



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Biomecánica del Complejo Vestibular:
el Equilibrio Humano en 3D.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

AURORA OTERO GONZÁLEZ

TUTOR:

DR. ENRIQUE SALVADOR BUZO CÓRDOVA



Ciudad Universitaria, CD.MX., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos de la alumna: Otero
González
Aurora
26 12 08 83
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
310130655

Datos del tutor: Dr.
Enrique Salvador
Buzo
Córdova

Datos del sinodal 1: Dr.
Gerardo Jorge
Vázquez
Fonseca

Datos del sinodal 2: Dr.
Arturo
Picones
Medina

Datos del sinodal 3: Dra.
Matilde
Espinosa
Sánchez

Datos del sinodal 4: Fís.
Claude
Thions
Chaudy

Datos del trabajo escrito: Biomecánica del Complejo Vestibular:
el Equilibrio Humano en 3D
82 p
2017

OPCIÓN A

TÚ NO PUEDES VOLAR.



TÚ NO PUEDES VOLAR.



OPCIÓN B

TÚ PUEDES VOLAR.



TÚ PUEDES VOLAR.



Andrés J Colmenares



Derechos reservados al ilustrador colombiano Andrés J. Colmenares, creador de Wawawiwa.

Agradecimientos

Al Universo por regalarme un instante de existencia, por darme las herramientas para conocer y comprenderlo, por brindarme la oportunidad de relacionarme plenamente con otros seres y por permitirme valorar lo bella que es la vida.

A mis padres, Carmen y Constantino, ya que ellos son la razón y el motivo de mi existencia y de mis acciones. A Mamá Carmen por ser, aún en su ausencia física, uno de los pilares más sólidos e importantes de mi vida. A mi tío consentidor Abraham, por todas sus palabras de aliento y razones para siempre salir adelante. A toda mi familia, porque cada conversación y experiencia me han formado como persona.

A mis primeras maestras, a quienes recuerdo con cariño (aún cuando no recuerdo sus nombres completos pero sé fueron fundamentales en los primeros años de mi formación): Verónica, Leticia, Graciela, Gilda, Alma y Claudia.

A nuestra emérita Universidad Nacional Autónoma de México por darme durante ocho años la oportunidad de formarme para servir a mi país.

Al Dr. Enrique Salvador Buzo Córdova por aceptar ser mi guía en la realización de este trabajo, por su tiempo invertido y por el intercambio de experiencias que ampliaron mis horizontes.

A la M. en C. Alicia Zarzosa Pérez por su sencillez y amabilidad, por la disposición de compartir su tiempo y por su apoyo incondicional, que me han fortalecido para concluir esta etapa de mi vida.

Al Dr. Darío Núñez Zúñiga por su apoyo, consejo y motivación para avanzar en mis estudios.

A la Dra. Nora María Matamoros Franco por brindarme las bases filosóficas que me han permitido comprender el desarrollo del conocimiento humano.

A los sinodales que evaluaron este documento y brindaron sus conocimientos para su mejora.

A todos aquellos que aportaron un granito de arena en mi formación como Física, muchas gracias. Especialmente a la M. en C. Ana Irene del Refugio Ramírez Galarza, M. en C. Clotilde García Villa, Dra. Patricia Goldstein Menache, Dra. María de Lourdes Esteva Peralta, Dra. Andrea Luisa Aburto Espina, Fís. Estela Margarita Puente Leos, Dr. Neil Charles Bruce Davidson, Dra. Ana María Beatriz Cetto Kra-

mis, Dra. Mirna Villavicencio Torres, Dra. Gabriela Murguía Romero, Dra. Lucía Medina Gómez, Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez, Fís. Rosa Tatiana Niembro Hernández, Dr. Gerardo Ruiz Chavarría, Dra. Enriqueta Hernández Saldaña, Dr. Jorge Antonio Montemayor Aldrete, Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach, M. en C. Augusto Cabrera Manuel, Fís. René Ortega Alvarado, M. en C. Laura Helena González Trueba, Dr. Harry Alvarez Ospina, Dra. Clara Esquivel Huesca y al M. en C. Sergio Hernández Zapata. De igual manera, a los Fís. Estefania Barreto Reyna y Marco Vladimir Lemus Yáñez, y a Alexis Nathan Rueda, por su valioso apoyo como ayudantes.

Y a mis queridas amigas Wendy P. Melgoza Fonseca, Marissa E. Martínez Domínguez, Magaly Sinesio Montoya, Mariel Sinesio Montoya y Martha Berenice Vázquez Gómez, por haber compartido tantos años de nuestra (corta) vida. A mi gran amigo Jovany Dávila Quinto por su valiente apoyo. A Sheila Keren Palacios Alvarado por estar conmigo desde el inicio de nuestras carreras. Y a Emmanuel de los Santos Vázquez por acompañarme en esta gran aventura que resultó ser la física.

Índice general

Introducción	12
1. Fisiología del oído humano	13
1.1. Anatomía del oído humano	13
1.2. ¿Cómo mantiene el equilibrio el cuerpo humano?	17
1.3. Trastornos del equilibrio	21
1.4. ¿Cómo se detectan los sonidos?	22
2. Mecánica de cuerpo rígido	25
2.1. Ecuaciones de movimiento de un sistema de partículas	25
2.1.1. Ecuación de momento lineal	25
2.1.2. Ecuación de momento angular	26
2.2. Generalización de un sistema mecánico a un cuerpo rígido	28
2.2.1. Cuerpo rígido	28
2.2.2. Centro de masa	29
2.2.3. Momento de inercia	29
2.3. Energía de un cuerpo rígido	31
2.4. Descripción de un giroscopio	32
2.4.1. Características principales	32
2.4.2. Cálculo de la torca de un giroscopio	33
3. La endolinfa como un fluido incompresible	37
3.1. Estudio del comportamiento de la endolinfa como un fluido pseudo-newtoniano	37
3.1.1. Análisis de la endolinfa dentro de los canales semicirculares	38
3.1.2. Efecto del movimiento de la endolinfa sobre la cúpula	41
3.2. Energía de la endolinfa	44
4. El complejo vestibular y la mecánica no inercial	47
4.1. Relación del comportamiento de los canales semicirculares con los giroscopios	48
4.2. Modelo descriptivo de la perturbación de las máculas del utrículo y el sáculo	51
4.3. Análisis de una perturbación sobre las vellosidades celulares del utrículo, sáculo y ámpula	52
4.4. Extensión de los modelos al estudio de tres canales semicirculares acoplados	53

5. Discusión y conclusiones	55
5.1. Características de una perturbación en el complejo vestibular	55
5.2. Interpretación de los modelos físicos	58
5.3. Consecuencias fisiológicas de los modelos analizados	62
5.4. Conclusión	66
A. Ecuación de movimiento de la membrana-cúpula	69
B. Ecuación de movimiento del pistón-cúpula	71
C. Diagnóstico y tratamiento del VPPB y la enfermedad de Ménière	75
Bibliografía	79

Introducción

El cerebro humano tiene la capacidad de interpretar la posición del cuerpo en el espacio a partir de la información recibida a través de los sentidos, principalmente de tres fuentes: 1) la visión, que proporciona la orientación espacial general del cuerpo, 2) el equilibrio, percibido en el complejo vestibular (situado en el oído interno) que monitorea la orientación y aceleración de la cabeza respecto al campo gravitacional provocado por la deformación espacial de la Tierra, y 3) la propiocepción, regulada por el sistema somatosensorial central que determina la posición relativa de los miembros del cuerpo (esqueleto, músculos y órganos) para mantener su balance, tanto en reposo (de pie, sentado o acostado) como al estar en movimiento (al caminar, saltar, girar, etc.).

Este trabajo tiene como objetivo realizar un análisis biomecánico del complejo vestibular al estudiar a este sistema biológico a partir de modelos mecánicos que representen y expliquen el funcionamiento del equilibrio humano. Para ello, se dividirá al sistema en dos partes: los órganos donde se analizan las rotaciones de la cabeza (los canales semicirculares) y los órganos donde se analizan las aceleraciones lineales (el utrículo y el sáculo).

Los canales semicirculares están colocados en planos perpendiculares entre sí y están rellenos de un fluido viscoso llamado endolinfa. Cada canal tiene en uno de sus extremos una zona dilatada denominada ámpula que contiene una masa gelatinosa en forma de campana, la cúpula, en la que se encuentran diversos receptores sensoriales que se encargan de percibir el movimiento provocado por aceleraciones angulares; cuando la cabeza gira, la endolinfa se desplaza y empuja (o jala) a la cúpula haciendo que los receptores sensoriales de ésta se flexionen hacia algún lado.

Así mismo, el utrículo y el sáculo son sacos membranosos que contienen una matriz gelatinosa llamada mácula llena de cristales de calcio denominados otolitos que se mueven de un lado a otro cuando la cabeza está sometida a aceleraciones lineales. Mientras que el utrículo es sensible a las aceleraciones en dirección paralela a la superficie terrestre, el sáculo es sensible a aceleraciones en dirección paralela al campo gravitacional. Cuando la orientación de la cabeza cambia, los otolitos se mueven de un lado a otro flexionando las vellosidades celulares con diferente intensidad.

Como propuesta para abordar el problema del equilibrio humano se consideró representarlo a partir de la teoría del equilibrio dinámico de un giroscopio. Sin embargo, al avanzar en la investigación se encontró que la complejidad del problema da pauta a una ampliación del análisis al considerar que la endolinfa es un fluido viscoso que empuja a la cúpula, o a la matriz que contiene a los otolitos, cuando

se realiza algún movimiento sobre la cabeza; en este caso, la cúpula y la mácula son modeladas como membranas elásticas o pistones. Una vez entendido el funcionamiento del complejo vestibular es posible describirlo a partir de sistemas físicos que representen a los canales semicirculares, la cúpula, la mácula y las vellosidades celulares como masas que tienen un comportamiento de oscilación armónica forzada al efectuar una fuerza externa sobre ellas.

En consecuencia, en el capítulo 1 se presentará toda la información anatómica necesaria para entender la fisiología del complejo vestibular y se describirán algunos de los trastornos del equilibrio más importantes. Posteriormente se desarrollará la teoría correspondiente a un cuerpo rígido sometido a fuerzas perturbadoras, capítulo 2, para luego describir los modelos de aproximación del complejo vestibular en los capítulos 3 (fluidos viscosos, membranas y pistones) y 4 (oscilaciones armónicas forzadas). Finalmente, en el capítulo 5 se discutirán los resultados más importantes de las dos aproximaciones retomadas para entender cómo los humanos mantienen el sentido del equilibrio, incluso en situaciones tan complejas como el bailar o moverse en el espacio exterior, y cómo estos conocimientos han sido aplicados para sistemas de navegación.

Capítulo 1

Fisiología del oído humano

La quinesia (o cinestesia) es el área de la medicina que se encarga de estudiar el movimiento humano y los factores que hacen que se desarrolle en equilibrio. La percepción sensorial necesaria para mantener el equilibrio proviene de todos los puntos del cuerpo que mandan información de manera continua hasta el sistema nervioso central. Sin embargo, los principales receptores de movimiento están localizados en el oído interno y se combinan con la percepción visual, la propiocepción¹ y el sentido de orientación.

Dentro del oído interno, los seres humanos tienen un sistema sensorial e inercial llamado *complejo vestibular* que se encuentra dentro del laberinto óseo del hueso temporal y se encarga de medir el cambio de movimiento del cuerpo y proporcionar la suficiente información para que el sistema nervioso central determine las instrucciones necesarias para mantener el equilibrio. Este complejo vestibular consta de dos partes: 1) el vestíbulo que contiene dos *órganos otolíticos*, el utrículo y el sáculo, que miden las fuerzas gravitacional e inercial dando información acerca de la posición angular (o inclinación) y el movimiento lineal de la cabeza, y 2) tres canales semicirculares orientados prácticamente de manera ortogonal entre sí que detectan la velocidad angular espacial de la cabeza. Además, el ser humano tiene simetría bilateral, por lo que utiliza dos complejos vestibulares colocados en cada lado de la cabeza en plano sagital, lo que le permite mantener el equilibrio en situaciones muy complejas o inestables.

Para entender el proceso que permite mantener el equilibrio humano, es necesario partir de la descripción detallada de la fisiología del oído interno.

1.1. Anatomía del oído humano

El *oído humano* está dividido en tres regiones anatómicas principales: la externa, la media y la interna.

¹La propiocepción regula la dirección y el rango de movimiento de las articulaciones y músculos permitiendo dar respuestas automáticas ante estímulos externos y ayudando directamente al equilibrio y coordinación del cuerpo humano, (Standring, 2015).

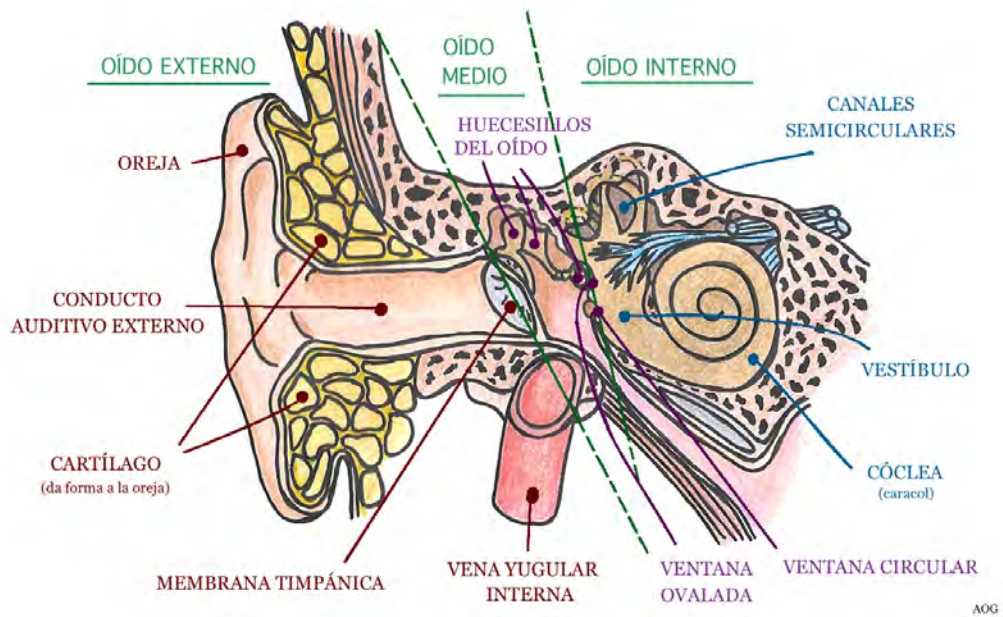


Figura 1.1: Esquemización de las tres regiones del oído humano y las partes que las componen.

- 1) El *oído externo* consta de dos partes: la *oreja* o *pabellón auricular* y el *conducto auditivo externo* que termina en la *membrana timpánica*, o *tímpano*, y ocupa todo el externo distal separándolo del oído medio. En esta región se bloquean o transmiten diferentes sonidos hacia el tímpano.

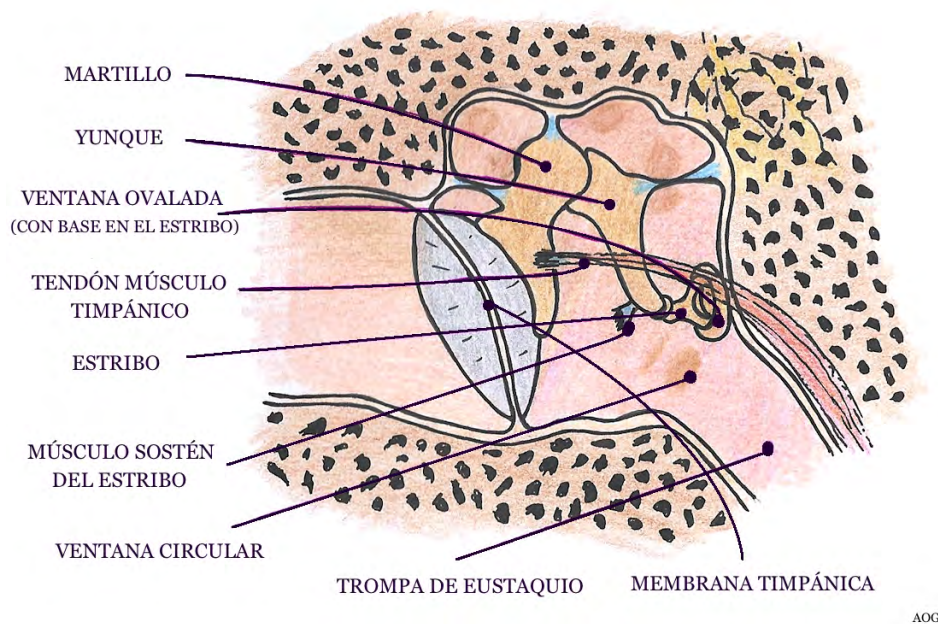
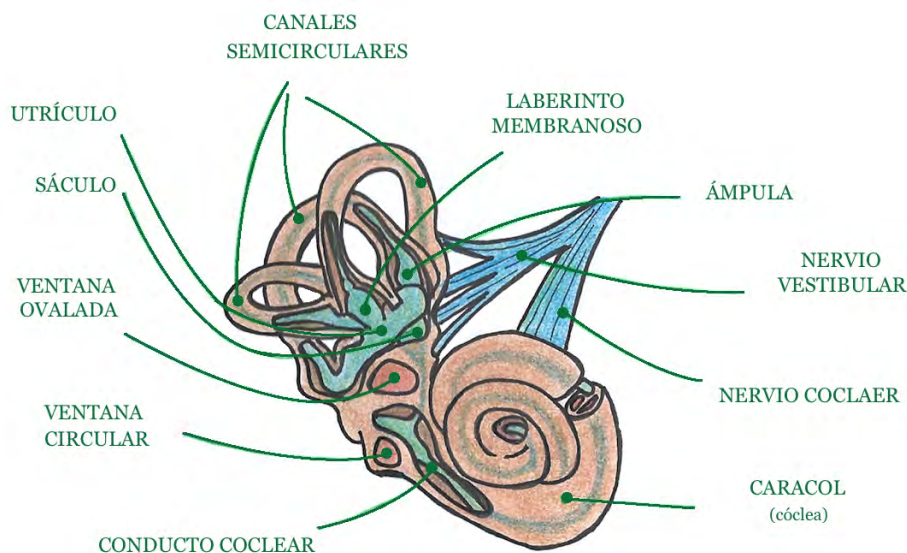


Figura 1.2: Partes del oído medio.

- II) El *oído medio*, también conocido como *caja del tímpano*, contiene a los tres huesecillos del oído –*martillo*, *yunque* y *estribo*– y a la *membrana timpánica*, cuyas caras interna y externa están a la misma presión debido a la existencia de un canal llamado *trompa de Eustaquio* que conecta a la caja timpánica con la

nasofaringe (parte de la faringe que está detrás de la nariz). La presión en el oído se mantiene constante ya que al tragar o al bostezar el aire avanza rápidamente por la trompa empujando a la cara interna de la membrana timpánica que, a su vez, está siendo empujada desde el oído externo por la presión atmosférica. La función de esta región consiste en amplificar los sonidos provenientes del tímpano.



AOG

Figura 1.3: Partes del oído interno.

- III) El *oído interno* consta de una colección de tubos y cámaras llenos de un fluido viscoso llamado *endolinfa* –la cual tiene una alta concentración de iones de potasio y una baja concentración de iones de sodio (Martini et al., 2014)– conocidos en conjunto como *laberinto membranoso*. El oído interno está protegido por el *laberinto óseo*, que tiene la misma forma que el membranoso, y se encuentra fijo al hueso temporal del cráneo. Entre ambas secciones, ósea y membranosa, se encuentra otro fluido viscoso llamado *perilinf*a, que tiene una alta concentración en sodio y baja en potasio (caso contrario con la endolinfa). En las paredes del laberinto membranoso se encuentran distintas terminaciones sensoriales que se encargan de proveer los sentidos de la audición y el equilibrio.

El laberinto membranoso se divide en el *complejo vestibular* y el *caracol* o *cóclea*. El complejo vestibular está constituido por los *canales semicirculares* y el *vestíbulo* (donde se encuentran el *utrículo* y el *sáculo*). Cada uno de ellos contiene *terminaciones sensoriales* que detectan el movimiento mecánico, y cuando son excitados ocasionan la apertura o el cierre de canales iónicos de potasio o sodio (dependiendo de la ubicación de la perturbación en el laberinto membranoso) provocando un flujo de corriente que modifica el *potencial de membrana*² propio de la célula ciliada –misma que se despolariza o hiperpolariza, respectivamente.

²Un potencial de membrana señala la diferencia de potencial eléctrico entre el interior y el exterior de una célula.

La corriente se dispersa a lo largo de la *fibra nerviosa* que conecta a las vellosidades celulares con el nervio vestibulococlear. Si el potencial de membrana tiene la suficiente amplitud entonces inicia potenciales de acción sobre la fibra; así, la perturbación sobre las terminaciones se transforma en información eléctrica, por un proceso de transducción, que se transmite a las neuronas. Posterior a la sinapsis se emite una respuesta que proporciona el sentido del equilibrio (gracias al complejo vestibular) o el de la audición (gracias a la cóclea).

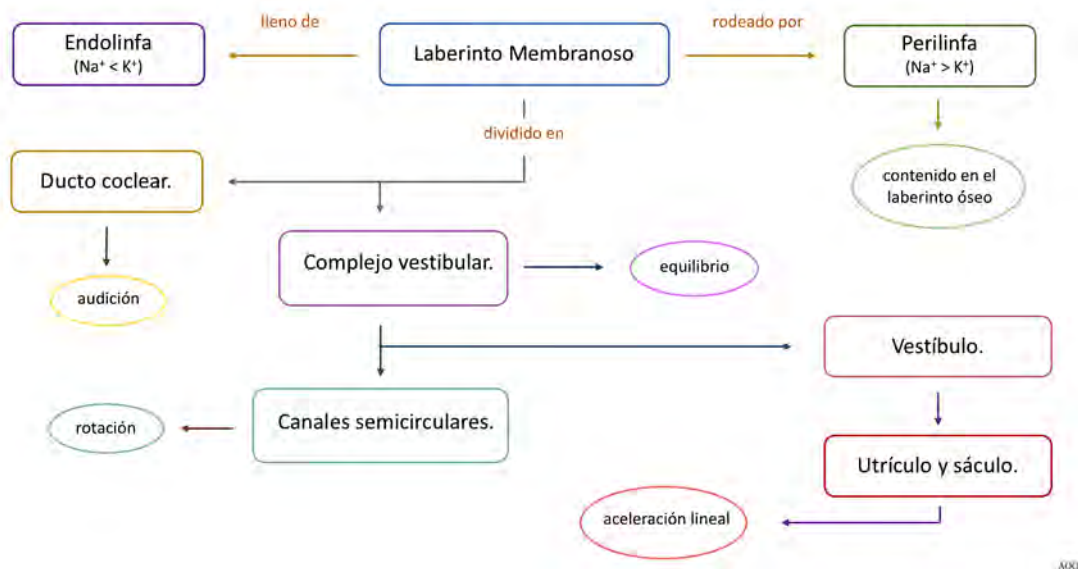


Figura 1.4: Características principales del laberinto membranoso.

Un *potencial de acción* es aquella descarga que modifica la distribución de carga de un axón de neurona en relación al potencial de membrana de sus adyacentes (Johnson, 2003). Toda membrana en equilibrio se mantiene cargada negativamente hasta que es excitada más allá del umbral inicial. Cuando es suficientemente perturbada se despolariza hasta generar un potencial de acción que cambia la polarización del axón (de negativo a positivo) y se crean impulsos eléctricos que se encargan de transmitir información de una neurona a otra hasta llegar al sistema nervioso central para que los analice el cerebelo. Cada potencial de acción tiene una duración de milisegundos y entre mayor sea el estímulo sobre las terminaciones sensoriales, la intensidad de corriente será más grande.

La conexión entre las neuronas y los receptores sensoriales se da a través del octavo nervio cerebral, el *nervio vestibulococlear*, mismo que está compuesto por neuronas bipolares³ y se divide en dos grandes partes: el nervio coclear y el nervio vestibular (Tortora and Reynolds, 2002). El primero parte del inicio de la cóclea, y procesa la información dada por los órganos sensoriales de dicho órgano, mientras que el segundo sale de las paredes del vestíbulo.

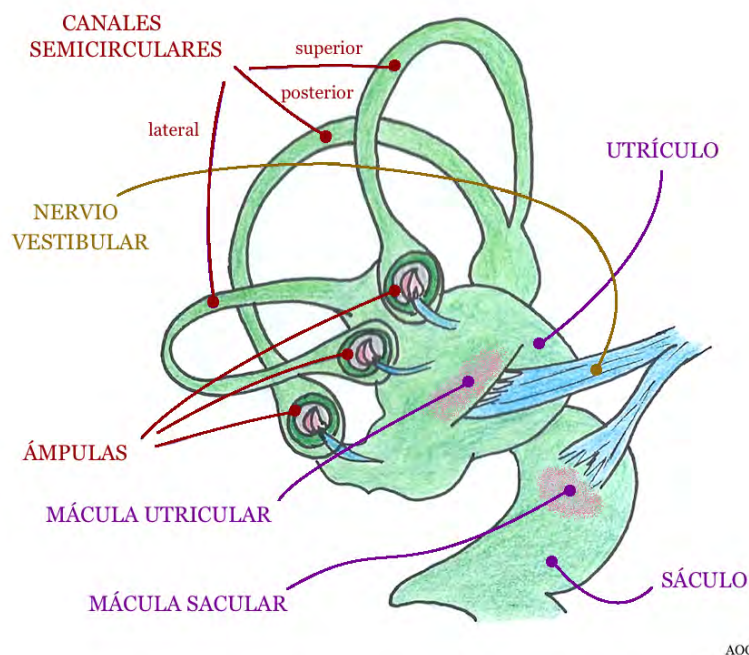
³Las neuronas bipolares son características para el análisis de los sentidos ya que tienen dos ramificaciones salientes de su soma, un axón y una dendrita, (Standring, 2015).

Así, las dos funciones principales que realiza el oído humano son: mantener el equilibrio de todo el cuerpo y detectar los sonidos externos, mismas que a continuación se describen, haciendo énfasis en que este trabajo se enfocará en el análisis de la primera.

1.2. ¿Cómo mantiene el equilibrio el cuerpo humano?

El sentido de equilibrio se desarrolla gracias a la combinación de las funciones de los canales semicirculares y los sacos membranosos llamados sáculo y utrículo. Cada uno de ellos tiene *vellosidades celulares* o *estereocilios* adheridos a sus paredes que funcionan como receptores sensoriales del *movimiento rotacional*, de la *gravedad* y de la *aceleración lineal*, respectivamente.

El complejo vestibular humano se encarga de detectar la posición y el movimiento de la cabeza en el espacio a partir de la información dada en seis grados de libertad: tres traslacionales y tres rotacionales.

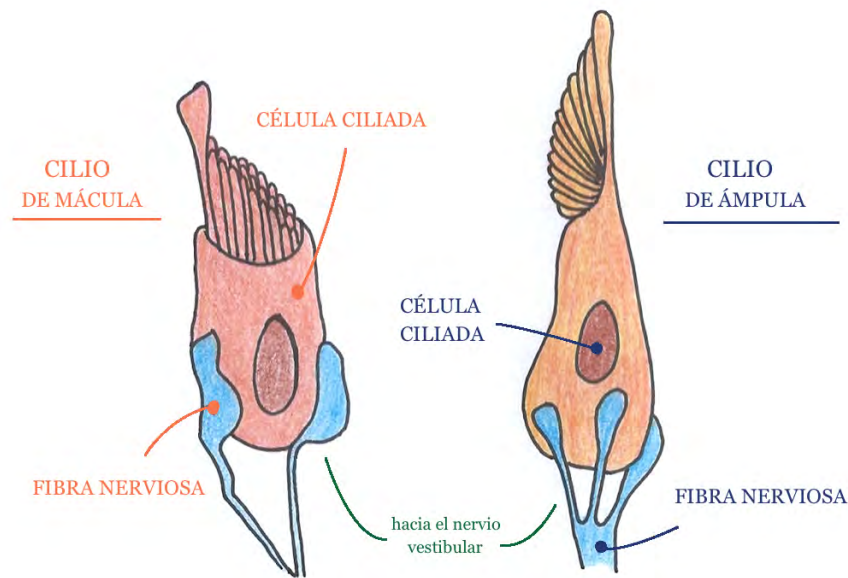


AOG

Figura 1.5: Partes del complejo vestibular.

El *equilibrio estático*, el cambio debido a la gravedad o aceleración lineal, es percibido por las terminaciones sensoriales localizadas en el utrículo y el sáculo e indican si el individuo está acostado, sentado o se mueve en línea recta hacia arriba, abajo o alguno de los lados; mientras que el *equilibrio dinámico*, el cambio rotacional de la cabeza, es analizado por los receptores de los canales semicirculares (Patton and Thibodeau, 2012).

Las vellosidades celulares son células pilosas⁴ que se encuentran rodeadas de *células de soporte* (monitoreadas por fibras sensoriales aferentes⁵) que sujetan a las primeras a las paredes del oído interno. Cada vellosidad celular tiene una larga proyección llamada *quinocilio* (tipo de cilio con una estructura celular ordenada y en forma de apéndice) de entre los $0,8\mu\text{m}$ y $1\mu\text{m}$; aproximadamente hay un total de 15,000 vellosidades en cada oído (Rabbitt et al., 2004). Cuando una fuerza externa pone en movimiento a la endolinfa que rodea a las vellosidades celulares, éstas se flexionan (por acción de la inercia) provocando potenciales de acción que permiten una transmisión química-nerviosa entre el movimiento de las vellosidades y el cerebelo. Cada vellosidad celular da información concerniente a la dirección y fuerza del estímulo mecánico recibido.



AOG

Figura 1.6: Del lado izquierdo se observa una típica vellosidad celular de las máculas (sus múltiples cilios ayudan a percibir de manera precisa el movimiento de los otolitos). Del lado derecho se observa una vellosidad celular característica de las ampulas (sus cilios se extienden a lo largo de la cúpula).

El utrículo y el sáculo se encuentran dentro de dos sacos membranosos (compuestos de epitelio⁶) llamados *máculas* y cada uno de éstos contiene una masa o matriz gelatinosa rellena de una alta densidad de cristales de carbonato de calcio llamados *otolitos*. Éstos se encuentran distribuidos de manera uniforme en las máculas y su peso presiona la superficie donde se encuentran las terminaciones sensoriales por efecto de la gravedad. Cuando hay alguna inclinación, aceleración o desaceleración

⁴Las células pilosas tienen un exceso de iones de carga negativa en su interior y un exceso de iones de carga positiva en su exterior que son liberados cuando los estereocilios se flexionan, (Standring, 2015).

⁵Las fibras sensoriales aferentes son aquellas que transforman la información recibida por un receptor sensorial en impulsos nerviosos, mientras que las fibras sensoriales eferentes son aquellas que permiten la propagación de los impulsos nerviosos a través del sistema nervioso, los músculos y la ganglios, (Standring, 2015).

⁶El epitelio es una forma de tejido compuesto por una o varias capas de células unidas entre sí, (Standring, 2015).

de la cabeza, el peso de los otolitos hace que se muevan de un lado a otro modificando el estado de equilibrio de las vellosidades celulares y disparando potenciales de acción.

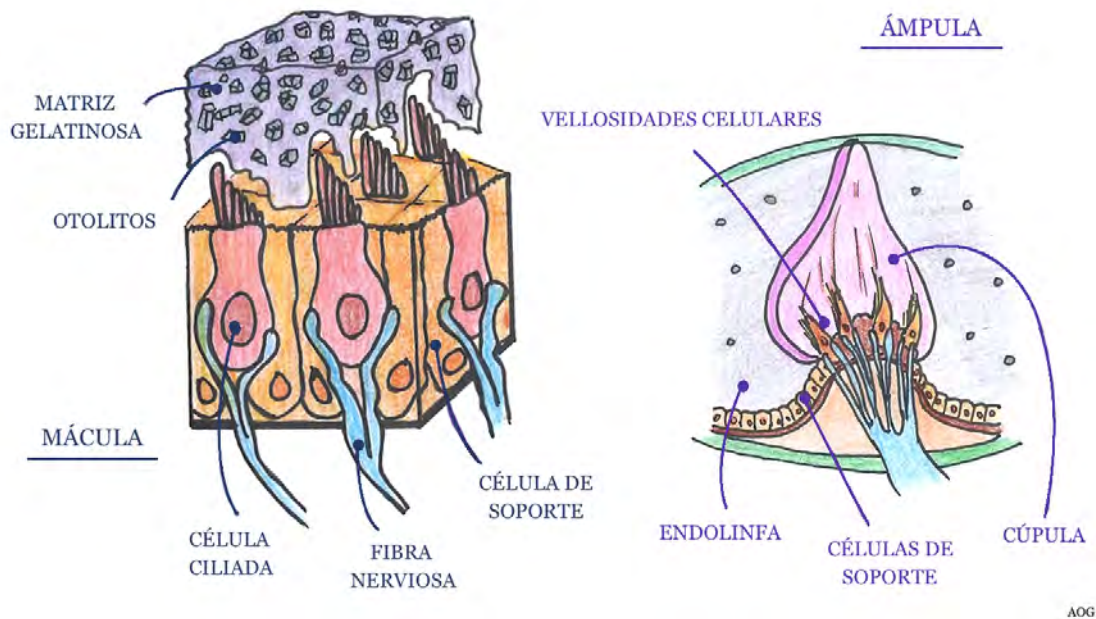


Figura 1.7: Del lado izquierdo se observa un fragmento de la masa otolítica. Del lado derecho se observa que la cúpula tiene en su interior a las vellosidades celulares.

Cuando la cabeza es sometida a una aceleración lineal, el laberinto membranoso se mueve junto con ella por estar contenido en el laberinto óseo fijo al cráneo; sin embargo, las máculas (que contienen a los otolitos) son libres de moverse a lo largo de su lugar de origen. Este movimiento es el que permite a las vellosidades celulares, en conjunto con las fibras nerviosas, desarrollar impulsos nerviosos ante los potencial de membrana provocados por su excitación; es decir, se produce una despolarización de la membrana a favor del movimiento de aceleración, mientras que la inclinación de los cilios en la dirección contraria cierra los canales que permiten el flujo de iones de potasio y ocasiona una hiperpolarización. Las vellosidades celulares⁷ hacen sinapsis con neuronas de primer orden⁸ del nervio vestibular. Por ejemplo, cuando un elevador empieza a descender, una persona se da cuenta inmediatamente de esto porque los otolitos no presionan a las células receptoras con la misma fuerza de su estado normal. Una vez que los otolitos vuelven a ajustarse a su posición original, la persona no es consciente del movimiento hasta que el elevador se detiene. Cuando el sistema empieza a desacelerar, los otolitos presionan fuertemente a las vellosidades celulares provocando la sensación de que la fuerza de gravedad “aumenta”. Un caso similar se presenta cuando se percibe el movimiento lineal en un carro que acelera bruscamente: el propio peso de los otolitos hace que se desplacen (ruedan) sobre los estereocilios provocando su flexión en la dirección contraria al movimiento original por efecto de su propia inercia.

⁷A partir de este momento se considera que las vellosidades celulares son las células ciliadas en unión con las fibras nerviosas, de manera que se hablará directamente de potenciales de acción provocados por los cilios estimulados.

⁸Las neuronas de primer orden son neuronas sensoriales, (Standring, 2015).

Si la cabeza es sometida a una rotación, la respuesta ante tal estímulo se da en los canales semicirculares, figura 1.8. Cada uno de ellos termina en un *ámpula* que contiene una estructura gelatinosa, llamada *cúpula*, donde se encuentran las vellosidades celulares sostenidas en las paredes. Como la densidad de la cúpula es muy cercana al fluido contenido en el complejo, la primera funciona como una división entre la endolinfa del canal semicircular y la endolinfa dentro del ámpula conectada al vestíbulo. Cuando la cabeza gira en el sentido de algún canal semicircular, la endolinfa en cada uno de ellos se mueve y produce un gradiente de presión sobre la cúpula creando un proceso de desorientación de las vellosidades celulares. Cuando el fluido deja de moverse, la naturaleza elástica de la cúpula hace que ésta regrese a su posición de estado normal.

Una rotación en el plano transversal estimula las vellosidades celulares del *canal semicircular lateral*, una rotación en el plano frontal estimula al *canal semicircular superior* y una rotación en el plano sagital provoca un estímulo en los receptores del *canal semicircular posterior*. Los tres canales semicirculares están situados casi en ángulo recto unos con otros –similar situación a la posición del utrículo y el sáculo entre sí mismos, (Martini et al., 2014)–, de manera que esta disposición permite detectar movimientos en todas direcciones espaciales y de todo tipo.

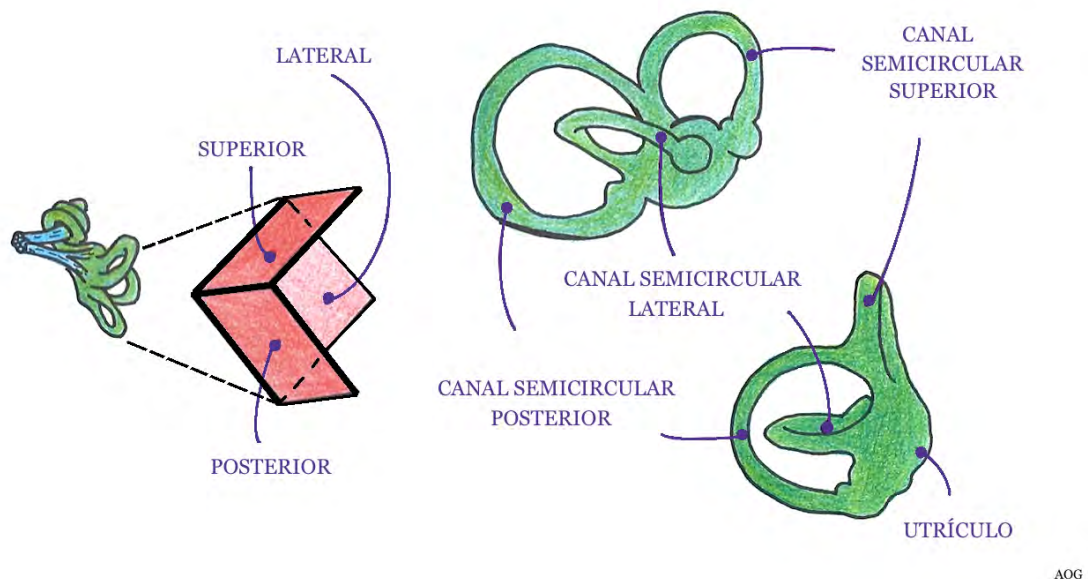


Figura 1.8: Esquemática de la posición de los canales semicirculares respecto a sí mismos.

Las vellosidades celulares del vestíbulo y de los canales semicirculares están monitoreadas por neuronas sensoriales localizadas en la ganglia vestibular adyacente⁹, donde fibras sensoriales dentro de ella se conectan a las terminaciones del nervio vestibulococlear. Estas fibras realizan una sinapsis en las neuronas del núcleo vestibular entre el bulbo raquídeo y el puente troncoencefálico, haciendo que se conozca la posición de la cabeza y del cambio en la fuerza de aceleración (Tortora and Reynolds, 2002) que, junto con otros sistemas sensoriales del cuerpo como la visión o

⁹La ganglia vestibular adyacente es una agrupación de neuronas afrentes en el nervio vestibular localizada en el conducto auditivo interno del hueso temporal, (Standring, 2015).

los sistemas muscular y esquelético, ayudan a controlar su posición en descanso o en movimiento. Esto permite conservar una postura estable y mantener el equilibrio al caminar o al correr.

El ser humano está dotado con una simetría bilateral (Fletcher and Thwaites, 1979), es decir, tiene un par de oídos acoplados donde cada laberinto membranoso integra la información sensorial relacionada con el equilibrio y la posición que llega de cada lado de la cabeza. Esta disposición resulta favorable ya que la información recibida por las terminaciones sensoriales de ambos nervios vestibulococleares ayuda a evaluar la situación experimentada con más precisión. En consecuencia, las neuronas mandan como respuesta instrucciones al cerebelo y a la médula espinal para modificar la posición del cuerpo humano; así, es posible la realización de actividades que requieren gran control del equilibrio como lo son la danza, los viajes espaciales y toda actividad realizada al sumergirse en el agua.

1.3. Trastornos del equilibrio

A la sensación de movimiento dentro de la cabeza que causa una inestabilidad en la percepción del espacio se le conoce como *mareo*. Si dicha inestabilidad se debe a una sensación de rotación del propio cuerpo o del mundo exterior, se denomina *vértigo*. Algunos de los síntomas, dependiendo de la intensidad de la sensación de los movimientos, son: náuseas, vómitos, visión borrosa, confusión, desorientación o incapacidad de mantener el equilibrio ya sea estando de pie, sentado o acostado; si la persona está caminando puede presentarse una repentina sensación de caer.

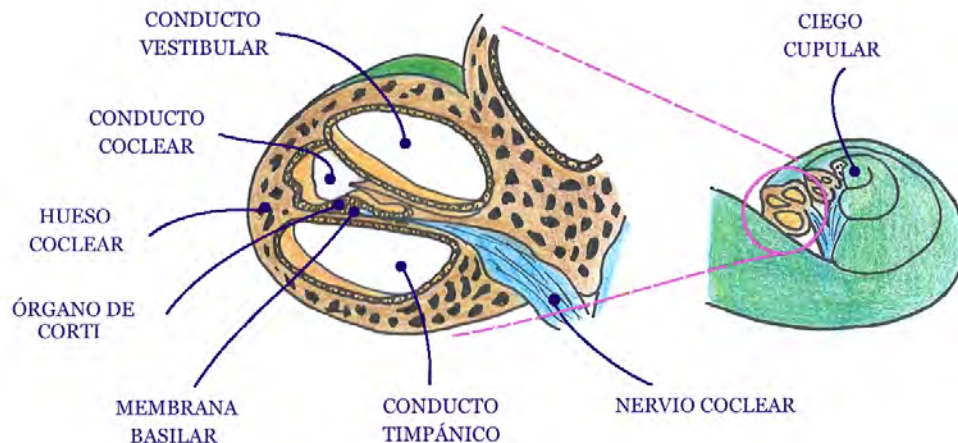
Si bien hay más de una docena de trastornos del equilibrio (NIDCD, 2014), los tres más comunes son:

- 1) El *Vértigo Posicional Paroxístico Benigno* (VPPB), que usualmente se presenta en adultos de la tercera edad, consiste en la descolocación de un grupo de otolitos que terminan flotando de manera libre por los canales semicirculares llenos de líquido endolítico. Como estos canales tienen receptores de movimiento rotacional, los otolitos los estimulan provocando la sensación de vértigo. Para tratar el VPPB existe un procedimiento de recolocación de los otolitos que consiste en realizar una serie de giros e inclinaciones de la cabeza con la finalidad de encaminar los otolitos dispersos en los canales semicirculares al utrículo —el cuál está en la mácula más cercana a los canales. El tratamiento para este trastorno se analizará a detalle en la sección 5.3.
- 2) Cuando un individuo presenta una *infección o inflamación en el odio*, el laberinto membranoso se expande haciendo que las paredes externas de los canales semicirculares y el vestíbulo estén en contacto directo con el laberinto óseo, por lo que un leve movimiento de la cabeza es percibido con mucha sensibilidad. Esto crea una desestabilización del sentido del equilibrio y se presenta la sensación de vértigo. El tratamiento para este trastorno se da a base de antibióticos (para eliminar la infección) y antivertiginosos (para disminuir los mareos).
- 3) La *enfermedad de Ménière* es uno de los trastornos del equilibrio más comunes en el mundo y es causada por el aumento en el volumen de endolinfa, lo que agranda

el laberinto membranoso. Entre los síntomas presentados se encuentran el déficit auditivo, un zumbido constante (tinnitus) y el vértigo giratorio. Si bien la causa de esta enfermedad es desconocida, se ha propuesto como tratamiento el emplear diuréticos que disminuyan y controlen la cantidad de endolinfa en el oído interno y reducir la ingesta de sal para evitar la fácil excitación de una membrana ante perturbaciones muy pequeñas.

1.4. ¿Cómo se detectan los sonidos?

El sentido de la audición se desarrolla de la manera siguiente: el oído externo está compuesto por una *aleta carnosa* (u oreja) que da paso a un pabellón que bloquea o facilita el camino de diferentes sonidos a través del canal auditivo externo, mismo que termina en el *tímpano* –el cuál es un órgano sensorial muy delicado que transmite los sonidos al vibrar y permite la propagación de las ondas mecánicas con una mayor amplitud. El tímpano manda los sonidos hacia los tres huesecillos del oído interno, donde éstos actúan como amplificadores de las vibraciones de las ondas sonoras en forma de movimiento oscilatorio, de adelante hacia atrás, hasta llegar a la cóclea por medio de dos ventadas, una ovalada (o conducto vestibular) y otra circular (o conducto timpánico), (Frick et al., 1981).



AOG

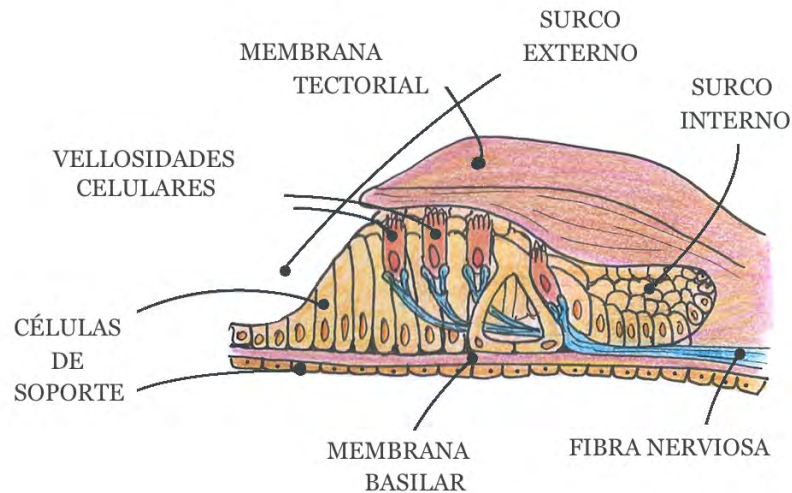
Figura 1.9: Corte transversal de la cóclea.

La *cóclea* es un conducto en forma de tubo que empieza a partir del sáculo y se enrolla dos vueltas y media alrededor de un punto central llamado *ciego cupular* (Frick et al., 1981), en su interior se encuentra una *membrana basilar* que varía en masa, volumen y rigidez a lo largo del conducto haciendo que éste sea más amplio en su inicio –lo que provoca una resonancia alta de frecuencia que permite identificar tonos agudos– y poco a poco se va adelgazando hasta llegar al *ciego cupular* –donde resonancias bajas equivalen a tonos graves. Las ventanas circular y ovalada dan paso a conductos llenos de perilinfá que transmiten las vibraciones mecánicas ocasionadas por los sonidos. Contienen terminaciones sensoriales principales, células de soporte y entre ambas ventanas, y dentro del conducto coclear relleno de endolinfa, se encuentra una *membrana tectorial* (o *membrana de Reissner*) que las separa

y contiene al órgano de Corti.

El *órgano de Corti* está formado por una membrana laminar que forma dos surcos espirales, uno externo hacia el conducto coclear y uno interno, está relleno de endolinfa y rodeado de perilinfia, y contiene terminaciones sensoriales y células de soporte. Si bien los receptores de la membrana basilar analizan la frecuencia, intensidad y amplitud del sonido, las vellosidades celulares capaces de decodificar esta información se encuentran en el órgano de Corti, mismo que está conectado directamente al nervio coclear.

Cuando una onda sonora se transmite a la cóclea se propaga por los conductos vestibular y timpánico, mismos que empujan al órgano de Corti sobre la membrana tectorial y la endolinfa contenida en el conducto coclear excita a las vellosidades celulares al cambiar su posición –lo que se interpreta como una señal eléctrica que produce el potencial de acción necesario para enviar la información al cerebelo (Palmer and Pinder, 1984).



AOG

Figura 1.10: El órgano de Corti está constituido por vellosidades celulares sujetas al conducto coclear a través de la membrana basilar que son excitadas por las vibraciones sobre la endolinfa que las rodea.

Para abordar el problema principal del presente trabajo, a continuación se hará una recapitulación de los conceptos teóricos que permitirán establecer las bases físicas para explicar el equilibrio humano.

Capítulo 2

Mecánica de cuerpo rígido

2.1. Ecuaciones de movimiento de un sistema de partículas

2.1.1. Ecuación de momento lineal

La *Primera Ley de Newton* (Sommerfeld, 1964) señala que todos los cuerpos presentan una resistencia a cualquier cambio de movimiento; es decir, tienen la tendencia de mantenerse en un estado de reposo o en un movimiento rectilíneo uniforme hasta que alguna fuerza externa modifique su estado inicial. Esta resistencia se define como una *fuerza inercial* \mathbf{F}' y cumple con la *Segunda Ley de Newton* de la forma

$$\mathbf{F}' \equiv -\dot{\mathbf{p}} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{p} es la *cantidad de movimiento* o *momento lineal* de una partícula o masa puntual, tal que $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Esto significa que el cambio de movimiento es proporcional y en sentido contrario a una *fuerza externa* \mathbf{F} actuando sobre la masa puntual. Si el sistema está en equilibrio vectorial entonces se cumple

$$\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0 \quad (2.2)$$

Así, no hay cambio del momento lineal con respecto al tiempo hasta que la fuerza externa supera a la fuerza inercial propia de la masa puntual analizada.

Considerando un sistema mecánico arbitrario que está constituido por un conjunto i de masas puntuales, entonces hay una fuerza de reacción \mathbf{R}_{ki} consecuente de la interacción de todas las fuerzas sobre cada masa puntual analizada y todas aquellas masas k que interactúan con las primeras, es decir

$$\mathbf{F}'_i + \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{R}_{ki} = 0 \quad (2.3)$$

Además, si el sistema está trasladándose en el espacio y actúan fuerzas externas \mathbf{F}_i e internas \mathbf{F}_{ki} –que señalan la interacción entre cada masa del sistema– sobre él, entonces el trabajo realizado por todas las fuerzas que afectan al sistema a lo largo de un desplazamiento constante $\delta\mathbf{s}_i$ es

$$\sum_i \left(\mathbf{F}'_i + \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{R}_{ki} \right) \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0 \quad (2.4)$$

Suponiendo que las fuerzas de interacción interna entre las masas no contribuyen a la evolución del sistema, como se verá en la siguiente sección, entonces por la ecuación (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{s}_i &= \left(\sum_i \mathbf{F}_i - \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{s}_i = 0 \\ \Rightarrow \sum_i \mathbf{F}_i &= \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es decir, la razón de cambio en el tiempo del momento total del sistema es igual a la fuerza total externa actuando sobre éste.

2.1.2. Ecuación de momento angular

Suponiendo que el sistema mecánico se encuentra en una rotación constante alrededor de un eje Z , formando un ángulo θ_i con el mismo y tomando una masa puntual m_i que se encuentra a una distancia \mathbf{r}_i del origen del vector $\delta\phi$ en dirección del eje de rotación, entonces el cambio de la posición de dicho punto con respecto al eje (Sommerfeld, 1964), queda como

$$\delta \mathbf{s}_i = \delta\phi \times \mathbf{r}_i \quad (2.6)$$

cuya magnitud es

$$\delta s_i = \delta\phi |\mathbf{r}_i| \text{sen}(\theta_i)$$

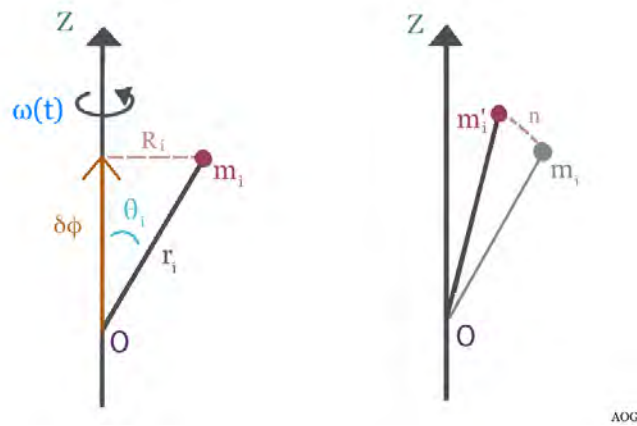


Figura 2.1: La masa m_i gira alrededor del eje Z con un ángulo θ_i y una velocidad $\omega(t)$.

Definiendo la *velocidad angular* como la variación del ángulo θ que describe la rotación de una masa puntual m_i del sistema alrededor de un eje Z con respecto al tiempo,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.7)$$

Entonces, el arco n evoluciona en el tiempo con una magnitud que señala la velocidad de m_i al girar al punto m'_i como

$$v = \frac{dn}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (2.8)$$

Además, entre mayor sea la velocidad angular la masa puntual girará más rápido; es decir, llevará una *aceleración angular* definida como

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, la velocidad angular queda expresada como una cantidad cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento en el sentido de avance de la regla de la mano derecha tal que, si $\mathbf{R}_i = |\mathbf{r}_i| \text{sen}(\theta_i)$ entonces

$$v_i = \omega |\mathbf{r}_i| \text{sen}(\theta_i) \quad (2.10)$$

donde su expresión vectorial queda como

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (2.11)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.4), se llega a

$$\sum_i \left(\mathbf{F}'_i + \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{R}_{ki} \right) \cdot (\delta\phi \times \mathbf{r}_i) = 0$$

Utilizando la propiedad vectorial¹ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y la ecuación (2.1), se encuentra que la suma de fuerzas (externas e internas) actuando sobre el sistema analizado es

$$\delta\phi \cdot \left[\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{k,i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_{ki}) - \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) \right] = 0 \quad (2.12)$$

Como la *Tercera Ley de Newton* expresa que $\sum_{k,i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_{ki}) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_{ki} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_{ik} = 0$, entonces las fuerzas internas no contribuyen a la evolución del sistema y la razón de cambio en el tiempo del momento angular total de un sistema de masas puntuales es igual al momento resultante de las fuerzas externas.

De esta manera, se define lo siguiente (Sommerfeld, 1964),

- La *torca* del sistema o los momentos provocados por fuerzas externas, queda(n) como

$$\boldsymbol{\tau}_i \equiv \mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (2.13)$$

- El *momento angular* total propio del sistema es

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (2.14)$$

¹Que expresa que el volumen denotado por los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} es el mismo independientemente del orden de los vectores.

Como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, al derivar el momento angular con respecto al tiempo se encuentra que

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \quad (2.15)$$

Y de acuerdo a la ecuación (2.5), $\mathbf{M}_i = \dot{\mathbf{L}}_i$; así, en un intervalo corto de tiempo, el momento angular es paralelo a la torca aplicada a la masa puntual analizada, misma que depende de la distancia del cuerpo al eje de rotación y del ángulo de rotación (Goldstein et al., 2001).

$$\sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i \quad (2.16)$$

Finalmente, si se considera que

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \dot{\mathbf{p}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i, \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i, \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i, \quad \dot{\mathbf{L}} = \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i$$

entonces

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}}$$

Por lo tanto, se observa que hay dos condiciones principales de equilibrio para un sistema mecánico arbitrario constituido por un número discreto de masas puntuales: que la suma de las fuerzas externas sea cero (el momento lineal es constante) y que la suma de las torcas sea cero (el momento angular es constante).

2.2. Generalización de un sistema mecánico a un cuerpo rígido

2.2.1. Cuerpo rígido

Un *cuerpo sólido rígido* es un sistema mecánico formado por masas puntuales (que representan a los átomos dentro de él), donde las fuerzas de amarre entre ellas son tan fuertes que una fuerza externa suficiente como para modificar la posición del cuerpo no lo deforma (Landau and Lifshitz, 1976).

Cualquier movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse como una combinación de una traslación –cuando todas las partículas que conforman al sistema describen trayectorias paralelas a su posición original– y una rotación –cuando todas las partículas describen trayectorias circulares alrededor de un eje de rotación imaginario que puede estar fijo o cambiando con respecto al sistema mecánico.

Si las fuerzas sobre el sistema mecánico son iguales tanto para la traslación como para la rotación (es decir, no solo la fuerza neta del sistema es cero, sino que la suma total de las torcas es cero), entonces no se realiza un trabajo por fuerzas externas que mueven al sistema haciendo que permanezca en equilibrio (Feynman et al., 2011).

Una herramienta que facilita el análisis de un cuerpo rígido es suponer que todo su comportamiento puede reducirse al movimiento de un punto de masa igual a la masa total del sistema sobre la que actúa la resultante de las fuerzas externas.

2.2.2. Centro de masa

Para un sistema mecánico arbitrario constituido por un conjunto discreto de masas puntuales, siendo i el índice que las representa, la Segunda Ley de Newton que describe las fuerzas que actúan sobre todo el sistema mecánico queda expresada como

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{d^2 m_i \mathbf{r}_i}{dt^2} \quad (2.17)$$

Además, la suma de fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual a la suma de todas las fuerzas de interacción entre cada una de las masas puntuales, por lo que $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ki}$ (de acuerdo a la sección 2.2.1).

Considerando que sobre cada masa puntual actúa el campo gravitacional provocando un peso resultante del sistema mecánico arbitrario $\mathbf{W} = \sum_i m_i \mathbf{g}$, entonces se propone la existencia de un punto sobre el cuerpo rígido que se acelerará debido a una fuerza externa como si todo el peso estuviera concentrado ahí (Feynman et al., 2011). Es decir, dicho punto, llamado *centro de masa* CM , se encuentra en

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \quad (2.18)$$

donde $M = \sum_i m_i$ representa a la masa total del cuerpo analizado. Así, es posible reescribir a la ecuación (2.17) como

$$\mathbf{F}_{ext} = M \frac{d^2 \mathbf{R}_{CM}}{dt^2} \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) señala que la fuerza externa produce el movimiento de un sistema mecánico de muchas partículas como si estuviera reducido solo a un punto, el centro de masa.

Si $\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i \mathbf{v}_i m_i}{M} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{M}$, entonces \mathbf{p}_i es el momento de todo el sistema visto desde su centro de masa. Si el sistema está aislado, $\mathbf{P}_{CM} = M\mathbf{v}_{CM}$ es constante por el *Principio de Conservación del Momento*, de manera que si el centro de masa del sistema es el punto de referencia de movimiento, $\mathbf{P}_{CM} = 0$.

Análogamente, a partir de las ecuaciones (2.13), (2.15), (2.19) y $\mathbf{P}_{CM} = M\mathbf{v}_{CM}$, es posible definir también que

$$\boldsymbol{\tau}_{CM} = \dot{\mathbf{L}}_{CM} \quad (2.20)$$

2.2.3. Momento de inercia

Por la ecuación (2.14) y la definición $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, es posible reescribir al momento angular como

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (2.21)$$

que representa, el momento angular de una masa puntual cambia en magnitud y en dirección conforme la masa puntual se mueve en el espacio. Si una partícula

analizada se mueve en un plano y el punto de origen O está en dicho plano, entonces los vectores \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i son perpendiculares y el momento angular hace un ángulo $\pi/2 - \theta_i$ con el eje de rotación Z (Alonso and Finn, 1992). Así, por las ecuaciones (2.8) y (2.10)

$$L_{i;Z} = (m_i r_i v_i) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = (\omega R_i)(m_i r_i) \text{sen}(\theta_i) = m_i R_i^2 \omega$$

Definiendo la cantidad escalar de *momento de inercia*² con respecto al eje de rotación Z como

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i R_i^2 \quad (2.22)$$

Para un cuerpo rígido en el espacio hay por lo menos tres direcciones ortogonales entre sí para las cuales el momento angular es paralelo al eje de rotación (cualquier otro eje de rotación, a parte de estos tres, tiene un momento angular total no paralelo). Estos ejes se llaman *ejes principales de inercia* y constituyen a un sistema inercial de referencia para el cuerpo rígido rotando alrededor de ellos.

Así, la torca externa que pone a girar a un sistema alrededor de un eje principal inercial va como

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (2.23)$$

Si el sistema mecánico es simétrico entonces los ejes principales coinciden con algún eje de simetría, y si el número de partículas del cuerpo sólido es muy grande entonces se toma $I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV$, donde ρ es la densidad del cuerpo y V su volumen.

Cuando el sistema mecánico analizado gira alrededor de un eje principal de inercia, el momento angular total \mathbf{L} es paralelo a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ que se encuentra siempre a lo largo del eje de rotación, por lo que no varía la orientación del cuerpo en el espacio.

De esta manera, la torca externa actúa con respecto a un punto fijo sobre el eje principal (que si bien no es necesario sea el centro de masa, considerarlo así facilita muchas veces el problema). Si el eje principal de rotación no cambia en referencia al cuerpo rígido, entonces el momento de inercia es constante y se cumple

$$\boldsymbol{\tau} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \quad (2.24)$$

Por lo tanto, si la suma de torcas es cero entonces $I\boldsymbol{\omega} = cte$. En consecuencia, un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje principal de inercia se mueve con velocidad angular constante si no hay torcas externas actuando sobre él. Además, si I aumenta entonces $\boldsymbol{\omega}$ tiene que disminuir, y viceversa. Esto se analizará con mayor detalle en el la sección 5.3.

²El momento de inercia determina la torca necesaria para obtener una aceleración determinada alrededor de un eje de rotación, (Feynman et al., 2011).

2.3. Energía de un cuerpo rígido

Suponiendo que un cuerpo rígido está rotando alrededor de un eje Z , donde la magnitud de su velocidad está dada por la ecuación (2.8), tal que analizando cada masa constitutiva del cuerpo se obtiene que su energía cinética va de la forma

$$T_{rot} = \sum_i T_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (R_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2$$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) es válida para cualquier eje de rotación ya que la magnitud de la velocidad siempre es la misma. Si la rotación se hace alrededor de un eje principal, entonces por la ecuación (2.23) se llega a

$$T_Z = \frac{L^2}{2I} \quad (2.26)$$

Considerando que el cuerpo también realiza una traslación con respecto a un observador, entonces la energía cinética está dada por la energía del movimiento del centro de masa y la energía del cuerpo rotando alrededor del eje de rotación

$$T_{total} = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Así, si la energía total del sistema es la suma de la energía cinética y la energía potencial, $E = T + U$, entonces

$$E = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + U \quad (2.27)$$

De acuerdo a los teoremas del cambio de energía de un sistema (Alonso and Finn, 1992), se tiene lo siguiente

- 1) El cambio de energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo Q efectuado sobre el sistema por la acción de las fuerzas externas e internas. Como se mencionó previamente, las fuerzas internas no contribuyen a la evolución del sistema (por la Tercera Ley de Newton), de manera que no realizan trabajo. Así,

$$\Delta T_{total} = T_{ext} - T_{int} = Q_{ext} \quad (2.28)$$

- 2) El cambio de energía potencial de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas. Esto se debe a que, como la distancia entre las partículas de un cuerpo rígido no cambia durante el movimiento entonces, puede suponerse que su energía potencial interna siempre permanece constante y es despreciable cuando se analiza el cambio de la energía interna con respecto a la externa.

$$\Delta U_{total} = U_{ext} - U_{int} = Q_{ext} \quad (2.29)$$

De esta manera, cuando la energía cinética y potencial se conservan entonces

$$(T_{ext} + U_{ext}) - (T_{int} + U_{int}) = 0 \quad (2.30)$$

Si la energía del sistema no se conserva, entonces hay un trabajo realizado por fuerzas externas no conservativas Q'_{ext} (como la de fricción), tal que

$$(T_{ext} + U_{ext}) - (T_{int} + U_{int}) = Q'_{ext} \quad (2.31)$$

2.4. Descripción de un giroscopio

2.4.1. Características principales

Un *giroscopio*, figura 2.2, está formado por una *rueda giratoria* o *rotor* suspendida en dos o tres anillos colocados de forma perpendicular entre sí. Su eje de rotación principal Z puede cambiar libremente de dirección y el sistema está diseñado para que tenga simetría por cada eje principal de rotación. La rueda giratoria tiene un peso mayor a la suspensión cardán con la finalidad de que el peso promedio del giroscopio se concentre en el centro de masa que, en este caso, también es el centro gravitacional³, por estar siempre fijo el centro de masa en el centro simétrico del sistema. Cuando el sistema mecánico está conformado por tres anillos se conoce como suspensión cardán⁴, donde anillos perpendiculares señalan los tres ejes principales de rotación (o de inercia).

El rotor se encuentra montado sobre el *anillo interno* colocado de manera horizontal con respecto al plano de la Tierra, y los otros dos anillos se encuentran ortogonalmente al primero y entre ellos (a manera de que el anillo externo sea paralelo al eje de rotación). El movimiento de la rueda giratoria se da en el plano horizontal al igual que el anillo interno y lleva una velocidad angular tangencial. Por cada vuelta que da el rotor se transmite un impulso al anillo inmediato provocando una pequeña velocidad perpendicular que pone en movimiento al anillo interno y éste mueve a los *anillos medio* y *externo*.

La contribución principal al momento angular total del sistema proviene de la rueda giratoria por tener una mayor masa que los anillos y llevar un impulso inicial generado por un observador para ponerla a girar. Como la velocidad angular aumenta hasta mantenerse constante, entonces el momento angular dado por la ecuación (2.21) resulta mucho mayor que el momento angular de los anillos, individuales y en conjunto, ya que tienen una menor masa y la velocidad de su movimiento es una consecuencia del movimiento del rotor.

³El centro gravitacional es el punto donde la torca resultante debido a la fuerza de gravedad es nula, (Feynman et al., 2011).

⁴La suspensión cardán es una forma de soporte que permite la rotación de un objeto en cualquier eje espacial y está conformada por dos o tres anillos pivoteados entre sí de manera ortogonal, donde el objeto a rotar está colocado en el anillo menor.

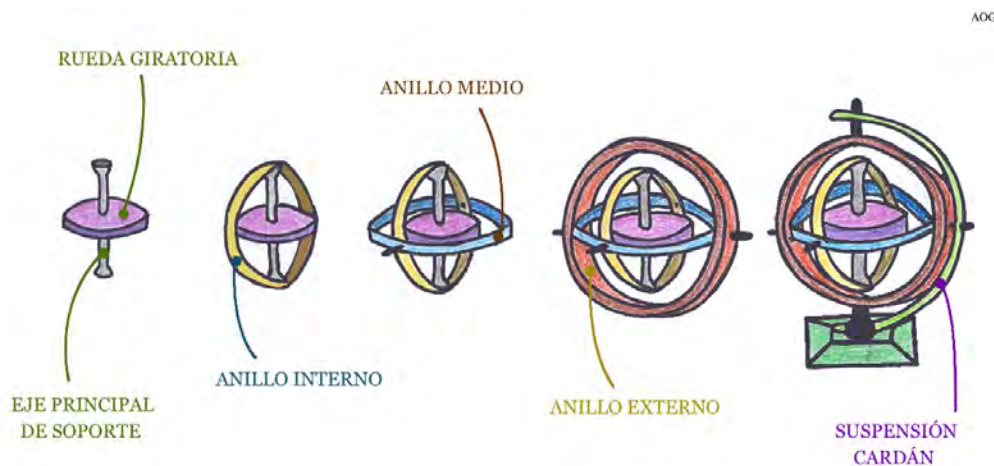


Figura 2.2: Partes que conforman a un giroscopio.

2.4.2. Cálculo de la torca de un giroscopio

La ecuación (2.20) indica que cuando no hay una torca externa τ_{CM} entonces el momento angular \mathbf{L}_{CM} del sistema permanece constante. Si el giroscopio está girando sobre un eje principal entonces la ecuación (2.23) señala que seguirá rotando con una velocidad angular constante. Pero si la torca externa aplicada al giroscopio no es cero, entonces el momento angular experimenta un cambio en el tiempo.

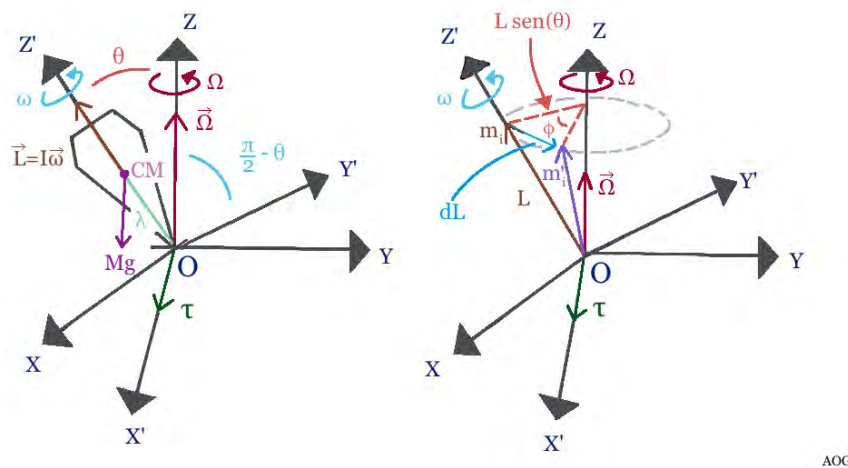


Figura 2.3: El giroscopio, con centro de masa CM , rota sobre el eje Z' a velocidad $\omega(t)$ y gira alrededor del eje Z con velocidad $\Omega(t)$.

De acuerdo a la figura 2.3, sea $\lambda = \overline{OCM}$ la distancia del origen O al centro de masa del giroscopio y si la fuerza actuante en el CM es la gravitacional, entonces partiendo de la ecuación (2.13)

$$\tau = \mathbf{Mg} \times \lambda = Mg\lambda \text{ sen}(\theta)$$

Después de la perturbación, el vector \mathbf{L} se coloca en dirección del eje Z' y la distancia entre éste y su proyección en el eje principal (inercial) de rotación Z está

dada por $L \sin(\theta)$. Además, la velocidad angular del eje principal es $\Omega = d\phi/dt$, por lo que el cambio de momento angular del giroscopio está dado por

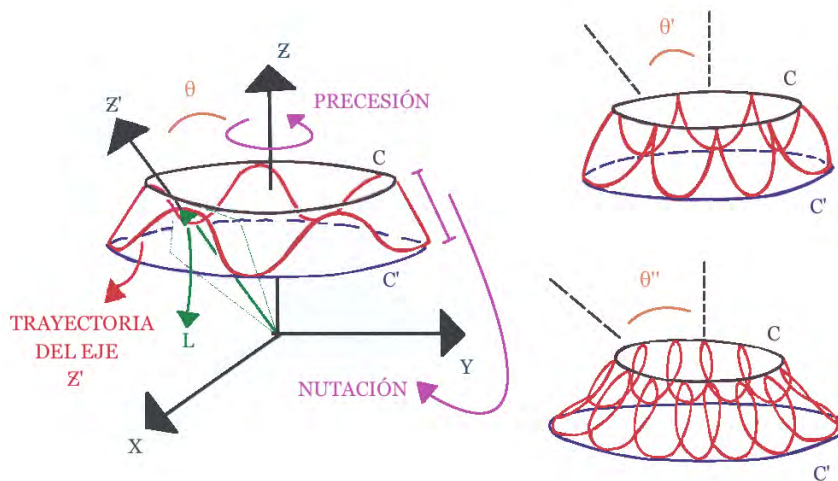
$$\tau dt = dL = L \sin(\theta) \cdot d\phi = \Omega L \sin(\theta) dt$$

Así, la torca producida por una fuerza externa depende de la velocidad angular del giroscopio alrededor del eje principal Z y del momento angular del giroscopio con respecto al eje Z' , es decir

$$\tau = \Omega \times \mathbf{L} \quad (2.32)$$

Donde la magnitud de la velocidad angular está definida de la siguiente manera: igualando las ecuaciones correspondientes a la torca del giroscopio perturbado, considerando $\omega \gg \Omega$ y por la ecuación (2.23), entonces

$$Mg\lambda \sin(\theta) = \Omega L \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{Mg\lambda}{I\omega}$$



AOG

Figura 2.4: Del lado izquierdo se observa que el giroscopio describe una precesión y una nutación cuando se ejerce una fuerza sobre él que lo perturbe de su eje de equilibrio Z . Del lado derecho se encuentran diferentes precesiones y nutaciones para distintas intensidades de perturbación.

Si la torca τ es perpendicular al momento angular \mathbf{L} entonces el cambio $d\mathbf{L}$ también es perpendicular a \mathbf{L} , por lo que el momento angular cambiará de dirección mas no de magnitud; es decir, cambia la dirección del eje de rotación Z . Así, el movimiento de rotación del giroscopio alrededor del nuevo eje Z' con respecto al eje inercial Z , como consecuencia de la perturbación externa, describe una *precesión*, figura 2.4, donde el momento angular debido a la precesión tiene una velocidad angular resultante tal que $V_R = \omega + \Omega$.

Cuando la precesión es muy pequeña y si el momento angular del sistema sigue siendo suficiente, entonces éste se encargará de restituir el movimiento del sistema

a su estado en equilibrio. Además, dependiendo de la intensidad con la que el giroscopio sea perturbado variará la precesión⁵.

Un factor muy importante a señalar es que después de la perturbación de la torca externa, el ángulo θ no se mantiene constante sino que oscila entre dos valores fijos (y simétricos). De manera que, mientras el giroscopio gira alrededor del eje Z y rota alrededor del eje Z' , también oscila entre dos círculos imaginarios, C y C' . La trayectoria que describe entre los dos círculos se llama *nutación*, figura 2.4, y su contribución al momento angular es todavía menor que la precesión.

Si se busca cambiar el eje principal de movimiento para que el giroscopio siga rotando en equilibrio alrededor de él, se experimenta una resistencia a este cambio debido a que el momento angular siempre es paralelo al eje de rotación. Es decir, el eje principal vertical se mantiene estable siempre y cuando el espín (la rotación) del sistema sea alrededor del plano horizontal. Cuando el eje de rotación principal es anti paralelo (y no perpendicular) al espín, entonces la rueda giratoria experimenta una fuerza en sentido contrario a su movimiento original y, en consecuencia, empieza a disminuir su velocidad de rotación. Dicha fuerza de resistencia se anula cuando el eje de rotación y el espín vuelven a ser ortogonales entre sí.

⁵Es decir, variará la frecuencia y velocidad con las que precesa el giroscopio alrededor del eje Z .

Capítulo 3

La endolinfa como un fluido incompresible

Para describir matemáticamente el movimiento en equilibrio del cuerpo humano, análisis que realizan los complejos vestibulares de los oídos en unión por sí mismos, es necesario desarrollar particularmente las siguientes ecuaciones (Fung, 1984):

- 1) *Ecuación de continuidad*, que expresa la ley de la conservación de la masa.
- 2) *Ecuación de movimiento*, que expresa la ley de la conservación del momento.
- 3) *La ecuación de la conservación de la energía*.
- 4) *Condiciones de frontera y condiciones iniciales*.

Para describir el funcionamiento físico-matemático del complejo vestibular, figura 1.5, se pueden realizar dos tipos de análisis: 1) considerando a la endolinfa como un fluido y analizando el efecto de su movimiento sobre la cúpula y la masa otolítica, 2) considerando a la endolinfa, cúpula, masa otolítica y vellosidades celulares como masas sometidas a una fuerza de restauración y una fuerza de amortiguación (Rabbitt et al., 2004).

En este capítulo se mostrará el análisis de la endolinfa-fluido y su efecto sobre la cúpula y la masa otolítica, mientras que en el siguiente capítulo se realizará el análisis de las fuerzas restauradoras y amortiguadoras efectuadas sobre una masa dada. En ambos casos se considera la presencia de fuerzas externas que provocan el movimiento rotacional y traslacional del complejo vestibular.

3.1. Estudio del comportamiento de la endolinfa como un fluido pseudo-newtoniano

El análisis se divide en dos secciones: *a)* el movimiento de la endolinfa dentro de los canales semicirculares bajo una rotación de la cabeza y *b)* cómo el movimiento de la endolinfa afecta a la cúpula al empujarla o presionarla (Van Buskirk, 1977). En los capítulos 3 y 4 se considerará que el comportamiento de la cúpula es análogo al comportamiento de los órganos otolíticos ya que mientras las vellosidades celulares se encuentran contenidas en la base de la cúpula y se flexionan cuando ésta se mueve,

también las vellosidades celulares de las máculas se encuentran por debajo del fluido que contiene a los otolitos, como en la figura 1.7. De manera que, en ambos casos (en la cúpula y en las máculas) las vellosidades se excitan debido al movimiento del fluido viscoso que las cubre.

3.1.1. Análisis de la endolinfa dentro de los canales semicirculares

Los canales semicirculares están llenos de un fluido viscoso incompresible de densidad ρ , llamado endolinfa, y tienen la función de percibir el movimiento rotacional. Para llevar a cabo el análisis del movimiento de la endolinfa se considera sólo un canal y se supone que tiene forma toroidal donde uno de sus extremos está unido al utrículo mientras que el otro termina en la sección llamada ámpula, figura 3.1. Dentro del ámpula se encuentra una membrana elástica gelatinosa llamada cúpula que tiene una densidad κ y cumple que $\kappa \neq \rho$ pero $\kappa \approx \rho$.

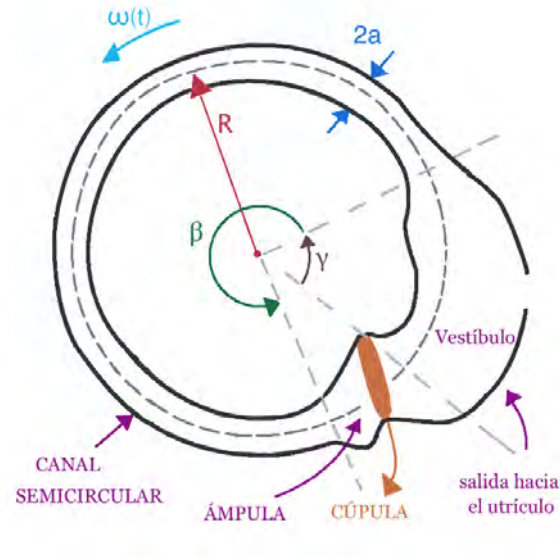


Figura 3.1: Aproximación de un canal semicircular como un toroide de radio externo R y radio interno a que rota con velocidad constante $\omega(t)$.

Suponiendo que el fluido gira a una velocidad angular $\omega(t)$ constante¹ y que si una fuerza externa propicia el movimiento de la cabeza, entonces el canal semicircular siente una repentina aceleración $\alpha(t) = \dot{\omega}(t)$.

Si el toroide analizado tiene radio interno a y radio externo R y gira alrededor del eje Z formando un movimiento circular en el plano XY , entonces es posible hacer un cambio de coordenadas (x, y, z) a coordenadas esféricas (r, λ, φ) , (Alexandrov et al., 2007), tal que

$$x = [R + r \cos(\lambda)] \cos(\varphi), \quad y = [R + r \cos(\lambda)] \sin(\varphi), \quad z = r \sin(\lambda) \quad (3.1)$$

¹La endolinfa tiene una velocidad constante debido a que la cabeza está siempre en movimiento. Que el sistema esté en equilibrio significa que el movimiento de la cabeza es tan pequeño que las perturbaciones producidas son despreciables.

Entonces el flujo de la endolinfa está descrito por lo siguiente:

- 1) *Ecuación de continuidad*: especifica que cuando un fluido no cambia de densidad con la presión (se conserva la masa) entonces es *incompresible*, cumpliendo

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

Es común encontrar la anterior ecuación re-escrita de la siguiente forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

donde D/Dt es la derivada material² y $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$ es la velocidad de la endolinfa debida a la rotación del toroide. Como se puede despreciar la magnitud $\rho^{-1}D\rho/Dt$ en comparación al gradiente ∇ de velocidad (*aproximación de Bousinesq*³) entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

Sin embargo, en la literatura se toma que la ecuación (3.2) describe un sistema de fuerzas no conservativas; caso contrario con la ecuación (3.4) que representa la conservación de la masa para fuerzas conservativas.

- 2) *Ecuación de Navier-Stokes*: describe el movimiento de un fluido viscoso a partir de la Segunda Ley de Newton, donde la fuerza total del sistema está dada en términos de la presión y la difusión viscosa.

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + R\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r} \right) \quad (3.5)$$

donde P es la presión con la que la endolinfa se encuentra dentro del canal semi-circular –misma que está regulada por el aire que entra por la nasofaringe, como se explicó en el capítulo 1– y ν es la viscosidad cinemática⁴. Así, poco tiempo después de la perturbación externa el fluido se mueve con una velocidad relativa $\mathbf{V}_{rel} = \boldsymbol{\omega}R$ que varía conforme $\boldsymbol{\omega}(t)$ cambia en el tiempo.

Como el toroide gira en torno al eje Z entonces el cambio de la presión en esa dirección es constante (Obrist, 2008). Es decir, derivando la ecuación (3.5) con respecto a la variable z se llega a

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial z} = cte \quad \Rightarrow \quad P = P(z) \quad (3.6)$$

²La derivada material describe el cambio en el tiempo de una parcela o elemento de fluido que se somete a una velocidad macroscópica dependiente del espacio-tiempo, (Kundu et al., 2015).

³Se desprecia el término $\rho^{-1}D\rho/Dt$ porque el movimiento de la cabeza provoca una velocidad mucho mayor en magnitud que la densidad de los canales semicirculares, (Kundu et al., 2015).

⁴La viscosidad cinemática está definida por la razón $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$; donde μ señala la resistencia de las fuerzas horizontales internas para mover los elementos de fluido unos con respecto a otros, (Kundu et al., 2015).

Tomando que la presión a lo largo del canal semicircular varía de acuerdo al *Principio de Bernoulli*⁵, por tener en un extremo al vestíbulo y en el otro al ámpula, entonces

$$\Delta P = P(\beta R) - P(0) = \beta R \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (3.7)$$

donde β abarca el arco de longitud del canal semicircular. Además, el incremento del fluido debido a la fuerza externa provoca una diferencia de presión por unidad de área transversal del canal semicircular tal que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{F_{ext}}{\pi a^2 \beta R} \quad (3.8)$$

Para calcular la fuerza externa se considera que ésta es igual a la suma de la fuerza inercial proveniente del vestíbulo y la fuerza del movimiento volumétrico de la cúpula⁶. Esto es

- a) Por la ecuación (2.17) la fuerza inercial queda expresada como $F_{ine} = m_{lin} R \alpha$. Si la mayor parte de dicha fuerza es absorbida por el rozamiento de la endolinfa con las paredes del canal semicircular entonces m_{lin} es igual a la masa de la endolinfa contenida en el vestíbulo que se desplaza por unidad de área transversal del canal, tal que

$$F_{ine} = \rho \pi a^2 \gamma R^2 \alpha \quad (3.9)$$

donde γR abarca la longitud de arco del vestíbulo.

- b) La fuerza con la que se da el movimiento volumétrico de la endolinfa por unidad de área transversal es

$$\frac{F_{vol}}{\pi a^2} = 2\pi T \int_0^t \int_0^a \mathbf{u}'(\varrho, \tau) \varrho d\varrho \tau \quad (3.10)$$

donde T es la rigidez⁷ de la cúpula de la que depende cuánto se inclinará por acción del volumen endolítico (descrito por la doble integral).

Así se llega a una expresión lineal y homogénea para la velocidad \mathbf{u} a partir de las ecuaciones (3.5), (3.8), (3.9) y (3.10), tal que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} \right) R \alpha = -\frac{2\pi T}{\rho \beta R} \int_0^t \int_0^a \mathbf{u}'(\varrho, \tau) \varrho d\varrho \tau + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right) \quad (3.11)$$

⁵El Principio de Bernoulli especifica que un incremento en la velocidad de un fluido tiene como consecuencia el decrecimiento en la presión o energía potencial. De manera más específica: un incremento en la presión dinámica y la energía cinética ocurre cuando decrece la suma de la energía potencial, la energía interna y la presión local, (Kundu et al., 2015).

⁶Con “movimiento volumétrico” se hace referencia a que la endolinfa se mueve como un solo ente a lo largo de todo el complejo vestibular.

⁷La rigidez mide la resistencia a las deformaciones elásticas de la membrana, tal que $T = \frac{\text{fuerza}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\text{momento aplicado}}{\text{rotación}}$, (Kundu et al., 2015).

Algo que es muy común al momento de trabajar con las ecuaciones de Navier-Stokes es hacerlas adimensionales. Para eso se realiza el siguiente cambio de variable

$$r' = \frac{r}{a}, \quad t' = \frac{tv}{a^2}, \quad u' = \frac{u}{V_{rel}}$$

y quitando órdenes no lineales (aquellos que cumplen $R \gg a$) tal que

$$\epsilon = \frac{2\pi T a^6}{\rho \beta R v^2} \ll 1 \quad (3.12)$$

entonces

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \left(\frac{a^2 (1 + \gamma/\beta)}{v\omega} \right) = -\epsilon \int_0^t \int_0^a \mathbf{u}'(\varrho, \tau) \varrho d\varrho d\tau + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial r'} \right) \quad (3.13)$$

Para resolver la ecuación (3.13), Obrist (2008) demuestra que la solución analítica tiene un comportamiento tipo función de Bessel de primera clase y orden cero, donde el primer valor propio está en $r = 1$, (Haberman, 2003), por lo que hay una disipación de la aceleración con la que se mueve el toroide una vez que la perturbación externa ha cesado. Es decir, si se considera que el impulso inicial está dado en función de una delta de Kronecker (una perturbación instantánea), entonces la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}(t)$ tendrá su valor máximo en el momento de la perturbación y disminuirá rápidamente hasta llegar a cero, haciendo que el sistema vuelva a tener una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}(t)$. Así, el canal semicircular regresará a su estado de equilibrio.

Para fuerzas externas más complejas que un impulso inicial, como el caso de la rotación de toda la cabeza en diferentes direcciones, es necesario proponer que el desplazamiento del volumen de la endolinfa está dado por una función de Green (Obrist, 2008), como se verá en la sección 5.3.

- 3) Con lo anterior, la condición inicial del problema (antes de que ocurra la perturbación externa) es $\mathbf{u}'(r', 0) = 0$, mientras que las condiciones a la frontera son $\mathbf{u}'(1, t') = \frac{\partial \mathbf{u}'(0, r')}{\partial r'} = 0$.

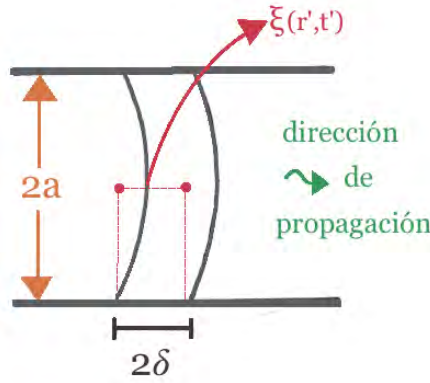
No se toma en cuenta el efecto de la endolinfa que entra desde el vestíbulo porque la fuerza con la que llega a cada canal semicircular es la misma que tiene fuera de él; es decir, la única variación de presión se da a lo largo del canal semicircular porque la cúpula actúa como una barrera entre el canal y el vestíbulo.

3.1.2. Efecto del movimiento de la endolinfa sobre la cúpula

Como consecuencia del movimiento de la endolinfa a lo largo del canal semicircular debido a la perturbación externa, se ejerce una presión sobre la cúpula que según Alexandrov et al. (2007); Vega et al. (2008) puede ser modelada de dos formas:

- 1) Suponiendo que la cúpula se comporta como una membrana elástica, figura 3.2, que está sujeta a las paredes del ámpula, tiene densidad κ , no tiene peso, tiene un grosor 2δ , una rigidez T y se desplaza de su punto de origen una cantidad $\xi(r', t')$. Si se analizan las oscilaciones transversales de la membrana (el cómo afecta la presión de la endolinfa proveniente del canal semicircular a la membrana en su dirección de propagación), entonces

$$2\delta\rho(\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel}) = T\nabla^2\xi + \Delta P \quad (3.14)$$



AOG

Figura 3.2: Representación de la cúpula como una membrana elástica de ancho 2δ y de longitud $2a$.

Tomando condiciones a la frontera tales que en la unión entre la membrana y el canal semicircular se cumple $\dot{\xi}(a, t') = \frac{\partial \xi(r', t')}{\partial r'} = 0$, con $r' = a/R$.

Cuando el desplazamiento realizado por la membrana como consecuencia de la presión de la endolinfa tiene la misma velocidad que ésta, $\mathbf{u}(r, t) = \dot{\xi}(r, t)$, entonces a partir de las ecuaciones (3.5) y (3.14) se llega a la ecuación de movimiento para la unión membrana-cúpula/endolinfa (como se muestra en el Apéndice A)

$$\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel} = \nabla^2 \left(\frac{T}{\rho L} \xi + \nu \dot{\xi} \right) \quad (3.15)$$

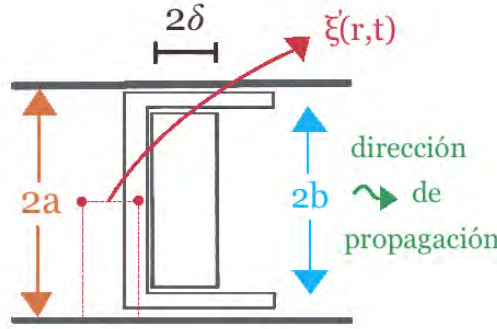
con $L = R\beta$ la longitud del canal semicircular. Además, se ignoran los términos que cumplen $2\delta/L \approx \epsilon$.

La ecuación (3.15) señala que el desplazamiento de la membrana-cúpula depende directamente de su rigidez y la viscosidad con la que viaja la endolinfa, y es inversamente proporcional a la densidad del fluido y a la distancia que éste viaja hasta llegar a la membrana.

- 2) Suponiendo que la cúpula se comporta como un pistón mecánico, figura (3.3), de densidad κ , de masa m_p , de alto $2b$ y se desplaza de su punto de origen una cantidad $\xi(r', t')$, el balance de fuerzas inerciales se da entre la diferencia de

presión en ambos lados del pistón, las fuerzas elásticas de éste y las fuerzas de fricción en las paredes laterales en contacto con la endolinfa. Así, la ecuación que representa el movimiento es

$$m_p (\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel}) = \int_0^b \int_0^{2\pi} \Delta P r dr d\theta - F_{frc} - \varsigma \dot{\xi} \quad (3.16)$$



AOG

Figura 3.3: Representación de la cúpula como un pistón de ancho 2δ y de longitud $2b$.

con F_{frc} la fuerza de fricción (provocada por la viscosidad del fluido) en las paredes laterales del pistón, ς el coeficiente de fuerza elástica debido al movimiento y ΔP la diferencia de presión en ambos lados del pistón.

Sustituyendo en la ecuación (3.5) la condición de frontera $\mathbf{u}(a, t) = 0$ en las paredes del canal semicircular y la ecuación (3.16), es posible dividir la velocidad con la que se perturban las vellosidades celulares contenidas en la ámpula en dos casos:

- I. La velocidad que lleva la endolinfa antes de entrar en contacto con el pistón-cúpula, \mathbf{V}_1 , tal que

$$\mathbf{u}(r, t) = 2\mathbf{V}_1(t) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (3.17)$$

La endolinfa que viaja con una velocidad dada por la ecuación (3.17) presiona el pistón-cúpula provocando una diferencia de presión dada como

$$\Delta P = -2\rho\pi R \left[\dot{\mathbf{V}}_1 + \frac{8\nu}{a^2} \mathbf{V}_1 + R\alpha \right] \quad (3.18)$$

- II. El movimiento del pistón va con una velocidad \mathbf{V}_2 que crea un cambio abrupto en la presión posterior al pistón (en la zona donde están las vellosidades celulares) de la forma

$$\dot{\mathbf{V}}_2 + R\alpha = -\frac{1}{R\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

donde $y = r - b$, $\theta = 360^\circ - \beta - \gamma$ es la sección del canal semicircular donde se encuentra la cúpula y $v \frac{\partial^2 \mathbf{u}'}{\partial y^2}$ es una aproximación de la fuerza de fricción F_{frc} a partir de la ecuación (3.5), en donde el término $\frac{v}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)$ es despreciable porque el movimiento de la cúpula es mucho menor que la magnitud radial del canal semicircular.

Tomando que la solución a la ecuación (3.19) va como un polinomio de segundo grado $\mathbf{u}(y, t) = C_1(t)y^2 + C_2(t)y + C_3(t)$, de acuerdo a Vega et al. (2008), y sea $m_p = 2\pi b^2 \delta \rho$ la masa del pistón, entonces la aceleración con la que las vellosidades celulares se ven afectadas por el movimiento del pistón cúpula es (como se muestra en el Apéndice B)

$$\ddot{\xi} + \frac{8v}{a^2} \dot{\xi} + \frac{S}{m} \xi = -R\alpha \quad (3.20)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.20) representan la fuerza con la que las vellosidades celulares de la cúpula-membrana y cúpula-pistón, respectivamente, se ven afectadas por el movimiento de la endolinfa dentro de canal semicircular, ecuación (3.11). A partir de las ecuaciones de movimiento se observa que las variables fisiológicas de la cúpula (rigidez, dimensiones, densidad, masa y las fuerzas de fricción) regulan la intensidad con la que las vellosidades celulares son perturbadas. Es decir, el movimiento de la cabeza que pone en movimiento a la endolinfa de los canales semicirculares hasta empujar a la cúpula no se transmite con la misma intensidad a las terminaciones sensoriales. Esto ayuda a atenuar la información que el complejo vestibular tiene que interpretar (como se verá en la sección 5.2).

Finalmente, como ya se mencionó, el comportamiento de la masa otolítica en el utrículo y el sáculo puede considerarse análogo a la interacción de la cúpula con la endolinfa ya que la endolinfa que llega a los canales semicirculares proviene del vestíbulo del oído interno. El utrículo y el sáculo están rellenos tanto de endolinfa como de masa otolítica (contenida en la mácula, debajo de la endolinfa y con densidad κ que cumple $\kappa \neq \rho$ pero $\kappa \approx \rho$) y cuando la cabeza gira, el fluido dentro del oído interno se mueve y provoca que las vellosidades celulares debajo de los otolitos se flexionen o presionen (dependiendo del movimiento).

De acuerdo a los dos análisis realizados entre la relación de la endolinfa y la cúpula, el que modela mejor el funcionamiento de la masa otolítica dentro del utrículo y del sáculo es el de la membrana-cúpula porque representa las vibraciones provocadas sobre la masa por el movimiento del fluido. Si bien éste modelo simula el comportamiento fisiológico del complejo vestibular, es el modelo pistón-cúpula el que lo aproxima a una representación mecano-matemática.

3.2. Energía de la endolinfa

De acuerdo a la *Primera Ley de la Termodinámica*, el cambio de la energía por cada elemento de fluido viscoso incompresible está dado por la suma del cambio del flujo de calor, más el cambio del trabajo realizado por fuerzas de superficie y de cuerpo; es decir, si

- I) las *fuerzas de cuerpo* se dan en acción a distancia, cuando el sistema es sometido a un campo constante, y
- II) las *fuerzas de superficie* son fuerzas de contacto de un elemento con sus alrededores (son proporcionales al área analizada),

entonces, Anderson (2009) propone lo siguiente: tomando que la energía total del fluido moviéndose por unidad de masa es la suma de su energía interna Λ y la energía cinética por unidad de masa $\mathbf{u}^2/2$, y como se está analizando el movimiento por elemento de fluido, $\rho dx dy dz$, entonces el cambio en el tiempo de la energía total por unidad de masa está dado por la derivada material de la energía. Quedando

$$\rho \frac{\partial D}{\partial Dt} \left(\Lambda + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) dx dy dz \quad (3.21)$$

El flujo neto de calor q del fluido se presenta cuando se calienta su volumen completo (y se emite o absorbe radiación) y cuando existe una conducción térmica⁸ en él. Así, el cambio de calor volumétrico por unidad de masa de elemento de fluido es

$$\rho \dot{q} dx dy dz \quad (3.22)$$

mientras que el cambio neto de calor debido a la conducción térmica por elemento de fluido es

$$- \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.23)$$

Si la transferencia de calor por conducción térmica es proporcional al gradiente local de temperatura por elemento de fluido (Kundu et al., 2015), tal que

$$\dot{q}_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (3.24)$$

donde λ es la conductividad térmica particular del fluido analizado. Entonces, el cambio neto de flujo de calor por elemento de fluido queda como

$$\left[p \dot{q} + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \right] dx dy dz \quad (3.25)$$

Finalmente, el trabajo por elemento de fluido realizado por una fuerza externa \mathbf{F}_{ext} (una fuerza de cuerpo) actuando sobre el volumen completo está dado por el producto de la fuerza y la componente de velocidad en la misma dirección de la fuerza,

$$\rho \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{u}' dx dy dz \quad (3.26)$$

Las fuerzas de superficie están representada sen términos de la presión P , la tensión de corte τ y la tensión normal σ por cada elemento analizado

⁸La conducción térmica es la transmisión de calor directamente de cuerpo a cuerpo sin provocar un intercambio de materia, (Ohanian and Markert, 2006).

$$\left[-P \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u'_x \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u'_y \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial u'_z \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial u'_x \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial u'_y \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial u'_z \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial u'_x \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial u'_y \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial u'_z \sigma_{zz}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.27)$$

Con los resultados de las ecuaciones (3.21), (3.25), (3.26) y (3.27) se llega a que la expresión para la energía total de un fluido en movimiento, en su forma conservativa, es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\Lambda + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(\Lambda + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) \right] &= \rho \dot{q} + \lambda \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right] + \\ &- P \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u'_x \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u'_y \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial u'_z \tau_{zx}}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial u'_x \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial u'_y \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial u'_z \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial u'_x \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial u'_y \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial u'_z \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (3.28)$$

Reescribiendo a la energía dada por la ecuación anterior en su forma no conservativa, donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzo, se tiene

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\Lambda + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) = \rho \dot{q} + \lambda \nabla \cdot (\nabla \cdot T) - \nabla \cdot (\mathbf{u}' P) + \nabla \cdot (\tau_{ij} \mathbf{u}') + \rho \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{u}' \quad (3.29)$$

Si bien la ecuación (3.29) parece corresponder sólo a la parte de las ecuaciones de Navier-Stokes, se ha demostrado que en general estas ecuaciones y la expresión de la energía propuesta describen a todo sistema con un fluido viscoso (Anderson, 2009). Es decir, la sección del análisis cúpula-endolinfa es una forma para llegar a soluciones particulares a las ecuaciones de Navier-Stokes para la endolinfa con ciertas condiciones de frontera específicas: en este caso, se toma que la frontera del fluido viscoso es una membrana o un pistón.

Capítulo 4

El complejo vestibular y la mecánica no inercial

Los mecanismos contruidos por el ser humano que funcionan como análogos al complejo vestibular son los giroscopios y los acelerómetros. Ambos son sensores inerciales que analizan la resistencia al cambio del momento, donde el movimiento angular es percibido por los giroscopios mientras que el movimiento lineal, por los acelerómetros¹. Los sensores giroscópicos analizan la velocidad traslacional y rotacional de primer orden y los acelerómetros analizan la aceleración traslacional de segundo orden².

A la combinación de acelerómetros con giroscopios, donde ambos se colocan de manera ortogonal entre sí mismos, se llama Unidad de Medición Inercial (UMI), misma que se encarga de analizar en conjunto los cambios de posición lineal y angular.

El funcionamiento de una UMI parte de lo siguiente: un objeto en reposo está fijo a su punto de equilibrio hasta que una fuerza externa incide sobre el objeto haciendo que se desplace en sentido proporcional a la fuerza incidente. Si el objeto en cuestión se encuentra sujeto a una fuerza restauradora (o de restitución, como un resorte) entonces experimentará un movimiento armónico simple; es decir, oscilará en el tiempo de acuerdo a las condiciones iniciales y de frontera del sistema (Tippens, 2005).

Una oscilación periódica se produce cuando un cuerpo se mueve alrededor de un punto de equilibrio con una frecuencia dada por el número de repeticiones periódicas por unidad de tiempo. Por ejemplo, sea un objeto de masa m sujeto a una pared por un resorte de constante k , donde la superficie sobre la que está sobrepuesta no tiene fricción y que cuando se desplaza el objeto una distancia x siente una fuerza de restitución que le obliga a regresar a su punto de equilibrio, entonces dicha fuerza se expresa como

¹Ningún sensor inercial depende de alguna referencia externa o alguna infraestructura aparte del campo gravitacional siempre presente, (Farkhatdinov et al., 2013).

²También existen los inclinómetros que son sensores inerciales que miden la orientación del vector aceleración debido a la gravedad, (Zeng and Zhao, 2011).

$$F_{res} = -kx \quad (4.1)$$

donde el signo negativo expresa el sentido opuesto a la fuerza externa que desplaza al objeto de su estado de reposo. Por la Segunda Ley de Newton, las fuerzas internas actuando en el sistema quedan expresadas como

$$F_{osc} = m\ddot{x} = -kx = F_{res} \quad (4.2)$$

Definiendo a la frecuencia angular de oscilación como $\omega^2 = k/m$, entonces la ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.3)$$

cuya solución general está dada en términos de funciones periódicas bajo condiciones iniciales y de frontera propia de cada sistema estudiado.

A partir de esta idea, las ecuaciones para describir la evolución del movimiento traslacional y el movimiento rotacional de la cabeza van de la manera siguiente:

- 1) Las oscilaciones analizadas son pequeñas en comparación a otros fenómenos biológicos, como la vibración de los huesecillos humanos, por lo que la masa siempre se conservará.
- 2) Se proponen diversas ecuaciones de movimiento para la simulación del comportamiento de la endolinfa, la cúpula, la mácula y las vellosidades celulares dependiendo de si el movimiento asociado con ellas es rotacional o traslacional. Particularmente, el movimiento en todos los sistemas analizados tiene un comportamiento oscilatorio amortiguado.
- 3) Se demuestra que la energía para cada sistema analizado no se conserva.
- 4) Las condiciones iniciales para todos los sistemas analizados son $\dot{\epsilon}(\epsilon, 0) = 0$, mientras que las condiciones de frontera son $\frac{\partial \dot{\epsilon}(0,t)}{\partial \epsilon} = 0$; con ϵ la variable con la que se esté trabajado en cada sistema.

4.1. Relación del comportamiento de los canales semicirculares con los giroscopios

A pesar de que los canales semicirculares están estimulados por una aceleración angular, la respuesta neuronal de las vellosidades celulares en el ámpula representa la velocidad lineal a la que el canal está girando en un rango fuera del “normal” o de equilibrio de la cabeza (donde se hace una integración matemática de la información recibida). Esto se debe a que el diámetro de los canales semicirculares es muy pequeño, aproximadamente de $0,3 \text{ mm}$ (Corke et al., 2007); en consecuencia, la deflexión de la cúpula causada por el movimiento de la endolinfa está en fase con la velocidad angular.

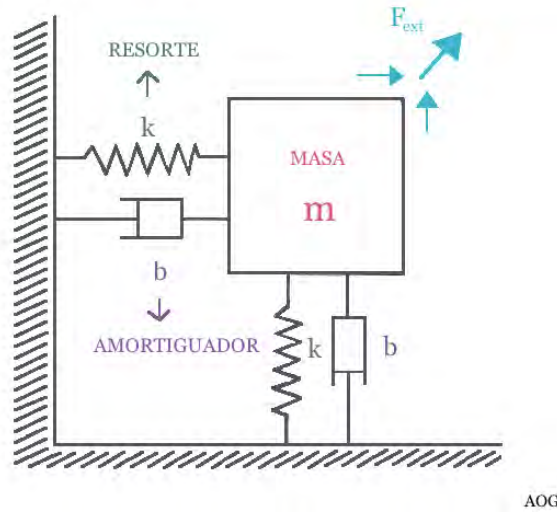


Figura 4.1: La masa de prueba m tiene adheridos dos conjuntos acoplados de resortes y amortiguadores perpendiculares entre sí. Cada conjunto de resorte-amortiguador representa una oscilación armónica forzada en un eje de propagación diferente.

Como se está trabajando con canales semicirculares de dimensiones muy pequeñas entonces el movimiento rotacional puede convertirse en un movimiento lineal medible mediante el efecto Coriolis, mismo que se refiere a la generación de una fuerza ficticia perpendicular al movimiento del cuerpo sometido a un sistema no inercial (Ohanian and Markert, 2006). Si un observador en el plano XY que está rotando alrededor del eje Z ve una partícula moviéndose a velocidad v en el espacio, por la rotación del sistema coordinado la partícula describirá una trayectoria en el plano con aceleración $2v \times \Omega$ desde el punto de vista del observador. Donde v es la velocidad de la trayectoria del objeto y Ω es la velocidad del objeto de acuerdo al sistema coordinado en rotación.

En la sección 2.4 se mencionó que los giroscopios son sensores que miden la razón de rotación de un objeto, por lo que el análisis planteado por Zeng and Zhao (2011) describe la construcción de un medidor de aceleración angular a partir de dos sistemas masa-resorte-amortiguador posicionados de forma perpendicular entre sí. Donde cada sistema analiza el movimiento en un eje del plano de rotación alrededor del eje Z .

A partir del sistema representado en la figura 4.1, se proponen las ecuaciones que describen al movimiento como

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x x &= F_x \\ m\ddot{y} + b_y\dot{y} + k_y y &= F_y - 2m\Omega\dot{x} \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde x, y son los desplazamientos de la masa de prueba en las direcciones de los ejes X, Y , respectivamente; b_x, b_y son los coeficientes de amortiguamiento; k_x, k_y son las constantes de resorte; F_x, F_y son las fuerzas que provocan la rotación del sistema, y Ω es la velocidad angular del sistema coordinado que gira alrededor del eje Z .

Limitando el problema de acuerdo a la teoría de péndulo de torsión (Hayek, 2004), entonces es posible reescribir el sistema anterior de ecuaciones tal que la torca con la que gira está dada por $\tau = I\ddot{\theta}$ (de acuerdo al capítulo 2), y por la *Ley de Hooke* $\tau = -\sigma\theta$ se obtiene que

$$I\ddot{\theta} + \Gamma\dot{\theta} + \sigma\theta = \tau \cos(\theta) \quad (4.5)$$

donde la ecuación (4.5) tiene forma de oscilaciones armónicas forzadas tal que I es el momento de inercia del giroscopio, la fuerza de fricción $F_{frc} = -\Gamma\dot{\theta}$ está dada en términos del coeficiente de amortiguación Γ dependiente de un factor geométrico del sistema y σ es la constante de torsión.

Acomodando términos tal que

$$I\ddot{\theta} + \sigma\theta = \tau \cos(\theta) - \Gamma\dot{\theta}$$

Multiplicando a la ecuación por $\dot{\theta}$

$$I\dot{\theta}\ddot{\theta} + \sigma\theta\dot{\theta} = \tau\dot{\theta}\cos(\theta) - \Gamma\dot{\theta}^2$$

Y reescribiendo

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma\theta^2}{2} \right) = \tau\dot{\theta}\cos(\theta) - \Gamma\dot{\theta}^2 \quad (4.6)$$

A partir de la ecuación (4.6) es posible observar que la energía del sistema no se conserva porque el sistema no es cerrado. Es decir, la energía continúa cambiando conforme la fuerza externa sigue afectando al sistema (la torca que lo hace rotar). Si la fuerza externa deja de actuar sobre el modelo propuesto, entonces por el amortiguamiento de la masa la energía decrece hasta que las oscilaciones se detienen y el sistema regresa a su equilibrio.

Para conocer los valores de la masa por unidad de volumen, el coeficiente de amortiguamiento y la constante de resorte, Rabbitt et al. (2004) proponen lo siguiente: sea ρ la densidad de la masa (la cúpula o la masa otolítica, en conjunto con las vellosidades celulares de cada zona) o de la endolinfa, A_{cs} el área de los canales semicirculares (individuales) y el área $A_{c,mo}$ de la cúpula/masa otolítica (con L la longitud de la zona), μ la viscosidad dinámica de la endolinfa y T la rigidez de la cúpula o la mácula, al integrar sobre la superficie analizada se llega a

$$m = \oint \frac{\rho}{A_{cs}} ds \quad (4.7)$$

$$b = \oint \frac{\mu V}{A_{cs}^2} ds \quad (4.8)$$

$$k = \oint \frac{TV}{LA_{c,mo}^2} ds \quad (4.9)$$

En el caso de la ecuación (4.5), el momento de inercia va como $I = m\mathcal{R}^2$, donde \mathcal{R}^2 representa superficie geométrica del sistema; mientras que la constante de amortiguación $\Gamma = b\mathcal{R}^2$ y la constante de torsión $\sigma = k\mathcal{R}^2$ también dependen del mismo factor de superficie.

4.2. Modelo descriptivo de la perturbación de las máculas del utrículo y el sáculo

Tomando una masa de prueba m , misma que equivale a toda masa otolítica, que está suspendida y adherida a una pared por un resorte de constante k y un amortiguador con coeficiente b , donde el amortiguador reduce de manera gradual a la fuerza externa aplicada sobre la masa de prueba para moverla y el resorte provoca una oscilación equivalente a la fuerza inercial propia de la masa (misma que genera un movimiento relativo entre la pared de soporte y la masa de prueba).

Si se aplica un esfuerzo sobre el sistema para mover la masa de prueba a una distancia dada, ya sea en el eje X o en el eje Y , por separado, se aplica una fuerza externa F_{ext} que perturba al sistema fuera de equilibrio y se provoca una oscilación amortiguada.

Así,

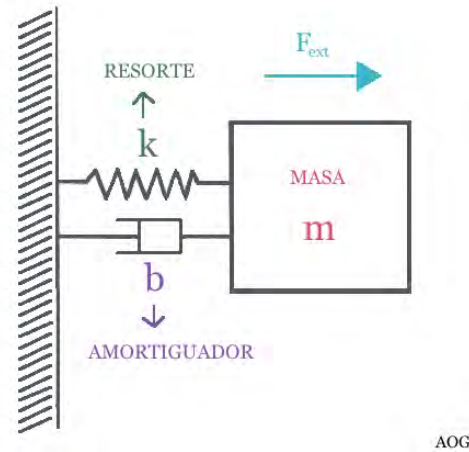


Figura 4.2: La masa de prueba m tiene adherido un conjunto acoplado de un resorte y un amortiguador.

- I) Para el caso de la aceleración lineal horizontal, si la masa se desplaza una distancia x en dirección positiva al eje de propagación, la ecuación de movimiento de segundo orden es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext} \sin(ft) \quad (4.10)$$

donde t es la variable temporal, $F_{ext} \sin(ft)$ la magnitud de la fuerza en dirección positiva al eje X y f es la frecuencia angular de la aceleración externa.

- II) Mientras que para el caso de la aceleración de la gravedad es necesario agregar el peso de la masa de prueba, entonces

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + mg = F_{ext} \cos(ft) \quad (4.11)$$

En un sistema experimental de laboratorio, la única variable a determinar debe ser la aceleración la que la masa m oscila, ya que todas las demás constantes y

variables se conocen (como la velocidad de movimiento y la magnitud de desplazamiento). Esta medición la realizan de manera natural las vellosidades celulares dentro del complejo vestibular.

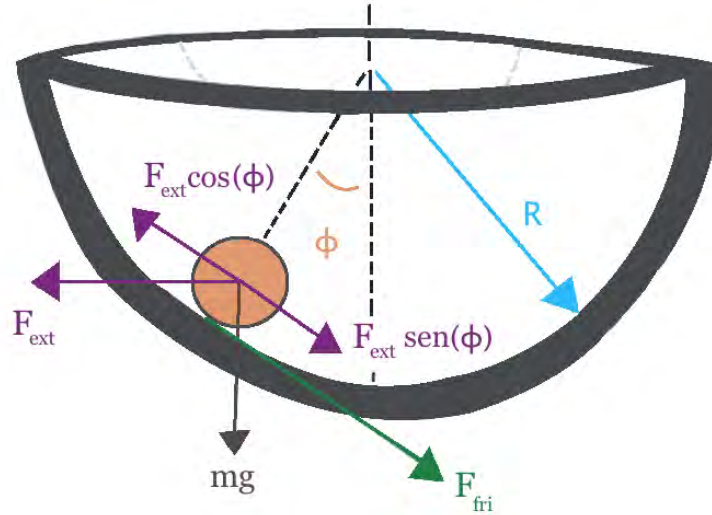
Análogo al caso de la energía del movimiento rotacional, para la suma de fuerzas internas $F_{int} = -b\dot{x}_i - kx_i$ de las ecuaciones (4.13) y (4.14) se obtiene

$$\frac{dE_{tras,x}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = F_{ext}\dot{x} \sin(ft) - b\dot{x}^2 \quad (4.12)$$

$$\frac{dE_{tras,y}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2} \right) = F_{ext}\dot{y} \cos(ft) - b\dot{y}^2 - mg\dot{y} \quad (4.13)$$

4.3. Análisis de una perturbación sobre las vellosidades celulares del utrículo, sáculo y ámpula

Una propuesta interesante que facilita el análisis matemático de la descripción del movimiento lineal y rotacional de la cabeza plantea directamente un método de análisis sobre las vellosidades celulares y cómo éstas son perturbadas.



AOG

Figura 4.3: La pelota m se encuentra dentro de un sistema esférico. Cuando se desplaza de su punto de equilibrio un ángulo ϕ , su peso y la geometría del sistema hacen que regrese a su estado inicial.

Suponiendo una masa esférica m colocada en la mitad de una carcasa esférica de radio R que está llena de un fluido de densidad igual a la endolinfa y considerando que cuando una fuerza externa F_{ext} es aplicada sobre el sistema, entonces el fluido se mueve junto con la carcasa esférica, figura 4.3. La fuerza inercial de la esfera hace que ésta quede en reposo (Thornton and Marion, 2003) hasta que la perturbación aplicada sea igual o mayor que una fuerza de umbral F_{umb} límite. Así, si se cumple $F_{ext} \geq F_{umb}$ entonces el fluido se moverá junto con la carcasa.

Sea \mathbf{x} el desplazamiento relativo de la masa esférica y b el coeficiente de amortiguamiento provocado por la viscosidad del fluido y su capacidad de adherirse a un sólido, entonces la masa esférica se verá afectada por la acción de la gravedad y la componente tangencial de ésta a lo largo de la superficie proporcionará la fuerza de restauración que obligará a la masa perturbada a regresar a su punto de origen (en el polo de la carcasa esférica).

Considerando que el movimiento sólo se realice en una dirección, mismo que se puede generalizar para las tres direcciones espaciales, la ecuación que expresa el movimiento de la esfera (Zeng and Zhao, 2011), es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + mg \operatorname{sen}\left(\frac{x}{R}\right) = F_{ext} \operatorname{sen}(ft) \cos\left(\frac{x}{R}\right) \quad (4.14)$$

donde se observa que la masa esférica se moverá dependiendo de si la fuerza externa es mayor que la viscosidad del fluido, de su peso y la geometría del sistema; es decir, entre mayor sea la fuerza, la esfera se alejará aún más de su punto de equilibrio.

Ahora, considerando el cambio de posición como una longitud de arco tal que $x = \phi R$, al hacer el cambio de variable se llega a

$$mR\ddot{\phi} + bR\dot{\phi} + mg \operatorname{sen}(\phi) = F_{ext} \operatorname{sen}(ft) \cos(\phi)$$

Sea $\eta = \frac{b}{R}$, $\beta = \frac{g}{R}$ y $F_{ext}^* = \frac{F_{ext}}{R}$, entonces se puede reescribir a la ecuación anterior como

$$m\ddot{\phi} + \eta\dot{\phi} + m\beta \operatorname{sen}(\phi) = F_{ext}^* \operatorname{sen}(ft) \cos(\phi) \quad (4.15)$$

De manera que, la energía del modelo propuesto para el comportamiento de las vellosidades celulares, en analogía con las ecuaciones (4.6), (4.15) y (4.16), queda como

$$\frac{dE_{vell}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\phi}^2}{2} \right) = F_{ext}^* \dot{\phi} \operatorname{sen}(ft) \cos(\phi) - \eta\dot{\phi}^2 - m\beta\dot{\phi} \operatorname{sen}(\phi) \quad (4.16)$$

donde se observa que la energía de las vellosidades celulares disminuye conforme la fuerza externa disminuye.

4.4. Extensión de los modelos al estudio de tres canales semicirculares acoplados

Patane et al. (2004) proponen extender el análisis de cada canal semicircular a uno donde estén acoplados los tres canales, independientemente del modelo escogido. Esta tarea no es fácil de realizar ya que el movimiento de la endolinfa en uno de ellos afecta al flujo de la misma en los otros dos; esto se debe a que de los tres canales, el posterior y superior tienen su origen en una misma raíz. Para ello se toman los modelos propuestos previamente, pero ahora el desplazamiento \mathbf{x} estará dado en términos de un desplazamiento volumétrico ΔV de la endolinfa por cada canal tal que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta V_{CL} \\ \Delta V_{CS} \\ \Delta V_{CP} \end{pmatrix}$$

donde CL = canal semicircular lateral, CS = canal semicircular superior, CP = canal semicircular posterior.

Para determinar la razón de cambio angular de todo el sistema, formado por los tres canales en conjunto, Rabbitt (1999) propone utilizar una matriz ortonormal de rotación ON aplicada a la masa volumétrica, el coeficiente de amortiguamiento y la constante de resorte

$$ON = \begin{pmatrix} CL & SU & UP \\ SU & CS & SC \\ UP & SC & CP \end{pmatrix}$$

donde SU = sección superior del vestíbulo, UP = sección posterior del vestíbulo y SC = sección en común entre los canales semicirculares posterior y superior.

Así, la ecuación a resolver, a partir de (4.5), estaría dada de la siguiente manera

$$I_{ON}\ddot{\mathbf{x}} + \Gamma_{ON}\dot{\mathbf{x}} + \sigma_{ON}\mathbf{x} = \tau_{ON} - \Delta P \quad (4.17)$$

donde es necesario considerar el cambio de la presión entre cada canal semicircular y el vestíbulo

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \Delta P_{CL} \\ \Delta P_{CS} \\ \Delta P_{CP} \end{pmatrix}$$

Suponiendo que se ha encontrado alguna forma de darle solución analítica y no caótica a la ecuación (4.17), para modelar completamente al complejo vestibular es necesario unir la información tanto del movimiento rotacional (proveniente de los canales semicirculares) y la del movimiento lineal (proveniente del utrículo y del sáculo). Además se necesita ordenar la información de los dos complejos vestibulares en el humano y cómo es que el cerebelo interpreta las señales de ambos y manda las respuestas sensoriales y espaciales a todo el cuerpo.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

Como consecuencia de la información presentada, se consideran tres puntos fundamentales a partir del análisis realizado sobre equilibrio humano: 1) las características de las fuerzas externas que perturban al complejo vestibular, 2) la funcionalidad de los modelos analizados, y 3) sus consecuencias fisiológicas. Estos puntos son importantes porque permiten: determinar las condiciones bajo las que el cerebelo procesa la información en una situación dada para que el sistema nervioso reaccione ante ésta, modelar el funcionamiento del complejo vestibular para después reproducirlo en diferentes aplicaciones, y estudiar casos particulares donde la información que llega al cerebelo está incompleta o sobrecargada.

5.1. Características de una perturbación en el complejo vestibular

Como se mencionó en la sección 2.1.2, para que un sistema inercial esté en equilibrio es necesario que las ecuaciones (2.5) y (2.16) cumplan con las condiciones

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (5.2)$$

donde la ecuación (5.1) especifica que no hay alguna perturbación que acelere linealmente al sistema, mientras que la ecuación (5.2) especifica que no se provoca la rotación del sistema.

Sin embargo, al hablar de un sistema físico real, como el complejo vestibular, se hace referencia a un sistema no inercial¹, es decir, un sistema que siempre está sometido a constantes perturbaciones externas que lo aceleran lineal o rotacionalmente. Por ejemplo, el cuerpo de un soldado en descanso nunca está quieto ya que se mueve de un lado a otro, con un desplazamiento mínimo pero significativo, debido a la enorme cantidad de fuerzas externas que actúan sobre él (como la gravedad o el movimiento leve del suelo, por mencionar algunas).

¹Un sistema no inercial describe un movimiento acelerado, lineal o rotacional con respecto a otro que está en reposo.

Según Silver et al. (1998), el laberinto óseo mide entre $800\mu\text{m}$ y $900\mu\text{m}$ y es suficientemente rígido como para transmitir directamente el movimiento de la cabeza hasta el complejo vestibular². Sin embargo, al ser éste tan sensible requiere que la perturbación provocada se transmita al oído interno de manera atenuada para su fácil y rápido análisis; de esto se encarga la perilinfa que rodea al laberinto membranoso (Yamauchi, 2002). Por otro lado, la endolinfa también amortigua la intensidad con la que las vellosidades celulares se ven afectadas. Así, la información recibida analizada en los dos complejos vestibulares es tan precisa que es posible detectar pequeñas y breves fuerzas externas que afectan a la cabeza, como un ligero sismo. En dado caso que la fuerza externa fuera tan intensa que la amortiguación no llegara a ser la suficiente, entonces el complejo vestibular se sobreexcitaría y no alcanzaría a analizar la información rápidamente.

El cuerpo humano está adaptado por naturaleza al campo gravitacional siempre presente en la Tierra. Esto define un umbral F_{umb} de fuerzas externas “tolerables” alrededor de la aceleración de la gravedad, donde el valor de éste puede variar entre cada persona dependiendo de características individuales que pueden ser modificadas al someter la cabeza a un arduo entrenamiento, como se verá en la sección 5.3.

Con esto, es posible caracterizar a una fuerza externa F_{ext} que perturbe al complejo vestibular en tres tipos:

1. $F_{ext} < F_{umb}$, la fuerza externa actúa como una perturbación “tolerable” que no provoca alguna reacción significativa por parte del cuerpo humano. Un ejemplo de este tipo de fuerza es la gravitacional a la que el complejo vestibular, específicamente los otolitos, está(n) adaptado(s). En este trabajo se considera que cuando las fuerzas externas actuando sobre el complejo vestibular son de este tipo, entonces el sistema está en “equilibrio”.
2. $F_{ext} \approx F_{umb}$, la fuerza externa provoca un reflejo³ por parte del cuerpo humano en milésimas de segundo. En este caso, el ser humano es consciente de cualquier perturbación de este tipo pero la respuesta generada no requiere su total concentración; se da en automático, como el caso de estar parados o colisionar breve y levemente con otro objeto.
3. $F_{ext} > F_{umb}$, la fuerza externa es percibida en su totalidad por el complejo vestibular y la respuesta no siempre es inmediata pero involucra la acción de todo el cuerpo, como el re-direccionar la vista, mover los músculos y huesos, e incluso puede presentarse la producción de una descarga de adrenalina.

Como las perturbaciones en el complejo vestibular hacen que se flexionen las vellosidades celulares y se liberen iones que activan un flujo de potasio y calcio haciendo que se generen potenciales de acción, se presenta una transducción mecano-eléctrica que involucra la transformación del movimiento de los receptores sensoriales en una diferencia de voltaje que excitan a las neuronas de primer orden (como se mencionó

²El movimiento de la cabeza se transmite directamente al oído interno porque el laberinto óseo está fijo al hueso temporal de la cabeza.

³Un reflejo es una respuesta involuntaria y automática que realiza un ser vivo por el efecto a un estímulo determinado.

en la sección 1.2). Dependiendo de la intensidad y tiempo de duración de la perturbación, la frecuencia con la que se desarrollan los potenciales de acción y la magnitud que alcanzan será diferente. Cuando la excitación no produce una suficiente diferencia de potencial necesaria para excitar a una neurona es porque la fuerza externa cumple con $F_{ext} < F_{umb}$.

Un primer acercamiento al estudio del equilibrio fue considerar que el movimiento del cuerpo humano se asemeja al de un giroscopio, mismo que está en constante movimiento rotacional alrededor de un eje inercial (equilibrio dinámico). Cuando es perturbado por un agente externo, provocando una torca de la forma de la ecuación (2.32), aparece una fuerza de restitución como consecuencia del momento que lleva el rotor que lo re-estabiliza, como se explicó en la sección 2.4.2. Dicha perturbación puede ser de dos tipos:

- I. Si la perturbación F_{ext} es menor que el momento angular L del rotor, dado por la ecuación (2.23), entonces el giroscopio realizará una precesión y una nutación, determinadas por la intensidad de F_{ext} , hasta regresar a su posición de equilibrio.
- II. Pero si F_{ext} es mucho mayor que L , entonces el sistema se vuelve no inercial y su energía se disipará hasta que el momento angular del giroscopio cambie de dirección. Es decir, cuando $F_{ext} \gg F_{umb}$ el complejo vestibular no puede reaccionar a tiempo y el ser humano pierde el equilibrio.

Cuando un ser humano padece algún trastorno del equilibrio, su complejo vestibular recibe demasiada información al mismo tiempo, provocando que el nervio vestibular se sature y el cerebelo no pueda identificar la causa de la perturbación rápidamente y dar una respuesta eficiente acorde a ésta, como se verá en la sección 5.3.

Sin embargo, como se mencionó al inicio de este trabajo, si bien la aproximación del equilibrio humano como el comportamiento de un giroscopio es viable y suficiente, los estímulos externos recibidos son tan complejos que fue necesario ampliarla con modelos más detallados que consideran la información rotacional y lineal proveniente de los dos complejos vestibulares (como se hizo en los capítulos 3 y 4). Sin embargo, todavía falta enriquecer y proponer nuevos modelos que además retomen la información obtenida a partir de los sentidos de la visión y la propiocepción.

Una característica final de la fuerza externa que perturba al complejo vestibular es que no es conservativa ya que no siempre están actuando sobre el sistema. Es decir, cuando el sistema es perturbado, la endolinfa realiza un trabajo sobre la cúpula, y la masa otolítica para flexionar a las vellosidades celulares. Cuando la fuerza externa cesa, la energía acumulada empieza a “gastarse” haciendo que el sistema regrese a un estado natural de equilibrio. De esta manera, al no haber una conservación de la energía, sino una disipación, entonces la ecuación (2.31) cumple con la condición

$$Q'_{ext} < 0 \tag{5.3}$$

y, en consecuencia, la energía propia del sistema es mucho mayor que la energía provocada por las perturbaciones externas cada vez más pequeñas (cuando el sistema

regresa a su equilibrio), que no pasan de la fuerza de umbral para excitar al complejo vestibular,

$$(T_{ext} + U_{ext}) < (T_{int} + U_{int}) \quad (5.4)$$

Luego entonces, el proceso del equilibrio humano se desarrolla de la manera siguiente: primero se lleva a cabo un *proceso mecánico* provocado por el movimiento de la cabeza que flexiona a las vellosidades celulares por acción del desplazamiento de la endolinfa contenida en el complejo vestibular, posteriormente se desencadena un *proceso neurobiológico* consecuente de la transducción de movimiento mecánico a señales eléctricas a partir de la generación de potenciales de acción gracias a la liberación de iones por la flexión de los receptores sensoriales, y, finalmente, se desarrolla un *proceso psicofísico* en donde los impulsos nerviosos generados por la excitación de las neuronas contenidas en el nervio vestibular son interpretados por el sistema nervioso central.

DE ACUERDO AL DESARROLLO DEL OBJETIVO CENTRAL DE ÉSTE TRABAJO, EL PROCESO MECÁNICO DEL EQUILIBRIO HUMANO DEPENDE DIRECTAMENTE DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA FUERZA EXTERNA, DEBIDO A QUE LA INTENSIDAD Y FORMA DEL MOVIMIENTO DE LA CABEZA DETERMINAN EL TIPO DE RESPUESTA QUE EL CEREBELO DARÁ A PARTIR DE LA INFORMACIÓN NERVIOSA OBTENIDA.

5.2. Interpretación de los modelos físicos

En la tabla 5.1 se concentran las ecuaciones más importantes de los modelos analizados en este trabajo sobre el funcionamiento del complejo vestibular. Como se ve, todas están escritas en términos de variables físicas medibles –el desplazamiento de la cúpula o masa otolítica, y las velocidades de movimiento de la endolinfa o las masas de prueba– y características fisiológicas –la densidad, rigidez, presión, viscosidad, etc.– propias del sistema. El único valor a encontrar es la aceleración con que la perturbación afecta al sistema, logrando así determinar cómo es la reacción efectuada por las vellosidades celulares a partir de las consecuencias de la fuerza externa .

Los seres humanos mantienen estable su cabeza de manera espontánea y automática durante el movimiento debido a la integración de la información de las mediciones de rotación dadas por los canales semicirculares y las mediciones de las traslaciones dadas por el utrículo y el sáculo. Las características más importantes de los modelos analizados que describen cómo se realizan estas acciones son las siguientes:

	Aproximación de un fluido incompresible	Aproximación con oscilaciones armónicas forzadas
Sección	3.1.1 Canales semicirculares + endolinfa	4.1 Canales semicirculares + giroscopio
Ecuación de movimiento	$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \left(\frac{a^2(1+\gamma/\beta)}{v\omega} \right) = -\epsilon \int_0^t \int_0^a \mathbf{u}(\varrho, \tau) \varrho d\varrho \tau + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial r'} \right)$	$I\ddot{\theta} + \Gamma\dot{\theta} + \sigma\theta = \tau \cos(\theta)$
Condiciones iniciales	$\mathbf{u}'(r, 0) = 0$	$\dot{\theta}(\theta, 0) = 0$
Condiciones de frontera	$\mathbf{u}'(1, t) = \frac{\partial \mathbf{u}'(0, t)}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial \dot{\theta}(0, t)}{\partial \theta} = 0$
Energía	$\rho \frac{D}{Dt} \left(\Lambda + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) = \rho \dot{q} + \lambda \nabla \cdot (\nabla \cdot T) - \nabla \cdot (\mathbf{u}' P) + \nabla \cdot (\tau_{ij} \mathbf{u}') + \rho \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{u}'$	$\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma\theta^2}{2} \right) = \tau\dot{\theta} \cos(\theta) - \Gamma\dot{\theta}^2$
Sección	3.1.2 Cúpula + membrana	4.2 Máculas y ámpulas + acelerómetro
Ecuación de movimiento	$\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel} = \nabla^2 \left(\frac{T}{\rho L} \xi + v\xi \right)$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext} \sin(ft)$ $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + mg = F_{ext} \cos(ft)$
Condiciones iniciales	$\dot{\xi}(r, 0) = 0$	$\dot{x}(x, 0) = 0$ $\dot{y}(y, 0) = 0$
Condiciones de frontera	$\dot{\xi}(a, t') = \frac{\partial \xi(r', t')}{\partial r'} = 0$	$\frac{\partial \dot{x}(0, t)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial \dot{y}(0, t)}{\partial y} = 0$
Energía	-----	$\frac{dE_{tras,x}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = F_{ext}\dot{x} \sin(ft) - b\dot{x}^2$ $\frac{dE_{tras,y}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2} \right) = F_{ext}\dot{y} \cos(ft) - b\dot{y}^2 - mg\dot{y}$
Sección	3.1.2 Cúpula + pistón	4.3 Vellosidades celulares + pelota
Ecuación de movimiento	$\ddot{\xi} + \frac{8v}{a^2}\dot{\xi} + \frac{\xi}{m}\xi = -R\alpha$	$m\ddot{\phi} + \eta\dot{\phi} + m\beta \sin(\phi) = F_{ext}^* \sin(ft) \cos(\phi)$
Condiciones iniciales	$\dot{\xi}(y, 0) = 0$	$\dot{\phi}(\phi, 0) = 0$
Condiciones de frontera	$\dot{\xi}(a, t) = 0$	$\frac{\partial \dot{\phi}(0, t)}{\partial \phi} = 0$
Energía	-----	$\frac{dE_{vell}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\phi}^2}{2} \right) = F_{ext}^* \dot{\phi} \sin(ft) \cos(\phi) - \eta\dot{\phi}^2 - m\beta\dot{\phi} \sin(\phi)$

Cuadro 5.1: Ecuaciones más importantes para la descripción del complejo vestibular.

1) *Estudio del comportamiento del complejo vestibular a partir del análisis de un fluido pseudo-newtoniano.*

- a. Las ecuaciones de movimiento descritas en la segunda columna de la tabla tienen forma de Navier-Stokes; es decir, analizan el movimiento de la endolinfa como un fluido pseudo-newtoniano a lo largo del canal semicircular y la perturbación que causa en la cúpula al ejercer presión sobre ella. De acuerdo a Rabbitt et al. (2004), se puede asumir un comportamiento Navier-Stokes por parte de la endolinfa porque su viscosidad es independiente del esfuerzo de corte.
- b. Considerando que la cúpula es una barrera entre la endolinfa y el fluido del ámpula que contiene a las vellosidades celulares, de densidad $\kappa \approx \rho$, por su naturaleza elástica actúa como una tensión superficial entre ambos flujos propiciando una amortiguación que retarda la propagación de la fuerza con la que viaja la endolinfa hasta las vellosidades celulares.
- c. La ecuación (3.5) está escrita en su forma conservativa para fluidos newtonianos, sin embargo, para el problema del complejo vestibular, las fuerzas internas de la endolinfa sí son conservativas pero la fuerza externa que perturba al sistema (la que pone en movimiento a la endolinfa) no lo es. Esto se ve claramente en las soluciones de la ecuación (3.13), donde el movimiento se disipa con forma de función de Bessel a partir de una perturbación de corta duración.
- d. En este trabajo se retomaron los modelos que consideran que el ámpula está conectado al vestíbulo y que la cúpula funge como división entre éste y el canal semicircular, como fisiológicamente se ha demostrado (Frick et al., 1981); de manera que el fluido perturbado por la cúpula membrana-pistón es siempre la endolinfa de densidad ρ . Si se considera que el ámpula es un punto ciego de un canal semicircular, como lo representan Martini et al. (2014), entonces la cúpula perturbada por la endolinfa tiene densidad κ , donde $\kappa \approx \rho$. Para este segundo caso sería necesario reescribir las ecuaciones (3.15) y (3.20) haciendo referencia a que después de la membrana-pistón se encuentra la pared del ámpula que absorbe parte de su vibración y la regresa a la endolinfa; es decir, la cúpula regresa la perturbación que la endolinfa le provocó en menor intensidad.

2) *Interpretación del complejo vestibular como una unidad de medición inercial.*

- a. En este trabajo se considera que la endolinfa se mueve como un solo volumen de densidad ρ y que el movimiento de la m_p representa al movimiento de todas las vellosidades, de la cúpula o de la mácula, en vez de considerar que las ecuaciones mostradas en la tabla 5.1 representan el movimiento de elementos infinitesimales. Por lo mismo, no es necesario hacer una integración de la información de un número i de elementos analizados.

Además, la resistencia al movimiento de la masa debido a la viscosidad de la endolinfa que rodea a la cúpula y la masa otolítica está dada por el coeficiente de amortiguación b . La fuerza inercial propia de cada sistema es $m\ddot{x}$ y la constante de oscilación k representa el movimiento periódico causado por la fuerza externa no conservativa.

- b. Cuando las fuerzas externas de las ecuaciones (4.5), (4.10), (4.11), (4.15) van como $F_{ext} = 0$, para que se cumpla la igualdad, es necesario que el valor del desplazamiento de la masa de prueba sea cero. Es decir, hay una disipación del movimiento del sistema que hace la energía sea cada vez menor hasta que m_p se mantenga en reposo.
- c. En la analogía del giroscopio y un canal semicircular, la fuerza externa provocará el grado de precesión con la que se moverá el giroscopio. Si F_{ext} es menor que la fuerza de restauración, entonces el giroscopio podrá regresar a su eje de equilibrio; es decir, la torca de la ecuación (4.5) tendrá la forma de la ecuación (2.32). En caso de que la fuerza externa desestabilice por completo al giroscopio, las vellosidades del ámpula no podrán mandar la información analizada suficientemente rápido al sistema nervioso.
- d. La frecuencia de oscilación f del resorte depende directamente de la continuidad y variación de la fuerza externa F_{ext} aplicada. Entre mayor tiempo dure la perturbación, entonces la frecuencia aumentará hasta saturar al complejo vestibular haciendo que éste no pueda individualizar la información provocando que el sistema nervioso central no pueda dar una respuesta a tiempo para mantener el equilibrio.
- e. La finalidad de una UMI es mantener el equilibrio y estabilidad del dispositivo que la utiliza cuando es perturbado por diversas fuerzas externas. En comparación, en los humanos y en los animales el sistema vestibular está localizado en la cabeza y cumple con las mismas funciones.

Para el problema del complejo vestibular es necesario considerar un giroscopio por cada eje de rotación –el movimiento alrededor de los ejes vertical (virada o guiñada), transversal (cabeceo o arfada) y longitudinal (escora)– y a un acelerómetro por cada dirección traslacional –el movimiento en las direcciones vertical (ascenso o descenso), lateral (ronza o abatimiento) y longitudinal (avance o retroceso), (Llusá Di Nucci, 2009).

Una configuración típica de una UMI utilizada para robots o dispositivos de navegación consta de tres acelerómetros y tres giroscopios colocados justo en el centro de masa del sistema, perpendiculares entre sí, logrando manejar con precisión la navegación, orientación, balance y control de altitud en todo el espacio, independientemente de las referencias visuales y físicas externas.

En los modelos analizados el estado de equilibrio del complejo vestibular es de absoluto reposo, situación que, como ya se explicó en la sección 5.1, no es la real (ya que el sistema está siempre bajo perturbaciones constantes). Es decir, las aproximaciones estudiadas solo pueden explicar el comportamiento del complejo vestibular cuando $F_{ext} > F_{umb}$ y cuando $F_{ext} = 0$. Es difícil proponer un modelo que explique los casos donde $F_{ext} \approx F_{umb}$ y $F_{ext} < F_{umb}$ ya que, hasta la fecha, no se entiende cómo es que el ser humano está adaptado a fuerzas menores que el umbral de acción (Corke et al., 2007; Rabbitt et al., 2004; Sadovnichii et al., 2001; Zeng and Zhao, 2011). Por ejemplo, aún no se sabe cómo es que el utrículo y el sáculo pueden diferenciar entre una aceleración gravitacional y una lineal horizontal y cómo es que los humanos pueden estar rígidos y parados en dos piernas sin perder el equilibrio fácilmente.

Además, sólo la ecuación de movimiento (4.14), que corresponde a la analogía del sáculo con un acelerómetro, considera directamente el efecto de la gravedad ya que los canales semicirculares no tienen otolitos que presionen, por su propio peso, a las vellosidades celulares contenidas en las ámpulas. Si bien el utrículo también tiene otolitos que presionan a los receptores sensoriales, como su función es analizar la aceleración lineal horizontal, entonces el modelo físico que lo representa no considera a la gravedad.

De esta manera, las vellosidades celulares de los canales semicirculares sólo dan dirección mientras que las contenidas en las máculas, dirección y magnitud (por contener a los otolitos). De los canales semicirculares, solo el lateral concuerda con el plano transversal del cuerpo, los demás están rotados a 45° por lo que el canal semicircular analizado en los capítulos 3 y 4 es el posterior con la finalidad de estudiar el equilibrio del cuerpo humano en posición recta. Para analizar en dicha posición el efecto en los otros canales semicirculares, será necesario hacer un cambio de coordenadas.

Finalmente, una vez obtenidas las características de la perturbación externa y la información rotacional y traslacional analizada por el complejo vestibular, las vellosidades celulares provocan una transducción mecano-eléctrica que genera una corriente dinámica en las fibras nerviosas de los receptores sensoriales. Una vez realizada una transmisión sináptica, la información llega al sistema nervioso y de ahí pasa a las neuronas para su interpretación. Una forma de describir cómo el flujo iónico provoca potenciales de acción es a partir del modelo de Hodgkin y Huxley, (Nelson, 2005). Sin embargo, para poder representar la transmisión de información de una neurona a otra es necesario proponer modelos más complejos que estudien la frecuencia con la que se generan los potenciales de acción. Es decir, si el sistema nervioso central es de frecuencia modulada, entonces entre mayor sea el estímulo, a una determinada amplitud habrá un mayor número de oscilaciones por segundo a medir.

A PARTIR DE LO ANTERIOR, LA APROXIMACIÓN QUE CONSIDERA A LA ENDO-LINFA COMO UN FLUIDO SEUDO-NEWTONIANO QUE EMPUJA A UNA MEMBRANA-PISTÓN Y PROVOCA UNA PERTURBACIÓN EN LAS VELLOSIDADES CELULARES PERMITE *MODELAR* EL COMPORTAMIENTO BIOLÓGICO NATURAL DEL COMPLEJO VESTIBULAR, MIENTRAS QUE LA APROXIMACIÓN DEL SISTEMA COMO UNO SOMETIDO A OSCILACIONES ARMÓNICAS FORZADAS DA LA POSIBILIDAD DE *REPRODUCIR* LA FORMA EN QUE EL COMPLEJO ANALIZA EL EQUILIBRIO Y APLICAR DICHO ESTUDIO A LA MEJORA DE UNIDADES DE MEDICIÓN INERCIAL.

5.3. Consecuencias fisiológicas de los modelos analizados

El ser humano puede mantener el equilibrio ante cualquier fuerza externa que lo perturbe gracias a la integración sinérgica⁴ de la información recibida del complejo

⁴Conjunto de actividades de varios órganos que se mezclan para realizar una sola función.

vestibular, la vista⁵ y el sistema somatosensorial; la ausencia de alguno de estos tres sentidos trae consigo su pérdida. Sin embargo, el arduo entrenamiento fisiológico permite conservarlo aún cuando la información que recibe el cerebelo es incompleta.

Algunos casos interesantes de analizar en donde no hay respuestas apropiadas o ideales para mantener el equilibrio, son los siguientes:

- 1) *Ausencia del sentido de la vista*: una persona ciega tiene mayor dificultad en mantener el equilibrio porque además de no tener un sentido visual de espaciamiento, tampoco puede centrar un punto de origen en el horizonte a manera que los complejos vestibulares estén acomodados en un estado ideal⁶.

La razón de la estrecha relación entre el sentido de la visión, el sentido del equilibrio y la propiocepción, es que las fibras nerviosas del nervio vestibulococlear están conectadas a la parte inferior del cerebelo, donde también se conectan los nervios que regulan el movimiento ocular, el de la cabeza y el del cuello (Tortora and Reynolds, 2002). Así, si cerebelo no recibe la información de referencia espacial proveniente de la vista entonces será más complicado mantener un equilibrio estable de todo el cuerpo por falta de datos.

- 2) *Ausencia de la propiocepción*: un ejemplo de esto es el caso de una nave espacial en órbita donde parece que los astronautas están “flotando”, pero en realidad están en una “caída libre” constante⁷. Como se mencionó en la sección 1.2, cuando un elevador empieza a descender el ser humano siente que está flotando porque los otolitos dejan de presionar a las vellosidades celulares por unos instantes. En el caso de los astronautas en el espacio, ellos junto con la nave están “cayendo” constantemente hacia el suelo por acción de la gravedad, pero como la Tierra es redonda, entonces dan vueltas alrededor de ella con la velocidad inicial con la que fueron propulsados. Así, como los astronautas caen junto con la nave también los otolitos caen a la misma velocidad que el complejo vestibular, de manera que no hay presión sobre las vellosidades celulares y no es posible detectar alguna aceleración lineal. Es aquí donde los astronautas sienten que están flotando todo el tiempo, cuando en realidad su cerebelo no recibe señales somatosensoriales. La única información analizada sobre el movimiento de la cabeza es el de las ámpulas de los canales semicirculares cuando los astronautas se giran de un lado a otro (cosa que hacen bastante seguido), porque al momento en que la nave está en constante rotación la endolinfa ocupa en su totalidad a los canales y las vellosidades celulares se flexionan por acción de la cúpula perturbada.

Para que los astronautas no se mareen mientras están en las naves espaciales o cuando éstas salen o entran de la Tierra, y se mueven con aceleraciones mayores que la de la gravedad (López et al., 2004), se someten a un arduo entrenamiento

⁵El sentido de la visión se encarga de regular la posición horizontal de la cabeza para proporcionar el plano de referencia transversal del complejo vestibular.

⁶El estado de posición ideal de los complejos vestibulares es aquel en que el canal lateral concuerda con el plano transversal de una persona con la espalda recta.

⁷Es incorrecto decir que las naves tripuladas están en una zona de “gravedad cero” porque si fuera así entonces se alejarían de la Tierra en línea recta con la velocidad de propulsión. Para quedar en órbita, las naves describen una trayectoria parabólica al momento de salir de la atmósfera.

llamado “Alta Aceleración” (High-G) que consiste en una gran centrifugadora que los pone a dar vueltas alrededor de un eje con aceleraciones que superan la de la gravedad. Poco a poco, los astronautas se acostumbran al movimiento de manera que pueden resistir aceleraciones muy altas por algunos segundos, lo que les permite desarrollarse lo más “normal” posible en una caída con aceleración igual a la de la gravedad (como cuando están en el espacio exterior).

También, se ha propuesto el uso de recursos visuales llamativos (como banderas de colores) que señalen un horizonte siempre presente dentro de las naves para que los astronautas puedan percibir visualmente un punto de referencia y poder ubicarse espacialmente dentro de ellas de manera más precisa.

- 3) *Cómo entrenar al complejo vestibular para modificar la percepción de una fuerza externa:* una de las rutinas más difíciles del ballet es aquella presente en el tercer acto del “Lago de los Cisnes” donde el Cisne Negro da treinta y dos vueltas alrededor de su propio eje (Sugano, 2016). Para que la bailarina pueda girar, una de las plantas de sus pies pasa de estar recargada en el piso a posicionar la pierna en equilibrio con los dedos de los pies mientras que la otra pierna impulsa al cuerpo a dar una vuelta completa en el plano transversal; es decir, provoca una torca como la de la ecuación (4.5). Para mantener constante el movimiento rotacional, la bailarina debe detener su cuerpo unos instantes después de cada vuelta con ambas plantas de los pies en el suelo y volver a impulsarse para generar una nueva torca que ponga su cuerpo a girar.

Cuando la bailarina se detiene para generar una nueva torca, extiende sus brazos para ayudar a mantener el equilibrio (mantener constante el centro de masa en el eje de rotación), y cuando está girando flexiona sus brazos lo más cercano a su cuerpo. Es decir, como en el momento de inercia, dado por la ecuación (2.22), la masa se mantiene constante, para que L sea mayor (o menor) la distancia R , que señala la distribución de la masa de los brazos del exterior hacia el torso, es la que tiene que variar.

La magia de esta rutina consiste en que la pierna que genera la torca de movimiento nunca se detiene: en el momento en que va a generar la torca, está extendida y se mueve de adelante hacia el lado al que el cuerpo girará y después, mientras el cuerpo está girando, se flexiona a la altura de la rodilla de la pierna sobre la que se da el movimiento rotacional. De esta manera, el momento de la pierna en movimiento se transmite al cuerpo de la bailarina y ésta gira de acuerdo a la ecuación (2.23).

Si la bailarina flexiona sus brazos hacia su torso, el momento de inercia disminuye haciendo que la frecuencia angular de rotación tenga que ser mayor. Es ahí cuando la pierna se extiende para generar una nueva torca que pone en rotación a todo el cuerpo.

Hacer esta rutina treinta y dos veces es un gran reto ya que una persona común se marearía después de dar un par de vueltas, por lo que las bailarinas de ballet

tienen que entrenar ardua y constantemente para acostumbrar a su cuerpo a la intensidad de las vueltas dadas. Es decir, obligar a que el complejo vestibular considere que las vueltas dadas en una rutina de este estilo entren en la categoría $F_{ext} < F_{umb}$, haciendo que el equilibrio de todo el cuerpo se dé de manera automática, como un reflejo (caso similar con el entrenamiento de Alta Aceleración).

Un truco que todas las bailarinas de ballet utilizan para evitar el mareo como consecuencia de dar tantas vueltas es tener siempre como puntos de referencia objetos justo en su horizonte visual (Noonan, 2015), generando así un punto de referencia espacial, como se propone también hagan los astronautas.

- 4) *Aplicación médica del modelo de la endolinfa como un fluido pseudo-newtoniano*: como se mencionó en la sección 1.3, hay diferentes trastornos del equilibrio generados por alguna enfermedad, donde la mayoría pueden ser tratados con medicamentos para disminuir la inflamación del oído o para eliminar alguna infección. Sin embargo, el vértigo posicional paroxístico benigno (VPPB) sólo puede ser tratado con una serie de giros e inclinaciones de la cabeza que tienen la finalidad de encaminar los otolitos dispersos en los canales semicirculares hacia el utrículo. Es decir, como los otolitos en las ámpulas generan una segunda perturbación al golpear a la cúpula y sobreexcitarla, es necesario regresarlos al utrículo.

El método más utilizado para tratar esta enfermedad es el propuesto por Semont y Epley (Obrist, 2008), donde la cabeza es girada 45° hacia el lado del oído afectado, haciendo que el canal posterior se alinee con el plano sagital de la cabeza. Después se gira únicamente el cuerpo a una posición en decúbito lateral y la cabeza se gira 120° más en el mismo sentido que la anterior rotación. Finalmente, se regresa con cuidado a una posición sentada y se inclina la cabeza hacia abajo para que los otolitos entren en el saco de la mácula.

La razón de la primera rotación es porque los canales posterior y superior están rotados 45° en comparación con sus respectivos planos de la cabeza; si se busca acomodar otolitos perdidos en el canal lateral entonces no se realiza éste primer giro. Además, los canales semicirculares analizados deben de alinearse con su respectivo plano de la cabeza.

El realizar este tipo de giros para el tratamiento del VPPB tiene su origen en la solución matemática particular a la ecuación (3.13) de la forma

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau)G(t, \tau) d\tau \quad (5.5)$$

donde $V(t)$ representa el volumen de endolinfa que se desplaza debido a una aceleración $\alpha(\tau)$ externa sobre el canal semicircular. Al encontrar el valor de la función de Green $G(t, \tau)$, y a partir del desplazamiento medible del fluido, se puede reescribir la ecuación (5.5) en términos de la aceleración $\alpha(\tau)$. Para darle solución a esta nueva expresión se utiliza lo siguiente: según datos experimentales (Obrist, 2008), el movimiento de rotación de 120° debe ser realizada en tres segundos, y como $t' = t\nu/a^2$ entonces es posible definir un intervalo de tiempo

$\tau = [0 \leq a^2 t / \nu \leq 3 \text{ seg}]$ a evaluar.

Resolviendo los tres casos de la aceleración en función del tiempo, se encuentra que su propagación es armónica (cuando la perturbación sobre la cúpula o masa otolítica se debe sólo a la endolinfa⁸) y se da cuando su velocidad angular es $40^\circ/s$.

Así, una aplicación directa de las ecuaciones para el comportamiento de la endolinfa como un fluido incompresible es la aplicación del método de Semont y Epley para el tratamiento del VPPB.

FINALMENTE, SI BIEN ES CIERTO QUE LA FORMA MÁS EFICIENTE Y RÁPIDA DE MANTENER EL EQUILIBRIO SE DEBE A LA MEZCLA DE INFORMACIÓN PROVENIENTE DEL COMPLEJO VESTIBULAR, LA VISIÓN Y EL SISTEMA SOMATOSENSORIAL, ES POSIBLE ENTRENAR AL CUERPO PARA QUE SIGA MANTENIENDO EL EQUILIBRIO AÚN CUANDO LA INFORMACIÓN RECIBIDA ESTÉ INCOMPLETA O SOBRESATURADA.

5.4. Conclusión

El trastorno de movimiento llamado cinetosis⁹ tiene una etiología multifactorial donde la sobre-estimulación del complejo vestibular y el cambio constante del horizonte visual ocasionan que haya una discordancia entre la información recibida por ambos sentidos. De éstos dos, el más estudiado es el funcionamiento del equilibrio humano, mismo que se desarrolla de la manera siguiente: primero se lleva a cabo un proceso mecánico que flexiona a las vellosidades celulares por acción del desplazamiento de la endolinfa contenida en el complejo vestibular, posteriormente se desencadena un proceso neurobiológico consecuente de la transducción de movimiento mecánico a señales eléctricas a partir de la generación de potenciales de acción, y luego, se desarrolla un proceso psicofísico en donde los impulsos nerviosos generados por la excitación de las neuronas contenidas en el nervio vestibular son interpretados por el sistema nervioso central.

En éste trabajo sólo se exploró el proceso mecánico (el complejo vestibular), pero es necesario completar el análisis en un futuro inmediato proponiendo modelos físicos que retomen la referencia visual de horizonte y la información proveniente del sistema somatosensorial que define un sentido espacial del entorno. Aún cuando Corke et al. (2007) han desarrollado una modelación del plano de referencia espacial en términos de una matriz de rotación $\mathbf{R} = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{x}\dot{\mathbf{q}}^*$ y una de traslación $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = (x_0, \mathbf{x})$ es un cuadvectores que relaciona el cambio de posición en el tiempo y $\dot{\mathbf{q}}$ es el factor de rotación (o traslación) espacial-temporal, la solución a una ecuación diferencial bajo estas condiciones no tiene solución analítica y no

⁸El caso no armónico es aquél donde los otolitos crean otros nodos de vibración que chocan con los propios de la endolinfa, de manera que la cúpula se ve perturbada por agentes externos al ámpula.

⁹La cinetosis es el mareo causado cuando el complejo vestibular percibe el movimiento del cuerpo pero la vista tiene su horizonte en un espacio fijo. De esta manera, el cerebelo interpreta que el humano está teniendo una alucinación ya que la información proveniente del oído interno dista de la proveniente de los ojos.

caótica, por ello se debe presentar nuevos modelos más creativos que se enriquezcan con aportaciones de otras disciplinas, como la ingeniería, la biología y la neurología.

Dos de las características principales del proceso mecánico analizado son: 1) la intensidad y forma de las perturbaciones externas definen el tipo de respuesta que dará el sistema nervioso central; es decir, si la respuesta será automática e involuntaria (como un reflejo) o retardada e ineficiente (como cuando hay un exceso de información y el cerebelo no puede procesarla rápida y eficientemente), y 2), al ser las fuerzas externas no conservativas, el sistema físico siempre regresará a un estado de equilibrio definido por el umbral de acción, que fisiológicamente es su estado normal de funcionamiento.

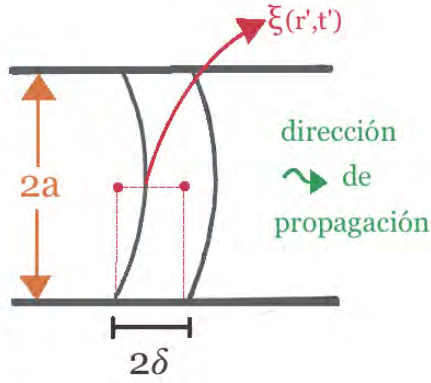
Entender de manera detallada y completa el desarrollo del equilibrio humano requiere la explicación integral sobre cómo se da la manipulación del movimiento del cuerpo en situaciones muy complejas que requieren su entrenamiento preciso: actividades deportivas, el caminar o las presentaciones artísticas (el Cirque du Soleil es pionero en la mezcla de arte, movimiento y física). También tiene aplicaciones médicas, como el diagnóstico y tratamiento¹⁰ de trastornos del equilibrio o del movimiento que alteran la capacidad del ser humano de mantener su posición espacial natural. Y finalmente, los resultados se pueden aplicar a la mejora de sistemas de navegación a partir de modelos que no necesiten de referencias físicas tangibles (situación que experimentan los aviones al volar), no tengan un horizonte visual fijo (situación que experimentan los submarinos al estar sumergidos), o que estén en situaciones muy turbulentas (como lo experimentan los humanos al realizar deportes extremos o presentaciones artísticas profesionales).

Si bien el análisis del equilibrio humano no es una tarea fácil, es necesario dedicar esfuerzo y tiempo para su comprensión debido a que es un fenómeno de interés mundial para la salud y bienestar material de los seres humanos (ver Apéndice C).

¹⁰En un futuro, se desarrollarán prótesis que permitan la sustitución del vestíbulo del oído interno, (Andreou et al., 2013; Patane et al., 2004; Rabbitt, 1999).

Apéndice A

Ecuación de movimiento de la membrana-cúpula



AOG

Figura A.1: Representación de la cúpula como una membrana elástica de ancho 2δ y de longitud $2a$.

Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (3.5), y evaluando la condición de frontera $\mathbf{u}(r, t) = \dot{\xi}(r, t)$ se llega a

$$\ddot{\xi} + R\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} \right)$$

Si la velocidad relativa está definida como $V_{rel} = R\omega$ entonces $\dot{V}_{rel} = R\alpha$, así

$$\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \left(r \nabla^2 \dot{\xi} + \nabla \dot{\xi} \right)$$

$$\Rightarrow \rho \left(\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \nu \nabla^2 \dot{\xi} + \frac{\rho \nu}{r} \nabla \dot{\xi}$$

pero, el término $\frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)$ es despreciable porque el movimiento de la cúpula es mucho menor que la magnitud radial del canal semicircular, de manera que se obtiene

$$\rho \left(\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \nu \nabla^2 \dot{\xi} \quad (\text{A.1})$$

Ahora, multiplicando por $1/L$ a la ecuación (3.14),

$$\frac{2\delta\rho}{L} (\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel}) = \frac{T}{L} \nabla^2 \xi + \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{A.2})$$

y considerando que $\frac{\partial P}{\partial z} = \Delta P$ y $\frac{2\delta}{L} \approx \epsilon \rightarrow 0$, porque $L \gg 2\delta$, entonces la ecuación (A.2) queda

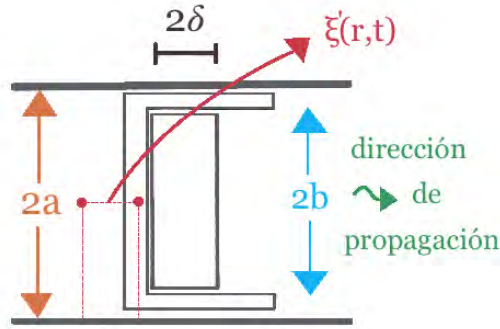
$$-\frac{\Delta P}{L} = \frac{T}{L} \nabla^2 \xi \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo (A.3) en (A.1)

$$\begin{aligned} \rho (\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel}) &= \frac{T}{L} \nabla^2 \xi + \rho \nu \nabla^2 \dot{\xi} \\ \Rightarrow (\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel}) &= \frac{T}{\rho L} \nabla^2 \xi + \nu \nabla^2 \dot{\xi} \\ \therefore (\ddot{\xi} + \dot{V}_{rel}) &= \nabla^2 \left(\frac{T}{\rho L} \xi + \nu \dot{\xi} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Apéndice B

Ecuación de movimiento del pistón-cúpula



AOG

Figura B.1: Representación de la cúpula como un pistón de ancho 2δ y de longitud $2b$.

Dividiendo la velocidad con la que se perturban las vellosidades celulares contenidas en la ámpula en dos casos:

1. La velocidad que lleva la endolinfa antes de entrar en contacto con el pistón-cúpula, V_1 , tal que

$$\mathbf{u}(r, t) = 2V_1(t) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (\text{B.1})$$

donde se observa que la velocidad con la que viaja la endolinfa se ve afectada por $r < a$, que representa el cambio del canal por el que se traslada el fluido a la forma del pistón que empuja por acción de su movimiento.

Además, la endolinfa que viaja con una velocidad dada por la ecuación (3.17) presiona el pistón-cúpula provocando una diferencia de presión dada como

$$\Delta P = -2\rho\pi R \left[\dot{V}_1 + \frac{8\nu}{a^2} V_1 + R\alpha \right] \quad (\text{B.2})$$

donde $L = 2\pi R$ la longitud de arco del canal semicircular.

Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes, ecuación (3.5), despreciando el término $\frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)$, como se explicó en el Apéndice A, y evaluando las ecuaciones (B.1) y (B.2), se llega a

$$2\dot{\mathbf{V}}_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + R\boldsymbol{\alpha} = L \left[\dot{\mathbf{V}}_1 + \frac{8\nu}{a^2} \mathbf{V}_1 + R\boldsymbol{\alpha} \right] + 2\nu \mathbf{V}_1(t) \left(1 - \frac{2}{a^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

Alexandrov et al. (2007) aproximan al comportamiento de la velocidad \mathbf{V}_1 a partir de mediciones de laboratorio como

$$\mathbf{V}_1 = \dot{\xi} - \frac{(a-b)^3 C_1}{3a} \quad (\text{B.4})$$

Así, a partir de las ecuaciones (B.3) y (B.4) se llega a

$$\begin{aligned} 2 \left[\ddot{\xi} - \frac{(a-b)^3 \dot{C}_1}{3a} \right] \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right] + R\boldsymbol{\alpha} = L \left[\ddot{\xi} - \frac{(a-b)^3 \dot{C}_1}{3a} + \frac{8\nu}{a^2} \dot{\xi} - \frac{8\nu(a-b)^3}{3a^3} C_1 + \right. \\ \left. + R\boldsymbol{\alpha} \right] + 2\nu \left[\dot{\xi} - \frac{(a-b)^3 C_1}{3a} \right] \left[1 - \frac{2}{a^2} \right] \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

- II. El movimiento del pistón va con una velocidad \mathbf{V}_2 que crea un cambio abrupto en la presión posterior al pistón (en la zona donde están las vellosidades celulares) de la forma

$$\dot{\mathbf{V}}_2 + R\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{R\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \quad (\text{B.6})$$

donde $y = r - b$, $\theta = 360^\circ - \beta - \gamma$ es la sección del canal semicircular donde se encuentra la cúpula y $\nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}$ es una aproximación de la fuerza de fricción F_{frc} a partir de la ecuación (3.5).

Tomando que la solución a la ecuación (B.6) tiene la forma de un polinomio de segundo grado tal que $\mathbf{u}(y, t) = C_1(t)y^2 + C_2(t)y + C_3(t)$, al aplicar la condición inicial $\mathbf{u}(0, t) = \dot{\xi}(r, t)$ se encuentra

$$C_3(t) = \dot{\xi}(r, t)$$

y al aplicar la condición de frontera $\mathbf{u}(a, t) = 0$,

$$C_2(t) = -y^2 C_1(t) - C_3(t) = -y C_1(t) - \frac{C_3(t)}{y}$$

$$\Rightarrow C_2(t) = (b-a) C_1(t) - \frac{\dot{\xi}(r, t)}{(a-b)}$$

Así, la solución queda como

$$\mathbf{u}(y, t) = y^2 C_1 + y(b - a)C_1 - \frac{y\xi}{(a - b)} + \dot{\xi} \quad (\text{B.7})$$

Aproximando la fuerza de fricción F_{frc} como el movimiento del pistón dado por la velocidad (B.7) por área del objeto en movimiento, tal que

$$\begin{aligned} F_{frc} &= -4\nu\rho\pi\delta b \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = -4\nu\rho\pi\delta b \left((b - a)C_1 - \frac{\dot{\xi}(r, t)}{(a - b)} \right) \\ &\Rightarrow F_{frc} = -4\nu\rho\pi\delta b C_2 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Tomando la ecuación (3.16) se obtiene que

$$\begin{aligned} m_p (\ddot{\xi} + \dot{\mathbf{V}}_{rel}) &= \Delta P \int_0^b \int_0^{2\pi} r dr d\theta - F_{frc} - \zeta \dot{\xi} \\ &\Rightarrow m_p (\ddot{\xi} + \dot{\mathbf{V}}_{rel}) = \frac{2\pi b^2}{2} \Delta P - F_{frc} - \zeta \dot{\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.2) y (B.8) en (B.9), y considerando que la masa del pistón va como $m_p = 2\pi b^2 \delta \rho$, entonces

$$\begin{aligned} 2\pi b^2 \delta \rho (\ddot{\xi} + R\alpha) &= -\pi b^2 \rho L \left[\ddot{\xi} - \frac{(a - b)^3 \dot{C}_1}{3a} + \frac{8\nu}{a^2} \dot{\xi} - \frac{8\nu(a - b)^3}{3a^3} C_1 + \right. \\ &\quad \left. + R\alpha \right] + 4\nu\rho\pi\delta b C_2 - \zeta \dot{\xi} \\ \Rightarrow 2\pi b^2 \delta \rho (\ddot{\xi} + R\alpha) &= -\pi b^2 \rho L \left[\ddot{\xi} - \frac{(a - b)^3 \dot{C}_1}{3a} + \frac{8\nu}{a^2} \dot{\xi} - \frac{8\nu(a - b)^3}{3a^3} C_1 + \right. \\ &\quad \left. + R\alpha \right] + 4\nu\rho\pi\delta b \left[(b - a)C_1 - \frac{\dot{\xi}}{(a - b)} \right] - \zeta \dot{\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Adimensionando el sistema de ecuaciones (B.5) y (B.10) al considerar que $\epsilon_1 = \frac{a-b}{a}$, $\epsilon_2 = \frac{\delta}{L}$ donde $\epsilon_1 \rightarrow 0$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0$, entonces se llega a

$$\begin{aligned} \pi b^2 \rho R\alpha &= -\pi b^2 \rho \ddot{\xi} - \frac{8\pi\nu b^2 \rho}{a^2} \dot{\xi} - \frac{\zeta}{L} \dot{\xi} \\ \therefore \ddot{\xi} + \frac{8\nu}{a^2} \dot{\xi} + \frac{\zeta}{m} \dot{\xi} &= -R\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Apéndice C

Diagnóstico y tratamiento del VPPB y la enfermedad de Ménière

En México no hay investigaciones sobre los trastornos del equilibrio o problemas del complejo vestibular. En contraste, en otros países como Alemania o Estados Unidos¹, y a lo largo de muchos años, han existido grupos de fisioterapeutas y médicos que trabajan de manera conjunta para encontrar solución a estos problemas.

Por ejemplo, en Alemania, en la institución privada Solvay Pharmaceuticals, el grupo encabezado por la Dra. Sanna Salanterä y el M. Eero Aantaa, (Salanterä and Aantaa, 2001), han recopilado información de los trastornos del equilibrio más comunes, como el vértigo posicional paroxístico benigno y la enfermedad de Ménière, y han retomado y mejorado tratamientos para combatirlos. A continuación, se muestran algunos de sus resultados:

- a) *Vértigo posicional paroxístico benigno (VPPB)*: un ataque de vértigo de este trastorno suele tener duración de uno a tres segundos, y ocurren, en su mayoría de veces, cuando el paciente está acostado. Se ha encontrado este trastorno en personas de todas las edades, principalmente en mayores a los 60 años.

Se divide en dos tipos: la *candoliatiasis*, cuando los otolitos están mezclados en la endolinfa del canal semicircular afectado, y la *cúpuloliatiasis*, cuando los otolitos están adheridos a las paredes del ámpula.

- b) *Enfermedad de Ménière*: sus causas son desconocidas, pero puede deberse a factores genéticos o inmunológicos, alergias o infecciones. Ocurre con igual frecuencia entre mujeres y hombres, donde en su mayoría tienen entre [30 – 40] años y [40 – 50] años, respectivamente. Puede ocurrir en cualquiera de los dos oídos y la mayoría de los casos son unilaterales.

Se divide en dos tipos: la *laberintitis*, cuando se inflama el oído interno debido a una infección (usualmente proveniente del oído medio) y la *neuronitis vestibular*, donde se inflama el nervio vestibular. En el primer caso los síntomas duran de un

¹El primer artículo donde se abarcó un análisis de los trastornos del equilibrio es el escrito por Robert Bárány en 1921, (Bracha and Tan, 2015).

par de minutos a pocas horas, y en el segundo caso, el vértigo puede durar más de 24 horas. El principal síntoma es que “el mundo de los pacientes da vueltas” alrededor del plano lateral de la cabeza, por lo que no pueden permanecer de pie o sentados.

- c) *Diagnóstico*: para detectar un trastorno del equilibrio es necesario realizar pruebas de diferentes tipos de nistagmo para obtener una *anamnesis*² completa. Un *nistagmo* es el movimiento involuntario, rápido y repetitivo de los ojos causado por la des-coordinación de la información proveniente del complejo vestibular y la del sentido de la visión. Es decir, cuando un paciente padece VPPB, por ejemplo, la información que proveen los canales semicirculares señala que la cabeza está en movimiento rotacional aun cuando la cabeza se encuentra en reposo –esto se debe a que la cúpula es perturbada por el movimiento de la endolinfa y por los otolitos desprendidos de su lugar de origen. Así, los ojos que se mantenían fijos por el nulo cambio de la orientación espacial-visual de la cabeza se ven obligados por el cerebelo a moverse en el plano del canal semicircular afectado por los otolitos.

Cuando un paciente llega con síntomas de vértigo a visitar a su médico, la primera prueba a realizar para determinar la naturaleza del problema es la propuesta por *Dix y Hallpike*, (Dix and Hallpike, 1952), donde se pide al paciente estar en posición de decúbito dorsal, abdominal, lateral o sentados, y mover la cabeza lentamente en sus tres planos principales. Si al mover la cabeza de un punto de reposo, viendo al médico, a un extremo del plano analizado se observa un nistagmo, hay una gran probabilidad de que el paciente padece algún tipo de trastorno del equilibrio.

- d) *Tratamiento*: en la mayoría de los casos en los que el paciente presenta un nistagmo, los médicos empiezan su tratamiento con las maniobras de *Semont-Epley* (explicada en la sección 5.3) y de *Lempert*, (Herdman, 2007), que consiste en colocar al paciente en posición decúbito dorsal y hacer girar todo su cuerpo a decúbito lateral izquierdo, abdominal y lateral derecho, y regresar al decúbito dorsal, cada 30 o 60 segundos (dependiendo de la intensidad de vértigo que sienta el paciente al realizar el tratamiento).
- e) *Conclusión*: en general, los trastornos del equilibrio se presentan cuando la información del complejo vestibular, los ojos y el sistema somatosensorial no concuerda. Esto, como se mencionó en la sección 5.3, se debe a que las fibras nerviosas del nervio vestibulococlear están conectadas en la misma zona del cerebelo que los nervios oculares y el nervio motor del cuello. Así, todos los ejercicios que buscan restaurar en algún grado el equilibrio se dividen en dos tipos: para mejorar el reflejo vestibulo-espinal y el reflejo vestibulo-ocular. Además, se busca acostumar al complejo vestibular a sentir movimientos comunes del sistema somatosensorial de un paciente con un trastorno del equilibrio, como el hecho que al estar caminando se mueva más hacia un lado que hacia el otro, como perturbaciones que cumplen con $F_{ext} < F_{umb}$, como se mencionó en la sección 5.1.

²Una anamnesis es un conjunto de datos recopilados en un historial clínico de un paciente con la finalidad de proporcionar un diagnóstico certero.

Finalmente, los ejercicios de rehabilitación tienen el objetivo de lograr tres procesos: la adaptación del paciente a su situación fisiológica (es el caso de las personas ciegas que necesitan percibir su entorno a través de los demás sentidos), la sustentación de utilizar al cuerpo del mismo paciente como una herramienta de sustitución de actividades (por ejemplo, que el cuerpo compense su centro de masa cuando la persona no camina en línea recta), y la compensación al utilizar medios externos al cuerpo para que el paciente puede desarrollarse con integridad (como bastones, muletas o andaderas).

La Asociación de Desórdenes Vestibulares, que se encuentra en Portland, Oregon, Estados Unidos de América, (VEDA, 2017), trabaja intensamente en el estudio de los trastornos del equilibrio buscando causas fisiológicas y morfológicas a partir de la aplicación de conceptos de la biofísica en la mejora de sus tratamientos.

Bibliografía

- Alexandrov, V. V., Alexandrova, T. B., Vega, R., Castillo Quiroz, G., Ángeles Vázquez, A., Reyes Romero, M., and Soto, E. (2007). Information Process in Vestibular System. *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*, 4(13):193–203.
- Alonso, M. and Finn, E. J. (1992). *Physics*. Addison–Wesley Longman, Malaysia, 1st edition.
- Anderson, J. J. (2009). Governing equations of fluid dynamics. In Wendt, J., editor, *Computational fluid dynamics: an introduction*, chapter 2, pages 15–51. Springer: Science & Business Media, Belgium.
- Andreou, C. M., Pahitas, Y., Pilavaki, E., and Georgiuo, J. (2013). Bio-mimetic gyroscopic sensor for vestibular prostheses. In *Biomedical Circuits and Systems Conference (BioCAS), 2013 IEEE*.
- Bracha, A. and Tan, S. Y. (2015). Robert bárány (1876–1936): The nobel prize-winning prisoner of war. *Singapore Medical Journal*, 56(1):5–6.
- Corke, P., Lobo, J., and Dias, J. (2007). An Introduction to Inertial and Visual Sensing. *The International Journal of Robotics Research*, 26(6):519–535.
- Dix, M. R. and Hallpike, C. S. (1952). The pathology, symptomatology and diagnosis of certain common disorders of the vestibular system. *Proceedings of the Royal Society of Medicine*, 45(6):341–354.
- Farkhatdinov, I., Michalska, H., Berthoz, A., and Hayward, V. (2013). Modeling verticality estimation during locomotion. In Padois, V., Bidaud, P., and Khatib, O., editors, *Proceedings of the 19th CISM-IFToMM Symposium, Robot Design, Dynamics and Control*, volume 544 of *International Centre for Mechanical Sciences*, pages 359–366, Italy. Springer Vienna.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (2011). *The Feynman Lectures on Physics: The New Millennium Edition*, volume 1. Basic Books, United States of America, boxed set edition.
- Fletcher, N. and Thwaites, S. (1979). Physical models for the analysis of acoustical systems in biology. *Quarterly Reviews of Biophysics*, 12(1):25–65.
- Frick, H., Stark, D., and Leonhardt, H. (1981). *Manual de Anatomía Humana*, volume 2. Ediciones Omega, Spain, 1st edition.
- Fung, Y. C. (1984). *Biodynamics: Circulation*. Springer–Verlag: New York, United States of America, 1st edition.

- Goldstein, J. L., Poole, H. J., and Safko, C. P. (2001). *Classical Mechanics*. Addison–Wesley Longman, Spain, 3rd edition.
- Haberman, R. (2003). *Applied Partial Differential Equations: With Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, China, 4th edition.
- Hayek, S. I. (2004). Mechanical vibration and damping. In Trigg, G. L., editor, *Encyclopedia of Applied Physics*, pages 561–591. Wiley–VCH Verlag GmbH & Co KGaA, Germany, 1st edition.
- Herdman, S. J. (2007). *Vestibular Rehabilitation*. F. A. Davis Company, United States of America, 3rd edition.
- Johnson, L. R. (2003). *Essential Medical Physiology*. Academic Press, United Kingdom, 3rd edition.
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., and Dowling, D. R. (2015). *Fluid Mechanics*. Academic Press, United Kingdom, 6th edition.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics*, volume 1 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth–Heinemann, United Kingdom, 3th edition.
- Llusá Di Nucci, G. (2009). *Diccionario Náutico y De Voces de la Mar*. Guillermo Llusá Di Nucci, France, 1st edition.
- López, C., Cussó, F., and Villar, R. (2004). *Física de los Procesos Biológicos*. Ariel, Spain, 1st edition.
- Martini, F. H., Timmons, M. J., and Tallitsch, R. B. (2014). *Human Anatomy*. Pearson, United Kingdom, 7th edition.
- Nelson, M. E. (2005). Electrophysical models. In Koslow, S. H. and Subramaniam, S., editors, *Databasing the Brain: From Data to Knowledge (Neuroinformatics)*, chapter 17, pages 285–302. John Wiley & Sons, Canada, 1st edition.
- NIDCD (2014). *Balance Disorders*. National Institute on Deafness and Other communication Disorders, United States of America.
- Noonan, D. (2015). A Turn for the Worse. *Scientific American*, 313:27–28.
- Obrist, D. (2008). Fluid mechanics of semicircular canals – revisited. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 59(3):475–497.
- Ohanian, H. C. and Markert, J. T. (2006). *Physics for Engineers and Scientists*, volume 1. W. W. Norton & Company, United States of America, 3rd edition.
- Palmer, A. R. and Pinder, A. C. (1984). The Directionality of the Frog Ear Described by a Mechanical Model. *Journal of Theoretical Biology*, 110(2):205–215.
- Patane, F., Laschi, C., Miwa, H., Guglielmelli, E., Dario, P., and Takanishi, A. (2004). Design and development of a biologically-inspired artificial vestibular system for robot heads. In *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 4 of *Intelligent Robots and Systems (IROS), IEEE International Workshop*, pages 1317–1322, United States of America. Institute of Electrical and Electronics Engineers.

- Patton, K. T. and Thibodeau, G. A. (2012). *Anatomy & Physiology*. Mosby, United States of America, 8th edition.
- Rabbitt, R. D. (1999). Directional coding of three-dimensional movements by the vestibular semicircular canals. *Biological Cybernetics*, 80:417–431.
- Rabbitt, R. D., Damiano, E. R., and Grant, J. W. (2004). Biomechanics of the semicircular canals and otolith organs. In Highstein, S. M., Fay, R. R., and Popper, A. N., editors, *The Vestibular System*, chapter 4, pages 153–201. Springer: New York, United States of America, 1st edition.
- Sadovnichii, V., Alexandrov, V., Astakhova, T., Trincher, V., and Mikhaleva, E. Y. (2001). Harmonic oscillations of the cupula in the vestibular canal. *Mathematical Modeling of Complex Information Processing Systems*, pages 42–49.
- Salanterä, S. and Aantaa, E. (2001). Vertigo. Äänimaa Oy. Retrieved from: Enodate Oy, CD produced by Solvay Pharmaceuticals.
- Silver, R. B., Reeves, A. P., Steinacker, A., and Highstein, S. M. (1998). Examination of the cupula and stereocilia of the horizontal semicircular canal in the toadfish *Opsanus tau*. *Journal of Comparative Neurology*, 402(1):48–61.
- Sommerfeld, A. (1964). *Mechanics. Lectures on Theoretical Physics*, volume 1. Academic Press, United Kingdom, 1st edition.
- Standring, S. (2015). *Gray's Anatomy: The Anatomical Basis of Clinical Practice*. Gray's Anatomy. Elsevier, United Kingdom, 41th edition.
- Sugano, A. (2016). The physics of the “hardest move” in ballet. TED-Ed: Lessons Worth Sharing. (March 17th). Retrieved from: <http://ed.ted.com/lessons/the-physics-of-the-hardest-move-in-ballet-arleen-sugano>.
- Thornton, S. T. and Marion, J. B. (2003). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks Cole, India, 5th edition.
- Tippens, P. (2005). *Physics*. McGraw-Hill Education, United States of America, 7th edition.
- Tortora, G. J. and Reynolds, G. S. (2002). *Principles of Anatomy and Physiology*. John Wiley & Sons, United States of America, 10th edition.
- Van Buskirk, W. C. (1977). The effect of the utricle on fluid flow in the semicircular canals. *Annals of Biomedical Engineering*, 5(1):1–11.
- VEDA, C. (2017). Vestibular disorders association. Web page. (June 8th). Retrieved from: <https://vestibular.org>.
- Vega, R., Alexandrov, V. V., Alexandrova, T. B., and Soto, E. (2008). Mathematical Model of the Cupula-Endolymph System with Morphological Parameters for the Axolotl (*Ambystoma tigrinum*) Semicircular canals. *The Open Medical Informatics Journal*, 2:138–148.

- Yamauchi, A. (2002). *Cupular Micromechanics and Motion Sensation in the Toadfish Vestibular Semicircular Canals*. Department of Bioengineering, University of Utah, United States of America, 1st edition.
- Zeng, H. and Zhao, Y. (2011). Sensing Movement: Microsensors for Body Motion Measurement. *Sensors*, 11(1):638–660.