



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO SABR PARA LA
ESTIMACIÓN DE LA
VOLATILIDAD EN UNA
OPCIÓN DE TIE28

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

ACTUARIA

P R E S E N T A :

LIZBETH CORTÉS GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS

ACT. JOSÉ ROBERTO DE JESÚS GONZÁLEZ



Ciudad Universitaria, CDMX, 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Cortés

González

Lizbeth

5563684081

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

306122169

2. Datos del tutor

Act

De Jesús

González

José Roberto

3. Datos del sinodal 1

M en C

Del Castillo

Spíndola

Jorge Humberto

4. Datos del sinodal 2

M en C

Román

Aguilar

Agustín

5. Datos del sinodal 3

Act

Trigueros

Cortés

José Roberto

6. Datos del sinodal 4

Act

Morales

Rosas

Eduardo Antonio

7. Datos del trabajo escrito

Modelo SABR para la estimación de la volatilidad en una opción de TIIIE28

68 p.

2017

A mis padres y hermana, gracias por su apoyo incondicional.

Recuerda que estás en este plano a ser la mejor versión de ti misma.

Elisa Botti

Contenido

1. Introducción	2
2. Conceptos y Fundamentos	4
2.1. Procesos estocásticos	4
2.2. Tasas de interés y derivados financieros	7
2.3. Cap-Floors y sus características	14
2.4. Medida de riesgo neutral	17
2.5. Valuación de Cap-Floors	19
2.5.1. Black 76	19
2.6. Griegas	22
3. Volatilidad	27
3.1. Entendiendo la superficie de volatilidad	27
3.2. Volatilidad histórica	31
3.3. Volatilidad implícita	32
3.4. Volatilidad local	33
3.5. Volatilidad estocástica	35
3.6. Modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV)	36
4. Modelo SABR para la estimación de la volatilidad	38
4.1. Planteamiento	38
4.2. Dinámica del modelo	39
4.2.1. Fórmula de la volatilidad	42
4.2.2. Parametrización y calibración	43
4.3. Griegas	44
5. Modelo SABR para una opción de TIEE28	45
5.1. Información de mercado	45
5.2. Aplicación del modelo SABR	47
5.2.1. Bootstrapping en tasas par swap IRS de TIEE28	48
5.2.2. Determinación de K-strike y precio de mercado	49
5.2.3. Cálculo de volatilidades forward bajo SABR	50
5.2.4. Calibración de parámetros	50
5.3. Skew de volatilidad	52

5.4. Cálculo del precio y sensibilidades	53
6. Conclusiones	56
A. Anexo: Implementación Bootstrapping en Visual Basic	57
B. Anexo: Implementación Black 76 en Visual Basic	59
C. Anexo: Implementación Modelo SABR en Visual Basic	61
Bibliografía	63

1. Introducción

A lo largo del tiempo los derivados financieros de tasas de interés han sido objeto de estudio de investigadores, científicos y figuras relevantes del medio financiero debido a su complejidad y lo que la tasa de interés representa en la economía de un país, en los mercados financieros y en las finanzas propias de cada persona. Dado que la tasa de interés es un factor determinante para toma de decisiones y es uno de los principales indicadores financieros es imprescindible una adecuada modelación de esta variable para una correcta valuación de los derivados financieros cuyo subyacente es una tasa de interés. La volatilidad de la tasa de interés es una de las variables más importantes en la determinación del precio de las opciones sobre tasas de interés. El objetivo de este estudio es generar una superficie de volatilidad “suave”, a partir del modelo estocástico conocido como “SABR” (Stochastic alpha-beta-rho model, $S\alpha\beta\rho$).

En el primer capítulo, se plasman los principales conceptos y fundamentos de los productos financieros de tasas de interés tales como la cuenta bancaria, la tasa corta, la tasa forward y la tasa spot. Brevemente se presentan definiciones dentro del contexto de procesos estocásticos como factor de descuento, principio de no-arbitraje, martingalas, medida de riesgo neutral, etc., haciendo hincapié en las características del Proceso de Wiener, el cual es el proceso estocástico que sirve para modelar el comportamiento de una variable aleatoria. Este preámbulo de conceptos nos ayudará a sentar las bases para un mejor entendimiento del modelo de volatilidad de opciones sobre tasas de interés. También se señalan los factores que intervienen en su valuación, el modelo de valuación comúnmente utilizado en los mercados financieros: Black 76 y algunas otras características importantes en este tipo de derivados.

Aunque existen conceptualmente diferentes tipos de volatilidades, en el presente estudio se abarcarán: volatilidad histórica, volatilidad implícita, volatilidad local y volatilidad estocástica. En el segundo capítulo abordamos ampliamente la variable de volatilidad, la cual es por mucho el componente más importante en la valuación de las opciones. Para mostrar la importancia que ha adquirido esta variable empezaremos con un recuento de la crisis vivida en el año de 1997 donde se evidenció que considerar una volatilidad constante no reflejaba el precio de mercado y dieron la pauta para comenzar a estimar una superficie de volatilidad.

En el mercado financiero se observa que el nivel de volatilidad del activo subyacente reflejado en las opciones es dependiente del nivel del precio de ejercicio pactado¹ y del plazo, en lugar de una volatilidad constante, el cual es un supuesto importante en el modelo de Black and Scholes. Esta volatilidad constante no refleja los precios de mercado realmente observados, a consecuencia de lo anterior han surgido modelos como los de volatilidad local y volatilidad estocástica que han contribuido a incorporar los diferentes niveles de riesgo correspondientes a diferentes strikes y vencimientos. En la categoría de modelos de volatilidad estocástica podemos encontrar nuestro modelo de estudio: el modelo estocástico alpha-beta-rho (SABR). En el tercer capítulo, se realiza el análisis de este modelo abarcando su origen, supuestos, parámetros, alcance, etc.; se formaliza con la aplicación del modelo a una opción de la tasa de interés representativa en el mercado mexicano: la TIE28² uniendo la brecha entre la teoría plasmada y un caso práctico.

Por último, se muestra los resultados y procedimientos necesarios para llegar a la superficie de volatilidad, se exhibe el sesgo o preferencia entre los distintos precios de ejercicio de una opción de TIE28 (comúnmente conocido como “skew” o “smile” de volatilidad), el cálculo del precio utilizando la volatilidad generada bajo el modelo SABR y la congruencia de los resultados con los datos realmente observados en el mercado.

En el apartado de conclusiones se discute el desempeño del modelo, contrastando las ventajas y desventajas encontradas a lo largo de este estudio, así como algunas posibles mejoras.

¹Conocido como strike

²Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio a 28 días

2. Conceptos y Fundamentos

Para modelar adecuadamente la dinámica de las variables financieras en los instrumentos derivados se requiere, sin duda alguna, de la teoría de procesos estocásticos. Con el objetivo de presentar en forma accesible e intuitiva el cálculo estocástico, se revisan conceptos de probabilidad y procesos estocásticos que se emplean en las finanzas modernas en tiempo continuo.

Brevemente se presentan definiciones de la cuenta bancaria, la tasa corta, la tasa forward y la tasa spot. Se profundiza en las características del Proceso de Wiener y finalmente se establecen diversas características de las opciones sobre tasas de interés y su valuación.

Esta sección está basada en los primeros capítulos de Brigo y Mercurio (2006) [3], para mayor referencia y detalle de los resultados presentados.

2.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de una familia o colección de variables aleatorias. La aleatoriedad de las variables se captura a través de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , es decir, Ω un espacio muestral o conjunto de posibles resultados y \mathcal{F} una σ – álgebra o conjunto de eventos de ese espacio muestral. Entenderemos como σ – álgebra aquella que satisface las siguientes condiciones:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- ii) Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- iii) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ es la familia de σ – álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \forall t \in T$. La filtración es creciente en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ cuando $s, t \in T$ y $s \leq t$.

Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ puede ser vista como la estructura de información disponible al tiempo t . Y el hecho de que la filtración es creciente significa que cada vez hay más información conocida conforme el tiempo transcurre y se incluye junto con la información pasada.

Entenderemos como un espacio parametral cualquier conjunto T finito o infinito, que denotará los tiempos. Si $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ en este caso se dice que el proceso es a tiempo discreto; por el contrario si se considera $T = [0, \infty)$ se dice entonces que el proceso es a tiempo continuo.[13]

Las variables aleatorias tomarán valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

En este contexto, un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ sobre una filtración, con T el espacio parametral y cada X_t toma valores sobre un espacio de estados. Las variables aleatorias X_t están definidas sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y toman valores en otro espacio medible $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, donde $B(\mathbb{R})$ es la σ – álgebra de Borel sobre \mathbb{R} . La σ – álgebra de Borel es la mínima σ – álgebra con intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$, es decir, $B(\mathbb{R})$ es la intersección de todas las σ – álgebras que contienen a los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$. [12]

De manera formal, definamos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, es decir, Ω es un espacio muestral, \mathcal{F} es una σ – álgebra sobre Ω y $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad. Sea T un intervalo de tiempo, específicamente $T = [0, \infty)$. Entonces, un proceso estocástico será el mapeo $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in T$ la función:

$$X_t : \omega \rightarrow X(\omega, t) \quad \equiv \quad X_t(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Satisface:

$$X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Diremos que X_t es una función \mathcal{F} – medible.

Si X_t es un proceso estocástico, entonces para cada $\omega \in \Omega$ la función:

$$t \rightarrow X(\omega, t) : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{es una trayectoria del proceso estocástico}$$

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, X_t es \mathcal{F}_t – medible, es decir, si para cada $t \geq 0$:

$$\{X_t \leq x\} \quad \equiv \quad \{\omega | X_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que el valor que tome X_t en t depende solamente de la información disponible al tiempo t .

En términos de mercado, una interpretación de Ω sería los posibles precios de la acción de WALMEX, la filtración fungiría como la historia de precios observada en el pasado para cada día del mes en curso (es decir, sobre un espacio parametral discreto), cada variable aleatoria definida como el promedio histórico del valor de la acción y el espacio de estados S cualquier subconjunto de \mathbb{R} . Por lo tanto, el proceso estocástico Y será cada trayectoria o cálculo del promedio del valor de la acción en cada día del mes.

A continuación se presenta uno de los procesos estocásticos más importantes para los derivados financieros que utilizaremos en este trabajo: *Proceso de Wiener o Movimiento Browniano y el caso particular de Movimiento Browniano Geométrico*.

Un Proceso de *Wiener* o Movimiento Browniano es un proceso estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ respecto a una medida de probabilidad \mathbb{P} y filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si cumple las siguientes condiciones:

- i) $W_0 = 0$ con probabilidad uno, es decir, $\mathbb{P}[\omega \in \Omega | W_0(\omega) = 0] = 1$;
- ii) W_t es continuo en t ;
- iii) El incremento $(W_t - W_s)$ se distribuye Normal $N(0, t - s)$ bajo la medida \mathbb{P} ;
- iv) W_t es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, donde la filtración es aquella generada por el proceso mismo;
- v) Si $0 \leq s < t$, el incremento $(W_t - W_s)$ es independiente de \mathcal{F}_s ;
- vi) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos $(W_{t_1} - W_{t_0})$, $(W_{t_2} - W_{t_1})$, \dots , $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ son estocásticamente independientes y también se distribuyen normalmente bajo \mathbb{P} .

Un Movimiento Browniano Geométrico está dado por:

$$X(t) = \exp\left(\mu t + \sigma W(t)\right)$$

O bien,

$$\ln(X(t)) = \mu t + \sigma W(t) \tag{2-1}$$

2.2. Tasas de interés y derivados financieros

Una tasa de interés refleja el pago sobre un préstamo o una inversión, se traduce como el costo del crédito. En México, la tasa de referencia líder es la TIEE28¹, la cual representa el costo de las operaciones de crédito entre bancos y es calculada diariamente por el Banco de México con base en cotizaciones presentadas por las propias instituciones bancarias, siendo 28 días el plazo de referencia. La tasa de referencia en el mercado financiero a nivel global es la USD LIBOR² 3M, que es la tasa interbancaria en dólares a tres meses (existen tasas LIBOR para varias monedas).

En este contexto de tasas de interés, el costo del crédito también se refleja en que un peso hoy no vale lo mismo el día de mañana debido al valor del dinero en el tiempo. Definiremos la cuenta bancaria $B(t)$ (“money-market account”) como el valor de una unidad monetaria en el tiempo $t \geq 0$ que fue invertida a la tasa libre de riesgo r_t vigente en el mercado, esta tasa es libre de riesgo en el sentido de que no existe riesgo de incumplimiento por parte de la contraparte. El comportamiento de la cuenta bancaria se describe a través de la siguiente ecuación estocástica:

$$dB(t) = r_t B(t) dt, \quad B(0) = 1$$

Donde r_t es \mathcal{F}_t -medible y es una función positiva con respecto a t .

Dividiendo entre $B(t)$ e integrando ambos lados de la ecuación de 0 a t :

$$\ln(B(t)) - \ln(B(0)) = \int_0^t (r_s ds), \quad \text{por lo tanto}$$

$$B(t) = \exp \left(\int_0^t (r_s ds) \right)$$

La cuenta bancaria $B(t)$ es la simulación del comportamiento o trayectoria de la variable aleatoria tasa libre de riesgo a través del tiempo; el dinero “crece”, genera rendimiento en términos de la tasa r_t en cada tiempo t .

Esta tasa libre de riesgo r_t es conocida como la tasa spot, tasa cupón cero, tasa corta (short rate) o también conocida como la tasa spot instantánea. Para fines de este trabajo se mencionarán indistintamente estos conceptos.

¹Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio a 28 días

²London InterBank Offered Rate

En términos de la cuenta bancaria se define el factor de descuento estocástico $D(t, T)$ con $0 \leq t \leq T$, el cual representa la cantidad de dinero al tiempo t equivalente a una unidad pagada al tiempo T . Consideremos r y B determinísticos al tiempo 0, si depositamos A unidades de dinero en la cuenta bancaria al tiempo 0, y queremos al tiempo T exactamente una unidad monetaria, se tiene:

$$AB(T) = 1, \quad \text{o bien}$$

$$A = \frac{1}{B(T)}$$

Aún más, si queremos saber el valor al tiempo t :

$$AB(t) = \frac{B(t)}{B(T)}$$

Es decir, el valor de una unidad pagadera en T vista al tiempo t es:

$$\frac{B(t)}{B(T)}$$

De forma análoga al caso determinístico entonces se define el factor de descuento estocástico $D(t, T)$ como:

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left(- \int_t^T (r_s ds) \right)$$

Aquí el factor de descuento D y la cuenta bancaria B no son determinísticos al tiempo t , son \mathcal{F}_T -medibles y dependen de la evolución futura de la tasa corta.

Sea $P(t, T)$ el contrato que garantiza a su poseedor el pago de una unidad monetaria al tiempo T sin considerar pagos intermedios; es decir, es el valor presente de una unidad monetaria pagadera al tiempo T .

En contraste con $D(t, T)$, el factor de descuento puro o mejor conocido como bono cupón cero $P(t, T)$ si es determinístico al tiempo t (aunque estocástico antes de t) y es un instrumento financiero operable en el mercado. De hecho, si r_s es determinística para toda s en $[t, T]$, entonces $D(t, T) = P(t, T)$.



Hemos definido t y T como dos instantes en el tiempo, para ser más precisos definamos $\tau(t, T) = T - t$ como la fracción de tiempo al vencimiento del instrumento financiero en años. La convención para calcular esa fracción de año (day-count convention) aplicable en el mercado mexicano es ACT/360, es decir la diferencia entre dos fechas es el número exacto de días naturales dividido entre 360.

De igual forma, hemos hablado de la tasa libre de riesgo r_t , pero es preciso definir que de acuerdo a su composición se tiene una: tasa spot continua, simple y compuesta.

Sea $R(t, T)$ la tasa spot con composición continua, el capital acumulado bajo tasas continuas es proporcional al tiempo:

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \exp\left(-R(t, T)\tau(t, T)\right) \\
 \exp\left(R(t, T)\tau(t, T)\right)P(t, T) &= 1 \\
 R(t, T) &= -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)} \tag{2-2}
 \end{aligned}$$

Sea $L(t, T)$ la tasa spot con composición simple, el capital acumulado bajo tasas simples se incrementa de manera lineal, la tasa de interés depende inversamente de la unidad de tiempo:

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)} \\
 P(t, T)\left(1 + L(t, T)\tau(t, T)\right) &= 1 \\
 L(t, T)\tau(t, T) &= \frac{1}{P(t, T)} - 1 \\
 L(t, T) &= \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \tag{2-3}
 \end{aligned}$$

Sea $Y(t, T)$ la tasa spot con composición compuesta k -veces en un año, el interés producido en cada unidad de tiempo se incorpora al capital. Se dice que los intereses bajo tasas compuestas se capitalizan generando a su vez intereses en el siguiente periodo:

$$P(t, T) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k}\right)^{k\tau(t, T)}}$$

$$P(t, T) \left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k} \right)^{kr(t, T)} = 1$$

$$Y(t, T) = \frac{k}{P(t, T)^{\frac{1}{kr(t, T)}}} - k \quad (2-4)$$

Dentro del mundo financiero, encontramos diversos instrumentos financieros, un derivado financiero es un contrato que basa su valor en el precio de otro activo al que denominaremos activo subyacente o solamente subyacente, se establece entre dos partes las cuales se comprometen a intercambiar flujos de efectivo establecidos en fechas futuras. En este intercambio se puede pactar un nivel fijo del subyacente conocido como “*strike*”, un monto determinado o un pago indexado a una variable o a otro activo, los cuales serán intercambiados en la fecha acordada.

El payoff de un derivado se define como el valor esperado del posible pago al vencimiento del contrato.

Los principales usos de los derivados financieros son:

- Para fines de cobertura (gestión de las exposiciones de riesgo)
- Para fines de especulación (oportunidades de arbitraje, formación de mercado) y
- Para fines de negociación (toma de posición deseada)

Los derivados financieros pueden ser operados en mercados estandarizados (en México, existe sólo un mercado estandarizado, llamado *MexDer*) donde la liquidación, es decir la entrega y pago de flujos de efectivo, se realiza a través de una Cámara de Compensación que elimina el riesgo de contraparte, entendido éste como el riesgo de que una contraparte pueda quebrar en la duración del contrato e incumplir en sus obligaciones. O bien, pueden ser operados en mercados no estandarizados o extrabursátiles (*Over the Counter, OTC*).

Nos centraremos en los derivados financieros cuyo activo subyacente corresponde a tasas de interés. Entre los derivados más representativos sobre tasas de interés podemos encontrar [6]:

1. Un FRA (*Forward Rate Agreement*) es un contrato OTC para recibir o entregar la tasa prevaleciente en el periodo $[T, S]$. En un FRA existen tres instantes en el tiempo: t -tiempo actual, T -fecha de ejercicio y S -fecha de liquidación, $t < T < S$. Al tiempo S , el tenedor de un FRA en una posición larga recibirá un flujo de efectivo a la tasa flotante $L(T, S)$ vigente en $[T, S]$ a cambio de pagar la tasa fija pactada (*strike* K) sobre un notional o valor nominal del contrato (N).

- El payoff de un FRA (posición larga) al tiempo S se define como:

$$N \tau(T, S) [L(T, S) - K] \quad (2-5)$$

Donde K y L tienen la misma convención de tasas.

- El precio de un FRA (posición larga) al tiempo t bajo el supuesto de ausencia de arbitraje ³ está dado por:

Aplicando la definición de $L(T, S)$ vista en (2-3) en la fórmula del payoff anterior:

$$\begin{aligned} N [\tau(T, S) L(T, S)] - N \tau(T, S) K \\ N \tau(T, S) \left[\frac{1 - P(T, S)}{P(T, S)} \right] - N \tau(T, S) K \\ N \tau(T, S) \left[\frac{1}{P(T, S)} - 1 - K \right] \end{aligned}$$

Valor presente al tiempo t :

$$N \tau(T, S) \left[\frac{P(t, S)}{P(T, S)} - P(t, S) - K P(t, S) \right]$$

Por lo tanto,

$$N \tau(T, S) [P(t, T) - P(t, S) - K P(t, S)] \quad (2-6)$$

Aquella tasa K que hace que el valor del FRA sea igual a 0 se le conoce como tasa forward.

La tasa forward para $[T, S]$ prevaleciente al tiempo t , está dada por:

- Tasa forward simple

$$F(t; T, S) = \left(\frac{1}{\tau(T, S)} \right) \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right)$$

- Tasa forward continua

$$F(t; T, S) = - \frac{\ln((P(t, S))) - \ln(P(t, T))}{\tau(T, S)}$$

³Ausencia de arbitraje en el sentido de que si dos portafolios valen lo mismo en una fecha futura entonces tienen que valer lo mismo hoy

Esta tasa que se encuentra implícita entre dos tasas spot con diferentes períodos de vencimiento $[t, T]$ y $[t, S]$ es intuitivamente una estimación de la tasa spot futura del periodo $[T, S]$ con base en los niveles observados al tiempo t de las tasas spot de mercado.

2. Un swap de tasas de interés IRS (*Interest Rate Swap*), es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en fechas futuras sobre las tasas de interés, monedas, nocionales y plazo acordados.

La estructura estándar (*plain vanilla*) es intercambiar una tasa fija por una tasa variable/flotante de mercado (por ejemplo LIBOR, TIEE, etc.). En realidad, un IRS es la generalización de los FRAs, ya que en cada fecha de intercambio de flujos del swap $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ se tiene un FRA definido.

- El payoff de un swap payer para cada tiempo i (es decir, posición larga donde paga la tasa fija) con un valor nominal del contrato igual a N se define como:

$$N \tau_i(T_{i-1}, T_i) \left[L(T_{i-1}, T_i) - K \right] \quad (2-7)$$

Para un swap receiver (posición corta donde recibes la tasa fija) el payoff es la posición contraria, es decir:

$$Payoff_{receiver} = -Payoff_{payer}$$

- El precio de un swap payer está dado por:

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i(T_{i-1}, T_i) \left[F(t; T_{i-1}, T_i) - K \right] \quad (2-8)$$

Aquella tasa K que hace que el precio del IRS sea cero al momento de pactarse, se le denomina *tasa par swap*:

$$K_{par\ swap} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i(T_{i-1}, T_i)}$$

$$i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta \quad \text{fechas de pago}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = n$$

3. Una opción es un contrato donde el tenedor del derivado realiza el pago de una prima a cambio de adquirir el derecho de compra o venta del subyacente a un determinado nivel pactado (*strike o precio de ejercicio*), cada intercambio de flujo se realiza sí y sólo sí el payoff de la opción es positivo en la fecha de ejercicio.

Una opción del tipo *call* le da al tenedor el derecho más no la obligación de compra del subyacente al nivel pactado. En cambio, una opción tipo *put* le da al tenedor el derecho más no la obligación de vender el subyacente al nivel pactado.

Se tienen opciones europeas donde sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento, opciones americanas donde se puede ejercer en cualquier momento antes del vencimiento, o bien, bermudas donde sólo se puede ejercer en ciertas fechas establecidas antes del vencimiento.

Un caplet o floorlet (*techo o piso*) son opciones del tipo *call* o *put* sobre tasa de interés. Un caplet posición larga te da el derecho a pagar una tasa fija y recibir una tasa flotante prevaleciente al tiempo respectivo.

Un cap (floor) son una serie de caplets (floorlets).

- El payoff al tiempo i de un caplet (posición larga) con un nominal del contrato igual a N se define como:

$$N \tau_i(T_{i-1}, T_i) \max(L(T_{i-1}, T_i) - K, 0) \quad (2-9)$$

$$Cap = \sum_{i=1}^n caplet_i \quad (2-10)$$

- El payoff al tiempo i de un floorlet (posición larga) se define como:

$$N \tau_i(T_{i-1}, T_i) \max(K - L(T_{i-1}, T_i), 0) \quad (2-11)$$

$$Floor = \sum_{i=1}^n floorlet_i \quad (2-12)$$

4. Un swaption es un contrato donde el tenedor adquiere el derecho de entrar en un IRS subyacente con costo cero al momento de su fecha de inicio a cambio del pago de la prima, en otras palabras es una opción cuyo subyacente es un swap forward starting con costo cero. En un payer swaption (*o call swaption*) se paga la tasa fija pactada, entonces se tiene el derecho de entrar al swap sí y sólo sí el payoff es positivo en la fecha de vencimiento del swaption.

- El payoff para la posición larga con un nominal del contrato igual a N se define como:

$$N \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta+1} P(T_\alpha, T_i) \tau_i(T_{i-1}, T_i) [K_{parswap}^i - K] \right)_+ \quad (2-13)$$

$$i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta \quad \text{fechas de pago}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = n$$

2.3. Cap-Floors y sus características

La tasa de interés es un factor de riesgo y un elemento clave en la economía, es por ello que es uno de los subyacentes más significativos en derivados financieros. En esta sección ahondaremos en las características de los derivados de tasas de interés: cap-floors.

Un cap-floor se puede pactar ATM (*at the money*), ITM (*in the money*) u OTM (*out the money*) dependiendo del nivel de K . Se dice que un cap-floor está ATM sí y sólo sí el strike pactado satisface:

$$K = K_{ATM} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i(T_{i-1}, T_i) P(t, T_i)}$$

$$i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta \quad \text{fechas de pago}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = n$$

En la Tabla (2-1) se resumen las relaciones ITM-ATM-OTM con respecto a K_{ATM} para el caso de un caplet o floorlet.

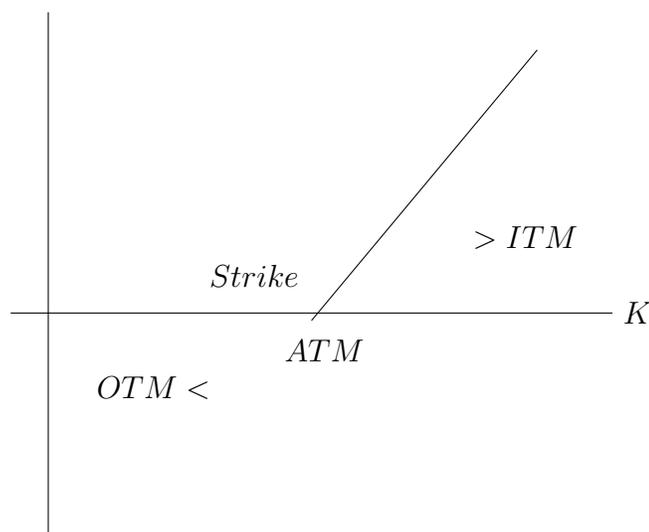
K_{ATM} Vs K	Floorlet	Caplet
$K_{ATM} < K$	<i>ITM</i>	<i>OTM</i>
$K_{ATM} = K$	<i>ATM</i>	<i>ATM</i>
$K_{ATM} > K$	<i>OTM</i>	<i>ITM</i>

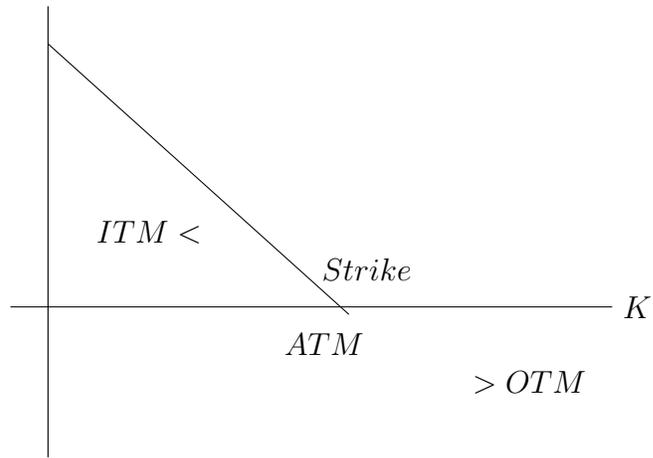
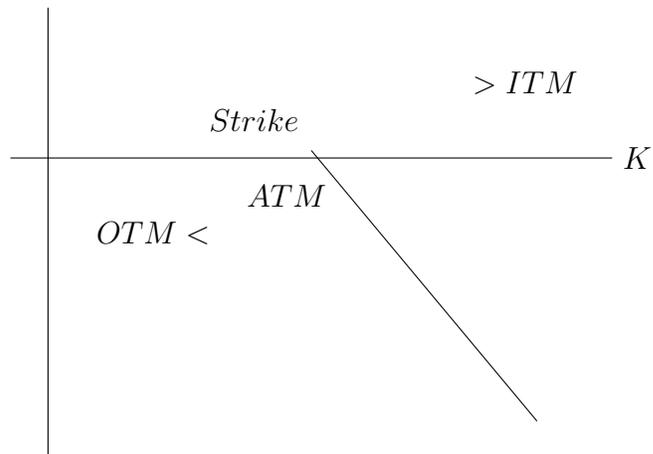
Tabla 2-1.: Clasificación según la relación tasa par swap Vs strike

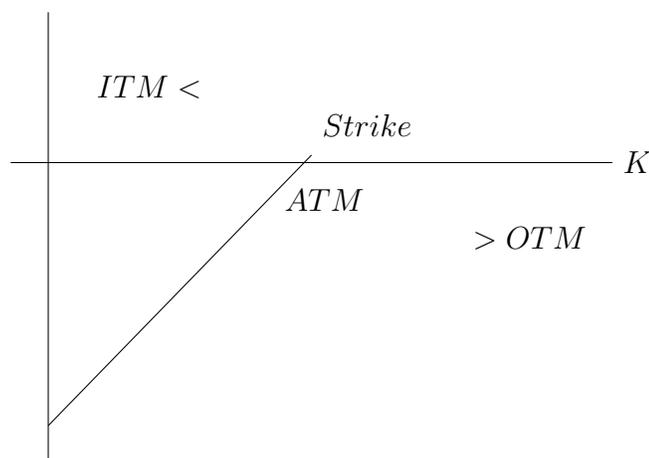
Las opciones que se encuentran dentro del dinero (ITM) implican necesariamente primas más altas, puesto que es muy probable que se tengan ganancias si se ejercen, en cambio las opciones que se encuentran fuera del dinero (OTM) implican primas muy bajas, ya que probablemente no serán ejercidas.

En las siguientes Figuras, se puede observar gráficamente que un tenedor de un cap-floor nunca ejercerá la opción si termina OTM en el caplet-floorlet al vencimiento. Las opciones OTM son las preferidas por los clientes por ser baratas dado su alto nivel de opcionalidad y en muchas ocasiones al ser baratas se suelen comprar para fines de cobertura del portafolio; sin embargo, las opciones ATM son las más líquidas en el mercado y son consideradas como referencias (“benchmark”) del mercado.

Caplet posición larga



Floorlet posición larga**Caplet posición corta**

Floorlet posición corta

Existe una relación entre el precio de un cap, el de un floor y el de un forward-start swap, análoga a la llamada paridad *call – put*:

$$call - put = forward \quad \approx \quad cap - floor = payer\ swap$$

$$Prima_{call} - Prima_{put} = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \approx \quad Prima_{cap} - Prima_{floor} = Precio_{payer\ swap} \quad (2-14)$$

Con el mismo nivel K , mismo vencimiento y la misma estructura de fechas de pago.

Estas paridades son utilizadas para derivar el precio y cálculo de sensibilidades de manera práctica a partir de un sólo precio. De hecho estas paridades nos arrojan otra manera de validar si un cap está ATM; un cap está ATM sí y sólo sí su precio es igual al precio del floor respectivo con las mismas características incluso misma volatilidad.

2.4. Medida de riesgo neutral

En el mundo financiero, el principio de no-arbitraje es un supuesto fundamental en la valuación de derivados financieros, intuitivamente establece que no existe posibilidad de invertir \$0 el día de hoy y recibir el día de mañana una ganancia segura y sin riesgo. O bien, en el contexto de portafolios, si dos portafolios tienen el mismo payoff en una fecha futura entonces deben valer lo mismo el día de hoy.

Un resultado importante que establecieron Harrison y Kreps (1979) [9] fue la relación entre ausencia de arbitraje y la existencia de una medida de probabilidad llamada la medida martingala equivalente también conocida como la medida de riesgo neutral \mathbb{P} asociada a un *numeraire*⁴.

Diremos que el proceso estocástico $\{Y_i\}$ es martingala bajo la medida \mathbb{P} y bajo la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ si:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_i | \mathcal{F}_j] = Y_j \quad i \geq j$$

Es decir, el valor esperado al tiempo i dada la información del subyacente hasta el tiempo j , será el valor del proceso al tiempo j . Esto significa que el proceso no tiene tendencia bajo \mathbb{P} .

Sea el numeraire la cuenta bancaria $B(t, T)$ entonces la existencia de la medida de riesgo neutral \mathbb{P} asociada a ese numeraire implica ausencia de arbitraje. Para fines prácticos del presente trabajo en la valuación de derivados financieros asumiremos la existencia de esa medida de riesgo neutral, asimismo supondremos que el activo es replicable y autofinanciado a través de una estrategia de activos básicos⁵ en cada tiempo de transacción. Bajo estos supuestos el precio del derivado al tiempo t está dado por:

$$Precio(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(- \int_t^T (r_s ds) \right) Payoff_T | \mathcal{F}_t \right]$$

Donde $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\sim | *]$ es el valor esperado condicional bajo la medida \mathbb{P} .

Bajo técnicas de cambio de numeraire⁶, si tomamos como numeraire el bono cupón cero, se tiene la medida \mathbb{T} – *forward* donde la tasa forward es igual a la esperanza condicional de la tasa corta; bajo esta medida $F(t; T, S)$ es martingala, es decir, la tasa forward es la mejor estimación de la tasa corta futura.

El precio del derivado bajo la medida \mathbb{T} – *forward* está dado por:

$$Precio(t) = P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{T}} \left[Payoff_T | \mathcal{F}_t \right]$$

Esto es, el valor esperado del payoff descontado al tiempo de valuación; este precio será mayor a mayor plazo porque existe mayor posibilidad de movimientos del activo subyacente, por otro lado mientras más se acerque el vencimiento el precio tenderá al payoff del derivado.

⁴Cualquier activo positivo sin pago de dividendos

⁵Como bonos cupón cero, compra/venta del activo subyacente, etc.

⁶Referir al Toolkit de Brigo y Mercurio (2001c)

2.5. Valuación de Cap-Floors

Los factores que afectan el precio o prima de un cap-floor son:

$$f \left(F, \sigma, P(t, T), t \mid K, T, S \right)$$

Donde,

$$F(t; T, S) = \textit{tasa forward}$$

$$\sigma = \textit{volatilidad asociada a la tasa forward}$$

$$P(t, S) = \textit{valor presente de una unidad monetaria que se paga al tiempo } S$$

$$t = \textit{fecha de valuación}$$

$$K = \textit{strike}$$

$$T = \textit{fecha de ejercicio}$$

$$S = \textit{fecha de liquidación}$$

El precio calculado a través del modelo (precio teórico) nos ayuda a saber que tan cercano está el precio de mercado del precio justo⁷. Existen diversos modelos de valuación de cap-floors desde los más robustos como el de difusión de saltos, el de diferencias finitas, árboles trinomiales o algoritmos de redes neuronales hasta los más representativos en términos de la práctica del mercado como árboles binomiales, simulación Monte Carlo, método de Cox, Ross y Rubinstein, etc. Dentro de los árboles binomiales se encuentra el modelo *Black-Derman-Toy*, el cual sugiere la construcción del árbol considerando como subyacente la tasa forward en cada nodo a partir de precios de bonos cupón cero del mercado, de tal forma que al calibrar esos precios observados se generan las tasas forward distribuidas Log-normal. Este modelo y la fórmula de Black 76 son los más utilizados en el mercado para la valuación de cap-floors.[1]

Para efectos de este trabajo se considerará sólo la fórmula de Black 76.

2.5.1. Black 76

El modelo de valuación de derivados financieros más reconocido en la literatura y usado en el mercado es el desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes (1973) [2] comúnmente conocido como la fórmula de Black & Scholes (B&S), esta fórmula deriva una solución analítica cerrada del precio de una opción europea en cualquier tiempo antes del vencimiento. Posteriormente Merton (1976) haría su aportación partiendo del modelo de Black & Scholes y llegaría a un modelo de valuación para derivados financieros cuyo subyacente son las tasas

⁷Libre de arbitraje

de interés o instrumentos de renta fija, lo que se conoce como modelo de Black 76, intuitivamente es Black & Scholes considerando como subyacente la tasa forward (F_t).

El modelo de B&S constituyó un importante logro debido a que fue la respuesta a muchos problemas financieros existentes, además de calcular el precio del derivado también fue posible la administración del riesgo de mercado de este tipo de posiciones a través de fórmulas analíticas. Desde su aparición se ha generado un rápido crecimiento de los mercados de derivados financieros, diseños de innovadoras estrategias de negociación, cobertura de riesgos y cada vez más un mercado sofisticado que demanda modelos de valuación de igual índole.

Los supuestos que contempla la fórmula cerrada de Black 76 son:

- La tasa forward se distribuye Log-normal y su evolución obedece un proceso estocástico Movimiento Browniano Geométrico, el cual genera únicamente niveles positivos de la tasa, lo anterior es equivalente a decir que los rendimientos logarítmicos ($\ln(\frac{F_{t+1}}{F_t})$) de la tasa forward se distribuyen Normal.

Como se vió en la sección (2.1), un Movimiento Browniano Geométrico está definido con la siguiente ecuación estocástica:

$$dF = F \mu(F, t)dt + \sigma(F, t) F dW_t \quad (2-15)$$

Donde,

- F = tasa forward
- σ = volatilidad asociada a la tasa forward
- μ = valor esperado de la tasa forward
- W_t = proceso de *Wiener* que depende del tiempo t

Con:

$$dW_t \sim N(0, dt)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dW_t] &= 0 \\ \text{Var}[dW_t] &= \mathbb{E}[(dW_t)^2] = dt \end{aligned}$$

La fórmula en (2-15) tiene la siguiente solución ⁸:

$$F_t = F_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

⁸El desarrollo se encuentra en Venegas (2006) [14]

- La volatilidad asociada es constante, definiendo la volatilidad como una medida de variación o dispersión de los movimientos del activo subyacente.
- Posibilidad de comprar/vender cualquier cantidad del subyacente en cualquier momento dentro de un mercado que opera continuamente.
- Sin costos de transacción, ni pago de dividendos.
- Existencia de la medida de riesgo neutral y principio de no-arbitraje (todo activo subyacente replicable).
- Opciones tipo europeas.

Por mucho, el supuesto más negado es el de considerar una volatilidad constante, se ha visto que si las tasas de interés presentan un incremento por ende la volatilidad aumenta, asimismo conforme el tiempo pasa en la volatilidad se tiene variaciones y para cada strike se tiene una volatilidad diferente.

Las fórmulas respectivas de Black & Scholes y Black 76 se encuentran en la Tabla (2-2); es usual que estas fórmulas sean utilizadas con mayor frecuencia para derivar la superficie de volatilidad implícita en los derivados financieros más que un modelo de valuación (o *pricing* en inglés). De hecho en la práctica en México, las cotizaciones de mercado de cap-floors son a través de las primas y se realiza una traducción vía Black a las volatilidades asociadas del instrumento.[11]

Black & Scholes	Black 76
$f(\mathbf{S}, \sigma, r, t K, T) =$ $\left[\mathbf{S} N(w d_1) - w e^{-r(T-t)} K N(w d_2) \right]$ <p>Donde $d_1 = \frac{\ln(\frac{\mathbf{S}}{K}) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$</p> $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$	$f(\mathbf{F}, \sigma, r, t K, T) =$ $w e^{-r(T-t)} \left[\mathbf{F} N(w d_1) - K N(w d_2) \right]$ <p>Donde $d_1 = \frac{\ln(\frac{\mathbf{F}}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$</p> $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$
$N(\cdot)$ = Función de distribución de una Normal estándar $N(0, 1)$ $w = 1$ si es call/cap $w = -1$ si es put/floor	

Tabla 2-2.: Fórmulas para el precio del derivado financiero

2.6. Griegas

Los operadores en los mercados financieros de derivados están al pendiente de los movimientos en el subyacente y en los factores que podrían repercutir en el valor del contrato. Es de suma importancia no sólo conocer la “dirección” sino también la “velocidad” con que se producen dichos movimientos.

Las llamadas “griegas” son métricas potenciales de sensibilidad del precio de una opción ante perturbación de sus factores de riesgo, nos dicen cuánto comprar o vender del subyacente o del propio derivado en sí para cubrir la posición y mitigar posibles pérdidas. Matemáticamente son las derivadas parciales con respecto a un movimiento en un factor de riesgo dejando todo lo demás de manera constante.

- Delta Δ

Es el cambio en el precio del derivado ante cambios de 1 unidad en el subyacente, en el caso de derivados financieros de tasa de interés, hablamos de un movimiento de 1 punto base (0.01 %) en la tasa de interés en cuestión.

La Δ se ocupa cuando se quiere cubrir el riesgo a primer orden de posibles pérdidas en la posición (cobertura, “hedge” en inglés), por ejemplo aplicar Δ -*hedge* en una posición larga de un caplet implicaría vender cierta cantidad del subyacente igual al cálculo de Δ . De esta manera ante movimientos adversos se compensaría la pérdida, preservando el objetivo de estar Δ -neutral.

En la Figura (2-1) se muestra el comportamiento de la Δ como función del subyacente para una posición larga en un caplet. Es importante notar el comportamiento de Δ dependiendo qué tan cercana la opción se encuentra de su vencimiento. La línea de “60 días” (color gris) es la Δ a 60 días del plazo de vencimiento de la opción y la línea de “vencimiento” obedece al comportamiento de Δ cuando la opción está por vencer.

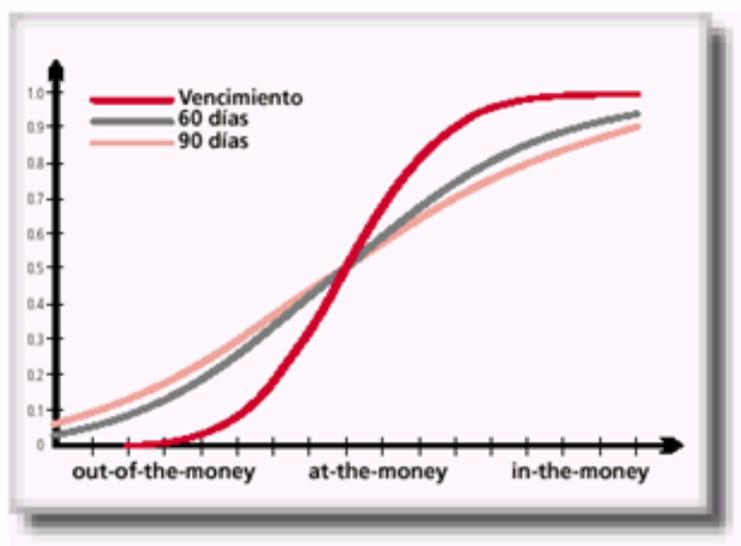


Figura 2-1.: Δ_{caplet}

Matemáticamente:

$$-1 < \Delta = \frac{\partial \text{Precio}}{\partial S_t} < 1$$

$$\Delta \simeq 0 \quad \text{Caplet o Floorlet OTM}$$

$$\Delta \simeq 0,5 \quad \text{Caplet ATM}$$

$$\Delta \simeq -0,5 \quad \text{Floorlet ATM}$$

$$\Delta \simeq 1 \quad \text{Caplet ITM}$$

$$\Delta \simeq -1 \quad \text{Floorlet ITM}$$

De la paridad call-put, se deduce:

$$\Delta_c - \Delta_p = 1$$

Es decir, si se conoce la Δ de una opción de compra, y en general cualquier griega, entonces se conocen las griegas de la opción de venta directamente.

La Δ es una buena aproximación para cambios pequeños, pero ante cambios grandes las predicciones de Δ no son buenas y se vuelve inestable por lo que ante cambios de mayor magnitud se recurre a la gamma γ .

- Gamma γ

Es el cambio en Δ ante cambios de un punto base de la tasa (“delta de la delta”). Mientras que la Δ es la pendiente de la curva, la γ es la convexidad de la curva. Otra interpretación es considerar a la γ como la “velocidad” a la que se deben realizar los ajustes para mantener la posición en Δ -neutral.

La máxima γ se tiene muy cerca del nivel K_{ATM} , esto es porque la Δ es inestable en ese punto debido a que al vencimiento, la opción ATM puede tener $\Delta = 1$ o $\Delta = 0$ por lo que no se tendría la certeza si es necesario hacer hedge o no. Esto se conoce como “pin risk”.

Matemáticamente:

$$-1 < \gamma = \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial \text{Precio}}{\partial S_t} \right) < 1$$

$$-1 < \gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} < 1$$

De la paridad call-put, se deduce:

$$\gamma_c = \gamma_p$$

En la Figura (2-2) se muestra el comportamiento de la γ como función del subyacente para una posición larga en un caplet. Es importante notar el comportamiento de γ dependiendo del plazo al vencimiento.

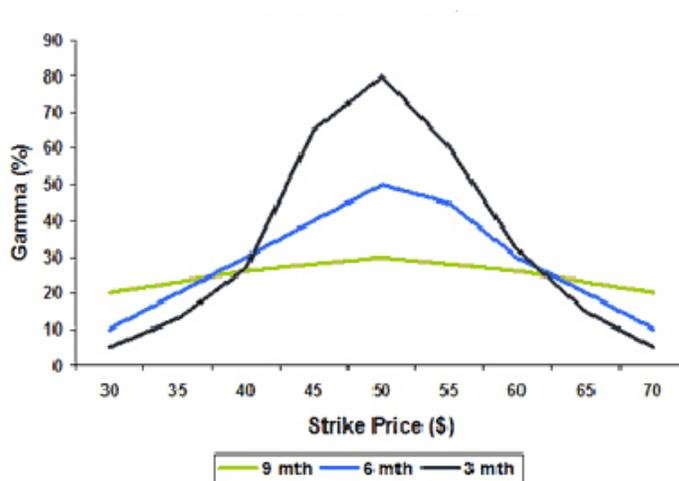


Figura 2-2.: γ_{cap}

Si el valor de γ es grande en términos absolutos, entonces Δ es muy sensible a cambios en el nivel del subyacente.

- Vega v o Kappa κ

Es el cambio en el precio de la opción ante cambios en la volatilidad del subyacente, típicamente cambios de 1%. En posiciones largas de opciones la relación es positiva, disminuyendo mientras el derivado se acerca a la fecha de vencimiento.

Matemáticamente:

$$v = \frac{\partial \text{Precio}}{\partial \sigma}$$

De la paridad call-put, se deduce:

$$v_c = v_p$$

Los valores máximos de v se tienen cuando el nivel del subyacente está muy cercano al strike pactado.

- Theta Θ

Es el cambio en el precio de la opción ante el transcurso del tiempo al vencimiento. Una Θ negativa significaría que por cada periodo de tiempo que transcurre, el precio de la opción bajaría de valor aproximadamente la cantidad de Θ , ya que intuitivamente se tendría menor posibilidad de cambios en el subyacente. No obstante, la magnitud del cambio es más pronunciada cuando la opción se acerca a su fecha de vencimiento, ya que la proporción de tiempo sería más grande.

La Θ afecta usualmente en el mismo sentido, pero no en la misma intensidad a todas las opciones, depende si se encuentran ITM, ATM u OTM. En el largo plazo tienen el menor efecto de cambio y en la medida que se va acercando al vencimiento se van reduciendo los efectos negativos. La intensidad es menor en las opciones OTM, después ITM, y por último las de mayor efecto negativo son las opciones ATM.

Matemáticamente:

$$\Theta = \frac{\partial \text{Precio}}{\partial T}$$

Dicho valor de Θ se ajusta por la convención de mercado, por ejemplo se multiplica por 1/365.

- Vanna

Es la derivada cruzada de segundo orden que describe el cambio en el valor de la opción ante cambios de volatilidad y del subyacente conjuntamente, es decir, es la sensibilidad de la Δ del derivado a cambios de primer orden en el nivel de volatilidad.

Matemáticamente es la siguiente derivada cruzada:

$$Vanna = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial Precio}{\partial S_t} \right)$$

Además:

$$vanna_c = vanna_p$$

- Volga

También conocida como volatilidad-gamma es el cambio en vega v ante cambios de 1 % en la volatilidad, es decir es la segunda derivada del valor de la opción con respecto a la volatilidad, cambios de segundo orden. Para opciones OTM es positiva y para opciones ATM es igual a cero.

Matemáticamente:

$$Volga = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial Precio}{\partial v} \right)$$

Además:

$$volga_c = volga_p$$

	Δ	γ	v	Θ
Posición larga Cap	<p style="text-align: center;">+</p> <p>Si ↑ Subyacente ⇒ ↑ Precio</p>	<p style="text-align: center;">+</p> <p>Si ↑ Δ ⇒ ↑ Precio</p>	<p style="text-align: center;">+</p> <p>Si ↑ Volatilidad ⇒ ↑ Precio</p>	<p style="text-align: center;">-</p> <p>Si ↑ Tiempo ⇒ ↓ Precio</p>
Posición larga Floor	<p style="text-align: center;">-</p> <p>Si ↑ Subyacente ⇒ ↓ Precio</p>	<p style="text-align: center;">+</p> <p>Si ↑ Δ ⇒ ↑ Precio</p>	<p style="text-align: center;">+</p> <p>Si ↑ Volatilidad ⇒ ↑ Precio</p>	<p style="text-align: center;">-</p> <p>Si ↑ Tiempo ⇒ ↓ Precio</p>

Tabla 2-3.: Relación Precio Vs Griegas para posiciones largas

3. Volatilidad

De manera intuitiva y general, podemos definir a la volatilidad como la variación o dispersión de los niveles del subyacente en un periodo de tiempo, usualmente el periodo de tiempo se considera en términos anuales.

Considerar una volatilidad constante no refleja de manera adecuada los precios de mercado. Además, asumir una volatilidad constante presenta inconsistencias sobretodo en derivados exóticos donde se tiene más de un strike, no es claro a qué nivel de volatilidad se requiere considerar para calcular el precio o derivar sus coberturas.

Aunque existen conceptualmente diferentes tipos de volatilidades, en el presente estudio se mencionarán: volatilidad histórica, volatilidad implícita, volatilidad local y volatilidad estocástica. Además se señalará brevemente la interacción del modelo de difusión de varianza de elasticidad constante y la estructura de volatilidad.

3.1. Entendiendo la superficie de volatilidad

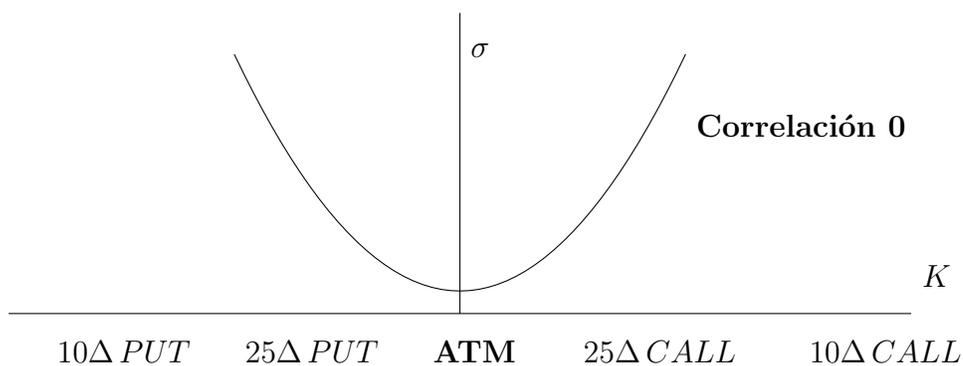
En los últimos años el mundo ha vivido crisis financieras internacionales, los movimientos especulativos son capaces de desestabilizar el sistema financiero de un país entero en un solo día y afectar a las restantes economías del mundo por la globalización en la que estamos inmersos. Por ejemplo, la crisis conocida como “Efecto Dragón” (“dragón de muchas cabezas”), la cual abarcó varios países del continente asiático comenzando en julio de 1997 con Tailandia, después le seguirían Corea del Sur, Indonesia, Filipinas, Malasia y la economía líder de la región, Japón. El Efecto Dragón causó devaluaciones repentinas de las monedas, hasta un 118% en un solo día, desplomó los mercados bursátiles, generó deuda-deflación y un sobre endeudamiento externo e interno; las tasas de interés se elevaron en la misma magnitud y velocidad en la que las economías entraban en recesión, con la globalización de los mercados financieros el contagio al resto del mundo fue inminente.

Antes de esta crisis, la forma de la gráfica de la volatilidad con respecto al strike era una línea, correspondiente a una volatilidad constante. Las olas de incertidumbre como resultado de crisis financieras y la interrelación e interdependencia de los mercados financieros evidenciaron que tomar una superficie plana “flat” de volatilidad no reflejaba de manera correcta

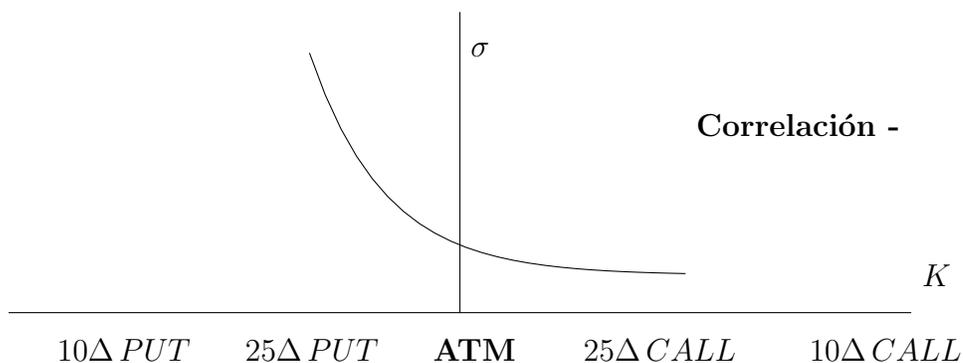
el comportamiento del subyacente. Ante la expectativa de caída en precios, las posiciones en opciones del tipo put sobre acciones comenzaron a ejercerse, se incrementó la demanda y se evidenció que la volatilidad asociada debería ser mayor para elevar los precios.

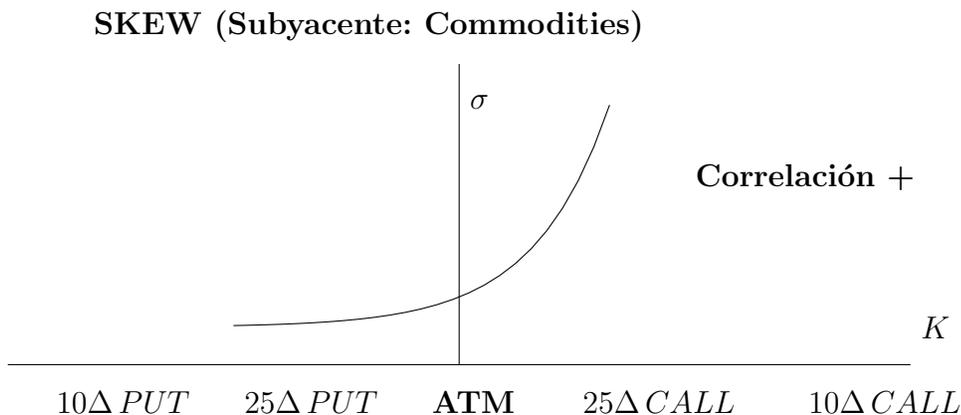
Ante la posibilidad de eventos extremos como los observados en las crisis financieras comenzó a asignarse una mayor volatilidad a opciones con precios de ejercicio menores a K_{ATM} , es decir, opciones OTM que a opciones ITM y ATM. La gráfica de volatilidad cambió mostrando el sesgo o la preferencia entre distintos precios de ejercicios, adquiriendo las formas conocidas como “*smile*”, “*smirk*” o “*skew*”:

SMILE (Subyacente: FX)



SMIRK (Subyacente: Equity)





La volatilidad sobre un cierto subyacente varía dependiendo de los niveles del strike pactado así como de la estructura temporal (fechas de vencimiento y fechas de pago del derivado financiero), por lo que hablamos de una superficie de volatilidad $f(K, T) \mapsto \sigma$:

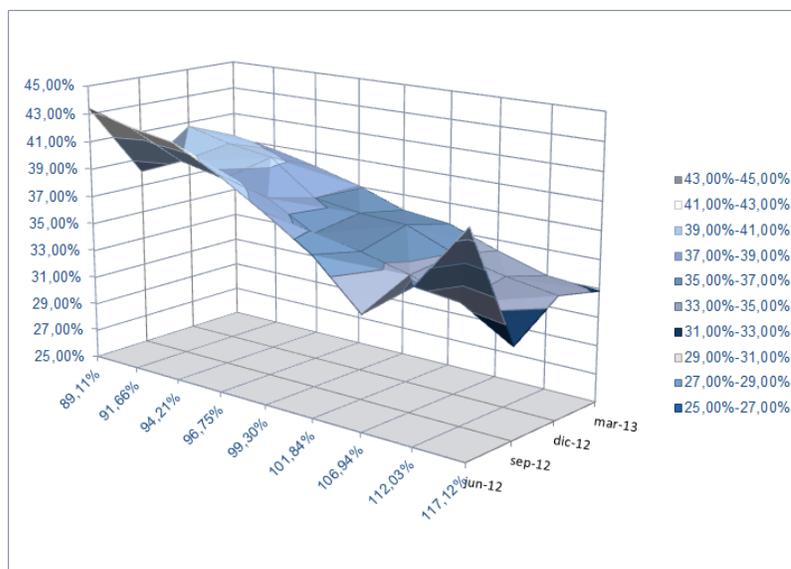


Figura 3-1.: Superficie de volatilidad

- $\sigma \mapsto K$

Si graficamos la volatilidad con los diferentes niveles de strike o en términos de $\frac{K}{S}$ (*moneyness*), la forma observada de la gráfica no es lineal y se asemeja más a una sonrisa mejor conocida con la palabra en inglés *smile* o a una función creciente/decreciente mejor conocidas con las palabras en inglés *skew/smirk*.

El tipo *skew* con sesgo negativo (o menos usual *smirk*) es típico del mercado de equity, el mercado asume la existencia de “colas anchas” y una correlación negativa entre el precio del subyacente y la volatilidad. El tamaño del *skew/smirk* se incrementa ante una mayor volga, esto es ante una mayor volatilidad de la volatilidad misma.

Cuando no hay correlación entre el subyacente y su volatilidad, la curva de volatilidad es simétrica como la gráfica de una parábola.

■ $\sigma \mapsto T$

Cuando graficamos la volatilidad con los diferentes tiempos de maduración a un precio de ejercicio K fijo, se suele observar que los vencimientos más largos tienen una volatilidad superior porque el activo subyacente tiene mayor tiempo para fluctuar, pero esto no siempre es así, depende del mercado, el producto y la situación financiera, por ejemplo también se suelen producir movimientos más fuertes en los vencimientos cercanos que en los lejanos y la volatilidad entonces sería mayor en el corto plazo.

No todas las volatilidades que cotizan en el mercado son significativas, algunas corresponden a opciones ilíquidas por lo que el dato es más informativo que significativo. Las opciones ATM son las que se consideran como las de referencia para la volatilidad, ya que son las más líquidas y las más sensibles ante variaciones de ésta.

Es importante hacer una distinción entre la volatilidad asociada al cap (floor) y la volatilidad asociada al caplet (floorlet); si bien, ambas son aquellas tales que resultan en el precio de mercado, la volatilidad del cap-floor asume el mismo nivel de volatilidad para cada caplet-floorlet que lo conforman y se le conoce como volatilidad *par* (o volatilidad *yield*), esta es la convención de los niveles observados en el mercado interbancario. Mientras que la volatilidad de cada caplet-floorlet es distinta en cada punto del tiempo T_i y se le llama volatilidad *forward*.

La volatilidad forward puede ser derivada a partir de las cotizaciones de mercado de la volatilidad par del cap-floor. La relación entre volatilidad par σ_{par} y volatilidad forward σ_{fwd} es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^n \text{caplet}_i(\sigma_{par}) = \sum_{i=1}^n \text{caplet}_i(\sigma_{fwd_i})$$

No es difícil ver que la volatilidad se convierte en otro activo subyacente, que se puede comprar o vender en el mercado, las opciones por sí solas representan volatilidad y en el mercado se puede tener exposición directa y única de la volatilidad a través de instrumentos derivados como un swap de volatilidad (*volatility swap*¹) o los swaps de varianza (*variance swaps*²).

3.2. Volatilidad histórica

También conocida como volatilidad realizada, se basa sobre los datos históricos observados que pueden utilizarse para pronosticar un escenario posible del futuro, el pasado puede ser un posible escenario futuro. Se calcula estadísticamente como la desviación estándar de los rendimientos o niveles del subyacente observados en cierto periodo de tiempo.

Matemáticamente se calcula como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (r_k - \mu)^2}{n - 1}} \quad (3-1)$$

Donde,

$$\begin{aligned} n &= \text{Número total de observaciones} \\ r_k &= \text{Nivel del activo subyacente o rendimiento del subyacente} \\ \mu &= \frac{\sum_{k=1}^n r_k}{n} \quad \text{Media muestral} \end{aligned}$$

Su importancia radica en que la volatilidad observada del mercado, sin importar cuánto fluctúe, siempre regresa a la media de la muestra y la volatilidad de un periodo estará influenciada por la observada en el periodo anterior.

¹Contrato forward sobre la volatilidad realizada anual Vs el strike (volatilidad fija establecida)

²Contrato forward sobre la varianza anualizada del subyacente Vs el strike (varianza fija establecida)

Entre algunas de sus desventajas se encuentran el criterio del periodo de tiempo a considerar, algunos proponen tomar dos periodos, uno de mayor plazo (por lo general, 2 años) y otro de menor plazo (1 mes); aunque siempre existirá el riesgo de no capturar movimientos relevantes o movimientos extremos a pesar de tomar observaciones recientes del comportamiento del subyacente, la historia considerada no necesariamente será representativa de la volatilidad futura del contrato, por lo que se estaría subestimando la volatilidad.

3.3. Volatilidad implícita

El modelo Black 76 se utiliza para derivar la superficie de volatilidad a partir de los precios observados en el mercado, la volatilidad implícita es aquel valor de σ tal que en la fórmula de Black 76 resulta el precio de la opción observado en el mercado, esta volatilidad nos dice no sólo la magnitud sino también la rapidez y tendencia del comportamiento del subyacente.

Al no ser posible despejar la variable σ para encontrar una expresión explícita de ella en la fórmula de Black 76, se utilizan métodos iterativos o numéricos para determinarla, por ejemplo, el método de *Newton Raphson*.

El método de *Newton Raphson* permite aproximar una solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$ partiendo de un valor inicial x_0 de la solución.

Sea una función $f \in C^2[a, b]$, a y $b \in \mathbb{R}$ es decir, f con derivadas parciales de segundo orden continuas y sea x_0 punto inicial en $[a, b]$, entonces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

A través de *Newton Raphson* el cálculo de la volatilidad implícita consiste en:

- Establecer el dato inicial de la volatilidad σ_0 . Una buena estimación para el valor inicial de la volatilidad de acuerdo a Alatorre (2015) está dado por:

$$\sigma_0 = \sqrt{\ln\left(\frac{F}{K}\right)}$$

Donde,

F = Nivel forward del activo subyacente

K = Precio de ejercicio

- Calcular el precio de la opción con Black 76 tomando la volatilidad implícita $\sigma = \sigma_0$
- Determinar el valor de *vega* (cambio del precio de la opción ante cambios en la volatilidad)

$$vega = F\sqrt{T-t}N(d_1)e^{-r(T-t)} \quad (\text{bajo Black 76})$$

$$Con d_1 = \frac{\ln(\frac{F}{K}) + \frac{\sigma_0^2}{2}(T-t)}{\sigma_0\sqrt{T-t}}$$

- Obtener el precio de mercado de la opción C_{MKT} .

El proceso iterativo finaliza cuando la volatilidad $\sigma_i \simeq \sigma_{i+1}$.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{C(\sigma_i) - C_{MKT}}{\frac{\partial C}{\partial \sigma_i}} \quad (3-2)$$

Donde,

$$\begin{aligned} C(\sigma_i) &= \text{Precio de la opción con } \sigma_i \text{ en Black 76} \\ C_{MKT} &= \text{Precio de mercado de la opción} \\ \frac{\partial C}{\partial \sigma_i} &= \text{Vega bajo Black 76} \end{aligned}$$

Algunas de las desventajas es que el método de Newton Rhapsion puede no encontrar una solución si el método no converge.

3.4. Volatilidad local

Bruno Dupire (1994) [5] propone uno de los primeros intentos para inferir una superficie de volatilidad forward asumiendo la información de mercado a través de las cotizaciones de las primas y estableciendo una dependencia entre la volatilidad, el nivel del subyacente y el tiempo: $\sigma = \sigma(S_t, t)$, o bien del nivel forward $\sigma = \sigma(F_t, t)$.

Por lo tanto, a partir de trayectorias del subyacente se estima la volatilidad que además presume de ser única.

Analíticamente asumiendo un mundo de riesgo neutral:

$$\sigma^2(S, t)|_{t=T, S=K} = \frac{2\left(\frac{\partial C(K, T)}{\partial T}\right) + rK\left(\frac{\partial C(K, T)}{\partial K}\right)}{K^2\left(\frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2}\right)} \quad (3-3)$$

En el caso de tasas de interés, considerando el nivel forward las fórmulas en (3-3) se simplifican de la siguiente manera:

$$dF_t = \sigma(F_t, t)F_t dW$$

Analíticamente asumiendo un mundo de riesgo neutral:

$$\sigma^2(F, t)|_{t=T, F=K} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\partial C(K, T)}{\partial T}\right)}{K^2\left(\frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2}\right)}} \quad (3-4)$$

Donde,

$C(\cdot)$ = Precio de la opción

K = Strike de la opción

S = Nivel del subyacente

T = Plazo al vencimiento en años

Intuitivamente, la volatilidad implícita es aproximadamente el promedio de las volatilidades locales que se encuentran entre el nivel spot (o forward) del subyacente y el strike.

Primero se calibra $\sigma^{(1)}(\hat{F})$ para generar los precios de mercado con fecha de ejercicio t^1 para todos los strikes, después se calcula $\sigma^{(2)}(\hat{F})$ para generar los precios de mercado con fecha de ejercicio t^2 para todos los strikes y así sucesivamente, resultando en una volatilidad aplicable para todo strike. La sábana de volatilidad bajo el modelo de volatilidad local es independiente de movimientos en el subyacente pero es sensible a movimientos en las primas de las opciones. Además, supone la existencia de cotizaciones de primas en cada strike y vencimiento requerido, en otras palabras profundidad y liquidez en el mercado.

Aunque su utilidad es limitada a opciones sencillas (*plain vanilla*) y con subyacentes de tipo equity y FX, ya que presenta inconsistencias en el largo plazo para subyacentes de renta fija o tasas de interés, ha sido una herramienta importante y pionera en la estimación de la volatilidad y su uso en la práctica es aún común debido a su facilidad de cómputo.

3.5. Volatilidad estocástica

Posteriormente se desarrollaron los modelos de volatilidad estocástica, en estos se consideran dos factores estocásticos: un factor conduce la dinámica estocástica del subyacente y el segundo modela la dinámica estocástica de la volatilidad (este factor es el causante del efecto sonrisa).

Una volatilidad estocástica se propone como aquel proceso estocástico $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ que ajusta el cambio en la volatilidad implícita del modelo B&S ante cambios en la fecha de vencimiento o en el strike de la opción; es decir, se captura volatilidad en la volatilidad. Además de suponer una volatilidad como función del subyacente en periodos anteriores, se asume cambio de volatilidad con el tiempo y dependencia de sí misma.

Aunque se comporta de manera adecuada para opciones de largo plazo, en el corto plazo la superficie bajo modelos de volatilidad estocástica tiende a ser demasiado plana, otro problema con este tipo de modelos es que puede resultar complicada la calibración de los parámetros del modelo.

Han surgido diversos modelos de volatilidad estocástica, entre los cuales destacan:

- Modelo de Heston (1993) [10]

Presenta una fórmula cerrada para el precio de una opción suponiendo una correlación entre el nivel del activo subyacente y su volatilidad.

Asume la dinámica de la volatilidad acorde al proceso CIR (Cox, Inguersoll y Ross (1985) [4]), es decir, la volatilidad se distribuye bajo una \mathcal{X}_t^2 no centrada y se considera la raíz cuadrada para evitar valores negativos.

La volatilidad del subyacente se rige bajo el proceso estocástico v_t :

$$dv_t = \kappa(\Theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t, \quad \kappa, \Theta > 0 \quad y \quad 2\kappa\Theta \geq \sigma^2 \quad (CIR)$$

Donde,

- Θ = Constante que refleja el valor al cual elasticamente tiende la volatilidad
- κ = Constante que refleja la velocidad de ajuste
- σ = Vector con cada componente constante igual es σ_0
- W_t = Proceso de Wiener

- Modelo SABR (2002)³ [7]

Un modelo de volatilidad local sugiere que cuando el nivel del subyacente disminuye, el modelo de volatilidad local predice un smile de volatilidad cargado hacia niveles altos y viceversa, por tal razón ante un comportamiento erróneo del smile para derivados de tasa de interés surge un modelo estocástico de volatilidad que depende de 4 parámetros; α , β , ρ y v . El modelo SABR propone que el nivel forward satisfaga:

$$d\hat{F} = \hat{\alpha}\hat{F}^\beta dW_1, \quad \hat{F}_0 > 0, \quad \beta \in [0, 1]$$

$$d\hat{\alpha} = v \hat{\alpha} dW_2, \quad \hat{\alpha}_0 > 0, \quad v > 0$$

Con la siguiente correlación:

$$dW_1 dW_2 = \rho dt \quad \rho \in (-1, 1)$$

3.6. Modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV)

Este modelo establece una dependencia de la volatilidad y el nivel del activo subyacente tal que la elasticidad entre ambas es constante, además ésta dinámica es dependiente de los periodos anteriores.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\alpha dW$$

Donde,

dW = Proceso de Wiener

α = Constante positiva, parámetro de elasticidad

Si $\alpha < 1 \implies vol \uparrow \& Subyacente \downarrow$

Si $\alpha > 1 \implies vol \uparrow \& Subyacente \uparrow$

Con una volatilidad definida como:

$$\begin{aligned} \sigma(S) &= aS^\alpha \\ \frac{d\sigma}{dS} &= \frac{\alpha\sigma}{S} \end{aligned}$$

³Referir a la sección 4

Se puede observar que cuando $\alpha = 0$, el modelo CEV se reduce a la volatilidad constante en el proceso Browniano Geométrico de B&S. Cuando $\alpha = -1$, el logaritmo del precio del activo subyacente tiene una volatilidad igual a a/S .

4. Modelo SABR para la estimación de la volatilidad

Hemos mencionado las debilidades del supuesto de volatilidad constante no sólo en el precio realmente observado en el mercado, sino también en el cálculo de las sensibilidades y coberturas; una volatilidad implícita constante no funciona para todo nivel de strike y/o vencimiento. Ante la necesidad de generar un modelo de volatilidad aplicable para todo nivel de strike y coherente con el comportamiento del mercado aparece el modelo SABR (Stochastic alpha-beta-rho). En esta sección analizaremos el modelo SABR, sus supuestos y parámetros, la dinámica del subyacente y la volatilidad generada.

El análisis del modelo, los cálculos y las fórmulas presentadas están basadas en el estudio realizado por Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward (2002) [7] para mayor referencia.

4.1. Planteamiento

El modelo SABR (Stochastic alpha-beta-rho, $S-\alpha\beta\rho$) surge al observar que bajo modelos de volatilidad local el skew de volatilidad se comporta opuesto a lo observado en el mercado. Esto es, cuando el nivel del subyacente disminuye el modelo de volatilidad local predice un movimiento en el smile/skew hacia niveles más altos y viceversa, lo que resulta en inconsistencias en los precios y coberturas del derivado¹.

Cuando el activo subyacente es una acción, el movimiento en el precio spot de la acción es en la dirección contraria de su volatilidad, es decir, si el precio spot cae entonces la volatilidad se incrementa y la volga (volatilidad de la volatilidad) también se incrementa. En comparación, cuando el subyacente se trata de tasas de interés se observa un comportamiento contrario, es decir el nivel de la tasa forward y la volatilidad se mueven en la misma dirección, ambas incrementan o disminuyen conjuntamente. Referir a Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward (2002).

¹Ver ejemplos expuestos en Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward (2002) [7]

El modelo SABR propuesto por Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward resuelve la dinámica entre el subyacente y la volatilidad de manera adecuada al derivar una volatilidad estocástica que predice un cambio en la curva de volatilidad implícita en la misma dirección y magnitud que el cambio observado en el nivel forward del subyacente.

El modelo SABR tiene la ventaja de ser considerado como el modelo más simple de volatilidad estocástica libre de arbitraje; y aunque no genera fórmulas analíticas para el precio del derivado, la volatilidad calculada bajo este modelo es usada como una buena estimación de la volatilidad implícita en el precio de cap-floors y swaptions bajo Black 76. No obstante, en Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward (2002) [7] se calibra el skew de volatilidad para activos con una sólo fecha de ejercicio, esto incluye a los caplet's/floorlet's o swaption's pero no a los commodities y renta variable (equity).

4.2. Dinámica del modelo

La dinámica de la tasa forward bajo el modelo SABR asume el comportamiento del modelo CEV descrito en la sección (3.6), de hecho el modelo SABR es una extensión del modelo CEV con volatilidad estocástica bajo un movimiento Browniano Geométrico.

Sea $F(t)$ la tasa forward vista al tiempo t , $F(t)$ es martingala bajo la medida \mathbb{T} -forward, por lo que se tiene:

$$d\hat{F} = C(t, *)dW_1, \quad \hat{F}(0) = f$$

Donde,

$$\begin{aligned} dW_1 & \text{ es un movimiento browniano bajo la medida } \mathbb{T} - \text{forward,} \\ \hat{F}(0) = f & \text{ es el nivel forward al tiempo } 0 \text{ y} \\ C(t, *) & \text{ un factor determinístico o aleatorio.} \end{aligned}$$

De hecho, $C(t, *)$ está definido como:

Modelo	$C(t, *)$	Dinámica del nivel forward
Black 76	$\sigma \hat{F}(t)$	$d\hat{F} = \sigma \hat{F}(t) dW_1$ con vol constante
Dupire, Vol Local	$\sigma_{loc}(t, \hat{F}) \hat{F}(t)$	$d\hat{F} = \sigma_{loc}(t, \hat{F}) \hat{F}(t) dW_1$ con vol a partir de precios de mercado
SABR	$\hat{\alpha} \hat{F}^\beta$	$d\hat{F} = \hat{\alpha} \hat{F}^\beta dW_1$ con $\hat{\alpha}$ vol de la vol y correlación entre subyacente y vol

Tabla 4-1.: $C(t, *)$ bajo los modelos Black 76, Vol Local y SABR

El modelo SABR asume una volatilidad que no sólo depende del nivel strike sino también del nivel forward observado al día de hoy $\sigma(f, K)$, establece una correlación entre el comportamiento del nivel forward y la dinámica de la volatilidad y genera superficies libres de arbitraje.

Modelo SABR	
$d\hat{F} = \hat{\alpha} \hat{F}^\beta dW_1$	$\hat{F}_0 = f > 0, \quad \beta \in [0, 1]$
$d\hat{\alpha} = v \hat{\alpha} dW_2,$	$\hat{\alpha}_0 = \alpha > 0, \quad v > 0$
$dW_1 dW_2 = \rho dt$	$\rho \in (-1, 1)$

- El parámetro β controla qué tan pronunciada es la pendiente de la curva y establece la distribución del subyacente. El impacto en la curva ante variaciones en el valor de β se refleja en desplazamientos hacia niveles por debajo de σ_{ATM} ante incrementos en β y con una pendiente menos pronunciada, es decir entre mayor es β la curva es más plana de acuerdo a Skov Hansen (2011) [8].

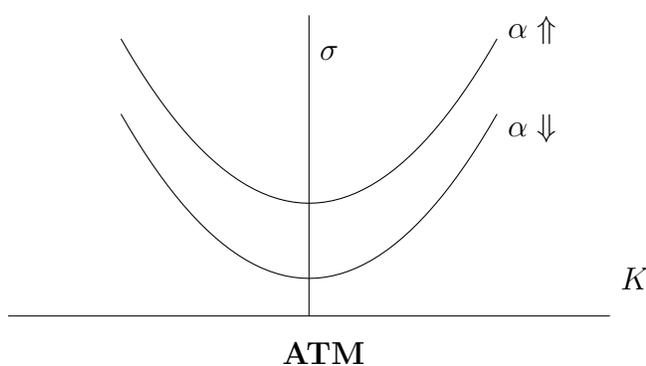
Para determinar el valor de β se puede utilizar las condiciones de mercado observadas en una ventana de tiempo histórica del comportamiento del subyacente; o bien, mediante una regresión lineal de los niveles históricos de la tasa forward versus volatilidades ATM (series de tiempo del tipo $(\ln f, \ln \sigma_{ATM})$).

Si $\beta = 1$, entonces se tienen un modelo estocástico log-normal.

Si $\beta = 0$, entonces se tienen un modelo estocástico normal.

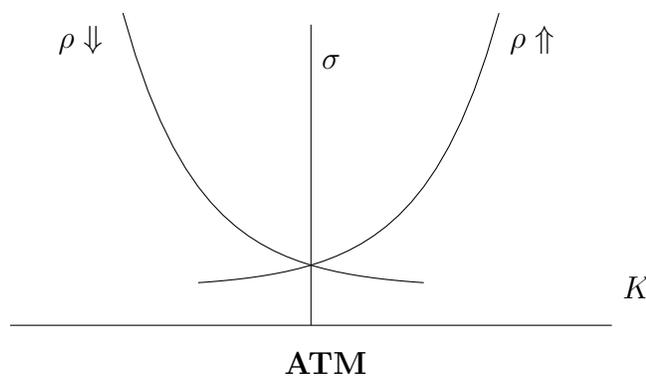
Si $\beta = \frac{1}{2}$, entonces se tienen un modelo estocástico CIR (ver sección 3.5).

- El parámetro $\hat{\alpha}$ controla el nivel de la volatilidad ATM. Una variación en el valor de α impacta en movimientos en toda la curva; ante incrementos de α , toda la curva se desplaza hacia mayores niveles de volatilidad; la mayor curvatura es con σ_{ATM} .



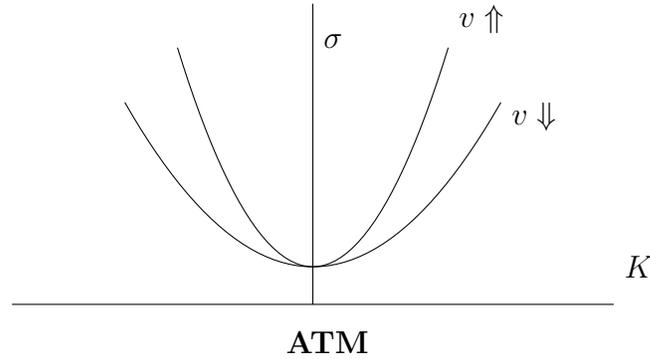
Movimientos en la curva ante variaciones de α

- El parámetro ρ controla el sesgo del skew. Oscila entre ± 1 debido a que describe la correlación entre ambos movimientos brownianos W_1 y W_2 . Un ρ positivo arroja niveles mayores volatilidad a niveles de strike por arriba de K_{ATM} ; un ρ negativo arroja niveles mayores volatilidad a niveles de strike por debajo de K_{ATM} .



Movimientos en la curva ante variaciones de ρ

- El parámetro v (volatilidad de la volatilidad) controla la simetría de la curva (es decir, qué tanto la curva adquiere la forma “smile”). Ante una mayor v , el efecto en la curva es una curva más convexa, por el contrario alrededor del punto ATM se hace más plana.



Movimientos en la curva ante variaciones de v

4.2.1. Fórmula de la volatilidad

La fórmula explícita de la volatilidad como función del valor forward al tiempo 0 y del strike bajo el modelo SABR está dado por²:

$$\sigma_B(K, f) = \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2 \frac{f}{K} + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln^4 \frac{f}{K} + \dots \right\}} \left(\frac{z}{x(z)} \right)$$

$$\left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\beta v\alpha}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] t_{ex} + \dots \right\} \quad (4-1)$$

Con:

$$z = \frac{v}{\alpha} (fK)^{(1-\beta)/2} \ln \frac{f}{K}$$

$$x(z) = \ln \left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right)$$

²El desarrollo se puede consultar en Hagan, Kumar, Lesniewski y Woodward (2002)

Para opciones ATM (es decir, $f = K$) la fórmula se simplifica a:

$$\sigma_{ATM} = \sigma_B(f, f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}} + \frac{\rho\beta\alpha v}{4f^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] t_{ex} + \dots \right\} \quad (4-2)$$

Los términos subsecuentes en “+...” se consideran despreciables en el sentido de que afectan el cálculo de la volatilidad en un $\pm 3\%$ en el peor de los casos.

4.2.2. Parametrización y calibración

Una parametrización de las fórmulas en (4-1) y (4-2) que provee un mejor entendimiento del comportamiento del modelo SABR es utilizando $\ln(K/f)$ teniendo la siguiente aproximación:

$$\sigma_B(K, f) = \frac{\alpha}{f^{(1-\beta)}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\beta-\rho\lambda) \ln(K/f) + \frac{1}{12} \left[(1-\beta^2) + (2-3\rho^2)\lambda^2 \right] \ln^2(K/f) + \dots \right\} \quad (4-3)$$

Donde,

$\lambda = \frac{v}{\alpha} f^{1-\beta}$	parámetro que mide la intensidad de v
$\frac{\alpha}{f^{1-\beta}}$	volatilidad implícita de opciones ATM
$-\frac{1}{2}(1-\beta-\rho\lambda)$	representa el skew, pendiente de la volatilidad implícita con respecto al strike. Se compone del factor “beta skew” (pendiente descendiente según el valor de β) y “vanna skew” (sesgo causado por la correlación entre volatilidad y activo subyacente determinada por el valor de ρ)
$\frac{1}{12}(1-\beta)^2$	representa la convexidad proporcional a $\sqrt{\text{beta skew}}$
$\frac{1}{12}(2-3\rho^2)\lambda^2$	representa la “volga”, volatilidad-gamma o volatilidad de la volatilidad

En la calibración de los parámetros es más conveniente usar σ_{ATM} , β , ρ , y v en lugar de α , β , ρ y v usualmente cuando el instrumento es un swaption. En caplet-floorlet's, la calibración del modelo se suele realizar encontrando α , ρ y v dados β , f y K observados para cada t_{ex} .

La actualización de los parámetros α , ρ y v depende del cambio en las cotizaciones de mercado y la profundidad del mismo, por ejemplo, puede ser intradía o una vez al mes actualizar una superficie definida en moneyness, ya que por la forma de construcción de la superficie hace que se traslade de manera adecuada con el movimiento de las forwards.

El objetivo en la calibración del modelo es minimizar la diferencia entre la volatilidad de mercado y la volatilidad estimada bajo SABR para cada strike y cada t_{ex} , en términos de minimizar el error cuadrático:

$$\min \sum_i (\sigma_{MKT} - \sigma_B(\alpha, \beta, \rho, v; K_i, f))^2$$

O bien, en términos de precios:

$$\min \sum_i \left[\text{Precio}(\sigma_{MKT}) - \text{Precio}(\sigma_B(\alpha, \beta, \rho, v; K_i, f)) \right]^2$$

La práctica del mercado es primero fijar el valor de β antes de calibrar los demás parámetros.

Se puede aplicar técnicas de optimización a través de Newton Raphson al minimizar las fórmulas anteriores encontrando los valores de los parámetros dadas las restricciones iniciales y la información de mercado.

4.3. Griegas

Para el caso de las principales griegas *delta* y *gamma*, no sólo debemos observar movimientos en el activo subyacente de manera aislada, sino también el impacto en el smile de volatilidad debido a la correlación entre subyacente y volatilidad establecida en el modelo SABR.

- Delta Se considera cambios en el activo subyacente y cambios en la volatilidad, “smile delta”.

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial f} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \frac{\rho \alpha}{f^\beta} \right)$$

- Vega Se considera cambios en la volatilidad y cambios en el subyacente, “smile vega” (cambios en $\hat{\alpha}$).

$$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial V}{\partial f} \right) \frac{\rho f^\beta}{\alpha}$$

5. Modelo SABR para una opción de TIEE28

Aplicaremos el modelo SABR y los cálculos vistos en el capítulo 4 a una opción sobre la tasa de referencia en el mercado mexicano, la TIEE28.

Al considerar los instrumentos financieros cap-floors, se construirán las volatilidades forwards de cada caplet-floorlet a partir de las cotizaciones de mercado de la volatilidad par y las tasas par swap de los IRS de TIEE28, este proceso es conocido en la literatura como “stripping cap volatility”. Existen varios métodos pero en este estudio abarcaremos el método de bootstrapping.

A partir de los insumos de mercado, se determinarán los valores de los parámetros del modelo SABR adecuados para inferir el skew de volatilidad minimizando el error cuadrático en precios.

5.1. Información de mercado

Para el caso de cap-floors se tomará los insumos de mercado de uno de los proveedores oficiales en México, Valmer. Estas cotizaciones se encuentran en términos de volatilidades con respecto a $K_{ATM} = (BID + ASK)/2$ y donde $\{-2, -1, -0.5, 0.5, 1, 2\}$ son los puntos base \pm del nivel ATM, por ejemplo, el número 2 es igual a 200 puntos base más de K_{ATM} ($K_{ATM} + 2\%$). Para floors corresponden $\{-2, -1, -0.5\}$ y para caps $\{0.5, 1, 2\}$.

Para fines de este estudio se considerará hasta el plazo de 3y (1092 días), cabe mencionar que los cap-floors de TIEE28 no presentan gran profundidad de mercado en los vencimientos muy largos.

Plazo	BID	ASK	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
364D	16.1	18.1	17.33	16.33	16.50	17.9415	18.89	20.83
728D	19.05	21.05	20.97	19.65	19.55	20.9254	21.93	23.97
1092D	23.09	25.9	26.41	24.69	24.45	25.7906	26.84	28.99
1456D	27.3	29.3	29.50	28.00	27.84	29.1408	30.13	32.14
1820D	28.4	30.4	30.13	28.98	28.93	30.1734	31.06	32.88
2548D	29.65	31.65	30.65	29.98	30.13	31.3634	32.15	33.75
3640D	29.5	31.5	29.97	29.71	29.99	31.1303	31.80	33.16

Tabla 5-1.: Cotizaciones de opciones de TIEE28 (Información Valmer)

Es necesario también las cotizaciones de las tasas par swap de IRS de TIEE28 y la TIEE28 publicada por Banco de México. El mercado de IRS por medio de estas cotizaciones brindan el valor de la tasa fija a pagar o recibir en el contrato, son instrumentos lunares, es decir pagan cupón cada 28 días, pago de interés. Bajo calendarios lunares el IRS 13x1 es el swap a un plazo de 1 año el cual contempla 13 cupones de 28 días.

Plazo en días	Tenor	Tasa
84	3x1	6.89 %
168	6x1	7.02 %
252	9x1	7.10 %
364	13x1	7.12 %
728	26x1	7.15 %
1,092	39x1	7.16 %
1,456	52x1	7.19 %
1,820	65x1	7.20 %
2,548	91x1	7.31 %
3,640	130x1	7.43 %
5,460	195x1	7.66 %
7,280	260x1	7.76 %
10,920	390x1	8.02 %

Tabla 5-2.: Cotizaciones de IRS de TIIIE28 (Información Valmer)

Plazo en días	Tasa
28	6.8350 %

Tabla 5-3.: Banxico. TIIIE28

5.2. Aplicación del modelo SABR

Para aplicar el modelo se llevaron a cabo a cabo los siguientes procedimientos:

- Bootstrapping para los factores de descuento.

A partir de las tasas par swap de los IRS de TIIIE28 de la Tabla (5-2) se genera la curva diaria de tasas spot para determinar los factores de descuentos $P(t, T)$.

- Determinación de $K - strike$ para cada plazo y precio de mercado.

Se calcula cada $K - strike$ al plazo y el precio de mercado de los cap-floors con la volatilidad par de mercado.

- Cálculo de volatilidades forward bajo SABR.

Se genera toda volatilidad forward asociada a cada caplet-floorlet con los valores iniciales de los parámetros.

- Calibración de parámetros.

Se calibran los valores de α , β , ρ y v minimizando el error cuadrático en precios.

5.2.1. Bootstrapping en tasas par swap IRS de TIEE28

El proceso de bootstrapping consiste en deducir los valores de las tasas spot o cupón cero en el largo plazo a partir del primer plazo conocido¹ y las tasas par swap de IRS cotizados en el mercado. Al calcular las tasas cupón cero recursivamente, el proceso recuperará las tasas par swap de mercado observadas de los IRS.

El método de bootstrapping que aplicaremos será en tasas par swap² con la variable objetivo igual a la tasa cupón cero que hace que el valor presente neto de un swap receiver sea igual a cero.

$$\text{Valor Presente}_{\text{Pata Fija}} - \text{Valor Presente}_{\text{Pata Flotante}} = 0$$

El primer IRS es el 3x1, los 3 flujos de efectivo de la pata fija se calcularán con K la tasa par swap al plazo correspondiente 3x1 (referir a las tasas en la Tabla 5-2); y para la pata flotante, el primer flujo a 28 días está dado con la información de la tasa del primer nodo, para el segundo flujo (56 días) se interpola linealmente entre el nodo 1 y nodo 3, de esta manera la incógnita será la tasa cupón cero para el flujo de efectivo del nodo 3 (84 días), se establece un valor inicial de dicha variable y a través de Newton Raphson, se encuentra el valor tal que:

$$\text{Valor Presente}_{\text{Pata Fija}}(K_{\text{par swap}} 3x1) - \text{Valor Presente}_{\text{Pata Flotante}}(r_i) = 0$$

Con, $i \in \{1, 2, 3\}$

r_1 = Tasa cupón cero del nodo 1

r_2 = Tasa cupó cero interpolada linealmente entre nodo 1 y nodo 3

r_3 = Tasa cupón cero a encontrar a través de Newton Raphson

¹Nodo 28 días con TIEE28 o nodo de un día con la tasa de fondeo interbancario

²Existe bootstrapping en precios, en factores de descuento, en volatilidades, etc.

Para el IRS 6x1, se realiza el mismo procedimiento considerando la tasa par swap de 6x1, con la diferencia de que los primeros 3 cupones ya están dados con las tasas cupón cero establecidas del IRS 3x1. Y así sucesivamente hasta llegar al IRS 390x1.

Una vez calculadas las tasas cupón cero se procede a generar los factores de descuento $P(t, T)$. Se considera nuevamente una interpolación lineal para extender la curva de manera diaria, considerando tasas con composición continua bajo la convención ACT/360 y un calendario de días inhábiles para determinar las fracciones de año τ_i .

Puede considerarse directamente las curvas de tasas cupón cero de Valmer que son construidas a través de este procedimiento.

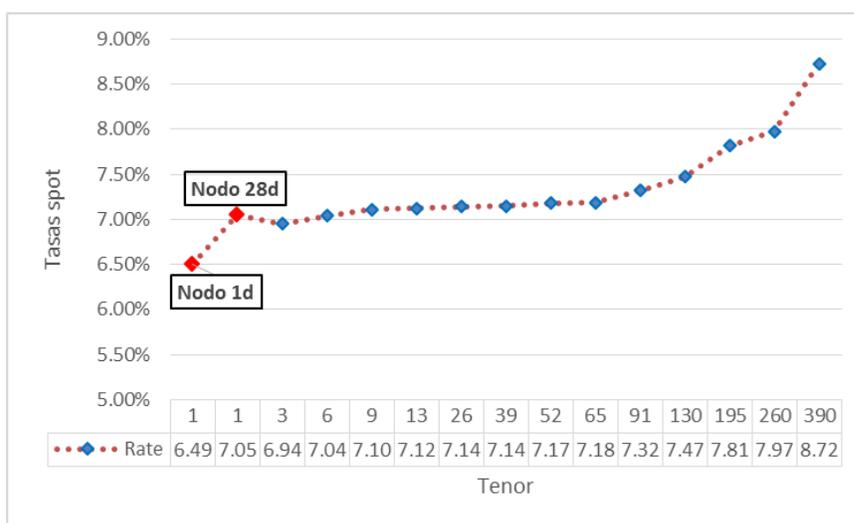


Figura 5-1.: Curva generada a partir de bootstrapping para cada tenor/plazo del IRS de mercado

5.2.2. Determinación de K-strike y precio de mercado

Después de derivar la curva de tasas cupón cero, se determina para los plazos de 1, 2 y 3 años las tasas par swap que representa el strike K al cual son pactados los cap-floors respectivos a esos plazos.

Recordando:

$$K_{par\ swap} = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i(T_{i-1}, T_i)}$$

PLAZO	Strike's (K)						
	ATM	-2%	-1%	-0.5%	0.5%	1%	2%
364	7.12%	5.12%	6.12%	6.62%	7.62%	8.12%	9.12%
728	7.15%	5.15%	6.15%	6.65%	7.65%	8.15%	9.15%
1092	7.16%	5.16%	6.16%	6.66%	7.66%	8.16%	9.16%

Con K y σ_{MKT} calculamos los precios de mercado de las opciones de TIIIE28 con Black 76, subrayando que este precio considera la misma volatilidad par para cada caplet-floorlet.

En el caso de cap-floors, se considera que el primer cupón ya fijó la TIIIE28 por lo que el primer cupón se omite del cálculo.

5.2.3. Cálculo de volatilidades forward bajo SABR

Como se tiene cotizaciones ATM, es posible aplicar la fórmula vista en (4-2), despreciando los términos " + ... ":

$$\sigma_{ATM} = \sigma_B(f, f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}} + \frac{\rho\beta\alpha v}{4f^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] t_{ex}^i \right\}$$

Aún más, si se determina $\beta = 1$, lo anterior se simplifica a:

$$\sigma_{ATM} = \sigma_B(f, f) = \alpha \left\{ 1 + \left[\frac{\rho\alpha v}{4} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right] t_{ex}^i \right\}$$

Donde v , α , β y ρ se establecen con los valores iniciales.

Para los restantes K - strikes se utiliza la fórmula general (4-1) para determinar $\sigma_B(K, f)$.

Para cada t_{ex}^i , se calcula la tasa forward f y la volatilidad forward asociada a cada caplet-floorlet, para el plazo de 1 año $\{i \in \{2, 3, \dots, 13\}\}$, se tiene 12 caplets-floorlets para determinar su volatilidad forward (el primer caplet-floorlet tiene volatilidad igual a 0%, ya que se conoce el valor de TIIIE28), para el caso de 2 años serán 25 caplets-floorlets y así sucesivamente.

5.2.4. Calibración de parámetros

Para cada vencimiento de las opciones de TIIIE28, se deberá calibrar cuatro parámetros: v , α , β y ρ a partir de los insumos de mercado.

En la práctica, la calibración se realiza fijando un parámetro ya sea:

- Fijando $\beta \in [0, 1]$ y calibrando v , α y ρ

- O fijando $\rho = 0$ y calibrando v , α y β

En el presente trabajo consideraremos el primer caso tomando $\beta = 1$, por lo tanto el subyacente se distribuye de manera log-normal evitando así valores negativos en la tasa forward. A continuación se presenta un histórico cerca de 10 años de la TIIE28 donde se puede observar un valor mínimo de 3.3%, un valor máximo de 8.8% y un valor actual cerca de 6.8%, aún más vivimos un periodo de alza de tasas; por lo que tomar $\beta = 1$ es coherente con el comportamiento del subyacente y con la práctica del mercado.

En un ambiente de política monetaria de bajas tasas de interés incluso negativas como el caso de Europa, el modelo SABR se ajusta a este tipo de casos con $\beta = 0$.

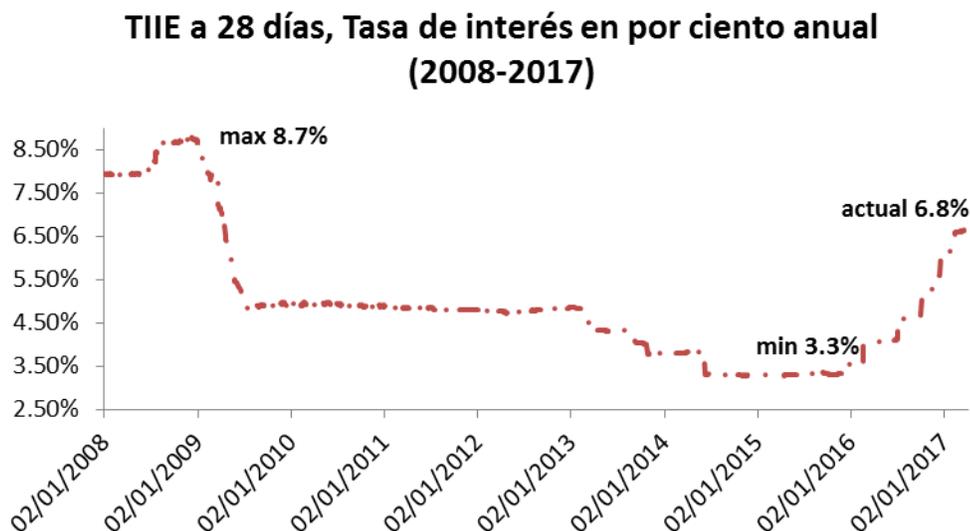


Figura 5-2.: Histórico de la TIIE28, con cifras publicadas por Banxico

Para encontrar los valores de v , α y ρ se minimiza el error cuadrático entre precios de mercado y precios calculados con las volatilidades forward bajo SABR para cada $K - strike$; es decir, se tendrá 7 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\min \sum_i \left[Precio(\sigma_{MKT_i}) - Precio(\sigma_B(\alpha, 1, \rho, v; K_i, f)) \right]^2 \quad \text{con } i = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$$

Diferencias								
364	ATM	-2%	-1%	-0.5%	0.5%	1%	2%	
Diff	9	5	- 22	12	- 17	- 19	26	2,065

Figura 5-3.: Diferencias entre MKT precios y precios bajo SABR

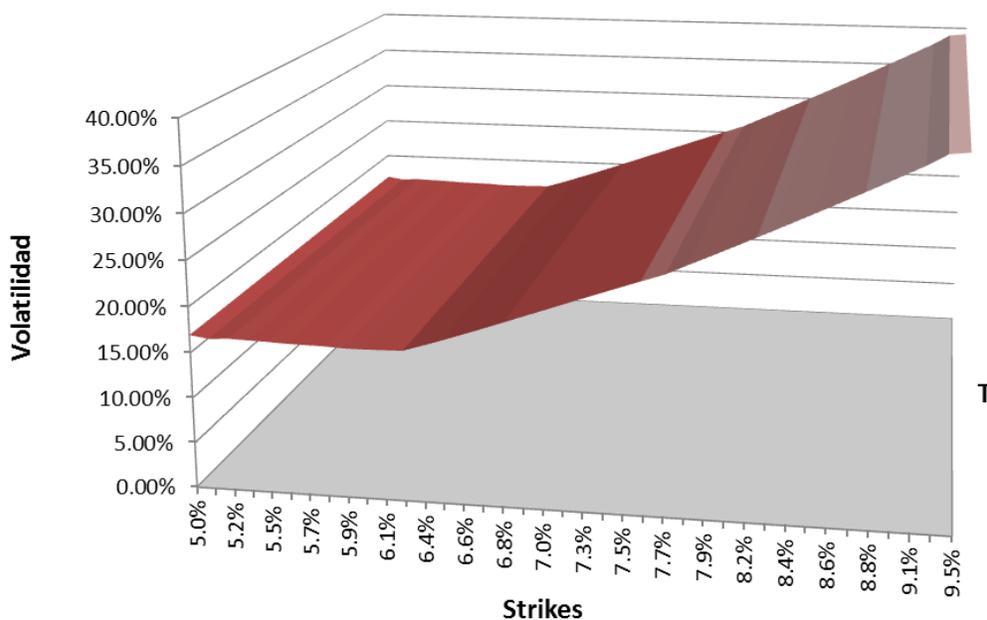
Para plazo de 1 año se considerará los parámetros v , α y ρ fijos para cada caplet-floorlet. En cambio para los plazos de 2 y 3 años a partir de la estructura de volatilidades forward generada para el plazo de 1 año, para los caplets-floorlets subsecuentes se supone una interpolación lineal en parámetros v , α y ρ para cada t_{ex}^j y de igual forma mediante Newton Raphson se minimiza el error cuadrático.

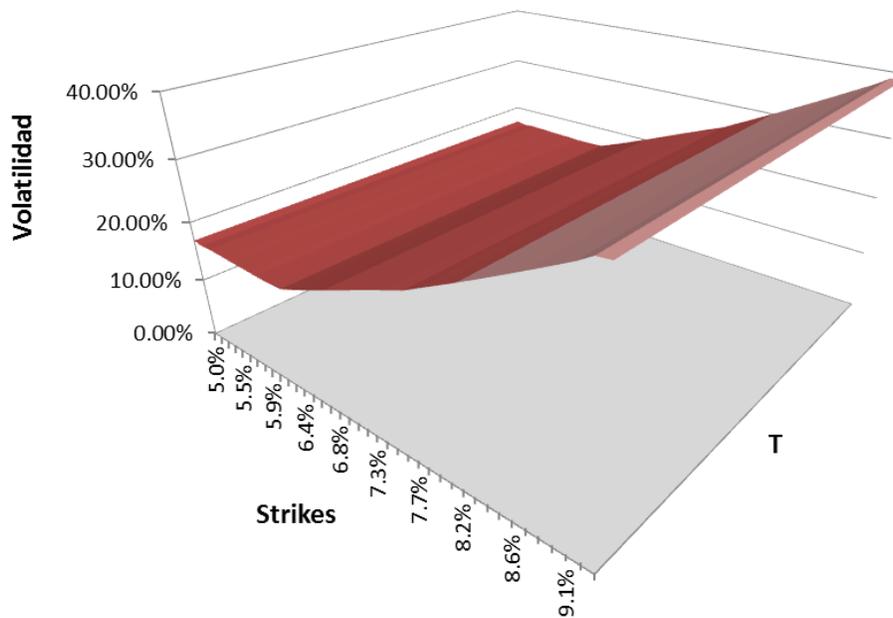
Calibración				
	beta	alpha	rho	nu.
364	1	0.1682	0.3681	0.5877
728	1	0.2421	0.3564	0.4285
1092	1	0.3322	0.2797	0.5066

Figura 5-4.: Valores de v , α y ρ para los plazos de 1, 2 y 3 años

5.3. Skew de volatilidad

La curva de volatilidad generada para opciones de TIEE28 para plazos dentro de los 3 años se presenta a continuación:





La implementación, fórmulas y procedimientos relacionados con este estudio se generó en Visual Basic. Referir a los Anexos A, B y C para mayor referencia.

5.4. Cálculo del precio y sensibilidades

Por último, se realiza la valuación de una opción de TIEE28 con un plazo de hasta 3 años y la variación en precio ante sensibilidades en los parámetros v , α y ρ para fines de cobertura.

Fecha de Valuación	29/04/2017		
Tipo de Opción	Cap		
Tipo de posición	Long		
Subyacente	TIEE28		
Plazo	364		
Convención	28/360		
Strike	7%		
Precio	0.0420872	Beta	1
Sensibilidad al skew	0.0024543	Alpha	0.168205
Sensibilidad a la correlación	- 0.0000046	Rho	0.368076
Sensibilidad a la vol de vol	0.0000234	Nu	0.587666

Figura 5-5.: Precio y griegas para un cap de TIEE28 con K=7% y plazo de 1 año

CAP de TIEE28	% Volatilidad
Volatilidad bajo SABR	17.32 %
Volatilidad implícita de mercado	17.94 %

Tabla 5-4.: Volatilidad bajo SABR y volatilidad implícita para un cap de TIEE28 con $K=7\%$ y plazo de 1 año

El precio de un cap sobre TIEE28 con precio de ejercicio igual a 7% , plazo 1 año, notional de \$ 1 y con volatilidades bajo SABR es igual a \$ 0.042088. La sensibilidad al parámetro α es igual a \$ 0.002454, monto necesario ante movimientos en el nivel σ_{ATM} , por su parte ante movimientos de $+0,01$ en la correlación entre subyacente y volatilidad, el parámetro ρ arroja un valor de - \$ 0.000005 y finalmente ante incremento de la volatilidad de la volatilidad misma, \$ 0.0000234 es la cantidad necesaria para cubrir pérdidas ante sensibilidad de v .

Fecha de Valuación	29/04/2017		
Tipo de Opción	Floor		
Tipo de posición	Long		
Subyacente	TIEE28		
Plazo	900		
Convención	28/360		
Strike	7%		
Precio	0.2569714	Beta	1
Sensibilidad al skew	0.0090600	Alpha	0.284675
Sensibilidad a la correlación	0.0000467	Rho	0.320664
Sensibilidad a la vol de vol	0.0003194	Nu	0.465236

Figura 5-6.: Precio y griegas para un floor de TIEE28 con $K=7\%$ y plazo de 2.5 años

FLOOR de TIEE28	% Volatilidad
Volatilidad bajo SABR	30.26 %
Volatilidad implícita de mercado	24.45 %

Tabla 5-5.: Volatilidad bajo SABR y volatilidad implícita para un floor de TIEE28 con $K=7\%$ y plazo de 2.5 años

El precio de un floor sobre TIE28 con precio de ejercicio igual a 7%, plazo 2.5 años, notional de \$ 1 y con volatilidades bajo SABR es igual a \$ 0.25697. La sensibilidad al parámetro α es igual a \$ 0.00906, monto necesario ante movimientos en el nivel σ_{ATM} , por su parte ante movimientos de +0,01 en la correlación entre subyacente y volatilidad, el parámetro ρ arroja un valor de \$ 0.0000047 y finalmente ante incremento de la volatilidad de la volatilidad misma, \$ 0.0003194 es la cantidad necesaria para cubrir pérdidas ante sensibilidad de v .

6. Conclusiones

Mediante el modelo SABR pudimos resolver la problemática de la volatilidad constante a través del cálculo de volatilidades forward para opciones de TIEE28 teniendo una estimación coherente con el mercado ya que en la calibración de los parámetros, éstos se determinan de tal forma que recuperamos los precios de mercado. Al derivar la superficie de volatilidad, no sólo somos capaces de calcular el precio y sensibilidades de una opción observada y operada en el mercado sino también es posible la valuación y la gestión de riesgos de opciones que no cotizan directamente en el mercado, como las opciones exóticas. Por ejemplo, una opción de TIEE28 tipo “range accrual”, donde el payoff está definido en términos del número de veces que la TIEE28 se encuentra dentro de un rango $[K_1, K_2]$, $K_2 > K_1$ en cada fecha de revisión establecidas a lo largo del plazo del derivado.

A lo largo de este estudio se deduce una posible mejora en la aproximación que arroja el modelo SABR en el corto plazo ya que al no contar con suficiente información se establece el mismo valor en parámetros para los primeros 12 caplets-floorlets de la estructura de un año; sin embargo, este supuesto se traduce en un aplanamiento de la curva de volatilidad, lo cual se asemejaría a considerar una volatilidad casi constante, pero al no contar con información representativa en el corto plazo se optó por este supuesto aunque podría fortalecerse.

Si bien los modelos de estimación de volatilidad no necesariamente reflejan el comportamiento real del subyacente, la volatilidad realmente observada, la posición final del instrumento o el impacto de factores de riesgo, son la alternativa que se han desarrollado para proyectar, estimar, calibrar y gestionar el comportamiento de la volatilidad en los mercados financieros. El modelo SABR es conveniente en casos donde se tienen pocos puntos en la superficie de mercado, para un mercado líquido y con varios puntos cotizando no es recomendable usarlo.

A manera de conclusión, ante un mercado financiero cambiante como el que vivimos hoy en día el modelo SABR representa una metodología viable para la estimación de volatilidades forward a través de superficies suaves y no arbitrables. La determinación de sus parámetros no sólo conllevan a derivar la superficie de volatilidad con insumos de mercado sino que también marca la pauta para modificar los parámetros en la búsqueda de una adecuada administración de riesgos financieros, o ante movimientos por expectativas de mercado o escenarios adversos.

A. Anexo: Implementación Bootstrapping en Visual Basic

Option Explicit

Public Function linear(ByVal tenors As Variant, ByVal rates As Variant, ByVal Term As Integer) As Double

Dim ren As Integer

Dim K As Integer

Dim m As Double

K = 2

ren = tenors.Rows.Count

If Term ≤ tenors(1) Then

linear = rates(1)

Exit Function

ElseIf Term ≥ tenors(ren) Then

linear = rates(ren)

Exit Function

Else

Do While Term > tenors(K)

K = K + 1

Loop

m = (Term - tenors(K - 1)) / (tenors(K) - tenors(K - 1))

*linear = m * rates(K) + (1 - m) * rates(K - 1)*

End If

End Function

Sub Boots()

Dim i As Integer

Dim objRate As String

```
Dim err As String
```

```
For i = 1 To 13
```

```
err = "U"& CStr(i + 6)
```

```
objRate = "Q"& CStr(i + 6)
```

```
Range(err).GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range(objRate)
```

```
Next i
```

```
End Sub
```

*Function par swap (ByVal tenors As Variant, ByVal discounts As Variant,
ByVal Term As Integer, ByVal Nodo1 As Double) As Double*

```
Dim Total As Integer
```

```
Dim i As Integer
```

```
Dim sum As Double
```

```
sum = 0
```

```
Total = (Term / 28)
```

```
For i = 1 To Total
```

```
sum = sum + (tenors(i) * discounts(i))
```

```
Next i
```

```
par swap = (Nodo1 - discounts(Total))/sum
```

```
End Function
```

*Public Function forwardrate (ByVal discounts As Variant, ByVal LongTerm
As Integer, ByVal ShorTerm As Integer) As Double*

```
forwardrate = ((discounts(ShorTerm)/discounts(LongTerm)) - 1)*  
                  (360/(LongTerm - ShorTerm))
```

```
End Function
```

B. Anexo: Implementación Black 76 en Visual Basic

Public Function Black76 (ByVal CapFloorFlag As String, ByVal position As String, ByVal VolFlag As String, ByVal K As Double, ByVal Term As Integer, ByVal sigma As Double, ByVal discountFactor As Variant) As Double

Dim d1 As Double, d2 As Double, t As Double, F As Double, i As Integer
*t = (28 * Term) / 360*

If Term = 1 Then
F = Sheets("MKT Data").Range("S5").Value

If CapFloorFlag = "c" Then
*sum = sum + discountFactor(28 * Term) * Application.WorksheetFunction.Max(F - K, 0)*
ElseIf CapFloorFlag = "f" Then
*sum = sum + discountFactor(28 * Term) * Application.WorksheetFunction.Max(K - F, 0)*
End If
Else
*F = forwardrate(discountFactor, 28 * Term, 28 * (Term - 1))*

If VolFlag = "par" Then
*d1 = ((Log(F/K) + (sigma²/2) * t))/(sigma * Sqr(t))*
*d2 = d1 - sigma * Sqr(t)*
Else
*d1 = ((Log(F/K) + (sigma²/2) * t))/(sigma * Sqr(t))*
*d2 = d1 - sigma * Sqr(t)*
End If

If CapFloorFlag = "c" Then
*sum = sum + discountFactor(28 * Term) * (F * Application.WorksheetFunction.NormSDist(d1)*
*- K * Application.WorksheetFunction.NormSDist(d2))*
ElseIf CapFloorFlag = "f" Then
*sum = sum - 1 * discountFactor(28 * Term) * (F * Application.WorksheetFunction.NormSDist(-d1)*
*- K * Application.WorksheetFunction.NormSDist(-d2))*

End If

End If

If position = "Short" Then

Black76 = -sum

Else

Black76 = sum

End If

End Function

C. Anexo: Implementación Modelo SABR en Visual Basic

```
Public Function CalcSABRVol(ByVal Term As Integer, ByVal discountFactor As Variant,  
ByVal K As Double, ByVal alpha As Double, ByVal beta As Double, ByVal rho As Double,  
ByVal nu As Double) As Double
```

```
Dim t1 As Double  
Dim t2 As Double  
Dim t5 As Double  
Dim t6 As Double  
Dim t9 As Double  
Dim t10 As Double  
Dim t16 As Double  
Dim t17 As Double  
Dim t18 As Double  
Dim t20 As Double  
Dim t25 As Double  
Dim t26 As Double  
Dim t29 As Double  
Dim t33 As Double  
Dim t41 As Double  
Dim t45 As Double  
Dim t54 As Double  
Dim fwd As Double  
Dim n As Integer  
Dim beginD As Date  
Dim CalcSABR As Double
```

```
t = (28 * Term) / 360
```

```
fwd = forward rate(discountFactor, 28 * Term, 28 * (Term - 1))
```

```
If K = fwd Then K = K * (1 + 0.00000001)
```

```
t1 = 1 - beta
```

```

t2 = t1 * t1
t5 = Log(fwd / K)
t6 = t5 * t5
t9 = t2 * t2
t10 = t6 * t6
t16 = rho * nu
t17 = 1 / alpha
t18 = K * fwd
t20 = t18(t1/2)
t25 = nu * nu
t26 = alpha * alpha
t29 = t20 * t20
t33 = (1 - 2 * t16 * t17 * t20 * t5 + t25/t26 * t29 * t6)0,5
t41 = Log((t33 + nu * t17 * t20 * t5 - rho) / (1 - rho))
t45 = t18t1
t54 = rho * rho

CalcSABR = 1 / (1 + t2 * t6 / 24 + t9 * t10 / 1920) * nu * t5 / t41 *
(1 + (t2 * t26 / t45 / 24 + alpha * beta * t16 / t20 / 4 + (2 - 3 * t54) * t25 / 24) * t)

CalcSABRVol = CalcSABR

End Function

```

Bibliografía

- [1] BLACK, Fischer ; DERMAN, Emanuel ; TOY, William: A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options.
- [2] BLACK, Fischer ; SCHOLLES, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities.
- [3] BRIGO, Damiano ; MERCURIO, Fabio: *Interest Rate Models Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance, 2006
- [4] COX, J. C. ; INGERSOLL ; ROSS: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. 53 (1985), p. 385–407
- [5] DUPIRE, Bruno: Pricing with a smile. 7 (1994), p. 32–39
- [6] FILIPOVIC, Damir: *Term Structure Models*. Viena : Springer, 2009
- [7] HAGAN, Patrick ; KUMARY, Deep ; LESNIEWSKI, Andrew ; WOODWARD, Diana: Managing Smile Risks.
- [8] HANSEN, Skov: *The SABR model theory and application*, Copenhagen Business School, Tesis de Grado, 2011
- [9] HARRISON, Michael ; KREPS, David: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets.
- [10] HESTON, S. I.: A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options.
- [11] HULL, John: *Options Futures and Other Derivatives*. Toronto : PrenticeHall, 2011
- [12] DE JESÚS, Raúl: *Modelación de productos derivados aplicando el método de Martingalas*, Universidad Nacional Autónoma de México, Tesis de Grado, 2001
- [13] RINCÓN, Luis: *Introducción a los procesos estocásticos*. México : Facultad de Ciencias, UNAM, 2012
- [14] VENEGAS, Francisco: *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Ediciones Paraninfo, 2006