UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

APLICACIONES DE LOS ULTRAPRODUCTOS A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

TESIS:

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

DAVID VALENCIA GÓMEZ

TUTOR: MAT. FERNANDO JAVIER NUÑEZ ROSALES

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Valencia Gómez David
22 28 59 38 47
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
411011150

2. Datos del tutor
Mat. Fernando Javier Nuñez Rosales

3. Datos del sinodal 1
M. en C. Rafael Rojas Barbachano.

4. Datos del sinodal 2
Dr. David Meza Alcántara

5. Datos del sinodal 3
M. en C. Luis Jesús Turcio Cuevas
Correo electrónico: ljtc@ciencias.unam.mx

6. Datos del sinodal 4
Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto.
Correo electrónico: osvaldotellez@ciencias.unam.mx

7. Datos del trabajo escrito
Aplicaciones de los ultraproductos a la teoría de conjuntos
64 p
2017

Índice general

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo presentar algunas aplicaciones de los ultraproductos en la teoría de conjuntos. Para este propósito, en el capitulo I se proporcionarán las herramientas necesarias para poder construir estas estructuras desde un punto de vista lógico. En este capítulo se presentarán los lenguajes formales de primer orden e infinitarios y se verán algunas propiedades básicas de los ultrafiltros con el fin de construir los ultraproductos como estructuras de un determinado lenguaje formal. Así mismo demostraremos el teorema de *Łoš* que nos muestra la relación que hay entre la satisfacción del ultraproducto con el ultrafiltro con el que se crea. Además se generalizará esta técnica de teoría de modelos a las ultrapotencias iteradas. Como se busca aplicar estas técnicas en la teoría de conjuntos, en este capítulo se dará una introducción a los modelos de ZFC, en particular veremos algunas propiedades del universo constructible de Gödel que denotaremos por L.

En el capítulo II se verán algunas aplicaciones de los ultraproductos en teoría de cardinales. Por medio de esta técnica de teoría de modelos se puede demostrar que todo cardinal medible es débilmente compacto, el teorema de Scott: Si existen cardinales medibles entonces $V \neq L$, el teorema de Kunen: Sea M es un modelo interno de ZF y $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial entonces $M \neq V$, el teorema de $Vopěnka - Hrbáček$: Si existe un cardinal fuertemente compacto y A es un conjunto, entonces $V \neq L[A]$. Si bien L es modelo de $V = L$, lo que nos muestran los teoremas anteriores es que en L no pueden existir cardinales medibles y en $L[A]$ no existen cardinales fuertemente compactos. También en este capítulo se verá la relación que hay entre la compacidad de los lenguajes infinitarios y los cardinales compactos.

En el capitulo III se hará una pequeña generalización de los ultraproductos construyendo los $M-$ultraproductos, que esencialmente son modelos que se construyen dentro de otro modelo con $M-$ultrafiltros que pueden o no pertenecer al modelo. En este capitulo demostraremos otro teorema de Kunen: la existencia de indiscernibles en L es equiconsistente con la existencia de un encaje no trivial de L en L.

Preliminares

En la presente tesis se asume que el lector tiene un conocimiento básico en el área de lógica y teoría de conjuntos. No obstante, algunos resultados sencillos serán mostrados en esta sección ya que serán empleados posteriormente.

Definición 0.1. Si α es un ordinal límite, la cofinalidad de α es el mínimo ordinal β tal que existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ y cumple que $\bigcup \{f(\gamma) : \gamma < \beta\} = \alpha$, a la que llamaremos función cofinal. Denotaremos por $cf(\alpha)$ a la cofinalidad de α.

Teorema 0.1. Si κ es un cardinal, entonces existe una partición $\{A_\gamma \subseteq \kappa : |A_\gamma| < \kappa, \gamma < cf(\kappa)\}$ tal que para cualquiera $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ se tiene que $A_\gamma \cap A_\theta = \emptyset$, $A_\gamma \neq \emptyset$ y $\kappa = \bigcup_{\gamma < cf(\kappa)} A_\gamma$.

Sea $f : cf(\kappa) \longrightarrow \kappa$ una función cofinal, entonces $\bigcup f[cf(\kappa)] = \kappa$. Para cada $\gamma < cf(\kappa)$ definimos

$$A_\gamma \coloneqq f[\gamma + 1] \setminus \bigcup_{\theta < \gamma} f[\theta]$$

por construcción se cumple que $A_\gamma \subseteq \kappa$ y para cualquiera $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ se tiene que $A_\gamma \cap A_\theta = \emptyset$ y $A_\gamma \neq \emptyset$. Además como κ es cardinal y $f(\gamma) < \kappa$, $|A_\gamma| < \kappa$. Y dado que $\bigcup_{\gamma < cf(\kappa)} A_\gamma = \bigcup f[cf(\kappa)] = \kappa$ se tiene el resultado.

Definición 0.2. Decimos que κ es un cardinal fuertemente inaccesible si y sólo si es incontable, regular ($cf(\kappa) = \kappa$) y es fuerte (para todo $\lambda < \kappa$ se cumple que $2^\lambda < \kappa$).

Definición 0.3. Un árbol es un orden parcial $\langle T, \leq_T \rangle$ tal que para todo $t \in T$ se satisface que $\langle \{s \in T : s < t\}, \leq_T \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Definición 0.4. Sea $\langle T, \leq_T \rangle$ un árbol y $t \in T$ la altura de t en el árbol es

$$h(t, T) \coloneqq ot(\langle \{s \in T : s < t\}, \leq_T \rangle)$$

donde $ot(A)$ denota el tipo de orden de A. Así mismo, para cada $\alpha \in OR$ definimos el nivel α del árbol como $T(\alpha) \coloneqq \{t \in T : h(t, T) = \alpha\}$ y la altura del árbol como $ht(T) \coloneqq min\{\alpha \in OR : T(\alpha) = \emptyset\}$

Definición 0.5. Sea $\langle T, \leq_T \rangle$ un árbol, una rama en T es una cadena C maximal en T. Y la altura de la rama queda definida como $ht(C) \coloneqq ot(\langle C, \leq_T \rangle)$

Definición 0.7. Decimos que un cardinal $\kappa > \omega$ regular tiene la propiedad del árbol si cualquier árbol de altura κ tal que para todo $\alpha \in OR$ se cumple que $|T(\alpha)| < \kappa$ tiene una rama de altura κ.

Definición 0.8. Decimos que una relacional E binaria sobre una clase C es bien fundada si I) para todo $c \in C$ se tiene que $ext_E(c) = \{z \in C : zEc\}$ la extensión de c es un conjunto y II) cualquier subconjunto de C no vacío tiene un elemento minimal.

Un relacional que cumple I) también se le llama izquierda limitado y a los que cumplen II) se les conoce simplemente como relaciones bien fundadas. Sin embargo, como nos interesan las relaciones que cumplen I) y II), en este trabajo diremos que un relacional es bien fundado si cumple ambas condiciones.

Observación 0.1. Una clase bien fundada no tiene sucesiones infinitas decrecientes.

Definición 0.9. Una relación E sobre una clase C es extensional si $ext_E(x) = ext_E(y)$ implica que $x = y$ para cualesquiera $x, y \in C$.

Lema 0.1. Si E es una relación bien fundada sobre una clase C entonces cualquier clase no vacía contenida en C tiene un elemento minimal.

Sean E una relación bien fundada sobre una clase C y D una clase no vacía contenida en C. Para proceder por reducción al absurdo supongamos que D no tiene un elemento minimal. A continuación construiremos una familia $\{d_n : n \in \omega\}$ tal que $d_{n+1} \in ext_E(d_n) \cap D$.

Como D no es vacía y $D \subseteq C$, existe un elemento $d_0 \in D \cap C$. Supongamos que ya hemos construido a d_n. Como E es bien fundada se tiene por definición que $ext_E(d_n)$ es un conjunto, por lo cual $ext_E(d_n) \cap D$ es un conjunto contenido en C. Si $ext_E(d) \cap D = \emptyset$ entonces d es un elemento minimal en D, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, $ext_E(d) \cap D \neq \emptyset$ por lo que existe $d_{n+1} \in ext_E(d_n) \cap D$. Así por recursión podemos construir una familia $\{d_n : n \in \omega\} \subseteq C$ tal que $d_{n+1} \in ext_E(d_n) \cap D$; en particular cumple que $d_{n+1} E d_n$ para toda $n \in \omega$ lo que contradice el hecho de que C es una clase bien fundada.

Lema 0.2. (Inducción para Relacionales Bien Fundados) Si E es una relación bien fundada sobre la clase C y φ es una fórmula para la cual se cumple que $I)$ Todo elemento de C minimal con respecto a la relación E tiene la propiedad φ y $II)$ Si $x \in C$ y se cumple $\varphi(z)$ para todo $z \in C \cap ext_E(x)$, entonces x tiene la propiedad φ ; implica que todos los elementos de C tienen la propiedad φ

Supongamos, para reducción al absurdo, que existe $c \in C$ que no cumple la propiedad φ. Así la clase

$$D = \{c \in C : c \text{ no cumple la propiedad } \varphi\} \neq \emptyset$$

y por el lema 0.1 D tiene un elemento minimal c_0, por lo que todos sus predecesores cumplen la propiedad φ. Así, por la hipótesis, aplicando $II)$ se sigue que c_0 cumple la propiedad φ, lo que contradice el hecho de que $c_0 \in D$.

Lema 0.3. Para todo conjunto S existe un conjunto transitivo T tal que $S \subseteq T$.

Sea S un conjunto. Consideremos $\{S_n : n \in \omega\}$ tal que $S_0 = S$ y $S_{n+1} = \bigcup S_n$. Afirmamos que $\bigcup_{n\in\omega} S_n$ es el conjunto transitivo buscado.

Por una parte $S = S_0 \subseteq \bigcup_{n\in\omega} S_n$. Por otro lado, si $x \in \bigcup_{n\in\omega} S_n$ entonces existe $m \in \omega$ tal que $x \in S_m$ y como $S_{m+1} = \bigcup S_m$ se tiene que $x \subseteq \bigcup S_m = S_{m+1} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} S_n$. De esto se sigue que $x \subseteq \bigcup_{n\in\omega} S_n$; por lo tanto, $\bigcup_{n\in\omega} S_n$ es transitivo y contiene a S.

Notación Del lema anterior sabemos que dado un conjunto S se tiene que $\{T : T \text{ es transitivo y } S \subseteq T\} \neq \emptyset$ así denotaremos por $Tr(S)$ al conjunto $\cap\{T : T \text{ es transitivo y} S \subseteq T\}$ el cual es conocido como la clausura transitiva de S. Observemos que $Tr(S)$ es el mínimo conjunto (con respecto a la contención) transitivo que contiene a S.

Lema 0.4. (Recursión sobre clases bien fundadas) Si E es una relación bien fundada sobre C y G una funcional de V en V, entonces hay un único funcional F de C en V tal que

$$F(x) = G(F[ext_E(x)]) = G(\{F(z) : zEx\})$$

Definimos el funcional $F : C \longrightarrow V$ por medio de la siguiente fórmula $F(x) = y$, si y sólo si, $I)$ existe una función $f_x : Tr(ext_E(x)) \longrightarrow V$ tal que para todo $z \in Tr(ext_E(x))$ se tiene que $f_x(z) = G(\{f_x(i) : iEz\})$ y $II)$ $G(f_x[ext_E(x)]) = y$.

Demostraremos primero que las funciones f_x que cumplen $I)$ son únicas para toda $x \in C$. Sea $x \in C$ un elemento minimal para el cual existen funciones f, h que satisfacen $I)$ tal que $f \neq h$. Entonces por la minimalidad de x se sigue que para todo wEx la función f_w que cumple la condición $I)$ para w es única. De ahí que si $w \in Tr(ext_E(x))$ entonces

$$f(w) = G(\{f(i) : iEw\}) = G(\{f_w(i) : iEw\}) = G(\{h(i) : iEw\}) = h(w)$$

lo que implica que $f = h$. Por tanto las funciones f_x que cumplen $I)$ son únicas para toda $x \in C$ (en caso de que existan).

Por inducción sobre clases bien fundadas demostraremos que para todo $x \in C$ existe una función f_x que cumple $I)$.

- Si x es minimal en C, entonces $ext_E(x) = \emptyset$. Así $f = \emptyset$ cumple $I)$ por vacuidad.
- Supongamos que para todo wEx existe una función f_w que cumple $I)$ para w (la cuál es única por lo dicho anteriormente). Entonces definimos $f_x : Tr(ext_E(x)) \longrightarrow V$ como $f_x(w) = G(f_w[ext_E(w)])$ que por la unicidad de f_w se tiene que la función f_x está bien definida.

Por inducción sobre clases bien fundadas hemos demostrado que para todo $x \in C$ existe una función f_x que cumple $I)$ y es única. Así $G(f_x[ext_E(x)])$ determina un único valor; lo que implica que F definida por la fórmula anterior es un funcional.

Notemos que este es único pues si existiera H tal que $H(x) = G(\{F(z) : zEx\})$ y $H \neq F$ entonces podemos considerar $x \in C$ un elemento minimal para el cual $H(x) \neq F(x)$. Por la minimalidad de x se sigue que para todo zEx se cumple que $F(z) = H(z)$. De esto se infiere que

$$H(x) = G(\{H(z) : zEx\}) = G(\{F(z) : zEx\}) = F(x)$$

lo que contradice el hecho de que $H(x) \neq F(x)$. Así el funcional F es único.

Teorema 0.2. (Colapso de Mostowsky) Si E es una relación bien fundada y extensional sobre una clase C, entonces existe una única clase transitiva M tal que $\langle C, E\rangle \cong \langle M, \in\rangle$.

Sea E es una relación bien fundada y extensional sobre una clase C. Sea $G : V \longrightarrow V$ un funcional tal que $G(x) = x$, entonces, aplicando recursión, existe un único funcional $\pi : C \longrightarrow V$ tal que

$$\pi(x) = G(\{\pi(z) : zEx\}) = \{\pi(z) : zEx\}$$

Consideremos $M = \pi[C] \subseteq V$ y afirmamos que M es transitivo y $\langle C, E\rangle \cong \langle M, \in\rangle$. Por definición de π se cumple que si $\pi(x) \in M$ entonces $\pi(x) \subseteq M$ pues $\pi(x) = \{\pi(z) : zEx\}$, por lo que M es transitiva. Así basta mostrar que π es el isomorfismo.

$I)$ π es inyectiva.

Supongamos, para reducción al absurdo, que π no es inyectiva; lo que implica que la clase

$$Z = \{z \in M : \exists x, y \in C(x \neq y \wedge z = \pi(x) = \pi(y))\} \neq \emptyset$$

consideremos $z \in D$ un elemento minimal, por definición de Z existen $x, y \in C$ tal que $x \neq y$ y $z = \pi(x) = \pi(y)$. De la extensionalidad de C y del hecho de que $x \neq y$ se sigue que $ext_E(x) \neq ext_E(y)$; de ahí que, sin perdida de generalidad, existe $u \in ext_E(x)$ tal que $u \notin ext_E(y)$. Como $u \in ext_E(x)$ entonces $\pi(u) \in \pi(x)$, y dado que

$\pi(x) = \pi(y)$ se sigue que $\pi(u) \in \pi(y)$. Esto implica que hay tEy tal que $\pi(t) = \pi(u)$. Sin embargo, dado que $u \notin ext_E(y)$ y $t \in ext_E(y)$ se tiene que $u \neq t$. Así $u, t \in C$ satisfacen que $u \neq t$ y $\pi(u) = \pi(t)$, lo que implica que $z_0 = \pi(u) \in Z$; no obstante, $z_0 = \pi(u) \in \pi(x) = z$ lo que es una contradicción a la minimalidad de z. Por consiguiente, π es inyectiva.

$II)$ π preserva el orden.

Por definición de π, si xEy entonces $\pi(x) \in \{\pi(z) : zEy\} = \pi(y)$. Así basta mostrar la implicación inversa, es decir, mostraremos que si $\pi(x) \in \pi(y)$ implica que xEy. Si $\pi(x) \in \pi(y) = \{\pi(z) : zEy\}$ entonces existe zEy tal que $\pi(z) = \pi(x)$, pero como π es inyectiva se sigue que $x = z$; de ahí que xEy. Por lo tanto, π preserva el orden.

De los dos puntos anteriores concluimos que π es un isomorfismo.

$III)$ La clase M es única.

Supongamos que existe un isomorfismo $h : C \longrightarrow V$ tal que $N = h[C] \cong C$ con N una clase transitiva. Como h y π son isomorfismos entonces $T = h \circ \pi^{-1} : M \longrightarrow N$ también es un isomorfismo. A continuación demostraremos que T es la identidad.

Para reducción al absurdo supongamos que T no es la identidad. Sea $x \in M$ un elemento minimal con la propiedad de que $T(x) \neq x$. De la minimalidad de x se sigue que para toda $z \in x$ (con $z \in M$) se tiene que $T(z) = z$. Como T preserva el orden se sigue que para toda $z \in x$ (con $z \in M$) se tiene que $z = T(z) \in T(x)$, de lo que se infiere que $x \subseteq T(x)$. Por otro lado, como N es transitiva $T(x) \subseteq N$, de ahí que si $w \in T(x)$ entonces $w \in N$. Dado que T es sobreyectiva existe $t \in M$ tal que $T(t) = w \in T(x)$. Ya que T preserva el orden se sigue que $t \in x$ y de la minimalidad de x se sigue que $w = T(t) = t$, entonces $w \in x$. Por consiguiente, $T(x) \subseteq x$. De ambas contenciones se sigue que $T(x) = x$ lo que contradice la elección de x. Así por reducción al absurdo concluimos que T es la identidad, entonces $h = \pi$. Por tanto, $N = h[C] = \pi[C] = M$. Lo que significa que la clase M es única.

Proposición 0.1. Si κ es un cardinal, entonces $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$ donde $2^{<\kappa} = sup\{2^\mu : \mu < \kappa\}$.

Por el teorema 0.1. existe $\{A_\gamma \subseteq \kappa : |A_\gamma| < \kappa, \gamma < cf(\kappa)\}$ tal que para cualquiera $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ se tiene que $A_\gamma \cap A_\theta = \emptyset$ y $\kappa = \bigcup_{\gamma < cf(\kappa)} A_\gamma$. Para cada $\gamma < cf(\kappa)$ consideremos $\kappa_\gamma = |A_\gamma|$. Así, $\kappa = \sum_{\gamma < cf(\kappa)} \kappa_\gamma$ donde para toda $\gamma < cf(\kappa)$ se cumple que $\kappa_\gamma < \kappa$. Por consiguiente,

$$2^\kappa = 2^{\sum_{\gamma < cf(\kappa)} \kappa_\gamma} = \prod_{\gamma < cf(\kappa)} 2^{\kappa_\gamma} \leq \prod_{\gamma < cf(\kappa)} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} \leq (2^\kappa)^{cf(\kappa)} = 2^\kappa$$

por lo tanto, $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$.

Proposición 0.2. Si κ es un cardinal fuerte, entonces $2^\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$.

Por una parte $\kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$ por lo que basta mostrar la desigualdad contraria. Como κ es un cardinal fuerte se tiene que $2^{<\kappa} = sup\{2^\mu : \mu < \kappa\} \leq \kappa$. Así por la proposición 0.1 obtenemos que $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} \leq \kappa^{cf(\kappa)}$. De ambas desigualdades concluimos que $2^\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$.

Proposición 0.3. Si $\kappa = sup\{\kappa_i : i \in \omega\}$ donde κ_i es un cardinal fuerte y si para cualesquiera $i < j$ se satisface que $\kappa_i < \kappa_j$, entonces κ es un cardinal fuerte; es decir, para todo $\lambda < \kappa$ se cumple que $2^\lambda < \kappa$.

Sea $\lambda < \kappa$. Por definición del supremo existe $i \in \omega$ tal que $\lambda \leq \kappa_i$; sin embargo, como $\{\kappa_i : i \in \omega\}$ es creciente podemos pedir que $\lambda < \kappa_i$. Dado que κ_i es un cardinal fuerte se tiene que $2^\lambda < \kappa_i \leq \kappa$.

Definición 0.10. Definimos el orden $<$ sobre $OR \times OR$ de la siguiente manera: $\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle$ si y sólo si $max\{\alpha, \beta\} \in max\{\gamma, \delta\}$, o $max\{\alpha, \beta\} = max\{\gamma, \delta\}$ y $\alpha \in \gamma$, o bien $max\{\alpha, \beta\} = max\{\gamma, \delta\}$, $\alpha = \gamma$ y $\beta \in \delta$.

Definición 0.11. Dado el orden $<$ sobre $OR \times OR$ definimos el funcional canónico $\Gamma : OR \times OR \longrightarrow OR$ como $\Gamma(\langle \alpha, \beta \rangle) = ot(\{\langle \xi, \eta \rangle : \langle \xi, \eta \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle\})$

Definición 0.12. Definimos la jerarquía acumulativa por recución transfinita de la siguiente manera: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ y si α es límite entonces $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

Capítulo 1

Hacia La Construcción De Los Ultraproductos

El presente capítulo tiene como finalidad definir los ultraproductos, para esto en un primer momento se dará una definición formal de modelo y posteriormente se definirá el concepto de filtro que dará pie a la construcción de los ultraproductos.

1.1. Lenguajes de Primer Orden $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$

Al igual que los lenguajes naturales, como el español, las expresiones de los lenguajes formales son ristras o sucesiones de símbolos. De esta forma los lenguajes formales están determinados por la cantidad de símbolos que se pueden emplear para formar expresiones; en este caso decimos que nuestro lenguaje formal está determinado por un τ-tipo.

Definición 1.1.1. Sean ρ,β,η cardinales, $\mu \in {}^{\rho}\omega$ y $\delta \in {}^{\beta}\omega$, definimos un τ-tipo como un conjunto τ de símbolos tal que $\tau = \{R_\gamma : \gamma < \rho\} \cup \{f_\gamma : \gamma < \beta\} \cup \{c_\gamma : \gamma < \eta\}$ donde $\{c_\gamma : \gamma < \eta\}$ es un conjunto de símbolos de constantes, $\{R_\gamma : \gamma < \rho\}$ un conjunto de símbolos de relaciones y $\{f_\gamma : \gamma < \beta\}$ es un conjunto de símbolos de funciones; donde $\mu(\gamma)$ representa el grado o número de argumentos de R_γ y $\delta(\gamma)$ el grado de f_γ.

Considerando la definición anterior podemos definir los símbolos de un lenguajes de primer orden de tipo τ, que denotaremos como $\mathcal{L}_{\omega,\omega}(\tau)$.

1. Símbolos auxiliares: (,)
2. Conectivos lógicos finitos: $\wedge$conjunción, $\vee$disyunción y $\neg$ negación.
3. Símbolo de igualdad $=$
4. Conjunto de ω variables individuales $\{x_n : n \in \omega\}$
5. Los símbolos del τ-tipo
6. Símbolo del cuantificador existencial o particular $\exists$

Con estos símbolos se puede formar cualquier τ-expresión (una sucesión finita de símbolos del tipo τ) como $\exists Px\neg$; sin embargo, este tipo de expresiones carecen de sentido, o en otras palabras, no son fórmulas. Antes de pasar directamente a la definición de fórmula hay que abordar la noción de términos, misma que nos ayudará a definir las fórmulas.

Definición 1.1.2. El conjunto de términos de tipo τ, al que denotaremos simplemente por $T(\tau)$, es el menor conjunto X de τ-expresiones, tal que:

1. $\{x_n : n \in \omega\} \cup \{c_\gamma : \gamma < \eta\} \subseteq X$
2. Si $f_\gamma \in \{f_\gamma : \gamma < \beta\}$ y $t_1, ..., t_{\delta(\gamma)} \in X$, entonces $f_\gamma(t_1, ..., t_{\delta(\gamma)}) \in X$

Decimos que t es un τ-término si es un elemento de $T(\tau)$.

Definición 1.1.3. Una τ-fórmula atómica es una expresión de la forma $t_i = t_j$ o de la forma $R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$ donde $t_i, t_j, t_1, ..., t_{\mu(\gamma)}$ son τ-términos y R_γ es un símbolo de relación de tipo τ.

Así podemos definir las fórmulas para nuestro lenguaje de primer orden.

Definición 1.1.4. Definimos de forma recursiva una fórmula para nuestro lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}(\tau)$ de la siguiente manera:

1. Si φ es una fórmula atómica, entonces φ es una fórmula.
2. Si φ y ψ son fórmulas entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ y $\neg\varphi$ también son fórmulas.
3. Si φ es una fórmula entonces $\exists x_i \varphi$ es una fórmula donde $x_i \in \{x_n : n \in \omega\}$.

En el presente trabajo se toman a $\varphi \longrightarrow \psi$ y $\forall x_i \varphi$ como abreviaturas de las fórmulas $\neg\varphi \vee \psi$ y $\neg\exists x_i \neg\varphi$ respectivamente. Así una fórmula en nuestro lenguaje de primer orden podría ser $\exists x_1(R_1(x_1) \wedge R_2(x_2))$ o bien $R_3(x_4)$. Cabe recalcar que se llama lenguaje de primer orden porque únicamente se puede cuantificar sobre variables individuales y no sobre los símbolos de relaciones o funciones.

1.2. Estructuras y Modelos para los Lenguajes de Primer Orden.

De manera intuitiva una estructura es una función que interpreta las fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje formal proveyéndolas de "significado". Así una estructura nos proporciona el conjunto de objetos a los cuales se refiere el parámetro $\exists$ y las denotaciones de los símbolos de constantes, funciones y predicados.

Definición 1.2.1. Una τ-estructura $\mathfrak{A}$ para nuestro lenguaje de $\mathcal{L}_{\omega,\omega}(\tau)$ es una cuatrupla

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{P_\gamma : \gamma < \rho\}, \{g_\gamma : \gamma < \beta\}, \{d_\gamma : \gamma < \eta\}\rangle$$

con $A \neq \varnothing$, comúnmente llamado el universo de $\mathfrak{A}$, $\{P_\gamma : \gamma < \rho\}$ un conjunto de relaciones, $\{g_\gamma : \gamma < \beta\}$ un conjunto de funciones y $\{d_\gamma : \gamma < \eta\}$ un conjunto de constantes en el universo A tales que:

1. Para cada $\gamma < \rho$, $P_\gamma \subseteq A^{\mu(\gamma)}$ y $(R_\gamma)^{\mathfrak{A}} = P_\gamma$
2. Para cada $\gamma < \beta$, $g_\gamma : A^{\delta(\gamma)} \longrightarrow A$ y $(f_\gamma)^{\mathfrak{A}} = g_\gamma$
3. Para cada $\gamma < \eta$, $d_\gamma \in A$ y $(c_\gamma)^{\mathfrak{A}} = d_\gamma$

De manera intuitiva decimos que una estructura $\mathfrak{A}$ satisface a una fórmula φ si su interpretación en la estructura es verdadera para esa estructura. A continuación daremos un par de definiciones que formalizarán ésta idea intuitiva.

Definición 1.2.2. Dada $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_\gamma : \gamma < \rho\}, \{g_\gamma : \gamma < \beta\}, \{d_\gamma : \gamma < \eta\}\rangle$ una estructura de tipo τ, $T(\tau)$ el conjunto de términos de tipo τ y $\alpha = \langle a_\gamma : \gamma < \omega\rangle \in^\omega A$, definimos una asignación $\bar{\alpha} : T(\tau) \longrightarrow A$ de la siguiente forma:

1. Si $t = x_n \in \{x_n : n \in \omega\}$, entonces $\bar{\alpha}(t) = a_n$
2. Si $t = c_\gamma \in \{c_\gamma : \gamma < \eta\}$, entonces $\bar{\alpha}(t) = (c_\gamma)^{\mathfrak{A}} = d_\gamma$
3. Si $t = f_\gamma(t_{1,...,}t_{\delta(\gamma)})$, entonces $\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(f_\gamma(t_{1,...,}t_{\delta(\gamma)}) = (f_\gamma)^{\mathfrak{A}}(\bar{\alpha}(t_1), ..., \bar{\alpha}(t_{\delta(\gamma)})$

Definición 1.2.3. Dada $\mathfrak{A}$ una τ-estructura, $\bar{\alpha}$ una asignación y φ, ψ, ϕ fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ definimos la relación $\mathfrak{A} \models_\alpha \varphi$ ($\mathfrak{A}$ satisface φ con la sucesión α), de la siguiente forma:

1. Si $\varphi = (t_i = t_j)$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha t_i = t_j$ si y sólo si $\bar{\alpha}(t_i) = \bar{\alpha}(t_j)$, donde $t_i, t_j \in T(\tau)$
2. Si $\varphi = R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$ si y sólo si $\langle \bar{\alpha}(t_1), ..., \bar{\alpha}(t_{\mu(\gamma)})\rangle \in P_\gamma$
3. Si $\varphi = \psi \wedge \phi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi \wedge \phi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi$ y $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$
4. Si $\varphi = \psi \vee \phi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi \vee \phi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi$ o $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$
5. Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \neg\psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models_\alpha \psi$
6. Si $\varphi = \exists x_k \psi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \exists x_k \psi$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\alpha(k,a)} \psi$ donde $\alpha(k,a) \in^\omega A$ denota a la función
$$\alpha(k,a)(n) = \begin{cases} \alpha(n) & n \neq k \\ a & n = k \end{cases}$$

Definición 1.2.4. Decimos que una fórmula φ es verdadera en la estructura $\mathfrak{A}$, si y sólo si, para toda asignación α tenemos que $\mathfrak{A} \models_\alpha \varphi$. A esto lo denotamos como $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Definición 1.2.5. Dado Γ un conjunto de fórmulas decimos que $\mathfrak{A}$ es modelo de Γ, si y sólo si, para toda fórmula φ en Γ tenemos que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Definición 1.2.6. Dado Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula, decimos que φ es consecuencia de Γ, lo que denotaremos como $\Gamma \models \varphi$, si y sólo si todos los modelos de Γ son también modelos de φ.

Definición 1.2.7. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos estructuras con dominios A, B respectivamente. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ (que denotaremos como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) si se satisface lo siguiente

1. $A \subseteq B$
2. Si c_γ es un símbolo de constante, entonces $c_\gamma^{\mathfrak{A}} = c_\gamma^{\mathfrak{B}}$.
3. Si f_γ es un símbolo de función, entonces $f_\gamma^{\mathfrak{A}} = f_\gamma^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^{\delta(\gamma)}$.
4. Si R_γ es un símbolo de relación, entonces $R_\gamma^{\mathfrak{A}} = R_\gamma^{\mathfrak{B}} \cap A^{\mu(\gamma)}$

A continuación extenderemos el lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ a los lenguajes infinitarios $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ que como podrá notarse dicha extensión es natural.

1.3. Lenguajes Infinitarios de Primer Orden $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$

Dados κ,λ cardinales donde $\lambda \leq \kappa$ los lenguajes infinitarios $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ son extensiones del lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ donde se permite una cantidad de disyunciones y conjunciones menores a κ y la cuantificación sobre menos de λ variables.

Definición 1.3.1. Sean ρ, β, η cardinales, $\mu \in^{\rho} \lambda$ y $\delta \in^{\beta} \lambda$, definimos un τ-tipo como un conjunto τ de símbolos tal que $\tau = \{R_\gamma : \gamma < \rho\} \cup \{f_\gamma : \gamma < \beta\} \cup \{c_\gamma : \gamma < \eta\}$ donde $\{c_\gamma : \gamma < \eta\}$ es un conjunto de símbolos de constantes, $\{R_\gamma : \gamma < \rho\}$ un conjunto de símbolos de relaciones y $\{f_\gamma : \gamma < \beta\}$ es un conjunto de símbolos de funciones; donde $\mu(\gamma)$ representa el grado o número de argumentos de R_γ y $\delta(\gamma)$ el grado de f_γ.

Los símbolos empleados en un lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ son los siguientes:

1. Símbolos auxiliares: (,)
2. Conectivos lógicos finitos: $\wedge$ conjunción, $\vee$ disyunción y $\neg$ negación.
3. Símbolo de igualdad $=$
4. Conjunto de κ variables individuales $\{x_\gamma : \gamma < \kappa\}$
5. Los símbolos del τ-tipo
6. Símbolo del cuanficador existencial o particular $\exists$
7. Conectivos infinitarios $\bigwedge_{\gamma<\theta}$ y $\bigvee_{\gamma<\theta}$ con $\theta < \kappa$
8. Cuantificador existencial infinitario $\exists_{\gamma<\theta}$ con $\theta < \kappa$

Como puede observarse, los lenguajes $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ son extensiones de nuestro lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$, por lo que se omiten algunas definiciones pues son análogas a las definiciones ya mencionadas para el lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$. En particular los τ-términos y las τ-formulas atómicas se definen igual, por lo que sólo se dan las definiciones donde existan cambios sustantivos.

Definición 1.3.2. Definimos de forma recursiva una fórmula para nuestro lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ de la siguiente manera:

1. Si φ es una fórmula atómica, entonces φ es una fórmula.
2. Si φ y ψ son fórmulas, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ y $\neg\varphi$ también son fórmulas.
3. Si φ es una fórmula entonces $\exists x_\gamma \varphi$ es una fórmula donde $x_\gamma \in \{x_\gamma : \gamma \in \kappa\}$
4. Si $\theta < \kappa$ y cada φ_γ son fórmulas entonces $\wedge_{\gamma<\theta}\varphi_\gamma$ y $\vee_{\gamma<\theta}\varphi_\gamma$ son también fórmulas.
5. Si $\theta < \lambda$ y φ es una fórmula entonces $\exists_{\xi<\theta} x_{\gamma_\xi}(\varphi)$ es una fórmula.

En este trabajo se toman a $\varphi \longrightarrow \psi$ y $\forall_{\xi<\theta} x_{\gamma_\xi}(\varphi)$ como abreviaturas para las fórmulas $\neg\varphi \vee \psi$ y $\neg\exists_{\xi<\theta} x_{\gamma_\xi}(\neg\varphi)$ respectivamente.[1] Al igual que el lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ las estructuras se definen exactamente igual, motivo por el cual pasaremos directo a las definiciones que corresponden a las nociones de satisfacción.

Definición 1.3.3. Dada $\mathfrak{A} = \langle A, \{P_\gamma : \gamma < \rho\}, \{g_\gamma : \gamma < \beta\}, \{d_\gamma : \gamma < \eta\}\rangle$ una estructura de tipo τ, $T(\tau)$ el conjunto de términos de tipo τ y $\alpha = \langle a_\gamma : \gamma < \kappa\rangle \in^\kappa A$, definimos una asignación $\bar{\alpha} : T(\tau) \longrightarrow A$ de la siguiente forma:

1. Si $t = x_\gamma \in \{x_\gamma : \gamma < \kappa\}$, entonces $\bar{\alpha}(t) = a_\gamma$
2. Si $t = c_\gamma \in \{c_\gamma : \gamma < \eta\}$, entonces $\bar{\alpha}(t) = (c_\gamma)^{\mathfrak{A}} = d_\gamma$
3. Si $t = f_\gamma(t_{1,\ldots,}t_{\delta(\gamma)})$, entonces $\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(f_\gamma(t_{1,\ldots,}t_{\delta(\gamma)}) = (f_\gamma)^{\mathfrak{A}}(\bar{\alpha}(t_1), ..., \bar{\alpha}(t_{\delta(\gamma)})$

A la asignación $\bar{\alpha}$ algunas veces la denotaremos simplemente como α siempre y cuando no genere confusiones de algún tipo.

Definición 1.3.4. Dada $\mathfrak{A}$ una τ-estructura, α una asignación, φ,ϕ,ψ y para cada $\gamma < \theta < \kappa$ se tiene que ψ_γ son fórmulas de $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ definimos la relación $\mathfrak{A} \models_{\bar{\alpha}} \varphi$ ($\mathfrak{A}$ satisface φ con la asignación α), de la siguiente forma:

1. Si $\varphi = (t_i = t_j)$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha t_i = t_j$ si y sólo si $\bar{\alpha}(t_i) = \bar{\alpha}(t_j)$, donde $t_i, t_j \in T(\tau)$
2. Si $\varphi = R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$ si y sólo si $\left\langle \bar{\alpha}(t_1), ..., \bar{\alpha}(t_{\mu(\gamma)})\right\rangle \in P_\gamma$
3. Si $\varphi = \psi \wedge \phi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi \wedge \phi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi$ y $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$

[1] En *Large Infinitary Languages* de M. A. Dickmann se pide que las fórmulas en los lenguajes infinitarios tengan menos de λ variables, esta condición se pide para poder hablar de la cerradura de una fórmula (dada una fórmula $\varphi(x_1, ..., x_\theta)$ con θ variables libres su cerradura es la fórmula $\exists_{\xi\leq\theta} x_\xi \varphi(x_1, ..., x_\theta)$). Como en los teoremas donde usaremos la cerradura de fórmulas se refieren a los lenguajes $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ con κ un cardinal regular, se cumple que el número de variables libres de una fórmula es menor a κ; por lo que podemos hablar de su cerradura en estos lenguajes. Así, en este trabajo no se considera necesario pedir que para que una fórmula sea tal deba tener menos de λ variables libres.

4. Si $\varphi = \psi \vee \phi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi \vee \phi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi$ o $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$

5. Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \neg\psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models_\alpha \psi$

6. Si $\varphi = \exists x_k \psi$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \exists x_k \psi$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\alpha(k,a)} \psi$ donde $\alpha(k,a) \in^\kappa A$ denota a la función
$$\alpha(k,a)(n) = \begin{cases} \alpha(n) & n \neq k \\ a & n = k \end{cases}$$

7. Si $\varphi = \wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \wedge_{\gamma<\theta} \psi_\gamma$ si y sólo si para cada $\gamma < \theta$ se tiene que $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi_\gamma$

8. Si $\varphi = \vee_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \vee_{\gamma<\theta} \psi_\gamma$ si y sólo si para algún $\gamma < \theta$ se tiene que $\mathfrak{A} \models_\alpha \psi_\gamma$

9. Si $\varphi = \exists_{\xi<\theta} x_{\gamma_\xi}(\psi)$, entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \exists_{\xi<\theta} x_{\gamma_\xi}(\psi)$ si y sólo si existe $b = \langle a_{\gamma_\xi} : \xi < \theta \rangle \in^\theta A$ con $\theta < \lambda \leq \kappa$ tal que $\mathfrak{A} \models_{\alpha[\theta,b]} \psi$ donde $\alpha\,[\theta,b] \in^\kappa A$ denota a la función definida como
$$\alpha\,[\theta,b]\,(\gamma) = \begin{cases} \alpha(\gamma) & \gamma \neq \gamma_\xi \text{ para toda } \xi < \theta \\ a_{\gamma_\xi} & \gamma = \gamma_\xi \text{ para alguna } \xi < \theta \end{cases}$$

Las definiciones de verdad en un modelo y consecuencia semántica son análogas. Así mismo a noción de compacidad puede adaptarse a estos lenguajes infinitarios de la siguiente manera.

Definición 1.3.5. Decimos que un conjunto de enunciados Σ de $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ es κ-consistente si y sólo si para cualquier $S \subseteq \Sigma$ donde $|S| < \kappa$ se tiene que S tiene modelo.

Definición 1.3.6. Decimos que el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ satisface el teorema de compacidad si y sólo si para cualquier conjunto Σ de enunciados de $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ κ-consistente tiene modelo.

Definición 1.3.7. Decimos que el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ satisface el teorema de compacidad débil si y sólo si para cualquier conjunto Σ de enunciados de $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ κ-consistente tal que $|\Sigma| = \kappa$ tiene modelo.

Observación 1.3.1. Si el conjunto Σ es κ-consistente y $|\Sigma| < \kappa$ entonces Σ tiene modelo, por lo que en la definición 2.6.4. sólo se consideran los conjuntos Σ tal que $|\Sigma| = \kappa$.

También observemos que si $\varphi(x_1, ..., x_\theta)$ es una fórmula con θ variables libres, α y β son asignaciones tales que $\alpha(x) = \beta(x)$ para toda variable libre x de φ entonces $\mathfrak{A} \models_\alpha \varphi(x_1, ..., x_\theta)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_\beta \varphi(x_1, ..., x_\theta)$[2]. Por esta razón si $\varphi(x_1, ..., x_\theta)$ es una fórmula con θ variables libres usaremos la notación $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, ..., x_\theta)\,[a_1, ..., a_\theta]$ para decir que la formula φ se satisface en la estructura $\mathfrak{A}$ por cualquier sucesión que en la variable libre x_j vale a_j para toda $j \in \{1, ..., \theta\}$.

A continuación daremos algunas definiciones que nos brindan algunas relaciones que puede haber entre dos estructuras.

Definición 1.3.8. Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dos estructuras del lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ con dominios A y B respectivamente,
$$\tau = \{R_\gamma : \gamma < \rho\} \cup \{f_\gamma : \gamma < \beta\} \cup \{c_\gamma : \gamma < \eta\}$$
y una función $F : A \longrightarrow B$, decimos que:

[2] vid. Dickmann, M. A., *Large Infinitary Languages: Model Theory, p.67.*

- F es un morfismo si y sólo si

1. Si c_γ es un símbolo de constante, entonces $F(c_\gamma^{\mathfrak{A}}) = c_\gamma^{\mathfrak{B}}$.
2. Si f_γ es un símbolo de función y $a_1, ..., a_{\delta(\gamma)} \in A$, entonces

$$F(f_\gamma^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_{\delta(\gamma)})) = f_\gamma^{\mathfrak{B}}(F(a_1), ..., F(a_{\delta(\gamma)}))$$

.

3. Dado R_γ un símbolo de relación y $a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \in A$, entonces

si $\langle a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$ implica que $\langle F(a_1), ..., F(a_{\mu(\gamma)}) \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$.

- F es un morfismo fuerte si y sólo si F es un morfismo y para toda R_γ un símbolo de relación y $a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \in A$ se cumple que

si $\langle F(a_1), ..., F(a_{\mu(\gamma)}) \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$ entonces $\langle a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$.

- F es un encaje si y sólo si F es un morfismo fuerte y F es inyectiva.
- F es un isomorfismo si y sólo si F es un encaje y F es una función biyectiva.
- F es un encaje elemental si y sólo si para cualquier fórmula φ del lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ con θ variables libres y $a_{\gamma_1}, ..., a_{\gamma_\theta} \in A$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi(x_{\gamma_1}, ..., x_{\gamma_\theta})\,[a_{\gamma_1}, ..., a_{\gamma_\theta}]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(x_{\gamma_1}, ..., x_{\gamma_\theta})\,[F(a_{\gamma_1}), ..., F(a_{\gamma_\theta})]$.

Notación Si existe un encaje elemental de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ lo denotaremos como $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ y si las estructuras son isomorfas lo denotaremos como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. En caso de que el encaje elemental sea la inclusión decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental $\mathfrak{B}$.

Observación 1.3.2. Observemos que la composición de encajes elementales es nuevamente un encaje elemental

Proposición 1.3.2. Si $F : A \longrightarrow B$ es un encaje elemental, entonces F es un encaje:

Sea $F : A \longrightarrow B$ un encaje elemental:
$I)$ Si c_γ es un símbolo de constante, entonces $F(c_\gamma^{\mathfrak{A}}) = c_\gamma^{\mathfrak{B}}$.
Como $\mathfrak{A} \models x = c_\gamma \left[(c_\gamma)^{\mathfrak{A}}\right]$ y F es un encaje elemental, entonces $\mathfrak{B} \models x = c_\gamma \left[F((c_\gamma)^{\mathfrak{A}})\right]$ por lo que

$$F((c_\gamma)^{\mathfrak{A}}) = (c_\gamma)^{\mathfrak{B}}$$

$II)$ Si f_γ es un símbolo de función y $a_1, ..., a_{\delta(\gamma)} \in A$, entonces

$$F(f_\gamma^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_{\delta(\gamma)})) = f_\gamma^{\mathfrak{B}}(F(a_1), ..., F(a_{\delta(\gamma)}))$$

como $\mathfrak{A} \models x = f_\gamma(x_1, ..., x_{\delta(\gamma)}) \left[f_\gamma^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_{\delta(\gamma)}), a_1, ..., a_{\delta(\gamma)}\right]$ y F es un encaje elemental, entonces

$$\mathfrak{B} \models x = f_\gamma(x_1, ..., x_{\delta(\gamma)}) \left[F(f_\gamma^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_{\delta(\gamma)})), F(a_1), ..., F(a_{\delta(\gamma)})\right]$$

por lo que $F(f_\gamma^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_{\delta(\gamma)})) = f_\gamma^{\mathfrak{B}}(F(a_1), ..., F(a_{\delta(\gamma)}))$
$III)$ Dado R_γ un símbolo de relación y $a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \in A$, entonces

$$\langle a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}} \text{ Si y sólo si } \langle F(a_1), ..., F(a_{\mu(\gamma)}) \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$$

$\left\langle a_1, ..., a_{\mu(\gamma)} \right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models R_\gamma(x_1, ..., x_{\delta(\gamma)}) \left[a_1, ..., a_{\mu(\gamma)}\right]$ y como F es un encaje elemental equivale a que $\mathfrak{B} \models R_\gamma(x_1, ..., x_{\delta(\gamma)}) \left[F(a_1), ..., F(a_{\mu(\gamma)})\right]$; si y sólo si, $\left\langle F(a_1), ..., F(a_{\mu(\gamma)}) \right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{B}}$

$IV)$ F es inyectiva

Supongamos, para reducción al absurdo, que existen $a, b \in A$ con $a \neq b$ y $F(a) = F(b)$. Se tiene que $\mathfrak{B} \models x = y\,[F(a), F(b)]$ pero $\mathfrak{A} \not\models x = y\,[a, b]$ lo que contradice el hecho de que F sea un encaje elemental. Por consiguiente F es inyectiva.

De lo anterior se concluye que F es un encaje.

Definición 1.3.9. Sea ν un ordinal límite. Decimos que $\langle \mathfrak{A}_i : i \in \nu \rangle$ es una cadena elemental si cada $\mathfrak{A}_i$ es una estructura con dominio A_i y existe $\{e_{i,j} : i, j \in \nu\}$ un conjunto de encajes elementales tales que

$$e_{i,j} : A_i \longrightarrow A_j$$

y $e_{i,k} = e_{j,k} \circ e_{i,j}$ para cada $i < j < k$.

Definición 1.3.10. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura con dominio A, donde A es un conjunto. Decimos que una función $h_\varphi : A^\theta \longrightarrow A^\xi$ es una función de Skolem para una fórmula φ con $\xi + \theta$ variables libres si existe $b_1, ..., b_\xi \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[b_1, ..., b_\xi, a_1, ..., a_\theta]$$

implica que $\mathfrak{A} \models \varphi\,[h_\varphi(a_1, ..., a_\theta), a_1, ..., a_\theta]$ para cualquier $a_1, ..., a_\theta \in A$.

Usando el axioma de elección uno puede construir una función de Skolem para cada fórmula φ. Si $e : \mathcal{P}(A^\xi) \longrightarrow A$ es una función de elección y $b_0 \in A$ es un elemento fijo de A, definimos la función de Skolem como

$$h_\varphi(a_1, ...a_n) = \begin{cases} e(\{\langle b_1, ..., b_\xi\rangle \in A^\xi : \mathfrak{A} \models \varphi\,[b_1, ..., b_\xi, a_1, ..., a_\theta]\}) & \text{Si } \{\langle b_1, ..., b_\xi\rangle \in A^\xi : \mathfrak{A} \models \varphi\,[b_1, ..., b_\xi, a_1, ..., a_\theta]\} \neq \emptyset \\ \langle b_0, ..., b_0\rangle & \text{Si } \{\langle b_1, ..., b_\xi\rangle \in A^\xi : \mathfrak{A} \models \varphi\,[b_1, ..., b_\xi, a_1, ..., a_\theta]\} = \emptyset \end{cases}$$

Notación Si $\mathfrak{A}$ es una estructura con universo A, donde A es un conjunto, y $X \subseteq A$ entonces denotaremos por $H^{\mathfrak{A}}(X)$ a la cerradura de X bajo las funciones de Skolem de todas las fórmulas del lenguaje[3].

Proposición 1.3.3. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura y $X \subseteq A$, entonces $H^{\mathfrak{A}}(X) \preccurlyeq \mathfrak{A}$.

Procederemos por inducción sobre la longitud de la fórmula. Sea φ una fórmula con con $\theta + 1$ variables libres y $a_1, ..., a_\theta \in H^{\mathfrak{A}}(X)$.

$I)$ Si φ es de la forma $R_\gamma(a_1, ..., a_\theta)$, entonces $H^{\mathfrak{A}}(X) \models R\,[a_1, ..., a_\theta]$ si y sólo si

$$\langle a_1, ..., a_\theta \rangle \in R^{H^{\mathfrak{A}}(X)} = R^{\mathfrak{A}} \cap H^{\mathfrak{A}}(X)$$

como $a_1, ..., a_\theta \in H^{\mathfrak{A}}(X)$ es equivalente a que $\langle a_1, ..., a_\theta \rangle \in R^{\mathfrak{A}}$; lo que coimplica que $\mathfrak{A} \models R\,[a_1, ..., a_\theta]$.

Supongamos por hipótesis de inducción que para toda fórmula ψ de longitud menor a φ se cumple que

$$H^{\mathfrak{A}}(X) \models \psi\,[a_1, ..., a_\theta] \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$$

$II)$ Si φ es de la forma $\wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$, entonces $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma\,[a_1, ..., a_\theta]$ si y sólo si para toda $\gamma < \theta$ se satisface que $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \psi_\gamma\,[a_1, ..., a_\theta]$. Así por hipótesis de inducción es equivalente a que $\mathfrak{A} \models \psi_\gamma\,[a_1, ..., a_\theta]$ para toda $\gamma < \theta$; lo que coimplica que $\mathfrak{A} \models \wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma\,[a_1, ..., a_\theta]$.

$III)$ Si φ es de la forma $\neg\psi$, entonces $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \neg\psi\,[a_1, ..., a_\theta]$ si y sólo si $H^{\mathfrak{A}}(X) \not\models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$. Por hipótesis de inducción es equivalente a que $\mathfrak{A} \not\models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$; lo que coimplica que $\mathfrak{A} \models \neg\psi\,[a_1, ..., a_\theta]$.

[3] Se está suponiendo que el conjunto de formulas del lenguaje es también un conjunto

IV) Si φ es de la forma $\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$, entonces $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \exists_{\gamma<\xi}x_\gamma(\psi)\,[a_1,...,a_\theta]$. Como $H^{\mathfrak{A}}(X)$ es una subestructura de $\mathfrak{A}$ se sigue que $\mathfrak{A} \models \exists_{\gamma<\xi}x_\gamma(\psi)\,[a_1,...,a_\theta]$. Por otro lado, si $\mathfrak{A} \models \exists_{\gamma<\xi}x_\gamma(\psi)\,[a_1,...,a_\theta]$, entonces existe $b = \langle b_\gamma : \gamma < \xi\rangle \in^\theta A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi\,[b_1,...,b_\xi,a_1,...,a_\theta]$. Dado que $H^{\mathfrak{A}}(X)$ es cerrado por funciones Skolem entonces $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \psi\,[h_\psi(a_1,...,a_\theta),a_1,...,a_\theta]$, lo que implica que $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \exists_{\gamma<\xi}x_\gamma(\psi)\,[a_1,...,a_\theta]$. De ambas implicaciones se sigue que $H^{\mathfrak{A}}(X) \models \exists_{\gamma<\xi}x_\gamma(\psi)\,[a_1,...,a_\theta]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \exists_{\gamma<\xi}x_\gamma(\psi)\,[a_1,...,a_\theta]$.

1.4. Filtros y Ultrafiltros

Definición 1.4.1. Dado I un conjunto, decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ es un filtro si cumple las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{F}$
2. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}$ se tiene que$A \cap B \in \mathcal{F}$
3. Para cualesquiera $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{P}(I)$ se cumple que si $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$

Observación 1.4.1. Dado $\mathcal{F}$ un filtro no puede suceder que tanto $A \in \mathcal{F}$ como $X \setminus A \in \mathcal{F}$, pues por la condición 2 se tendría que cumplir que $A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}$; lo que implicaría que $\emptyset \in \mathcal{F}$ que contradice la condición 1. De donde si $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $X \setminus A \notin \mathcal{F}$.

Proposición 1.4.1. Sea $\mathcal{F}$ un filtro, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$.

Notemos que el regreso se da por definición de filtro por lo que sólo basta mostrar la ida.

Supongamos $A \cap B \in \mathcal{F}$. Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$ por la condición 3 del filtro se tiene que $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.4.2. Sea $\mathcal{F}$ un filtro tal que $A \notin \mathcal{F}$ y $(X \setminus A) \notin \mathcal{F}$, entonces

$$\langle \mathcal{F}(A) \rangle = \left\{ X \subseteq I : \exists \mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \left((\cap \mathcal{F}_0) \cap A \subseteq X \right) \right\}$$

es el filtro más pequeño, respecto a la contención, tal que $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \langle \mathcal{F}(A) \rangle$. A $\langle \mathcal{F}(A) \rangle$ se le conoce como el filtro generador de $\mathcal{F}$ y A.

Primero veamos que $\langle \mathcal{F}(A) \rangle$es un filtro.

- Si $\emptyset \in \langle \mathcal{F}(A) \rangle$ entonces por la definición de $\langle \mathcal{F}(A) \rangle$ existe $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $(\cap \mathcal{F}_0) \cap A \subseteq \emptyset$, por lo que $\cap \mathcal{F}_0 \subseteq X \setminus A$ pero como $\mathcal{F}$ es filtro y $\cap \mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$ (pues es una intersección finita de elementos del filtro) implicaría que $X \setminus A \in \mathcal{F}$ lo que contradice la hipótesis de que $(X \setminus A) \notin \mathcal{F}$. Así $\emptyset \notin \langle \mathcal{F}(A) \rangle$.
- Como $\mathcal{F}$ es filtro entonces $I \in \mathcal{F}$, de ahí que $\{I\} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y así $I \cap A = A \subseteq I$; por lo que $A, I \in \langle \mathcal{F}(A) \rangle$
- Sean $X, Y \in \langle \mathcal{F}(A) \rangle$. Demostraremos que $X \cap Y \in \langle \mathcal{F}(A) \rangle$

Por definición tenemos que existen $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $(\cap\mathcal{F}_0) \cap A \subseteq$ X) y $(\cap\mathcal{F}_1) \cap A \subseteq Y$. Consideremos $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $(\cap\mathcal{F}_2) \cap A = (\cap\mathcal{F}_0) \cap (\cap\mathcal{F}_1) \cap A \subseteq X \cap Y$; de donde $X \cap Y \in \langle\mathcal{F}(A)\rangle$

- Sea $X \in \langle\mathcal{F}(A)\rangle$ y $Y \subseteq I$ tal que $X \subseteq Y$, entonces por definición de $\langle\mathcal{F}(A)\rangle$ existe $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $(\cap\mathcal{F}_0) \cap A \subseteq X \subseteq Y$ por lo que $Y \in \langle\mathcal{F}(A)\rangle$.

Por lo anterior tenemos que $\langle\mathcal{F}(A)\rangle$ es un filtro. Además para cualquier $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $\{F\} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y como $F \cap A \subseteq F$ se tiene que $F \in \mathcal{F}$. Por tanto $\mathcal{F} \subseteq \langle\mathcal{F}(A)\rangle$. De lo que se concluye que $\langle\mathcal{F}(A)\rangle$ es un filtro tal que $A, \mathcal{F} \subseteq \langle\mathcal{F}(A)\rangle$.

Por otro lado si existiera un filtro $\mathcal{H}$ tal que $A, \mathcal{F} \subseteq\mathcal{H}$, por la definición (condición 2) de filtro se tendría que para todo $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{H}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ se cumple que $(\cap\mathcal{F}_0) \in \mathcal{H}$; y como $A, \mathcal{F} \subseteq\mathcal{H}$ en particular obtendríamos que para todo $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{H}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ se satisface que $(\cap\mathcal{F}_0) \cap A \in \mathcal{H}$. Dado que los filtros son cerrados bajo supraconjuntos entonces para todo $X \subseteq I$ para el cual existe $\mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $(\cap\mathcal{F}_0) \cap A \subseteq X$ se tiene que $x \in \mathcal{H}$, por lo que $\langle\mathcal{F}(A)\rangle \subseteq \mathcal{H}$.

Finalmente concluimos que $\langle\mathcal{F}(A)\rangle$ es el filtro más pequeño respecto a la contención que contiene a A y $\mathcal{F}$.

Definición 1.4.2. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un filtro maximal respecto a la contención, es decir, para todo filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Proposición 1.4.3. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto I, entonces para todo $A \subseteq I$ se tiene que $A \in \mathcal{U}$ si y sólo $X \setminus A \notin \mathcal{U}$

Notemos que la ida se da por la observación 1.4.1. por lo que basta mostrar el regreso. Supongamos que $X \setminus A \notin \mathcal{U}$ y para reducción al absurdo también vamos a suponer que $A \notin \mathcal{U}$. Consideremos $\langle\mathcal{U}(A)\rangle$ que por la Proposición 1.4.2. es un filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \langle\mathcal{U}(A)\rangle$ pero como $A \notin \mathcal{U}$ se da la contención propia $\mathcal{U} \subsetneq \langle\mathcal{U}(A)\rangle$ lo que es una contradicción, pues $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y por definición es maximal con respecto a la contención.

Observación 1.4.2. De la proposición 1.4.3 se sigue inmediatamente que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto I, entonces para todo $A \subseteq I$ se tiene que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Teorema 1.4.1. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo $A \subseteq I$ se cumple que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Por la observación 1.4.2. se tiene la ida mientras que el regreso se obtiene por contradicción. Si existiera un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{F}$, entonces hay un $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \notin \mathcal{U}$; sin embargo, por hipótesis para todo $A \subseteq I$ se cumple que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Esto implica que $X \setminus A \in \mathcal{U}$ pero $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{F}$ por lo que $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$, entonces $\emptyset = (X \setminus A) \cap A \in \mathcal{F}$ lo que es una contradicción a la observación 1.4.1.

Definición 1.4.4. Decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro κ-completo si y sólo si $\mathcal{F}$ es un filtro y para cualquier $\{X_\gamma : \gamma < \theta\} \subseteq \mathcal{F}$ con $\theta < \kappa$ se tiene que $\cap_{\gamma<\theta} X_\gamma \in \mathcal{F}$.

Definición 1.4.5. Un filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ es principal si y sólo si existe $A \subseteq I$ tal que $\mathcal{F} = \{C \subseteq I : A \subseteq C\}$

Teorema 1.4.2. Sea $F : I \longrightarrow S$ una función sobreyectiva. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre I entonces

$$\mathcal{H} = \left\{A \subseteq S : F^{-1}[A] \in \mathcal{F}\right\}$$

es un filtro sobre S. Además, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro se tiene que $\mathcal{H}$ también es un ultrafiltro. Así mismo, si $\mathcal{F}$ es $\kappa-$completo entonces $\mathcal{H}$ es $\kappa-$completo. Y, en caso de que $\mathcal{F}$ sea un filtro no principal y F sea una función inyectiva se sigue que $\mathcal{H}$ también es no principal.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I . Veamos que $\mathcal{H} = \left\{A \subseteq S : F^{-1}[A] \in \mathcal{F}\right\}$ es un filtro sobre S

- $S \in \mathcal{H}$. Como F es sobreyectiva entonces $F^{-1}[S] = I \in \mathcal{F}$; por lo que $S \in \mathcal{H}$
- $\emptyset \notin \mathcal{H}$. Como $F^{-1}[\emptyset] = \emptyset \notin \mathcal{F}$ se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{H}$
- Si $A, B \in \mathcal{H}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{H}$:

Sean $A, B \in \mathcal{H}$, entonces $F^{-1}[A] \in \mathcal{F}$ y $F^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es filtro se tiene que

$$F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B] \in \mathcal{F}$$

por lo que $A \cap B \in \mathcal{H}$

- Para cualquier $A \subseteq S$ y $C \in \mathcal{H}$ tal que $C \subseteq A$ se cumple que $A \in \mathcal{H}$.

Sean $A \subseteq S$ y $C \in \mathcal{H}$ tal que $C \subseteq A$, entonces $F^{-1}[C] \in \mathcal{F}$ y además $F^{-1}[C] \subseteq F^{-1}[A]$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro y $F^{-1}[C] \subseteq F^{-1}[A]$ se tiene que $F^{-1}[A] \in \mathcal{F}$; de ahí que $A \in \mathcal{H}$.

- Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro entonces $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro. Por el teorema 1.4.1. basta mostrar que para cualquier $A \subseteq S$ se cumple que $A \in \mathcal{H}$ o bien $S \setminus A \in \mathcal{H}$.

Sea $A \subseteq S$. Observemos que $F^{-1}[A] \subseteq I$ y dado que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, por el teorema 1.4.1, se tiene que $F^{-1}[A] \in \mathcal{F}$ o bien $I \setminus F^{-1}[A] \in \mathcal{F}$. Así, de la suprayectividad de F se sigue que $F^{-1}[A] \in \mathcal{F}$ o $F^{-1}[S \setminus A] \in \mathcal{F}$; lo que implica, por definición de $\mathcal{H}$, que $A \in \mathcal{H}$ o bien $S \setminus A \in \mathcal{H}$. Con lo que concluimos que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro.

- Si $\mathcal{F}$ es $\kappa-$completo entonces $\mathcal{H}$ es $\kappa-$completo.

Sea $\{A_\gamma : \gamma < \lambda\} \subseteq \mathcal{H}$ con $\lambda < \kappa$, entonces $\left\{F^{-1}[A_\gamma] : \gamma < \lambda\right\} \subseteq \mathcal{F}$. Dado que el filtro $\mathcal{F}$ es $\kappa-$completo, entonces $F^{-1}\left[\bigcap_{\gamma<\lambda} A_\gamma\right] = \bigcap_{\gamma<\lambda} F^{-1}[A_\gamma] \in \mathcal{F}$; por consiguiente $\bigcap_{\gamma<\lambda} A_\gamma \in \mathcal{F}$.

- Si $\mathcal{F}$ es un filtro no principal, entonces $\mathcal{H}$ es un filtro no principal.

Si $\mathcal{H}$ es un filtro principal, entonces existe $B \in \mathcal{H}$ tal que para todo $C \in \mathcal{H}$ se tiene que $B \subseteq C$. Afirmamos que $F^{-1}[B] \subseteq J$ para cualquier $J \in \mathcal{F}$, lo que implicaría que $\mathcal{F}$ es principal. Dado $J \in \mathcal{F}$, entonces $F[J] \subseteq S$ y como la función es inyectiva se tiene que $F^{-1}[F[J]] = J \in \mathcal{F}$; por lo que $F[J] \in \mathcal{H}$. Y como $\mathcal{H}$ es principal entonces $B \subseteq F[J]$, lo que implica que $F^{-1}[B] \subseteq F^{-1}[F[J]] = J$. Así $\mathcal{F}$ es un filtro principal.

Proposición 1.4.4. Si $\mathcal{F}$ es un filtro κ-completo, entonces para todo $\theta < \kappa$ se cumple que $\cap_{\gamma<\theta} X_\gamma \in \mathcal{F}$ si y sólo si para todo $\gamma < \theta$ se satisface que $X_\gamma \in \mathcal{F}$.

El regreso se da por la definición, pues el filtro es κ-completo, por lo que basta mostrar la ida. Sea $\theta < \kappa$ tal que $\cap_{\gamma<\theta} X_\gamma \in \mathcal{F}$, como $\cap_{\gamma<\theta} X_\gamma \subseteq X_\gamma$ y $\mathcal{F}$ es filtro entonces es cerrado por supraconjuntos por lo que para todo $\gamma < \theta$ se satisface que $X_\gamma \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.4.6. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal y κ completo sobre κ, entonces para todo $\lambda < \kappa$ se tiene que $\{\xi \in \kappa : \lambda < \xi\} \in \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal y κ completo sobre κ. Por un lado, como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro (observación 1.4.2.) se tiene que

$$\{\xi \in \kappa : \lambda < \xi\} \in \mathcal{F} \text{ o bien } \{\xi < \kappa : \xi \leq \lambda\} \in \mathcal{F}$$

Supongamos que $A = \{\xi < \kappa : \xi \leq \lambda\} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ no es principal para todo $\xi \in A$ se tiene que $\{\xi\} \notin \mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro y el hecho de que $\{\xi\} \notin \mathcal{F}$, por la proposición 1.4.3, se sigue que $\kappa \setminus \{\xi\} \in \mathcal{F}$, entonces, $A \cap (\kappa \setminus \{\xi\}) = A \setminus \{\xi\} \in \mathcal{F}$. Además, como el filtro es κ completo se tiene que $\emptyset = \bigcap_{\xi \leq \lambda} A \setminus \{\xi\} \in \mathcal{F}$ que es una contradicción. Por consiguiente $\{\xi < \kappa : \xi \leq \lambda\} \notin \mathcal{F}$, con lo que se concluye que $\{\xi \in \kappa : \lambda < \xi\} \in \mathcal{F}$.

Proposición 1.4.7. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal y κ completo sobre κ, entonces para todo $X \in \mathcal{F}$ se cumple que $|X| = \kappa$.

Supongamos que existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $|X| < \kappa$ y sea $|X| = \lambda$, entonces $X = \{x_\gamma : \gamma < \lambda\}$. Como $\mathcal{F}$ es no principal se tiene que para todo $\gamma < \lambda$ se cumple que $\{x_\gamma\} \notin \mathcal{F}$. Ya que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, entonces $\kappa \setminus \{x_\gamma\} \in \mathcal{F}$; por consiguiente $X \cap \bigcap_{\gamma<\lambda}(\kappa \setminus \{x_\gamma\}) \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es $\kappa-$completo. Sin embargo,

$$X \cap \bigcap_{\gamma<\lambda}(\kappa \setminus \{x_\gamma\}) = X \cap (\kappa \setminus \bigcup_{\gamma<\lambda}\{x_\gamma\}) = X \cap (\kappa \setminus X) = \emptyset$$

y entonces $\emptyset \in \mathcal{F}$ lo que es una contradicción.

1.5. Productos, Ultraproductos y Ultrapotencias

Definición 1.5.1 Sea I un conjunto de indices, tal que para toda $i \in I$ se tiene que $A_i \neq \emptyset$,

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \{f : f : I \longrightarrow \cup_{i \in I} A_i\}$$

y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ un filtro. Definimos $\sim_{\mathcal{F}}$ una relación sobre A de la siguiente manera: $f \sim_{\mathcal{F}} g$ si y sólo si $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$. Como es usual denotaremos por $[f]$ a la clase de equivalencia, es decir, $[f] = \{g \in A : f \sim_{\mathcal{F}} g\}$.

Lema 1.5.1. $\sim_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia

- $f \sim_{\mathcal{F}} f$ pues $\{i \in I : f(i) = f(i)\} = I \in \mathcal{F}$
- Si $f \sim_{\mathcal{F}} g$, entonces como la identidad es simétrica $\{i \in I : g(i) = f(i)\} = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$ por lo que $g \sim_{\mathcal{F}} f$
- Si $f \sim_{\mathcal{F}} g$ y $g \sim h$, entonces $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$ y $\{i \in I : g(i) = h(i)\} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces

  $$\{i \in I : f(i) = g(i) \wedge g(i) = h(i)\} = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \cap \{i \in I : g(i) = h(i)\} \in \mathcal{F}$$

  y dado que $\{i \in I : f(i) = g(i) \wedge g(i) = h(i)\} \subseteq \{i \in I : f(i) = h(i)\}$ entonces

  $$\{i \in I : f(i) = h(i)\} \in \mathcal{F}$$

  por consiguiente $f \sim_{\mathcal{F}} h$.

De lo anterior concluimos que $\sim_{\mathcal{F}}$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, i.e. $\sim_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia.

Como es costumbre, en matemáticas siempre que tenemos una relación de equivalencia formamos el conjunto cociente $A/\sim_{\mathcal{F}}=\{[f]:f\in A\}$. Sin embargo, buscamos dotar de estructura a dicho cociente.

Definición 1.5.2. Sea I un conjunto, $\{\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}} : i\in I\}$ un conjunto de estructuras del mismo tipo τ tal que

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}=\left\langle A_i,\left\{P_\gamma^i:\gamma<\rho\right\},\left\{g_\gamma^i:\gamma<\beta\right\},\left\{d_\gamma^i:\gamma<\eta\right\}\right\rangle.$$

consideremos $A=\prod_{i\in I}A_i=\{f:f:I\longrightarrow\cup_{i\in I}A_i\}$, $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(I)$ un filtro, $\sim_{\mathcal{F}}$ la relación de equivalencia descrita en la definición 1.5.1. y $A_{\mathcal{F}}:=A/\sim_{\mathcal{F}}$. Definimos una nueva estructura

$$\mathfrak{A}=\left\langle A_{\mathcal{F}},\{P_\gamma:\gamma<\rho\},\{g_\gamma:\gamma<\beta\},\left\{\left[f_{c_\gamma}\right]:\gamma<\eta\right\}\right\rangle$$

a la que llamaremos producto o producto reducido, cuya interpretación sobre el lenguaje de tipo

$$\tau=\{R_\gamma:\gamma<\rho\}\cup\{f_\gamma:\gamma<\beta\}\cup\{c_\gamma:\gamma<\eta\}$$

está definida de la siguiente manera:

1. Para cada $\gamma<\eta$ tenemos que $c_\gamma^{\mathfrak{A}}=\left[f_{c_\gamma}\right]$ donde para toda $i\in I$ se tiene que $f_{c_\gamma}(i)=c_\gamma^{\mathfrak{A}_i}=d_\gamma^i$.
2. Para cada $\gamma<\beta$ tenemos que $g_\gamma=f_\gamma^{\mathfrak{A}}:A_{\mathcal{F}}^{\delta(\gamma)}\longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ y es definida de la siguiente manera

$$f_\gamma^{\mathfrak{A}}([f_1],...,\left[f_{\delta(\gamma)}\right])=\left[g_{f_\gamma}\right]$$

donde para toda $i\in I$ se cumple que $g_{f_\gamma}(i)=f_\gamma^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}}(f_1(i),...,f_{\delta(\gamma)}(i))$

3. Para cada $\gamma<\rho$ tenemos que $P_\gamma=R_\gamma^{\mathfrak{A}}\subseteq A_{\mathcal{F}}^{\mu(\gamma)}$ y es tal que

$$\left\langle[f_1],...,\left[f_{\mu(\gamma)}\right]\right\rangle\in R_\gamma^{\mathfrak{A}}\text{ si y sólo si }\left\{i\in I:\left\langle f_1(i),...,f_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle\in R_\gamma^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}}\right\}\in\mathcal{F}$$

al producto reducido lo denotaremos como $\prod_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}$

El siguiente resultado nos dice que la construcción del producto reducido en el lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ esta bien definida, mientras que en el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ se necesita pedir que $\mathcal{F}$ sea un filtro κ-completo.

Lema 1.5.2. En el lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$las interpretaciones de los símbolos de funciones y relaciones del producto reducido no dependen de los representantes. En el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ se tiene el mismo resultado si $\mathcal{F}$ es un filtro λ-completo.

Afirmamos que la interpretación de los símbolos de función no dependen de los representantes

- Si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$

Sea $\gamma < \beta$ y $f_1 \sim_{\mathcal{F}} f'_1, ..., f_{\delta(\gamma)} \sim_{\mathcal{F}} f'_{\delta(\gamma)}$ y $h : A_{\mathcal{F}}^{\delta(\gamma)} \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ es tal que para toda $i \in I$ se cumple que

$$h(i) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f'_1(i), ..., f'_{\delta(\gamma)}(i))$$

veamos que $g_{f_\gamma} \sim_{\mathcal{F}} h$.

Como $f_1 \sim_{\mathcal{F}} f'_1, ..., f_{\delta(\gamma)} \sim_{\mathcal{F}} f'_{\delta(\gamma)}$ entonces, por definición de $\sim_{\mathcal{F}}$, se tiene que para toda $\theta \leq \delta(\gamma)$ se cumple que $\{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} \in \mathcal{F}$ y como $\delta(\gamma) \in \omega$ (pues el lenguaje es $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$), entonces $\cap_{\theta \leq \delta(\gamma)} \{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} \in \mathcal{F}$. Dado que

$$\cap_{\theta \leq \delta(\gamma)} \{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} = \{i \in I : \forall \theta \leq \delta(\gamma)(f_\theta(i) = f'_\theta(i))\} \in \mathcal{F}$$

y

$$\{i \in I : \forall \theta \leq \delta(\gamma)(f_\theta(i) = f'_\theta(i))\} \subseteq \left\{i \in I : f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), ..., f_{\delta(\gamma)}(i)) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f'_1(i), ..., f'_{\delta(\gamma)}(i))\right\}$$

se tiene que $\left\{i \in I : f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), ..., f_{\delta(\gamma)}(i)) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f'_1(i), ..., f'_{\delta(\gamma)}(i))\right\} \in \mathcal{F}$

Por otro lado $\left\{i \in I : g_{f_\gamma}(i) = h(i)\right\} = \left\{i \in I : f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), ..., f_{\delta(\gamma)}(i)) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f'_1(i), ..., f'_{\delta(\gamma)}(i))\right\}$, de lo que se concluye que $\left\{i \in I : g_{f_\gamma}(i) = h(i)\right\} \in \mathcal{F}$; y en consecuencia $g_{f_\gamma} \sim_{\mathcal{F}} h$.

- Si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro λ-completo, lo único que hay que modificar en la prueba es que $\delta(\gamma) \in \lambda$ y como el filtro es λ-completo entonces $\cap_{\theta \leq \delta(\gamma)} \{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} \in \mathcal{F}$

Afirmamos que la interpretación de los símbolos de relación no depende de los representantes

- Si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$

Sea $\gamma < \rho$ y $f_1 \sim_{\mathcal{F}} f'_1, ..., f_{\mu(\gamma)} \sim_{\mathcal{F}} f'_{\mu(\gamma)}$ y $\left\{i \in I : \left\langle f_1(i), ..., f_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in \mathcal{F}$. Veamos que

$$\left\{i \in I : \left\langle f'_1(i), ..., f'_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in \mathcal{F}$$

como $f_1 \sim_{\mathcal{F}} f'_1, ..., f_{\mu(\gamma)} \sim_{\mathcal{F}} f'_{\mu(\gamma)}$ entonces, por definición de $\sim_{\mathcal{F}}$, se tiene que para toda $\theta \leq \mu(\gamma)$ se satisface que $\{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} \in \mathcal{F}$ y como $\mu(\gamma) \in \omega$ (pues el lenguaje es $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$), entonces

$$\cap_{\theta \leq \mu(\gamma)} \{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} \in \mathcal{F}$$

dado que

$$\cap_{\theta \leq \mu(\gamma)} \{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} = \{i \in I : \forall \theta \leq \mu(\gamma)(f_\theta(i) = f'_\theta(i))\} \in \mathcal{F}$$

y puesto que $\left\{i \in I : \left\langle f_1(i), ..., f_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in \mathcal{F}$, entonces

$$\left\{i \in I : \left\langle f_1(i), ..., f_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \cap \{i \in I : \forall \theta \leq \mu(\gamma)(f_\theta(i) = f'_\theta(i))\} \in \mathcal{F}$$

ya que

$$\left\{i \in I : \left\langle f_1(i), ..., f_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \cap \{i \in I : \forall \theta \leq \mu(\gamma)(f_\theta(i) = f'_\theta(i))\} \subseteq$$

$$\left\{i \in I : \left\langle f'_1(i), ..., f'_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\}$$

y $\mathcal{F}$ es cerrado por supraconjuntos se tiene que $\left\{i \in I : \left\langle f'_1(i), ..., f'_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in \mathcal{F}$.

- Si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro λ-completo, lo único que hay que modificar en la prueba es que $\mu(\gamma) \in \lambda$ y como el filtro es λ-completo entonces $\cap_{\theta \leq \mu(\gamma)} \{i \in I : f_\theta(i) = f'_\theta(i)\} \in \mathcal{F}$.

Definición 1.5.3. Dado un producto reducido $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}$, si $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro entonces al producto reducido se le llamara ultraproducto y lo denotaremos como $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$. En caso de que para toda $i \in I$ se tenga que $\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{A}$ al ultrapoducto se le conoce como ultrapotencia y se le denota como $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$.

Observación 1.5.1. Una sucesión en $\prod_{i\in I} A_i/\sim_{\mathcal{F}}$ es de la forma $\alpha = \langle [f_1], ..., [f_k], ...\rangle$, e induce a su vez una sucesión en A_i que denotaremos como $\alpha^i = \langle f_1(i), ..., f_k(i), ...\rangle$. Observemos que $\alpha(x_k) = [f_k]$ y $\alpha^i(x_k) = f_k(i)$. Además si definimos $[f](i) = f(i)$ se tiene que $\bar{\alpha}(t_k)(i) = \bar{\alpha^i}(t_k)$ lo cual probaremos por inducción sobre la longitud de los términos.

1. Si $t_k = c_j$, entonces $\bar{\alpha}(c_j)(i) = \left[f_{c_j}\right](i) = f_{c_j}(i) = c_j^{\mathfrak{A}_i} = \bar{\alpha^i}(c_j)$
2. Si $t_k = x_j$, entonces $\bar{\alpha}(x_j)(i) = [f_j](i) = f_j(i) = \bar{\alpha^i}(x_j)$
3. Sea $t_k = f_\gamma(t_1, ..., t_{\delta(\gamma)})$ y supongamos por hipótesis de inducción que el resultado es válido para términos de longitud menor, entonces

$$\bar{\alpha}(f_\gamma(t_1, ..., t_{\delta(\gamma)}))(i) = g_\gamma(\bar{\alpha}(t_1), ..., \bar{\alpha}(t_{\delta(\gamma)}))(i) = \left[g_{f_\gamma}\right](i) =_{Def.Y.H.I} f_\gamma^{\mathfrak{A}_{\mathfrak{i}}}(\alpha^i(t_1), ..., \alpha^i(t_{\delta(\gamma)})) = \bar{\alpha^i}(f_\gamma(t_1, ..., t_{\delta(\gamma)}))$$

ahora bien, como ya sabemos, los ultrafiltros guardan cierta relación con la satisfacción de fórmulas con respecto de alguna estructura, esto lo podemos observar en las demostraciones de completud del cálculo de predicados usando álgebras booleanas de Lindenbaum. Así, como hemos definido la interpretación de los símbolos de relación en los ultrapoductos empleando el ultrafiltro, se esperaría que la satisfacción de cualquier fórmula también esté relacionada con el ultrafiltro en cuestión. El siguiente teorema nos brinda precisamente esta conexión.

Teorema 1.5.1. *(Łoš)* Sea I un conjunto, $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ un conjunto de estructuras del mismo tipo τ, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I (si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ con $\kappa, \lambda \neq \omega$ se necesita que $\mathcal{F}$ sea un filtro κ-completo), $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ su respectivo ultraproducto, φ una fórmula en el lenguaje y α una sucesión, entonces $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \varphi$ si y sólo si $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \varphi\} \in \mathcal{F}$.

Procederemos por inducción sobre la longitud de las fórmulas

- Si $\varphi = (t_k = t_j)$, entonces

$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\bar{\alpha}} t_k = t_j$ si y sólo si (por definición de satisfacción) $\bar{\alpha}(t_k) := [h] = [g] =: \bar{\alpha}(t_j)$ que es equivalente a que $h \sim_{\mathcal{F}} g$. Que por definición de $\sim_{\mathcal{F}}$ es equivalente a que $\{i \in I : h(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$, es decir,

$$\{i \in I : \bar{\alpha}(t_k)(i) = \bar{\alpha}(t_j)(i)\} \in \mathcal{F}$$

Por la observación 1.5.1. equivale a que $\left\{i \in I : \bar{\alpha^i}(t_k) = \bar{\alpha^i}(t_j)\right\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si (por definición de satisfacción)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_{\mathfrak{i}} \models_{\bar{\alpha^i}} t_k = t_j\} \in \mathcal{F}$$

- Si $\varphi = (R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)}))$, entonces

$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$ si y sólo si (por definición de satisfacción) $\langle \bar{\alpha}(t_1), ..., \bar{\alpha}(t_{\mu(\gamma)}) \rangle \in (R_\gamma)^{Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i}$. Por definición del ultraproducto es equivalente a que $\{i \in I : \langle \bar{\alpha}(t_1)(i), ..., \bar{\alpha}(t_{\mu(\gamma)})(i) \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{F}$, y por la observación 1.5.1. equivale a que $\{i \in I : \langle \bar{\alpha^i}(t_1), ..., \bar{\alpha^i}(t_{\mu(\gamma)}) \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{F}$. Así por la definición de satisfacción equivale a que $\{i \in I : \mathfrak{A}_\mathfrak{i} \models_{\bar{\alpha^i}} R_\gamma\} \in \mathcal{F}$.

H.I. Supongamos que para cualquier fórmula ψ de longitud menor a φ se tiene que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \psi$ si y sólo si $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi\} \in \mathcal{F}$.

- $\varphi = (\psi \wedge \phi)$, entonces

$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\bar{\alpha}} \psi \wedge \phi$ si y sólo si $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\bar{\alpha}} \psi$ y $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\bar{\alpha}} \phi$. Por hipótesis de inducción es equivalente a que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi\} \in \mathcal{F}$ y $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \phi\} \in \mathcal{F}$. Por la proposición 1.4.1 equivale a que

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi\} \cap \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \phi\} \in \mathcal{F}$$

si y sólo si $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi \wedge \phi\} \in \mathcal{F}$.

- Si $\varphi = \neg\psi$, entonces

$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \neg\psi$ si y sólo si (por definición de satisfacción) $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \not\models_\alpha \psi$. Por hipótesis inductiva es equivalente a que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi\} \notin \mathcal{F}$, y por la proposición 1.4.3. equivale a que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \not\models_{\alpha^i} \psi\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si (por definición de satisfacción) $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \neg\psi\} \in \mathcal{F}$

- Si $\varphi = \exists x_\gamma \psi$, entonces

Por una parte, $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \exists x_\gamma \psi$ si y sólo si (por definición de satisfacción) existe $[g] \in \prod_{i \in I} A_i/_{\sim_{\mathcal{F}}}$ tal que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\alpha(\gamma,[g])} \psi$. Por hipótesis inductiva es equivalente a que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i(\gamma, g(i))} \psi\} \in \mathcal{F}$. Como

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i(\gamma, g(i))} \psi\} \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists x_\gamma \psi\}$$

entonces $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists x_\gamma \psi\} \in \mathcal{F}$.

Ahora, supongamos que $E = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists x_\gamma \psi\} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, por definición se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{F}$; de lo cual se infiere que $E = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists x_\gamma \psi\} \neq \emptyset$. Por la definición de satisfacción y lo anterior se sigue que si $i \in E$, $B_i = \{a \in A_i : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i(\gamma, a)} \psi\} \neq \emptyset$; así por Axioma de elección existe $e : E \longrightarrow \cup_{i \in I} B_i$ tal que $e(i) \in B_i$. Por otra parte, como cada $A_i \neq \emptyset$ (pues los dominios de las estructuras son no vacíos) por axioma de elección existe $j : I \setminus E \longrightarrow \cup_{i \in I \setminus E} A_i$ tal que $j(i) \in A_i$. Consideremos ahora $h : I \longrightarrow \cup_{i \in I} A_i$ definida como $h = e \cup j$ que cumple que $E \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i(\gamma, h(i))} \psi\}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro se sigue que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i(\gamma, h(i))} \psi\} \in \mathcal{F}$. Por hipótesis inductiva es equivalente a que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\alpha(\gamma,[h])} \psi$; si y sólo si, $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\bar{\alpha}} \exists x_\gamma \psi$.

Hasta este punto tenemos demostrado el teorema para los lenguajes $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$. A continuación extenderemos la prueba para los lenguajes $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$. No obstante, para que el resultado sea valido tenemos que pedir $\mathcal{F}$ sea un filtro

κ completo, más específicamente se necesita que el filtro sea κ completo para que se pueda aplicar la proposición 1.4.4.

- Si $\varphi = \wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$ con $\theta < \kappa$, entonces

$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$ si y sólo si (por definición de satisfacción) para cada $\gamma < \theta$, $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \psi_\gamma$. Por hipótesis de inducción es equivalente a que para cada $\gamma < \theta$ se tenga que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi_\gamma\} \in \mathcal{F}$. Por la proposición 1.4.4. equivale a que $\cap_{\gamma<\theta}\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \psi_\gamma\} \in \mathcal{F}$; si y sólo si, $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \wedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma\} \in \mathcal{F}$.

- Si $\varphi = \exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$, entonces

Por una parte, $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_iF \models_\alpha \exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$ si y sólo si existe $b = \langle [g_\xi] : \xi < \theta\rangle \subseteq \prod_{i\in I} A_i/\sim_{\mathcal{F}}$ tal que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_{\mathrm{i}} \models_{\alpha[\theta,b]} \psi$. Por hipótesis de inducción es equivalente a que $\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i[\sigma,b(i)]} \psi\right\} \in \mathcal{F}$. Y como

$$\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i[\theta,b(i)]} \psi\right\} \subseteq \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}\psi\right\}$$

se sigue que $\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}\psi\right\} \in \mathcal{F}$

Ahora, supongamos que $E = \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}\psi\right\} \in \mathcal{F}$. Si $i \in E$, $B_i = \left\{a \in {}^\theta A_i : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i(\gamma,a)} \psi\right\} \neq \emptyset$; así por Axioma de elección existe $e : E \longrightarrow \cup_{i\in I}B_i$ tal que $e(i) \in B_i$. Por otra parte, como cada ${}^\theta A_i \neq \emptyset$ por axioma de elección existe $j : I \setminus E \longrightarrow \cup_{i\in I\setminus E}{}^\theta A_i$ tal que $j(i) \in A_i$.

Consideremos ahora $h : I \longrightarrow \cup_{i\in I}{}^\theta A_i$ definida como $h = e \cup j$ que cumple que $E \subseteq \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i[\theta,h(i)]} \psi\right\}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro se tiene que $\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i[\theta,h(i)]} \psi\right\} \in \mathcal{F}$. Por hipótesis de inducción es equivalente a que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_{\alpha[\theta,[h]]} \psi$ lo cual se cumple si y sólo si $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}\psi$.

Finalmente concluimos por inducción sobre la longitud de las formulas que

$$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \varphi \text{ si y sólo si } \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \varphi\} \in \mathcal{F}$$

De manera intuitiva este teorema nos dice que una formula se satisface en el ultrapoducto $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ si dicha formula se satisface en "casi todas" las estructuras $\mathfrak{A}_i$.

Corolario 1.5.1. (*Łoš*) Sea I un conjunto, $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ un conjunto de estructuras del mismo tipo τ, sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I (si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ con $\kappa, \lambda \neq \omega$ se necesita que $\mathcal{F}$ sea un filtro κ-completo), $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ su respectivo ultraproducto, φ un enunciado en el lenguaje, entonces $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models \varphi$ si y sólo si $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$

Dado que la satisfacción de las formulas no depende de la sucesión que se elija, entonces por el teorema de *Łoš* tenemos el resultado deseado.

Corolario 1.5.2. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I (si el lenguaje es $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ con $\kappa, \lambda \neq \omega$ se necesita que $\mathcal{F}$ sea un filtro κ-completo) y $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$ su respectiva ultrapotencia, entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$.

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I y $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$ su respectiva ultrapotencia. Consideremos la función $e : A \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ definida de la siguiente manera si $a \in A$ entonces $e(a) = [f_a]$ donde $f_a : I \longrightarrow A$ y $f_a(i) = a$ para cualquier $i \in I$. Veamos que e es un encaje elemental.

Sea φ una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ con θ variables libres y $a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta}\in A$, entonces

$$\mathfrak{A}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\left[a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta}\right] \text{ si y sólo si } \left\{i\in I:\mathfrak{A}_i\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\left[f_{a_{\gamma_1}}(i),...,f_{a_{\gamma_\theta}}(i)\right]\right\}=\kappa\in I$$

que es equivalente, por el teorema de *Łoš* 1.5, a que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\left[\left[f_{a_{\gamma_1}}\right],...,\left[f_{a_{\gamma_\theta}}\right]\right]$ lo que por definición coimplica que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\left[e(a_{\gamma_1}),...,e(a_{\gamma_\theta})\right]$.

Así concluimos que

$$\mathfrak{A}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\left[a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta}\right] \text{ si y sólo si } Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\left[e(a_{\gamma_1}),...,e(a_{\gamma_\theta})\right]$$

de lo cual se sigue que e es un encaje elemental.

Notación Al encaje dado de $\mathfrak{A}$ a su respectiva ultrapotencia $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$ lo denotaremos por $e^{\mathfrak{A}}_{Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}}$,

1.6. Límites, Ultralímites y Ultrapotencias Iteradas

Si $\{\nu_i : i\in\omega\}$ es un conjunto de cardinales y $\{\mathcal{F}_i : i\in\omega$ y $\mathcal{F}_i$ es un ultrafiltro sobre $\nu_i\}$ entonces podemos construir de forma recursiva la n-esima ultrapotencia iterada de $\mathfrak{A}$ de la siguiente manera: $Ult^{(0)}=\mathfrak{A}$ y si $n\in\omega$ definimos $Ult^{(n+1)}=Ult_{\mathcal{F}_i}(Ult^{(n)})$. Sin embargo, buscamos definir la α-esima ultrapotencia iterada de $\mathfrak{A}$ para todo ordinal α. El problema, como se puede observar, radica cuando α es límite. No obstante, este detalle podemos solucionarlo con una técnica conocida como límite de cadenas elementales que se mostrará a continuación.

Definición 1.6.1. Dada $\langle\mathfrak{A}_i : i\in\nu\rangle$ una cadena elemental, con ν un ordinal límite, donde $\mathfrak{A}_i$ tiene como dominio A_i y $\{e_{i,j} : i,j\in\nu\}$ el conjunto de encajes elementales tales que $e_{i,j}: A_i\longrightarrow A_j$ tal que $e_{i,k}=e_{j,k}\circ e_{i,j}$ para cada $i<j<k$ y $S=\{\langle i,a\rangle : a\in A_i$ e $i\in\nu\}$, entonces definimos la relación $\sim$ sobre S de la siguiente manera: $\langle i,a\rangle\sim\langle j,b\rangle$ si y sólo si existe $k\in\nu$ con $i,j\leq k$ tal que $e_{i,k}(a)=e_{j,k}(b)$.

Afirmación 1.6.1. La relación $\sim$ descrita en la definición 1.6.1 es una relación de equivalencia.

$I)$ $\sim$ es reflexiva:

Sea $\langle i,a\rangle\in S$. Como $i\leq i$ y $e_{i,i}(a)=e_{i,i}(a)$, entonces $\langle i,a\rangle\sim\langle i,a\rangle$. Por tanto, $\sim$ es reflexiva.

$II)$ $\sim$ es transitiva:

Sean $\langle i,a\rangle,\langle j,b\rangle,\langle k,c\rangle\in S$ tales que $\langle i,a\rangle\sim\langle j,b\rangle$ y $\langle j,b\rangle\sim\langle k,c\rangle$. Por definición existen $n,m\in\nu$ con $i,j\leq n$ y $j,k\leq m$ tal que $e_{i,n}(a)=e_{j,n}(b)$ y $e_{j,m}(b)=e_{k,m}(c)$.

Sin perdida de generalidad consideremos que $n\leq m$. Por hipótesis $\{e_{i,j} : i,j\in\nu\}$ el conjunto de encajes elementales cumple que $e_{i,k}=e_{j,k}\circ e_{i,j}$ para cada $i<j<k$. En particular se obtiene que

$$e_{i,m}(a)=e_{n,m}\circ e_{i,n}(a)=e_{n,m}(e_{i,n}(a))=e_{n,m}(e_{j,n}(b))=e_{j,m}(b)=e_{k,m}(c)$$

entonces $e_{i,m}(a)=e_{k,m}(c)$. Por consiguiente, $\langle i,a\rangle\sim\langle k,c\rangle$.

$III)$ $\sim$ es simétrica

$\langle i,a\rangle\sim\langle j,b\rangle$ si y sólo si existe $k\in I$ con $i,j\leq k$ tal que $e_{i,k}(a)=e_{j,k}(b)$ si y sólo si $\langle j,b\rangle\sim\langle i,a\rangle$.

De los puntos anteriores concluimos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición 1.6.2. Dada $\langle\mathfrak{A}_i : i\in\nu\rangle$ una cadena elemental, del lenguaje de primer orden o de $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$, con ν un ordinal límite y $\{e_{i,j} : i,j\in\nu\}$ un conjunto de encajes elementales tales que $e_{i,j}: A_i\longrightarrow A_j$ tal que $e_{i,k}=e_{j,k}\circ e_{i,j}$ para cada $i<j<k$ y $\sim$ la relación de equivalencia definida en 1.6.1., entonces definimos la estructura $\mathfrak{A}$ conocida como el límite de la cadena, cuyo dominio es $A=S/\sim$, de la siguiente manera:

1. Si c_γ es un símbolo de constante, entonces $(c_\gamma)^{\mathfrak{A}} = \left[\left\langle i, (c_\gamma)^{\mathfrak{A}_i}\right\rangle\right]$ para alguna $i \in \nu$.

2. Si f_γ es un símbolo de función y $[\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\delta(\gamma)}}, a_{\delta(\gamma)}\right\rangle\right] \in A$, entonces

$$f_\gamma^{\mathfrak{A}}([\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\delta(\gamma)}}, a_{\delta(\gamma)}\right\rangle\right]) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(b_1, ..., b_{\delta(\gamma)})$$

   con $b_1, ..., b_{\delta(\gamma)} \in A_i$ para alguna $i \in \nu$ tal que $\langle i, b_1\rangle \sim \langle i_{a_1}, a_1\rangle$,...,$\left\langle i, b_{\delta(\gamma)}\right\rangle \sim \left\langle i_{a_{\delta(\gamma)}}, a_{\delta(\gamma)}\right\rangle$. Como $\delta(\gamma) \in \omega$ sí podemos encontrar dicha i.

3. Si R_γ es un símbolo de relación y $[\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\mu(\gamma)}}, a_{\mu(\gamma)}\right\rangle\right] \in A$, entonces,

$$\left\langle [\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\mu(\gamma)}}, a_{\mu(\gamma)}\right\rangle\right]\right\rangle \in (R_\gamma)^{\mathfrak{A}}$$

   si y sólo si $\left\langle b_1, ..., b_{\mu(\gamma)}\right\rangle \in (R_\gamma)^{\mathfrak{A}_i}$ con $b_1, ..., b_{\mu(\gamma)} \in A_i$ para alguna $i \in \nu$ tal que

$$\langle i, b_1\rangle \sim \langle i_{a_1}, a_1\rangle, ..., \left\langle i, b_{\mu(\gamma)}\right\rangle \sim \left\langle i_{a_{\mu(\gamma)}}, a_{\mu(\gamma)}\right\rangle$$

   como $\mu(\gamma) \in \omega$ sí podemos encontrar dicha i.

Por la proposición 1.3.2. sabemos que un encaje elemental es un morfismo fuerte por lo que la estructura $\mathfrak{A}$ está bien definida.

Notación Dada $\langle \mathfrak{A}_i : i \in \nu\rangle$ una cadena elemental con ν un ordinal límite denotaremos al límite de la cadena como $lim_{i \longrightarrow \nu}\mathfrak{A}_i$.

Observación 1.6.1. Dada $\langle \mathfrak{A}_i : i \in \nu\rangle$ una cadena elemental con ν un ordinal límite, entonces para cada $i \in \nu$ se tiene que $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq lim_{i \longrightarrow \nu}\mathfrak{A}_i$ con el encaje elemental $e^i_{lim(\nu)} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow lim_{i \longrightarrow \nu}\mathfrak{A}_i$ dado por

$$e^i_{lim(\nu)}(a) = [\langle i, a\rangle]$$

Definición 1.6.3. Dada $\mathfrak{A}$ una estructura, $\{\nu_\alpha : \alpha \in OR\}$ una clase de cardinales,

$$\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in OR \text{ y } \mathcal{F}_\alpha \text{ es un ultrafiltro sobre } \nu_\alpha\}$$

definiremos por recursión a la $\alpha-$esima ultrapotencia iterada de $\mathfrak{A}$ de la siguiente manera:

$I)$ $Ult^{(0)} = \mathfrak{A}$

$II)$ $Ult^{(\alpha+1)} = Ult_{\mathcal{F}_\alpha}(Ult^{(\alpha)})$

$III)$ Si α es límite, entonces $Ult^{(\alpha)} = lim_{\gamma \longrightarrow \alpha}Ult^{(\gamma)}$ que se le conoce como ultralímite.

Observemos que para que las ultrapotencias iteradas estén bien definidas se requiere que cuando α sea límite $\left\{Ult^{(\gamma)} : \gamma \in \alpha\right\}$ sea una cadena elemental. Para esto definiremos por recursión el conjunto $\{e_{i,j} : i, j \in OR\}$ de encajes elementales de la siguiente manera:

$I)$ $e_{\gamma,\gamma+1} = e^{Ult^{(\gamma)}}_{Ult^{(\gamma+1)}}$ (el encaje elemental dado en el corolario 1.5.2.)

$II)$ Si $\xi < \gamma + 1$ y $e_{\xi,\gamma}$ ya ha sido definido, entonces $e_{\xi,\gamma+1} = e_{\gamma,\gamma+1} \circ e_{\xi,\gamma}$

$III)$ Si $\xi < \gamma$ y γ es límite entonces $e_{\xi,\gamma} = e^\xi_{lim(\gamma)}$ (el encaje elemental dado en la observación 1.6.1.)

Afirmación 1.6.2. Para cada $i < j < k$, $e_{i,k} : Ult^{(i)} \longrightarrow Ult^{(k)}$ es un encaje elemental y $e_{i,k} = e_{j,k} \circ e_{i,j}$.

Procederemos por inducción sobre k

$I)$ Si $k = 1$, entonces $i = 0$. Así $e_{o,1} = e^{Ult^{(0)}}_{Ult^{(1)}}$ que por el corolario 1.5.2. es un encaje elemental y por vacuidad se cumple que para cada $i < j < k$ se satisface que $e_{i,k} = e_{j,k} \circ e_{i,j}$.

II) Sea $k = \alpha+1$ y supongamos que para cada $i < j < \alpha$ se satisface que $e_{i,\alpha} = e_{j,\alpha} \circ e_{i,j}$ y $e_{i,\alpha} : Ult^{(i)} \longrightarrow Ult^{(\alpha)}$ es un encaje elemental .

Observemos que por definición $e_{i,\alpha+1} = e_{\alpha,\alpha+1} \circ e_{i,\alpha} = e^{Ult^{(\alpha)}}_{Ult^{(\alpha+1)}} \circ e_{i,\alpha}$, es decir, $e_{i,\alpha+1}$ es una composición de encajes elementales por lo que $e_{i,\alpha+1}$ es también un encaje elemental.

Por otro lado si $i < j < \alpha+1$ entonces $e_{j,\alpha+1} \circ e_{i,j} = (e_{\alpha,\alpha+1} \circ e_{j,\alpha}) \circ e_{i,j} = e_{\alpha,\alpha+1} \circ (e_{j,\alpha} \circ e_{i,j}) = e_{\alpha,\alpha+1} \circ e_{i,\alpha} = e_{i,\alpha}$.

III) Sea k un ordinal límite y supongamos que para cada $i < j < \alpha < k$ se satisface que $e_{i,\alpha} = e_{j,\alpha} \circ e_{i,j}$

Notemos que por definición $e_{i,k} = e^{i}_{lim(k)}$que, por la observación 1.6.1., es un encaje elemental. Además por la hipótesis de inducción podemos ver que $Ult^{(k)}$ está bien definido pues $\left\{Ult^{(\gamma)} : \gamma \in k\right\}$ es una cadena de estructuras elementales pues $\{e_{i,j} : i, j < \alpha\}$ es un conjunto de encajes elementales que cumplen que si $i < j < \alpha < k$ se satisface que $e_{i,\alpha} = e_{j,\alpha} \circ e_{i,j}$.

Sea $i < j < k$ y $a \in Ult^{(i)}$. Veamos que $e_{i,k}(a) = e_{j,k} \circ e_{i,j}(a)$, es decir, $e^{i}_{lim(k)}(a) = e^{j}_{lim(k)} \circ e_{i,j}(a)$ que por definición es equivalente a demostrar que $[\langle i, a\rangle] = [\langle j, e_{i,j}(a)\rangle]$. Por lo que basta mostrar que $\langle i, a\rangle \sim \langle j, e_{i,j}(a)\rangle$.

Como k es límite entonces $j + 1 < k$, entonces por hipótesis de inducción se tiene que $e_{j,j+1} \circ e_{i,j} = e_{i,j+1}$ lo que implica que $e_{i,j+1}(a) = e_{j,j+1}(e_{i,j}(a))$. Así por la definición de la relación de $\sim$ obtenemos que $\langle i, a\rangle \sim \langle j, e_{i,j}(a)\rangle$. Por lo tanto $e_{i,k}(a) = e_{j,k} \circ e_{i,j}(a)$ lo que concluye la inducción.

1.7. Teoría De Modelos Para La Teoría de Conjuntos

Por el segundo teorema de incompletud de Gödel se tiene que ZFC no puede demostrar su propia consistencia; es decir, desde ZFC no se puede demostrar que exista un conjunto que sea modelo de ZFC. De ahí que para trabajar con modelos para la teoría de conjuntos se da por hecho la existencia de un modelo para la teoría o bien se admiten modelos cuyo universo es una clase propia. En la presente sección y en el resto de la tesis se trabajan con modelos que tienen como universos a clases propias; sin embargo, hay que tomar en cuenta algunos detalles técnicos. Aún cuando se ha definido la satisfacción como una relación entre modelos (conjuntos) y fórmulas se puede generalizar la satisfacción para modelos con universos que son clases propias. Si M es una clase, E una relacional binaria sobre M y $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una formula en el lenguaje $\mathcal{L}(\tau)$ con $\tau = \{\in\}$ definimos la relativización de φ a M y E como la fórmula $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ tal que

I) $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula xEy si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $x \in y$

II) $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $x = y$ si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $x = y$

III) $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $\neg\psi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $\neg\psi(x_1, ..., x_n)$

III) $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $\psi^{M,E} \wedge \chi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $\psi \wedge \chi(x_1, ..., x_n)$

III) $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $\exists x \in M(\psi^{M,E}(x_1, ..., x_n))$ si y sólo si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es la fórmula $\exists x\psi(x_1, ..., x_n)$

De esta manera diremos que M satisface la fórmula φ ($M \models \varphi[x_1, ..., x_n]$) si y sólo si su fórmula relativizada $\varphi^{M,E}(x_1, ..., x_n)$ se prueba en M. Así incluso cuando M es una clase propia podemos hablar de satisfacción. Aún cuando M sea una clase propia detonaremos por $\langle M, E\rangle$ a una estructura con dominio M que interpreta a $\in$ como E.

Definición 1.7.1. Decimos que $\langle M, \in\rangle$ es un modelo interno de ZF si $\langle M, \in\rangle$ es modelo de ZF, $M \subseteq V$ es una clase transitiva y contiene a todos los ordinales.

En la sección 1.3. definimos lo que son los encajes elementales. La propiedad que tienen estos encajes de satisfacer las fórmulas en ambos sentidos es de suma importancia. En particular, podemos preguntarnos si ciertas fórmulas tienen esta propiedad. Tomando en cuenta lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 1.7.1. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos estructuras cuyos dominios son A, B respectivamente y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Decimos que una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{\kappa,\lambda}(\tau)$ del lenguaje con θ variables libres es $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$-absoluta si para cualesquiera

$$a_{\gamma_1}, ..., a_{\gamma_\theta} \in A$$

se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi(x_{\gamma_1}, ..., x_{\gamma_\theta})\,[a_{\gamma_1}, ..., a_{\gamma_\theta}]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi(x_{\gamma_1}, ..., x_{\gamma_\theta})\,[a_{\gamma_1}, ..., a_{\gamma_\theta}]$. Como en este trabajo se utilizará este concepto con estructuras contenidas en V, el universo de ZFC, si $\mathfrak{A} \subseteq V$ diremos que φ es $\mathfrak{A}$-absoluta si φ es $\mathfrak{A}, V-absoluta$. Si sucede que φ es $\mathfrak{A}$-absoluta para toda estructura $\mathfrak{A} \subseteq V$ entonces diremos que φ es absoluta.

De manera intuitiva si una fórmula es $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$-absoluta, quiere decir que ambas estructuras la interpretan de la misma manera y la satisfacen con la misma asignación. Ahora la pregunta es ¿qué fórmulas de la teoría de conjuntos son absolutas? veremos más adelante que las fórmulas Δ_0 son absolutas.

Definición 1.7.2. (Jerarquía de Lévy) Por recursión definimos los conjuntos $\{\Delta_n : n \in \omega\}$, $\{\Sigma_n : n \in \omega\}$ y $\{\Pi_n : n \in \omega\}$ de la siguiente manera.

Decimos que una fórmula φ del lenguaje $\mathcal{L}(\tau)$ con $\tau = \{\in\}$ es $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ si

1. φ no contiene cuantificadores
2. φ es de la forma $\psi \wedge \phi$, $\psi \vee \phi$, $\psi \longrightarrow \phi$, $\psi \longleftrightarrow \phi$ con $\psi, \phi \in \Delta_0$
3. φ es de la forma $\exists x(xEy \wedge \psi(x))$, $\forall x(xEy \longrightarrow \psi(x))$ con $\psi \in \Delta_0$ y E un símbolo de relación.

Para cada $n \in \omega$ definimos

$$\Sigma_{n+1} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\omega,\omega} : \varphi \text{ es de la forma } \exists_{n<m} x_{\gamma_n} \psi \text{ con } \psi \in \Pi_n\}$$

$$\Pi_{n+1} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\omega,\omega} : \varphi \text{ es de la forma } \forall_{n<m} x_{\gamma_n} \psi \text{ con } \psi \in \Sigma_n\}$$

$$\Delta_{n+1} = \Sigma_{n+1} \cup \Pi_{n+1}$$

Teorema 1.7.1. Cualquier fórmula Δ_0 es absoluta para clases transitivas.

Procederemos por inducción sobre la longitud de la fórmula. Sea $\langle M, \in\rangle$ una clase transitiva, φ una fórmula Δ_0 con θ variables libres y $a_1, ..., a_\theta \in M$.

- Si φ es «xEy» entonces $M \models xEy\,[a, b]$ si y sólo si $aE^M b$, que es equivalente a que $a \in b$. Esto coimplica que $V \models xEy\,[a, b]$.

Supongamos por hipótesis de inducción que la proposición se satisface para fórmulas de longitud menor a φ.

- Si φ es «$\psi\wedge\phi$» con $\psi, \phi \in \Delta_0$ se tiene que $M \models \psi\wedge\phi\,[a_1, ..., a_\theta]$ si y sólo si $M \models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$ y $M \models \phi\,[a_1, ..., a_\theta]$. Por hipótesis de inducción se tiene que $V \models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$ y $V \models \phi\,[a_1, ..., a_\theta]$, si y sólo si, $V \models \psi \wedge \phi\,[a_1, ..., a_\theta]$.
- Si φ es «$\neg\psi$» con $\psi \in \Delta_0$ se tiene que $M \models \neg\psi\,[a_1, ..., a_\theta]$ si y sólo si $M \not\models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$. Por hipótesis de inducción se tiene que $V \not\models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$, si y sólo si, $M \models \psi\,[a_1, ..., a_\theta]$.
- Si φ es «$\exists x(xEy \wedge \psi(x))$» se tiene que $M \models_s \exists x(xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$ si y sólo si hay $a \in M$ tal que

  $$M \models_{s(x/a)} xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$$

  como $M \subseteq V$ se sigue que $a \in V$, lo que implica que $V \models_{s(x/a)} xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$; y por consiguiente, $V \models_s \exists x(xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$. Por otro lado, si $V \models \exists x(xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$ se sigue que hay $a \in V$ tal que $V \models_{s(x/a)} xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$. Por hipótesis de inducción se tiene que $M \models_{s(x/b)} \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$ para alguna $b \in M$, de ahí que $M \models_s \exists x(xEy \wedge \psi(x))\,[a_1, ..., a_\theta]$. De ambas implicaciones se sigue que

$$V \models_s \exists x(xEy \wedge \psi(x))\,[a_1,...,a_\theta]; \text{ si y sólo si, } M \models_s \exists x(xEy \wedge \psi(x))\,[a_1,...,a_\theta]$$

finalmente concluimos por inducción que toda fórmula Δ_0 es absoluta.

Corolario 1.7.1. Las siguientes fórmulas son fórmulas Δ_0 y por tanto absolutas para clases transitivas.

1. x es vacío «$\forall y(yEx \longrightarrow y \neq y)$»
2. $x = \{y, z\}$ «$yEx \wedge zEx \wedge \forall w(wEx \longrightarrow w = y \vee w = z)$»
3. $x = \langle y, z\rangle$ «$\exists u \exists v(uEx \wedge vEx \wedge u = \{y\} \wedge v = \{y, z\} \wedge \forall w(wEx \longrightarrow w = \{y\} \vee w = \{y, z\}))$»
4. $x \subseteq y$ «$\forall u(uEx \longrightarrow uEy)$»
5. x es transitivo «$\forall u(uEx \longrightarrow u \subseteq x)$
6. x es un ordinal «x es transitivo $\wedge \forall u(u \subseteq x \wedge x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y \in u \forall z \in u(y \in z \vee y = z)$»
7. x es un ordinal límite «x es un ordinal $\wedge$ $\forall u(uEx \longrightarrow \exists v(vEx \wedge uEv))$»
8. x es un número natural «x es un ordinal $\wedge$ (x no es un ordinal límite $\vee$ $x = \emptyset$) $\wedge \forall u(uEx \longrightarrow u = \emptyset \vee u$ no es límite)»
9. $x = \omega$ «x es un ordinal límite$\wedge x \neq \emptyset \wedge \forall u(uEx \longrightarrow u$ es un número natural)»
10. $Z = X \times Y$ «$\forall z(zEZ \longrightarrow \exists x(xEX \wedge \exists y(yEX \wedge z = \langle x, y\rangle))))$»
11. $Z = X \setminus Y$ «$\forall z(zEZ \longleftrightarrow (zEX \wedge \neg(zEY)))$»
12. $Z = X \cap Y$ «$\forall z(zEZ \longleftrightarrow (zEX \wedge zEY))$»
13. $Z = \bigcup X$ «$\forall z(zEZ \longleftrightarrow \exists x(xEX \wedge zEx))$
14. $Z = \bigcap X$ «$\forall z(zEZ \longleftrightarrow \forall x(xEX \longrightarrow zEx))$»
15. $Z = dom(X)$ «$\forall z(zEZ \longleftrightarrow zEdomX)$»
16. $zEdom(X)$ «$\exists x(xEX \wedge \exists v(vEX \wedge x = \langle z, v\rangle))$»
17. $zErang(X)$ «$\exists x(xEX \wedge \exists v(vEX \wedge x = \langle v, z\rangle))$»
18. X es una relación «$\forall x(xEX \longrightarrow \exists u(uEdom(X) \wedge \exists v(vErang(X) \wedge x = \langle u, v\rangle)))$»
19. f es una función

    «f es una relación$\wedge \forall x(xEdom(f) \wedge \forall y(yErang(f) \wedge \forall z(zErang(f)(\langle x, y\rangle\, Ef \wedge \langle x, z\rangle\, Ef \longrightarrow y = z)))$»

Teorema 1.7.2. Sea A una clase, R una relacional binaria y bien fundada sobre A, G un funcional y F el funcional definido por recursión como $F(x) = G(\{F(z) : zRx\})$. Si M es un modelo interno de ZF para el cual A, R y G son absolutas para M y $M \models$ «R es bien fundada sobre A», entonces F es absoluta para M.

Por el teorema de recursión, (lema 0.4) aplicado a A^M, R^M y G^M, y dado que M es un modelo transitivo se tiene que el funcional F^M está bien definido como $F^M(x) = G^M(\{F^M(z) : zR^M x\})$. Para reducción al absurdo supongamos que existe un elemento $R-$minimal a tal que $F(a) \neq F^M(a)$ (que podemos tomar ya que $M \models$ «R es bien fundada sobre A»). Por ser a un elemento minimal se tiene que para toda zRa se cumple que

$$F(z) = F^M(z)$$

lo que implica que $\{F(z) : zR^M a\} = \{F^M(z) : zR^M a\}$. Dado que G y R son absolutas para M se sigue que

$$G(\{F(z) : zRa\}) = G(\{F(z) : zR^M a\}) = G^M(\{F^M(z) : zR^M a\})$$

de lo anterior se obtiene que

$$F(a) = G(\{F(z) : zRa\}) = G^M(\{F^M(z) : zR^M a\}) = F^M(a)$$

lo que contradice la elección de a. Por reducción al absurdo concluimos que $F(x) = F^M(x)$ para todo $x \in M$; es decir F es absoluta para M.

Corolario 1.7.2. La función rango definida como $rank(x) = \bigcup \{rank(z) + 1 : z \in x\}$ es absoluta para modelos internos de ZF.

Esto se deduce del teorema anterior tomando $A = V$, $R = \in$ y al funcional $G(x) = \bigcup \{z \cup \{z\} : z \in x\}$ que es absoluto por el corolario 1.7.1.

De la misma forma que el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarsky, el siguiente teorema nos permite obtener un submodelo de un modelo dado cuyo universo puede ser una clase propia.

Teorema 1.7.3. (Teorema de Reflexión) Sea $\varphi_0, ..., \varphi_n$ un conjunto de fórmulas. Sea B una clase no vacía, $\langle A_\xi : \xi \text{ un ordinal}\rangle$ una familia de conjuntos tal que: $I)$ si $\xi < \eta$ entonces $A_\xi \subseteq A_\eta$, $II)$ $A_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} A_\xi$ si η es un ordinal límite y $III)$ $B = \bigcup_{\xi \in OR} A_\xi$; entonces, para toda γ existe $\eta > \gamma$ un ordinal límite tal que $\varphi_0, ..., \varphi_n$ son $A_\eta, B-$absolutas.

Sea $\varphi_0, ..., \varphi_n$ un conjunto de fórmulas, $\{A_\xi : \xi \text{ un ordinal}\}$ una familia de conjuntos como en las hipótesis, γ un ordinal. Sin pérdida de generalidad supongamos que el conjunto de fórmulas es cerrado por sub-fórmulas. Para cada fórmula existencial $\varphi_i(x_1, ..., x_r)$ de la forma $\exists y \varphi_j(x_1, ..., x_r)$ definimos el funcional $F_i : B^r \longrightarrow OR$ de la siguiente manera:

$$F_i(b_1, ..., b_r) = \begin{cases} min\,\{\xi \in OR : \text{ hay } b \in A_\xi \text{ tal que } B \models \varphi_j(b_1, ..., b_r, b)\} & \text{Si } B \models \varphi_i\,[b_1, ..., b_r] \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

consideremos ahora el funcional $G_i : OR \longrightarrow OR$ dada por

$$G_i(\xi) = \begin{cases} sup\,\{F_i(a_1, ..., a_r) : a_1, ..., a_r \in A_\xi\} & \text{Si } \varphi_i \text{ es un existencial} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

finalmente, consideremos $K : OR \longrightarrow OR$ definida como

$$K(\xi) = max\,\{\xi + 1, max\,\{G_i(\xi) : i \leq n\}\}$$

Dado γ un ordinal construimos por recursión la familia $\{\gamma_n : n \in \omega\}$ de la siguiente manera: $\gamma_0 = \gamma$ y $\gamma_{n+1} = K(\gamma_n)$. Sea $\eta = sup\,\{\gamma_n : n \in \omega\}$ que por construcción es un ordinal límite y satisface que A_η es cerrado por los existenciales que aparecen en las fórmulas $\varphi_0, ..., \varphi_n$; es decir, $A_\eta \models \exists y \varphi_j(x_1, ..., x_r)$ si y sólo si $B \models \exists y \varphi_j(x_1, ..., x_r)$. Con esta propiedad y aplicando inducción sobre la longitud de las fórmulas se concluye que $\varphi_0, ..., \varphi_n$ son $A_\eta, B-$absolutas.

A continuación definiremos y exploraremos algunas propiedades de un modelo interno de ZFC conocido como el universo constructible de Gödel.

Definición 1.7.3. Sea $\langle M, \in\rangle$ una estructura donde M es un conjunto y A un conjunto cualquiera.

$I)$ Decimos que X es definible sobre M si existe una formula $\varphi(x, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{L}_{\{E\}}$ con $n+1$ variables libres y $a_1, ..., a_n \in M$ tal que

$$X = \{a \in M : \langle M, \in \rangle \models \varphi(x, x_1, ..., x_n)\,[a, a_1, ..., a_n]\}$$

$II)$ Decimos que X es A-definible sobre M si existe una fórmula $\varphi(x, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{L}_{\{E,P\}}$ con $n+1$ variables libres y $a_1, ..., a_n \in M$ tal que

$$X = \{a \in M : \langle M, \{\in, A \cap M\} \rangle \models \varphi(x, x_1, ..., x_n)\,[a, a_1, ..., a_n]\}$$

Observación La definición de conjunto definible, presentada anteriormente, es una definición meta-teórica ya que hace referencia a fórmulas sobre el lenguaje de la teoría de conjuntos. Se puede dar una definición de conjunto definible completamente teórica (no meta-teórica)[4], sin embargo, en este trabajo utilizaremos unicamente la definición meta-teórica.

Notación Denotaremos por $Def(M)$ al conjunto $\{X \subseteq M : X \text{ es definible sobre } M\}$ y por $Def_A(M)$ al conjunto $\{X \subseteq M : X \text{ es A-definible sobre } M\}$

Por inducción transfinita construimos los siguiente conjuntos: $I)$ $L_0 = \emptyset$, $II)$ $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$ y si α es límite definimos $L_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma$. Llamaremos a $L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha$ el universo de los conjuntos constructibles de Gödel. Este universo L puede ser generalizado añadiendo como parámetros a los elementos de un conjunto A arbitrario como se muestra a continuación. Por inducción definimos los siguiente conjuntos $I)$ $L_0^A = \emptyset$, $II)$ $L_{\alpha+1}^A = Def_A(L_\alpha^A)$ y si α es límite definimos $L_\alpha^A = \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma^A$. Llamaremos a $L[A] = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha^A$ el universo de los conjuntos constructibles expandidos a A.

Proposición 1.7.1. L es un modelo interno de ZF.

$I)$ L es una clase transitiva:

Sea $x \in L$. Por definición de L existe un ordinal α tal que

$$x \in L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) = \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ es definible sobre } L_\alpha\}$$

lo que implica que $x \subseteq L_\alpha$; de lo cual se concluye que $x \subseteq L$. Por lo tanto L es una clase transitiva.

$II)$ L contiene a todos los ordinales:

Afirmamos que para todo ordinal α se satisface que $\alpha \in L_{\alpha+1}$, lo cual demostraremos por inducción sobre α. Supongamos que para toda $\beta < \alpha$ se cumple que $\beta \in L_{\beta+1}$. Notemos que si $\beta < \alpha$ entonces $\beta + 1 \leq \alpha$, y dado que la familia $\{L_\alpha : \alpha \text{ es ordinal}\}$ es una jerarquía acumulativa (por construcción) se sigue que si $\beta < \alpha$ entonces $\beta \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha$. Por consiguiente$\alpha = \{\beta \in L_\alpha : V \models \beta \text{ es ordinal}\}$; y dado que «ser ordinal» es absoluto para clases transitivas se sigue que $\alpha = \{\beta \in L_\alpha : L_\alpha \models \beta \text{ es ordinal}\}$. Por consiguiente, $\alpha \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$.

$III)$ L satisface el axioma de extencionalidad:

Esto se cumple ya que la clase L es transitiva

$IV)$ L satisface el axioma de Separación:

Sea φ una fórmula, $X, p \in L$. Veamos que $Y = \{u \in X : L \models \varphi(u,p)\} \in L$. Como $X, p \in L$ existe γ un ordinal tal que $X, p \in L_\gamma$. Por el principio de reflexión existe $\eta > \gamma$ un ordinal tal que

$$Y = \{u \in X : L_\eta \models \varphi(u,p)\} = \{u \in L_\eta : u \in X \wedge L_\eta \models \varphi(u,p)\} \in L_{\eta+1}$$

[4]vid. Jech Thomas, *Set Theory*, cap. 13, p. 181.

por lo tanto, $Y \in L$.

$V)$ L satisface el axioma de unión:

Sea $X \in L$ y $Y = \bigcup X$. Por definición de L existe un ordinal α tal que $X \in L_\alpha$. Como L_α es transitivo se sigue que $X \subseteq L_\alpha$. Así $Y = \{x \in L_\alpha : V \models \exists x(xEX \wedge zEx))\}$ pero como «$\exists x(xEX \wedge zEx))$» es una fórmula Δ_0 es absoluta entonces es absoluta; por lo tanto, $Y = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \exists x(xEX \wedge zEx))\} \in L_{\alpha+1}$. Así $Y \in L$.

$VI)$ L satisface el axioma de potencia:

Sea $X \in L$ y $Y = \mathcal{P}(X) \cap L$. Sea α un ordinal tal que $Y \subseteq L_\alpha$. Así $Y = \{x \in L_\alpha : V \models \forall u(uEX \longrightarrow uEy)\}$ pero como «$\forall u(uEX \longrightarrow uEy)$» es una fórmula Δ_0 entonces es absoluta; por lo tanto,

$$Y = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \forall u(uEX \longrightarrow uEy)\} \in L_{\alpha+1}$$

así $Y \in L$.

$VII)$ L satisface el axioma de infinito:

Como «$x = \omega$» es una fórmula absoluta para clases transitivas se sigue que $L \models x = \omega$, lo que implica que $\omega \in L$. Por lo tanto, L satisface el axioma de infinito.

$VIII)$ L satisface el axioma de reemplazo:

Sea F un funcional sobre L y $X \in L$ un conjunto. Como F es un funcional sobre L existe α un ordinal tal que $F[X] \subseteq L_\alpha$ (pues de lo contrario $F[X]$ sería una clase). Así $F[X] = \{y \in L_\alpha \exists x(: y = F(x) \wedge x \in X)\} \in L_\alpha$. Por lo tanto, $F[X] \in L$.

$IX)$ L satisface el axioma de regularidad:

Sea $S \in L$ no vacío y $x \in S$ tal que $x \cap S = \emptyset$. Como L es una clase transitiva entonces $S \subseteq L$, y dado que $x \in S$ se sigue que $x \in L$. Además como «$x \cap S = \emptyset$» es una fórmula Δ_0, y por tanto absoluta para clases transitivas, se sigue que $L \models x \cap S = \emptyset$. Así L satisface el axioma de regularidad.

De los puntos anteriores se concluye que L es un modelo interno de ZF.

Proposición 1.7.2. Si A es un conjunto $L[A]$ es un modelo interno de ZF.

La demostración es análoga a la proposición 1.7.1.

Teorema 1.7.4. Tanto L como $L[A]$ son clases bien ordenadas. Esto implica que L y $L[A]$ son modelos del axioma de elección.

Este resultado puede verse en Jech, Thomas, *Set Theory*, p. 190, teorema 13.18.

Proposición 1.7.3. Si M es un modelo interno de ZF entonces $L \subseteq M$.

Sea M un modelo interno de ZF. Notemos que $(x \text{ es constructible})^M$ si y sólo si existe un ordinal $\alpha \in M$ tal que $x \in L_\alpha^M$ $(*)$. Como la función L_α es absoluta[5] para modelos internos de ZF, entonces $L_\alpha^M = L_\alpha$. Además como M contiene a todos los ordinales se tiene que $\alpha \in M$ si y sólo si $\alpha \in V$. Por consiguiente, $(*)$ es equivalente a que existe un ordinal α tal que $x \in L_\alpha$. Por lo tanto $(x \text{ es constructible})^M$ si y sólo si x es constructible; es decir, $L^M = L$. De ahí que $L \subseteq M$.

Proposición 1.7.4. Si M es un modelo interno de ZF tal que $A \cap M \in M$, entonces $L[A] \subseteq M$.

La demostración es análoga a la proposición 1.7.3.

Proposición 1.7.5. Si A, B son conjuntos tal que $A \in L[B]$ entonces $L[A] \subseteq L[B]$.

[5]Este resultado puede verse en Jech, Thomas, *Set Theory*, p. 187, lema 13.14.

Sean A, B conjuntos tales que $A \in L[B]$, entonces existe un ordinal α tal que $A \in L_\alpha^B$. Por inducción veamos que para todo ordinal ξ se cumple que $L_\xi^A \subseteq L_{\xi+\alpha}^B$. Si $\xi = \emptyset$ se tiene que $L_\xi^A = \emptyset \subseteq L_{\alpha+\xi}^B$ y si ξ es un ordinal límite se satisface que $L_\xi^A = \bigcup_{\gamma<\xi} L_\gamma^A \subseteq_{H.I} \bigcup_{\gamma<\xi} L_{\alpha+\gamma}^B = L_{\alpha+\xi}^B$. Si $\xi = \gamma + 1$ y $X \in L_\xi^A$ entonces existen $a_1, ..., a_n \in L_\gamma^A$ y $\varphi(x, x_1, ..., x_n) \in \mathcal{L}_{\{\in, P\}}$ tal que

$$X = \left\{a \in L_\gamma^A : \left\langle L_\gamma^A, \left\{\in, A \cap L_\gamma^A\right\}\right\rangle \models \varphi(x, x_1, ..., x_n)\,[a, a_1, ..., a_n]\right\}$$

observemos que por hipótesis de inducción se tiene que $a_1, ..., a_n \in L_{\alpha+\gamma}^B$ y como $A \in L_\alpha^B$ si

$$\left\langle L_\gamma^A, \left\{\in, A \cap L_\gamma^A\right\}\right\rangle \models \varphi(x, x_1, ..., x_n)\,[a, a_1, ..., a_n]$$

entonces

$$\left\langle L_{\alpha+\gamma}^B, \left\{\in, B \cap L_{\alpha+\gamma}^B\right\}\right\rangle \models \varphi(x, x_1, ..., x_n)\,[a, a_1, ..., a_n]$$

pues $A \cap L_\gamma^A \subseteq B \cap L_{\alpha+\gamma}^B$. Por consiguiente,

$$X = \left\{a \in L_{\alpha+\gamma}^B : \left\langle L_{\alpha+\gamma}^B, \left\{\in, B \cap L_{\alpha+\gamma}^B\right\}\right\rangle \models \varphi(x, x_1, ..., x_n)\,[a, a_1, ..., a_n]\right\} \in L_{\alpha+\gamma+1}^B = L_{\alpha+\xi}^B$$

por inducción se sigue que $L_\xi^A \subseteq L_{\alpha+\xi}^B$ con lo que se concluye que $L[A] \subseteq L[B]$.

Proposición 1.7.6. Si A es conjunto y $\bar{A} = A \cap L[A]$, entonces $L[A] = L\left[\bar{A}\right]$ y $\bar{A} \in L\left[\bar{A}\right]$.

Procederemos por inducción sobre α para demostrar que para cada α se cumple que $L_\alpha^A = L_\alpha^{\bar{A}}$. Si $\alpha = \emptyset$ se tiene que $L_\alpha^A = \emptyset = L_\alpha^{\bar{A}}$. Supongamos, por hipótesis de inducción, que para toda $\beta < \alpha$ se cumple $L_\beta^A = L_\beta^{\bar{A}}$. Si α es un ordinal límite entonces $L_\alpha^A = \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma^A =_{H.I} \bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma^{\bar{A}} = L_\alpha^{\bar{A}}$. Si $\alpha = \beta + 1$ se tiene que

$$L_\alpha^A = Def_A(L_\beta^A) = Def_{A\cap L[A]}(L_\beta^A) = Def_{\bar{A}}(L_\beta^A) =_{H.I} Def_{\bar{A}}(L_\beta^{\bar{A}}) = L_\alpha^{\bar{A}}$$

así, por inducción, concluimos que $L_\alpha^A = L_\alpha^{\bar{A}}$ para todo ordinal α, lo que implica que $L[A] = L\left[\bar{A}\right]$.

Además, como A es un conjunto existe un ordinal α tal que $\bar{A} = A \cap L_\alpha^A$. Esto implica que

$$\bar{A} = \left\{a \in L_\alpha^A : \left\langle L_\alpha^A, \left\{\in, A \cap L_\alpha^A\right\}\right\rangle \models a \in L_\alpha^A \cap A\right\} \in L_{\alpha+1}^A$$

de ahí que $\bar{A} \in L[A] = L\left[\bar{A}\right]$.

Proposición 1.7.7. Si A es un conjunto, entonces existe A' un conjunto de ordinales tal que $L[A] = L[A']$.

Sea A un conjunto y $\bar{A} = A \cap L[A]$. Por la proposición 1.7.5. sabemos que $\bar{A} \in L\left[\bar{A}\right]$, y como esta clase es transitiva y la unión es absoluta para clases transitivas se tiene que $Tr(\{\bar{A}\}) \in L\left[\bar{A}\right]$. Ya que $L\left[\bar{A}\right]$ satisface el axioma de elección y $Tr(\{\bar{A}\}) \in L\left[\bar{A}\right]$ existen $\theta, E \in L\left[\bar{A}\right]$ tal que $\langle\theta, E\rangle$ es isomorfo a $\left\langle Tr(\{\bar{A}\}), \in\right\rangle$. Sea $A' = \Gamma[E]$ donde Γ es el mapeo canónico de OR^2 sobre OR que es absoluta (recordemos que $\Gamma(\langle\alpha, \beta\rangle) = ot(\{\langle\xi, \eta\rangle : \langle\xi, \eta\rangle < \langle\alpha, \beta\rangle\})$ y si $\Gamma^L(\langle\alpha, \beta\rangle) = \delta^L$ entonces existiría $f \in L$ tal que $f : \{\langle\xi, \eta\rangle : \langle\xi, \eta\rangle < \langle\alpha, \beta\rangle\} \longrightarrow \delta^L$ un isomorfismo de orden pero como ser función es absoluto, y ser ordinal es absoluto entonces f es una función en el universo V y δ^L es un ordinal en el universo; por lo que $\Gamma(\langle\alpha, \beta\rangle) = \delta^L$. Lo que implica que Γ es absoluta). Por una parte, como $E \in L\left[\bar{A}\right]$, la función Γ es absoluta y $L\left[\bar{A}\right]$ satisface el axioma de reemplazo se tiene que $A' = \Gamma[E] \in L\left[\bar{A}\right]$. Por otra parte, como $L[A']$ contiene a todos los ordinales y A' es un conjunto, existe un ordinal γ tal que $A' \subseteq \gamma$; lo que implica que

$$A' = \left\{a \in L_\gamma^{A'} : \left\langle L_\gamma^{A'}, \left\{\in, A \cap L_\alpha^{A'}\right\}\right\rangle \models a \in L_\gamma^{A'} \cap A'\right\} \in L_{\gamma+1}^{A'}$$

es decir, $A' \in L[A']$. Dado que $L[A']$ satisface el axioma de reemplazo, $A' \in L[A']$ y la función Γ es absoluta se tiene que $E = \Gamma^{-1}[A'] \in L[A']$. Aplicando el colapso de Mostowsky (teorema 0.2.) en $L[A']$ existe un conjunto transitivo

$T \in L[A']$ tal que $\langle T, \in \rangle \cong \langle \theta, E \rangle$, lo que implica que $\langle T, \in \rangle \cong \left\langle Tr(\left\{\bar{A}\right\}), \in \right\rangle$. Sin embargo, como ambos conjuntos son transitivos se sigue que $T = Tr(\left\{\bar{A}\right\})$; de ahí que $Tr(\left\{\bar{A}\right\}) \in L[A']$. Como $L[A']$ es una clase transitiva, $Tr(\left\{\bar{A}\right\}) \in L[A']$ y $\bar{A} \in Tr(\left\{\bar{A}\right\})$ se sigue que $\bar{A} \in L[A']$. De lo anterior concluimos que $A' \in L\left[\bar{A}\right]$ y $\bar{A} \in L[A']$. Así aplicando la proposición 1.7.5. se tiene que $L\left[\bar{A}\right] = L[A']$ y por la proposición 1.7.6 se tiene que $L[A] = L\left[\bar{A}\right]$; por lo tanto $L[A] = L[A']$.

Proposición 1.7.8. Si $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental del universo sobre un modelo interno de ZF entonces $M = \bigcup_{\alpha \in OR} j(V_\alpha)$.

Por una parte si $x \in \bigcup_{\alpha \in OR} j(V_\alpha)$ entonces existe un ordinal α tal que $x \in j(V_\alpha)$. Como M es una clase transitiva y $j(V_\alpha) \in M$ se sigue que $x \in M$.

Sea $x \in M \subseteq V$. Para reducción al absurdo supongamos que $x \notin j(V_\alpha)$ para todo ordinal α y que es minimal con esta propiedad. De la minimalidad de x podemos encontrar un ordinal δ tal que $x \subseteq j(V_\delta)$. Como j es un encaje elemental se tiene que $V \models \forall x(x \subseteq Y \longrightarrow x \in Z)\,[V_\delta, V_{\delta+1}]$ si y sólo si $M \models \forall x(x \subseteq Y \longrightarrow x \in Z)\,[j(V_\delta), j(V_{\delta+1})]$, y dado que $x \subseteq j(V_\delta)$ se sigue que $x \in j(V_{\delta+1})$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{\alpha \in OR} j(V_\alpha)$. De ambas contenciones obtenemos que $M = \bigcup_{\alpha \in OR} j(V_\alpha)$.

Teorema 1.7.5. (Teorema de condensación) Sea α un ordinal límite y $\mathfrak{A}$ una estructura. Si $\mathfrak{A} \preccurlyeq L_\alpha$ entonces existe $\beta \leq \alpha$ tal que $\mathfrak{A} \cong_\pi L_\beta$, donde π es el colapso de Mostowsky. Además, si $\mathfrak{A}$ es una estructura cuyo dominio es una clase propia y es tal que $\mathfrak{A} \preccurlyeq L$ entonces $\mathfrak{A} \cong_\pi L$.

Este resultado puede verse Keith J.Devlin, *Constructibility*, p. 80 en el teorema 5.2.

Capítulo 2

Aplicaciones de los Ultraproductos a Cardinales

En el presente capítulo se presentarán algunas aplicaciones de los Ultraproductos en cardinales. Por medio de esta técnica de teoría de modelos se puede demostrar que todo cardinal medible es débilmente compacto, el teorema de Scott: si existen cardinales medibles entonces $V \neq L$, el teorema de Kunen: sea M es un modelo interno de ZF y $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial entonces $M \neq V$, el teorema de $Vop\check{e}nka - Hrb\acute{a}\check{c}ek$: si existe un cardinal fuertemente compacto y A es un conjunto, entonces $V \neq L[A]$. Si bien L es modelo de $V = L$, lo que nos muestran los teoremas anteriores es que en L no pueden existir cardinales medibles y en $L[A]$ no existen cardinales fuertemente compactos. También en este capítulo se verá la relación que hay entre la compacidad de los lenguajes infinitarios y los cardinales compactos.

2.1. Cardinales Débilmente Compactos

Antes de entrar en materia hay que introducir algunas notaciones que nos serán útiles para expresar más fácilmente algunas propiedades.

Sean κ,λ cardinales infinitos, $n \in \omega$ y m un cardinal finito o infinito, entonces $\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_m$ denota la siguiente propiedad: Para toda función F tal que $F : [\kappa]^n \longrightarrow m$ existe $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| = \lambda$ y $F[[H]^n] = \{p\}$, en tal caso decimos que H es homogéneo. En particular si $m = 2$ simplemente se denotará como $\kappa \longrightarrow (\lambda)^n$.

Observemos que si $\kappa \leq \eta$ y se tiene que $\eta \nrightarrow (\lambda)^n_m$ se sigue que $\kappa \nrightarrow (\lambda)^n_m$ pues de lo contrario para toda función F tal que$F : [\kappa]^n \longrightarrow m$ existiría $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| = \lambda$ y $F[[H]^n] = \{p\}$, y dado que $\kappa \subseteq \eta$ entonces $H \subseteq \lambda$. Así dada una función F tal que $F : [\eta]^n \longrightarrow m$, si consideramos su restricción a $[\kappa]^n$ se tiene que $F \restriction_{[\kappa]^n} : [\kappa]^n \longrightarrow m$ existe $H \subseteq \kappa \subseteq \eta$ tal que $|H| = \lambda$ y $F[[H]^n] = \{p\}$; lo que implica que $\eta \longrightarrow (\lambda)^n_m$ que es una contradicción.

Así mismo, observemos que si $\eta \leq \lambda$ y $\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_m$ entonces $\kappa \longrightarrow (\eta)^n_m$ pues dada F tal que$F : [\kappa]^n \longrightarrow m$, como $\kappa \longrightarrow (\lambda)^n_m$ existe $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| = \lambda$ y $F[[H]^n] = \{p\}$. Dado que $\eta \leq \lambda$ existe $D \subseteq H$ tal que $|D| = \eta$, y ya que D subconjunto de H se satisface que $F[[D]^n] = \{p\}$; por lo tanto, $\kappa \longrightarrow (\eta)^n_m$.

Definición 2.1.1. Un cardinal κ es débilmente compacto si y sólo si $\kappa > \omega$ y satisface que $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$.

Por extraño que pueda parecer, la razón por la que estos cardinales se llaman débilmente compactos es porque guardan cierta relación con la propiedad de compacidad débil para lenguajes infinitarios. En particular, demostraremos posteriormente, que un cardinal κ es débilmente compacto si y sólo si $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ satisface el teorema de compacidad débil. Antes de llegar a este resultado primero necesitamos demostrar algunos lemas y dar unas definiciones que nos ayudarán en la demostración.

Afirmación 2.1.1. No existen λ^+-secuencias crecientes o decrecientes en el conjunto $\langle {}^{\lambda}\{0,1\}, \leq \rangle$ con λ un cardinal infinito y $\leq$ el orden lexicográfico.

Primero recordemos que $f < g$ con el orden lexicográfico si y sólo si $f(\alpha) < g(\alpha)$ donde $\alpha = min\{\beta \in OR : f(\beta) \neq g(\beta)\}$. Supongamos que existe $W = \{f_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$ creciente y tal que $f_\alpha : \lambda \longrightarrow \{0,1\}$ para toda $\alpha < \lambda^+$. Sea

$$A = \left\{\gamma \leq \lambda : \exists \left\{f_\alpha : \alpha < \lambda^+\right\} \subseteq W(\left|\left\{f_\alpha \restriction \gamma : \alpha < \lambda^+\right\}\right| = \lambda^+)\right\}$$

como $\lambda \in A$ podemos aplicar el principio del mínimo ordinal y sea $min(A) = \gamma_0$. Así existe $\{f_\alpha : \alpha < \lambda^+\} \subseteq W$ sin repeticiones tal que $|\{f_\alpha \restriction \gamma_0 : \alpha < \lambda^+\}| = \lambda^+$.

Para cada $\alpha < \lambda^+$ se tiene que existe $\xi_\alpha = min\{\beta \in OR : f_\alpha(\beta) \neq f_{\alpha+1}(\beta)\}$ (pues no hay repeticiones), y como W es una secuencia creciente se sigue que $f_\alpha(\xi_\alpha) = 0 < 1 = f_{\alpha+1}(\xi_\alpha)$. Por otro lado como $f_\alpha \restriction \xi_\alpha = f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha$ y en $\{f_\alpha \restriction \gamma_0 : \alpha < \lambda^+\}$ no hay repeticiones, entonces $\xi_\alpha < \gamma_0 \leq \lambda$ para toda $\alpha < \lambda^+$. Consideremos ahora la función $H : \lambda^+ \longrightarrow \lambda$ definida como $H(\alpha) = \xi_\alpha$ y dado que $\lambda^+ > \lambda$ y λ^+ es regular, por el principio de las casillas existe $\xi_{\alpha_0} \in \lambda$ tal que $\left|H^{-1}\left[\{\xi_{\alpha_0}\}\right]\right| = \lambda^+$. De ahí que existe $B = \{f_\alpha \in W : H(\alpha) = \xi_{\alpha_0}\}$ tal que $|B| = \lambda^+$ y satisface que si f_α,$f_\beta \in B$ y $f_\alpha \neq f_\beta$ se tiene que $f_\alpha \restriction \xi_{\alpha_0} \neq f_\beta \restriction \xi_{\alpha_0}$ pues de lo contrario si $f_\alpha \restriction \xi_{\alpha_0} = f_\beta \restriction \xi_{\alpha_0}$, como $f_\alpha \restriction \xi_{\alpha_0} = f_{\alpha+1} \restriction \xi_{\alpha_0}$ entonces $f_\beta \restriction \xi_{\alpha_0} = f_{\alpha+1} \restriction \xi_{\alpha_0}$ y ya que $f_\beta(\xi_{\alpha_0}) = 0 < 1 = f_{\alpha+1}(\xi_{\alpha_0})$ se sigue que $f_\beta < f_{\alpha+1}$ y del mismo modo $f_\alpha < f_{\beta+1}$ pero, por hipótesis, la secuencia era creciente entonces $f_\alpha = f_\beta$ para cualquier $f_\alpha, f_\beta \in B$ lo que es una contradicción pues $|B| = \lambda^+$. Por consiguiente $|\{f_\alpha \restriction \xi_{\alpha_0} : \alpha < \lambda^+\}| = \lambda^+$ y como $\xi_{\alpha_0} < \gamma_0$ se tiene una contradicción a la minimalidad de γ_0.

Nótese que la prueba sería análoga si la secuencia es decreciente.

Lema 2.1.1. Para todo cardinal λ se tiene que $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)^2$.

Consideremos $\langle P, \leq \rangle$ un orden lineal tal que $P = {}^{\lambda}2$ y $\leq$ queda definida de la siguiente manera: $f < g$ si y sólo si $f(\alpha) < g(\alpha)$ donde $\alpha = min\{\beta \in OR : f(\beta) \neq g(\beta)\}$. Sea $\left\{f_\alpha : \alpha < 2^\lambda\right\}$ una enumeración de P

Así definimos $F : \left[2^\lambda\right]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ de la siguiente manera. Si $\{\alpha, \beta\} \in \left[2^\lambda\right]^2$ con $\alpha \in \beta$ entonces

$$F(\{\alpha,\beta\}) = \begin{cases} 1 & f_\alpha < f_\beta) \\ 0 & f_\beta < f_\alpha) \end{cases}$$

si existiera $H \subseteq 2^\lambda$ tal que $|H| = \lambda^+$ y $F\left[[H]^2\right] = \{p\}$, entonces:

Caso 1: $p = 1$, entonces H es una λ^+-secuencia creciente

Caso 2: $p = 0$, entonces H es una λ^+-secuencia decreciente.

En ambos casos se llega a una contradicción al hecho de que no existen λ^+-secuencias crecientes o decreciente por la afirmación 2.1. Por consiguiente $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)^2$.

Lema 2.1.2. Todo cardinal κ débilmente compacto es fuertemente inaccesible

- κ es regular:

Si κ no es regular, entonces $cf(\kappa) < \kappa$ y por el teorema 0.1. se tiene que existe una familia

$\{A_\gamma \subseteq \kappa : |A_\gamma| < \kappa, \gamma < cf(\kappa)\}$ disjunta tal que $\kappa = \bigsqcup_{\gamma < cf(\kappa)} A_\gamma$. De ahí que podamos definir una partición $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ como

$$F(\{\alpha,\beta\}) = \begin{cases} 0 & \exists\gamma(\alpha,\beta \in A_\gamma) \\ 1 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

si existiera $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| = \kappa$ y $F\left[[H]^2\right] = \{p\}$ donde $p \in \{0,1\}$, entonces

Caso 1. Si $p = 0$, entonces existe $\gamma < cf(\kappa)$ tal que $H \subseteq A_\gamma$ por lo que $|H| \leq |A_\gamma| < \kappa$ lo que es una contradicción pues $|H| = \kappa$.

Caso 2. Si $P = 1$, entonces para todo $\gamma < cf(\kappa)$ se cumple que$H \cap A_\gamma \leq 1$, entonces $|H| \leq cf(\kappa) < \kappa$ lo que es una contradicción pues $|H| = \kappa$.

De ambos casos se concluye que e $\kappa \nrightarrow (\kappa)^2$, lo que contradice el hecho de que κ sea débilmente compacto.

Por lo tanto $cf(\kappa) = \kappa$.

- κ es fuerte:

Supongamos que existe una $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$, por el lema 2.1.1. se tiene que $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)^2$ de donde existe $F : \left[2^\lambda\right]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ tal que no existe un subconjunto $H \subseteq 2^\lambda$ que cumpla que $|H| = \lambda^+$ y $F\left[[H]^2\right] = \{p\}$. Como $\kappa \leq 2^\lambda$ podemos considerar $F \restriction_{[\kappa]^2} : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ de ahí que $\kappa \nrightarrow (\lambda^+)^2$ y como $\lambda^+ \leq \kappa$ se tiene que $\kappa \nrightarrow (\kappa)^2$ que contradice el hecho de que κ sea débilmente compacto.

Lema 2.1.3. I) Si κ es débilmente compacto, entonces κ tiene la propiedad del árbol. II) Si κ es fuertemente inaccesible y tiene la propiedad del árbol entonces se cumple para cada $m < \kappa$ que $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_m$, en particular, κ es débilmente compacto.

I) Sea κ débilmente compacto y $\langle T, \leq_T\rangle$ un árbol tal que $h(T) = \kappa$ donde para todo $\alpha \in OR$ se tiene que $|T(\alpha)| < \kappa$

Por un lado como $h(T) = \kappa$, $|T| \geq \kappa$. Por otro lado

$$|T| = \left|\bigcup_{\alpha < ht(T)} T(\alpha)\right| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} T(\alpha)\right| \leq \kappa\kappa = \kappa$$

y así $|T| = \kappa$ por lo que podemos asumir que $T = \kappa$. Además podemos extender el orden parcial $\leq_T$ a un orden lineal $\prec$ definido de la siguiente manera:

$$\text{Si } \alpha \leq_T \beta, \text{ entonces } \alpha \prec \beta$$

$$\text{Si } \alpha \text{ y } \beta \text{ son incomparables según el orden } \leq_T \text{ entonces } \alpha \prec \beta \ (*)$$

$$\text{Si y sólo si } \alpha_\xi \in \beta_\xi \text{ son tales que } \alpha_\xi, \beta_\xi \in T(\xi),\ \ \alpha_\xi \leq_T \alpha,\ \beta_\xi \leq_T \beta \text{ y}$$

$$\xi = min\,\{\gamma \in OR : T(\gamma) \cap \{\theta \in \kappa : \theta \leq_T \alpha\} \cap \{\theta \in \kappa : \theta \leq_T \beta\} = \emptyset\}$$

sea $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ definida de la siguiente manera dado $\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2$ con $\alpha \in \beta$

$$F(\{\alpha,\beta\}) = \begin{cases} 1 & \alpha \prec \beta \\ 0 & \beta \prec \alpha \end{cases}$$

como κ es débilmente compacto, $\exists H \subseteq \kappa(|H| = \kappa \wedge F\left[[H]^2\right] = \{p\})$.

Consideramos $B = \{x \in H : |\{\alpha \in H : x <_T \alpha\}| = \kappa\}$ que será nuestra rama de altura κ. Afirmamos que para todo $\alpha < ht(T)$ se satisface que $B \cap T(\alpha) \neq \emptyset$ pues de lo contrario habría $\alpha_0 < ht(T)$ tal que $B \cap T(\alpha_0) = \emptyset$, lo que implicaría que para todo $t \in T(\alpha_0)$ se cumple que $|\{\alpha \in H : t <_T \alpha\}| < \kappa$ por lo que

$$H \subseteq \bigcup_{\gamma < \alpha_0} T(\gamma) \cup \bigcup_{t \in T(\alpha_0)} \{\alpha \in H : t <_T \alpha\}$$

por consiguiente

$$|H| \leq \left|\bigcup_{\gamma<\alpha_0} T(\gamma)\right| + \left|\bigcup_{t \in T(\alpha_0)} \{\alpha \in H : t <_T \alpha\}\right| < \kappa + \kappa = \kappa$$

lo que es una contradicción pues $|H| = \kappa$. Por lo tanto para todo $\alpha < ht(T)$ se satisface que $B \cap T(\alpha) \neq \emptyset$ lo que quiere decir que $ht(B) = \kappa$.

Afirmamos que para todo $x, y \in B$ se cumple que $x \leq_T y$ o bien $y \leq_T x$. Supongamos, para reducción al absurdo, que existen $x, y \in B$ tales que $x \nleq_T y$ y $y \nleq_T x$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $x \prec y$. Como x, y tienen κ sucesores sean $\alpha, \beta, \gamma \in H$ tal que $\alpha \in \beta \in \gamma$ y $x \leq_T \alpha, \gamma$ y $y \leq_T \beta$, entonces como x, y no son comparables en $\leq_T$ se tiene que α, γ no son comparables con β. Como $x \prec y$ y $x \leq_T \alpha, \gamma$ y $y \leq_T \beta$ se tiene que $x_\xi = \alpha_\xi = \gamma_\xi < y_\xi = \beta_\xi$ donde ξ es definido como en $(*)$. Por consiguiente, $\alpha \prec \beta$ y $\gamma \prec \beta$ por lo que $F(\alpha, \beta) = 1$ pero $F(\beta, \gamma) = 0$ lo que contradice la homogeneidad de H. Con lo que concluimos que para todo $x, y \in B$ se cumple que $x \leq_T y$ o bien $y \leq_T x$, es decir B es una cadena.

Además B es máximal pues si existiera C una cadena tal que $B \subsetneq C$, implicaría que hay $t \in C \setminus B$ con $t \in T(\eta)$ para algún $\eta < \kappa$. Como para todo $\alpha < ht(T)$ se satisface que $B \cap T(\alpha) \neq \emptyset$, entonces existe $j \in B \cap T(\eta)$ (esto implica que $j \neq t$); y dado que cualquier nivel de un árbol es una anticadena, entonces j es incompatible con t lo que contradice el hecho de C es una cadena.

De lo anterior se concluye que B es una rama de altura κ , por lo concluimos que κ tiene la propiedad del árbol.

II) Supongamos que κ es un cardinal fuertemente inaccesible con la propiedad del árbol y sea $F : [\kappa]^2 \longrightarrow I$ una partición con $|I| < \kappa$. Veamos que existe $H \subseteq \kappa$ tal que $|H| = \kappa$ y $F\left[[H]^2\right] = \{p\}$.

Construiremos $\langle T, \subseteq \rangle$ un árbol cuyos elementos serán funciones $t : \gamma \longrightarrow I$ con $\gamma < \kappa$. La construcción será por recursión sobre κ, sea $t_0 = \emptyset$ y supongamos que hemos construido los t_β para todo $\beta < \alpha$. Ahora construiremos el elemento t_α, $t_\alpha \upharpoonright 0 = t_0$y supongamos que ya hemos construido hasta $t_\alpha \upharpoonright \xi$ para alguna $\xi < \alpha$. Si para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $t_\alpha \upharpoonright \xi \neq t_\beta$, entonces definimos $t_\alpha \coloneqq t_\alpha \upharpoonright \xi$; en caso contrario, si existe $\beta < \alpha$ tal que $t_\alpha \upharpoonright \xi = t_\beta$ entonces $t_\alpha \coloneqq t_\beta \cup \langle \xi, F(\{\beta, \alpha\}) \rangle$. Notemos que en este último caso el dominio de t_β o su longitud ($long$) es ξ, por lo que $t_\alpha(long(t_\beta)) = F(\{\beta, \alpha\})$

Por construcción $\langle T, \subseteq \rangle$ es un árbol tal que $|T| = \kappa$. Además, como $T(\lambda) \subseteq^\lambda I$ con $\lambda, I < \kappa$ entonces

$$|T(\lambda)| \leq |I|^{|\lambda|} < \kappa$$

pues κ es fuerte (ya que κ es inaccesible). Así mismo, $ht(T) = \kappa$, pues si existiera un $\alpha < \kappa$ tal que $T(\alpha) = \emptyset$

entonces dado que κ es inaccesible se seguiría que:

$$|T| \leq \left|\bigcup_{\gamma\leq\alpha} T(\gamma)\right| = |\alpha|\, sup\,\{|T(\gamma)| : \gamma < \alpha\} \leq |\alpha|\, sup\,\{|{}^{\gamma}I| : \gamma < \alpha\} < \kappa$$

lo que contradice el hecho de que $|T| = \kappa$. Así $ht(T) = \kappa$.

Por hipótesis sabemos que κ tiene la propiedad del árbol y entonces existe B una rama de T tal que $ht(B) = \kappa$. Para cada $i \in I$ consideremos $H_i = \{\alpha : t_\alpha \in B \wedge t_\alpha \frown i \in B\}$.

Primero veamos que para cada $i \in I$ se tiene que $F\left[[H_i]^2\right] = \{i\}$. Sea $\{\alpha, \beta\} \in [H_i]^2$ entonces $t_\alpha, t_\beta \in B$ y como B es una cadena podemos suponer que $t_\beta \subseteq t_\alpha$, además $t_\beta \frown i \in B$ por lo que $t_\beta \frown i(long(t_\beta)) = i$ y como B es cadena $t_\beta \frown i \subseteq t_\alpha$. Así por construcción tenemos que $F(\{\alpha,\beta\}) = t_\alpha(long(t_\beta)) = t_\beta \frown i(long(t_\beta)) = i$, de lo que se sigue que $F\left[[H_i]^2\right] = \{i\}$,

Ahora veamos que existe al menos un H_{i_0} tal que $|H_{i_0}| = \kappa$ y este será nuestro conjunto homogéneo buscado, supongamos que para toda $i \in I$ se cumple que$|H_i| < \kappa$. Como $B \subseteq \bigcup_{i\in I} H_i$, entonces

$$|B| \leq \left|\bigcup_{i\in I} H_i\right| = |I|\, sup\,\{|H_i| : i \in I\} < \kappa$$

pues κ es regular; lo cuál es una contradicción ya que $|B| = \kappa$. Con lo que se concluye que existe al menos un H_{i_0} tal que $|H_{i_0}| = \kappa$ y por tanto H_{i_0} es homogéneo. Finalmente concluimos que para cualquier $m < \kappa$ se cumple que$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_m$ y en particular κ es débilmente compacto.

Teorema 2.1.1. Si κ es débilmente compacto entonces $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ satisface el teorema de compacidad débil con $|\tau| = \kappa$.

Supongamos que κ es débilmente compacto. Sea Σ un conjunto de enunciados de $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ tal que $|\Sigma| = \kappa$ y Σ es κ-consistente. Como $|\tau| = \kappa$ entonces $|\mathcal{L}(\tau)| = \kappa$, pues

$$|\mathcal{L}(\tau)| = \left|[\kappa]^{<\kappa}\right| = \left|\bigcup \left\{\left|\lambda^{\delta}\right| : \lambda, \delta < \kappa\right\} \leq \kappa\right|$$

ya que κ es fuerte.

Primero extenderemos el lenguaje, añadiendo constantes nuevas, al tipo $\tau^* = \bigcup_{n\in\omega} \tau^n$ donde la familia$\{\tau^n : n \in \omega\}$ es de tal modo que $\tau^n \subseteq \tau^{n+1}$ y $|\mathcal{L}(\tau^n)| = \kappa$. Consideremos $\tau^0 = \tau$ que por hipótesis satisface que $\left|\mathcal{L}(\tau^0)\right| = \kappa$ y supongamos que hemos definido τ^n para alguna $n \in \omega$ que cumple que $|\mathcal{L}(\tau^n)| = \kappa$. Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(\tau^n) \setminus \bigcup_{m<n} \mathcal{L}(\tau^m)$ y $x_{\gamma_\xi} \in VL(\varphi)$ con $\gamma < \kappa$ (observemos que como κ es regular toda fórmula tiene a lo más κ variables libres) introducimos una nueva constante $c^{\varphi}_{\gamma_\xi}$ llamada constante de Skolem y así definimos

$$\tau^{n+1} = \tau^n \cup \bigcup \left\{ c^{\varphi}_{\gamma_\xi} : \varphi \in \mathcal{L}(\tau^n) \setminus \bigcup_{m<n} \mathcal{L}(\tau^m) \text{ y } x_{\gamma_\xi} \in VL(\varphi)\right\}$$

y, se cumple que

$$\kappa \leq \left|\mathcal{L}(\tau^{n+1})\right| \leq |\mathcal{L}(\tau^n)| + \kappa \left|\bigcup \left\{ c^{\varphi}_{\gamma_\xi} : \varphi \in \mathcal{L}(\tau^n) \setminus \bigcup_{m<n} \mathcal{L}(\tau^m) \text{ y } x_{\gamma_\xi} \in VL(\varphi)\right\}\right| \leq \kappa + \kappa\kappa = \kappa$$

por lo que $\left|\mathcal{L}(\tau^{n+1})\right| = \kappa$ concluyendo la recursión. De lo anterior podemos definir el tipo $\tau^* = \bigcup_{n\in\omega}\tau^n$ tal que

$$|\mathcal{L}(\tau^*)| = \left|\bigcup_{n\in\omega}\tau^n\right| = \omega sup\{|\mathcal{L}(\tau^n)| : n\in\omega\} = \omega\kappa = \kappa$$

para cada $n\in\omega$ y $\varphi\in\mathcal{L}(\tau^n)$ con $x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta}\in VL(\varphi)$ y $\theta<\kappa$ consideremos σ_φ el siguiente enunciado conocido como enunciado de Skolem: $\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\varphi(c^\varphi_{\gamma_1},...,c^\varphi_{\gamma_\theta})$ y definimos

$$\Sigma^* = \Sigma\cup\{\sigma_\varphi : \varphi \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}(\tau^n) \text{ para alguna } n\in\omega\}$$

y dado que $|\mathcal{L}(\tau^*)| = \kappa$ entonces

$$\kappa = |\Sigma| \leq |\Sigma^*| = |\Sigma| + |\{\sigma_\varphi : \varphi \text{ es una fórmula de } \mathcal{L}(\tau^n) \text{ para alguna } n\in\omega\}| \leq \kappa + |\mathcal{L}(\tau^*)| = \kappa+\kappa = \kappa$$

de lo cual se sigue que $|\Sigma^*| = \kappa$. Además notemos que Σ^*es κ-consistente lo que demostraremos a continuación.

Sea $S\subseteq\Sigma^*$ tal que $|S|<\kappa$. Construiremos $\{\mathfrak{A}_n : n\in\omega\}$ un conjunto de estructuras tal que para toda $n\in\omega$ se tiene que $\mathfrak{A}_n$ es de tipo τ^n y si $n<m$ se satisface que $\mathfrak{A}_m\restriction\tau^n = \mathfrak{A}_n$, es decir $\mathfrak{A}_m$ es una expansión de $\mathfrak{A}_n$ al tipo τ^m. También se cumple que dichas estructuras tienen el mismo dominio.

Como $S\subseteq\Sigma^*$ tal que $|S|<\kappa$, entonces $S\cap\Sigma\subseteq\Sigma$ y $|S\cap\Sigma|<\kappa$. Como Σ es κ-consistente, se sigue que $S\cap\Sigma$ tiene un modelo al que llamaremos $\mathfrak{A}_0$ con dominio A para $\mathcal{L}(\tau)$. Supongamos que ya hemos definido $\mathfrak{A}_n$ para alguna $n\in\omega$. Notemos que si $\mathfrak{A}_\mathfrak{n}\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})$ por axioma de elección podemos fijar $\left\langle a^\varphi_{\gamma_\xi} : \xi\leq\theta\right\rangle\in A^\theta$ tal que $\mathfrak{A}_\mathfrak{n}\models\varphi(a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta})$ y, por otro lado, como $\mathfrak{A}_n\neq\emptyset$ existe $a_0\in A$. De esta forma definimos $\mathfrak{A}_{n+1}$ con dominio A como la estructura tal que $\mathfrak{A}_{n+1}\restriction\tau^{n+1} = \mathfrak{A}_n$ y si $c^\varphi_{\gamma_\xi}\in\tau^{n+1}\setminus\tau^n$ entonces

$$\mathfrak{A}_{n+1}(c^\varphi_{\gamma_\xi}) = \begin{cases} a_{\gamma_\xi} & \text{Si } \mathfrak{A}_\mathfrak{n}\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta}) \\ a_0 & \text{Si } \mathfrak{A}_\mathfrak{n}\not\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta}) \end{cases}$$

así hemos construido recursivamente$\{\mathfrak{A}_n : n\in\omega\}$ un conjunto de estructuras. Observemos que

$$\mathfrak{A}_{n+1}\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\varphi(c^\varphi_{\gamma_1},...,c^\varphi_{\gamma_\theta})$$

pues si $\mathfrak{A}_n\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})$ entonces $\mathfrak{A}_{n+1}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\varphi(c^\varphi_{\gamma_1},...,c^\varphi_{\gamma_\theta})\left[\left\langle a_{\gamma_\xi} : \xi\leq\theta\right\rangle\right]$ ya que $\mathfrak{A}_{n+1}(c^\varphi_{\gamma_\xi}) = a^\varphi_{\gamma_\xi}$. Si $\mathfrak{A}_n\not\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})$ entonces $\mathfrak{A}_{n+1}\models\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\varphi(c^\varphi_{\gamma_1},...,c^\varphi_{\gamma_\theta})\left[\langle a : \xi\leq\theta\rangle\right]$.

Consideremos la estructura $\mathfrak{B}$ de tipo τ^* con dominio A tal que para cada $n\in\omega$ se tiene que $\mathfrak{B}\restriction\tau^n = \mathfrak{A}_n$. Dado que$\{\mathfrak{A}_n : n\in\omega\}$ es una cadena de expansiones se sigue que $\mathfrak{B}$ está bien definida. Veamos ahora que $\mathfrak{B}\models S$. Por una parte, si $\psi\in S\cap\Sigma$ entonces $\mathfrak{A}_0\models\psi$ y dado que $\mathfrak{B}\restriction\tau = \mathfrak{A}_0$ entonces $\mathfrak{B}\models\psi$. Por otra parte, si $\sigma_\varphi\in S$ tal que φ es una fórmula de $\mathcal{L}(\tau^n)$ para alguna $n\in\omega$, entonces por construcción

$$\mathfrak{A}_{n+1}\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\varphi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\varphi(c^\varphi_{\gamma_1},...,c^\varphi_{\gamma_\theta})$$

es decir, $\mathfrak{A}_{n+1}\models\sigma_\varphi$. Dado que$\mathfrak{B}\restriction\tau^{n+1} = \mathfrak{A}_{n+1}$ se sigue que $\mathfrak{B}\models\sigma_\varphi$. Por consiguiente $\mathfrak{B}\models S$.

Sea $\{\sigma_\alpha : \alpha<\kappa\}$ una enumeración de todos los enunciados del lenguaje $\mathcal{L}(\tau^n)$ para alguna $n\in\omega$ y $\langle T,\subseteq\rangle$ un árbol donde

$$T = \left\{t\in^{<\kappa}2 : \exists\mathfrak{A}\models\Sigma^*\cap\{\sigma_\alpha : \alpha\in dom(t)\}\,\forall\alpha\in dom(t)(t(\alpha)=1\iff\mathfrak{A}\models\sigma_\alpha)\right\}$$

como $T(\eta)\subseteq^\eta 2$ con $\eta<\kappa$ y por el lema 2.1.2. κ es inaccesible, que en particular implica que κ es fuerte, entonces

$|T(\eta)| \leq 2^{|\eta|} < \kappa$. Por otro lado, como Σ^* es κ-consistente existe un modelo $\mathfrak{A} \models \Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha \in \eta\}$ con $\eta < \kappa$ y si consideramos $t : \eta \longrightarrow 2$ tal que para todo $\alpha \in dom(t)$ se cumple que $t(\alpha) = 1$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \sigma_\alpha$ de esta forma se tiene que $t \in T(\eta)$; y por tanto $ht(T) = \kappa$. Por el lema 2.1.3. dado que κ es débilmente compacto, entonces κ satisface la propiedad del árbol; por lo que existe B una rama en T de altura κ.

Consideremos $\Delta = \{\sigma_\alpha : \exists t \in B(t(\alpha) = 1)\}$ y observemos que por construcción $\Sigma^* \subseteq \Delta$.

Consideremos A_0 el conjunto de todas los símbolos de constantes de τ^* y $\approx$ la relación de equivalencia sobre A_0 definida de la siguiente manera $c_\gamma \approx c_\nu$ si y sólo si $(c_\gamma = c_\nu) \in \Delta$.

Sea $A = A_0/\approx$ (a los elementos de A los denotaremos por $[c]$) y definimos $\mathfrak{A}$ una estructura que tiene como dominio a A cuya interpretación queda definida de la siguiente manera

1. Para cada símbolo de contante c_γ, $\mathfrak{A}(c_\gamma) = [c_\gamma]$

2. Para cada símbolo de función f_γ, $\mathfrak{A}(f_\gamma) : A^{\delta(\gamma)} \longrightarrow A$ la interpretación es definida de la siguiente manera $\mathfrak{A}(f_\gamma)([c_1], ..., [c_{\delta(\gamma)}])) = [(f_\gamma)(c_1, ..., c_{\delta(\gamma)})]$

3. Para cada símbolo de relación R_γ y $[c_1], .., [c_{\mu(\gamma)}] \in A$ se tiene que $\langle [c_1], .., [c_{\mu(\gamma)}] \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $R_\gamma(c_1, ..., c_{\mu(\gamma)}) \in \Delta$.

A continuación demostraremos que $\mathfrak{A}$ es modelo de Δ y como $\Sigma \subseteq \Sigma^* \subseteq \Delta$ se tendría que $\mathfrak{A}$ es modelo de Σ. Basta mostrar que si φ es un enunciado, entonces $\varphi \in \Delta$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$ lo que demostraremos por inducción sobre la longitud de los enunciados. Sin embargo, primero demostraremos el siguiente lema:

Lema*: Si t es un termino sin variables libres, entonces $s(t) = [t]$ por inducción sobre la longitud de los términos.

a) Si $t = c$, entonces $s(t) = c^{\mathfrak{A}} = [c]$

b) Si $t = f_\gamma(t_1, ..., t_{\delta(\gamma)})$ y suponemos que para toda t_ξ con $1 \leq \xi \leq \delta(\gamma)$ se satisface que $s(t_\xi) = [t_\xi]$, entonces

$$s(f_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})) = \mathfrak{A}(f_\gamma)(s(t_1), ..., s(t_{\mu(\gamma)})) = \mathfrak{A}(f_\gamma)([t_1], ..., [t_{\mu(\gamma)}]) = [f_\gamma(t_1, ..., t_{\delta(\gamma)})]$$

así por inducción tenemos que si t es un termino sin variables libres, entonces $s(t) = [t]$.

Sea φ un enunciado

I. Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ tal que $\varphi \in \Delta$, entonces $(t_1 = t_2) \in \Delta$; por definición de la relación $\approx$ se tiene que $t_1 \approx t_2$ que es equivalente a que $[t_1] = [t_2]$ y como por hipótesis φ es un enunciado, tanto t_1 como t_2 no tienen variables libres. Así aplicando el lema* para cualquier asignación s se tiene que $s(t_1) = [t_1] = [t_2] = s(t_2)$. De lo cual se sigue que $\mathfrak{A} \models_s t_1 = t_2$ para cualquier asignación s, es decir, $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2$.

II. Si $\varphi = R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$ tal que $\varphi \in \Delta$, entonces como por hipótesis φ es un enunciados se tiene que $t_1, ..., t_{\mu(\gamma)}$ son términos sin variables libres; por lo que por definición de $\mathfrak{A}$ se tiene que $\langle [t_1], ..., [t_{\mu(\gamma)}] \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$. De esta forma aplicando el lema* tenemos que para cualquier asignación s se cumple que $\langle s(t_1), ..., s(t_{\mu(\gamma)}) \rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}}$, si y sólo si, $\mathfrak{A} \models_s R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$ para cualquier asignación s; por definición se sigue que $\mathfrak{A} \models R_\gamma(t_1, ..., t_{\mu(\gamma)})$.

Supongamos que si ψ es un enunciado tal que $long(\psi) < long(\varphi)$ se satisface que $\psi \in \Delta$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi$

III. Si $\varphi = \neg\psi$ tal que $\varphi \in \Delta$ y supongamos que φ es igual a σ_α y ψ es igual a σ_β para alguna $\alpha, \beta < \kappa$, entonces por definición de Δ se tiene que existe $t \in B$ tal que $t(\alpha) = 1$. Sea

$$\eta = max\{\alpha, \beta\} + 1 < \kappa$$

y $t' \in T(\eta) \cap B$, entonces como $\eta > \alpha$ y B es una cadena se tiene que $t'(\alpha) = 1$. Además, por definición del árbol $\langle T, \subseteq \rangle$ existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que para toda $\alpha \in dom(t')$ se cumple que $t(\alpha) = 1$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \sigma_\alpha$, por lo que $\mathfrak{B} \models \sigma_\alpha$, es decir, $\mathfrak{B} \models \neg\psi$; lo que implica que $\mathfrak{B} \not\models \psi$. De donde $t'(\beta) = 0$ y como B es una cadena se sigue que para toda $t \in B$ se cumple $t(\beta) = 0$. De esta forma $\sigma_\beta \notin \Delta$ entonces por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \not\models \sigma_\beta$ y como σ_β es un enunciado se sigue que $\mathfrak{A} \models \neg\sigma_\beta$; es decir, $\mathfrak{A} \models \neg\psi$.

Por otro lado si $\mathfrak{A} \models \neg\psi$, entonces $\mathfrak{A} \models \neg\sigma_\beta$ y por ello $\mathfrak{A} \not\models \sigma_\beta$ que por hipótesis inductiva se tiene que $\sigma_\beta \notin \Delta$, entonces para toda $t \in B$ se cumple $t(\beta) = 0$. En particular para $\eta = max\{\alpha, \beta\} + 1$ y $t' \in T(\eta) \cap B$ se sigue que

$t'(\beta)=0$. Por definición del árbol $\langle T,\subseteq\rangle$ existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que para todo $\alpha\in dom(t')$ se cumple que $t(\alpha)=1$ si y sólo si $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, por lo que $\mathfrak{B}\not\models\sigma_\beta$, y como σ_β es un enunciado se sigue que $\mathfrak{B}\models\neg\sigma_\beta$; entonces, $\mathfrak{B}\models\neg\psi$. De lo cual se sigue que $t'(\alpha)=1$ y por definición de Δ se sigue que $\sigma_\alpha\in\Delta$ y como σ_α es φ se sigue que $\varphi\in\mathit{\Delta}$.

IV. Si $\varphi=\bigwedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$ con $\theta<\kappa$ tal que $\varphi\in\Delta$ y supongamos que φ es igual a σ_α y para cada $\gamma<\theta$ se tiene queψ_γ es igual a σ_{α_γ} con $\alpha,\alpha_\gamma<\kappa$. Por definición de Δ tenemos que existe $t\in B$ tal que $t(\alpha)=1$. Sea $\eta=max\left\{\alpha,\bigcup_{\gamma<\theta}\alpha_\gamma\right\}+1$ y como κ es regular por el lema 2.1.2. se tiene que $\eta<\kappa$. Consideremos $t'\in T(\eta)\cap B$, entonces como $\eta>\alpha$ y B es una cadena se tiene que $t'(\alpha)=1$. Además, por definición del árbol $\langle T,\subseteq\rangle$ existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que para todo $\alpha\in dom(t')$ se cumple que $t(\alpha)=1$ si y sólo si $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, por lo que $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, es decir, $\mathfrak{B}\models\bigwedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$; por consiguiente para cada $\gamma<\theta$ se satisface que $\mathfrak{B}\models\psi_\gamma$, que es equivalente a que $\mathfrak{B}\models\sigma_{\alpha_\gamma}$. Por tanto $t'(\alpha_\gamma)=1$ de ahí que para cada $\gamma<\theta$ se tiene que $\sigma_{\alpha_\gamma}\in\triangle$, es decir, $\psi_\gamma\in\Delta$ y por hipótesis de inducción obtenemos que para cada $\gamma<\theta$ se satisface que $\mathfrak{A}\models\psi_\gamma$ y por consiguiente $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$.

Por otro lado si $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$, entonces para cada $\gamma<\theta$ se tiene que $\mathfrak{A}\models\psi_\gamma$ y por hipótesis de inducción se tiene que $\psi_\gamma\in\Delta$; por lo que existe una $t\in B$ tal que $t(\alpha_\gamma)=1$. Consideremos $t'\in T(\eta)\cap B$ con

$$\eta=max\left\{\alpha,\bigcup_{\gamma<\theta}\alpha_\gamma\right\}+1$$

entonces como $\eta>\alpha_\gamma$ y B es una cadena entonces para cada $\gamma<\theta$ se satisface que $t'(\alpha_\gamma)=1$. Por tanto, por definición del árbol $\langle T,\subseteq\rangle$ existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que para todo $\alpha\in dom(t')$ se cumple que $t(\alpha)=1$ si y sólo si $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, por lo que $\mathfrak{B}\models\sigma_{\alpha_\gamma}$ entonces $\mathfrak{B}\models\bigwedge_{\gamma<\theta}\sigma_{\alpha_\gamma}$; es decir $\mathfrak{B}\models\bigwedge_{\gamma<\theta}\psi_\gamma$. Por lo tanto $t'(\alpha)=1$ y así $\sigma_\alpha\in\Delta$, de donde $\varphi\in\Delta$.

V. Si $\varphi=\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$ con $\theta<\kappa$ tal que $\varphi\in\Delta$ y supongamos que φ es igual a σ_α, el enunciado de Skolem $(\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\psi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\psi(c^\psi_{\gamma_1},...,c^\psi_{\gamma_\theta}))$ es σ_β y el enunciado $\psi(c^\psi_{\gamma_1},...,c^\psi_{\gamma_\theta})$ es σ_γ para alguna $\alpha,\beta,\gamma<\kappa$. Por definición de Δ tenemos que existe $t\in B$ tal que $t(\alpha)=1$. Sea $\eta=max\{\alpha,\beta,\gamma\}<\kappa$ y consideremos $t'\in T(\eta)\cap B$, entonces como $\eta>\alpha$ y B es una cadena se tiene que $t'(\alpha)=1$. Además, por definición del árbol $\langle T,\subseteq\rangle$ existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que para todo $\alpha\in dom(t')$ se cumple que $t(\alpha)=1$ si y sólo si $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, por lo que $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, es decir, $\mathfrak{B}\models\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$ y además por construcción $\mathfrak{B}$ fue elegido de tal forma que $\mathfrak{B}\models\Sigma^*\cap\{\sigma_\alpha:\alpha\in dom(t')\}$ por lo que es modelo de los enunciado de Skolem que estén indizados por debajo del $dom(t')$, en particular

$$\mathfrak{B}\models\exists_{\xi\leq\theta}x_{\gamma_\xi}\psi(x_{\gamma_1},...,x_{\gamma_\theta})\longrightarrow\psi(c^\psi_{\gamma_1},...,c^\psi_{\gamma_\theta})$$

y como $\mathfrak{B}\models\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$ se sigue que $\mathfrak{B}\models\psi(c^\psi_{\gamma_1},...,c^\psi_{\gamma_\theta})$. Por tanto $t'(\gamma)=1$ y así $\sigma_\gamma\in\Delta$, entonces aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $\mathfrak{A}\models\sigma_\gamma$, es decir, $\mathfrak{A}\models\psi(c^\psi_{\gamma_1},...,c^\psi_{\gamma_\theta})$. Por consiguiente, para toda asignación s se tiene que $\mathfrak{A}\models_{s[\theta,b]}\psi$ con $b=\left\langle c^\psi_{\gamma_\xi}:\xi<\theta\right\rangle\in^\theta A$, entonces por definición de satisfacción se tiene que $\mathfrak{A}\models\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$.

Por otro lado, si $\mathfrak{A}\models\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$ entonces para toda asignación s existe $b=\langle a_\xi:\xi<\theta\rangle\in^\theta A$ con $\theta<\lambda\leq\kappa$ tal que $\mathfrak{A}\models_{s[\theta,b]}\psi$ y por ello $\mathfrak{A}\models\psi(a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta})$ entonces por hipótesis de inducción tenemos que $\psi(a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta})\in\Delta$. Supongamos que φ es igual a σ_α y $\psi(a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta})$ es σ_β para alguna $\alpha,\beta<\kappa$. Por definición de Δ se tiene que existe una $t\in B$ tal que $t(\beta)=1$. Consideremos $\eta=max\{\alpha,\beta\}+1$ y sea $t'\in T(\eta)\cap B$, entonces como B es una rama se tiene que $t'(\beta)=1$. Por definición del árbol $\langle T,\subseteq\rangle$ existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que para todo $\alpha\in dom(t')$ se cumple que $t(\alpha)=1$ si y sólo si $\mathfrak{B}\models\sigma_\alpha$, por lo que $\mathfrak{B}\models\sigma_\beta$, es decir, $\mathfrak{B}\models\psi(a_{\gamma_1},...,a_{\gamma_\theta})$. Por consiguiente para toda asignación s se tiene que $\mathfrak{B}\models_{s[\theta,b]}\psi$ con $b=\langle a_\xi:\xi<\theta\rangle\in^\theta A$, entonces por definición de satisfacción se tiene que $B\models\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)$. Por tanto $t'(\alpha)=1$ de lo cual se sigue que $\sigma_\alpha\in\Delta$, es decir, $\exists_{\xi<\theta}x_{\gamma_\xi}(\psi)\in\Delta$.

Finalmente, concluimos por inducción sobre la longitud de las fórmulas que para todo enunciado φ se satisface que $\varphi\in\Delta$ si y sólo si $\mathfrak{A}\models\varphi$; de lo cual se concluye que $\mathfrak{A}\models\Delta$ y como $\Sigma\subseteq\Delta$ se sigue que $\mathfrak{A}\models\Sigma$. Por tanto, el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ satisface el teorema débil de compacidad.

Teorema 2.1.2. Si κ es un cardinal fuertemente inaccesible y $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ satisface el teorema de compacidad débil y el tipo τ contiene al menos una letra relacional y κ constantes, entonces κ es débilmente compacto.

Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible y tal que $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ satisface el teorema débil de compacidad. Por el lema 2.1.3. basta mostrar que el cardinal κ tiene la propiedad del árbol. Sea $\langle T, \leq_T\rangle$ un árbol de altura κ tal que para toda $\alpha < \kappa$ se tiene que $|T(\alpha)| < \kappa$. Veamos que dicho árbol tiene una rama de altura κ. Consideramos el tipo $\tau = \left\{\{R\}, \bigcup_{\alpha<\kappa}\{c_x^\alpha : x \in T(\alpha)\}\right\}$ donde R es un símbolo de relación de aridad uno y $\bigcup_{\alpha<\kappa}\{c_x^\alpha : x \in T(\alpha)\}$ un conjunto de constantes. Consideremos el conjunto de enunciados

$$\Sigma = \left\{\neg(c_x^\alpha = c_y^\beta) : \alpha, \beta < \kappa, x \in T(\alpha), y \in T(\beta), x \neq y\right\} \cup \left\{\bigvee_{x\in T(\alpha)} R(c_x^\alpha) : \alpha < \kappa\right\}$$

$$\cup \left\{\neg(R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta)) : \alpha, \beta < \kappa, x \in T(\alpha), y \in T(\beta), x \nleq y, y \nleq x\right\}$$

que de manera intuitiva Σ nos dice que R es una rama de longitud κ. Además notemos que $|\Sigma| = \kappa$. Veamos a continuación que Σ es κ-consistente.

Sea $S \subseteq \Sigma$ tal que $|S| < \kappa$, por lo que existe un $\eta < \kappa$ tal que $T(\eta) \cap \{x \in T : c_x^\alpha \in \tau(S)\} = \emptyset$ (podemos pedir que η sea el mínimo con esta propiedad). Consideremos $T' = \bigcup_{\alpha<\eta} T(\alpha)$ que es un sub-árbol de T y sea $t_\eta \in T(\eta)$ de esta manera se tiene que $P = \langle x \in T : x < t_\eta\rangle$ es una rama en T'. Sea $\mathfrak{B} = \left\langle T', R^{\mathfrak{A}}, \left\{(c_x^\alpha)^{\mathfrak{A}} : c_x^\alpha \in \tau(S)\right\}\right\rangle$ donde $R^{\mathfrak{A}} = P$ y $(c_x^\alpha)^{\mathfrak{A}} = x$ y afirmamos que $\mathfrak{B} \models S$.

I) Si $\neg(c_x^\alpha = c_y^\beta) \in S$ tal que $\alpha, \beta < \kappa, x \in T(\alpha), y \in T(\beta) x \neq y$, entonces $\mathfrak{B} \models \neg(c_x^\alpha = c_y^\beta)$ si y sólo si $(c_x^\alpha)^{\mathfrak{A}} = x \neq y = (c_y^\alpha)^{\mathfrak{A}}$ que se satisface pues por hipótesis se tiene que $x \neq y$

II) Si $\bigvee_{x\in T(\alpha)} R(c_x^\alpha) \in S$ tal que $\alpha < \kappa$ y en particular por la elección de η también se tiene que $\alpha < \eta$, entonces $\mathfrak{B} \models \bigvee_{x\in T(\alpha)} R(c_x^\alpha)$ si y sólo si para algún $x \in T(\alpha)$ se tiene que $\mathfrak{B} \models R(c_x^\alpha)$ lo cual se satisface, pues como P es una rama se tiene que existe $x_\alpha \in T(\alpha)$ tal que $x_\alpha \in P$; por lo que $\mathfrak{B} \models R(c_{x_\alpha}^\alpha)$ ya que $\left\langle c_{x_\alpha}^{\mathfrak{A}}\right\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$

III) Si $\neg(R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta))$ tal que $\alpha, \beta < \kappa, x \in T(\alpha), y \in T(\beta), x \nleq y, y \nleq x$. Si fuese el caso que $\mathfrak{B} \models R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta)$ entonces $\mathfrak{B} \models R(c_x^\alpha)$ y $\mathfrak{B} \models R(c_y^\beta)$, lo que implica por definición de la estructura que $x, y \in P$ lo que es una contradicción pues se tiene que $x \nleq y, y \nleq x$. Por consiguiente $\mathfrak{B} \not\models R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta)$ y como es un enunciado se tiene que $\mathfrak{B} \models \neg(R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta))$

Por lo anterior se tiene que $\mathfrak{B} \models S$, es decir, S admite modelo; y por definición se tiene que Σ es κ-consistente. Y como $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface el teorema débil de compacidad se tiene que Σ admite modelo, es decir, existe $\mathfrak{A} = \left\langle A, R^{\mathfrak{A}}, \left\{(c_x^\alpha)^{\mathfrak{A}} : x \in T\right\}\right\rangle$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Consideremos $C = \{x \in T : \mathfrak{A} \models R(c_x^\alpha), x \in T(\alpha), \alpha < \kappa\}$ y afirmamos que C es una rama de altura κ.

a) Veamos que para toda $\alpha < \kappa$ se tiene que $T(\alpha) \cap C \neq \emptyset$. Que implica que C es de altura κ

Sea $\alpha < \kappa$, entonces $\mathfrak{A} \models \bigvee_{x\in T(\alpha)} R(c_x^\alpha)$, entonces existe una $x \in T(\alpha)$ tal que $\mathfrak{A} \models R(c_x^\alpha)$; y así por definición se tiene que $x \in C$. Por consiguiente, $T(\alpha) \cap C \supseteq \{x\} \neq \emptyset$

b) Afirmamos que para todo $x, y \in C$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$

Sean $x, y \in C$ entonces $\mathfrak{A} \models R(c_x^\alpha)$ y $\mathfrak{A} \models R(c_y^\beta)$, por lo que $\mathfrak{A} \models R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta)$; por consiguiente $\mathfrak{A} \not\models \neg(R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta))$. Sin embargo, $\mathfrak{A} \not\models \neg(R(c_x^\alpha) \wedge R(c_y^\beta))$ si $x \nleq y$ y $y \nleq x$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

c) Mostraremos que C es una cadena maximal.

Si C no fuese maximal existiría $z \in T$ tal que $z \notin C$ y $C \cup \{z\}$ es una cadena. Como $z \in T$ entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $z \in T(\alpha)$ pero por a) se tiene que $T(\alpha) \cap C \neq \emptyset$, por lo que existe $x \in T(\alpha) \cap C$. No obstante, como $x, z \in T(\alpha)$ son incomparables lo que contradice el hecho de que $C \cup \{z\}$ sea una cadena.

De lo anterior se concluye C es una rama en T y por tanto κ tiene la propiedad del árbol, de donde por el lema 2.1.3. κ es un cardinal débilmente compacto.

2.2. Cardinales Medibles

Definición 2.2.1. Decimos que κ es un cardinal medible si y sólo si $\kappa > \omega$ y existe un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ

Observación 2.2.1. Si κ es un cardinal medible y S es un conjunto tal que $|S| = \kappa$, por el teorema 1.4.2. el ultrafiltro U no principal κ-completo sobre κ induce un ultrafiltro $\mathcal{H}$ $\kappa-$completo no principal sobre S.

Lema 2.2.1. Si κ es un cardinal medible, entonces es un cardinal fuertemente inaccesible.

Sea κ un cardinal medible, entonces existe $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ.

$I)$ κ es regular

Si κ es singular, por el teorema 0.1. existe $\{A_\gamma \subseteq \kappa : |A_\gamma| < \kappa, \gamma < cf(\kappa)\}$ tal que si $\gamma < \theta < cf(\kappa)$ entonces $(A_\gamma \cap A_\theta = \emptyset)$ y $\kappa = \bigcup_{\gamma<cf(\kappa)} A_\gamma$ con $cf(\kappa) < \kappa$. Por la proposición 1.4.7. se tiene que $A_\gamma \notin \mathcal{F}$ para cualquier $\gamma < cf(\kappa)$, entonces $\kappa \setminus A_\gamma \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. De esta manera, tomando en cuenta que el ultrafiltro es κ-completo, implica que $\bigcap_{\gamma<cf(\kappa)}(\kappa \setminus A_\gamma) \in \mathcal{F}$. No obstante,

$$\bigcap_{\gamma<cf(\kappa)} (\kappa \setminus A_\gamma) = \kappa \setminus \bigcup_{\gamma<cf(\kappa)} A_\gamma = \kappa \setminus \kappa = \emptyset$$

y se tendría que $\emptyset \in \mathcal{F}$ lo que es una contradicción.

$II)$ κ es fuerte

Supongamos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$ y consideremos $S \subseteq {}^\lambda 2$ tal que $|S| = \kappa$. Por el teorema 1.4.2. el ultrafiltro U no principal κ-completo sobre κ induce un ultrafiltro $\mathcal{H}$ $\kappa-$completo no principal sobre S. Para cada $\alpha < \lambda$ definimos el conjunto X_α como uno de los dos siguientes conjuntos $\{f \in S : f(\alpha) = 0\}$ o $\{f \in S : f(\alpha) = 1\}$ dependiendo de cual pertenece al ultrafiltro $\mathcal{H}$ y denotaremos por ε_α al valor 0 o 1 con respecto al conjunto X_α. Puesto que $\mathcal{H}$ es $\kappa-$completo entonces $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{H}$; sin embargo, dicha intersección tiene un único elemento a saber $f : \lambda \longrightarrow 2$ definida como $f(\alpha) = \varepsilon_\alpha$. Esto que implica que $\mathcal{H}$ es principal, lo que es una contradicción.

Teorema 2.2.1. Todo cardinal medible es débilmente compacto

Sea κ un cardinal medible, entonces por el lema 2.2.1. sabemos que κ es un cardinal fuertemente inaccesible. Además aplicando el teorema 2.1.2. basta con probar que $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ satisface el teorema de compacidad débil.

Sea $\Sigma = \{\sigma_\gamma : \gamma < \kappa\}$ un conjunto de fórmulas $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ de cardinalidad κ tal que para cualquier $S \subseteq \Sigma$ donde$|S| < \kappa$ se tiene que S tiene modelo. Y por hipótesis como κ es medible sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no principal κ-completo sobre κ. Como Σ es $\kappa-$consistente, entonces para cada $\lambda < \kappa$ existe $\mathfrak{A}_\lambda$ un modelo de $S_\lambda = \{\sigma_\gamma : \gamma < \lambda\}$, por lo que $\{\mathfrak{A}_\lambda : \lambda < \kappa\}$ es una familia de modelos. Dado que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro κ-completo sobre κ se puede construir el ultraproducto$Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ para el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$. Afirmamos que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ es modelo de Σ. Como $\mathcal{F}$ es no principal y κ-completo, por la proposición 1.4.6 $\mathcal{F}$ contiene a los complementos de todos los subconjuntos de κ de cardinalidad $< \kappa$, es decir, para todo $\lambda < \kappa$ se tiene que $\{\xi \in \kappa : \lambda < \xi\} \in \mathcal{F}$. Y como $\{\xi \in \kappa : \lambda < \xi\} \subseteq \{\xi \in \kappa : \mathfrak{A}_\xi \models \sigma_\lambda\}$ entonces $\{\xi \in \kappa : \mathfrak{A}_\xi \models \sigma_\lambda\} \in \mathcal{F}$, entonces por el Teorema de *Łoš* (en particular el corolario 1.5.1) se tiene que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models \sigma_\lambda$ para toda $\lambda < \kappa$. Con lo que se concluye que $Ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ es modelo de Σ y así κ es débilmente compacto.

A continuación generalizaremos el método de los ultraproductos y de ultrapotencias iteradas para que esta técnica sea aplicable a estructuras cuyo universo sea una clase. En particular, queremos formar ultraproductos y ultrapotencias iteradas sobre la clase de todos los conjuntos V.

Sea V la clase de todos los conjuntos, ν un cardinal no numerable, U un ultrafiltro al menos ω_1 completo sobre ν y la clase $\prod_{i\in\nu} V = \{f : f : \nu \longrightarrow V\}$. Podemos definir la relación de equivalencia$\sim$ sobre $\prod_{i\in\nu} V$ de la siguiente manera $f \sim g$, si y sólo si, $\{i \in \nu : f(i) = g(i)\} \in U$. La demostración de que $\sim$ es una relación de equivalencia es análoga al lema 1.5.1. Consideremos

$$[f] = \left\{ g \in \prod_{i \in \nu} V : g \sim f \text{ y } \forall h \in \prod_{i \in \nu} V(h \sim f \longrightarrow rank(g) \leq rank(h)) \right\}$$

donde $rank : V \longrightarrow OR$ es el funcional rango que es definido como $rank(x) = min\{\alpha \in OR : x \subseteq V_\alpha\}$. Observemos que $[f]$ es un conjunto pues sus elementos son funciones cuyo dominio es ν y cuya imagen está contenida en $V_{rank(f)}$. Además se cumple que $f \sim J$ si y sólo si $[f] = [J]$ como se puede ver en la siguiente proposición. Denotaremos por $Ult_U(V)$ a la estructura clase de tipo $\tau = \{E\}$, con E una relación de aridad dos, que tiene como universo a $\{[f] : f \in \prod_{i \in \nu} V\}$ y que interpreta a E como $\in^* = \{\langle [f], [g] \rangle : \{i \in \nu : f(i) \in g(i)\} \in U\}$.

Notemos que $Ult_U(V)$ es una vil copia de una ultrapotencia definida en las secciones anteriores. Con base en esto, los teoremas que hemos probado sobre ultrapotencias aplican también para $Ult_U(V)$. En particular, la relación $\in^*$ está bien definida por el lema 1.5.2., el teorema de *Łoš* y el hecho de que $V \preccurlyeq Ult_U(V)$ se satisfacen.

Proposición 2.2.1. Sean $f, J \in \prod_{i \in \nu} V$, entonces $f \sim J$ si y sólo si $[f] = [J]$.

$I)$ Supongamos que $f \sim J$ y que $g \in [f]$, entonces $g \sim f$ y para toda $h \in \prod_{i \in \nu} V$ tal que $h \sim f$ se cumple que $rank(g) \leq rang(h)$. Como la relación $\sim$ es transitiva se tiene que $g \sim J$ y para toda $h \in \prod_{i \in \nu} V$ tal que $h \sim J$ se cumple que $rank(g) \leq rang(h)$. Esto implica que $g \in [J]$. Así $[f] \subseteq [J]$ y análogamente tenemos la otra contención, por lo que se satisface que $[f] = [J]$.

$II)$ Por otro lado, supongamos que $[f] = [J]$ y para reducción al absurdo asumamos que $f \nsim J$. Por definición de $\sim$ se sigue que $\{i \in \nu : f(i) = J(i)\} \notin U$, y como U es un ultrafiltro se tiene que $\{i \in \nu : f(i) \neq J(i)\} \in U$. Por una parte, si $[J] = [f] = \emptyset$ entonces J y f son las funciones vacías por lo que se tiene que $f \sim J$. Por otra parte si $[f] \neq \emptyset$ entonces podemos considerar $p \in [f] = [J]$. Por lo que $p \sim f$ que por definición implica que $\{i \in \nu : p(i) = f(i)\} \in U$. De ahí que $\{i \in \nu : p(i) = f(i)\} \cap \{i \in \nu : f(i) \neq J(i)\} \in U$ y dado que

$$\{i \in \nu : p(i) = f(i)\} \cap \{i \in \nu : f(i) \neq J(i)\} \subseteq \{i \in \nu : p(i) \neq J(i)\}$$

se tiene que $\{i \in \nu : p(i) \neq J(i)\} \in U$, entonces (como U es ultrafiltro) $\{i \in \nu : p(i){=}J(i)\} \notin U$. Por consiguiente, $p \nsim J$ lo que contradice el hecho de que $p \in [J]$. De lo anterior se sigue que $f \sim J$.

Afirmación 2.2.1. Si V es bien fundada y U es al menos ω_1 completo, entonces $\in^*$ es una relación bien fundada y extensional sobre $Ult_U(V)$.

$I)$ $\in^*$ es una relación bien fundada

$a)$ $ext_{\in^*}[f]$ es un conjunto

Por definición, $ext_{\in^*}[f] = \{[g] \in Ult_U(V) : [g] \in^* [f]\}$. Si $[g] \in ext_{\in}[f]$, entonces $[g] \in^* [f]$; es decir,

$$A = \{i \in \nu : g(i) \in f(i)\} \in U$$

consideremos $h : \nu \longrightarrow V$ definida como

$$h(i) = \begin{cases} g(i) & i \in A \\ f(i) & i \notin A \end{cases}$$

la cual satisface que $h \sim g$ pues $\{i \in \nu : g(i) = h(i)\} = A \in U$ y además se tiene que $rank(h) \leq rank(f)$ (ya que para toda $i \in \nu$ se cumple que $h(i) \in f(i)$ o $h(i) = f(i)$). Así

$$[g] = \left\{ J \in \prod_{i \in \nu} V : g \sim J \text{ y } \forall P \in \prod_{i \in \nu} V(P \sim g \longrightarrow rank(J) \leq rank(P)) \right\} \subseteq$$

$$\left\{J \in \prod_{i\in\nu} V : g \sim J \text{ y } rank(J) \leq rank(h) \leq rank(f)\right\} \subseteq \left\{J \in \prod_{i\in\nu} V : rank(J) \leq rank(f)\right\} \subseteq V_{rank(f)+1}$$

entonces Si $[g] \in ext_{\in}[f]$ se sigue que $[g] \in V_{rank(f)+2}$. Por consiguiente,

$$ext_{\in}[f] = \{[g] \in Ult_U(V) : [g] \in^* [f]\} \subseteq V_{rank(f)+2}$$

de ahí que $ext_{\in}[f]$ sea un conjunto.

$II)$ $Ult_U(V)$ no tiene sucesiones decrecientes.

Supongamos que existe $\{[f_n] : n \in \omega\} \subseteq Ult_U(V)$ tal que para toda $n \in \omega$ se cumple que $[f_{n+1}] \in^* [f_n]$. Esto implica, por definición de $\in^*$, que $X_n = \{i \in \nu : f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \in U$ para toda $n \in \omega$. Como U es al menos ω_1 completo se sigue que $\bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$ y dado que $\bigcap_{n\in\omega} X_n \subseteq \{i \in \nu : \forall n \in \omega(f_{n+1}(i) \in f_n(i))\}$ también se tiene que $\{i \in \nu : \forall n \in \omega(f_{n+1}(i) \in f_n(i))\} \in U$. Además, dado que $\emptyset \notin U$ (ya que U es un ultrafiltro) se sigue que hay $i \in \nu$ tal que para toda $n \in \omega$ se cumple que $f_{n+1}(i) \in f_n(i)$; esto contradice al hecho de que V es bien fundado.

$III)$ $\in^*$ es una relación extensional

Supongamos que $ext_{\in^*}[f] = ext_{\in^*}[g]$. Entonces $Ult_U(V) \models \forall z(zEx \longleftrightarrow zEy)[[f],[g]]$, por el teorema de Łoš es equivalente a que $\{i \in \nu : V \models \forall z(zEx \longleftrightarrow zEy)[f(i), g(i)]\} \in U$; es decir, $\{i \in \nu : f(i) = g(i)\} \in U$. Por definición de $\sim$ se sigue que $f \sim g$, entonces por la proposición 2.2.1 se tiene que $[f] = [g]$.

Por los puntos anteriores concluimos que $\in^*$ es una relación bien fundada y extensional sobre $Ult_U(V)$ cuando V es bien fundado lo que se logra cuando se asume el axioma de buena fundación.

Observación 2.2.2. Por la afirmación 2.2.1. sabemos que $Ult_U(V)$ es bien fundada y extensional, de ahí que aplicando el teorema 0.2. (el colapso de Motowski), existe una única clase transitiva $M \subseteq V$ tal que $Ult_U(V) \cong_\pi M$ donde π es el isomorfismo.

Afirmación 2.2.2. Si $M \subseteq V$ es una clase transitiva y bien fundada con la $\in$, $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental y α es un ordinal entonces $\alpha \leq j(\alpha)$ y $j(\alpha)$ es ordinal.

Sea $O(x)$ la fórmula que dice «x es ordinal». Como j es un encaje elemental si α es un ordinal, entonces $V \models O(x)[\alpha]$ si y sólo si $M \models O(x)[j(\alpha)]$; por otro lado como «ser ordinal» es absoluto para clases transitivas se sigue que $M \models O(x)[j(\alpha)]$ si y sólo si $V \models O(x)[j(\alpha)]$. Es decir α es un ordinal si y sólo si $j(\alpha)$ es un ordinal. Así, como α es un ordinal y $j(\alpha)$ es un ordinal por tricotomía se tiene que $\alpha \leq j(\alpha)$ o $j(\alpha) < \alpha$. No obstante, si $j(\alpha) < \alpha$ se sigue que $j(j(\alpha)) < j(\alpha)$ (porque j preserva el orden ya que j es un encaje elemental y el orden está dado por la pertenencia) y si denotamos por $j^n(\alpha)$ al resultado de aplicar $n-$veces el encaje elemental j se tiene que $\{j^n(\alpha) : n \in \omega\}$ es una familia decreciente lo que contradice el hecho de que M es bien fundada. Por consiguiente, si α es un ordinal entonces $\alpha \leq j(\alpha)$.

Afirmación 2.2.3. Sea U un ultrafiltro $\nu-$completo sobre ν, $M = \pi[Ult_U(V)]$ y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental definido como $j = \pi \circ e^V_{Ult_U(V)}$, entonces M es un modelo interno de ZFC.

Como V es modelo de ZFC y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental entonces M es modelo de ZFC. Por otro lado, por la afirmación 2.2.2 se tiene que si α es un ordinal entonces $\alpha \leq j(\alpha)$. Como $j(\alpha) \in M$ y M es una clase transitiva se tiene que $\alpha \in M$. Por consiguiente M contiene a todos los ordinales con lo que se concluye que M es un modelo interno.

Definición 2.2.2. Si $M \subseteq V$ y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental decimos que un ordinal α es un punto crítico de j si y sólo si $\alpha = min\{\gamma \in OR : j(\gamma) \neq \gamma\}$. $crt(j) = \alpha$ denotará el hecho de que α es un punto crítico de j.

Afirmación 2.2.4. Sea U un ultrafiltro $\nu-$completo sobre ν, $M = \pi[Ult_U(V)]$ y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental definido como $j = \pi \circ e^V_{Ult_U(V)}$, entonces para todo $\alpha < \nu$ se cumple que $\alpha = j(\alpha)$. De lo cual se infiere que $\nu \leq crt(j)$.

$I)$ Afirmamos que para toda $[f] \in^* [f_\alpha]$ donde $f_\alpha \equiv \alpha$ y $\alpha < \nu$ se satisface que existe $t < \alpha$ tal que $e^V_{Ult_U(V)}(t) = [f]$.

Sea $[f] \in^* [f_\alpha]$, por definición se sigue que $\{i \in \nu : f(i) \in f_\alpha(i)\} \in U$, es decir, $\{i \in \nu : f(i) \in \alpha\} \in U$. Afirmamos que existe $t \in \alpha$ tal que $\{i \in \nu : f(i) = t\} \in U$. Si este no fuera el caso, para toda $t < \alpha$ se cumpliría que $\{i \in \nu : f(i) = t\} \notin U$ entonces $\{i \in \nu : f(i) \neq t\} \in U$. Como U es $\nu-$completo se sigue que

$$\{i \in \nu : f(i) \in \alpha\} \cap \bigcap_{t<\alpha} \{i \in \nu : f(i) \neq t\} \in U$$

lo que es una contradicción puesto que

$$\{i \in \nu : f(i) \in \alpha\} \cap \bigcap_{t<\alpha} \{i \in \nu : f(i) \neq t\} = \emptyset$$

por tanto, existe $t \in \alpha$ tal que $\{i \in \nu : f(i) = t\} \in U$; lo que implica que $f \sim f_t$ donde $f_t \equiv t$. Por consiguiente, $[f] = [f_t]$, por lo cual $e^V_{Ult_U(V)}(t) = [f]$.

$II)$ Afirmamos que si $\alpha < \nu$ se cumple que $\alpha = j(\alpha)$.

De lo anterior se sigue que $j \restriction_\alpha : \alpha \longrightarrow j(\alpha)$ es un isomorfismo. Si $\beta < \alpha$ entonces $j(\beta) \in j(\alpha)$ (pues j es encaje elemental) lo que implica que $j[\alpha] \subseteq j(\alpha)$. Por otro lado si $p \in j(\alpha)$, como $j(\alpha) \in M$ y M es transitiva, se tiene que $p \in M$. Dado que π es sobreyectiva existe $[f] \in Ult_U(V)$ tal que $\pi[f] = p$, entonces $\pi[f] < j(\alpha) = \pi[f_\alpha]$. Como π respeta el orden, se sigue que $[f] \in^* [f_\alpha]$ y por la afirmación $II)$ existe $t < \alpha$ tal que $e^V_{Ult_U(V)}(t) = [g]$. Por consiguiente, existe $t < \alpha$ tal que $j(t) = \pi(e^V_{Ult_U(V)}(t)) = \pi([g]) = p$, es decir $j(\alpha) \subseteq j[\alpha]$. De ambas contenciones tenemos que $j[\alpha] = j(\alpha)$. Se sigue que $j \restriction_\alpha : \alpha \longrightarrow j(\alpha)$ es una función sobreyectiva pero como es composición de una función inyectiva $e^V_{Ult_U(V)}$ con una biyectiva π se tiene que j es inyectiva y como j es encaje elemental en particular preserva el orden. Por tanto, $j \restriction_\alpha : \alpha \longrightarrow j(\alpha)$ es un isomorfismo. Así α y $j(\alpha)$ son ordinales (por la afirmación 2.2.2) isomorfos, entonces $\alpha = j(\alpha)$.

Afirmación 2.2.5. Sea U un ultrafiltro $\nu-$completo no principal sobre ν (observemos que ν es un cardinal medibñe), $M = \pi[Ult_U(V)]$ y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental definido como $j = \pi \circ e^V_{Ult_U(V)}$, entonces $\nu = crt(j)$. Es decir, si ν es un cardinal medible entonces $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental no trivial.

Sea U un ultrafiltro $\nu-$completo sobre ν donde ν es un cardinal medible. De la afirmación anterior sabemos que $\nu \leq crt(j)$ por lo que basta mostrar que $j(\nu) \neq \nu$. Consideremos la función diagonal $d : \nu \longrightarrow V$ definida como $d(\alpha) = \alpha$. Por la proposición 1.4.6. sabemos para todo $\gamma < \nu$ se tiene que $\{\alpha \in \nu : \gamma < \alpha\} \in U$, entonces $\{\alpha \in \nu : \gamma < d(\alpha)\} = \{\alpha \in \nu : \gamma < \alpha\} \in U$. Esto implica que $[f_\gamma] \in^* [d]$ donde $f_\gamma \equiv \gamma$; en consecuencia

$$j(\gamma) = \pi([f_\gamma]) \in \pi[d]$$

por la afirmación 2.2.4. sabemos que para todo $\gamma < \nu$ se cumple que $j(\gamma) = \gamma$, por lo cual $\gamma = j(\gamma) \in \pi[d]$. Así para todo $\gamma < \nu$ se satisface que $\gamma \in \pi[d]$, en consecuencia $\nu \subseteq \pi[d]$. Por otro lado, notemos que $\{\alpha \in \nu : d(\alpha) < \nu\} \in U$ (pues d toma valores menores que ν) por lo que $[d] \in^* [f_\nu]$, lo que implica que $\pi([d]) \in \pi([f_\nu]) = j(\nu)$. Por consiguiente, $\nu \subseteq \pi[d] \in j(\nu)$ de ahí que $\nu < j(\nu)$ con lo que se concluye que $\nu = crt(j)$.

Teorema 2.2.2. (Scott) Si existe un cardinal medible entonces $V \neq L$.

Sea ν el mínimo de los cardinales medibles y supongamos para reducción al absurdo que $V = L$. Sea U un ultrafiltro no principal $\upsilon-$completo sobre ν, $M = \pi[Ult_U(V)]$ y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental definido como

$j = \pi \circ e^V_{Ult_U(V)}$. Como L está contenido en todos los modelos internos, entonces $L \subseteq M \subseteq V = L$; de ahí que $V = M$. Sea $m(x)$ la fórmula que dice "x es el mínimo de los cardinales medibles". Como j es un encaje elemental, entonces $V \models m(x)[\nu]$ si y sólo si $M \models m(x)[j(\nu)]$; y dado que $M = V$ se tiene que $V \models m(x)[\nu]$ si y sólo si $V \models m(x)[j(\nu)]$, es decir ν es el mínimo de los cardinales medibles si y sólo si $j(\nu)$ es el mínimo de los cardinales medibles. Esto implica que $\nu = j(\nu)$ pero por la afirmación 2.2.5. $\nu < j(\nu)$. Así hemos llegado a una contradicción con lo que podemos concluir que $V \neq L$.

Corolario 2.2.1. (Scott) En L no existen cardinales medibles

Como L es modelo ZFC entonces L hace verdadero que «si existe un cardinal medible entonces $V \neq L$». De ahí que si existen cardinales medibles en L, entonces L debe hacer verdadero que $V \neq L$ lo que es una contradicción; pues L es modelo de $V = L$.

Afirmación 2.2.6. Sea M un modelo interno y $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial, entonces existe un ordinal ν tal que $\nu = crt(j)$.

Sea M un modelo interno, $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial y para reducción al absurdo supongamos que para todo ordinal α se cumple que $j(\alpha) = \alpha$. Veamos que esto implica que $rank(j(x)) = rank(x)$ para todo conjunto x. Como j es un encaje elemental, entonces $V \models rank(x) = \alpha$ si y sólo si $M \models rank(j(x)) = j(\alpha) = \alpha$ pero como la función $rank$ es absoluta para modelos internos (corolario 1.7.2) se tiene que $V \models rank(x) = \alpha$ si y sólo $V \models rank(j(x)) = \alpha$. Ahora veamos que esto implica que $j(x) = x$ para todo conjunto x lo que es una contradicción a la hipótesis de que j es no trivial. Procederemos por inducción sobre el rango.

Supongamos, por hipótesis de inducción, que para toda y tal que $rank(y) < \alpha$ se tiene que $j(y) = y$. Por un lado, si $z \in x$ entonces $rank(z) < rank(x) = \alpha$; así por hipótesis de inducción se tiene que $z = j(z)$, y como j es un encaje elemental se sigue que $z = j(z) \in j(x)$. De esto se deduce que $x \subseteq j(x)$. Por otro lado, si $z \in j(x)$ entonces $rank(z) < rank(j(x))$. Por la observación anterior tenemos que $rank(j(x)) = rank(x) = \alpha$; así por hipótesis de inducción se tiene que $z = j(z)$. Por consiguiente $j(z) \in j(x)$, y como j es un encaje elemental se sigue que $z \in x$. De esto se deduce que $j(x) \subseteq x$. De ambas contenciones se concluye que $j(x) = x$. Por inducción tenemos que $j(x) = x$ para todo conjunto x lo que es una contradicción a la hipótesis de que j es no trivial. Así, por reducción al absurdo, existe un ordinal ν tal que $\nu = crt(j)$.

Observación Siguiendo esta demostración se puede observar que $V_{\nu+1} = V^M_{\nu+1}$ con $crt(j) = \nu$. Pues se tendría que para todo $\alpha < \nu$, $j(\alpha) = \alpha$ y siguiendo la demostración anterior se seguiría que para todo conjunto x tal que $rank(x) < \nu$ se tiene que $j(x) = x$; lo que implica que $V_\nu = V^M_\nu$. Como M es modelo del axioma de potencia y $V_\nu = V^M_\nu$ entonces $V_{\nu+1} = \mathcal{P}(V_\nu) = V^M_{\nu+1}$.

Teorema 2.2.3. Sea M es un modelo interno transitivo y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental no trivial, entonces $\nu = crt(j)$ es un cardinal medible.

Sea M un modelo interno y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental no trivial. Por la proposición anterior existe un ordinal ν tal que $\nu = crt(j)$. Como ω y los números naturales son absolutos, entonces $j(\omega) = \omega$ y $j(n) = n$ para toda $n \in \omega$; de ahí que $\nu > \omega$. Así, para que ν sea un cardinal medible basta mostrar que existe un ultrafiltro no principal sobre ν. Consideremos $D = \{X \subseteq \nu : \nu \in j(X)\}$ y afirmamos que D es un ultrafiltro no principal sobre ν.

- $\nu \in D$:

Por la afirmación 2.2.2. sabemos que $\nu \leq j(\nu)$ pero como $\nu = crt(j)$ se sigue que $\nu < j(\nu)$. Por consiguiente, $\nu \in D$.

- $\emptyset \notin D$:

Como $j(\emptyset) = \emptyset < \nu$ se sigue que $\emptyset \notin D$.

- Si $X, Y \in D$ entonces $X \cap Y \in D$:

Si $X, Y \in D$ entonces, por definición de D, se tiene que $\nu \in j(X)$ y $\nu \in j(Y)$; por lo que $\nu \in j(X) \cap j(Y)$. Como j es un encaje elemental y la intersección es absoluta para modelos internos transitivos se tiene que $j(X) \cap j(Y) = j(X \cap Y)$. Por tanto, $\nu \in j(X \cap Y)$.

- Si $X \in D$ y $X \subseteq Y$ entonces $Y \in D$:

Si $X \in D$ entonces, por definición de D, se tiene que $\nu \in j(X)$. Como j es un encaje elemental, la contención es absoluta y $X \subseteq Y$ se tiene que $j(X) \subseteq j(Y)$. Así $\nu \in j(X) \subseteq j(Y)$ por lo que $\nu \in j(Y)$. Así $Y \in D$.

- Si $X \subseteq \nu$ entonces $X \in D$ o $\nu \setminus X \in D$:

Si $X \notin D$ entonces, por definición de D, se tiene que $\nu \notin j(X)$; por lo que $\nu \in j(\nu) \setminus j(X)$. Como j es un encaje elemental, la diferencia es absoluta y $j(\nu) \setminus j(X)$ se sigue que $j(\nu) \setminus j(X) = j(\nu \setminus X)$. Por tanto, $\nu \in j(\nu \setminus X)$ lo que implica que $\nu \setminus X \in D$.

- D es ν completo:

Sea $\gamma < \nu$ y $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \subseteq D$. Como j es un encaje elemental y la intersección es absoluta para modelos internos transitivos se tiene que $j(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha<\gamma} j(X_\alpha)$. Además, dado que para todo $\alpha < \gamma$ se cumple que $\nu \in j(X_\alpha)$ se sigue que $\nu \in \bigcap_{\alpha<\gamma} j(X_\alpha) = j(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha)$. Por tanto, $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in D$.

- D es no principal:

Como D es ν completo basta mostrar que ningún unitario pertenece a D. Sea $\alpha < \nu$. Como j es un encaje elemental y ser unitario es absoluto se tiene que $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\}$ pero dado que $\nu = crt(j)$ se tiene que $j(\alpha) = \alpha$; por consiguiente $\nu \notin \{\alpha\} = \{j(\alpha)\} = j(\{\alpha\})$. Esto implica que $\{\alpha\} \notin D$.

Por los puntos anteriores concluimos que D es un ultrafiltro no principal sobre ν. Y por tanto, ν es un cardinal medible.

Corolario 2.2.2. Existe un cardinal medible si y sólo si existe $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial.

El resultado es inmediato de la afirmación 2.2.5. y del teorema 2.2.3.

Afirmación 2.2.7. Sea $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial con $\nu = crit(j)$, $U = \{X \subseteq \nu : \nu \in j(X)\}$, $j_U : V \longrightarrow Ult_U V$ el encaje elemental canónico, entonces existe un encaje elemental $k : Ult_U V \longrightarrow M$ tal que $j(a) = k(j_U(a))$ para todo conjunto a.

Para cada $f : \nu \longrightarrow V$ definimos $k([f]) = (j(f))(\nu)$. Observemos que como «ser función» es absoluto para modelos transitivos se tiene que $j(f)$ es una función cuyo dominio es $j(\nu)$; y dado que $\nu = crit(j)$ se tiene que $\nu < j(\nu)$, por lo que ν está en el dominio de $j(f)$ (así tiene sentido aplicar $j(\nu)$ a ν). También notemos que k no depende del representante pues si $f \sim g$ entonces $\{\alpha < \nu : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U = \{X \subseteq \nu : \nu \in j(X)\}$; lo que implica que

$$\nu \in j(\{\alpha < \nu : f(\alpha) = g(\alpha)\}) = \{\alpha < j(\nu) : (j(f))(\alpha) = (j(g))(\alpha)\}$$

de ahí que $(j(f))(\nu) = (j(g))(\nu)$. Ahora veamos que k es un encaje elemental. Sea $\varphi(x)$ una fórmula tal que $Ult_U V \models \varphi\,[[f]]$ esto equivale, por el teorema de *Loš*, $\{\alpha < \nu : V \models \varphi\,[f(\alpha)]\} \in U$; lo que coimplica que

$$\nu \in j(\{\alpha < \nu : V \models \varphi\,[f(\alpha)]\}) = \{\alpha < j(\nu) : j(V) \models \varphi\,[(j(f))(\alpha)]\} = \{\alpha < j(\nu) : M \models \varphi\,[(j(f))(\alpha)]\}$$

de ahí que $M \models \varphi\,[(j(f))(\nu)]$, es decir, $M \models \varphi\,[k([f])]$. Por lo tanto $Ult_U V \models \varphi\,[[f]]$ si y sólo si $M \models \varphi\,[k([f])]$, lo que indica que k es un encaje elemental.

Ahora mostraremos que $j(a) = k(j_U(a))$. Observemos que $k(j_U(a)) = k([f_a])$, donde f_a es la función constante a, y $k([f_a]) = (j(f_a))(\nu)$. Por otra parte, como $V \models \forall x \in dom(f_a)(f_a(x) = a)$ y j es un encale elemental se tiene que $M \models \forall x \in dom(j(f_a))((j(f_a))(x) = j(a))$. Por lo tanto, $(j(f_a))(\nu)) = j(a)$; así

$$k(j_U(a)) = k([f_a]) = (j(f_a))(\nu) = j(a)$$

Lema 2.2.3. Sea λ un cardinal infinito tal que $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$, entonces existe una función tal que $F : \lambda^\omega \longrightarrow \lambda$ tal que para cualquier $A \in [\lambda]^\lambda$ y $\gamma < \lambda$ hay un $s \in A^\omega$ tal que $F(s) = \gamma$.

Notemos que

$$\left|\left\{(A, \gamma) : A \in [\lambda]^\lambda \text{ y } \gamma < \lambda\right\}\right| = \left|[\lambda]^\lambda\right| \cdot \lambda = \lambda^\lambda \cdot \lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$$

así podemos considerar $\left\{(A_\alpha, \gamma_\alpha) : \alpha < 2^\lambda\right\}$ una enumeración de dicho conjunto. A continuación construiremos por recursión el conjunto $\left\{s_\alpha : \alpha < 2^\lambda\right\}$ tal que para cada $\alpha < 2^\lambda$ se tiene que $s_\alpha \in (A_\alpha)^\omega$ y $s_\alpha \neq s_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ ya hemos construido s_β, como $|(A_\alpha)^\omega| = \lambda^\omega = 2^\lambda > \alpha \geq |\alpha|$ entonces existe $s_\alpha \in (A_\alpha)^\omega$ tal que $s_\alpha \neq s_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Así, definimos $F : \lambda^\omega \longrightarrow \lambda$ como

$$F(s) = \begin{cases} \gamma_\alpha & \text{Si } s = s_\alpha \text{ para algún } \alpha < 2^\lambda \\ \emptyset & \text{En otro caso} \end{cases}$$

que esta bien definida pues para cada $\alpha < 2^\lambda$ se tiene que $s_\alpha \neq s_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. Notemos que esta función cumple lo que se pide pues si $A \in [\lambda]^\lambda$ y $\gamma < \lambda$ entonces existe un $\alpha < 2^\lambda$ tal que $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$ y hay un $s_\alpha \in (A_\alpha)^\omega = A^\omega$ tal que $F(s_\alpha) = \gamma_\alpha = \gamma$.

Teorema 2.2.4. (Kunen) Sea M es un modelo interno de ZF. Si existe $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental no trivial, entonces $M \neq V$.

Supongamos, para reducción al absurdo, que existe un encaje elemental $j : V \longrightarrow V$ no trivial. Así, por el teorema 2.2.3., existe un ordinal ν tal que $\nu = crt(j)$ y ν es un cardinal medible. Para cada $n \in \omega$ definimos $\nu_0 = \nu$ y $\nu_{n+1} = j(\nu_n)$. Por inducción se tiene que $\{\nu_n : n \in \omega\}$ es un conjunto de cardinales medibles. $\nu_0 = \nu$ es medible y supongamos por hipótesis de inducción que ν_n es medible. Como j es un encaje elemental y ν_n es medible se sigue que $j(\nu_n) = \nu_{n+1}$ es medible. Sea $\lambda = sup\{\nu_n : n \in \omega\}$ y $A = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$. Notemos que $|A| = \lambda$ pues j en particular es un encaje y por ello es inyectivo. Además, por la inyectividad de j y la afirmación 2.2.2, $\alpha \leq j(\alpha)$ para todo ordinal α, se sigue que $\{\nu_n : n \in \omega\}$ es una sucesión creciente de cardinales fuertes (por el lema 2.2.1 todo cardinal medible es fuerte). Así, por la proposición 0.3 se tiene que $\lambda = sup\{\nu_n : n \in \omega\}$ es un cardinal fuerte y por la proposición 0.2 tenemos que $2^\lambda = \lambda^{cf(\lambda)} = \lambda^\omega$. Aplicando el lema 2.2.3. obtenemos que existe una función $F : \lambda^\omega \longrightarrow \lambda$ tal que para cualquier $A \in [\lambda]^\lambda$ y $\gamma < \lambda$ hay un $s \in A^\omega$ tal que $F(s) = \gamma$. Como j es un encaje elemental,

$$j(\lambda) = sup\{j(\nu_n) : n \in \omega\} = sup\{\nu_{n+1} : n \in \omega\} = \lambda$$

y $j(\omega) = \omega$ entonces $j(F)$ debe tener la misma propiedad que F[1]. Además, si $\alpha < \lambda$ se tiene que $j(\alpha) < j(\lambda) = \lambda$; por lo que $A = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\} \in [\lambda]^\lambda$. Por la propiedad de la función F existe $s \in A^\omega$ tal que $(jF)(s) = \nu_0 = \nu$. Por otro lado, como $s \in A^\omega$ podemos ver s como una función $s : \omega \longrightarrow A = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$ por lo que existe una función $t : \omega \longrightarrow \lambda$ tal que $s(n) = j(t(n))$ para toda $n \in \omega$; esto implica que $j(t) = s$. Por consiguiente, $\nu = (jF)(j(t)) = j(F(t))$. Sin embargo, como $\nu = crt(j)$ si $F(t) < \nu$ se tiene que $j(F(t)) = F(t) < \nu$ lo que es una contradicción. Y si $\nu \leq F(t)$ entonces, como j es un encaje elemental, $\nu < j(v) \leq j(F(t))$ lo que también es una contradicción. Por reducción al absurdo concluimos que no existe un encaje elemental $j : V \longrightarrow V$ no trivial.

[1] Observemos que como «ser función» es absoluto para modelos transitivos se sigue que $j(F)$ también es función.

De este teorema también se puede concluir el teorema de Scott como lo veremos a continuación.

Corolario 2.2.3. (Scott) Si existe un cardinal medible entonces $V \neq L$.

Sea ν un cardinal medible, U un ultrafiltro $\nu-$completo sobre ν, $M = \pi\left[Ult_U(V)\right]$ y $j : V \longrightarrow M$ es un encaje elemental definido como $j = \pi \circ e^V_{Ult_U(V)}$. Por la afirmación 2.2.5. se tiene que $\nu = crt(j)$. Ahora, supongamos para reducción al absurdo que $V = L$. Como L está contenido en todos los modelos internos, entonces $L \subseteq M \subseteq V = L$; de ahí que $L = M$. Por consiguiente $j : V \longrightarrow L$ es un encaje elemental no trivial, de ahí que por el teorema de Kunen (teorema 2.2.4) se sigue que $L \neq V$.

2.3. Cardinales Fuertemente Compactos

Definición 2.3.1. Decimos que un cardinal κ es fuertemente compacto si y sólo si $\kappa > \omega$ es regular, y cualquier filtro κ-completo sobre S se puede extender a un ultrafiltro κ-completo sobre S, con S un conjunto arbitrario.

Definición 2.3.2. Dado A un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$. Para cada $x \in [A]^{<\kappa}$ consideremos $\overline{x} = \left\{y \in [A]^{<\kappa} : x \subseteq y\right\}$ y consideremos el filtro

$$\mathcal{F} = \left\{X \subseteq [A]^{<\kappa} : \bar{x} \subseteq X \text{ para alguna } x \in [A]^{<\kappa}\right\}$$

sobre $[A]^{<\kappa}$.

Proposición 2.3.1. Si κ es un cardinal regular, el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{X \subseteq [A]^{<\kappa} : \bar{x} \subseteq X \text{ para alguna } x \in [A]^{<\kappa}\right\}$$

de la definición 2.3.2. es un filtro $\kappa-$completo.

Sea κ es un cardinal regular veamos que el conjunto $\mathcal{F} = \left\{X \subseteq [A]^{<\kappa} : \bar{x} \subseteq X \text{ para alguna } x \in [A]^{<\kappa}\right\}$ es un filtro $\kappa-$completo.

$I)[A]^{<\kappa} \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$:

Como $\emptyset \in [A]^{<\kappa}$, entonces $\overline{\emptyset} \in \mathcal{F}$ y notemos que $\overline{\emptyset} = \left\{y \in [A]^{<\kappa} : \emptyset \subseteq y\right\} = [A]^{<\kappa}$. Por consiguiente, $[A]^{<\kappa} \in \mathcal{F}$.

Dado $x \in [A]^{<\kappa}$ se tiene que $x \in \left\{y \in [A]^{<\kappa} : x \subseteq y\right\} = \bar{x}$, lo que implica que para toda $x \in [A]^{<\kappa}$ se satisface que $\overline{x} \neq \emptyset$. De esta forma, para cualquier $X \in \mathcal{F}$ se tiene que $\emptyset \neq \bar{x} \subseteq X$ para alguna $x \in [A]^{<\kappa}$. Por consiguiente, $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

$II)$ Si $X, Y \in \mathcal{F}$ entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$:

Sean $X, Y \in \mathcal{F}$ tal que $\bar{x} \subseteq X$ y $\bar{y} \subseteq Y$.

Notemos que $x \cup y \in [A]^{<\kappa}$ y $\overline{x \cup y} = \left\{z \in [A]^{<\kappa} : x \cup y \subseteq z\right\}$. Veamos que $\overline{x \cup y} \subseteq X \cap Y$. Si $z \in \overline{x \cup y}$ entonces $x, y \subseteq x \cup y \subseteq z$ lo que implica que $z \in \bar{x} \subseteq X$ y $z \in \bar{y} \subseteq Y$; y así, $z \in X \cap Y$. Se sigue, de lo anterior, que $\overline{x \cup y} \subseteq X \cap Y$ y por consiguiente $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

$III)$ Si $X \in \mathcal{F}$ y $Y \subseteq [A]^{<\kappa}$ tal que $X \subseteq Y$, entonces $Y \in \mathcal{F}$:

Sea $X \in \mathcal{F}$ y $Y \subseteq [A]^{<\kappa}$ tal que $X \subseteq Y$, entonces existe $x \in [A]^{<\kappa}$ tal que $\bar{x} \subseteq X \subseteq Y$. Y por definición se tiene que $Y \in \mathcal{F}$.

$IV)$ $\mathcal{F}$ es $\kappa-$completo

Sea $\{X_\gamma : \gamma < \lambda\} \subseteq \mathcal{F}$ y $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\gamma < \lambda$ existe $x_\gamma \in [A]^{<\kappa}$ tal que $\bar{x_\gamma} \subseteq X_\gamma$. Como κ es regular, entonces $\left|\bigcup_{\gamma<\lambda} x_\gamma\right| < \kappa$; por lo que $\bigcup_{\gamma<\lambda} x_\gamma \in [A]^{<\kappa}$. Además notemos que $\overline{\bigcup_{\gamma<\lambda} x_\gamma} \subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma$ pues si $z \in \overline{\bigcup_{\gamma<\lambda} x_\gamma}$ entonces, para cada $\gamma < \lambda$ se tiene que $x_\gamma \subseteq \bigcup_{\gamma<\lambda} x_\gamma \subseteq z$ lo que implica que $z \in \overline{x_\gamma} \subseteq X_\gamma$; y así,

$z \in \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma$. Se sigue, de lo anterior, que $\overline{\bigcup_{\gamma<\lambda} x_\gamma} \subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma$ y por consiguiente $\bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma \in \mathcal{F}$. Por tanto $\mathcal{F}$ es $\kappa-$completo.

Observación 2.3.1. Si κ es regular, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro κ-completo. Decimos que $\mathcal{U}$ es una medida fina sobre $[A]^{<\kappa}$ si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo que extiende al filtro $\mathcal{F}$. De este modo, si κ es un cardinal fuertemente compacto, entonces el filtro κ-completo $\mathcal{F}$ de la definición 2.3.2. puede extenderse a un ultrafiltro $\kappa-$completo. Esto significa que: si κ es un cardinal fuertemente compacto entonces $[A]^{<\kappa}$ tiene una medida fina donde A es cualquier conjunto.

Teorema 2.3.1. Si κ es fuertemente compacto entonces $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ satisface el teorema de compacidad con cualquier tipo τ.

Sea κ un cardinal fuertemente compacto y Σ un conjunto de enunciados de $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ κ-consistente con $|\Sigma| \geq \kappa$. Por la observación 2.3.1. $[\Sigma]^{<\kappa}$ tiene una medida fina digamos F tal que

$$\mathcal{F} = \left\{X \subseteq [\Sigma]^{<\kappa} : \bar{x} \subseteq X \text{ para alguna } x \in [\Sigma]^{<\kappa}\right\} \subseteq F$$

además, como Σ es κ-consistente entonces para cada $x \in [\Sigma]^{<\kappa}$ existe $\mathfrak{A}_x$ tal que $\mathfrak{A}_x \models x$; por lo que podemos considerar la siguiente familia de estructuras $\left\{\mathfrak{A}_x : x \in [\Sigma]^{<\kappa}\right\}$.

Como F es un ultrafiltro κ-completo y $\left\{\mathfrak{A}_x : x \in [\Sigma]^{<\kappa}\right\}$ una familia de estructuras podemos construir su respectivo ultraproducto $Ult_F\mathfrak{A}_x$. Afirmamos que $Ult_F\mathfrak{A}_x \models \Sigma$.

Sea $\sigma \in \Sigma$, entonces $\{\sigma\} \in [\Sigma]^{<\kappa}$; por consiguiente $\left\{y \in [\Sigma]^{<\kappa} : \{\sigma\} \subseteq y\right\} = \overline{\{\sigma\}} \in \mathcal{F} \subseteq F$ y dado que

$$\left\{y \in [\Sigma]^{<\kappa} : \{\sigma\} \subseteq y\right\} \subseteq \left\{y \in [\Sigma]^{<\kappa} : \mathfrak{A}_y \models \sigma\right\}$$

se sigue que $\left\{y \in [\Sigma]^{<\kappa} : \mathfrak{A}_y \models \sigma\right\} \in F$. Por el Corolario 1.5.1. se concluye que $Ult_F\mathfrak{A}_x \models \sigma$.

Lo anterior prueba que $Ult_F\mathfrak{A}_x \models \Sigma$.

Teorema 2.3.2. Si κ es regular, $\kappa > \omega$ y$\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ satisface el teorema de compacidad con τ cualquier tipo, entonces κ es fuertemente compacto.

Supongamos que κ es regular, $\kappa > \omega$ y$\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ satisface el teorema de compacidad con τ cualquier tipo.

Sea S un conjunto y F un filtro $\kappa-$completo sobre S.

Consideremos el tipo $\tau = \{\{R_X : X \subseteq S\}, \{c\}\}$ y el siguiente conjunto de enunciados

$$\Sigma = \{\sigma : \mathfrak{C} \models \sigma\} \cup \{R_X(c) : X \in F\}$$

donde $\mathfrak{C} = \langle S, \mathcal{P}(S)\rangle$ es una estructura tal que $\mathfrak{C}(R_X) = X$. Veamos que Σ es κ- consistente.

Sea $\Delta \subseteq \Sigma$ con $|\Delta| < \kappa$. Esto implica que$\Delta_F = \Delta \cap \{R_X(c) : X \in F\}$ cumple que$|\Delta_F| < \kappa$; de este modo, como el filtro F es $\kappa-$completo se tiene que $\emptyset \neq \bigcap\{X \in F : R_X \in \Delta_F\} \in F$ por lo que podemos elegir $d \in \bigcap\{X \in F : R_X \in \Delta_F\}$. Así podemos considerar la estructura $\mathfrak{B} = \langle S, \mathcal{P}(S), d\rangle$ tal que $\mathfrak{B}(R_X) = X$ y $\mathfrak{B}(c) = d$. Podemos notar que al ser $\mathfrak{B}$ una expansión de $\mathfrak{C}$ se cumple que $\mathfrak{B} \models \{\sigma : \langle S, \mathcal{P}(S)\rangle \models \sigma\}$ y por la elección de d se tiene que $\mathfrak{B} \models R_X(c)$ con $R_X(c) \in \Delta_F$; es decir, $\mathfrak{B}$ es modelo de Δ. Por consiguiente, Σ es κ- consistente.

Como $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}(\tau)$ satisface el teorema de compacidad se tiene que existe $\mathfrak{A}$ una estructura de tipo τ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Definimos $U \subseteq \mathcal{P}(S)$ como $U = \{X \subseteq S : \mathfrak{A} \models R_X(c)\}$, mostraremos que U es un ultrafiltro $\kappa-$completo que extiende a F.

I) $F \subseteq U$. De lo que se infiere que $S \in U$

Dado que $\{R_X(c) : X \in F\} \subseteq \Sigma$ y $\mathfrak{A} \models \Sigma$, entonces $\mathfrak{A} \models \{R_X(c) : X \in F\}$; por lo que $F \subseteq U$.

II) $\emptyset \notin U$:

Para reducción al absurdo supongamos que $\emptyset \in U$, es decir, $\mathfrak{A} \models R_\emptyset(c)$ si y sólo si $c^{\mathfrak{A}} \in \emptyset$ lo que es una contradicción. Por consiguiente, $\emptyset \notin U$.

$III)$ Si $X \in U$ y $Y \subseteq S$ tal que $X \subseteq Y$ entonces $Y \in U$.

Como $X \in U$, entonces $\mathfrak{A} \models R_X(c)$; si y sólo si, $c^{\mathfrak{A}} \in X$. Dado que $X \subseteq Y$ se sigue que $c^{\mathfrak{A}} \in X$, esto implica que $\mathfrak{A} \models R_Y(c)$; es decir, $Y \in U$.

$V)$ U es un ultrafiltro

Basta mostrar que para cualquier $X \subseteq S$ se cumple que $X \in U$ o bien $S \setminus X \in U$.

Sea $X \subseteq S$ tal que que $X \notin U$, entonces $\mathfrak{A} \not\models R_X(c)$. Como $R_X(c)$ es un enunciado se tiene que $\mathfrak{A} \models \neg R_X(c)$.

Por otro lado, notemos que $\mathfrak{C} \models \forall x(\neg R_X(x) \longleftrightarrow R_{S\setminus X}(x))$ pues para cualquier asignación $\alpha \in^\kappa S$, $\mathfrak{C} \models_\alpha \neg R_X(x)$ si y sólo si $\mathfrak{C} \not\models_\alpha R_X(x)$; es decir, $\alpha(x) \notin \mathfrak{C}(R_X) = X$. Por consiguiente, $\alpha(x) \in S \setminus X = \mathfrak{C}(R_{S\setminus X})$ que es equivalente a que $\mathfrak{C} \models_\alpha R_{S\setminus X}$. De lo anterior se sigue que $\mathfrak{C} \models_\alpha \neg R_X(x)$ si y sólo si $\mathfrak{C} \models_\alpha R_{S\setminus X}$ con lo que se concluye que $\mathfrak{C} \models \forall x(\neg R_X(x) \longleftrightarrow R_{S\setminus X}(x))$.

Por definición de Σ se tiene que $\forall x(\neg R_X(x) \longleftrightarrow R_{S\setminus X}(x)) \in \Sigma$ y como $\mathfrak{A} \models \Sigma$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \forall x(\neg R_X(x) \longleftrightarrow R_{S\setminus X}(x))$.

Tomando en cuanta que $\mathfrak{A} \models \neg R_X(c)$ y $\mathfrak{A} \models \forall x(\neg R_X(x) \longleftrightarrow R_{S\setminus X}(x))$ se sigue que $\mathfrak{A} \models R_{S\setminus X}(c)$. Así, por como definimos a U, se concluye que $S \setminus X \in U$.

$VI)$ U es $\kappa-$completo

Sea $\{X_\gamma \subseteq S : \gamma < \lambda\} \subseteq U$ con $\lambda < \kappa$, entonces para cada $\gamma < \lambda$ se tiene que $\mathfrak{A} \models R_{X_\gamma}(c)$; es decir $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(c)$. Además, observemos que $Y = \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma \subseteq S$ por lo que le corresponde un símbolo relacional R_Y.

Notemos que $\mathfrak{C} \models \forall x(\bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x) \longrightarrow R_Y(x))$ pues para cualquier asignación $\alpha \in^\kappa S$, si $\mathfrak{C} \models_\alpha \bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x)$ entonces para cada $\gamma < \lambda$ se cumple que $\mathfrak{C} \models_\alpha R_{X_\gamma}(x)$; es decir, $\alpha(x) \in \mathfrak{C}(R_{X_\gamma}) = X_\gamma$ para cada $\gamma < \lambda$. En otras palabras, $\alpha(x) \in \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma = Y = \mathfrak{C}(R_Y)$ lo que implica que $\mathfrak{C} \models_\alpha R_Y(x)$. De lo anterior se sigue que: si $\mathfrak{C} \models_\alpha \bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x)$ entonces $\mathfrak{C} \models_\alpha R_Y(x)$, con lo que se concluye que $\mathfrak{C} \models \forall x(\bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x) \longrightarrow R_Y(x))$. Por definición de Σ se tiene que $\forall x(\bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x) \longrightarrow R_Y(x)) \in \Sigma$ y como $\mathfrak{A} \models \Sigma$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall x(\bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x) \longrightarrow R_Y(x))$. Tomando en cuanta que $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(c)$ y $\mathfrak{A} \models \forall x(\bigwedge_{\gamma<\lambda} R_{X_\gamma}(x) \longrightarrow R_Y(x))$ entonces $\mathfrak{A} \models R_Y(c)$, es decir, $\bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma = Y \in U$. Así concluimos que U es $\kappa-$completo.

De lo anterior concluimos que U es un ultrafiltro $\kappa-$completo que extiende a F, por lo que κ es fuertemente compacto.

Cuando tenemos un cardinal fuertemente compacto κ, un cardinal $\lambda \geq \kappa$ y F un ultrafiltro $\kappa-$completo sobre λ; sabemos que por definición de cardinal fuertemente compacto existe U un ultrafiltro que extiende a F. De esta manera podemos construir un nuevo tipo de ultrapotencia de la siguiente manera: Consideremos $\prod_{i\in\lambda^+} V = \{f : f : \lambda^+ \longrightarrow V\}$ y la relación de equivalencia$\sim$ sobre $\prod_{i\in\lambda^+} V$ de la siguiente manera $f \sim g$, si y sólo si, $\{i \in \lambda^+ : f(i) = g(i)\} \in U$; con lo que podemos construir los conjuntos (que se asemejan a las clases de equivalencia formadas por una relación de equivalencia)

$$[f] = \left\{ g \in \prod_{i\in\lambda^+} V : g \sim f \text{ y } \forall h \in \prod_{i\in\lambda^+} V(h \sim f \longrightarrow rank(g) \leq rank(h)) \right\}$$

denotaremos igualmente por $Ult_U(V)$ a la estructura clase de tipo $\tau = \{E\}$, con E una relación de aridad dos, que tiene como universo a $\left\{[f] : f \in \prod_{i\in\lambda^+} V\right\}$ y que interpreta a E como $\in^* = \{\langle [f], [g] \rangle : \{i \in \nu : f(i) \in g(i)\} \in U\}$. Notemos que $Ult_U(V)$ es semejante a las ultrapotencias que ya habíamos formado pero con la única diferencia que nos estamos tomando funciones cuyo dominio es más grande que κ. En vista de esto algunos teoremas que hemos probado sobre ultrapotencias aplican también para esta nueva versión $Ult_U(V)$. En particular, la relación $\in^*$ está bien definida por el lema 1.5.2., el teorema de Łos y el hecho de que $V \preccurlyeq Ult_U(V)$ se satisfacen.

Así mismo, si tenemos un cardinal fuertemente compacto κ, un cardinal $\lambda \geq \kappa$ y F un ultrafiltro $\kappa-$completo sobre λ; por definición de cardinal fuertemente compacto existe U un ultrafiltro que extiende a F. Construiremos un nuevo tipo de ultrapotencia de la siguiente manera: Consideremos $\prod_{i\in\lambda^+} V^- = \{f : f : \lambda^+ \longrightarrow V \text{ y } |f[\lambda^+]| \leq \lambda\}$ y la relación de equivalencia$\sim$ sobre $\prod_{i\in\lambda^+} V^-$ de la siguiente manera $f \sim g$, si y sólo si, $\{i \in \lambda^+ : f(i) = g(i)\} \in U$; con lo que podemos construir nuevamente los conjuntos

$$[f] = \left\{ g \in \prod_{i\in\lambda^+} V : g \sim f \text{ y } \forall h \in \prod_{i\in\lambda^+} V (h \sim f \longrightarrow rank(g) \leq rank(h)) \right\}$$

denotaremos igualmente por $Ult_U(V^-)$ a la estructura clase de tipo $\tau = \{E\}$, con E una relación de aridad dos, que tiene como universo a $\left\{[f] : f \in \prod_{i\in\lambda^+} V^-\right\}$ y que interpreta a E como $\in^* = \{\langle [f], [g] \rangle : \{i \in \nu : f(i) \in g(i)\} \in U\}$. Notemos que $Ult_U(V^-)$ semejante a las ultrapotencias que ya habíamos formado pero con la única diferencia que ahora consideramos funciones cuyo dominio es $\lambda^+ \geq \kappa$ y cuya imagen $|f[\lambda^+]| \leq \lambda$. En vista de esto algunos teoremas que hemos probado sobre ultrapotencias aplican también para esta nueva versión $Ult_U(V)$. En particular, la relación $\in^*$ está bien definida por el lema 1.5.2., el teorema de *Łos* y el hecho de que $V \preccurlyeq Ult_U(V)$ se satisfacen.

Estas dos nuevas versiones serán utilizadas en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. ($Vop\check{e}nka - Hrb\acute{a}\check{c}ek$) Si existe un cardinal fuertemente compacto y A es un conjunto, entonces $V \neq L[A]$.

Sea A un conjunto, κ un cardinal fuertemente compacto y supongamos para reducción al absurdo que $V = L[A]$. Por la proposición 1.7.7. existe A' un conjunto de ordinales tal que $L[A] = L[A']$ por lo que podemos asumir que de hecho A es un conjunto de ordinales; por lo que podemos considerar $\lambda \geq \kappa$ un cardinal tal que $A \subseteq \lambda$. Como κ es un cardinal fuertemente compacto, existe U un ultrafiltro sobre λ^+ que extiende al filtro $F = \{X \subseteq \lambda^+ : |\lambda^+ \setminus X| \leq \lambda\}$ $\kappa-$completo. Este filtro F es $\kappa-$completo pues si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq F$ entonces

$$\left|\lambda^+ \setminus \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha\right| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} (\lambda^+ \setminus X_\alpha)\right| \leq \kappa \cdot sup\left\{\left|\lambda^+ \setminus X_\alpha\right| : \alpha < \kappa\right\} = \kappa \cdot \lambda = \lambda$$

por lo que $\bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in F$.

Consideremos $M = \pi[Ult_U V]$, el colapso de Mostowsky del ultraproducto del universo sobre el ultrafiltro U y el conjunto de funciones $\prod_{i\in\lambda^+} V = \{f : f : \lambda^+ \longrightarrow V\}$,[2] y sea $j : V \longrightarrow M$ el encaje elemental canónico el cuál es definido como $j(x) = \pi_M([f_x]) = \pi_M(e(x))$ donde $f_x : \lambda^+ \longrightarrow V$ y $f_x(y) = x$. Sea $N = \pi_N[Ult_U V^-]$ donde $Ult_U V^-$, denota el ultraproducto del universo sobre el ultrafiltro U con funciones de λ^+ en V y el conjunto de funciones $\{f : f : \lambda^+ \longrightarrow V \text{ y } |f[\lambda^+]| \leq \lambda\}$, y sea $i : V \longrightarrow N$ el encaje elemental canónico el cuál es definido como $i(x) = \pi_N([f_x]^-) = \pi_N(e^-(x))$ donde $f_x : \lambda^+ \longrightarrow V$ y $f_x(y) = x$.

Notemos que $i(\lambda^+) = lim_{\gamma\longrightarrow\lambda^+} i(\gamma)$. Por una parte si $\gamma < \lambda^+$, dado que i es un encaje elemental, se tiene que $i(\gamma) \leq i(\lambda^+)$; por lo que $lim_{\gamma\longrightarrow\lambda^+} i(\gamma) \leq i(\lambda^+)$. Por otra parte si $\xi < i(\lambda^+)$, como π_N es sobreyectiva existe $f : \lambda^+ \longrightarrow V$ con $|f[\lambda^+]| \leq \lambda$ tal que $\pi_N([f]^-) = \xi < i(\lambda^+) = \pi_N([f_{\lambda^+}]^-)$. Como π_N respeta el orden se tiene que $[f]^- \in^* [f_{\lambda^+}]^-$ que por definición implica que $\{i \in \lambda^+ : f(i) < \lambda^+\} \in U$. Como $|f[\lambda^+]| \leq \lambda$ y λ^+ es regular existe $\gamma < \lambda^+$ tal que $\{i \in \lambda^+ : f(i) < f_\gamma(i)\} \in U$ por lo que $[f]^- \in^* [f_\gamma]^- = e^-(\gamma)$; como π_N respeta el orden se tiene que $\xi = \pi_N([f]^-) < \pi_N(e^-(\gamma)) = i(\gamma)$. Por consiguiente, $i(\lambda^+) \leq lim_{\gamma\longrightarrow\lambda^+} i(\gamma)$; de ambas desigualdades se concluye que $i(\lambda^+) = lim_{\gamma\longrightarrow\lambda^+} i(\gamma)$.

Ahora veamos que $j(\lambda^+) > lim_{\gamma\longrightarrow\lambda^+} j(\gamma)$. Consideremos la función diagonal $d : \lambda^+ \longrightarrow V$ definida como $d(\alpha) = \alpha$. Observemos que para todo $\gamma < \lambda^+$ se tiene que $\{\alpha \in \lambda^+ : \gamma < \alpha\} \in U$, pues

$$\left|\lambda^+ \setminus \left\{\alpha \in \lambda^+ : \gamma < \alpha\right\}\right| = |\gamma + 1| \leq \lambda$$

[2]La construcción de $M = \pi_M[Ult_U V]$ se encuentran en la sección 2.2.

entonces $\{\alpha \in \nu : \gamma < d(\alpha)\} = \{\alpha \in \nu : \gamma < \alpha\} \in U$. Esto implica que $[f_\gamma] \in^* [d]$ donde $f_\gamma \equiv \gamma$; en consecuencia $\gamma \leq j(\gamma) = \pi_M([f_\gamma]) \in \pi_M([d])$. Por otro lado, notemos que $\{\alpha \in \lambda^+ : d(\alpha) < \lambda^+\} = \lambda^+ \in U$ por lo que $[d] \in^* [f_{\lambda^+}]$, lo que implica que $\pi_M([d]) \in^* \pi_M([f_{\lambda^+}]) = j(\lambda^+)$. Por consiguiente, $lim_{\gamma \longrightarrow \lambda^+} j(\gamma) \leq \pi_M([d]) < j(\lambda^+)$.

Así mismo observemos que $i(\gamma) = j(\gamma)$ para toda $\gamma < \lambda^+$. Si $\gamma < \lambda^+$ y $g \in [f_\gamma]$ entonces $rank(g) \leq rank(f)$, por lo que $g : \lambda^+ \longrightarrow \gamma$; lo que implica que $|g[\lambda^+]| \leq \lambda$; de ahí que $[f_\gamma]^- = [f_\gamma]$ y por tanto por inducción se tiene que $i(\gamma) = \pi_N([f_\gamma]^-) = \pi_M([f_\gamma]) = j(\gamma)$ para toda para toda $\gamma < \lambda^+$ como mostraremos a continuación. Supongamos por hipótesis de inducción que para toda $l < \gamma$ se cumple que $\pi_N([f_l]^-) = \pi_M([f_l]$, entonces como $[f_\gamma]^- = [f_\gamma]$ se tiene que $Ext_{\in^*}[f]^- = Ext_{\in^*}[f]$; así

$$\pi_N([f_\gamma]^-) = \pi_N\left[Ext_{\in^*}[f]^-\right] = \left\{\pi_N([f_l]^-) : [f_l]^- \in^* [f_\gamma]^-\right\} = \{\pi_M([f_l]) : [f_l] \in^* [f_\gamma]\} = \pi_N\left[Ext_{\in^*}[f]\right] = \pi_M([f_\gamma])$$

con lo que queda demostrado que $i(\gamma) = j(\gamma)$ para toda $\gamma < \lambda^+$.

De lo anterior se deduce que $j(\lambda^+) > lim_{\gamma \longrightarrow \lambda^+} j(\gamma) = lim_{\gamma \longrightarrow \lambda^+} i(\gamma) = i(\lambda^+)$.

Similarmente se tiene que $i(A) = j(A)$. Notemos que si $f \in [f_A]$ entonces $rank(f) \leq rank(f_A)$, y como$A \subseteq \lambda$ se tiene que $f : \lambda^+ \longrightarrow \lambda$; de ahí que $|f[\lambda^+]| \leq \lambda$. Por lo tanto, aplicando inducción se sigue que

$$j(A) = \{\pi_M([f]) : [f] \in^* [f_A]\} = \left\{\pi_N([f]^-) : [f]^- \in^* [f_A]^-\right\} = i(A)$$

por otro lado, de la proposición 1.7.8. se sigue que $M = \bigcup_{\alpha \in OR} j(V_\alpha)$ y $N = \bigcup_{\alpha \in OR} i(V_\alpha)$, pero por hipótesis $V = L[A]$ de ahí que $V_\alpha = L_\alpha^A$; además $j(L_\alpha^A) = L_\alpha^{j(A)}$ como veremos a continuación. Como j es un encaje elemental

$$j(L_\alpha^A) = j(L_\alpha(A)) = (L_\alpha(j(A)))^M$$

y dado que la función L_α es absoluta se sigue que $(L_\alpha(j(A)))^M = L_\alpha(j(A)) = L_\alpha^{j(A)}$. Esto implica que

$$M = \bigcup_{\alpha \in OR} j(V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in OR} j(L_\alpha^A) = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha^{j(A)} = L[j(A)] = L[i(A)] = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha^{i(A)} = \bigcup_{\alpha \in OR} i(L_\alpha^A) = \bigcup_{\alpha \in OR} i(V_\alpha) = N$$

no obstante, $M \models$ "$j(\lambda^+)$ es el sucesor de $j(\lambda)$" y $N \models$ "$i(\lambda^+)$ es el sucesor de $i(\lambda)$". Dado que $j(\lambda) = i(\lambda)$ (pues $i(\gamma) = j(\gamma)$ para toda $\gamma < \lambda^+$) y $M = N$ se sigue que $j(\lambda^+) = i(\lambda^+)$ lo que es una contradicción ya que anteriormente habíamos deducido que $j(\lambda^+) > i(\lambda^+)$. Por reducción al absurdo concluimos que $V \neq L[A]$.

Capítulo 3

$M-$Ultrapotencias

3.1. $M-$Ultrapotencias

En la presente sección se construyen las $M-$ ultrapotencias iteradas, semejante a como lo hicimos en la sección 1.6., donde M es un modelo interno de ZFC. Comenzaremos dando algunas definiciones que nos permitirá dicha construcción.

Definición 3.1.1. Sea M un modelo interno de ZFC, es decir M es modelo interno de ZFC menos el axioma de buena fundación, ν un cardinal en M. Decimos que U es un $M-$ultrafiltro sobre ν si y sólo si

I) $U \subseteq \mathcal{P}^M(\nu)$, $\nu \in U$ y $\emptyset \notin U$

II) Si $X, Y \in U$ entonces $X \cap Y \in U$

III) Si $X \in U$ y $Y \in M$ tal que $X \subseteq Y$, entonces $Y \in U$

IV) Para todo $X \subseteq \nu$ tal que $X \in M$ se tiene que $X \in U$ o bien $\nu \setminus X \in M$

Definición 3.1.2. Decimos que U un $M-$ultrafiltro sobre κ es $\kappa-$completo si y sólo si para toda $\alpha < \kappa$ y $\{X_\xi : \xi < \alpha\} \in M$ tal que $\{X_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq U$, entonces $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi \in U$.

Observación 3.1.1. Bajo esta definición no es necesario que un $M-$ultrafiltro pertenezca al modelo M. De hecho si $M = L$ y ν es un cardinal en L no numerable no existen ultrafiltros $\nu-$completos sobre ν, pues L no tienen cardinales medible. Esta es una de las razones por las cuales se introducen los $M-$ultrafiltros pues no es necesario que estos pertenezcan al modelo.

Sea M un modelo interno de ZFC, ν un cardinal no numerable, U un $M-$ultrafiltro al menos ω_1-completo sobre υ y la clase $(\prod_{i\in\nu} M)^M = \{f \in M : f : \nu \longrightarrow M\}$. Podemos definir la relación de equivalencia $\sim$ sobre $(\prod_{i\in\nu} M)^M$ de la siguiente manera $f \sim g$, si y sólo si, $\{i \in \nu : f(i) = g(i)\} \in U$. La demostración de que $\sim$ es una relación de equivalencia es análoga al lema 1.5.1. Consideremos

$$[f] = \left\{ g \in (\prod_{i\in\nu} M)^M : g \sim f \text{ y } \forall h \in (\prod_{i\in\nu} M)^M (h \sim f \longrightarrow rank(g) \leq rank(h)) \right\}$$

como la función rango es absoluta no es necesario pedir, en la definición de $[f]$, $rank^M$. Observemos que $[f]$ es un conjunto y que $f \sim J$ si y sólo si $[f] = [J]$. Denotaremos por $Ult_U(M)$ a la estructura clase de tipo $\tau = \{E\}$, con E una relación de aridad dos, que tiene como universo a $\left\{[f] : f \in (\prod_{i\in\nu} M)^M\right\}$ y que interpreta a E como $\in^* = \{\langle [f], [g] \rangle : \{i \in \nu : f(i) \in g(i)\} \in U\}$. A $Ult_U(M)$ se le conoce como una $M-$ultrapotencia. Notemos que el teorema de Łos y el hecho de que $M \preccurlyeq Ult_U(M)$ se satisfacen para $Ult_U(M)$. Así mismo algunas afirmaciones semejantes a las del capitulo 2, que mencionaremos a continuación, se satisfacen también para $M-$ultrafiltros y $M-$ultrapotencias.

Además como $M \preccurlyeq Ult_U(M)$ y M es modelo de ZFC, entonces $Ult_U(M)$ es una clase bien fundada y extensional.

Afirmación 3.1.1. Sean M, N modelos internos de ZFC y $j : M \longrightarrow N$ un encaje elemental no trivial con $\nu = crit(j)$, entonces $M \models \nu > \omega$ y $D = \{X \in M : X \subseteq \nu \wedge \nu \in j(X)\}$ es un $M-$ultrafiltro $\nu-$completo sobre ν

La demostración de esta afirmación es análoga al teorema 2.2.3.

Afirmación 3.1.2. Sean M, N modelos internos de ZFC, $j : M \longrightarrow N$ un encaje elemental no trivial con $\nu = crit(j)$, $U = \{X \in M : X \subseteq \nu \wedge \nu \in j(X)\}$, $j_U : M \longrightarrow Ult_U M$ el encaje elemental canónico, entonces existe un encaje elemental $k : Ult_U M \longrightarrow N$ tal que para toda $m \in M$ se cumple que $j(m) = k(j_U(m))$.

La demostración de esta afirmación es análoga a la afirmación 2.2.7.

Observación 3.1.2. Como $Ult_U M$ es una clase bien fundada, entonces por el colapso de Motowski se tiene que $\langle Ult_U M, \in^* \rangle \cong \langle \pi [Ult_U M], \in \rangle$

3.2. Indiscernibles en L

Definición 3.2.1. Decimos que una clase I de ordinales es una clase de indiscernibles para un modelo interno M de ZFC si para cualquier fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{L}$ y cualesquiera sucesiones crecientes $\langle c_1, ..., c_n \rangle$, $\langle d_1, ..., d_n \rangle$ de elementos de I se satisface que $M \models \varphi(c_1, ..., c_n)$ si y sólo si $M \models \varphi(d_1, ..., d_n)$.

Definición 3.2.2. Decimos que una clase I de ordinales es cerrada si para cualquier ordinal límite α tal que $I \cap \alpha$ no está acotada en α (o bien que $sup(I \cap \alpha) = \alpha$) se cumple que $\alpha \in I$.

Definición 3.2.2. Decimos que $0^\sharp$ existe si hay una clase cerrada I de ordinales que es una clase de indiscernibles para L. Si $0^\sharp$ existe definimos

$$0^\sharp = \{\sharp\varphi \in \omega : L \models \varphi [c_1, ..., c_n] \text{ para alguna sucesión creciente } \langle c_1, ..., c_n \rangle \text{de elementos en I } \}$$

donde $\sharp\varphi$ denota el número de Gödel de la fórmula φ. Observemos que la definición de $0^\sharp$ no depende de la elección de la sucesión creciente, por ser indiscernibles, ni de la elección de I como lo mostraremos en la siguiente afirmación.

Afirmación 3.2.1. Sean I y J dos clases cerradas de ordinales que son indiscernibles para L. Si

$$0^\sharp_I = \{\sharp\varphi \in \omega : L \models \varphi [c_1, ..., c_n] \text{ para alguna sucesión creciente } \langle c_1, ..., c_n \rangle \text{de elementos en } I\}$$

y

$$0^\sharp_J = \{\sharp\varphi \in \omega : L \models \varphi [d_1, ..., d_n] \text{ para alguna sucesión creciente } \langle d_1, ..., d_n \rangle \text{de elementos en } J\}$$

entonces $0^\sharp_I = 0^\sharp_J$.

Sea φ una fórmula con n variables libres en el lenguaje tal que existe una sucesión creciente $\langle c_1, ..., c_n \rangle$ de elementos de I tal que $L \models \varphi [c_1, ..., c_n]$. Por recursión construiremos dos sucesiones $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq I$ y $\{b_n : n \in \omega\} \subseteq J$

tal que $a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$. Como I y J son clases, en particular son no vacías, por lo que existen $a_0 \in I$ y $b_0 \in J$. Supongamos que ya hemos construido hasta a_n y b_n. Como I es una clase propia, en particular no es acotada, por lo que existe $a_{n+1} \in I$ tal que $b_n + 1 \leq a_{n+1}$. Ahora como J es una clase propia, en particular no es acotada, por lo que existe $b_{n+1} \in J$ tal que $a_{n+1} + 1 \leq b_{n+1}$. Por consiguiente se satisface que $b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$. Así, de forma recursiva construimos dos sucesiones $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq I$ y $\{b_n : n \in \omega\} \subseteq J$ tal que $b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$. Sea $e_0 = Sup\{a_n : n \in \omega\} = Sup\{b_n : n \in \omega\}$ que por construcción es un ordinal límite tal que $sup(I \cap e_0) = e_0$ y $sup(J \cap e_0) = e_0$, dado que I y J son clases cerradas se sigue que $e_0 \in I$ y $e_0 \in J$. De forma análoga podemos construir dos nuevas sucesiones crecientes $\left\{a_n^1 : n \in \omega\right\} \subseteq I$ y $\left\{b_n^1 : n \in \omega\right\} \subseteq J$ tal que $e_0 < a_0^1, b_0^1$ y $b_n^1 < a_{n+1}^1 < b_{n+1}^1$.; y así definir $e_1 = Sup\left\{a_n^1 : n \in \omega\right\} = Sup\left\{b_n^1 : n \in \omega\right\}$ que por un razonamiento análogo se tiene que $e_1 \in I$ y $e_1 \in J$. Repitiendo el mismo procedimiento $n-$veces encontramos una sucesión creciente $e_0 < ... < e_{n-1}$ tal que $\{e_0, ..., e_{n-1}\} \subseteq I, J$. Ahora, como I es un conjunto de indiscernibles $L \models \varphi(c_1, ..., c_n)$ si y sólo si $L \models \varphi(e_0, ..., e_{n-1})$; de ahí que $L \models \varphi(e_0, ..., e_{n-1})$ y dado que $\{e_0, ..., e_{n-1}\} \subseteq J$ se tiene que $\sharp\varphi \in 0^\sharp_J$. Por lo tanto, $0^\sharp_I \subseteq 0^\sharp_J$ y de forma análoga obtenemos la contención contraria con lo que podemos concluir que $0^\sharp_I = 0^\sharp_J$.

En el capítulo I vimos que si $\mathfrak{A}$ es una estructura con universo A, donde A es un conjunto, y $X \subseteq A$ entonces podríamos construir la subestructura elemental $H^{\mathfrak{A}}(X)$ de $\mathfrak{A}$; esta subestructura es la cerradura de X bajo las funciones de Skolem de todas las fórmulas del lenguaje[1]. En el caso de que $\mathfrak{A}$ sea una estructura cuyo universo sea una clase propia no se puede usar el axioma de elección para definir las funciones de Skolem, a menos que $\mathfrak{A}$ sea una clase bien ordenad. En particular el universo constructible de *Gödel* es una clase bien ordenada, por lo que se puede definir las funciones de Skolem sobre L y así construir la subestructura $H^L(X)$.

Proposición 3.2.1. Si $0^\sharp$ existe entonces existe I una clase de indiscernibles para L tal que $H^L(I) = L$.

Si $0^\sharp$ existe entonces existe I una clase de indiscernibles para L, entonces $H^L(I)$ es una clase elementalmente equivalente a L. Como I es una clase, aplicando el teorema de condensación, se tiene que $H^L(I)$ es isomorfo a L bajo el colapso de Motowski. Consideremos $I' = \pi[I]$, dado que π es un isomorfismo se tiene que I' es una clase de indiscernibles para L. Observemos que $L = H^L(I')$ pues si $x \in L$ entonces, como π es una biyección, existe $y \in H^L(I)$ tal que $\pi(y) = x$. Dado que $y \in H^L(I)$ existen $y_1, ..., y_n \in I$ y t un termino de Skolem tal que $t^L(y_1, ..., y_n) = y$, entonces

$$x = \pi(y) = \pi(t^L(y_1, ..., y_n)) = t^L(\pi(y_1), ..., \pi(y_n)) \in H^L(I')$$

por consiguiente $L \subseteq H^L(I')$ y por construcción de $H^L(I')$ se tiene la otra contención con lo que se concluye que $L = H^L(I')$.

Teorema 3.2.1. (Kunen) Si $0^\sharp$ existe entonces existe $j : L \longrightarrow L$ un encaje elemental no trivial.

Si $0^\sharp$ existe entonces por la proposición 3.2.1. existe I una clase de indiscernibles para L tal que $H^L(I) = L$ lo que para toda $x \in L$ existen $y_1, ..., y_n \in I$ y t un termino de Skolem tal que $t^L(y_1, ..., y_n) = x$. Sea $k : I \longrightarrow I$ un funcional que preserve el orden no trivial tal que $i < k(i)$ (por ejemplo $k(i) = min\{\alpha \in I : \alpha > i\}$) . Definimos $j : L \longrightarrow L$ como $j(x) = j(t^L(y_1, ..., y_n)) = t^L(k(y_1), ..., k(y_n))$. Veamos que j es un encaje elemental, sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula y $a_1, ..., a_n \in L = H^L(I)$ para cada a_i existen $b_1^i, ..., b_{m_i}^i \in I$ y t_i un termino de Skolem tal que $t_i^L(b_1^i, ..., b_m^i) = a_i$; entonces

$$L \models \varphi(x_1, ..., x_n)\,[a_1, ..., a_n]$$

si y sólo si

$$L \models \exists x_1, ..., \exists x_n \left[\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge \bigwedge_{i=i}^{n} x_i = t_i(y_1^i, ..., y_{m_i}^i)\right] [b_1^1, ..., b_{m_1}^1, ..., b_1^n, ..., b_{m_n}^n]$$

[1] Se está suponiendo que el conjunto de formulas del lenguaje es también un conjunto.

sin perdida de generalidad podemos pensar que $b_1^1 < ... < b_m^1 < ... < b_1^n < ... < b_m^n$ de lo contrario podemos volver a etiquetar las variables. Como k preserva el orden y $b_1^1, ..., b_m^1, ..., b_1^n, ..., b_m^n$ son indiscernibles se cumple que

$$L \models \exists x_1, ..., \exists x_n \left[\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge \bigwedge_{i=i}^{n} x_i = t_i(y_1^i, ..., y_{m_i}^i) \right] \left[k(b_1^1), ..., k(b_{m_1}^1), ..., k(b_1^n), ..., k(b_{m_n}^n) \right]$$

si y sólo si (dado que $j(a_i) = t_i^L(k(y_1^i), ..., k(y_{m_i}^i))$

$$L \models \varphi(x_1, ..., x_n) \left[j(a_1), ..., j(a_n) \right]$$

por lo tanto, j es un encaje elemental. Además j es no trivial pues si $i \in I$ entonces $j(i) = k(i) > i$.

Teorema 3.2.2. (Kunen) Si existe $j : L \longrightarrow L$ un encaje elemental no trivial entonces $0^\sharp$ existe.

Sea $j : L \longrightarrow L$ un encaje elemental no trivial. Como el encaje es no trivial existe $\nu = crit(j)$, por lo que podemos considerar $U = \{X \in L : X \subseteq \nu \wedge \nu \in j(X)\}$ que por la proposición 3.1.1. es un $L-$ultrafiltro $\nu-$completo sobre ν. De ahí que podamos construir $Ult_U L$ una $L-$ultrapotencia que por la afirmación 3.1.2. existe un encaje elemental $k : Ult_U L \longrightarrow L$ tal que para toda $m \in L$ se cumple que $j(m) = k(j_U(m))$ donde $j_U : L \longrightarrow Ult_U L$ es el encaje elemental canónico. Por la afirmación 3.1.3. podemos aplicar el colapso de Motowski por lo que existe $M \subseteq L$ tal que $M = \pi\left[Ult_U L\right]$. De ahí que $\pi \circ j_U : L \longrightarrow L$ en un encaje y análogamente a la afirmación 2.2.5. se tiene que $\nu = crit(\pi \circ j_U)$; por lo que $\pi \circ j_U$ es un encaje elemental no trivial. Así sin perdida de generalidad podemos suponer que $\pi \circ j_U = j$.

$I)$ Afirmamos que si κ es un cardinal límite en L tal que $cf(\kappa) > \nu$ entonces $j(\kappa) = \kappa$.

Notemos que $j(\kappa) = lim_{\alpha \longrightarrow \kappa} j(\alpha)$, por una parte si $\alpha < \kappa$ dado que j es un encaje elemental se tiene que $j(\alpha) < j(\kappa)$; por lo que $lim_{\alpha \longrightarrow \kappa} j(\alpha) \leq j(\kappa)$. Por otra parte si $\xi < j(\kappa)$, como π es sobreyectiva existe $f : \nu \longrightarrow \kappa$ (con $f \in L$) tal que $\pi([f]) = \xi < j(\kappa) = \pi([f_\kappa])$. Dado que π preserva el orden se tiene que $[f] \in^* [f_\kappa]$ que por definición implica que $\{i \in \nu : f(i) < \kappa\} \in U$. Como $cf(\kappa) > \nu$ entonces para toda función $f : \nu \longrightarrow \kappa$ (con $f \in L$) está acotada por un ordinal $\alpha < \kappa$, entonces $\{i \in \nu : f(i) < f_\alpha(i)\} \in U$ por lo que $[f] \in^* [f_\alpha]$ donde f_α es la función constante α. Ya que π es un isomorfismo se sigue que para toda función $f : \nu \longrightarrow \kappa$ se tiene que $\xi = \pi([f]) \in^* \pi([f_\alpha]) = j(\alpha)$. Por consiguiente, $j(\kappa) \leq lim_{\alpha \longrightarrow \kappa} j(\alpha)$; de ambas desigualdades se concluye que $j(\kappa) = lim_{\alpha \longrightarrow \kappa} j(\alpha)$. Ahora notemos que por construcción del $L-$ultraproducto se tiene que para todo $\alpha < \kappa$ se cumple que$|j(\alpha)| \leq \left|(\alpha^\nu)^L\right|$ (pues los elementos de $j(\alpha)$ son aplicaciones de π a clases de equivalencias que al menos tiene una función de ν a α en L). Como κ es un cardinal límite existe un cardinal $\lambda \in L$ tal que $|\alpha|, \nu < \lambda < \kappa$, lo que implica que $|j(\alpha)| \leq \left|(\alpha^\nu)^L\right| \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+ < \kappa$[2]. Por lo tanto, $j(\kappa) = lim_{\alpha \longrightarrow \kappa} j(\alpha) \leq \kappa$ y por la afirmación 2.2.2. se tiene que $\kappa \leq j(\kappa)$. De lo cual se concluye que $j(\kappa) = \kappa$.

Por recursión definiremos una familia de clases propias de la siguiente manera. Sea $\Gamma_0 = OR \cap Im(j)$. Supongamos que ya hemos definido las clases Γ_β para toda $\beta < \alpha$ si α es un ordinal límite definimos $\Gamma_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta$. Si $\alpha = \beta + 1$ consideremos $H^L(\Gamma_\beta)$, la cerradura bajo funciones de Skolem de Γ_β, que por la proposición 1.3.3. se tiene que $H^L(\Gamma_\beta) \preccurlyeq L$. Dado que Γ_β es una clase propia se tiene que $H^L(\Gamma_\beta)$ es un clase propia, y por el teorema de condensación se tiene que $H^L(\Gamma_\beta) \cong_\pi L$ bajo el colapso de Motowski. Así existe $j_\alpha : L \longrightarrow L$ un encaje elemental ($j_\alpha = \pi^{-1}$),[3] definimos $\Gamma_\alpha = \{\xi \in OR : j_\alpha(\xi) = \xi\}$. Para cada $\gamma \in OR$ definimos $\nu_\gamma = j_\gamma(\nu)$.

$II)$ Afirmamos que para toda $\alpha \in OR$ y $\delta > cf(\nu)$, Γ_α es $\delta-$cerrado; es decir, si $\langle \kappa_\xi : \xi < \delta \rangle$ es una secuencia creciente en Γ_α entonces $lim_{\xi \longrightarrow \delta} \kappa_\xi \in \Gamma_\alpha$.

Procederemos por inducción sobre α. El caso $\alpha = 0$ se cumple por la afirmación $I)$. Supongamos que para toda $\beta < \alpha$ y $\delta > cf(\nu)$ se cumple que Γ_β es $\delta-$cerrado. Si $\alpha = \beta + 1$ y $\langle \kappa_\xi : \xi < \delta \rangle$ es una secuencia creciente en Γ_α

[2]Notemos que la igualdad $2^\lambda = \lambda^+$ se da porque L es modelo de la hipótesis generalizada del continuo

[3]A lo largo de esta prueba vamos a aplicar muchas veces el colapso de Motowski sobre distintos conjuntos. Sin embargo, vamos a usar la misma notación π para no saturar la notación aunque se espera que dependiendo del contexto se entienda a que conjuntos se les está aplicando el colapso.

entonces, por construcción, para toda $\xi < \delta$ se tiene que $j_\alpha(\kappa_\xi) = \kappa_\xi$; por consiguiente,

$$j(lim_{\xi \longrightarrow \delta}\kappa_\xi) = lim_{\xi \longrightarrow \delta} j(\kappa_\xi) = lim_{\xi \longrightarrow \delta}\kappa_\xi$$

lo que implica que $lim_{\xi \longrightarrow \delta}\kappa_\xi \in \Gamma_\alpha$. Si α es límite y $\langle \kappa_\xi : \xi < \delta \rangle$ es una secuencia creciente en $\Gamma_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta$ entonces, $\langle \kappa_\xi : \xi < \delta \rangle \in \Gamma_\beta$. Por hipótesis de inducción se tiene que para cada $\beta < \alpha$ se tiene que $lim_{\xi \longrightarrow \delta}\kappa_\xi \in \Gamma_\beta$, por consiguiente $lim_{\xi \longrightarrow \delta}\kappa_\xi \in \bigcap_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha$. Así por inducción se tiene que Γ_α es $\delta-$cerrado para todo $\delta > cf(\nu)$.

$III)$ Afirmamos que $\nu \subseteq \Gamma_\alpha$ para toda α.

Como $\nu = crt(j)$ entonces por definición se sigue que para toda $\xi < \upsilon$, $j(\xi) = \xi$; por consiguiente $\nu \subseteq OR \cap Img(j) = \Gamma_0$. Supongamos por hipótesis de inducción que $\nu \subseteq \Gamma_\beta$ para toda $\beta < \alpha$. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces por hipótesis de inducción se tiene que $\nu \subseteq \Gamma_\beta \subseteq H^L(\Gamma_\beta)$, por inducción, se tiene que para toda $\xi < \nu$, $\pi(\xi) = \xi$ ya que $\pi(\xi) = \{\pi(\chi) : \chi < \xi\} =_{H.I.} \{\chi : \chi < \xi\} = \xi$; que es equivalente a que para toda $\xi < \nu$, $j_\alpha(\xi) = \pi^{-1}(\xi) = \xi$. De ahí que $\nu \subseteq \Gamma_\alpha = \{\xi \in OR : j_\alpha(\xi) = \xi\}$. Si α es un ordinal límite, entonces por hipótesis de inducción se tiene que $\nu \subseteq \Gamma_\beta$ para toda $\beta < \alpha$; esto implica que $\nu \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha$. Así, por inducción obtenemos el resultado deseado.

$IV)$ Afirmamos que $\Gamma_\gamma = OR \cap H^L(\Gamma_\gamma)$.

Por una parte como Γ_γ es una clase de ordinales y $\Gamma_\gamma \subseteq H^L(\Gamma_\gamma)$ se tiene que $\Gamma_\gamma \subseteq OR \cap H^L(\Gamma_\gamma)$. Para la contención contraria procederemos por inducción sobre α.

Si $\gamma = 0$ y $\xi \in OR \cap H^L(\Gamma_\gamma)$ entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma_\gamma = OR \cap Img(j)$ tal que $\xi = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (pues $\xi \in H^L(\Gamma_\gamma)$); como $\alpha_1, ..., \alpha_n \in Img(j)$ entonces existe $\beta_1, ..., \beta_n \in OR$ tal que $j(\beta_1) = \alpha_1$,..., $j(\beta_n) = \alpha_n$. Esto implica que $\xi = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n) = t^L(j(\beta_1), ..., j(\beta_n)) = j(t^L(\beta_1, ..., \beta_n) \in Img(j) \cap OR = \Gamma_0$; por lo que $OR \cap H^L(\Gamma_0) \subseteq \Gamma_0$.

Si γ es un ordinal sucesor y $\xi \in OR \cap H^L(\Gamma_\gamma)$ entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma_\gamma$ tal que $\xi = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (pues $\xi \in H^L(\Gamma_\gamma)$); por consiguiente $j_\gamma(\xi) = j_\gamma(t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n))$, y como j_γ es un encaje elemental se tiene que $j_\gamma(t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n)) = t^L(j_\gamma(\alpha_1), ..., j_\gamma(\alpha_n))$. Ya que $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma_\gamma$ se tiene que $j_\gamma(\alpha_1) = \alpha_1$,..., $j_\gamma(\alpha_n) = \alpha_n$ lo que implica que $t^L(j_\gamma(\alpha_1), ..., j_\gamma(\alpha_n)) = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \xi$. Por lo tanto, $j_\gamma(\xi) = \xi$; lo que implica que $\xi \in \Gamma_\gamma$, así $OR \cap H^L(\Gamma_\gamma) \subseteq \Gamma_\gamma$.

Sea γ un ordinal límite y supongamos por hipótesis de inducción que $OR \cap H^L(\Gamma_\beta) \subseteq \Gamma_\beta$. Sea $\xi \in OR \cap H^L(\Gamma_\gamma)$ entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma_\gamma = \bigcap_{\beta<\gamma} \Gamma_\beta$ tal que $\xi = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Así para toda $\beta < \gamma$ se tiene que $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma_\beta$ y $\xi = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, entonces $\xi \in OR \cap H^L(\Gamma_\beta)$ para toda $\beta < \gamma$. Por hipótesis de inducción obtenemos que $\xi \in OR \cap H^L(\Gamma_\beta) \subseteq \Gamma_\beta$ para toda $\beta < \gamma$, lo que implica que $\xi \in \bigcap_{\beta<\gamma} \Gamma_\beta = \Gamma_\gamma$. Por lo tanto $OR \cap H^L(\Gamma_\gamma) \subseteq \Gamma_\gamma$.

$V)$ Afirmamos que si $\alpha < \beta$ entonces $\Gamma_\alpha \supseteq \Gamma_\beta$.

Basta mostrar que $\Gamma_\alpha \supseteq \Gamma_{\alpha+1}$. Por la afirmación $IV)$ sabemos que $\Gamma_\alpha = OR \cap H^L(\Gamma_\alpha)$ lo que implica que

$$\Gamma_{\alpha+1} = \{\xi \in OR : j_\alpha(\xi) = \xi\} = \{\xi \in OR \cap Img(j_\alpha) : j_\alpha(\xi) = \xi\} = \left\{\xi \in OR \cap H^L(\Gamma_\alpha) : j_\alpha(\xi) = \xi\right\} \subseteq OR \cap H^L(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$$

$VI)$ Afirmamos que $\nu_\gamma = inf(\Gamma_\gamma \setminus \nu \cup \{\nu\})$ en $H^L(\Gamma_\gamma)$.

Como j_γ es un encaje y ν es un ordinal se cumple que $\nu \leq j_\gamma(\nu) = \nu_\gamma$ lo que implica que $\nu_\gamma \in OR \setminus \nu$. Por otra parte, si existiera un ordinal $\beta \in H^L(\Gamma_\gamma)$ tal que $\beta < \nu_\gamma$ entonces (dado que π es un isomorfismo) $\pi(\beta) < \pi(\nu_\gamma) = \pi(\pi^{-1}(\nu)) = \nu$. Por $III)$ $\pi(\beta) \in \nu \subseteq \Gamma_\gamma$ lo que implica que (por definición de Γ_γ) $j_\gamma(\pi(\beta)) = \pi(\beta)$ pero por definición de j_γ se tiene que $j_\gamma(\pi(\beta)) = \pi^{-1}(\pi(\beta)) = \beta$; por consiguiente, $\beta = \pi(\beta) < \nu$. Por lo tanto, $\nu_\gamma = inf(\Gamma_\gamma \setminus \nu)$ en $H^L(\Gamma_\gamma)$. Además $\nu_\gamma > \nu$ basta observar que como $\nu = crt(j)$ entonces $\nu \notin OR \cap Img(j) = \Gamma_0$ y dado que para todo ordinal α se tiene que $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_0$ se tiene que $\nu \notin \Gamma_\alpha$ para todo ordinal α, de ahí que $\nu_\gamma \neq \nu$. De lo anterior se sigue que $\nu_\gamma > \nu$, y en consecuencia $\nu_\gamma = inf(\Gamma_\gamma \setminus \nu \cup \{\nu\})$ en $H^L(\Gamma_\gamma)$.

$VII)$ Afirmamos que si $\alpha < \beta$ entonces $j_\alpha(\nu_\beta) = \nu_\beta$.

Como $\nu_\beta \in OR \cap H^L(\Gamma_\beta) = \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha+1}$ (por la afirmación V y IV) entonces, de la definición de $\Gamma_{\alpha+1}$ se tiene que $j_\alpha(\nu_\beta) = \nu_\beta$.

$VIII$) Afirmamos que si $\alpha < \beta$ entonces $\nu_\alpha < \nu_\beta$.

Por V, $\Gamma_\beta \subseteq \Gamma_\alpha$ lo que implica que $\nu_\beta \in \Gamma_\alpha$. Por la afirmación VI se tiene que $\nu_\alpha = inf(\Gamma_\alpha \backslash \nu)$ en $H^L(\Gamma_\alpha)$, lo que implica que $\nu_\alpha \leq \nu_\beta$. Igualmente por la afirmación VI se tiene que $\nu < \nu_\alpha$ lo que implica que $\nu_\alpha = j_\alpha(\nu) < j_\alpha(\nu_\alpha)$, pero como $\Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha+1}$ se tiene que $j_\alpha(\nu_\beta) = \nu_\beta$ de ahí que $\nu_\beta \neq \nu_\alpha$. Por lo tanto $\nu_\alpha < \nu_\beta$.

IX) Afirmamos que si $\alpha < \beta$ existe un encaje elemental $j_{\alpha,\beta} : L \longrightarrow L$ tal que $j_{\alpha,\beta}$ es la identidad sobre $\nu_\alpha \cup \Gamma_{\beta+1}$ (lo que implica que para toda $\xi < \alpha$ o $\xi > \beta$ se cumple que $j_{\alpha,\beta}(\nu_\xi) = \nu_\xi$) y $j_{\alpha,\beta}(\nu_\alpha) = \nu_\beta$.

Si $\alpha < \beta$, consideremos $H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta)$ que es una estructura elementalmente equivalente a L. Como $\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta$ es una clase propia por el teorema de condensación se tiene que $H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta) \cong L$ bajo el colapso de Motowski. Así existe un encaje elemental $j_{\alpha,\beta} : L \longrightarrow L$ donde $j_{\alpha,\beta} = \pi^{-1}$. Como $\nu_\alpha \subseteq H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta)$ entonces para toda $\xi < \nu_\alpha$ se tiene que $\pi(\xi) = \xi$ (por inducción se tiene que $\pi(\xi) = \{\pi(\chi) : \chi < \xi\} =_{H.I.} \{\chi : \chi < \xi\} = \xi$), lo que implica que $j_{\alpha,\beta}(\xi) = \pi^{-1}(\xi) = \xi$ para toda $\xi < \nu_\alpha$. Así mismo como $\Gamma_\beta \subseteq H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta)$ y por definición $\Gamma_{\beta+1} = \{\xi \in OR : j_\beta(\xi) = \xi\}$ (donde j_β es la imagen inversa de la proyección de $H^L(\Gamma_\beta)$ a L) se tiene que $j_{\alpha,\beta}(\xi) = \pi^{-1}(\xi) = \xi$ para toda $\xi \in \Gamma_{\beta+1}$.

Ahora mostraremos que $j_{\alpha,\beta}(\nu_\alpha) = \nu_\beta$. Del mismo modo que en la afirmación VI se tiene que $j_{\alpha,\beta}(\nu_\alpha)$ es el ordinal más pequeño mayor igual que ν_α en $H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta)$, así basta mostrar que no existe un ordinal $\delta \in H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta)$ tal que $\nu_\alpha \leq \delta < \nu_\beta$ para concluir que $j_{\alpha,\beta}(\nu_\alpha) = \nu_\beta$. Por reducción al absurdo supongamos que existe $\delta \in H^L(\nu_\alpha \cup \Gamma_\beta)$ tal que $\nu_\alpha \leq \delta < \nu_\beta$, entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \nu_\alpha$, $\beta_1, ..., \beta_n \in \Gamma_\beta$ y t un termino de Skolem tal que $\delta = t^L(\alpha_1, ..., \alpha_n; \beta_1, ..., \beta_n)$. Por lo tanto,

$$L \models \exists x_1, ..., \exists x_n (x \leq t(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) < y) \, [\nu_\alpha, \beta_1, ..., \beta_n, \nu_\beta]$$

como $j_\alpha(\nu) = \nu_\alpha$, $j_\alpha(\beta_1) = \beta_1, ..., j_\alpha(\beta_n) = \beta_n$, $j_\alpha(\nu_\beta) = \beta_n$ (pues $\beta_1, ..., \beta_n, \nu_\beta \in \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha+1}$) y ya que j_α es un encaje elemental se tiene que

$$L \models \exists x_1, ..., \exists x_n < x (x \leq t(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) < y) \, [\nu, \beta_1, ..., \beta_n, \nu_\beta]$$

por consiguiente existen $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \nu$ tal que $\nu \leq t(\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_n) < \nu_\beta$. Pero como $\nu \subseteq \Gamma_\beta$ y $\beta_1, ..., \beta_n, \nu_\beta \in \Gamma_\beta$ se tiene que $t(\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_n)$ es un ordinal en $H^L(\Gamma_\beta)$ lo que implica que ν_β no es el mínimo ordinal en $H^L(\Gamma_\beta)$ que es mayor que ν, lo cual contradice la afirmación VI. Así concluimos que $j_{\alpha,\beta}(\nu_\alpha) = \nu_\beta$.

X) La clase $\{\nu_\alpha : \alpha \in OR\}$ es una clase de indiscernibles para L.

Sea φ una fórmula, $\alpha_1 < ... < \alpha_n$ y $\beta_1 < ... < \beta_n$ dos secuencias de ordinales de $\{\nu_\alpha : \alpha \in OR\}$. Consideremos δ_n un ordinal tal que $\alpha_n, \beta_n < \delta_n$, por la afirmación IX existen encajes elementales j_{α_n,δ_n} y j_{β_n,δ_n} tal que j_{α_n,δ_n} deja fijo a los $\alpha's$, j_{β_n,δ_n} deja fijo a $\beta's$, $j_{\alpha_n,\delta_n}(\alpha_n) = \delta_n$ y $j_{\beta_n,\delta_n}(\beta_n) = \delta_n$. Por consiguiente, si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula del lenguaje se tiene que $L \models \varphi \, [\alpha_1, ..., \alpha_n]$ si y sólo si $L \models \varphi \, [\alpha_1, ..., \delta_n]$ (por ser j_{α_n,δ_n} un encaje elemental que deja fijo a los $\alpha's$) si y sólo si $L \models \varphi \, [\beta_1, ..., \beta_n]$ (por ser j_{β_n,δ_n} un encaje elemental que deja fijo a $\beta's$). Por lo tanto, $L \models \varphi \, [\alpha_1, ..., \alpha_n]$ si y sólo si $L \models \varphi \, [\beta_1, ..., \beta_n]$; por lo cual $\{\nu_\alpha : \alpha \in OR\}$ es una clase de indiscernibles para L.

Bibliografía

[1] Dickmann, M. A., *Large Infinitary Languages: Model Theory,* North Holland, Amsterdam, 1975.

[2] Jech, Thomas, *Set Theory*, tercera edición, Springer, Alemania, 2003.

[3] J. L. Bell & A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An intriduction,* tercera edición, North Holland & American Elsevier, New York, 1974.

[4] Kenneth Kunen, *Set Theory*, College Publications, Londres, 2013.

[5] Keith J.Devlin, *Constructibility*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] William J. Mitchell, "Beginning Inner Model Theory", ed. Matthew Foreman y Akihiro Kanamori, *Handbook of Set Theory*, Springer, New York, 2010.