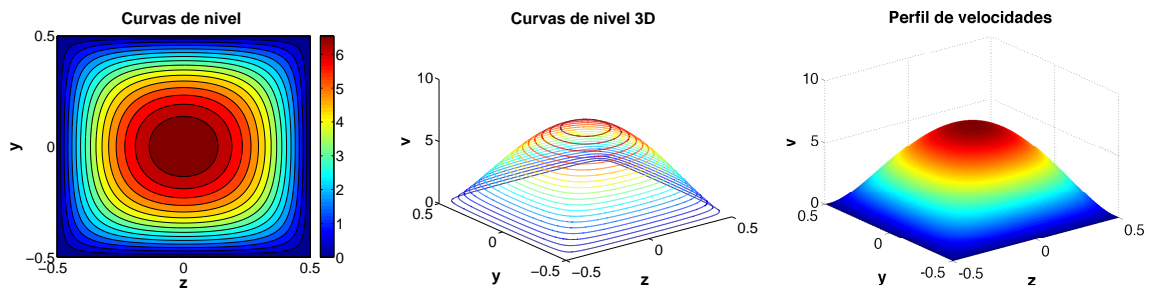


Figura 2.3:  $Ha = 1$ .

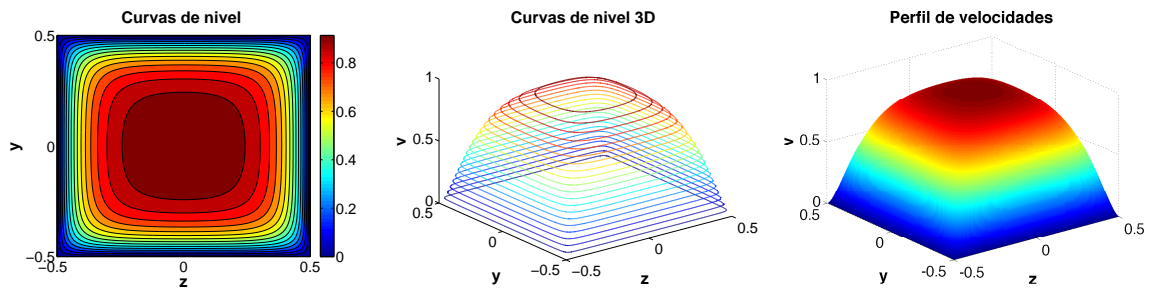


Figura 2.4:  $Ha = 10$ .

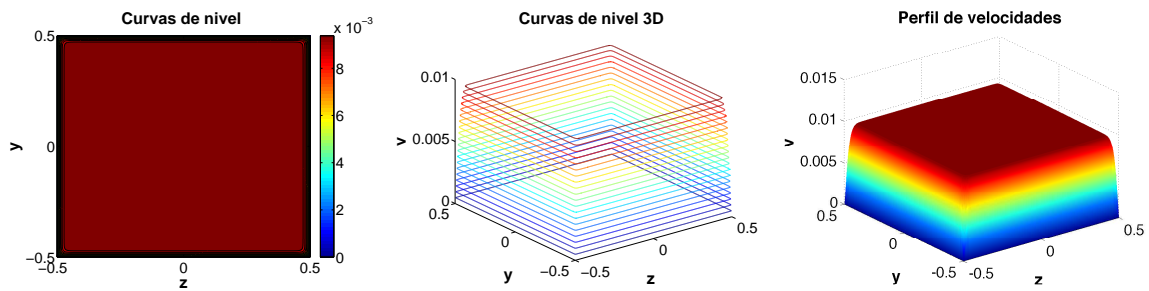


Figura 2.5:  $Ha = 100$ .

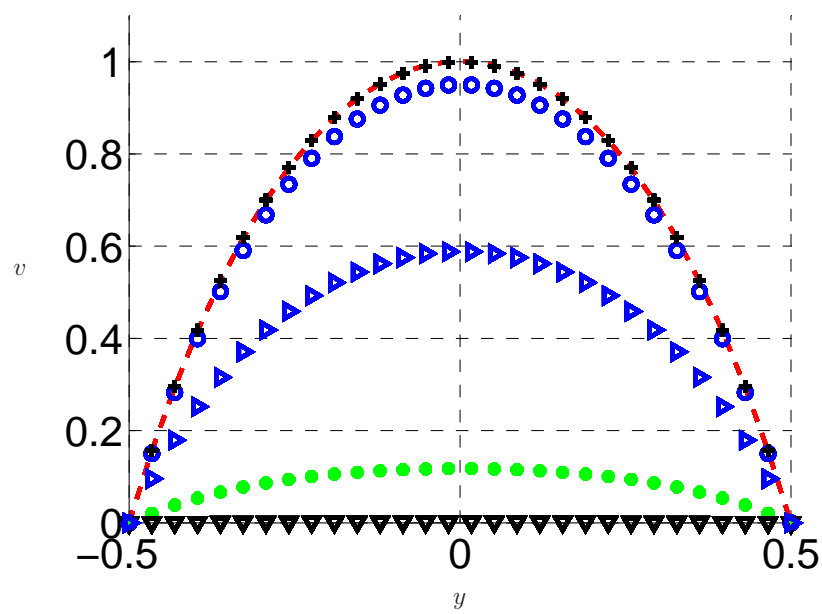


Figura 2.6: Perfiles de velocidad a presión constante y  $Ha$  variable

# Capítulo 3

## Experimentos de Laboratorio

### 3.1. Fluidos de trabajo

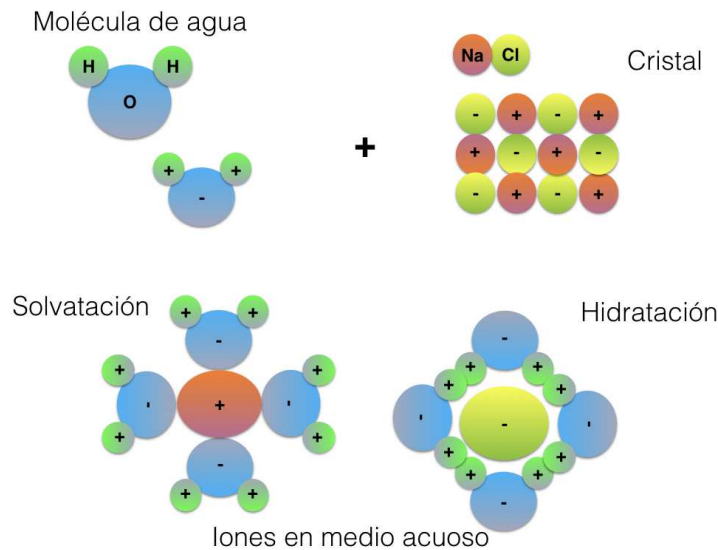
Los dispositivos MHD requieren de fluidos que posean la capacidad de conducir corrientes eléctricas cuando se les aplica un campo magnético externo. En la mayoría de las aplicaciones se utilizan líquidos conductores, de los cuales hay tres tipos fundamentales: a) metales líquidos, b) suspensiones con partículas metálicas y c) soluciones electrolíticas. Es importante reconocer que la corriente inducida depende fuertemente de la conductividad eléctrica del fluido, como se puede ver en la ecuación (2.11). Por tal motivo, en aquellos casos donde se requieren elevadas densidades de corriente (como sucede con los generadores eléctricos de alta eficiencia) el fluido de trabajo es un plasma y como lo indican Brogan et al. (1962). Por otro lado el uso de plasmas en aplicaciones de pequeña escala presenta una serie de problemas técnicos de muy difícil resolución. Evidentemente la construcción de un canal capaz de confinar un plasma sería técnicamente muy difícil y sumamente costoso.

En este caso se optó por realizar los experimentos con soluciones preparadas a base de agua desionizada y reactivos analíticos de NaCl y KCl (en el apéndice A se muestran los certificados correspondientes). Esto obedece a cuatro motivos principales:

1. La medición de las velocidades requiere que el medio sea prácticamente transparente.
2. Los electrolitos son seguros y son compatibles con los materiales de los canales.
3. Sus propiedades físicas se pueden modificar fácilmente.
4. El costo correspondiente es inferior al de otras alternativas de mayor escala.

5. La facilidad para el escalamiento debido a que los reactivos son accesibles.
6. Son sustancias simples con propiedades de transporte fácilmente medibles.

Fueron elegidos como fluidos de trabajo disoluciones de Cloruro de Sodio (NaCl) y de Potasio (KCl), debido a que son sustancias simples que cumplen con los requisitos anteriores. Inicialmente estos fluidos fueron sembrados con partículas para efectos de visualización (especialmente con la técnica PIV). Las partículas trazadoras se seleccionaron para tener flotabilidad neutra para disminuir los efectos inerciales. Las partículas de 1 micras de radio tienen un recubrimiento de plata y una densidad relativa de  $\gamma = 1.05$ . A nivel molecular, la estructura iónica de estas disoluciones está caracterizada como se indica en la figura (3.1), y el comportamiento es el que típicamente corresponde a las soluciones salinas.



**Figura 3.1:** Iones en medios acuosos.

Este esquema de organización molecular es importante porque permite discernir cómo se mueven las cargas en una solución de alta conductividad. A diferencia del modelo del mar electrónico de Fermi en un metal, en este caso son los iones en el medio acuoso los que son susceptibles de ser desplazados bajo la acción de campos electromagnéticos externos. Cabe mencionar que estas sales se disuelven en agua por la interacción entre los dipolos de las moléculas de agua que rompen el cristal iónico, disolviéndolo e hidratándolo, hasta que finalmente se liberan los iones sodio  $\text{Na}^{1+}$  y de cloruro  $\text{Cl}^{1-}$ .

### 3.1.1. Procedimiento de síntesis

El procedimiento de síntesis se puede describir mejor enumerando los pasos seguidos:

1. Con ayuda de una espátula cromada y una balanza analítica se miden las masas (en gramos) indicados para el soluto requerido (NaCl o KCl) en función de la molaridad solicitada.
2. Se coloca el soluto dentro de un matraz aforado y se disuelve con agua des-ionizada, hasta alcanzar la marca del aforo (la parte inferior del menisco debe ajustarse a la línea del aforo).
3. Se coloca el tapón del matraz aforado, y se agita vigorosamente hasta que se logra disolver completamente el soluto.
4. Envasar y etiqueta la disolución con la molaridad correspondiente.

### 3.1.2. Molaridad

La molaridad relaciona las cantidades de solvente y disolvente requeridas, así como con la densidad del fluido, de la manera que se describe a continuación.

La molaridad se define como:

$$M = \frac{n}{V} = \frac{m}{Pm} \frac{1}{V} \quad (3.1)$$

En lo que respecta a la densidad se tiene que:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.2)$$

donde las variables involucradas tienen el siguiente significado:

$m$  : Masa

$\rho$  : Densidad

$V$  : Volumen

$n$  : Número de moles

$Pm$  : Masa molar

$M$  : Molaridad



En suma, para conocer la densidad de una solución molar se deben considerar las siguientes relaciones:

$$\rho_{\text{solución}} = \frac{m_{\text{Total}}}{V_{\text{Total}}} \quad (3.3)$$

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}}(V_{\text{Total}} - V_{\text{solutol}}) \quad (3.4)$$

$$V_{\text{solutol}} = \frac{m_{\text{solutol}}}{\rho_{\text{solutol}}} \quad (3.5)$$

$$m_{\text{solutol}} = V_{\text{Total}} M P m_{\text{solutol}} \quad (3.6)$$

$$m_{\text{Total}} = m_{\text{solutol}} + m_{\text{H}_2\text{O}} \quad (3.7)$$

$$3V_{\text{Total}} = V_{\text{solutol}} + V_{\text{H}_2\text{O}} \quad (3.8)$$

Sustituyendo retroactivamente las expresiones en la primera ecuación se obtiene

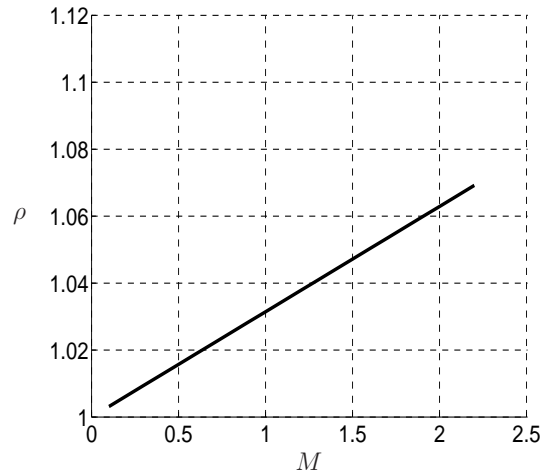
$$\rho_{\text{solución}} = \frac{M \cdot P m_{\text{solutol}} \cdot V_{\text{Total}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}(V_{\text{Total}} - \frac{M \cdot P m_{\text{solutol}} \cdot V_{\text{Total}}}{\rho_{\text{solutol}}})}{V_{\text{Total}}}$$

Posteriormente, se simplifica y se llega a la ecuación

$$\rho_{\text{solución}} = M \cdot P m_{\text{solutol}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}(1 - \frac{M \cdot P m_{\text{solutol}}}{\rho_{\text{solutol}}}) \quad (3.9)$$

### 3.1.3. Densidad

La curva de la. densidad se muestra en la figura (3.2) a continuación



**Figura 3.2:** Propiedades reológicas del fluido. Densidad del fluido  $\rho$  como función de la fracción molar del cloruro de sodio  $M$ .

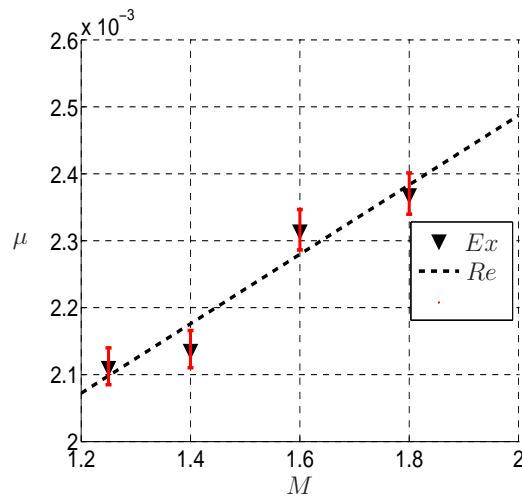
Se puede apreciar claramente la relación lineal que guarda la densidad con la concentración molar de sal en solución. Vale la pena señalar que, con el objeto de mantener la flotabilidad neutra de los trazadores, se fijó la concentración de NaCl en  $1.6M$ .

### 3.1.4. Comportamiento reológico

Una prueba de viscosidad efectuada en un medidor de la marca Brookfield, permitió establecer el carácter newtoniano de los fluidos de trabajo. Es importante conocer este, debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas para fluidos que mantienen una relación

$$\mu = \frac{\tau}{\partial u / \partial y} \quad (3.10)$$

entre el esfuerzo cortante  $\tau$  y la velocidad angular de deformación del fluido  $\dot{\gamma}$ . La figura (3.3) muestra a la viscosidad como función de la fracción molar. Se ve con toda claridad que la relación es esencialmente lineal, tal como se desea para los fluidos de trabajo.



**Figura 3.3:** Propiedades fluido NaCl a diferentes  $M$ , viscosidad  $\mu$  contra Molaridad  $M$ . Datos experimentales con respectivas desviaciones (Ex), regresión lineal de datos experimentales (Re)

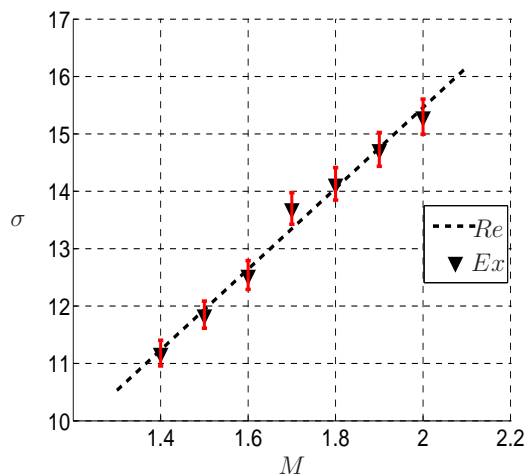
### 3.1.5. Propiedades eléctricas

La conductividad eléctrica constituye la propiedad más importante en el tipo de proceso considerado. Típicamente en las aplicaciones MHD en micro-dispositivos la conductividad eléctrica se encuentra en el intervalo  $10 \leq \sigma \leq 20$  S/m (Nguyen (2012)). Las

conductividades reportadas en la tabla 3.1 para las soluciones desarrolladas, se midieron con un equipo Oaklon de la serie 2700. La incertidumbre asociada a las mediciones es de 1% dentro del rango (50 - 200 mS/cm), según indica el certificado de calibración del fabricante (ver apéndice A).

**Tabla 3.1:** Tabla de molaridad contra conductividad en NaCl

$M$	$\sigma$	$V$	NaCl
mol	S/m	m <sup>3</sup>	kg
1.4	11.18	10	0.8181
1.5	11.85	10	0.8765
1.6	12.54	10	0.9350
1.7	13.70	10	0.9935
1.8	14.13	10	1.0520
1.9	14.73	10	1.1105
2.0	15.30	10	1.1688



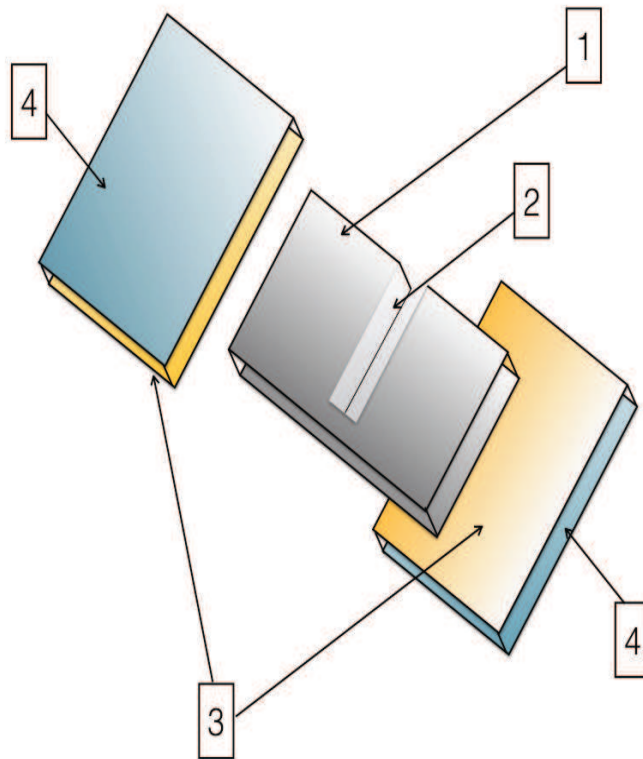
**Figura 3.4:** Propiedades eléctricas del fluido. Conductividad eléctrica  $\sigma$ , como función de la fracción molar  $M$  de cloruro de sodio. Ex datos experimentales y Re regresión lineal de los datos

La  $\sigma$  de la solución utilizada en los experimentos fue de 12.54S/m la concerniente a 1.6 M. Esto concuerda con los valores reportados en la mayoría de las investigaciones (por ejemplo, en Kang & Choi (2011)).

## 3.2. Micro-canales

### 3.2.1. Diseño

Como primera opción se han elegido geometrías simples; en este caso se trata de una sección transversal rectangular. Ello facilita el estudio enormemente porque la sección se mantiene constante. Físicamente, la complicación para la etapa de modelado consiste en que la construcción del cual implica que dos de sus paredes sean conductoras y dos no. Además, se tiene la complicación de que las paredes de polímero no satisfacen la condición de no-deslizamiento. Un diagrama de la geometría básica ilustra este concepto (fig. (3.5)).



**Figura 3.5:** 1) PDMS, 2) Micro canal Canal, 3) Paredes conductoras , 4)Paredes no conductoras

Por cuestiones de facilidad en la manufactura en escalas de  $10^{-3}$  m, y dado que 2 de las paredes son conductoras y dos no lo son, fue necesario construir los canales en tres secciones acopladas (3.5). La parte intermedia (1) esta hecha de polidimetilsiloxano

(PDMS). Ésta provee el espesor de dieléctrico que evita movimientos indeseados de cargas. Las otras dos paredes (2) proveen rigidez a la construcción, y están formadas por porta objetos recubiertos con una capa de óxido de Estaño e Indio (ITO). Este material es un buen conductor, por lo que su uso conviene mucho a los objetivos de generación de energía eléctrica y de medición.

### 3.2.2. Procedimiento de polimerización de PDMS

La construcción del canal requiere de un cuidadoso proceso de curación del polímero PDMS. En resumen, los pasos que se deben seguir son los siguientes:

1. Con ayuda de un agitador de vidrio y una balanza analítica, se vierte en un vaso de precipitado la masa (en gramos) requerido para obtener una capa del grosor deseado. Se agregan 2 gramos extra para compensar las mermas posibles a causa del catalizador.
2. Se agita vigorosamente la mezcla con un agitador de vidrio durante un par de minutos.
3. Se introduce la mezcla y el vaso de precipitado en una campana de vacío, y se aumenta la presión vacuométrica.
4. Se corta la presión vacuométrica en cuanto todas las burbujas de aire en la mezcla desaparezcan, y se reestablezca la presión en la campana a su valor atmosférico.
5. Se retira el vaso de precipitado con la mezcla, y se vierte en una caja de petri colocada sobre la balanza analítica previamente tarada. Se deposita la cantidad deseada según el grosor que se requiera.
6. Se coloca la caja de petri en un horno a 50°C durante unas 6 horas, procurando que la superficie en donde repose la caja sea perfectamente plana y sin inclinaciones.

Una vez que se obtiene la capa de PDMS con el grosor constante solicitado, se procede a retirar la capa de la caja de petri. Es necesario limpiar la capa cuidadosamente con alcohol isopropílico. Posteriormente se corta en una cortadora laser en la que se han preseleccionado el tamaño del corte, así como la potencia y la velocidad requeridas. Es importante que la temperatura no se eleve porque se daña la capa de PDMS, puesto que se liberan gases tóxicos. El recorte se ajusta al tamaño de los porta objetos.

La construcción misma del canal requiere de los siguientes pasos:

1. Se limpia el canal recortado retirando las partes quemadas, con un punzón muy delgado y una mezcla de alcohol con agua.
2. Al terminar la limpieza se introduce el recorte al horno unos 20 minutos, a  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  con el fin de evaporar cualquier residuo de agua remanente.
3. Se retira con ayuda de cinta adhesiva cualquier posible pelusa del las paredes, y en paralelo se limpian los dos porta objetos de ITO del lado conductor.
4. Se pegan las partes del canal con ayuda de la pistola de efecto corona, irradiando 40 segundos el PDMS y sucesivamente 120 segundos al portaobjetos del lado conductor.
5. Posteriormente pegar las partes procurando no dejar aire entre las superficies. Siempre recordando el uso de las protecciones adecuadas (goggles, mascara de gas y guantes ).
6. Repetir el proceso anterior con el otro lado del PDMS y el porta objetos restante.
7. Para finalizar se coloca el canal en una caja de petri (para evitar que se ensucie) y dejarle una noche en el horno a a unos 50 grados para que se relajen los esfuerzos.

### 3.3. Arreglo experimental

El montaje del canal, de los imanes y de otros elementos del sistema experimental se muestran en la fotografía de la figura (3.6). La bomba de desplazamiento positivo produce un flujo laminar y un control muy exacto de la dosificación.

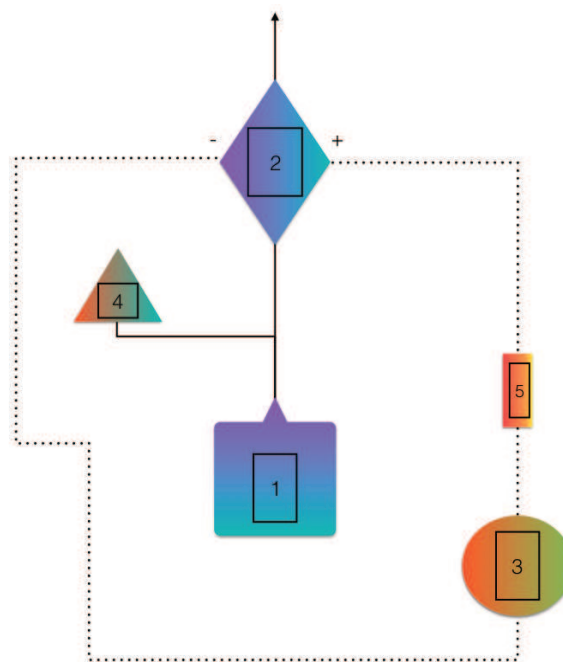


**Figura 3.6:** Montaje experimental sin imanes

La bomba en cuestión funciona por medio de un motor a pasos de alta calidad. Al girar se desplaza el émbolo por medio de un tornillo sin fin que empuja una jeringa. Dependiendo de la velocidad de giro, se tiene un gasto constante particular. Las conexiones eléctricas e hidráulicas se señalan, respectivamente, con líneas punteada y continua en la figura (3.8).



**Figura 3.7:** Bomba de marca



**Figura 3.8:** 1)Bomba, 2) Dispositivo MHD, 3)Electrómetro, 4) Transductor de presión, 5) Resistencia de carga

### 3.3.1. Montaje Eléctrico

El montaje eléctrico adoptado es el de un medidor de corriente y una resistencia de carga en serie al dispositivo con la finalidad de disipar energía. Cabe recalcar que si bien el sistema posee una resistencia interna debida al fluido y no se encuentra concentrada, se considerara despreciable al tener una resistencia de carga lo suficientemente grande ( $R= 1K\Omega$ ) tal y como se muestra en la figura 3.8. En cuanto a la medición de corriente se ha optado por un electrómetro (especificaciones en el anexo ) dado que las corrientes que se pretenden medir serán como máximo del orden de  $1 \times 10^{-6} A$ .

### 3.3.2. Montaje Hidráulico

Con el fin de eliminar fuentes de vibración y perturbaciones espurias en las presiones y en los gastos, se acopló el conjunto de mangueras como se muestra en la figura (3.9). La salida del fluido se realiza a presión atmosférica diseñado exprofeso para tal propósito.



Figura 3.9

Cerca del punto de entrada al canal se conectó un transductor de presión de la marca NXP. La conexión se realizó mediante una “Y” en la manguera que lleva el fluido a la sección de pruebas.



### 3.3.3. Montaje de los imanes

Puesto que el campo magnético se generara por medio de imanes permanentes, la graduación fina del campo en la sección de pruebas requirió del montaje especial mostrado en la figura (3.10). El tornillo permite garantizar que la distancia entre los imanes es medible y repetible.



**Figura 3.10:** imán de dimensiones  $47.63mm \times 22.23mm \times 9.84mm$ ,

Este dispositivo consta de dos placas paralelas, una de las cuales es móvil y la otra es fija (Fig. (3.11)).



**Figura 3.11**

El dispositivo posee la rigidez necesaria para no verse afectado por la fuerza de los imanes. Ambos imanes se encuentran empotrados a placas que los retienen (Fig. (3.12)).

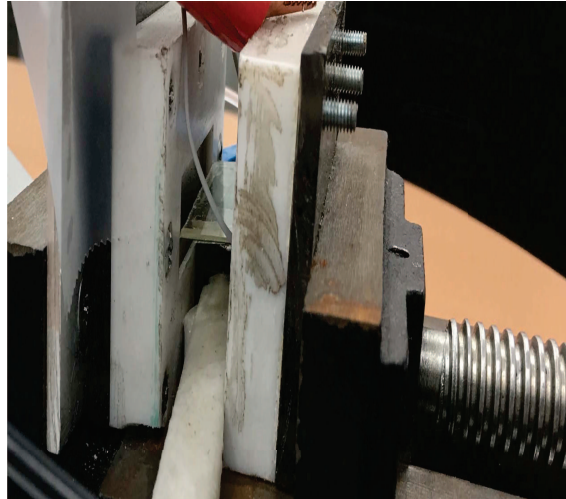


Figura 3.12

### 3.4. Técnicas de medición

La medición de los parámetros experimentales de interés requirió de los siguientes pasos:

1. En primer lugar se llena la tubería que conecta la bomba con sensor de presión. Es muy importante eliminar de los conductos todas las burbujas de aire que quedan atrapadas.
2. Posteriormente se conecta la manguera a la entrada del microcanal.
3. El dispositivo completo se debe colocar en el centro del soporte que aloja los imanes. Esto permite tener el experimento inmerso en un campo magnético bien alineado. Mediante el tornillo se ajustan las placas hasta obtener el campo magnético deseado (en este caso el campo máximo de 0.5T).
4. Se conectan las terminales del electrómetro al ánodo y cátodo del microcanal.
5. Se activa la bomba un momento para llenar el microcanal.
6. Se encienden los instrumentos de adquisición y se ajustan las frecuencias de muestreo a las tasas deseadas (previamente han sido conectados los instrumentos de medición).
7. Se enciende la bomba al gasto solicitado y después de un par de minutos se alcanza el estado estacionario (en cuanto la medida de presión deja de fluctuar). Se apaga la bomba y se enciende nuevamente hasta un nuevo estado estacionario. Se guardan los datos registrados en la memoria del aparato.

8. El último paso se repite tantas veces como sea necesario para tener un conjunto mínimo de datos confiables.
9. Al finalizar los experimentos se sustituye el líquido de trabajo por agua desionizada con el objeto de limpiar el sistema. Para éste fin, se deben bombear aproximadamente  $40 \text{ m}^3/\text{s}) \times 10^{-8}$  durante un minuto.
10. El paso anterior se puede repetir sustituyendo el líquido por aire con la finalidad de secar el interior de los conductos.
11. El sistema se puede desensamblar y almacenar en un ambiente seco.

### 3.5. Series experimentales

Los experimentos considerados se realizaron con gastos e intensidades del campo magnético específicas. Los valores concretos se muestran en la tabla siguiente

**Tabla 3.2:** Matriz experimental de fluido de trabajo NaCl

$M$	$\sigma$	$B$	$Q$
mol	S/m	T	$(\text{m}^3/\text{s}) \times 10^{-8}$
1.6	12.54	0.5	1
1.6	12.54	0.5	1.5
1.6	12.54	0.5	2
1.6	12.54	0.5	3
1.6	12.54	0.5	4

# Capítulo 4

## Análisis de Resultados

### 4.0.1. Mediciones de la corriente inducida

La densidad de corriente inducida en el electrolito es la variable más importante del estudio. Su medición típicamente produce curvas como la que se ilustra en la figura (4.1).

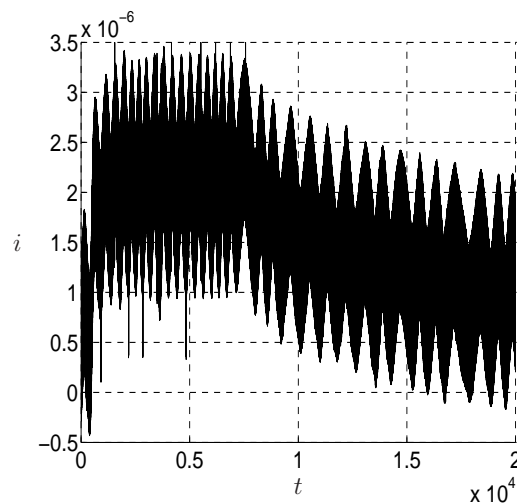


Figura 4.1: Muestra obtenida a  $20 \mu L/min$

Evidentemente la curva muestra todos los detalles del proceso físico, debido a que no se ha implementado ningún tipo de filtrado sobre los datos. Destacan las fluctuaciones que hay montadas en la señal, y que pueden deberse a una contaminación causada por fuentes espurias (por ejemplo, la iluminación y vibraciones de la bomba). Con el objeto

de hacer visibles las características principales de la respuesta dinámica es necesario limpiar la señal. Posprocesando la señal mediante la transformada de Fourier es posible eliminar las fluctuaciones de alta frecuencia<sup>1</sup>; el resultado se muestra en la figura (4.2).

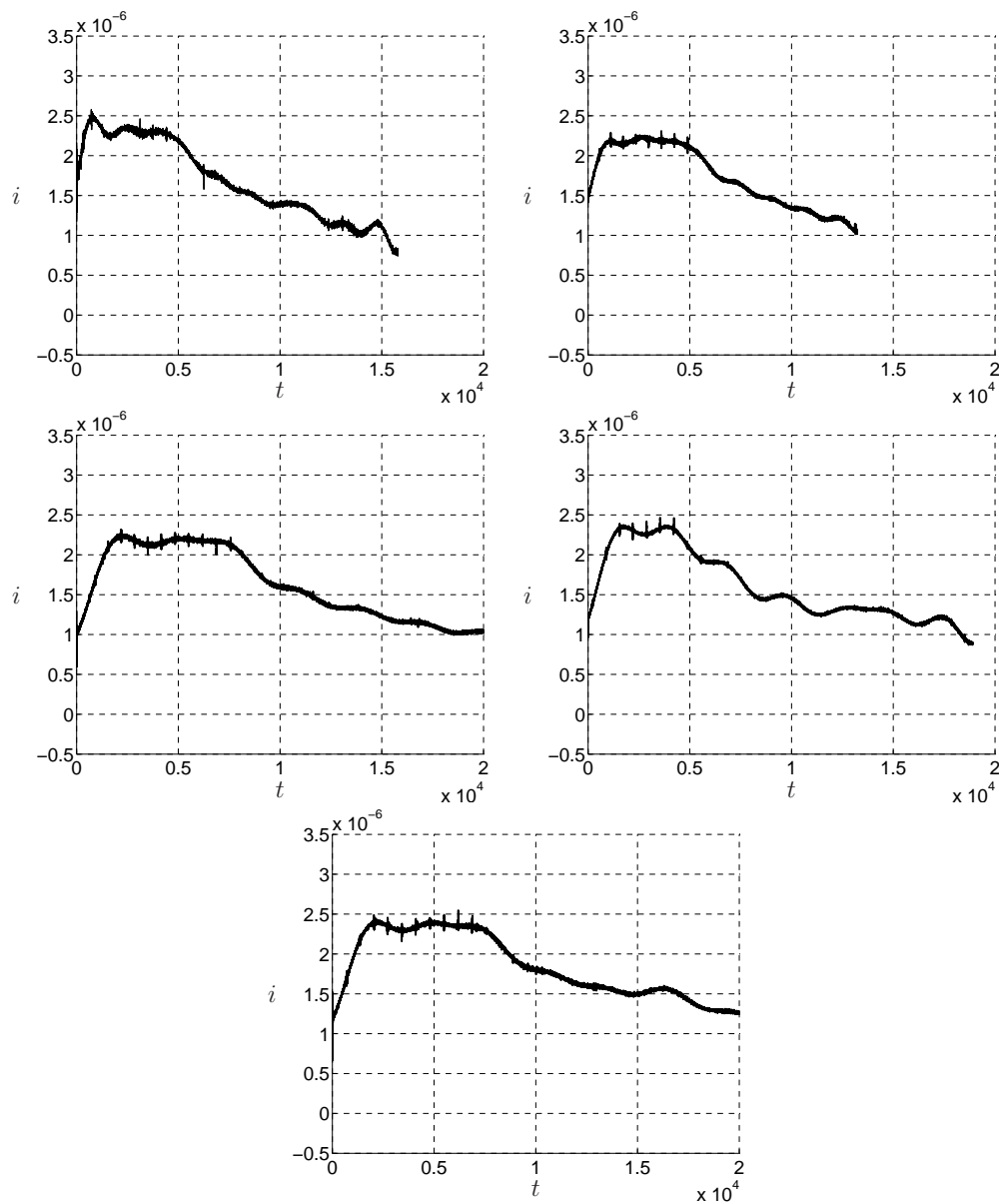


Figura 4.2:  $I$  vs  $t$  obtenido a  $20 \frac{\mu l}{min}$

<sup>1</sup>La aplicación del método se puede consultar en la tesis “Estudio de Flujos Horizontales de Mezclas Bifásicas Gas-Líquido con Fases de Alta Viscosidad”, de Juan Carlos Montiel Cortés, UNAM, 2017.

Cada imagen ilustra un ensayo particular de la serie que corresponde a un experimento dado (en este caso para un gasto de entrada de  $20 \mu L/min$ ). Se realizaron en promedio 5 ensayos con el fin de caracterizar estadísticamente dicho experimento. El grado de similitud que hay entre las curvas de cada ensayo permite anticipar una incertidumbre experimental relativamente pequeña, tal y como se demuestra al final de esta sección.

## 4.1. Mediciones de la presión

Las presiones registradas en el transductor colocado cerca de la entrada del canal se comportan como se puede ver en la figura (4.3). Nuevamente, se trata de cinco ensayos para un solo experimento.

En las curvas se ve con claridad la duración del intervalo de tiempo en el que sistema opera en el régimen estacionario. El estado estacionario coincide con la meseta de la señal. A partir de éstas gráficas también pueden ser determinados los tiempos característicos de relajación del flujo  $\tau$ . Este tiempo representa el efecto combinado de las mangueras, la bomba, el micro-canal, y el puerto de descarga atmosférico.

Es importante hacer notar que los tiempos característicos del electrolito  $\tau_r$  y  $\tau_e$  no son iguales a  $\tau$ . Esto queda claramente establecido si se comparan las gráficas de ambas figuras. De manera muy concreta resalta que el efecto de relajación del electrolito es significativamente más prolongado que el tiempo de reacción. En otras palabras, hay una especie de efecto de histéresis asociado. Una posible explicación en relación con este comportamiento, estaría asociada a los procesos de advección y difusión iónica dentro del electrolito, así como a la formación de capas eléctricas en las paredes recolectoras. Para esclarecer este asunto es necesario realizar un mayor número de experimentos. También es importante considerar la naturaleza iónica y sus procesos de pequeña escala (a nivel molecular). Estas cuestiones quedan fuera de los alcances del presente trabajo, y se plantean como trabajo futuro.

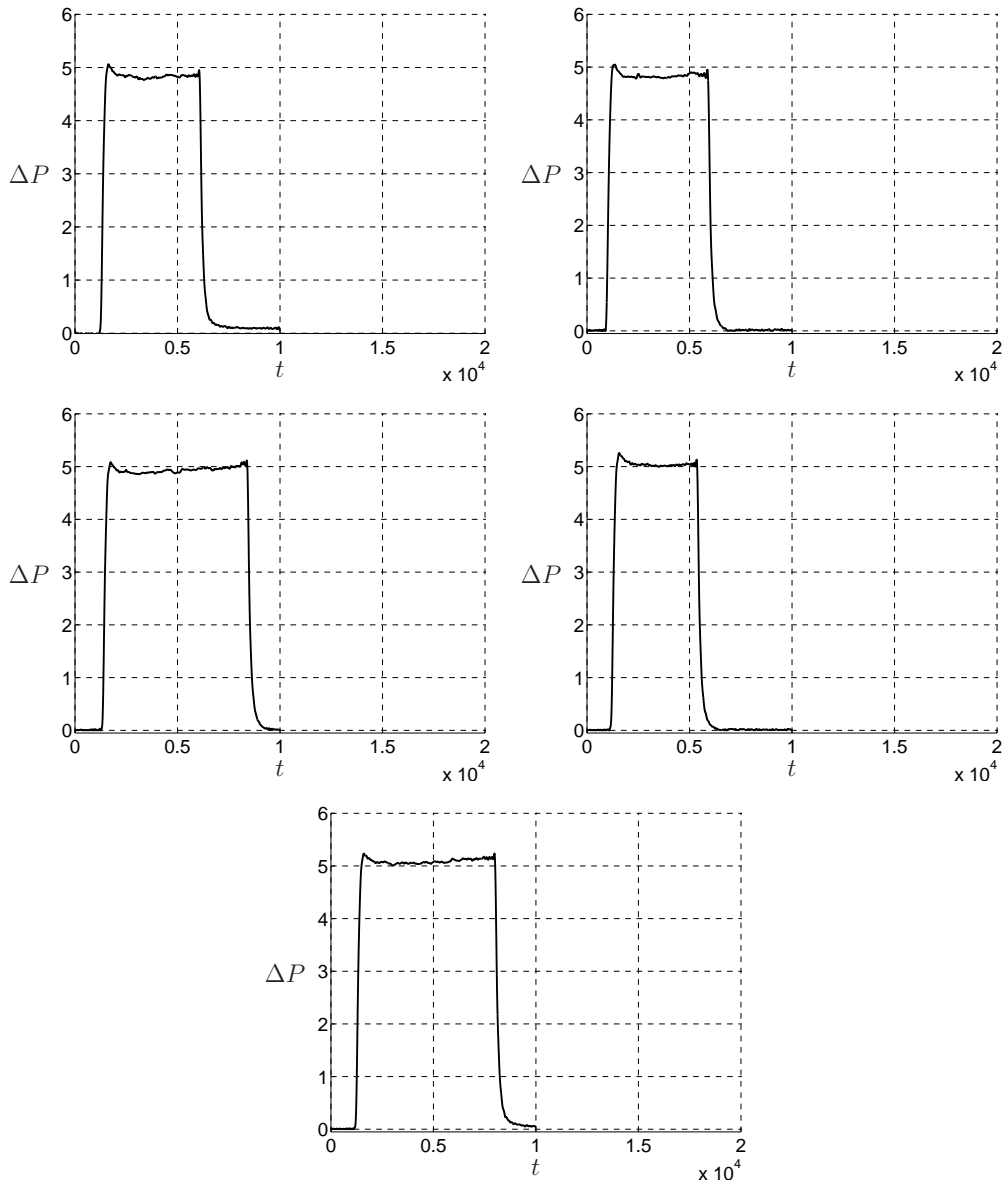


Figura 4.3:  $P$  vs  $t$  obtenido a  $20 \frac{\mu l}{min}$

## 4.2. Resultados de otros casos

Las figuras (4.4) y (4.5) recogen los resultados de todos los experimentos propuestos en la matriz experimental (ver capítulo anterior). Tanto las corrientes inducidas, como las presiones correspondientes, están dispuestas una arriba de la otra para efectos de comparación.

Es posible apreciar en cada par de imágenes, la sincronía que hay en el momento que

marca el inicio de los estados transitorios. Por otra parte, el efecto del incremento en la amplitud de los pulsos de presión repercute directamente en las densidades de corriente como se puede ver: En cuanto más grande es la presión, más grande es  $j$ . Esto indica que

$$j \propto P^n.$$

Como  $\Delta p \propto Q$  se tiene, por consiguiente, que la densidad de corriente también es directamente proporcional al flujo volumétrico del electrolito. En la siguiente sección se aprovecha esta proporcionalidad para establecer un factor de corrección, con base en una regresión, que compense las idealizaciones de modelado.

Cabe recordar que en el presente trabajo el vital interés se encuentra en el análisis estacionario del fenómeno y su transitorio no es el objeto central de estudio.



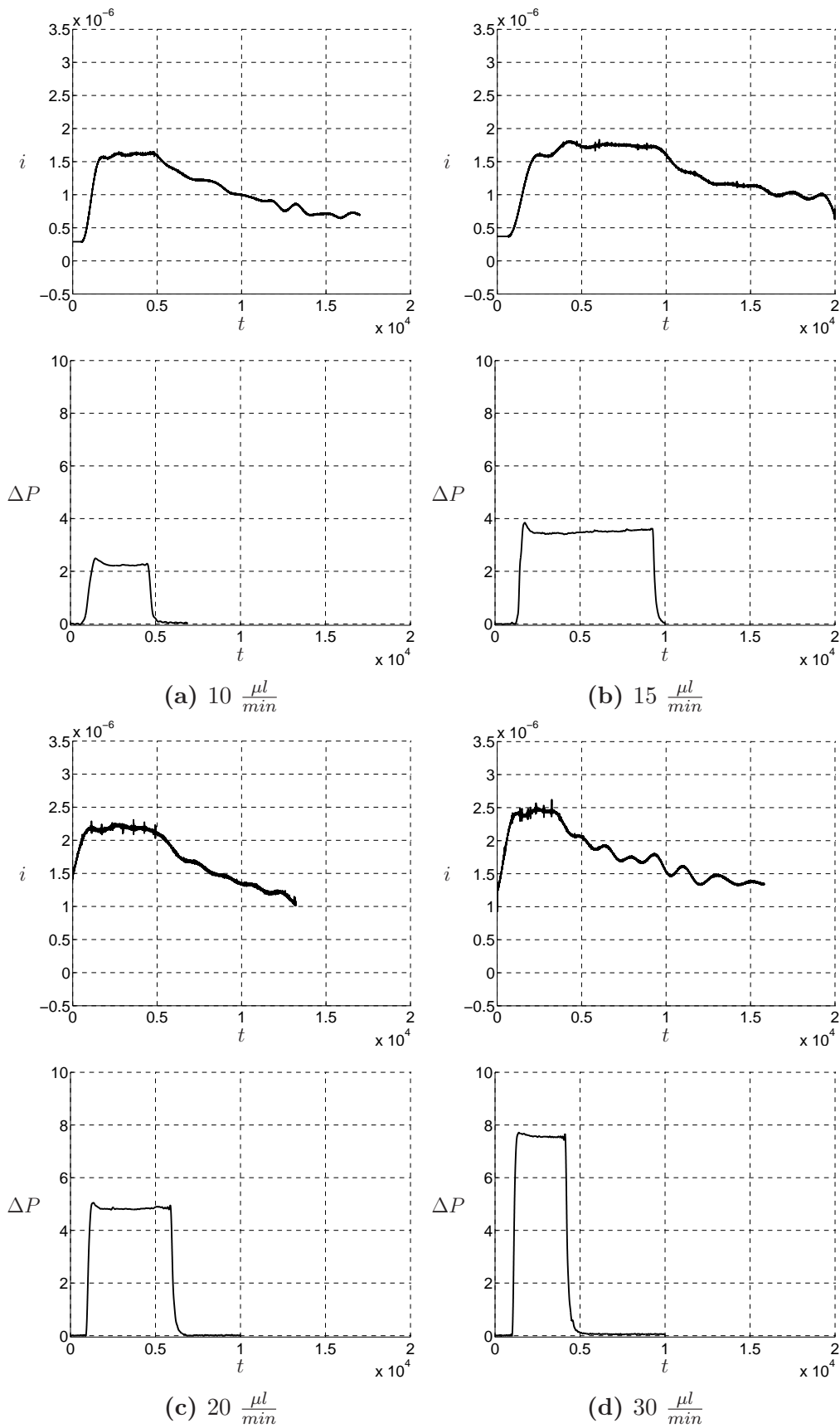


Figura 4.4:  $P$  vs  $t$  y  $I$  vs  $t$

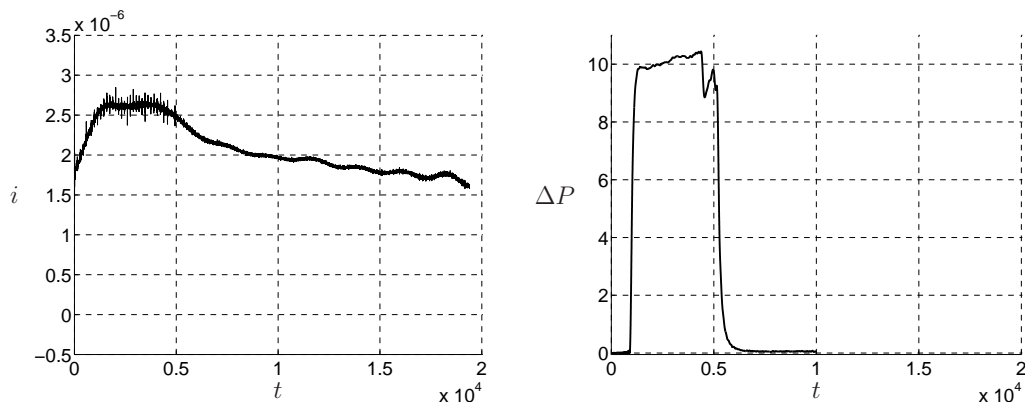


Figura 4.5:  $30 \frac{\mu l}{min}$

### 4.3. Características estacionarias de la corriente

Una vez alcanzado el estado estacionario, la corriente inducida mantiene un nivel fijo que solamente se modifica cuando se conecta un circuito externo por el que circula la carga previamente acumulada. El nivel de corriente estacionaria que se alcanza con cada gasto de entrada se muestra en la figura (4.7aa), mientras que la figura (4.7ab) muestra la misma información para la presión en la entrada del canal.

Los puntos indican el valor promedio de las series experimentales, y las barras indican la desviación estándar correspondiente. Es evidente que las dispersiones son bajas en todos los experimentos. Se concluye en consecuencia que el grado de precisión de la medición es significativo. Como se dijo anteriormente la corriente también es proporcional al flujo volumétrico de entrada. Sin embargo, el crecimiento de la corriente no aparenta ser monótono; de hecho se observa un salto en el valor de la corriente que pasa de  $1.75 \times 10^{-6} \text{ A}$  a  $2.9 \times 10^{-6} \text{ A}$ , cuando el gasto es aproximadamente  $2.0 \mu\text{L/s}$ . Salvo por el salto que se produce en la curva, la relación de proporcionalidad es claramente lineal en los regímenes altos y bajos de gasto. Como se verá en la siguiente sección, la curva debe ser analizada en forma global a fin de tomar en consideración los límites operativos (en particular cuando el campo magnético externo desaparece). La relación en tal caso sigue siendo lineal, aunque con dispersiones más significativas en la respuesta promedio. Puede intentarse una explicación de este efecto en términos de la dinámica local de los iones en el electrolito.

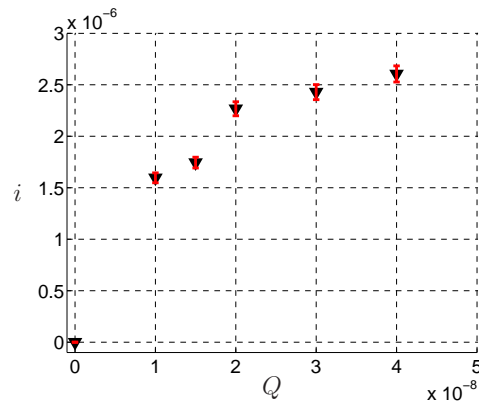
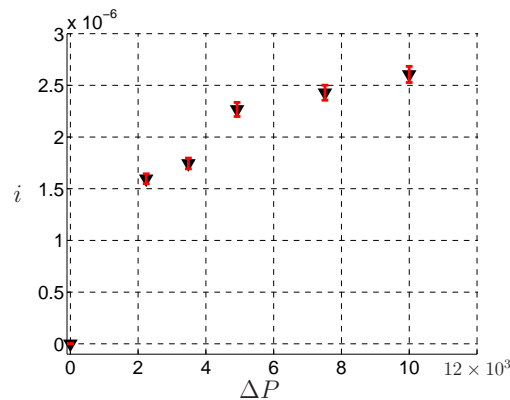


Figura 4.6: Corriente (I) en A contra Gasto (Q) en  $m^3/s$ .



(a) Corriente (I) en A contra Presión (P) en Pa.

## 4.4. Discusión

La gráfica 4.8 sugiere que el sistema de flujo responde al incremento de la presión como una resistencia hidráulica. Cabe recalcar que aunque la presión no está medida estrictamente en la entrada del canal, el flujo volumétrico guarda una relación lineal (como es de esperar) con la presión. Este hecho permite utilizar el gasto de entrada como variable independiente. Se concluye que las condiciones de frontera quedan perfectamente bien definidas en los bordes del canal y que se apegan a las idealizaciones consideradas en el modelo matemático.

Las predicciones teóricas se muestran conjuntamente con las mediciones experimentales en la figura (4.9). La línea punteada representa dichas predicciones como función del gasto (con y sin deslizamiento) y establece un límite superior para la corriente inducida. Resulta muy destacable el buen acuerdo que hay entre los datos experimentales y la

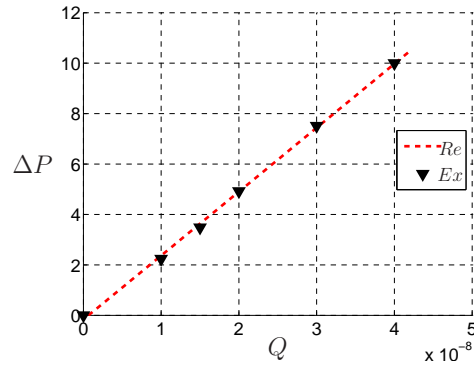


Figura 4.8: *Re* regresión lineal, *Ex* Datos Experimentales

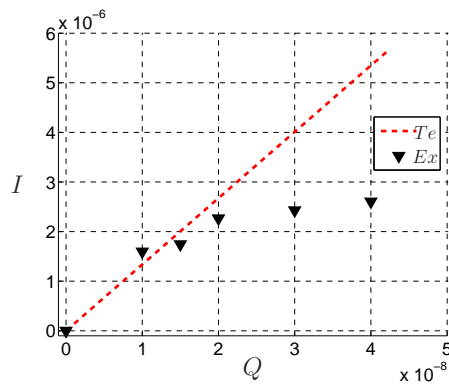


Figura 4.9: (*Te*) Teórico, *Ex* Experimental

predicción teórica. Las crudas estimaciones iniciales (basadas en las escalas del sistema) indicaban que la corriente inducida sería, cuando menos, un orden de magnitud más chica. Esta primera estimación no tomaba en consideración los detalles de la geometría del conducto, ni del campo magnético, ni de los efectos de deslizamiento ocasionada por el PDMS.

Por otro lado, el hecho que la predicción teórica corresponda a valores más altos para la corriente inducida, obedece a que el electrolito ha sido modelado de manera idealizada. Por ejemplo, se ha considerado que toda la carga en movimiento es carga libre. Asimismo, los procesos de difusión y advección iónica y la formación de bicapas, han sido ignorados. Globalmente, la regresión de la figura (4.10) para la relación  $I = kQ^1$  permite que la constante  $k$  sea establecida como factor de corrección para los modelos propuestos. Este factor compensa todos los efectos discutidos anteriormente que han sido omitidos en el modelo.

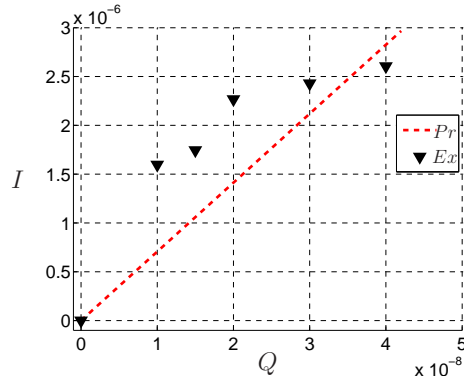


Figura 4.10: ( $Pr$ )Proporcionalidad,  $Ex$  Experimental

La gráfica de la Fig. (4.11) representa la potencia disipada. Ésta se calculó como una potencia disipada en resistores  $W = I^2 * R$ , donde  $R = 1034\Omega$  representa una resistencia de carga.

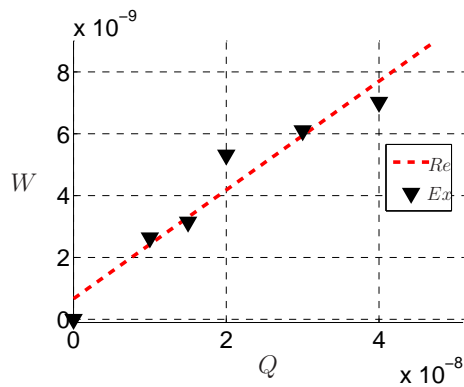


Figura 4.11: ( $Re$ )Regresión,  $Ex$  Experimental

La tendencia que muestran los datos es engañosa. Aparentemente hay dos regímenes de generación de corriente en torno al punto  $Q = 2 \times 10^{-8} \text{m}^3/\text{s}$ , donde los datos parecen tener un salto. El origen de este efecto no-lineal no ha sido precisado aún. No obstante, si el conjunto de datos se lee globalmente se percibe un comportamiento lineal, aunque con mayor dispersión en los datos. Esto podría deberse al movimiento y reacomodo de iones en el electrolito, que alcanza un cierto valor crítico con ese flujo volumétrico. En todo caso es pertinente ampliar el conjunto de experimentos para incluir más puntos muestrales que verdaderamente indiquen el comportamiento en esa región.

Otro aspecto que debe resaltarse es el decremento de la corriente inducida según disminuye el gasto. En el límite, cuando no hay flujo, la corriente inducida debe ser cero.

Nuevamente, es necesario hacer más experimentos a bajos gastos para determinar la verdadera forma de la respuesta para  $Q \rightarrow 0\text{m}^3/\text{s}$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

El presente trabajo resume los resultados teórico-experimentales concernientes a los efectos magneto-hidrodinámicos (o MHD) inducidos en electrolitos que fluyen por micro-canales y fueron analizados en esta investigación.

El proceso considerado consiste en generar una densidad de corriente estacionaria en un fluido conductor que circula por un canal de sección transversal rectangular y que está inmerso en un campo magnético externo de tipo estático.

Primeramente se desarrolló un modelo analítico en el que se consideraron algunos de los procesos físicos fundamentales. Las idealizaciones relativas a la naturaleza del electrolito tienen una repercusión clara en los resultados, aunque las predicciones son bastante cercanas a los valores medidos experimentalmente.

El modelo está representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que tiene la particularidad de ser lineal y no-homogéneo (incluidas las condiciones de frontera). Se basa en el acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Maxwell, en lo que constituye la aproximación MHD. Las condiciones de frontera son las que corresponden a un canal de sección transversal rectangular con paredes que satisfacen la condición de no-deslizamiento, también paredes que no la satisfacen. Las presiones se asumen conocidas y forman parte de la formulación del problema.

En paralelo se llevaron a cabo pruebas de laboratorio en un dispositivo diseñado y construido para tal fin. El montaje experimental permitió observar el fenómeno y cuantificar debidamente las corrientes inducidas mediante un electrómetro de alta resolución.

El diseño y fabricación de los micro-canales requirió trabajar en una escala de  $10^{-3}m$ . El material utilizado fue el polímero PDMS, y su elaboración requirió la utilización de

técnicas de micro-fabricación especializadas.

Asimismo, cabe mencionar que se formuló químicamente el fluido de trabajo (es decir el electrolito). Esto permitió garantizar una reología newtoniana de la sustancia, a la vez que se incrementó su conductividad eléctrica aproximadamente a  $\sigma \sim 10\text{S/m}$ .

También se desarrolló un dispositivo para alinear y graduar el conjunto de dos imanes permanentes de Neodimio con los que se produjo el campo magnético externo. Los imanes fueron caracterizados con un “gaussmetro” prestado por la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El microcanal fue operado mediante bombas de émbolo (desplazamiento positivo) que entregan gastos constantes dentro del intervalo  $1 \times 10^{-14}\text{m}^3/\text{s}$  a  $1 \times 10^{-6}\text{m}^3/\text{s}$ . La bomba permitió generar gastos en forma de escalón<sup>1</sup> de presión en instantes de tiempo concretos. La generación de los escalones de presión (y gasto) permitió establecer que los tiempos de reacción de la densidad de corriente no son simétricos con respecto a la excitación.

La comparación de las predicciones teóricas con los datos experimentales fue favorable. No obstante, el modelo solamente es válido para los estados estacionarios y para las condiciones de frontera descritas arriba.

El resultado más relevante es que se demostró ampliamente la posibilidad de generar corrientes significativas en dispositivos de tamaño muy reducido. Se demuestra también el principio de operación de los generadores de alta eficiencia.

Los resultados indican que, en general, la corriente inducida es directamente proporcional al gasto<sup>2</sup>. La predicción sugiere que dicha relación es lineal (ver ec. 2.74 y 2.77), mientras que los resultados experimentales no permiten concluir esto de manera definitiva para todo el intervalo de gastos (ver figura 4.8). Esto se debe a una carencia de puntos en las regiones de bajos gastos.

A pesar de los resultados positivos, quedan varios asuntos que deben ser resueltos en la continuación de este trabajo.

## 5.1. Contribuciones

Se recogen las siguientes contribuciones relevantes:

---

<sup>1</sup>En el sentido de la función de Heaviside

<sup>2</sup>Entendiendo por “directamente proporcional” que una cantidad aumenta cuando la otra lo hace.



1. Se desarrollaron modelos teóricos apropiados
2. Se desarrollaron técnicas experimentales especiales para este tipo de sistemas
3. Se demostró que se producen corrientes significativas en estos dispositivos
4. Se demostró el principio de operación que permite estudiar su escalamiento
5. Se demostraron los tipos de relaciones subyacentes en los fenómenos observados
6. Se cuantificaron aproximadamente los efectos asociados al deslizamiento ocasionado por los materiales

## 5.2. Recomendaciones y trabajo futuro

En primera instancia resultará absolutamente relevante la búsqueda de las aplicaciones potenciales de los procesos estudiados. Existen múltiples vertientes que son muy interesantes. Sin embargo, inicialmente se pretende buscar aplicaciones médicas y para procesos industriales (específicamente, en el contexto de los hidrocarburos pesados).

Evidentemente hay varias mejoras que implementar, tanto en el modelo, como en el experimento. Se deben cuidar ciertos aspectos que modifican las mediciones obtenidas, tales como:

1. La medición de la presión y la ubicación del puerto de medición
2. El blindaje eléctrico del experimento para evitar la contaminación con armónicos espurios en las mediciones
3. La temperatura a la cual se realiza el experimento
4. Asegurar las condiciones para que se logre un verdadero estado estacionario
5. Se tiene que desgasificar el electrolito
6. Mejorar el dispositivo de soporte de los imanes

También es muy importante implementar y realizar mediciones de las velocidades de deslizamiento. Esto implica que se empleen técnicas de velocimetría avanzada. Aquí se propone la implementación de la micro-velocimetría por imágenes de partículas (o micro-PIV), que permitiría tener una primera estimación de la velocidad finita de deslizamiento en las paredes.

Adicionalmente, en trabajos futuros sería de gran interés realizar las siguientes mejoras al modelo:

1. Considerar los regímenes transitorios
2. Considerar las condiciones de frontera reales, es decir, deslizamiento en dos paredes y no-deslizamiento en las otras dos paredes
3. Considerar variaciones temporales del campo magnético
4. Considerar con mayor detalle la naturaleza advectiva-difusiva de los iones en el electrolito

En relación con los experimentos, se ha visto la necesidad de:

1. Ampliar los intervalos experimentales para el gasto y el campo magnético
2. Incrementar el número de experimentos en puntos intermedios
3. Incluir variaciones temporales del  $B$
4. Evaluar el efecto de la geometría de microcanales (e.g. venturis, cambios de sección, etc.)
5. Incrementar la conductividad del fluido de trabajo incluyendo soluciones de cloruro de potasio (KCl) y mercurio
6. Proponer escalamientos del experimento

# Apéndice A

## Ecuaciones Fundamentales

La magneto-hidrodinámica es la ciencia que estudia la dinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de campos electromagéticos. Este concepto fue introducido en 1942 por el científico escandinavo Hannes Alfvén.

En la siguiente sección se explicaran las bases esenciales para comprender el MHD, de tal manera se explicaran las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de los fluidos, el comportamiento de los campos electromagéticos y el funcionamiento de los conductores.

En la siguiente sección se deducirán la ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes, ecuaciones de Maxwell y Ley de Ohm.

Primeramente se explicará todo el contexto electromagnético.

### A.1. Ecuaciones del campo electromagnético

La densidad de carga se define como

$$\rho = \frac{dq}{dv} \tag{A.1}$$

En la cual  $q$ ,  $v$ ,  $\vec{v}$  son respectivamente la carga, el volumen y la velocidad. Denotando que la propiedad de densidad de carga volumétrica es intensiva. Partiendo de la ley de la conservación de la carga

$$\frac{dq}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint \rho \vec{v} \hat{n} da \tag{A.2}$$

Al introducir la variación temporal al interior de la integral y ocupando el teorema de la divergencia,

$$\int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = 0. \quad (\text{A.3})$$

Debido a que sin importar el volumen control la igualdad se mantiene y por medio del teorema del residuo, reexpresamos en su versión diferencial la Ley conservación de la carga.

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.4})$$

O en forma alterna puesto que a la densidad de carga se le conoce  $\vec{J} = \vec{v}\rho$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Poniendo a prueba las soluciones obtenidas y recordando que partimos del precepto, la velocidad de los flujos y la de las cargas son las mismas. Incorporando el perfil de velocidades (2.66) y la densidad de carga (2.79), obtenemos por las propiedades del operador nabla.

$$\nabla \cdot \vec{v}\rho = \nabla\rho \cdot \vec{v} + \rho\nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.6})$$

Dada la ecuación de la incompresibilidad (A.34) el segundo término se vuelve 0, en el caso del primer término el gradiente sólo tendrá componentes en  $z$  y  $y$ , puesto que la velocidad sólo posee componentes en  $x$  el resultado es 0.

$$\nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.7})$$

Demostrando por consecuencia que la variación temporal es 0 llegando con ello a que el fenómeno modelado se encuentra plenamente en estado estacionario.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{A.8})$$

La ley de Gauss eléctrica: En sus comienzos se estableció que existía una relación de proporcionalidad entre el flujo de un campo eléctrico y la carga eléctrica.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da \propto q \quad (\text{A.9})$$

Transformando la proporcionalidad en igualdad por medio de una constante que llamaron permitividad eléctrica, esta constante depende del medio en el cual se encuentren las cargas.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon}. \quad (\text{A.10})$$

Al incorporar el teorema de la divergencia y considerando que la carga está dispersa en el espacio que la contiene es posible hablar de una densidad de carga puntual dispersa en el volumen de control.

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = \int \frac{\rho}{\epsilon} dV \quad (\text{A.11})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de la ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{carga}}{\epsilon}. \quad (\text{A.12})$$

Fenomenológicamente la ec (A.12) indica que la existencia de cargas eléctricas provoca la existencia de campos eléctricos, la intensidad de los mismos dependerá del medio en el que se encuentren las cargas.

Ley de Gauss Magnética:

Al igual que la ley anterior en esta se establece que el flujo de el campo magnético siempre es 0.

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0 \quad (\text{A.13})$$

Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\int \nabla \cdot \vec{B} dV = 0. \quad (\text{A.14})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de esta ley.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.15})$$

La interpretación física de éste fenómeno es que los monopolos magnéticos no existen y que las líneas de flujo en un campo magnético son siempre cerradas sin importar el volumen de control.

Ley de Faraday

Faraday encontró que debido a la variación temporal del flujo magnético que atraviesa una superficie, producía circulación de un campo eléctrico a través de un conductor que encerraba la superficie.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (\text{A.16})$$

Al incorporar el teorema de Stokes e introduciendo la derivada temporal al interior de la integral.

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.17})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de la ley.

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

El fenómeno físico se interpreta que la existencia de variaciones temporales de  $B$  provoca la generación de  $E$ , cabe recalcar que este fenómeno es el principio fundamental de los transformadores eléctricos de corriente alterna y en electrostática  $E$  es irrotacional.

Ley de Maxwell- Ampere:

En un comienzo Ampere explica que la circulación de un campo magnético en un contorno cerrado es proporcional al flujo de densidad de corriente que se desplaza en el conductor.

Posteriormente Maxwell agrega un término correctivo que es nombrado corriente de desplazamiento y se da cuando hay variaciones temporales del campo eléctrico, agregandolo como el flujo de la variación temporal del campo eléctrico multiplicado por la permitividad eléctrica del medio en el cuál se encuentra el campo eléctrico.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \propto \int \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.19})$$

La proporcionalidad se transforma en igualdad por medio de una una constante que fue nombrada permeabilidad magnética y varia en función del medio en el cual se encuentre inmerso el campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_m \left( \int \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \right) \quad (\text{A.20})$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_m \left( \int \vec{J} \cdot ds + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot ds \right) \quad (\text{A.21})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a su forma diferencial de la ley.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \left( \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.22})$$

El fenómeno físico se puede interpretar, al existir desplazamiento de cargas producto de corrientes eléctricas se generan campos magnéticos normales al flujo de las cargas eléctricas, existiendo una proporcionalidad con respecto a la magnitud del campo dependiendo de la permeabilidad magnética del medio en el cual se encuentren en movimiento las cargas.

Ley de Ohm generalizada

Es una ley muy conocida aunque en su versión macroscópica en la cual se relacionan las diferencias de potencial (voltaje) y las corrientes en conductores conocidos como conductores ohmicos que cumplen esta ley

$$\Delta V \propto I \quad (\text{A.23})$$

La proporcionalidad se transforma en igualdad mediante una constante que se llamó resistencia, aunque para el fin de esta demostración se ocupara su inverso que es la conductancia .

$$G = \frac{1}{R}$$

$$G\Delta V = I \quad (\text{A.24})$$

Siendo esta una expresión muy específica puesto que la conductancia depende de nociones extrínsecas al material de modo que se replantea esta relación de la siguiente manera.

$$G \int \vec{E} \cdot dl = \int \vec{J} \cdot ds \quad (\text{A.25})$$

A su vez la conductancia se puede definir, en un volumen de control infinitesimal.

$$G = \frac{\sigma s}{l} = \sigma \frac{ds}{dl}$$

$$\int \sigma \frac{ds}{dl} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.26})$$

quedando

$$\sigma \vec{E} = \vec{J} \quad (\text{A.27})$$

se sabe que hay una equivalencia entre los campos eléctricos y campos magnéticos con cargas con velocidad, generando campos eléctricos equivalentes .

$$\vec{E}_{equivalente} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{A.28})$$

Quedando la forma más general de la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{A.29})$$

Estas ecuaciones nos hablan de los movimientos de cargas eléctricas son debidos a campos electromagnéticos y la facilidad con la cual se mueven las cargas dependen de la conductividad del medio en el cual se muevan .

## A.2. Ecuaciones del campo hidrodinámico

Partiendo del teorema de transporte de Reynolds.

Que relaciona la variación de una propiedad transportada por el fluido con sus variaciones en el volumen de control y aquello que sale y entra por las superficie del volumen de control

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int \beta \rho dV + \oint \beta \rho \vec{v} \cdot \hat{n} da \quad (\text{A.30})$$

Donde  $\beta = \frac{\partial B}{\partial m}$

Primeramente se tomar como propiedad de transporte la  $m$ .

$\frac{dm}{dm} = 1$  Por definición .

Por la ley de la conservación de la materia (Lomonsov-Lavoisier).

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint \rho \vec{v} \cdot \hat{n} da \quad (\text{A.31})$$



De tal forma que, ocupando el teorema de la divergencia e introduciendo la derivada al interior de la integral obtenemos .

$$\int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = 0 \quad (\text{A.32})$$

Por el teorema del residuo llegamos a la forma diferencial de la conservación de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.33})$$

Puesto que el fenómeno ocurre en un régimen estacionario y el fluido posee una densidad constante se llega a la ecuación de incomprensibilidad de un fluido.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{A.34})$$

Desglosando esta expresión en coordenadas cartesianas.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.35})$$

Puesto que se analiza un flujo en tubería y es unidireccional de acuerdo al sistema de referencia impuesto podemos afirmar que  $v_y = 0 = v_z$  por lo que.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.36})$$

Cabe resaltar que esta ecuación nos indica que  $v_x \neq f(x)$ .

Sin embargo esto no es suficiente información para describir el perfil de velocidades de modo que la siguiente propiedad a transportar ser el momentum lineal  $m\vec{v}$  , Por definición :

$$\frac{dm\vec{v}}{dm} = \frac{\vec{v}dm}{dm} + \frac{m d\vec{v}}{dm} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{dm\vec{v}}{dm} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v} \quad (\text{A.38})$$

Al aplicar la definición de la segunda ley de Newton

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (\text{A.39})$$

Puesto que el canal no posee cambios de altura en el eje z la suma de fuerzas que actúa sobre el sistema es igual a:

$$\sum \vec{F} = F_{mag}^{\vec{}} + \vec{F}_{\mu} + \vec{F}_p \quad (\text{A.40})$$

La Fuerza magnética que se presenta es mejor conocida como la fuerza de Lorentz:

$$F_{mag}^{\vec{}} = \int \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (\text{A.41})$$

En la cual  $J$  la densidad de corriente se define  $\vec{J} = \rho_{carga} \vec{v}_{carga}$ ,  $\vec{B}$  el campo magnético.

$$\int \frac{dv\rho}{dt} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \rho dV = \int \vec{J} \times \vec{B} dV \oint \nabla \vec{v} \cdot \hat{n} ds - \int \nabla P dV \quad (\text{A.42})$$

Volviendo a ocupar el teorema de la divergencia se llega

$$\int \frac{dv\rho}{dt} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \rho dV = \int \vec{J} \times \vec{B} dV + \int \nabla \cdot \nabla \vec{v} dV - \int \nabla P dV \quad (\text{A.43})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial del balance de fuerzas conocida como Navier- Stokes para fluidos newtonianos con fuerzas magnéticas.

$$\frac{dv\rho}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} \rho = \vec{J} \times \vec{B} + \nabla \vec{v} - \nabla P \quad (\text{A.44})$$

# Bibliografía

Alfvén, H. (1942), ‘Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves’, *Nature* **150**(3805), 405–406.

Andò, B., Ascia, A., Baglio, S. & Beninato, A. (2009), ‘The “Jone drop” ferrofluidic pump with analog control’, *Sensors and Actuators A: Physical* **156**(1), 251–256.

Berker, R. (1963), ‘Hand book of fluid dynamics, vol viii/3’.

Brogan, T., Kantrowitz, A., Rosa, R. & Stekly, Z. (1962), ‘Progress in mhd power generation’, *Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics* .

Davidson, P. A. (2016), *Introduction to magnetohydrodynamics*, Vol. 55, Cambridge university press.

Eijkel, J., Dalton, C., Hayden, C., Burt, J. & Manz, A. (2003), ‘A circular ac magnetohydrodynamic micropump for chromatographic applications’, *Sensors and Actuators B: Chemical* **92**(1), 215–221.

International Energy Agency (2016), ‘<https://www.iea.org/publications/freepublications/publications>’.

Jang, J. & Lee, S. S. (2000), ‘Theoretical and experimental study of mhd (magnetohydrodynamic) micropump’, *Sensors and Actuators A: Physical* **80**(1), 84–89.

Kang, H.-J. & Choi, B. (2011), ‘Development of the mhd micropump with mixing function’, *Sensors and Actuators A: Physical* **165**(2), 439–445.

Lei, W., Jiankang, W. & Bo, C. (2009), ‘Analytic solution of liquid flow in rectangular pdms-glass microchannel with wall slip and electro-viscous effects’, *Applied Mathematical Sciences* **3**(44), 2195–2214.

Lekner, J. (2007), ‘Viscous flow through pipes of various cross-sections’, *European Journal of Physics* **28**(3), 521.

- Manyonge, W., Kiema, D. & Iyaya, C. (2012), ‘Steady mhd poiseuille flow between two infinite parallel porous plates in an inclined magnetic field’, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **76**(5), 661–668.
- Nguyen, N.-T. (2012), ‘Micro-magnetofluidics: interactions between magnetism and fluid flow on the microscale’, *Microfluidics and nanofluidics* **12**(1-4), 1–16.
- Ramos, A. (2007), Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic micropumps, *in* ‘Microfluidic technologies for miniaturized analysis systems’, Springer, pp. 59–116.
- Reitz, J. R., Milford, F. J. & Christy, R. W. (2008), *Foundations of electromagnetic theory*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Ryabinin, A. & Khozhainov, A. (1967), ‘Transient-state flow of a conducting liquid in an mhd generator at constant flow rate in the presence of side walls’, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **8**(2), 17–19.
- Ueno, K. (1991), ‘Inertia effect in two-dimensional mhd channel flow under a traveling sine wave magnetic field’, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **3**(12), 3107–3116.
- White, F. M. & Corfield, I. (2006), *Viscous fluid flow*, Vol. 3, McGraw-Hill New York.