



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Paseos, ciclos y trayectorias en gráficas coloreadas  
por aristas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
Matemático

PRESENTA:  
Carlos Alberto Vilchis Alfaro

DIRECTORA DE TESIS  
Dra. Hortensia Galeana Sánchez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mis padres Eduardo y Martha.  
A mis hermanos Isabel y Eduardo.*



# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y, en particular, a la Facultad de Ciencias por abrirme sus puertas para poder estudiar una carrera.

**A mi tutora** Hortensia, por los consejos, las enseñanzas, la paciencia y el tiempo que me brindó.

**A mis sinodales** Laura, Rocío, Eugenia y Mucuy, por el tiempo y consejos para mejorar este trabajo. En especial a Laura quien me introdujo a la teoría de gráficas.

**A mis padres** Eduardo y Martha, que con su cariño, apoyo, esfuerzo y sacrificio permitieron que terminara mis estudios. Sin ustedes nada de esto sería posible.

**A mis hermanos** Isabel y Eduardo, por estar a mi lado y procurar siempre lo mejor para mi.

**A mis abuelos** Margarito y Concepción, por cuidar de mi toda mi infancia y ser como unos padres.

**A mis tíos y primos** por siempre alentarme a seguir adelante. En particular a la familia Alfaro del Ángel por ser como mi segunda familia.

**A mis amigos** por tantos momentos de risas y aprendizajes que pasamos juntos.

**A los miembros de los cursos** por todo lo que me enseñaron durante esos dos años. En especial a Gregorio por darme la oportunidad de formar parte de ese gran equipo.

**Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108715 Operaciones en gráficas y digráficas e IN104717 Operaciones en gráficas y digráficas II.** Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



# Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	V
Introducción	VII
<b>1. Definiciones</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	1
1.2. Digráficas . . . . .	12
1.3. Multigráficas coloreadas por aristas . . . . .	17
<b>2. Paseos Eulerianos</b>	<b>26</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	26
2.2. Paseos Eulerianos bien coloreados . . . . .	27
<b>3. Ciclo y trayectorias bien coloreados</b>	<b>45</b>
3.1. Ciclos bien coloreados . . . . .	45
3.2. Trayectorias bien coloreadas . . . . .	57
<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>





# Introducción

Una gráfica  $G$  es una pareja ordenada  $G = (V(G), A(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto de elementos finito, no vacío y  $A(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V(G)$ . A los elementos del conjunto  $V(G)$  les llamaremos vértices de  $G$  y a los elementos del conjunto  $A(G)$  les llamaremos aristas de  $G$ . La arista  $a = uv$  es un lazo si  $u = v$ . Si dos aristas distintas,  $u, v$ , hacen adyacentes a los mismos vértices diremos que  $u$  y  $v$  son aristas paralelas. Una gráfica simple es una gráfica que no tiene lazos ni aristas múltiples, en otro caso  $G$  es una pseudográfica. Una multigráfica es una pseudográfica sin lazos. Una gráfica coloreada por aristas es una gráfica tal que cada arista tiene un color y dos aristas paralelas no tienen el mismo color.

Un camino  $C = (u_0, a_0, u_1, a_1, \dots, u_n)$  es una sucesión alternada de vértices y aristas tal que  $a_i = u_i u_{i+1} \in A(G)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Un paseo es un camino que no repite aristas. Una trayectoria es un camino que no repite vértices. Un ciclo es un camino cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último. Un camino (paseo, ciclo o trayectoria)  $C$  en  $G$  está bien coloreado si dos aristas consecutivas de  $C$  no tienen el mismo color.

Se ha trabajado mucho con gráficas y multigráficas coloreadas por aristas obteniendo resultados importantes, por ejemplo, Abouelaoualim, Das, De la Vega, Karpinski, Manoussakis, Martinhon y Saad [1] demostraron que para  $G$  una multigráfica  $c$ -coloreada por aristas con  $n$  vértices y  $\delta_{mon}(G) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ , es decir en cada vértice inciden al menos  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$  aristas de cada color. Si  $c \geq 3$  o  $c = 2$  y  $n$  par, entonces  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano bien coloreado. Si  $c = 2$  y  $n$  impar, entonces  $G$  tiene un ciclo bien coloreado de longitud  $n-1$ .

En gráficas bipartitas y gráficas completas 2-coloreadas por aristas, se han obtenido resultados interesantes sobre ciclos y trayectorias alternantes de longitud máxima. Verbigracia, Saad [18] demostró que la longitud del ciclo alternante más largo en  $G$ , una multigráfica completa 2-coloreada por

aristas y color-conectada, es igual al número de vértices en la subgráfica ciclo alternante máxima de  $G$ , donde una subgráfica ciclo alternante de  $G$  es la unión de ciclos bien coloreados, todos ajenos por vértices; y es máxima si tiene el mayor número de vértices entre todas las subgráficas ciclo alternantes de  $G$ .

Bang-Jensen y Gutin dedicaron un capítulo en [3] al estudio de gráficas coloreadas por aristas, en el que recopilaron los teoremas antes enunciados y otros resultados importantes, entre ellos, el Teorema de Kotzig y el Teorema de Yeo.

Además de la parte teórica se han encontrado diversas aplicaciones de ciclos, trayectorias y paseos eulerianos bien coloreados en diferentes campos, por ejemplo, en ciencias sociales y genética. En esta última, Bennett [7, 14] menciona que en algún momento durante la división celular, las cromátidas se ordenan formando una cadena continua con los brazos unidos a su centrómero, y colocados adyacentes al brazo de otro cromátida de tamaño similar, como se muestra en la figura 1.



Figura 1: a) Estructura general de una cromátida. b) Acomodo de una cromátida: si el número de cromátidas es par, la cadena se cierra formando una estrella.

Para el caso cuando el número de cromátidas es par, Dorninger [9, 10] notó que la idea de tamaño similar de Bennett no siempre resultaba en una cadena continua, como él aseguraba. Entonces Dorninger [9] generalizó la idea de "tamaño similar" de la siguiente manera:

Sea  $c_i$  el brazo corto y  $l_i$  el brazo largo de la cromátida  $i$ . Renombrar las cromátidas de tal forma que  $c_i$  es más largo que  $c_j$ , si  $i < j$  y sea  $\pi$  una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $l_{\pi(i)}$  es más largo que  $l_{\pi(j)}$  si  $i < j$ .

Se dice que dos brazos cortos  $c_i$  y  $c_j$  (dos brazos largos  $l_{\pi(i)}$  y  $l_{\pi(j)}$ ),  $i \neq j$ , son  $k$ -*semejantes* si  $|i - j| \leq k$ . Cuando  $k = 1$  se obtiene la idea de "tamaño similar" de Bennett.

Dorninger [9] analizó la consistencia de la generalización utilizando el siguiente modelo de teoría de gráficas:

Sea  $G(n, k, \pi)$  una multigráfica 2-coloreada por aristas con el conjunto de vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ . La subgráfica roja (azul) de  $G(n, k, \pi)$  consiste de las aristas  $ij$ ,  $i \neq j$ , tal que  $c_i$  y  $c_j$  ( $l_{\pi(i)}$  y  $l_{\pi(j)}$ ) son  $k$ -semejante. ¿Cuándo  $G(n, k, \pi)$  tiene un ciclo hamiltoniano alternante?

Un ciclo hamiltoniano alternante es un ciclo bien coloreado que pasa por todos los vértices de la gráfica. Se busca que la gráfica contenga un ciclo hamiltoniano alternante puesto que un ciclo hamiltoniano representa la cadena continua cerrada y la alternancia indica que brazos son adyacentes en la cadena, es decir, si los vértices  $i$  y  $j$  son adyacentes en el ciclo con una arista de color rojo (azul), entonces los brazos cortos (largos) de las cromátidas  $i$  y  $j$  se colocan adyacentes en la cadena.

En este trabajo se estudiarán las gráficas coloreadas por aristas, en particular, se estudian paseos, ciclos y trayectorias bien coloreadas. En este sentido, con la finalidad de dar las bases para un estudio a profundidad del tema. Para cumplir los objetivos la presente tesis estará conformada por los siguientes capítulos:

El Capítulo 1 proporciona una introducción teórica de Teoría de Gráficas, que incluye conceptos básicos de gráficas, digráficas y multigráficas, tales como, paseos, ciclos y trayectorias bien coloreadas. Así mismo, contiene la notación y teoremas utilizados en la tesis.

El Capítulo 2 está centrado en paseos eulerianos bien coloreados, teniendo como resultado principal el Teorema de Kotzig [15], el cual nos da condiciones suficientes y necesarias para que una multigráfica coloreada por aristas tenga un paseo euleriano bien coloreado. Además se presentan las transformaciones de orden para multigráficas 2-coloreadas por aristas, introducidas por Pevzner en [17], que preservan el patrón alternante de los paseos eulerianos alternantes.

En el Capítulo 3 se habla de ciclos y trayectorias bien coloreadas en gráficas coloreadas por aristas. La primera sección está enfocada en resolver el problema: *Dada una gráfica coloreada por aristas, verificar si está contiene un ciclo bien coloreado*. Este problema fue trabajado por Grossman y Häggkvist en [12] y Yeo en [19], dando como resultado principal el Teorema de Yeo [19].

La segunda sección está centrada en el problema: *Dada una gráfica coloreada por aristas encontrar la longitud de la trayectoria bien coloreada de longitud máxima.* Teniendo como resultado principal una cota inferior relacionando el grado mínimo monocromático de la gráfica con la longitud mínima que debe tener la trayectoria de longitud máxima.

# Capítulo 1

## Definiciones

En este capítulo se definen conceptos básicos y resultados que se utilizarán en el texto.

### 1.1. Conceptos básicos

Una **gráfica**  $G$  es una pareja ordenada  $G = (V(G), A(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto de elementos finito, no vacío y  $A(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V(G)$ . A los elementos del conjunto  $V(G)$  les llamaremos **vértices** de  $G$  y a los elementos del conjunto  $A(G)$  les llamaremos **aristas** de  $G$ .

Si  $a = \{u, v\} \in A(G)$ , nos referiremos a la arista  $a$  como  $uv$ , decimos que  $u$  es adyacente a  $v$ , además diremos que  $a$  incide en  $u$  y en  $v$ . La arista  $uv$  es un **lazo** si  $u = v$ . Si dos aristas distintas,  $a, b$ , hacen adyacentes a los mismos vértices diremos que  $a$  y  $b$  son **aristas paralelas** y que  $G$  tiene aristas múltiples.

Si una gráfica  $G$  no tiene lazos ni aristas múltiples diremos que  $G$  es una **gráfica simple**, en otro caso  $G$  es una **pseudográfica**. A las pseudográficas sin lazos les llamaremos **multigráficas**. La figura 1.1 nos muestra la representación geométrica de una gráfica simple, una pseudográfica y una multigráfica. En esta sección nos enfocaremos en las gráficas simples y a lo largo del texto nos referiremos a las gráficas simples como gráficas.

El **orden** de una gráfica  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $V(G)$ , lo denotaremos por  $p$ . El **tamaño** de  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $A(G)$ , denotado por  $q$ .

El **grado** de un vértice  $v$ , denotado por  $d_G(v)$ , es el número de aristas que inciden en  $v$ , si no existe ambigüedad entonces se escribirá  $d(v)$ . El **grado mínimo** de  $G$  lo definimos como  $\min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ , denotado por  $\delta(G)$ .

La **vecindad** de un vértice  $v$  es el conjunto  $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in A(G)\}$ . La cardinalidad de  $N(v)$  es igual al grado de  $v$ .

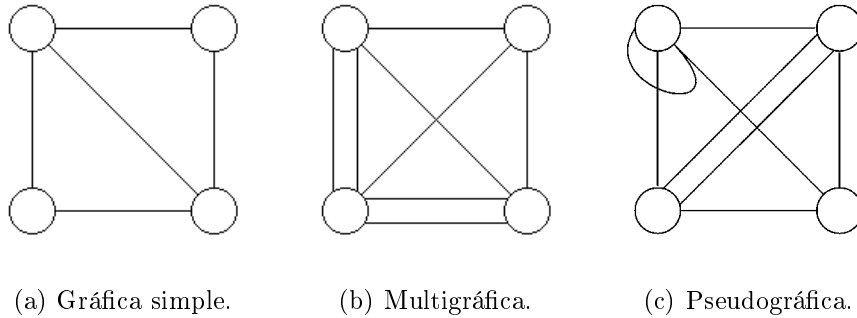


Figura 1.1: Ejemplos de gráficas.

Existen clases especiales de gráficas, entre ellas están las gráficas regulares, las completas y las bipartitas. La gráfica trivial consiste de un sólo vértice y no tiene aristas. Una gráfica  $G$  es  **$r$ -regular** si  $d(v) = r$  para todo  $v \in V(G)$ . Una gráfica  $G$  es **completa** si es de orden  $p$  y  $(p-1)$ -regular, dado que sólo existe una gráfica completa de orden  $p$ , la denotaremos por  $K_p$ .

Una gráfica  $G$  es  **$r$ -partita** si existe una partición de  $V(G)$  en  $r$  clases, tal que toda arista de  $G$  tiene sus extremos en clases diferentes. Si  $G$  es  $2$ -partita, decimos que  $G$  es **bipartita**. Una gráfica  $r$ -partita, donde cada par de vértices de distintas clases son adyacentes se llama gráfica  $r$ -partita **completa** o **multipartita completa**. La siguiente figura muestra un ejemplo de una gráfica completa y una gráfica bipartita.

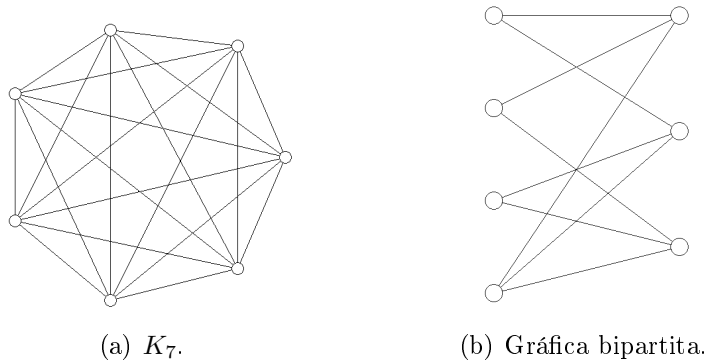
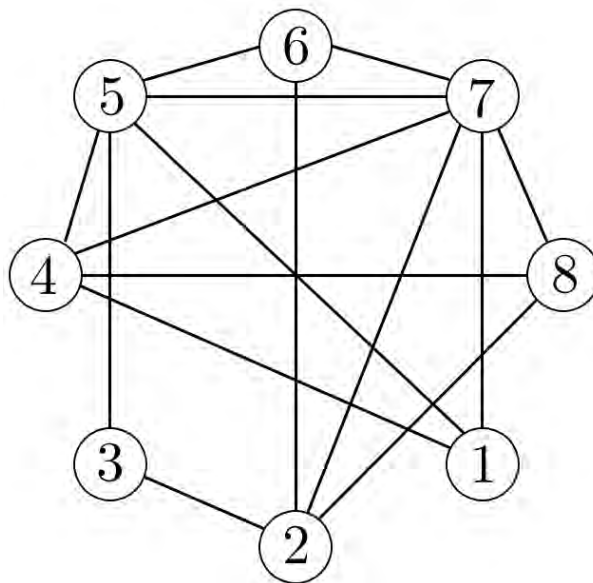
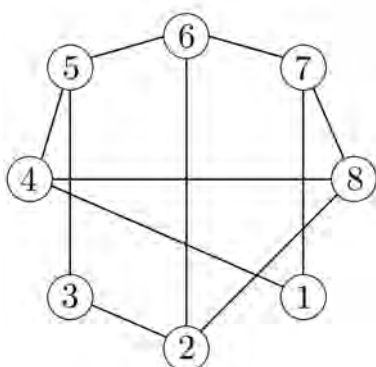
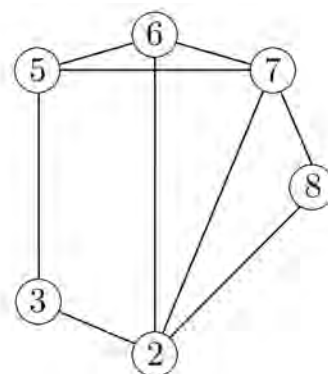


Figura 1.2

Una **subgráfica**  $H$  de una gráfica  $G$ , es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $A(H) \subseteq A(G)$  y toda arista en  $A(H)$  incide en vértices de  $V(H)$ . Una subgráfica  $H$  es una **subgráfica inducida** de  $G$  si  $H$  es una subgráfica de  $G$  y  $xy \in A(H)$  si y sólo si  $xy \in A(G)$ ,  $\{x, y\} \subseteq V(H)$ . Si  $S \subseteq V(G)$ , decimos que  $G[S]$  es una **subgráfica inducida por**  $S$ , si  $G[S]$  es una gráfica inducida de  $G$  y tiene a  $S$  como conjunto de vértices. Diremos que  $H$  es una **subgráfica generadora** si  $V(H) = V(G)$ . En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de una subgráfica inducida y una subgráfica generadora.

(a) Gráfica  $G$ .(b) Subgráfica generadora de  $G$ .(c) Subgráfica inducida de  $G$ .Figura 1.3: Ejemplos de subgráficas de  $G$ .



La figura 1.4 muestra dos gráficas que a primera vista parecen distintas pero después de un pequeño análisis notamos que es la misma gráfica representada gráficamente de distinta forma. Con esta idea damos el concepto de gráficas isomorfas. Decimos que dos gráficas  $G$  y  $H$  son **isomorfas**, denotado por  $G \cong H$ , si existe una función biyectiva  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $u$  es adyacente a  $v$  en  $G$  si y sólo si  $\varphi(u)$  es adyacente a  $\varphi(v)$  en  $H$ .

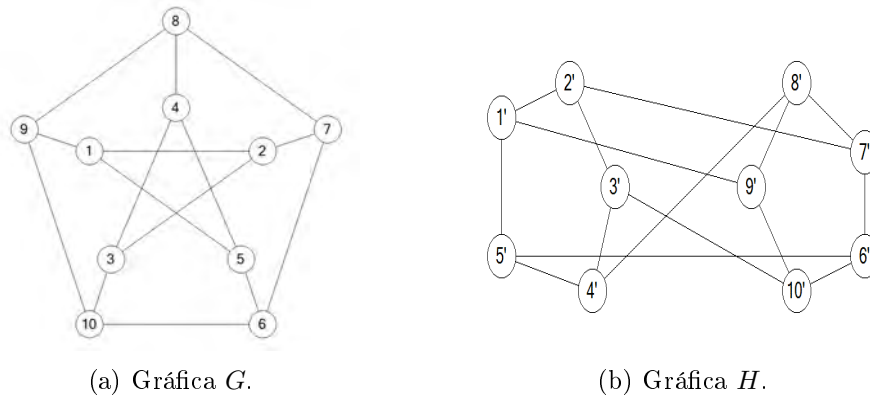


Figura 1.4: Las gráficas  $G$  y  $H$  son isomorfas. Esta gráfica es conocida como la gráfica de Petersen. Petersen dibujo la gráfica  $H$  pero actualmente es más común dibujarla como la gráfica  $G$ .

Un **camino** es una sucesión de vértices  $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que  $(u_i, u_{i+1}) \in A(G)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Diremos que la **longitud** del camino  $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  es  $n$  y la denotaremos por  $l(C)$ . Si  $C$  es un camino que empieza en  $u_0$  y termina en  $u_n$  diremos que  $C$  es un  $u_0u_n$ -camino. Si  $C$  es un  $u_0u_n$ -camino y  $u_0 = u_n$  diremos que  $C$  es un **camino cerrado**. Un **paseo** es un camino que no repite aristas, si el paseo empieza y termina en el mismo vértice decimos que es un **paseo cerrado**. Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices. Un **ciclo**  $\gamma = (u_1, \dots, u_n, u_1)$ , denotado por  $C_n$ , es un camino cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último y  $n \geq 3$ . Si

Una gráfica  $G$  es **conexa** si para todo par de vértices existe un camino entre ellos, es decir, para todo  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  existe un  $uv$ -camino. Se denomina **componente conexa** de  $G$  a una subgráfica conexa máxima por contención de  $G$  con la propiedad de ser conexa y el número de componentes conexas de  $G$  se denotará por  $w(G)$ . Notemos que si  $G$  es conexa  $w(G) = 1$ . Un conjunto  $V \subseteq V(G)$  es un **conjunto de corte por vértices**, si  $w(G) < w(G - V)$ . Si un conjunto  $W \subseteq A(G)$  es tal que  $w(G) < w(G - W)$  diremos que  $W$  es un **conjunto de corte por aristas**. Diremos que  $v \in V(G)$  es un **vértice de**

**corte** si  $V = \{v\}$  es un conjunto de corte por vértices. Una arista  $a \in A(G)$  es un **punte** si  $W = \{a\}$  es un conjunto de corte por aristas. Véase figura 1.5.

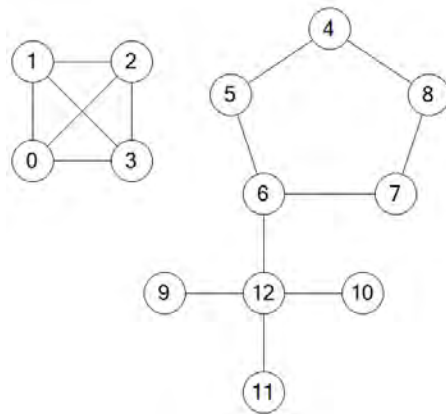


Figura 1.5: Esta gráfica no es conexa y sus dos componentes conexas son las subgráficas inducidas por los vértices  $\{0, 1, 2, 3\}$  y  $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Además los vértices 6 y 12 son vértices de corte y las aristas incidentes en 12 son puentes.

Decimos que  $P$  es un **paseo euleriano** si  $P$  es un paseo que contiene a todas las aristas de  $G$ . Una gráfica  $G$  es **euleriana** si tiene un paseo euleriano cerrado. La figura 1.6 tiene el paseo euleriano  $P = (3, 2, 1, 4, 0, 1, 3, 4, 2)$ .

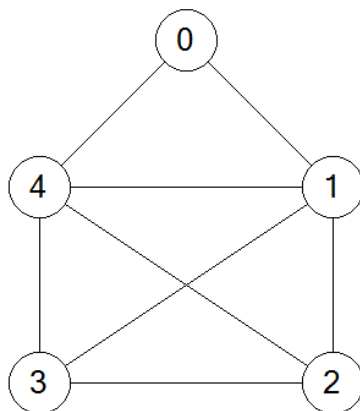


Figura 1.6: Esta es una gráfica con un paseo euleriano pero no es una gráfica euleriana pues no contiene un paseo euleriano cerrado.

**Lema 1.1.** *Sea  $G$  una gráfica con  $\delta(G) \geq 2$ . Entonces  $G$  contiene un ciclo.*

**Demostración.**

Sea  $G$  una gráfica con  $\delta(G) \geq 2$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $G$  es conexa, pues si  $G$  no es conexa podemos tomar cualquier componente conexa de  $G$ .

Como  $\delta(G) \geq 2$  tenemos que  $|V(G)| \geq 3$ . Sea  $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  con  $n \geq 2$ . Consideramos  $T$  la trayectoria de longitud máxima de  $G$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $T = (v_0, v_1, \dots, v_m)$  con  $m \leq n$ . Notemos que  $m \geq 2$ , puesto que  $v_1$  es adyacente al menos a dos vértices,  $v_0$  y  $v_2$ . Como  $d(v_m) \geq 2$  y al ser  $T$  de longitud máxima existe  $v_i \neq v_{m-1}$  adyacente a  $v_m$  con  $i \in \{0, 1, \dots, m-2\}$ . Entonces  $\gamma = (v_m, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m)$  es un ciclo en  $G$ . □

El siguiente teorema nos da una caracterización de las gráficas eulerianas, además de ser una propiedad muy sencilla de verificar.

**Teorema 1.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $G$  es euleriana.
2.  $d(v)$  es par para todo  $v \in V(G)$ .
3. Existe una partición de  $A(G)$  en ciclos.

**Demostración.**

[1. $\implies$ 2.] Sea  $G$  una gráfica euleriana, entonces existe  $P$  un paseo euleriano. Como  $A(P) = A(G)$ , entonces  $d_P(v) = d_G(v)$  para todo  $v \in V(G)$ . Sea  $x \in V(P)$ , si  $x$  no es el vértice inicial de  $P$  cada vez que aparece  $x$  en  $P$  dos aristas de  $P$  inciden en  $x$ , si  $x$  aparece  $n$  veces, entonces  $d_P(v) = 2n = d_G(v)$ , ésto debido a que ninguna arista se repite por ser  $P$  un paseo. Si  $x$  es el vértice inicial de  $P$ , igual que el caso anterior cada vez que aparece  $x$  en  $P$  inciden dos aristas, además en  $x$  inciden la primera y última arista de  $P$ . Por lo que  $d_P(x)$  es par.

[2. $\implies$ 3.] Sea  $G$  una gráfica conexa tal que  $d(v)$  es par para todo  $v \in V(G)$ . Entonces  $d(v) \geq 2$  y por el Lema 1.1,  $G$  tiene un ciclo  $\gamma_0$ .

Consideramos  $G' = G - A(\gamma_0)$ ,  $d_{G'}(v)$  es par para todo  $v \in V(G')$ .

Si  $G' = K_1 \cup K_1 \cup \dots \cup K_1$  acabamos  $\{\gamma_0\}$  es una partición de las aristas de  $G$  en ciclos.

Si no,  $G'_1 = G' - \{x \in V(G) \mid d_{G'}(x) = 0\}$  y para todo  $v \in V(G'_1)$   $d_{G'_1}(v) \geq 2$ . Entonces existe un ciclo  $\gamma_1$  en  $G'_1$ .

Consideremos  $G^2 = G_1' - A(\gamma_1)$ .

Si  $G^2 = K_1 \cup K_1 \cup \dots \cup K_1$ , entonces acabamos  $\{\gamma_0, \gamma_1\}$  es una partición de las aristas de  $G$  en ciclos.

Si no,  $G_1^2 = G^2 - \{x \in V(G^2) \mid d_{G^2}(x) = 0\}$  y para todo  $v \in V(G_1^2)$   $d_{G_1^2}(v) \geq 2$ . Entonces existe un ciclo  $\gamma_2$  en  $G_1^2$ .

Continuando con este procedimiento, como  $G$  es finita, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $G^m = K_1 \cup K_1 \cup \dots \cup K_1$  y  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$  son ciclos tales que  $A(\gamma_i) \cap A(\gamma_j) = \emptyset$  y  $\cup_{i=0}^{m-1} A(\gamma_i) = A(G)$ .

Por lo tanto,  $P = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}\}$  es una partición de las aristas de  $G$  en ciclos.

[3. $\implies$ 1.] Sea  $P = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  una partición de las aristas de  $G$  en ciclos.

Consideramos  $x \in V(\gamma_1)$ . Entonces  $P_1 = (x, \gamma_1, x)$  es un paseo cerrado. Si  $A(P_1) = A(G)$ , entonces acabamos  $P_1$  es un paseo euleriano cerrado.

Si no, al ser  $G$  conexa existe  $\gamma_{i_1} \in P$  tal que  $V(\gamma_1) \cap V(\gamma_{i_1}) \neq \emptyset$ . Sea  $x_1 \in V(\gamma_1) \cap V(\gamma_{i_1})$ , entonces  $P_2 = (x_1, \gamma_1, x_1, \gamma_{i_1}, x_1)$  es un paseo cerrado. Si  $A(P_2) = A(G)$ , entonces acabamos  $P_2$  es un paseo euleriano cerrado.

Si no, como  $G$  es conexa existe  $\gamma_{i_2} \in P$  tal que  $V(P_2) \cap V(\gamma_{i_2}) \neq \emptyset$ . Sea  $x_2 \in V(P_2) \cap V(\gamma_{i_2})$ , entonces  $P_3 = (x_2, P_2, x_2, \gamma_{i_2}, x_2)$  es un paseo cerrado. Si  $A(P_3) = A(G)$  acabamos  $P_3$  es un paseo euleriano cerrado.

Si no, continuamos con este procedimiento y como  $G$  es finita, existe  $P_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , tal que  $A(P_t) = A(G)$  y  $P_t$  es un paseo cerrado.

Por lo tanto  $G$  es euleriana.  $\square$

Sea  $G$  una gráfica, un ciclo  $\gamma$  es **hamiltoniano** si  $V(G) = V(\gamma)$ . Diremos que  $G$  es una gráfica **hamiltoniana** si tiene un ciclo hamiltoniano. Una trayectoria  $T$  es **hamiltoniana** si  $V(G) = V(T)$ .

El siguiente teorema es uno de los teoremas más conocidos que nos da una condición suficiente para que una gráfica sea hamiltoniana.

**Teorema 1.3. (Ore 1).** *Sea  $G$  una gráfica con  $p$  vértices. Si  $d(v) + d(u) \geq p$  para todo  $u, v \in V(G)$  tal que  $u$  no es adyacente a  $v$ , entonces  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano.*

### Demostración.

Si una gráfica  $G$  cumple que  $d(v) + d(u) \geq p$  para todo  $u, v \in V(G)$  tal que  $u$  no es adyacente a  $v$  diremos que  $G$  cumple Ore 1.

Supongamos que existe una gráfica  $H$  que cumple Ore 1 y  $H$  no es hamiltoniana. A partir de  $H$  construimos una gráfica  $G$  agregando aristas a  $H$  hasta obtener una gráfica  $G$  tal que  $G$  no es hamiltoniana y cualquier arista que agreguemos a  $G$  la hace hamiltoniana.

Observemos que  $G$  cumple Ore 1 y no es completa porque  $H$  cumple Ore 1 y las gráficas completas son hamiltonianas. Como  $G$  no es completa existen

$\{x, y\} \in V(G)$  tal que  $x$  no es adyacente a  $y$  en  $G$ . Como  $G$  cumple Ore 1 tenemos que  $d_G(x) + d_G(y) \geq p$ . Por definición de  $G$ ,  $G + xy$  es hamiltoniana.

Como  $G$  no es hamiltoniana, todos los ciclos hamiltonianos de  $G + xy$  contienen la arista  $xy$ . Consideremos  $\gamma$  un ciclo hamiltoniano de  $G + xy$ ,  $xy \in A(\gamma)$ . En  $G$ ,  $T = \gamma - xy$  es una trayectoria hamiltoniana. Más aún, inicia en  $x$  y termina en  $y$ . Expresemos a  $T$  como  $T = (x = v_1, v_2, \dots, v_p = y)$ .

Consideremos los conjuntos:

$$S = \{v_i \in V(G) \mid v_{i+1}x \in A(G)\} \text{ y}$$

$$Q = \{v_i \in V(G) \mid v_iy \in A(G)\}.$$

Los cuales cumplen lo siguiente:

1)  $S \cap Q = \emptyset$ .

Supongamos que  $S \cap Q \neq \emptyset$ , entonces existe  $v_i \in S \cap Q$ . Entonces  $v_{i+1}$  es adyacente a  $x$  y  $v_i$  es adyacente a  $y$ . Por lo que  $\gamma' = (x = v_1, v_2, \dots, v_i, y = v_p, v_{p-1}, v_{p-2}, \dots, v_{i+1}, x = v_1)$  es un ciclo hamiltoniano en  $G$ , contradicción ya que  $G$  no es hamiltoniana. Por lo tanto  $S \cap Q = \emptyset$ .

2)  $|S \cup Q| < p$ .

Como  $y$  no es adyacente a  $y$ ,  $y \notin Q$  y como  $v_{p+1} \notin V(G)$ ,  $y = v_p \notin S$ . Por lo que  $y \notin S \cup Q$  y por ende  $|S \cup Q| < p$ .

3)  $|S| = d(x)$  y  $|Q| = d(y)$ .

Por definición de  $Q$ ,  $|Q| = d(y)$ . Como  $x = v_1$  no es adyacente a  $x = v_1$  entonces  $|S| = d(x)$ , ésto por que el conjunto  $S$  toma en cuenta a todos los vértices excepto a  $v_1$ .

Por 1), 2) y 3) tenemos que  $d(x) + d(y) = |S| + |Q| < p$ , contradiciendo que  $G$  cumple Ore 1.

Por lo tanto  $G$  es hamiltoniana. □

**Teorema 1.4. (Dirac).** Si  $G$  es una gráfica de orden  $p$  tal que  $d(v) \geq p/2$  para todo  $v \in V(G)$ , entonces  $G$  es hamiltoniana.

**Demostración.**

·) Si  $G$  es completa, entonces  $G$  es hamiltoniana.

·) Si no es completa, entonces para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  no adyacentes  $d(u) + d(v) \geq p/2 + p/2 = p$ . Por el teorema anterior,  $G$  es hamiltoniana. □

Un **apareamiento**  $M$ , de una gráfica  $G$ , es un subconjunto de  $A(G)$  tal que para todo  $\{a, b\} \in M$   $a$  no inciden en el mismo vértice con  $b$ . Decimos que dos vértices de  $G$ ,  $u$  y  $v$ , están  **$M$ -apareados** si  $uv \in M$ . Un vértice  $u$

está  **$M$ -saturado** si incide una arista de  $M$  en  $u$ . Un apareamiento  $M$  es **máximo** si no existe otro apareamiento  $M'$  tal que  $|M| < |M'|$ . Decimos que un apareamiento  $M$  es **perfecto** si  $M$  satura a todos los vértices de  $G$ .

**Teorema 1.5. (Tutte).** *Una gráfica  $G$  tiene un apareamiento perfecto si y sólo si  $o(G - S) \leq |S|$  para todo subconjunto propio  $S$  de  $V(G)$ , donde  $o(G - S)$  es el número de componentes conexas de orden impar de  $G - S$ .*

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Sean  $G$  una gráfica,  $M$  un apareamiento perfecto de  $G$  y  $S \subseteq V(G)$ .

Consideremos  $G - S$ . Sean  $G_1, G_2, \dots$  y  $G_m$  las componentes conexas impares de  $G - S$ . Como  $M$  es un apareamiento perfecto existe  $x_i \in V(G_i)$   $i = 1, 2, \dots, m$  tal que  $x_i$  está  $M$ -apareado con un vértice  $v_i \in S$  como se muestra en la figura 1.7.

Como  $M$  es un apareamiento  $v_i \neq v_j$  para todo  $i, j, i \neq j$ . Por lo que  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq S$ , entonces  $m = o(G - S) \leq |S|$ .

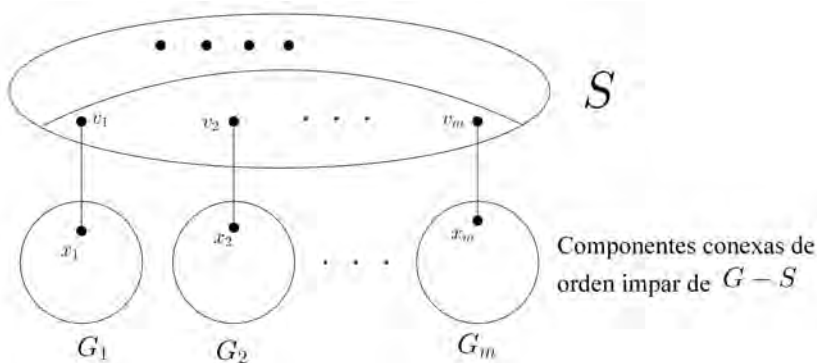


Figura 1.7

[ $\impliedby$ ] Sea  $G$  una gráfica la cual cumple que  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ .

Observemos que si  $S = \emptyset$ , entonces  $o(G - S) = o(G) = 0$ . Por lo tanto  $G$  tiene un número par de vértices.

Supongamos que  $G$  no tiene un apareamiento perfecto, entonces  $G$  es una subgráfica generadora de una gráfica  $G^*$  máxima por aristas con la propiedad de no tener un apareamiento perfecto. Está la podemos obtener agregando aristas a  $G$  y esta bien definida pues  $K_p$ , con  $p$  par, tiene un apareamiento perfecto.

Sea  $S \subseteq V(G^*) = V(G)$ , como  $G - S$  es una subgráfica generadora de  $G^* - S$ ,  $o(G^* - S) \leq o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G^*)$ .

Sea  $U \subseteq V(G^*)$  tal que  $U = \{x \in V(G^*) \mid d(x) = p - 1\}$ .  
 Observemos  $U \neq V(G^*)$  pues  $G^*$  no es completa.  
 Consideremos  $G^* - U$ , por lo anterior  $G^* - U \neq \emptyset$ .

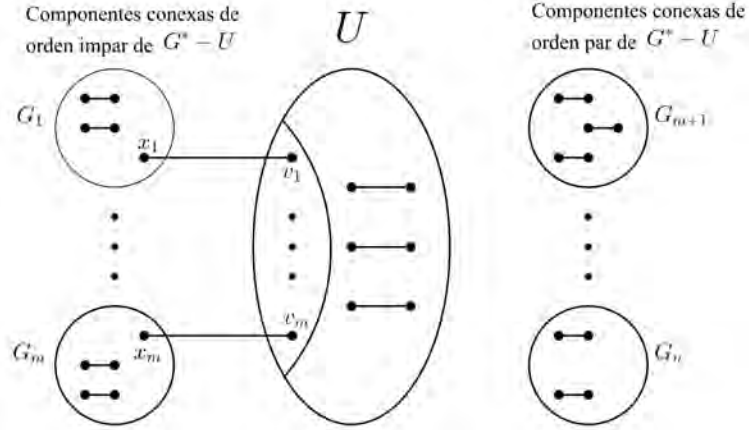


Figura 1.8

1) Si las componentes conexas de  $G^* - U$  son gráficas completas, entonces podemos aparear un vértice de las componentes conexas de orden impar con un vértice de  $U$  y los demás vértices los podemos aparear con alguien de su misma componente como se muestra en la figura 1.8, contradiciendo el hecho de que  $G^*$  no tiene apareamiento perfecto.

2) Si existe una componente conexa  $G_i$  de  $G^* - U$  tal que no es completa. Como  $G_i$  no es completa existen  $x, y, z$  en los vértices de  $G_i$  tal que  $x$  es adyacente a  $y$ ,  $y$  es adyacente a  $z$  y  $x$  no adyacente a  $z$ . Como  $y \notin U$ , existe  $w \in V(G^* - U)$  tal que  $y$  no es adyacente a  $w$ .

Dado que  $G^*$  es máxima por aristas, definimos  $M_1$  un apareamiento perfecto en  $G^* + xz$  y  $M_2$  un apareamiento perfecto en  $G^* + yw$ . Observemos que  $xz \in M_1$  y  $yw \in M_2$ .

Definimos  $P$  como la trayectoria de longitud máxima en  $G^*$  que empieza en  $w$  y que va alternando arista entre  $M_1$  y  $M_2$  empezando con una arista en  $M_1$ . Sea  $P = (w = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ .

a) Si  $x_{n-1}x_n \in M_1$ ,  $v = y$  en otro caso podemos seguir con una arista en  $M_2$ . En este caso definimos  $C = P + yw$  como se muestra en la figura 1.9.

b) Si  $x_{n-1}x_n \in M_2$ , entonces  $v \in \{x, z\}$ , en otro caso podemos continuar con una arista en  $M_1$ . En este caso definimos  $C = P + vy + yw$  como se muestra en la figura 1.9.

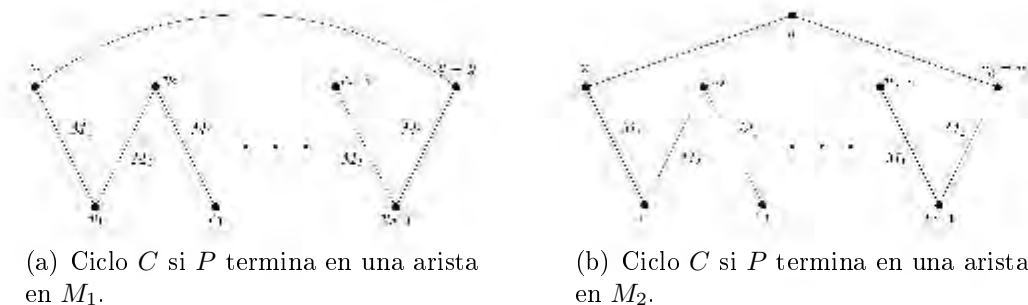


Figura 1.9

Notemos que  $C$  es un ciclo en  $G + yw$  de longitud par. Definimos  $M = M_2 \triangle C$ . Veamos que  $M$  es un apareamiento perfecto en  $G^*$ .

Todos los vértices que no están en el ciclo  $C$  están  $M$  apareados de la misma forma que están  $M_2$  apareados y los vértices que están en  $C$  están  $M$  apareados con las aristas del apareamiento  $M_1$ . La siguiente figura muestra los dos posibles casos del apareamiento  $M$  de los vértices en  $C$  dependiendo de la última arista de  $P$ .

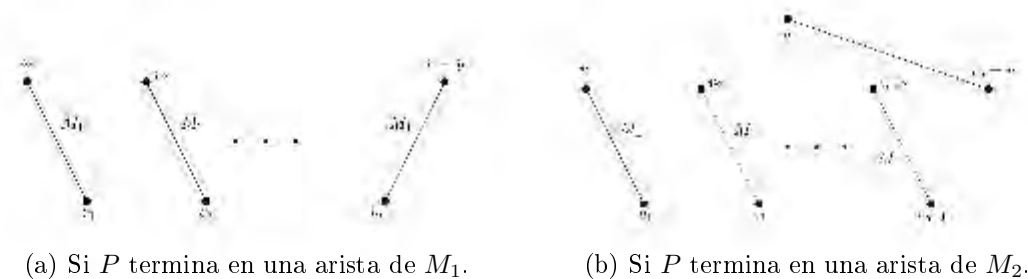


Figura 1.10: Apareamiento  $M$  de los vértices en  $C$ .

Por lo tanto  $M$  es un apareamiento perfecto en  $G^*$ , lo que contradice el hecho de que  $G^*$  no tiene un apareamiento perfecto.

Por lo tanto, los dos casos no son posibles y  $G$  tiene un apareamiento perfecto.

□



## 1.2. Digráficas

Una **digráfica**  $D$  es una pareja ordenada  $D = (V(D), F(D))$  donde  $V(D)$  es un conjunto de elementos finito, no vacío y  $F(D)$  es un conjunto de pares ordenados de elementos distintos de  $V(D)$ . Al conjunto  $V(D)$  le llamamos **conjunto de vértices** de  $D$  y a sus elementos los llamaremos **vértices**. El conjunto  $F(D)$  recibe el nombre de **conjunto de flechas** de  $D$  y a sus elementos los llamaremos **flechas**.

El **orden** de una digráfica  $D$  es el número de vértices en  $D$  y el **tamaño** de  $D$  es el número de flechas en  $D$ . Si  $a = (u, v) \in F(D)$ ,  $u$  es el inicio y  $v$  es el final de  $a$ , también decimos que  $a$  sale de  $u$  y entra a  $v$ . Se dice que  $u$  **domina** a  $v$  si  $(u, v) \in F(D)$ . Un vértice  $u$  **incide** en la flecha  $a$  si  $u$  es el inicio o el final de  $a$ .

El **ingrado** de un vértice  $v$ , denotado por  $d^-(v)$ , es el número de flechas que entran a  $v$ , mientras que el **exgrado** de  $v$ , denotado por  $d^+(v)$ , es el número de flechas que salen de  $v$ . El **grado** de  $v$ , denotado por  $d(v)$ , es el número de flechas que inciden en  $v$ . Notemos que  $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$ .

La **invecindad** de  $v \in V(G)$  es el conjunto  $\Gamma^-(v) = \{u \in V(D) \mid (u, v) \in F(D)\}$ , la **exvecindad** de  $v$  es el conjunto  $\Gamma^+(v) = \{u \in V(D) \mid (v, u) \in F(D)\}$ . La **vecindad** de  $v$  es el conjunto  $\Gamma(v) = \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$ . Notemos que el  $d(v) = |\Gamma(v)|$ , el  $d^-(v) = |\Gamma^-(v)|$  y el  $d^+(v) = |\Gamma^+(v)|$ .

En la figura 1.11 tenemos que  $d^-(a) = 1$ ,  $d^+(a) = 4$ ,  $d^-(c) = 3$ ,  $d^+(c) = 1$ ,  $d^-(e) = 3$ ,  $d^+(e) = 2$ .  $\Gamma^-(b) = \{a, c\}$ ,  $\Gamma^+(b) = \{a, d, e\}$ ,  $\Gamma^-(d) = \{a, b, e\}$  y  $\Gamma^+(d) = \{c, e\}$ .

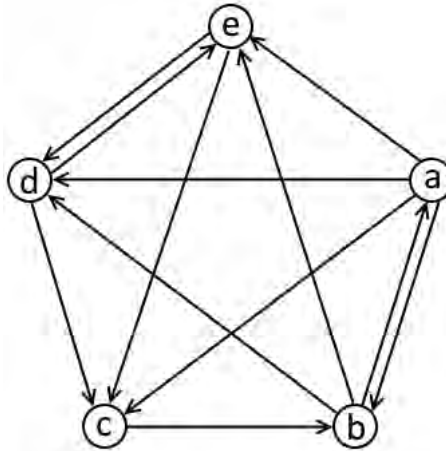


Figura 1.11: Digráfica  $D$ .

Una digráfica  $H$  es una **subdigráfica** de una digráfica  $D$  si  $V(H) \subseteq V(D)$ ,  $F(H) \subseteq F(D)$  y toda flecha en  $F(H)$  incide en vértices de  $V(H)$ . Si  $V(H) = V(D)$ , decimos que  $H$  es una **subdigráfica generadora** de  $D$ . Si toda flecha de  $F(D)$  que sale y entra de vértices en  $V(H)$  está en  $F(H)$ , decimos que  $H$  es una digráfica **inducida** por  $V(H)$ , y denotamos  $H = D\langle V(H) \rangle$ .

Decimos que dos digráficas  $G$  y  $H$  son **isomorfas**, denotado por  $G \cong H$ , si existe una función biyectiva  $\phi : V(D) \rightarrow V(H)$  tal que  $(u, v) \in F(G)$  si y sólo si  $(\phi(u), \phi(v)) \in F(H)$ .

Un **camino dirigido** en una digráfica  $D$  es una sucesión de vértices  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Un camino dirigido  $C$  es **cerrado** si  $v_0 = v_n$ . Decimos que  $C$  es un camino dirigido de  $v_0$  a  $v_1$  o bien es un  $v_0v_n$ -camino dirigido. La **longitud** de un camino dirigido  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  es  $n$  y lo denotamos con  $l(C)$ . Un **paseo dirigido** es un camino dirigido que no repite flechas. Un paseo dirigido es **cerrado** si empieza y termina en el mismo vértice. Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices. Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último de longitud mayor o igual a 2. La figura 1.12 nos muestra un ejemplo de un ciclo dirigido y una trayectoria dirigida de una digráfica.

**Proposición 1.6.** *Si  $D$  es una digráfica tal que  $d^+(v) \geq k \geq 1$  para todo  $v \in V(D)$ , entonces  $D$  contiene un ciclo dirigido de longitud al menos  $k+1$ .*

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica tal que  $d^+(v) \geq k \geq 1$  para todo  $v \in V(D)$  y  $T$  la trayectoria dirigida de longitud máxima en  $D$ . Supongamos que  $T = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ .

Como  $T$  es de longitud máxima, toda flecha que sale de  $x_m$  debe entrar a un vértice en  $T$ . Además como  $d^+(x_m) \geq k$  tenemos que  $m \geq k$ .

Sea  $x_n$  el primer vértice en  $T$  tal que  $(x_m, x_n) \in F(D)$ , entonces  $C = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, x_n)$  es un ciclo dirigido en  $D$ . Como  $d^+(x_m) \geq k$  entre  $x_n$  y  $x_m$  hay al menos  $k-1$  vértices y  $k$  flechas en  $T$ , por lo que  $l(C) \geq k+1$ .  $\square$

La **gráfica subyacente** de una digráfica  $D$ ,  $SG(D)$ , es la gráfica obtenida al reemplazar cada flecha  $(u, v) \in F(G)$  o la pareja simétrica de flechas  $(u, v), (v, u)$ , por la arista  $uv$ . La figura 1.13 nos muestra un ejemplo de una gráfica subyacente de una digráfica.

Una digráfica  $D$  es **débilmente conexa** si la subgráfica subyacente es conexa. Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si para cualesquiera dos

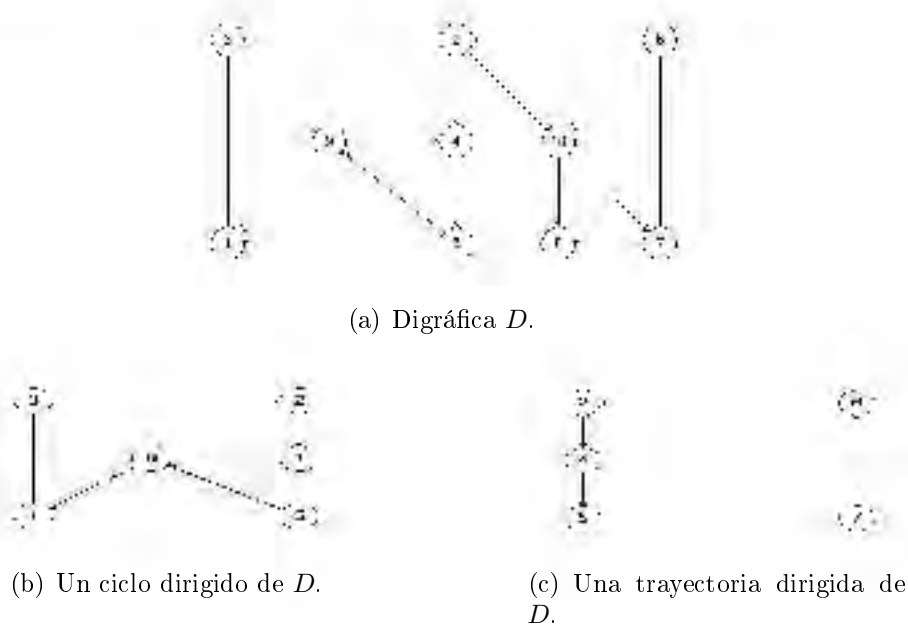


Figura 1.12: Ejemplos de trayectoria dirigida y ciclo dirigido.

vértices  $u, v$  existe en  $D$  tanto una  $uv$ -trayectoria dirigida como una  $vu$ -trayectoria dirigida.

Una **componente fuertemente conexa** de una digráfica  $D$  es una subdigráfica inducida máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa. En la figura 1.12 las subdigráficas  $D\langle\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}\rangle$ ,  $D\langle\{6, 7, 10\}\rangle$  y  $D\langle\{8\}\rangle$  son las componentes fuertemente conexas de la digráfica  $D$ .

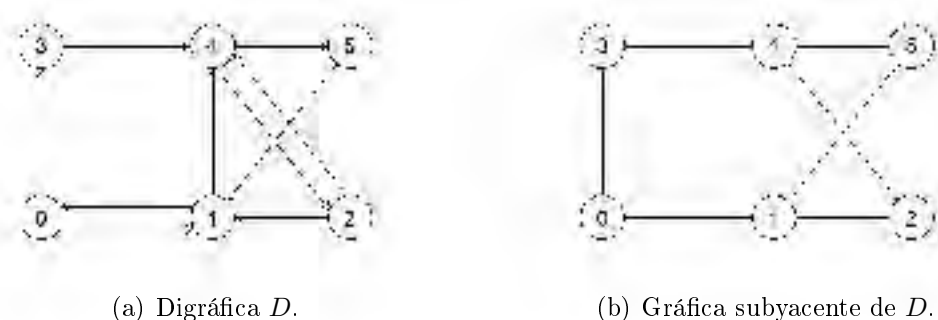


Figura 1.13: Ejemplos de gráfica subyacente.

Una **paseo euleriano** en una digráfica  $D$  es un paseo dirigido cerrado que contiene todas las flechas de  $G$ . Decimos que la digráfica  $D$  es **euleriana**

si tiene un paseo euleriano cerrado. La digráfica de la figura 1.14 es euleriana pues tiene el paseo euleriano cerrado  $P = (0, 1, 3, 4, 2, 3, 0, 2, 4, 1, 0)$

Un ciclo dirigido  $\gamma$  en una digráfica  $D$  es un **ciclo hamiltoniano** si  $V(D) = V(\gamma)$ . Una trayectoria dirigida  $T$  en una digráfica  $D$  es una **trayectoria hamiltoniana** si  $V(D) = V(T)$ . Decimos que  $D$  es **hamiltoniana** si tiene un ciclo hamiltoniano. Si  $D$  tiene una trayectoria hamiltoniana decimos que es **trazable**. La digráfica de la figura 1.14 tiene el ciclo hamiltoniano:

$$C = (0, 2, 3, 4, 1, 0).$$

**Teorema 1.7.** *Si  $D$  es una digráfica de orden  $n$  tal que  $d^+(x) \geq n/2$  y  $d^-(x) \geq n/2$  para cualquier vértice  $x$  de  $D$ , entonces  $D$  es hamiltoniana.*

### Demostración.

Si  $n = 2$  o  $n = 3$  es claro que el teorema se cumple.

Supongamos que la afirmación es falsa. Entonces existe una digráfica  $D$  de orden  $n$ ,  $n \geq 4$ , que satisface la hipótesis pero que no es hamiltoniana. Sea  $C$  un ciclo dirigido en  $D$  de longitud máxima, digamos que  $l(C) = k$ . Como  $d^+(x) \geq n/2$  para todo  $x \in V(D)$  y  $D$  no es hamiltoniana, entonces  $1 + n/2 \leq k < n$  esto por la Proposición 1.6. También, sea  $P$  una trayectoria dirigida de longitud máxima tal que ningún vértice de  $P$  pertenece a  $C$ .

Digamos,  $P$  una  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud  $l$ . Por construcción tenemos que  $k + l + 1 \leq n$  pues  $P$  tiene  $l + 1$  vértices,  $C$  tiene  $k$  vértices,  $V(P) \cap V(C) = \emptyset$  y  $G$  es de orden  $n$ .

Entonces  $l \leq n - k - 1 \leq n - (1 + n/2) - 1 = n/2 - 2$ , de donde  $l \leq n/2 - 2$ . Como  $P$  es de longitud máxima con la propiedad de no tener vértices en común con  $C$ , de  $v$  sólo salen flechas a vértices de  $P$  o a vértices de  $C$ ; además como  $d^+(v) \geq n/2$  tenemos que salen al menos dos flechas de  $v$  a vértices de  $C$ . Con el mismo razonamiento tenemos que a  $u$  entran al menos dos flechas de vértices de  $C$ . Sea  $a$  el número de vértices en  $C$  que dominan a  $u$ , por lo anterior  $a \geq 2$ . Para todo vértice  $x$  en  $C$  que domina a  $u$ , los siguientes  $l + 1$  vértices que siguen a  $x$  en  $C$  no son dominados por  $v$ , de lo contrario,  $D$  tendría un ciclo dirigido de longitud mayor a  $k$ .

Como  $C$  contiene vértices dominados por  $v$ , debe existir un vértice  $y$  en  $C$  que domine a  $u$  tal que ninguno de los  $l + 1$  vértices siguientes a  $y$  en  $C$  dominen a  $u$  o sean dominados por  $v$ , pues si no existe  $y$  no existiría un vértice de  $C$  que sea dominado por  $v$ .

Para cada uno de los  $a - 1$  vértices en  $C$  que son distintos a  $y$  y que dominan a  $u$ , el vértice posterior a éste en  $C$  no puede ser dominado por  $v$ , de lo contrario existiría un ciclo dirigido de longitud mayor a  $k$ . Por lo tanto,

al menos  $(a - 1) + (l + 1) = a + l$  vértices en  $C$  no son dominados por  $v$ , de lo contrario, nuevamente,  $D$  tendría un ciclo dirigido de longitud mayor a  $k$ .

Como  $d^-(u) \geq n/2$  y los únicos vértices de  $D$  que pueden dominar a  $u$  pertenecen a  $C$  o a  $P$ , se sigue que  $a + l \geq n/2$ . Por lo tanto,  $v$  domina a lo más a  $(n - 1) - (a + l)$  vértices, pero  $(n - 1) - (a + l) \leq n - 1 - n/2 = n/2 - 1$  lo que contradice que  $d^+(v) \geq n/2$ .

Por lo tanto  $D$  es hamiltoniana. □

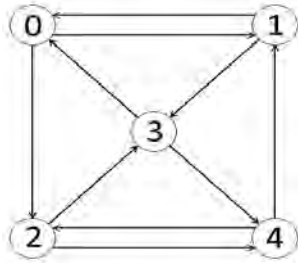


Figura 1.14: Ejemplo de una digráfica euleriana y hamiltoniana.

### 1.3. Multigráficas coloreadas por aristas

Una **multigráfica coloreada por aristas** es una multigráfica tal que cada arista tiene un color y dos aristas paralelas no tienen el mismo color. Si el número de colores está restringido por un entero  $c$ , hablamos de una multigráfica  **$c$ -coloreada por aristas**, donde los enteros  $1, 2, \dots, c$  denotan los colores de las aristas. Si  $c = 2$  decimos que el color 1 es *rojo* y el color 2 es *azul*.

La **subgráfica roja** de una multigráfica  $G$ , 2-coloreada por aristas consiste de los vértices de  $G$  y todas las aristas de color rojo de  $G$ .

Sea  $G$  una multigráfica  $c$ -coloreada por aristas y  $v \in V(G)$ , definimos la  **$j$ -ésima vecindad** de  $v$ , denotada por  $N_j(v)$ , como el conjunto  $N_j(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in A(G), \chi(uv) = j\}$ ,  $1 \leq j \leq c$ , donde  $\chi(uv)$  es el color de la arista  $uv$ . El  **$j$ -ésimo grado** de  $v$  en  $G$  es  $d_j^G(v) = |N_j(v)|$ , si no existe confusión escribiremos  $d_j(v)$  en lugar de  $d_j^G(v)$ .

El **conjunto de colores** de  $v$ , denotado por  $\chi(v)$ , es  $\chi(v) = \{i \mid 1 \leq i \leq c, N_i(v) \neq \emptyset\}$ . El **máximo grado monocromático** de  $G$  está definido por  $\Delta_{mon}(G) = \max\{d_j(v) \mid v \in V(G), 1 \leq j \leq c\}$ . El **mínimo grado monocromático** de  $G$  está definido por  $\delta_{mon}(G) = \min\{d_j(v) \mid v \in V(G), 1 \leq j \leq c\}$ . La figura 1.15 es una multigráfica 3-coloreada por aristas donde  $d_2(x_1) = 2$ ,  $d_3(x_4) = 2$ ,  $N_1(x_5) = \{x_4, x_6\}$ .

Si  $X$  y  $Y$  son dos conjuntos de vértices de  $G$ . Entonces  $XY$  denota el conjunto de todas las aristas que tiene un vértice final en  $X$  y el otro en  $Y$  y  $\chi(XY)$  es el conjunto de colores de las aristas en  $XY$ .

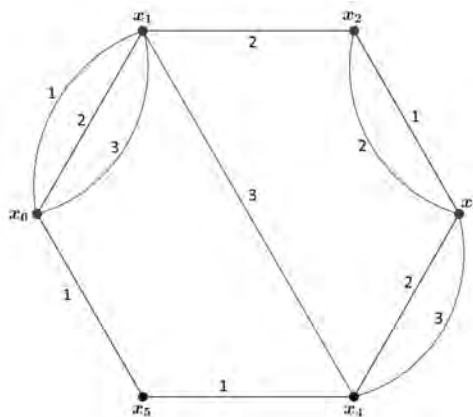


Figura 1.15: Multigráfica 3-coloreada.

Dos multigráficas coloreadas por aristas  $G$  y  $H$  son **color-isomorfas** si existe un isomorfismo  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $\chi(xy) = \chi(\varphi(x)\varphi(y))$  para

todo par de distintos vértices  $x, y$  de  $G$ . En la figura 1.16 se muestra un ejemplo de dos gráficas color-isomorfas.

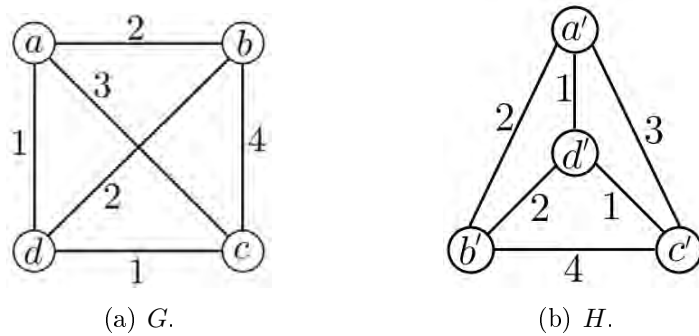


Figura 1.16: El isomorfismo  $\varphi(x) = x'$  hace a  $G$  y  $H$  color-isomorfas.

Un camino  $C$  en  $G$  está **bien coloreado** si dos aristas consecutivas de  $C$  no tienen el mismo color. Si  $G$  es una multigráfica 2-coloreada por aristas y  $C$  es un camino bien coloreado en  $G$ , diremos que  $C$  es **alternante**. Una  **$m$ -trayectoria-ciclo bien coloreado** de  $G$ , denotada por  $F_m$ , es la unión de  $m$ -trayectorias bien coloreadas y un número de ciclos bien coloreados de  $G$ , todos ajenos por vértices. Cuando  $m = 0$ , llamaremos a  $F_0$  subgráfica ciclo bien coloreado. En la figura 1.17 se dan ejemplos de  $m$ -trayectoria-ciclo bien coloreado de una gráfica  $G$ .

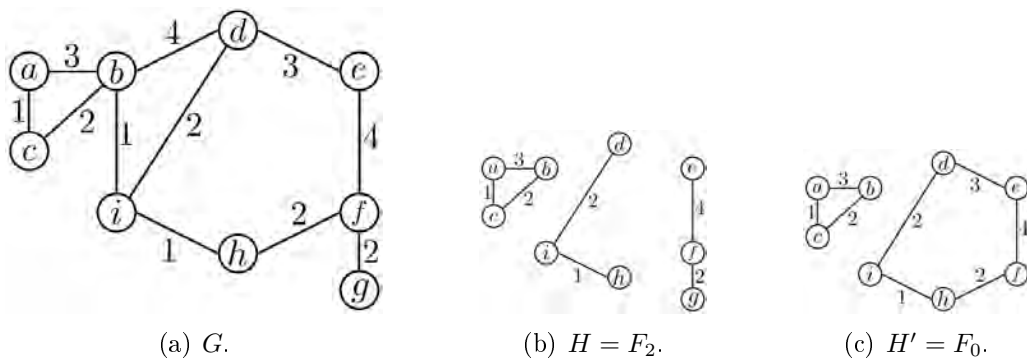


Figura 1.17:  $H$  es una 2-trayectoria ciclo bien coloreado de  $G$ , notar que si a  $H$  le quitamos el ciclo también es una 2-trayectoria ciclo bien coloreado.  $H'$  es una subgráfica ciclo bien coloreado.

La siguiente transformación generaliza la estructura de los ciclos dirigidos y las trayectorias dirigidas de digráficas, esta transformación es atribuida a Häggkvist en [16]. Sea  $D$  una digráfica. Hacemos la multigráfica  $G$  2-coloreada

por aristas reemplazando cada flecha  $(x, y)$  de  $D$  en dos aristas  $xz_{xy}$  de color rojo y  $z_{xy}y$  de color azul agregando un nuevo vértice  $z_{xy}$ . En la figura 1.18 se muestra un ejemplo de como se obtiene  $G$  al aplicar esta transformación.

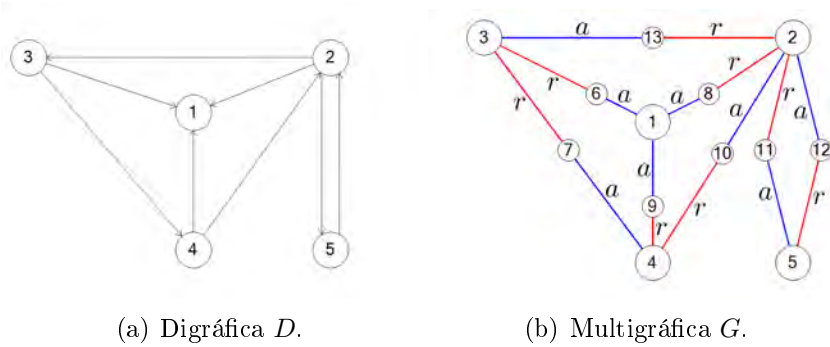


Figura 1.18:  $G$  fue obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$ .

**Proposición 1.8.** *Si  $D$  es una digráfica y  $G$  es la multigráfica 2-coloreada por aristas obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$ , entonces toda  $uv$ -trayectoria alternante en  $G$ , con  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  corresponde a una  $uv$ -trayectoria dirigida en  $D$  o a una  $vu$ -trayectoria dirigida en  $D$ .*

**Demostración.**

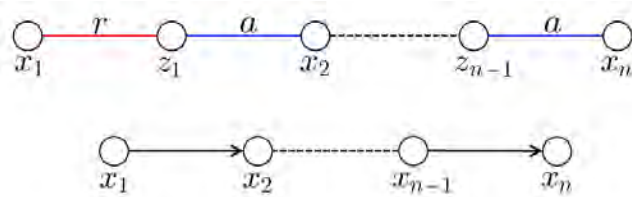
Sean  $D$  una digráfica,  $G$  la multigráfica obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$  y  $T = (u = x_1, z_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_{n-1}, x_n = v)$  una trayectoria alternante en  $G$ , con  $z_i \in V(G) - V(D)$ , para toda  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Notemos que los vértices que se agregan tienen grado 2, es decir,  $d_G(z) = 2$  para todo  $z \in V(G) - V(D)$ . Además en cada vértice inciden dos aristas de un color distinto.

Tenemos los siguientes dos casos:

- 1) La arista  $x_1z_1$  es de color rojo.

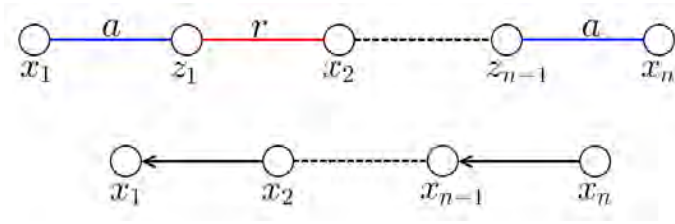
Dado que  $T$  es alternante y  $x_1z_1$  es color roja, entonces  $x_iz_i$  es de color rojo y  $z_ix_{i+1}$  es de color azul, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Como  $x_iz_i$  es de color rojo y  $z_ix_{i+1}$  es de color azul tenemos que en  $D$   $x_ix_{i+1} \in F(D)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Por lo tanto  $T' = (u = x_1, x_2, \dots, x_n = v)$  es una trayectoria dirigida en  $D$ .





2) La arista  $x_1z_1$  es de color azul.

Dado que  $T$  es alternante y  $x_1z_1$  es de color azul, entonces  $x_iz_i$  es de color azul y  $z_ix_{i+1}$  es de color rojo, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Como  $x_iz_i$  es de color azul y  $z_ix_{i+1}$  es de color rojo tenemos que en  $D$   $x_{i+1}x_i \in F(D)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Por lo tanto  $T' = (v = x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 = u)$  es una trayectoria dirigida en  $D$ .



En ambos casos obtenemos una trayectoria dirigida en  $D$ . □

**Proposición 1.9.** *Si  $D$  es una digráfica y  $G$  es la multigráfica 2-coloreada por aristas obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$ , entonces todo ciclo alternante en  $G$  corresponde a un ciclo dirigido en  $D$ .*

**Demostración.**

Sean  $D$  una digráfica,  $G$  la multigráfica 2-coloreada por aristas obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$  y  $C = (x_1, z_1, x_2, \dots, x_n, z_n, x_1)$  un ciclo en  $G$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la arista  $x_1z_1$  es de color rojo.

Por la Proposición 1.8, la trayectoria  $P = (x_1, z_1, x_2, \dots, x_n)$  corresponde a una  $(x_1x_n)$ -trayectoria dirigida y la trayectoria  $P' = (x_n, z_n, x_1)$  corresponde a una  $(x_nx_1)$ -trayectoria dirigida.

Por lo tanto  $C = P \cup P'$  es un ciclo bien coloreado. □

En la figura 1.19,  $G$  fue obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$ . En  $G$ ,  $C' = (6, 8, 4, 9, 1, 10, 5, 11, 2, 13, 6)$  es un ciclo alternante y  $T' = (0, 15, 3, 12, 5, 11, 2, 13, 6)$  es una trayectoria alternante. Entonces  $C'$  y  $T'$  corresponden a  $C = (6, 4, 1, 5, 2, 6)$  el cual es un ciclo dirigido en  $D$  y  $T = (0, 3, 5, 2, 6)$  que es una trayectoria dirigida en  $D$ , respectivamente.

Una multigráfica  $G$  es **k-completa** si existen al menos  $k$  aristas entre todo par de vértices, si  $k = 1$  diremos que  $G$  es una multigráfica completa. Denotaremos a la multigráfica completa de  $n$  vértices,  $c$ -coloreada por aristas como  $K_n^c$ .

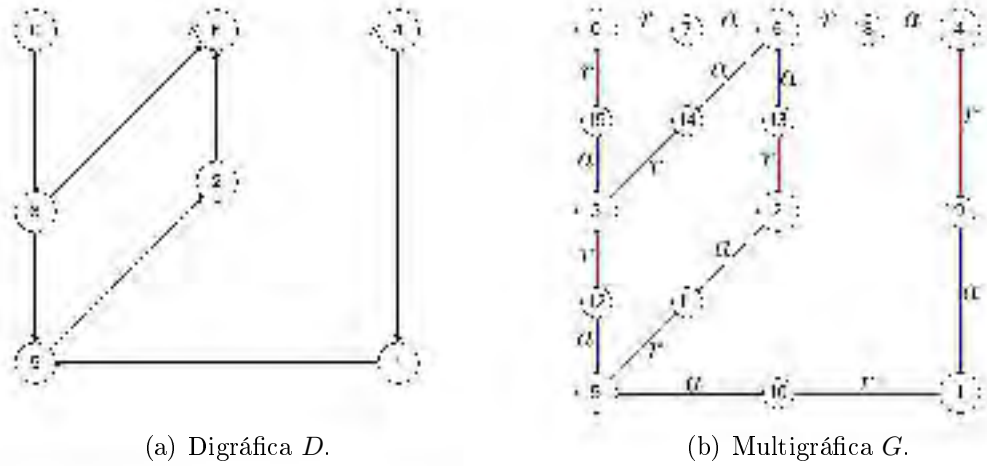


Figura 1.19

Sea  $G$  una multigráfica 2-coloreada por aristas. Un par de vértices  $x, y$  de  $G$  están **color-conectado** si existen  $P$  y  $Q$  dos  $xy$ -trayectorias alternantes tal que  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$ , donde  $\chi_{inicial}(P)$  es el color de la primera arista de  $P$  y  $\chi_{final}(P)$  es el color de la última arista de  $P$ . Un vértice  $x$  está color-conectado con él mismo.

Decimos que  $G$  está **color-conectada** si cada par de vértices de  $G$  están color-conectados. La multigráfica de la figura 1.20 no está color-conectada pues los vértices 6 y 7 no están color-conectados pero los vértices 7 y 2 si están color-conectados con las trayectorias  $P = (2, 1, 0, 4, 5, 7)$  y  $Q = (2, 0, 4, 5, 6, 7)$ .

Una multigráfica  $G$  2-coloreada por aristas es **conveniente** si la conectividad por color es una relación de equivalencia de los vértices de  $G$ . La multigráfica  $G$  en la figura 1.20 no es conveniente pues los vértices 2 y 7 y 2 y 6 están color-conectados pero 6 y 7 no lo están.

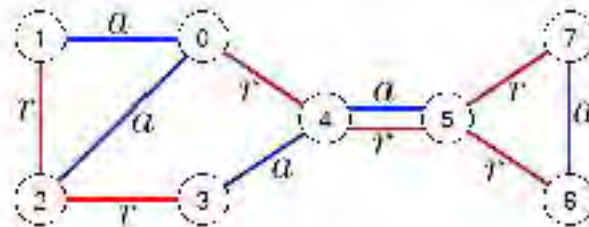


Figura 1.20: Multigráfica  $G$ .

**Teorema 1.10.** *Un par de vértices,  $x, y$ , en una multigráfica  $G$  2-coloreada por aristas están color-conectados si y sólo si  $G$  tiene 4 (no necesariamente distintas)  $xy$ -trayectorias alternantes,  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ , tal que  $\chi_{inicial}(P_i) = \chi_{final}(Q_i) = i$ ,  $i = 1, 2$ .*

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Sean  $G$  una multigráfica 2-coloreada por aristas y  $x, y$  vértices de  $G$  tal que están color-conectados.

Sean  $P$  y  $Q$  las dos  $xy$ -trayectorias alternantes tales que  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$ ... (1).

**Caso 1)**  $\chi_{inicial}(P) = \chi_{final}(P)$ .

Por (1) y la suposición del caso tenemos que  $\chi_{inicial}(Q) = \chi_{final}(Q)$ .

Tenemos dos subcasos que  $\chi_{inicial}(P) = 1$  o  $\chi_{inicial}(P) = 2$ .

- ) Si  $\chi_{inicial}(P) = 1$ , hacemos  $P_1 = Q_1 = P$  y  $P_2 = Q_2 = Q$ .
- ) Si  $\chi_{inicial}(P) = 2$ , hacemos  $P_1 = Q_1 = Q$  y  $P_2 = Q_2 = P$ .

En ambos subcasos tenemos que  $\chi_{inicial}(P_1) = \chi_{final}(Q_1) = 1$  y  $\chi_{inicial}(P_2) = \chi_{final}(Q_2) = 2$ .

**Caso 2)**  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{final}(P)$ .

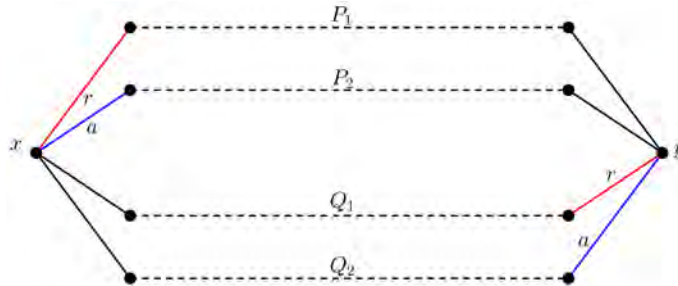
Por (1) y la suposición del caso tenemos que  $\chi_{inicial}(P) = \chi_{final}(Q)$  y  $\chi_{inicial}(Q) = \chi_{final}(P)$ .

- ) Si  $\chi_{inicial}(P) = 1$ , hacemos  $P_1 = P$ ,  $P_2 = P$ ,  $Q_1 = Q$  y  $Q_2 = Q$ .
- ) Si  $\chi_{inicial}(P) = 2$ , hacemos  $P_1 = Q$ ,  $P_2 = Q$ ,  $Q_1 = P$  y  $Q_2 = P$ .

En ambos subcasos tenemos que  $\chi_{inicial}(P_1) = \chi_{final}(Q_1) = 1$  y  $\chi_{inicial}(P_2) = \chi_{final}(Q_2) = 2$ .

En ambos casos tenemos las cuatro trayectorias que se necesitan.

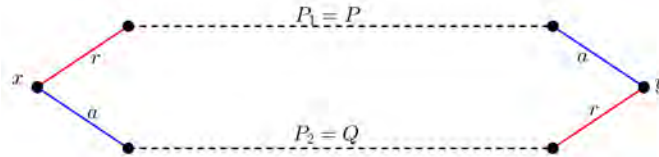
[ $\impliedby$ ] Sea  $G$  una multigráfica 2-coloreada por aristas y  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  las 4  $xy$ -trayectorias alternantes tales que  $\chi_{inicial}(P_1) = \chi_{final}(Q_1) = 1$  y  $\chi_{inicial}(P_2) = \chi_{final}(Q_2) = 2$ , como se muestra en la siguiente figura.



Tenemos los siguientes 3 casos:

**Caso 1)**  $\chi_{final}(P_1) \neq \chi_{final}(P_2)$ .

En este caso hacemos  $P = P_1$  y  $Q = P_2$ . Tenemos que  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$ , la siguiente figura muestra como se vería este caso.



**Caso 2)**  $\chi_{final}(P_1) = \chi_{final}(P_2) = 1$ .

Como  $G$  es 2-coloreada por aristas,  $\chi_{inicial}(Q_2) = 1$  o  $\chi_{inicial}(Q_2) = 2$ .

·) Si  $\chi_{inicial}(Q_2) = 1$  hacemos  $P = P_2$  y  $Q = Q_2$ .

·) Si  $\chi_{inicial}(Q_2) = 2$  hacemos  $P = P_1$  y  $Q = Q_2$ . Ver figura 1.21.

En ambos subcasos tenemos que  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$ .

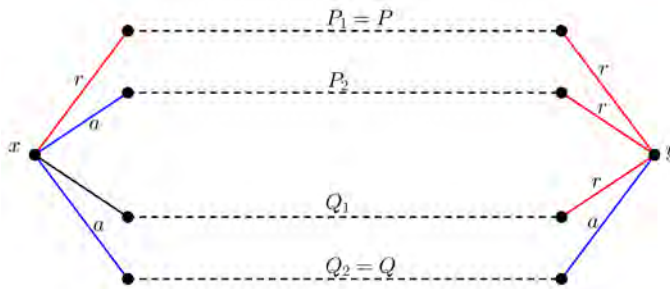


Figura 1.21: Esta figura nos da una idea de todas los subcasos que se presentan en los casos 2 y 3.

**Caso 3)**  $\chi_{final}(P_1) = \chi_{final}(P_2) = 2$ .

Como  $G$  es 2-coloreada por aristas  $\chi_{inicial}(Q_1) = 1$  o  $\chi_{inicial}(Q_1) = 2$ .

·) Si  $\chi_{inicial}(Q_1) = 1$  hacemos  $P = P_2$  y  $Q = Q_1$ .

·) Si  $\chi_{inicial}(Q_1) = 2$  hacemos  $P = P_1$  y  $Q = Q_1$ .

En ambos subcasos tenemos que  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$ .

En los tres casos encontramos  $P$  y  $Q$  dos  $xy$ -trayectorias alternantes con  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$ . Por lo tanto  $x$  y  $y$  están color-conectados.

□

Sea  $P = \{H_1, H_2, \dots, H_p\}$  un conjunto de subgráficas de una multigráfica  $G$ . La **gráfica de intersección**  $\Omega(P)$  de  $P$  tiene el conjunto de vértices  $P$  y el conjunto de aristas  $\{H_i H_j \mid V(H_i) \cap V(H_j) \neq \emptyset, 1 \leq i < j \leq p\}$ .

Una pareja de vértices  $x, y$  de vértices de una multigráfica  $G$ , 2-coloreada por aristas están **ciclo conectados** si  $G$  tiene una colección de ciclos alternantes  $P = \{C_1, \dots, C_p\}$  tal que  $x$  y  $y$  pertenecen a algunos ciclos en  $P$  y  $\Omega(P)$  es una gráfica conexa.

**Teorema 1.11.** *Si un par,  $x$  y  $y$ , de vértices de  $G$  un multigráfica 2-coloreada por aristas están ciclo conectados, entonces  $x$  y  $y$  están color-conectados.*

**Demostración.**

Sean  $G$  una multigráfica 2-coloreada por aristas y  $\{x, y\} \subseteq V(G)$  tal que  $x$  y  $y$  están ciclo conectados. Como  $x$  y  $y$  están ciclo conectados existe una colección  $T = \{C_1, \dots, C_p\}$  de ciclos alternantes en  $G$ .

1) Si  $\{x, y\} \subseteq V(C_i)$ , para algún  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Sea  $C_i = (v_0 = x, v_1, \dots, v_{q-1}, v_q = y, v_{q+1}, \dots, v_n = x)$ , como se muestra en la figura 1.22, entonces  $P = (v_0 = x, v_1, \dots, v_{q-1}, v_q = y)$  y  $Q = (v_n = x, v_{n-1}, \dots, v_{q+1}, v_q = y)$  son dos  $xy$ -trayectorias alternantes en  $G$ . Además  $\chi_{inicial}(P) \neq \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(Q)$  pues al ser  $C$  un ciclo alternante tenemos que  $\chi_{inicial}(P) = \chi(v_0 v_1) \neq \chi(v_n v_{n-1}) = \chi_{inicial}(Q)$  y  $\chi_{final}(P) = \chi(v_{q-1} v_q) \neq \chi(v_q v_{q+1}) = \chi_{final}(Q)$ . Por lo tanto  $x$  y  $y$  están color-conectados.

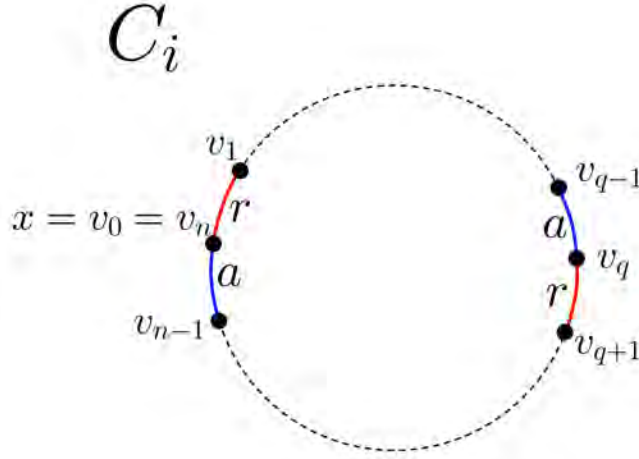
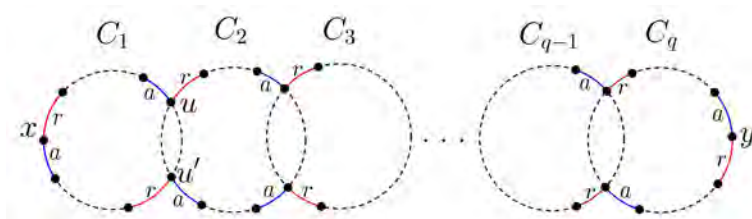


Figura 1.22: Las aristas  $v_{q-1}v_q$  y  $v_qv_{q+1}$  no necesariamente son del color que se muestra en la figura pero al ser  $C_i$  un ciclo alternante tiene que ser de distinto color.

2) Si no existe un ciclo  $C_i$  en  $T$  que contenga ambos vértices podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x \in C_1$ ,  $y \in C_q$  para algún  $1 < q \leq p$ .

Luego, de la definición de ciclo conectados se tiene que  $\Omega(T)$  es una gráfica conexa, lo que implica que existe al menos una  $C_1C_q$ -trayectoria en  $\Omega(T)$ . Sea  $T'$  la  $C_1C_q$ -trayectoria de menor longitud en  $\Omega(T)$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $T' = (C_1, C_2, \dots, C_q)$ . Como  $T'$  es la trayectoria de longitud menor,  $T'$  cumple que cada  $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$  y  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$  con  $|i-j| > 1$ ,  $V(C_i) \cap V(C_j) \neq \emptyset$  y  $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$ .

Construimos  $P$  y  $P'$  de la siguiente manera,  $P$  ( $P'$ ) empieza en una arista roja (azul) de  $C_1$  adyacente a  $x$  y continuamos sobre  $C_1$  hasta el primer vértice  $u$  ( $u'$ ) que pertenezca a  $C_1 \cap C_2$ . Después de encontrar  $u$  ( $u'$ ), continuamos por  $C_2$  de tal manera que siga siendo una trayectoria alternante. Repetimos el proceso hasta encontrar el primer vértice que pertenezca a  $C_2 \cap C_3$  y continuamos de esta manera. Siguiendo con el proceso eventualmente llegaremos a  $y$ . Por construcción  $P$  y  $P'$  son  $xy$ -trayectorias alternantes donde  $\chi_{inicial}(P) = \text{rojo}$  y  $\chi_{inicial}(P') = \text{azul}$ . Si  $\chi_{final}(P) \neq \chi_{final}(P')$ , entonces  $x$  y  $y$  están color-conectadas. La siguiente figura muestra como se pueden ver los ciclos en  $T'$  y como se encuentra el vértice  $u$  y  $u'$ .



En otro caso, podemos construir  $Q$  y  $Q'$  del mismo modo que  $P$  y  $P'$  pero empezando desde  $y$ , entonces tendríamos que  $\chi_{inicial}(P) = \chi_{final}(Q^{-1}) = \text{rojo}$  y  $\chi_{inicial}(P') = \chi_{final}(Q'^{-1}) = \text{azul}$ , donde  $Q^{-1}$  y  $Q'^{-1}$  son las trayectorias alternantes obtenidas al recorrer las trayectorias  $Q$  y  $Q'$  en sentido contrario, respectivamente. Por el Teorema 1.10 tenemos que  $x$  y  $y$  están color-conectados.

□

# Capítulo 2

## Paseos Eulerianos

En este capítulo veremos resultados sobre paseos bien coloreados en multigráficas  $c$ -coloreadas por aristas. Primero demostraremos bajo que condiciones una multigráfica coloreada por aristas tiene un paseo euleriano bien coloreado, después se definirán las transformaciones de orden para encontrar todos los paseos eulerianos alternantes cerrados.

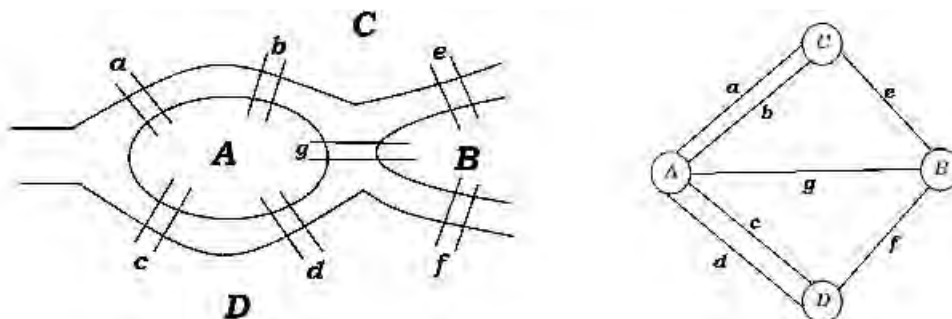
### 2.1. Antecedentes

La ciudad de Königsberg, que en 1946 cambió de nombre a ciudad de Kaliningrado, tenía un lugar de entretenimiento en el río Pregel, donde sus habitantes intentaban recorrer los 7 puentes pasando por ellos exactamente una vez y regresando al punto de salida, ver figura 2.1 (a). Durante mucho tiempo no se sabía si era posible dicho recorrido por lo que Carl L. Ehler, el entonces alcalde de Dazing, una ciudad cercana a Königsberg, envió una carta a Euler pidiendo discutir el problema. Se pueden encontrar fragmentos de las cartas entre Ehler y Euler en [4].

Fue entonces que en 1736 el matemático Leonhard Euler mostró que no era posible dicho recorrido y así dio solución al problema de los puentes de Königsberg. Para resolver el problema Euler representó cada pedazo de tierra con un punto y si existía un puente entre ellos unía sus respectivos puntos con una línea, ver figura 2.1 (b), y así inicio la Teoría de Gráficas.

Además Euler formuló y dio solución al problema general, el cual a lo largo de los años con la introducción de la notación y conceptos de teoría de gráficas se convirtió en el Teorema 1.2.

Teniendo el resultado para gráficas y multigráficas se quiso generalizar el problema para digráficas y después para multigráficas coloreadas por aristas.



(a) Puentes de Königsberg.

(b) Multigráfica obtenida por Euler para resolver el problema.

Figura 2.1: El problema de los puentes de Königsberg fue el inicio de la Teoría de Gráficas.

## 2.2. Paseos Eulerianos bien coloreados

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Kotzig probaremos dos lemas que nos facilitarán la demostración del teorema.

**Lema 2.1.** *Si una gráfica  $G$  multipartita completa de orden par, con partición  $P = \{P_1, \dots, P_r\}$ , satisface que  $|P_i| \leq \sum_{j \neq i} |P_j|$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ , entonces  $G$  tiene un apareamiento perfecto.*

### Demostración.

Sea  $G$  una gráfica multipartita completa de orden par, con la partición  $P = \{P_1, \dots, P_r\}$ , que satisface la desigualdad  $|P_i| \leq \sum_{j \neq i} |P_j|$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Sea  $S \subseteq V(G)$ . La gráfica  $G - S$  tiene dos posibilidades ser conexa o no ser conexa.

**Caso 1)**  $G - S$  es conexa.

- ) Si  $|V(G - S)|$  es par, entonces  $o(G - S) = 0 \leq |S|$ .
- ) Si  $|V(G - S)|$  es impar, entonces  $o(G - S) = 1$ . Por otro lado, como  $|V(G)| = |V(G - S)| + |S|$ ,  $|V(G)|$  es par y  $|V(G - S)|$  es impar, entonces  $|S| \geq 1$  y por lo tanto  $o(G - S) \leq |S|$ .

**Caso 2)**  $G - S$  no es conexa.

Como  $G - S$  no es conexa, se tiene que  $V(G - S) \subseteq P_i$ , para algún  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , en otro caso existirían  $P_i$  y  $P_j$  en  $P$  tal que  $V(G - S) \subseteq P_i \cup P_j$  y por ser  $G$  multipartita completa  $G - S$  sería conexa.



Como  $V(G - S) \subseteq P_i$ , entonces  $G - S$  son  $|V(G - S)|$  vértices aislados y las componentes conexas impares de  $G - S$  son:

$$o(G - S) = |V(G - S)| \leq |P_i|. \quad (1)$$

Por otro lado, como  $P_j \subset S$  para todo  $j \neq i$ , y además  $S$  puede contener elementos de  $P_i$ , tenemos que:

$$|S| \geq \sum_{j \neq i} |P_j|, \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que  $o(G - S) \leq |S|$ .

En ambos casos  $o(G - S) \leq |S|$  y por el Teorema 1.5 (Tutte)  $G$  tiene un apareamiento perfecto. □

**Lema 2.2.** *Sea  $G$  una gráfica multipartita completa de orden par, con partición  $P = \{P_1, \dots, P_r\}$ , que satisface la desigualdad  $|P_i| \leq \sum_{j \neq i} |P_j|$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Si  $a = uv \in A(G)$  es una arista entre las dos clases de la partición de mayor cardinalidad, entonces  $G - \{u, v\}$  tiene un apareamiento perfecto.*

**Demostración.**

Sean  $G$  una gráfica multipartita completa de orden par, con la partición  $P = \{P_1, \dots, P_r\}$ , la cual satisface que  $|P_i| \leq \sum_{j \neq i} |P_j|$  para todo  $i = 1, \dots, r$  y  $a = uv \in A(G)$  una arista entre las clases de mayor cardinalidad. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $|P_1| \geq |P_2| \geq \dots |P_r| > 0$  y por ende  $u \in P_1$  y  $v \in P_2$ .

Consideramos la gráfica  $G - \{u, v\}$ . Supongamos que  $G - \{u, v\}$  no es vacía. Para demostrar que  $G - \{u, v\}$  tiene un apareamiento perfecto veremos que  $G - \{u, v\}$  cumple las condiciones del Lema 2.1.

1. La gráfica  $G - \{u, v\}$  es multipartita completa.

La partición  $P' = \{P'_1 = P_1 - \{u\}, P'_2 = P_2 - \{v\}, P'_3 = P_3, \dots, P'_r = P_r\}$  es una partición de los vértices de  $G - \{u, v\}$  pues sólo quitamos los vértices  $u$  y  $v$  a la partición que teníamos en  $G$ . Además es completa pues si  $x \in P'_i$  y  $y \in P'_j$ ,  $i \neq j$ , entonces  $x \in P_i$  y  $y \in P_j$  y por ser  $G$  multipartita completa  $x$  y  $y$  son adyacentes.

2. La gráfica  $G - \{u, v\}$  es de orden par puesto que  $G$  es de orden par y le quitamos 2 vértices.

3. La gráfica  $G - \{u, v\}$  cumple la desigualdad  $|P'_i| \leq \sum_{j \neq i} |P'_j|$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

a) Si  $k \in \{1, 2\}$ , entonces:

$$|P'_k| = |P_k| - 1 \leq \left( \sum_{j \neq k} |P_j| \right) - 1 = \sum_{j \neq k} |P'_j|.$$

b) Si  $k \notin \{1, 2\}$  se tienen los siguientes 3 casos:

1) Si  $|P_k| = \sum_{j \neq k} |P_j|$ , entonces:

$$|P_k| = \sum_{j \neq k} |P_j| \geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P_k|,$$

contradiendo que  $|P_k| > 0$ .

2) Si  $|P_k| = \sum_{j \neq k} |P_j| - 1$ , entonces:

$$\sum_{j \neq k} |P_j| + |P_k| = \sum_{j \neq k} |P_j| + \sum_{j \neq k} |P_j| - 1 = 2 \left( \sum_{j \neq k} |P_j| \right) - 1,$$

lo que contradice que  $|V(G)|$  es par, pues  $V(G) = \sum_j |P_j|$ .

3) Si  $|P_k| \leq \sum_{j \neq k} |P_j| - 2$ , entonces:

$$|P'_k| = |P_k| \leq \sum_{j \neq k} |P_j| - 2 = \sum_{j \neq k} |P'_j|.$$

Por lo tanto  $|P'_k| \leq \sum_{j \neq k} |P'_j|$ , si  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

Por lo tanto la gráfica  $G - \{u, v\}$  es multipartita completa de orden par y cumple la desigualdad  $|P'_i| \leq \sum_{j \neq i} |P'_j|$ .

Por el Lema 2.1,  $G - \{u, v\}$  tiene un apareamiento perfecto. □

En 1968, Kotzing demostró una caracterización de las multigráficas coloreadas por aristas que contienen un paseo euleriano bien coloreado.

**Teorema 2.3. (Kotzig) [15]** *Una multigráfica  $G$  coloreada por aristas tiene un paseo euleriano cerrado bien coloreado si y sólo si  $G$  es conexa, cada vértice de  $G$  tiene grado par y para todo vértice  $x$  y todo color  $i$ :*

$$d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x).$$

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Sea  $G$  una multigráfica  $c$ -coloreada por aristas y  $P$  un paseo euleriano cerrado bien coloreado de  $G$ .

Por el Teorema 1.2  $G$  tiene que ser conexa y todo vértice de  $G$  es de grado par.

Sean  $x \in V(G)$  e  $i$  un color de las aristas incidentes en  $x$ , notemos que cada vez que  $x$  aparece en  $P$  inciden dos aristas distintas (entrada, salida) y ambas tienen color distinto por ser  $P$  un paseo bien coloreado, entonces cada que una arista que incide en  $x$  de color  $i$  aparece en  $P$  existe otra arista que incide en  $x$  de un color distinto y por lo tanto:

$$d_i(x) \leq \frac{d(x)}{2}. \quad (3)$$

Por otro lado tenemos que:

$$d(x) = \sum_{k=1}^c d_k(x) = \sum_{k \neq i} d_k(x) + d_i(x). \quad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$d(x) \leq \sum_{k \neq i} d_k(x) + \frac{d(x)}{2}.$$

Simplificando tenemos que  $\frac{d(x)}{2} \leq \sum_{k \neq i} d_k(x)$ .

Por lo tanto  $d_i(x) \leq \frac{d(x)}{2} \leq \sum_{i \neq k} d_k(x)$ .

[ $\impliedby$ ] Sea  $G$  una multigráfica  $c$ -coloreada por aristas y conexa tal que cada vértice de  $G$  tiene grado par y para todo vértice  $x$  y todo color  $i$ :

$$d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x).$$

Para  $x \in V(G)$ , hacemos una partición de las aristas que inciden en  $x$  en parejas, donde las aristas de cada pareja no tienen el mismo color. Si encontramos dicha partición podremos garantizar que cada vez que entremos al vértice  $x$  por la arista  $e$  podremos salir por la arista con la que hace pareja en la partición. La figura 2.2 muestra un ejemplo de cómo se pueden hacer las parejas de aristas y cómo entrar y salir de un vértice usando las parejas.

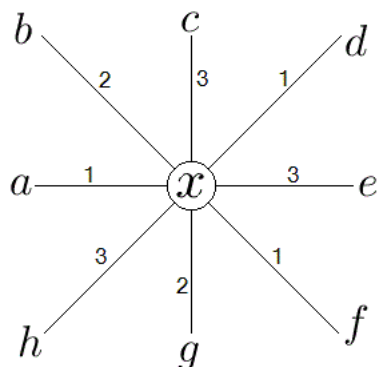


Figura 2.2: Podemos hacer las parejas de aristas  $\{a, b\}$ ,  $\{c, d\}$ ,  $\{e, f\}$  y  $\{g, h\}$ . Si entramos por la arista  $d$  podemos salir por la arista  $c$  o viceversa.

Para hacer las parejas de aristas que inciden en el v3rtice  $x$  construimos la gr3fica  $G_x$ , donde los v3rtices de  $G_x$  son las aristas que inciden en  $x$  y dos v3rtices son adyacentes en  $G_x$  si en  $G$  como aristas tienen distinto color, la figura 2.3 muestra un ejemplo de una gr3fica  $G_x$ .

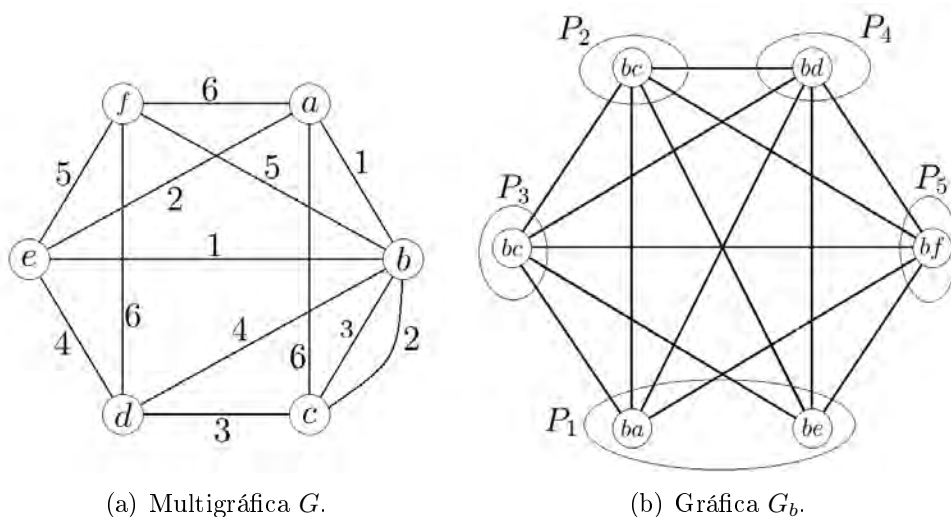


Figura 2.3

**Afirmaci3n 1.**  $G_x$  es una gr3fica multipartita completa, con partici3n  $P = \{P_i \mid 1 \leq i \leq c \text{ y } \delta_i(x) \geq 1\}$ , donde los v3rtices de  $P_i$  vistos como arista en  $G$  son las aristas que inciden en  $x$  de color  $i$ .

Sea  $C_x = \{i \in \{1, 2, \dots, c\} \mid \delta_i(x) \geq 1\}$ . Entonces

- a.  $V(G_x) = \bigcup_{i \in C_x} P_i$  pues las aristas que inciden en  $x$  tienen asignado uno de los  $c$  colores.
- b.  $P_i \cap P_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , en otro caso existe  $v \in V(G_x)$  tal que  $v \in P_i \cap P_j$  que vista como arista en  $G$  tiene color  $i$  y  $j$ , lo cual es imposible.
- c. Sean  $u$  y  $v$  en  $P_i$  con  $i \in C_x$ . Entonces  $u$  no es adyacente a  $v$  pues  $u$  y  $v$  tienen el mismo color como aristas de  $G$  y por definición de  $G_x$  no pueden ser adyacentes.
- d. Sean  $u \in P_i$  y  $v \in P_j$  con  $i \neq j$ , entonces en  $G$   $u$  y  $v$  tiene distinto color y por definición son adyacentes en  $G_x$ .

Lo que demuestra la Afirmación 1.

**Afirmación 2.** El orden de  $G_x$  es par pues  $d(x)$  es par, es decir, el número de aristas que inciden en  $x$  es par.

**Afirmación 3.** Si  $P = \{P_i \mid i \in C_x\}$  es la partición de los vértices de  $G_x$ , entonces  $|P_i| \leq \sum_{j \neq i} |P_j|$  para todo  $1 \leq i \leq c$ .

$|P_i|$  es el número de vértices que vistos como aristas en  $G$  son de color  $i$  o bien es el número de aristas que inciden en  $x$  de color  $i$ , es decir,  $|P_i| = d_i(x)$  con  $1 \leq i \leq c$ . Entonces  $|P_i| = d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x) = \sum_{i \neq j} |P_j|$ .

**Afirmación 4.** La gráfica  $G_x$  tiene un apareamiento perfecto.

Por las afirmaciones 1, 2 y 3, la gráfica  $G_x$  es multipartita completa de orden par y cumple la desigualdad  $|P_i| \leq \sum_{j \neq i} |P_j|$  para todo  $i \in C_x$ , donde  $P = \{P_i \mid i \in C_x\}$  es la partición de los vértices de  $G_x$ .

Por el Lema 2.1  $G_x$  tiene un apareamiento perfecto.

**Nota.** Para hacer el apareamiento perfecto en  $G_x$  se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Ordenar las clases  $P_1, P_2, \dots, P_c$  de mayor a menor cardinalidad.
2. Definir el conjunto  $M = \emptyset$ .
3. Escogemos una arista  $e = uv$  entre las dos primeras clases y añadir a  $M$  la arista  $e$ .
4. Eliminar los vértices  $u$  y  $v$ , al igual que sus aristas, y definimos un nuevo orden decreciente de las clases de la gráfica obtenida.

5. Si  $M$  satura todos los vértices acabamos, en otro caso regresar al paso 3 con las clases definidas y ordenadas en el paso 4. Observar que por el Lema 2.2 la gráfica obtenida en 3 tiene un apareamiento perfecto y se pueden aplicar los pasos 3 y 4.

La siguiente figura muestra como se obtendría el apareamiento perfecto de la gráfica  $G_b$  de la figura 2.2.

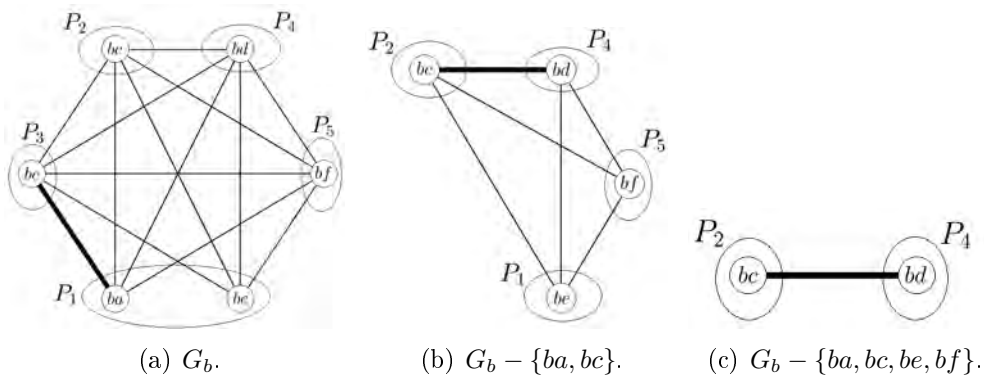


Figura 2.4: En  $G_1$  se escogió la arista con vértices finales  $ba$  y  $bc$ . En  $G_2$  se escogió la arista con vértices finales  $be$  y  $bf$ . Y en  $G_3$  se escogió la arista con vértices finales  $bc$  y  $bd$ .

**Afirmación 5.** Si  $G_x$  tiene un apareamiento perfecto, entonces en  $G$  existe una partición de las aristas que inciden en  $x$  en parejas, donde las aristas de cada pareja tienen distinto color.

Sea  $Q$  un apareamiento perfecto de  $G_x$ . En  $G$  hacemos las parejas de aristas que inciden en  $x$  de la siguiente forma: dos aristas van a ser pareja si vistas como vértice en  $G_x$  están  $Q$ -apareadas. Como  $Q$  es un apareamiento perfecto todas las aristas tienen pareja, además de asegurar que en realidad son parejas. Como  $G_x$  es una gráfica multipartita completa dos vértices de  $G_x$  adyacentes visto como aristas de  $G$  no pueden ser del mismo color, lo que nos asegura que las aristas de cada pareja tienen distinto color.

Por lo tanto existe la partición de las aristas que buscamos.

Fijamos un apareamiento perfecto,  $Q_x = \{(e, par_x(e)) \mid e \in V(G_x)\}$ , en  $G_x$  para cada  $x \in V(G)$  y hacemos  $M = \cup_{x \in V(G)} Q_x$ .

Podemos construir paseos bien coloreados usando los apareamientos perfectos en  $M$  de la siguiente manera:

$$R = (x_1, e_1, x_2, e_2 = par_{x_2}(e_1), x_3, \dots, x_k, e_k = par_{x_k}(e_{k-1}), x_{k+1} = x_1), \quad (5)$$

donde  $e_i = x_i x_{i+1}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  y  $e_1 = \text{par}_{x_1}(e_k)$ .

Con esta idea de paseo bien coloreado diremos que un paseo bien coloreado  $R$  en  $G$  es un  $M$ -paseo si  $\text{par}_x(e) \in A(R)$  para cada  $x \in V(R)$  y cada  $e \in A(R)$  que incide en  $x$ , es decir, un paseo bien coloreado  $R$  en  $G$  es un  $M$ -paseo si la arista  $e = xy$  pertenece a  $R$ , entonces su pareja tanto en el vértice  $x$  como en el vértice  $y$  están en  $R$ . Notar que pueden existir  $M$ -paseos donde aristas consecutivas en el paseo no son pareja, ver figura 2.5.

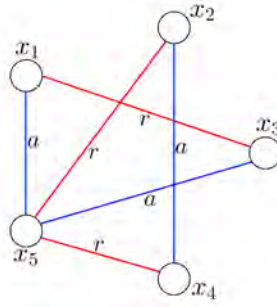


Figura 2.5: Si  $Q_{x_5} = \{(x_5 x_1, x_5 x_4), (x_5 x_2, x_5 x_3)\}$ , entonces los paseos cerrados  $R = (x_5, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_5)$  y  $R' = (x_5, x_1, x_3, x_5, x_4, x_2, x_5)$  son  $M$ -paseos.

**Afirmación 6.** Todo  $M$ -paseo es cerrado.

Supongamos que existe  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un  $M$ -paseo no cerrado.

El grado de  $x$ , un vértice en  $P$ , tienen grado par en  $P$  ya que siempre que una arista  $a$  incide en  $x$ ,  $\text{par}_x(a)$  incide en  $x$  y también pertenece a  $P$  por ser un  $M$ -paseo, en particular se cumple para  $x_1$ .

Por otro lado, cada que  $x_1$  aparece en  $P$  tiene dos aristas incidentes, a excepción de la primera vez en la cual sólo incide una arista, por lo que el grado de  $x_1$  es impar, lo que contradice el hecho de que todo vértice de  $P$  tiene grado par.

Por lo tanto  $P$  es cerrado y todo  $M$ -paseo es cerrado.

En lo que resta de la demostración utilizaremos  $M$ -paseos de la forma como en (5).

**Afirmación 7.** Existe una partición de  $A(G)$  en  $M$ -paseos cerrados.

Sea  $e_1 = x_1 x_2 \in A(G)$ , entonces

$$T_1 = (x_1, e_1, x_2, e_2 = \text{par}_{x_2}(e_1), x_3, \dots, x_k, e_k = \text{par}_{x_k}(e_{k-1}), x_{k+1} = x_1)$$

es un  $M$ -paseo.

Si  $A(T_1) = A(G)$  acabamos  $P = \{T_1\}$  es la partición que buscamos.

Si no, por ser  $G$  conexa, existe  $f_1 = y_1y_2 \in A(G) - A(T_1)$  tal que  $y_1 \in V(T_1)$ . Podemos hacer el siguiente  $M$ -paseo

$$T_2 = (y_1, f_1, y_2, f_2 = \text{par}_{y_2}(f_1), y_3, \dots, y_j, f_j = \text{par}_{y_j}(f_{j-1}), y_{j+1} = y_1).$$

Veamos que  $A(T_1) \cap A(T_2) = \emptyset$ .

Supongamos, por contradicción, que existe una arista  $f_i \in A(T_1) \cap A(T_2)$ , entonces  $f_{i+1} \in A(T_1) \cap A(T_2)$  por ser  $T_1$  y  $T_2$   $M$ -paseos.

Como  $f_{i+1} \in A(T_1) \cap A(T_2)$ , entonces  $f_{i+2} \in A(T_1) \cap A(T_2)$ . Siguiendo con este proceso y al ser  $T_1$  y  $T_2$  cerrados llegamos a que  $f_1 \in A(T_1) \cap A(T_2)$ , pero  $f_1 \notin A(T_1)$ . Por lo tanto  $T_1$  y  $T_2$  no comparten aristas.

Si  $A(T_1) \cup A(T_2) = A(G)$  acabamos  $P = \{T_1, T_2\}$  es la partición que buscamos.

Si no, existe  $g_1 = z_1z_2 \in A(G) - (A(T_1) \cup A(T_2))$  tal que  $z_1 \in V(T_1) \cup V(T_2)$  y repetimos el proceso.

Como  $A(G)$  es un conjunto finito existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que

$$A(T_1) \cup A(T_2) \cup \dots \cup A(T_s) = A(G)$$

y  $P = \{T_1, T_2, \dots, T_s\}$  es la partición que buscamos.

Sea  $P = \{T_1, T_2, \dots, T_s\}$  la partición en  $M$ -paseos que nos asegura la Afirmación 7. Si  $s = 1$  acabamos  $T_1$  es un paseo euleriano bien coloreado.

Si  $s \geq 2$ , entonces al ser  $G$  conexa existe un  $M$ -paseo de  $P$  que comparte al menos un vértice con  $T_1$  supongamos, sin pérdida de generalidad, que es  $T_2$ . Sea  $y_1 \in V(T_1) \cap V(T_2)$ , entonces  $y_1 \in V(T_1)$  y al ser  $T_1$  un paseo cerrado podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $T_1 = (x_1, e_1, x_2 = y_1, e_2, \dots, x_1)$ , con  $e_1$  y  $e_2$  dos aristas en  $T_1$  que inciden en  $y_1$ .

Existen 3 casos posibles para los colores de las aristas  $f_1, f_j, e_1$  y  $e_2$ , los cuales son:

- Las aristas usan 4 colores.

En este caso, construimos un nuevo paseo bien coloreado  $P_1$  de la siguiente manera  $P_1 = (x_1, e_1, x_2) \cup (x_2 = y_1, T_2, y_1 = x_2) \cup (x_2, e_2, \dots, x_1)$ .

- Las aristas usan 3 colores.



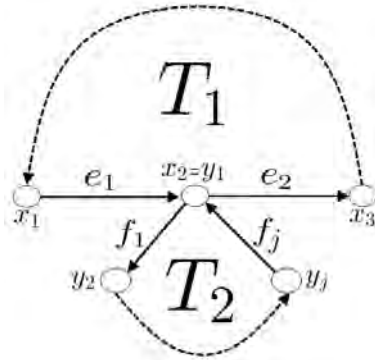
Al ser  $T_1$  y  $T_2$  paseos cerrados podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las aristas que tiene el mismo color son  $e_1$  y  $f_j$ .

Construimos un nuevo paseo  $P_1$  en el cual a  $T_1$  le agregamos  $T_2$  entre  $e_1$  y  $e_2$ , es decir,  $P_1 = (x_1, e_1, x_2 = y_1) \cup (y_1, T_2, y_1) \cup (x_2, e_2, \dots, x_l)$ , ver figura 2.6(a).

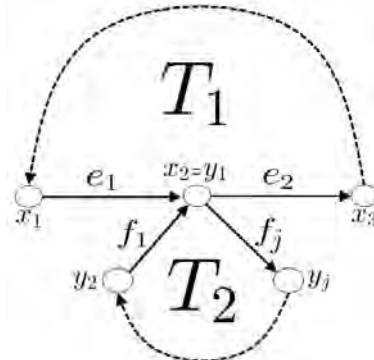
- Las aristas usan 2 colores.

Como  $T_1$  y  $T_2$  son paseos bien coloreados se tiene que  $\chi(e_1) \neq \chi(e_2)$  y  $\chi(f_1) \neq \chi(f_j)$ , además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\chi(e_1) = \chi(f_1)$  y  $\chi(e_2) = \chi(f_j)$ .

Construimos un nuevo paseo  $P_1$  en el cual a  $T_1$  le agregamos  $T_2^{-1}$  entre  $e_1$  y  $e_2$ , es decir,  $P_1 = (x_1, e_1, x_2 = y_1) \cup (y_1, T_2^{-1}, y_1 = x_2) \cup (x_2, e_2, \dots, x_l)$ , ver figura 2.6(b).



(a) Si se ocupan tres colores.



(b) Si se ocupan dos colores.

Figura 2.6: Notar que los paseos pueden pasar varias veces por un vértice pero no por una arista.

En los tres casos podemos hacer  $P_1$  un paseo bien coloreado uniendo los paseos  $T_1$  y  $T_2$ . Podemos repetir este proceso con los paseos bien coloreados  $P_1$  y  $T_3$  creando un nuevo paseo bien coloreado  $P_2$ . Repitiendo este proceso  $s - 1$  veces podemos unir todos los paseos bien coloreados de la partición  $P$  en el paseo bien coloreado  $P_{s-1}$ , el cual es un paseo euleriano bien coloreado puesto que

$$A(P_{s-1}) = \bigcup_{i=1}^s A(T_i) = A(G).$$

□

La demostración del teorema anterior fue hecha por Kotzig en [15], salvo la forma de hacer las parejas. En la demostración realizada por Kotzig las parejas se hacen de una forma distinta ya que Kotzig denotó sucesivamente las aristas de cada vértice por  $f_i(1), f_i(2), \dots, f_i(2c_i)$  de modo que las primeras aristas sean del color 1 y luego todas las aristas de color 2 y así sucesivamente hasta terminar con las aristas de color  $c$ , donde  $2c_i$  es el grado del vértice  $v_i$ . Después hizo las parejas de las aristas del vértice  $v_i$  como sigue:  $D_i = \{(f_i(1), f_i(1 + c_i)), (f_i(2), f_i(2 + c_i)), \dots, (f_i(c_i), f_i(2c_i))\}$ . Y es claro que las parejas contienen aristas de distintos colores por la propiedad  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$ .

El algoritmo usado en la demostración para hacer las parejas fue mostrado por Benkour, Manoussakis, Paschos y Saad en [6], quienes buscaron una forma constructiva de realizar la demostración del Teorema 2.3 y demostrar que el problema de encontrar un paseo eulerino bien coloreado se puede resolver en tiempo polinomial.

Años después Pevzner en [17] propuso un algoritmo sin necesidad de construir gráficas auxiliares. A diferencia del algoritmo de Benkour, Manoussakis, Paschos y Saad que resuelven el problema de encontrar un apareamiento perfecto una vez por cada vértice de la gráfica, en el algoritmo propuesto por Pevzner sólo se necesita escoger una arista crítica en cada paso, lo que hace que el algoritmo sea más eficiente.

Sea  $P = (x_1, \dots, x_m)$  un paseo bien coloreado en una multigráfica  $G$  coloreada por aristas. Un color  $c$  es **crítico** con respecto a  $P$  si  $c \neq \chi(x_{m-1}x_m)$  y  $c$  es el color más frecuente entre el conjunto de aristas  $A(G) - A(P)$  que inciden en  $x_m$ . Un paseo  $P$  puede tener más de un color crítico. Las aristas del conjunto  $A(G) - A(P)$  que inciden en  $x_m$  y tiene color crítico son llamadas **aristas críticas**, ver figura 2.7.

El algoritmo descrito por Pevzner es el siguiente:  
Hacer  $P_1 = x_1$  y construir  $P_i = (x_1, \dots, x_i)$  agregando la arista crítica  $x_i x_{i+1}$  de acuerdo con la siguiente regla:

$$x_i x_{i+1} = \begin{cases} \text{una arista crítica de color } \chi(x_1 x_2) & \text{si el color } \chi(x_1 x_2) \text{ es crítico,} \\ \text{una arista crítica arbitraria} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Parar cuando no existan aristas críticas.

Notemos que los  $P_i$  obtenidos en cada paso del algoritmo son paseos bien coloreados.

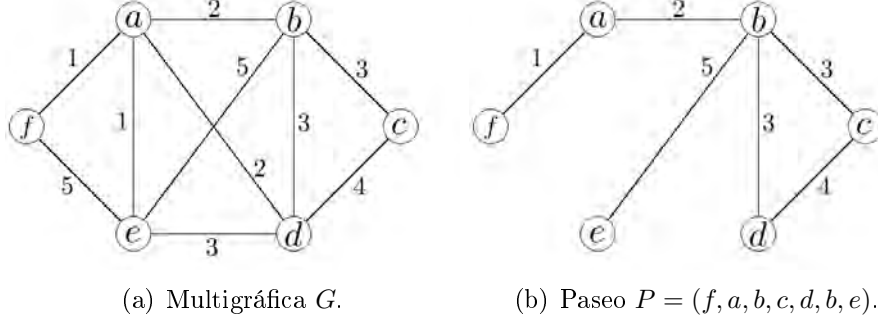


Figura 2.7: Los colores críticos con respecto a  $P$  son 1 y 3. Las aristas  $ae$  y  $ed$  son críticas con respecto a  $P$ .

**Teorema 2.4.** Si  $G$  es una multigráfica conexa, cada vértice de  $G$  tiene grado par y para todo vértice  $x$  y todo color  $i$ ,  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$ , entonces el algoritmo de Pevzner produce un paseo euleriano bien coloreado en  $G$ .

#### Demostración.

Sea  $G$  una multigráfica conexa, cada vértice de  $G$  tiene grado par y para todo vértice  $x$  y todo color  $i$ ,  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$ .

Sea  $P_m = (x_1, \dots, x_m)$  el paseo bien coloreado de longitud mayor entre todos los paseos bien coloreados obtenidos mediante el algoritmo de Pevzner. Si  $A(P_m) = A(G)$ , entonces acabamos  $P_m$  es un paseo euleriano bien coloreado,  $P_m$  es cerrado por el hecho de que el grado de todos los vértices es par. Supongamos que  $A(P_m) \neq A(G)$ , entonces por ser  $G$  conexa, existe una arista  $e \notin A(P_m)$  y que incide en un vértice de  $P_m$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $e$  incide en el vértice  $x_m$ , pues si  $P_m$  no es cerrado el grado de  $x_m$  en  $P_m$  es impar y si  $P_m$  es cerrado podemos renombrar los vértices.

Como  $P_m$  fue obtenida con el algoritmo de Pevzner todas las aristas que inciden en  $x_m$  que no están en  $P_m$  no son aristas críticas y por ende todas son de color  $\chi(x_{m-1}x_m)$ . Digamos que existen  $n$  aristas que inciden en  $x_m$  no críticas con respecto a  $P_m$ , notemos que  $n \geq 1$  pues  $e$  incide en  $x_m$  y no es crítica.

Como  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$  para todo color  $i$  y todo vértice  $x$ , en especial se cumple para  $i = \chi(x_{m-1}x_m)$  y  $x = x_m$ , por lo que existen al menos  $n + 1$  aristas que inciden en  $x_m$  de color distinto a  $\chi(x_{m-1}x_m)$ . Como las aristas que inciden en  $x_m$  que no pertenecen a  $P_m$  son de color  $\chi(x_{m-1}x_m)$ , entonces  $x_k$  aparece en  $P_m$  más de una vez, es decir, existe  $x_i \in P_m$  tal que  $x_i = x_m$

para algunas  $1 < i < m - 1$ . Sea  $x_k$  un vértice de  $P_m$  tal que  $k$  es el mayor entero que cumple  $x_k = x_m$  y  $k \neq m$ .

Existen tres posibles casos para los colores de las aristas que inciden en  $x_k$  que pertenecen a  $P_m$ .

1.  $\chi(x_{k-1}x_k) = \chi(x_{m-1}x_m)$  y  $\chi(x_kx_{k+1}) \neq \chi(x_{m-1}x_m)$ .

En este caso existe  $j$  tal que  $x_j = x_k$ , en otro caso no se cumpliría la desigualdad  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$  para el color  $\chi(x_{m-1}x_m)$  y el vértice  $x_m$ .

2.  $\chi(x_{k-1}x_k) \neq \chi(x_{m-1}x_m)$  y  $\chi(x_kx_{k+1}) = \chi(x_{m-1}x_m)$ .

En este caso existe  $j$  tal que  $x_j = x_k$ , en otro caso no se cumpliría la desigualdad  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$  para el color  $\chi(x_{m-1}x_m)$  y todo vértice  $x_m$ .

3.  $\chi(x_{k-1}x_k) \neq \chi(x_{m-1}x_m)$  y  $\chi(x_kx_{k+1}) \neq \chi(x_{m-1}x_m)$ .

En este caso tenemos una contradicción pues la arista  $x_kx_{k+1}$  es la única arista en  $A(G) - A(P_k)$  que incide en  $x_k$  de color distinto a  $\chi(x_{m-1}x_m)$  y existen al menos dos aristas,  $e$  y  $x_{m-1}x_m$ , que inciden en  $x_k$  de color  $\chi(x_{m-1}x_m)$ , lo que contradice que  $x_kx_{k+1}$  es una arista crítica con respecto a  $P_k$  y por ende  $P_m$  no es un paseo obtenido con el algoritmo de Pevzner.

En los casos 1 y 2 hacemos  $k'$  el mayor entero tal que  $x_{k'} \in V(P_m)$ ,  $x_{k'} = x_k$  y  $k' < k$ . De manera análoga tenemos que existen tres posibles casos para los colores de las aristas que inciden en  $x_{k'}$  que pertenecen a  $P_m$ .

Si siguiendo este proceso si en algún momento se cumple el caso 3) acabamos. Si siempre se cumple los casos 1 o 2, como  $|A(G)|$  es finita llegamos a una contradicción, pues no se cumpliría la desigualdad  $d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$  para el color  $\chi(x_{m-1}x_m)$  y el vértice  $x_m$ , ya que en cada paso de este proceso tenemos dos aristas distintas una de color  $\chi(x_{m-1}x_m)$  además de otra de distinto color y como la arista  $e$  es de color  $\chi(x_{m-1}x_m)$  tenemos que  $d_i(x) > \sum_{i \neq j} d_j(x)$  para  $i = d_i(x) \leq \sum_{i \neq j} d_j(x)$ .

Por lo tanto  $A(G) = A(P_m)$ .

□

Si  $c = 2$ , el Teorema 2.3 se puede escribir de la siguiente forma:

**Corolario 2.5.** *Una multigráfica  $G$  2-coloreada por aristas tiene un paseo euleriano cerrado alternante si y sólo si  $G$  es conexa y  $d_1(x) = d_2(x)$  para todo  $x \in V(G)$ .*

El siguiente Teorema puede demostrarse sin necesidad de utilizar el Teorema 2.3 y la demostración es similar a la del Teorema 1.2.

**Teorema 2.6.** *Una digráfica  $D$  es euleriana si y sólo si  $D$  es conexa y  $d^+(x) = d^-(x)$  para todo vértice  $x \in V(D)$ .*

**Demostración.**

$D$  es una digráfica euleriana si y sólo si  $D$  tiene un paseo euleriano si y sólo si la multigráfica  $G$  obtenida al aplicar la transformación de Häggkvist a  $D$  tiene un paseo eulerino cerrado alternante si y sólo si  $G$  es conexa y  $d_1(v) = d_2(v)$  para todo  $v \in V(G)$  si y sólo si  $D$  es conexa y  $d^+(v) = d^-(v)$  para todo vértice  $v \in V(D)$ . □

Existen algunas operaciones que al aplicarlas sobre paseos eulerianos de una multigráfica resultan en otro paseo euleriano de la misma multigráfica pero las mismas operaciones al aplicarlas a paseos eulerinos alternantes el resultado no siempre resulta en paseos eulerianos alternantes, en [11] se pueden encontrar ejemplos de este tipo de operaciones.

Nosotros nos vamos a interesar en operaciones que preserven la propiedad de paseo euleriano alternante. Pevzner en [17] introdujo las siguientes dos transformaciones que preservan los paseos eulerianos alternantes, además estudió aplicaciones del teorema 2.7.

Sean  $G$  una multigráfica 2-coloreada por aristas y  $F$  un paseo alternante en  $G$  con  $F = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n, \dots, x_m)$ , donde  $x_k = x_i$  y  $x_n = x_j$ . Dividimos a  $F$  de la siguiente manera,  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$  donde  $F_1 = (x_1, \dots, x_i)$ ,  $F_2 = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ ,  $F_3 = (x_j, x_{j+1}, \dots, x_k)$ ,  $F_4 = (x_k, \dots, x_n)$  y  $F_5 = (x_n, \dots, x_m)$ .

La transformación  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) \rightarrow F^* = (F_1, F_4, F_3, F_2, F_5)$  es llamada **intercambio de orden** si  $F^*$  es un paseo alternante, ver figura 2.8.

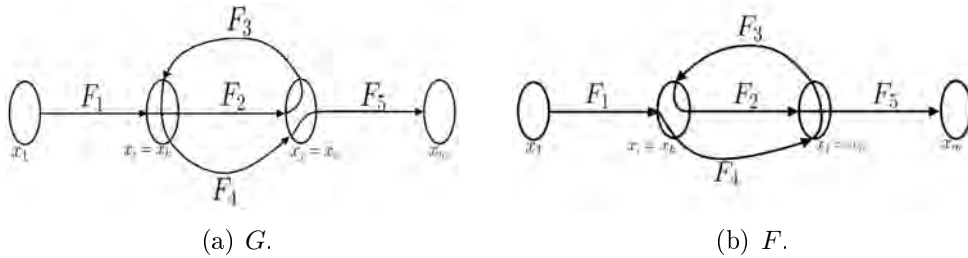


Figura 2.8: Intercambio de orden.

Sean  $P = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m)$  un paseo alternante en  $G$  con  $v_i = v_j$  y  $P_1 = (v_1, \dots, v_i)$ ,  $P_2 = (v_i, \dots, v_j)$  y  $P_3 = (v_j, \dots, v_m)$  una división de  $P$ , es decir,  $P = (P_1, P_2, P_3)$ . La transformación  $P = (P_1, P_2, P_3) \rightarrow P^* = (P_1, P_2^{-1}, P_3)$  es llamada **reflexión de orden** si  $P^*$  es un paseo alternante, ver figura 2.9.

El **índice** de los paseos  $X$  y  $Y$ , denotado por  $ind(X, Y)$ , es la longitud del subpaseo más largo que tienen en común  $X$  y  $Y$ .

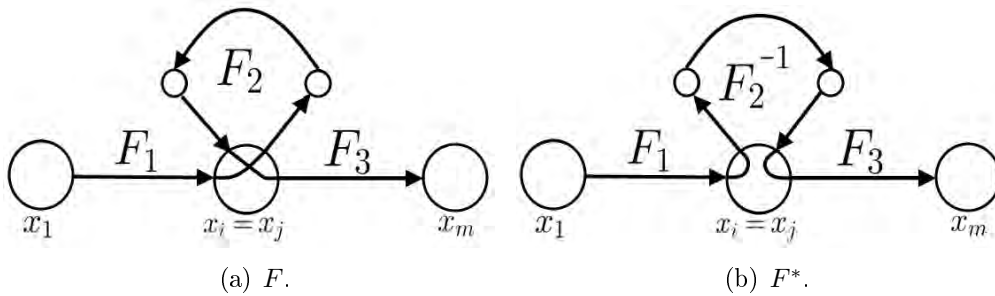


Figura 2.9: Reflexión de orden.

**Teorema 2.7.** *Todo par de paseos eulerianos alternantes cerrados  $X$  y  $Y$  en una multigráfica 2-coloreada por aristas pueden ser transformados uno en el otro por medio de una secuencia de transformaciones de intercambio de orden y reflexión de orden.*

**Demostración.**

Sean  $G$  una multigráfica 2-coloreada por aristas,  $X$  y  $Y$  paseos eulerianos alternantes cerrados en  $G$ .

Consideramos el conjunto,  $\mathcal{C} = \{X_i\}$ , de todos los paseos eulerianos alternantes cerrados en  $G$  obtenidos a partir de aplicar una secuencias de transformaciones de orden a  $X$ . Escogemos el paseo euleriano alternante cerrado  $X^* \in \mathcal{C}$ ,  $X^* = (x_0, x_2, \dots, x_q)$ , que contenga el subpaseo más largo en común con  $Y = (y_0, y_2, \dots, y_q)$ , es decir,  $ind(X^*, Y) = \max_{X_i \in \mathcal{C}} ind(X_i, Y)$ .

Si el  $ind(X^*, Y) = q$ , acabamos pues  $X^* = Y$ .

Supongamos que  $ind(X^*, Y) = l < q$ .

Al ser  $X^*$  y  $Y$  paseos eulerianos alternantes cerrados podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq l$ . Sea  $e_1 = x_l x_{l+1}$  y  $e_2 = y_l y_{l+1}$ .

Las aristas  $e_1$  y  $e_2$  tiene el mismo color pues  $x_{l-1} x_l = y_{l-1} y_l$  son justamente las aristas anteriores a  $e_1$  y  $e_2$  en  $X^*$  y  $Y$ , respectivamente, véase figura 2.10.

Al ser  $X^*$  un paseo euleriano  $e_2 \in A(X^*)$ . Existen dos casos que  $e_2$  se recorra en  $X^*$  en sentido  $y_l y_{l+1}$  o en el sentido  $y_{l+1} y_l$ .



Figura 2.10: Paseos  $X^*$  y  $Y$ .

**Caso 1.** En  $X^*$  la arista  $e_2$  se recorre en sentido  $y_{l+1}y_l$ .

En este caso  $X^* = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, y_{l+1}, y_l, \dots, x_q)$ .

Hacemos  $T_1 = (x_0, \dots, x_l)$ ,  $T_2 = (x_l, x_{l+1}, \dots, y_{l+1}, y_l)$  y  $T_3 = (y_l, \dots, x_q)$ . Como  $\chi(e_1) = \chi(e_2)$ , entonces  $X^* \rightarrow X^{**} = T_1, T_2^{-1}, T_3$  es una reflexión de orden, véase figura 2.11. Entonces  $X^{**} \in \mathcal{C}$  y el  $ind(X^{**}, Y) \geq l+1$  pues  $X^{**}$  tiene en común con  $Y$  el subpaseo  $T = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1})$ , lo que contradice la elección de  $X^*$ .

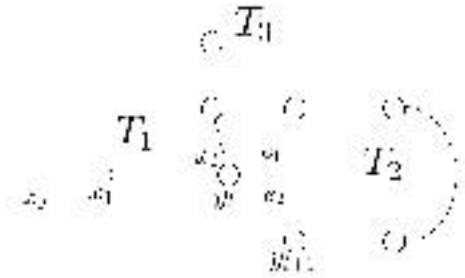


Figura 2.11: Si la arista  $e_2$  se recorre en sentido  $y_{l+1}y_l$ .

**Caso 2.** En  $X^*$  la arista  $e_2$  se recorre en sentido  $y_l y_{l+1}$ .

En este caso  $X^* = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, y_l = x_p, y_{l+1} = x_{p+1}, \dots, x_q)$ .

Hacemos  $X_1 = (x_0, \dots, x_l)$ ,  $X_2 = (x_l, x_{l+1}, \dots, y_l = x_p)$  y  $X_3 = (y_l = x_p, x_{p+1} = y_{l+1}, \dots, x_q)$ .

**Afirmación.** El paseo  $X_3$  contiene un vértice  $x_j$ , con  $j > p$ , que pertenece a  $X_2$ .

Sea  $i > l$  el mínimo número que cumple la condición: el vértice  $y_i$  del paseo  $Y$  está en  $X_2$ . La existencia de  $i$  se sigue del hecho que  $e_1 \in A(X_2)$  y  $Y$  contiene la arista  $e_1 = y_{t-1}y_t$ , para alguna  $t > l$ .

La arista  $y_{i-1}y_i$  no pertenece a  $X_2$  por la forma de seleccionar a  $i$ . Como  $i > l$ , entonces la arista  $y_{i-1}y_i$  no pertenece a  $X_1$ , por ende la arista pertenece

a  $X_3$ . Por lo tanto  $y_i$  pertenece a  $X_2$  y a  $X_3$ .

Lo que demuestra la afirmación.

Por la Afirmación el paseo  $X^*$  se puede reescribir de la siguiente manera  $X^* = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_k = x_j, \dots, x_p = y_l, x_{p+1} = y_{l+1}, \dots, x_j, \dots, x_q)$ , véase figura 2.12.

Hacemos  $T_1 = (x_0, \dots, x_l)$ ,  $T_2 = (x_l, \dots, x_k)$ ,  $T_3 = (x_k, \dots, x_p)$ ,  $T_4 = (x_p, \dots, x_j)$ ,  $T_5 = (x_j, \dots, x_q)$ ,  $f_1 = x_{k-1}x_k$  y  $f_2 = x_{j-1}x_j$ .

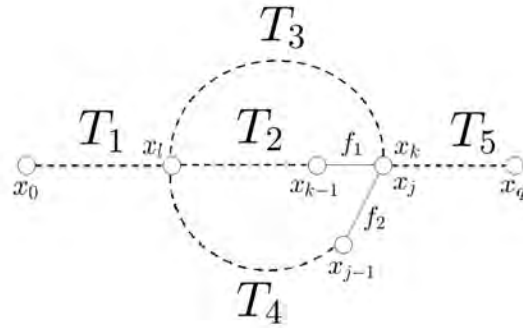


Figura 2.12: Si la arista  $e_2$  se recorre en sentido  $y_l y_{l+1}$ .

- a) Si  $\chi(f_1) = \chi(f_2)$ , entonces  $\chi(f_2) \neq \chi(x_k x_{k+1})$  y  $X^* \rightarrow X^{**} = (T_1, T_4, T_3, T_2, T_5)$  es un paseo alternante pues
- )  $\chi(x_{l-1}x_l) = \chi(y_{l-1}y_l) \neq \chi(y_l y_{l+1}) = \chi(x_p x_{p+1})$ , entonces  $(T_1, T_4)$  es un paseo alternante,
  - )  $\chi(x_{j-1}x_j) = \chi(f_2) = \chi(f_1) \neq \chi(x_k x_{k+1})$ , entonces  $(T_4, T_3)$  es un paseo alternante.
  - )  $\chi(x_l x_{l+1}) = \chi(x_p x_{p+1}) \neq \chi(x_{p-1}x_p)$ , entonces  $(T_3, T_2)$  es un paseo alternante.
  - ) Como  $\chi(f_2) \neq \chi(x_k x_{k+1})$  y  $\chi(x_{j-1}x_j) \neq \chi(x_k x_{k+1})$ , entonces  $\chi(f_2) = \chi(x_{j-1}x_j) \neq \chi(x_j x_{j+1})$  por lo que  $(T_2, T_5)$  es un paseo alternante.

De modo que  $X^{**} \in \mathcal{C}$  e  $ind(X^{**}, Y) \geq l + 1$ , pues  $X^{**}$  y  $Y$  tienen en común el subpaseo  $T = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1})$ , lo que contradice la elección de  $X^*$ .

- b) Si  $\chi(f_1) \neq \chi(f_2)$ , entonces  $\chi(x_k x_{k+1}) = \chi(f_2)$  puesto que  $\chi(f_1) \neq \chi(x_k x_{k+1})$ . Por otro lado,  $X^{**} = (T_1, T_4, T_2^{-1}, T_3^{-1}, T_5)$  es un paseo al-



ternante y se obtiene a partir de  $X^*$  con las siguientes dos reflexiones de orden:

- 1)  $X^* \rightarrow X' = (T_1, T_2, T_3^{-1}, T_4^{-1}, T_5) = (T_1, T_2, T_4^{-1}, T_3^{-1}, T_5)$ .  $X'$  es un paseo alternante pues  $\chi(f_1) \neq \chi(f_2)$  y  $\chi(x_k x_{x+1}) = \chi(f_2)$ , lo que nos asegura que  $(T_2, T_4^{-1})$  y  $(T_3^{-1}, T_5)$  son paseos alternantes.
- 2)  $X' \rightarrow X^{**} = (T_1, T_2^{-1}, T_4^{-1}, T_3^{-1}, T_5) = (T_1, T_4, T_2^{-1}, T_3^{-1}, T_5)$ .  $X^{**}$  es un paseo alternante pues:
  - )  $\chi(x_{l-1}x_l) = \chi(y_{l-1}y_l) \neq \chi(y_l y_{l+1}) = \chi(x_p x_{p+1})$ , entonces  $(T_1, T_4)$  es un paseo alternante,
  - )  $\chi(f_1) \neq \chi(f_2)$ , entonces  $(T_4, T_2^{-1})$  es un paseo alternante,
  - )  $\chi(x_l x_{l+1}) = \chi(x_p x_{p+1}) \neq \chi(x_{p-1} x_p)$ , entonces  $(T_2^{-1}, T_3^{-1})$  es un paseo alternante,
  - )  $\chi(x_k x_{x+1}) = \chi(f_2)$ , entonces  $(T_3^{-1}, T_5)$  es un paseo alternante.

De modo que  $X^{**} \in \mathcal{C}$  y el  $\text{ind}(X^{**}, Y) \geq l+1$ , pues  $X^{**}$  y  $Y$  tienen en común el subpaseo  $T = (x_0, \dots, x_l, x_{l+1})$ , lo que contradice la elección de  $X^*$ .

En ambos casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto  $Y$  puede ser obtenido a partir de  $X$  con una secuencia de transformaciones de orden.  $\square$

El Teorema 2.7 asegura que se pueden encontrar todos los paseo eulerianos bien coloreados de una gráfica a partir de encontrar uno de los paseos eulerianos de  $G$ , es decir, con los Teoremas 2.4 y 2.7 podemos encontrar todos los paseos eulerianos de una gráfica  $G$ , siempre y cuando  $G$  contenga al menos uno.

# Capítulo 3

## Ciclo y trayectorias bien coloreados

En este capítulo se expondrán resultados que dan respuesta al problema de verificar si una gráfica coloreada por aristas tiene al menos un ciclo bien coloreado. Posteriormente, se dará una cota, relacionada con el grado mínimo monocromático de la gráfica, para las trayectorias bien coloreadas de longitud máxima.

### 3.1. Ciclos bien coloreados

El problema de verificar si una gráfica coloreada por aristas tiene un ciclo bien coloreado es la generalización del problema de verificar si una digráfica tiene un ciclo dirigido. Este hecho es consecuencia de la Proposición 1.8.

Los primeros en estudiar el problema fueron Grossman y Häggkvist [12], quienes demostraron el caso  $c = 2$  del siguiente teorema, y posteriormente Yeo en [19] lo demostró para todo  $c \geq 2$ .

**Teorema 3.1.** (Yeo) [19] *Si  $G$  es una gráfica  $c$ -coloreada por aristas,  $c \geq 2$ , sin ciclos bien coloreados, entonces  $G$  tiene un vértice  $z \in V(G)$  tal que ninguna componente conexa de  $G - \{z\}$  está unida a  $z$  con aristas de más de un color.*

#### **Demostración.**

Sea  $G$  una gráfica  $c$ -coloreada por aristas sin ciclos bien coloreados. Tomamos  $p_1 \in V(G)$  arbitrario y  $S = \{p_1\} \cup \{s \in V(G) - \{p_1\} \mid |\chi_{final}(p_1, s)| = 1\}$ , es decir,  $S$  es el conjunto de los vértices de  $G$ , tal que toda trayectoria bien coloreada desde  $p_1$  termina en el mismo color y  $p_1 \in S$ .

Sean  $P = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ ,  $l \geq 1$ , una trayectoria bien coloreada de longitud máxima con  $p_l \in S$  y  $T_k = \{t \in V(G) - \{p_l\} \mid k \in \chi_{inicial}(p_l, t)\}$  para todo  $k \in \{1, 2, \dots, c\}$ , es decir, un vértice  $t$  pertenece a  $T_k$  si existe al menos una  $(p_l, t)$ -trayectoria bien coloreada con arista inicial de color  $k$ .

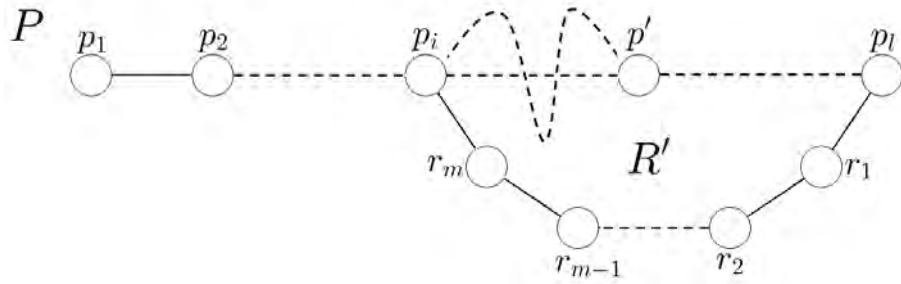
- Si  $l = 1$ , entonces hacemos  $C^*$  el conjunto de todos los colores de las aristas de  $G$ .
- Si  $l \geq 2$ , entonces hacemos  $C^*$  el conjunto de todos los colores de las aristas de  $G$  menos  $\chi_{final}(P)$ .

**Afirmación 1.**  $V(P) \cap T_k = \emptyset$  para todo  $k \in C^*$ .

Si  $l = 1$ , entonces la afirmación es cierta pues  $p_l = p_1 \notin T_k$ .

Supongamos que  $l \geq 2$  y  $V(P) \cap T_k \neq \emptyset$  para algún  $k \in C^*$ , entonces existe  $p' \in V(P) \cap T_k$ . Como  $p' \in T_k$ , existe una  $(p_l, p')$ -trayectoria bien coloreada,  $R' = (p_l, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n, p')$ , donde  $\chi_{inicial}(R') = k$ . Sea  $p_i$  el primer vértice en  $R'$  que pertenece a  $P$  distinto de  $p_l$ . Notemos que todos los vértices de  $R'$  pertenecen a  $T_k$ , pues  $R'$  es una trayectoria bien coloreada que empieza en  $p_l$  con arista de color  $k$ .

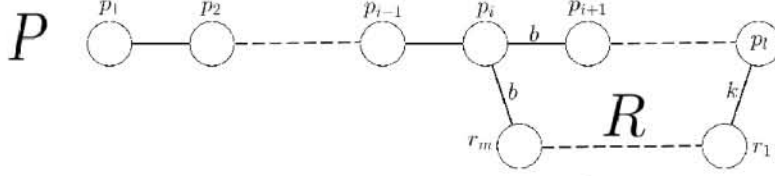
Entonces  $R = (p_l, r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m, p_i)$  es una  $(p_l, p_i)$ -trayectoria bien coloreada,  $m \geq 1$ ,  $\chi_{inicial}(R) = \chi_{inicial}(R') = k$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$  y  $V(R) \cap V(P) = \{p_i, p_l\}$ , la siguiente figura muestra como obtener  $p_i$ .



Claramente  $\chi(p_i p_{i+1}) = \chi_{final}(R)$ , en otro caso  $G$  tiene el ciclo bien coloreado  $(p_i, p_{i+1}, \dots, p_l, r_1, r_2, \dots, r_m, p_i)$ , pues  $\chi(p_{l-1} p_l) \notin C^*$  y  $k \in C^*$ .

Hacemos  $Q = (p_1, p_2, \dots, p_i, r_m, r_{m-1}, \dots, r_1, p_l)$ .  $Q$  es una  $(p_1 p_l)$ -trayectoria bien coloreada, además  $\chi_{final}(Q) = \chi_{inicial}(R) = k \neq \chi_{final}(P)$ . Por lo que  $\{\chi_{final}(Q), \chi_{final}(P)\} \subseteq \chi_{final}(p_1, p_l)$  y  $|\chi_{final}(p_1, p_l)| \geq 2$ .

Por lo tanto  $p_l \notin S$ , contradiciendo la definición de  $P$ .



**Afirmación 2.** Si  $xy \in A(G)$ ,  $x \in T_k$ ,  $y \notin T_k$  y  $k \in C^*$ , entonces existe  $R$  una  $(p_l, x)$ -trayectoria bien coloreada,  $\chi_{final}(R) \neq \chi(xy)$  y  $\chi_{inicial}(R) = k$ .

Sean  $x \in T_k$ ,  $y \notin T_k$  y  $xy \in A(G)$ . Por definición de  $T_k$ , existe  $Q$  una  $(p_l, x)$ -trayectoria bien coloreada con arista inicial de color  $k$ . Si  $\chi_{final}(Q) \neq \chi(xy)$ , hacemos  $R = Q$ . Entonces supongamos que  $\chi_{final}(Q) = \chi(xy)$ .

Notemos que los vértices  $x$  y  $p_1$  son distintos puesto que  $x \in T_k$  y por la Afirmación 1 tenemos que  $p_1 \notin T_k$ . Además todos los vértices de  $Q$  pertenecen a  $T_k$  pues  $Q$  es una trayectoria bien coloreada que empieza con una arista de color  $k$ .

Por la Afirmación 1,  $P \cup Q$  es una  $(p_1, x)$ -trayectoria bien coloreada más grande que  $P$ . Esto implica que  $x \notin S$  y por ende  $|\chi_{final}(p_1, x)| \geq 2$ . Entonces existe  $L$  una  $(p_1, x)$ -trayectoria bien coloreada con  $\chi_{final}(L) \neq \chi(xy)$ , véase figura 3.1.

Sea  $w \in (V(L) \cap V(P \cup Q)) - \{x\}$  tal que  $V(L[w, x]) \cap V(P \cup Q) = \{w, x\}$ , es decir, el vértice  $w$  es el último vértice donde se cortan ambas trayectorias. El vértice  $w$  existe pues  $p_1 \in (V(L) \cap V(P \cup Q)) - \{x\}$ .

Si  $w \in V(P) - \{p_l\}$ , entonces  $Q \cup L^{-1}[x, w]$  es una  $(p_l, w)$ -trayectoria bien coloreada la cual tiene su primer arista de color  $k$ . Entonces  $w \in T_k$  lo que contradice la Afirmación 1.

Por lo que  $w \in V(Q)$ , además  $\chi_{inicial}(Q[w, x]) = \chi_{inicial}(L[w, x])$ , en otro caso  $Q[w, x] \cup L^{-1}[x, w]$  es un ciclo bien coloreado.

Eso implica que  $R = Q[p_l, w] \cup L[w, x]$  es una  $(p_l, x)$ -trayectoria bien coloreada con  $\chi_{inicial}(R) = k$  y  $\chi_{final}(R) \neq \chi(xy)$ .

**Afirmación 3.** Si  $xy \in A(G)$ ,  $x \in T_k$ ,  $y \notin T_k$  para algún  $k \in C^*$ , entonces  $y = p_l$  y  $\chi(xy) = k$ .

Sean  $xy \in A(G)$ ,  $x \in T_k$ ,  $y \notin T_k$  para algún  $k \in C^*$ . Por la Afirmación 2, existe  $R$  una  $(p_l, x)$ -trayectoria bien coloreada con  $\chi_{final}(R) \neq \chi(xy)$  y  $\chi_{inicial}(R) = k$ .

1. Por demostrar que  $y = p_l$ . Supongamos que  $y \neq p_l$ .

- Si  $y \in R$ , entonces  $y \in T_k$  pues todos los vértices de  $R$  pertenecen a  $T_k$ , lo cual contradice la suposición que  $y \notin T_k$ .

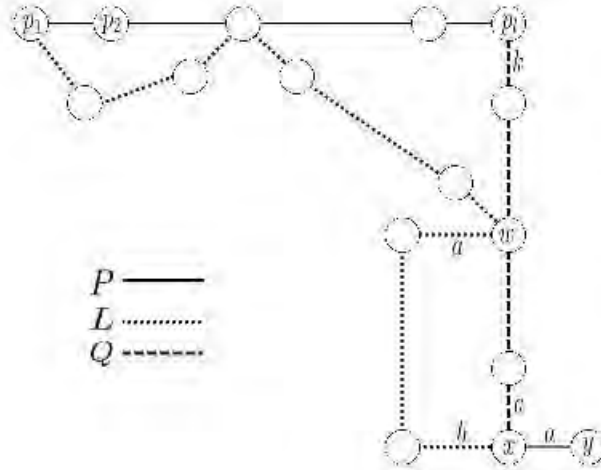


Figura 3.1

- Si  $y \notin R$ , entonces  $R \cup xy$  es una  $(p_l, y)$ -trayectoria bien coloreada con  $\chi_{inicial}(R \cup xy) = k$ , lo cual contradice la suposición que  $y \notin T_k$ , ver figura 3.2.

Por lo tanto  $y = p_l$ .

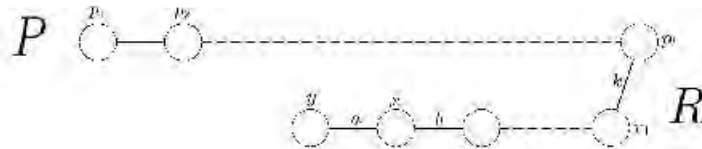
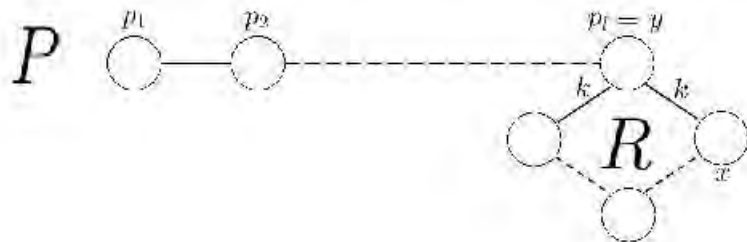


Figura 3.2

2. Por demostrar  $\chi(xy) = k$ . Supongamos que  $\chi(xy) \neq k$ .

Entonces  $R \cup xy$  es un ciclo bien coloreado, lo que contradice que  $G$  no tiene ciclos bien coloreados. Por lo que  $\chi(xy) = k$ .



**Afirmación 4.** Ninguna componente conexa de  $G - \{p_l\}$  está unida a  $p_l$  con aristas de más de un color.

Supongamos que la afirmación es falsa.

Sean  $p_lx$  y  $p_ly$  una pareja de aristas distintas de  $G$  tal que  $x$  y  $y$  pertenecen a la misma componente conexa de  $G - \{p_l\}$  y  $\chi(p_lx) \neq \chi(p_ly)$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\chi(p_lx) \in C^*$ . En  $G - \{p_l\}$ , existe una trayectoria  $R = (x = r_1, r_2, \dots, r_m = y)$ ,  $m \geq 2$ , no necesariamente bien coloreada.

- Si  $y \in T_{\chi(p_lx)}$ , entonces como  $p_l \notin T_{\chi(p_lx)}$  por la Afirmación 3 se tiene que  $\chi(p_ly) = \chi(p_lx)$ , lo que contradice que  $\chi(p_lx) \neq \chi(p_ly)$ .
- Si  $y \notin T_{\chi(p_lx)}$ , entonces como  $x \in T_{\chi(p_lx)}$ , existe  $i$ , ( $1 \leq i \leq m - 1$ ), tal que  $r_i \in T_{\chi(p_lx)}$  y  $r_{i+1} \notin T_{\chi(p_lx)}$ , lo que contradice la Afirmación 3, pues  $r_i r_{i+1} \in A(G)$  pero  $p_l \neq r_{i+1}$ .

En ambos casos llegamos a una contradicción y por lo tanto la afirmación es cierta. □

Existen varios corolarios derivados del Teorema 3.1, algunos de ellos son los siguientes:

**Corolario 3.2.** [12] *Sea  $M$  un apareamiento perfecto de una gráfica  $G$ . Si ninguna arista de  $M$  es puente en  $G$ , entonces  $G$  tiene un ciclo tal que sus aristas son tomadas alternadamente de  $M$  y  $A(G) - M$ .*

**Demostración.**

Sean  $G$  una gráfica y  $M$  un apareamiento perfecto de  $G$  tal que ninguna arista de  $M$  es puente en  $G$ .

Coloreamos las aristas de  $G$  de la siguiente manera:

$$\chi(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in M, \\ 2 & \text{si } a \in A(G) - M. \end{cases}$$

Sean  $x \in V(G)$  y  $xy$  la arista que  $M$ -satura a  $x$ , entonces  $\chi(xy) = 1$ . Consideramos la gráfica  $G - \{x\}$ .

Sea  $W_1$  la componente conexa de  $G - \{x\}$  que contiene a  $y$ .

Debido a que no existen aristas de  $W_1$  a otra componente conexa de  $G - \{x\}$  y la arista  $xy$  no es puente, existe  $xz \in A(G)$  de color 2 con  $z \in V(W_1)$ . Por lo tanto existe al menos una componente conexa de  $G - \{x\}$  que está unida a  $x$  con aristas de más de un color.

Por el Teorema 3.1, existe  $\gamma$  un ciclo bien coloreado en  $G$ . Como  $G$  está 2-coloreada el ciclo es de longitud par.

Como el ciclo  $\gamma$  está bien coloreado las aristas alternan color por lo que las aristas son tomadas alternadamente de  $M$  y  $A(G) - M$ . □

**Corolario 3.3.** *No existen gráficas sin puentes que contengan un único apareamiento perfecto.*

**Demostración.**

Sea  $G$  una gráfica sin puentes y  $M$  un apareamiento perfecto de  $G$ .

Como  $G$  no tiene puentes, entonces ninguna arista de  $M$  es puente en  $G$ . Por el Corolario 3.2,  $G$  tiene un ciclo  $\gamma$  que alterna arista de  $M$  y  $A(G) - M$ . Definimos  $M' = M \Delta A(\gamma)$ , es decir,  $M'$  consiste de todas las aristas de  $M$  que no inciden en vértices de  $\gamma$  y las aristas de  $\gamma$  que no pertenecen a  $M$ .

**Afirmación.**  $M'$  es un apareamiento perfecto.

- $M'$  es un apareamiento.

Sean  $a$  y  $b$  dos aristas en  $M'$  diferentes. Tenemos los siguiente 4 casos.

**Caso 1.**  $a, b \in A(\gamma)$ .

Como  $a$  y  $b$  son aristas de  $\gamma$  diferentes y  $\gamma$  alterna aristas de  $M$  y  $A(G) - M$ ,  $a$  y  $b$  no comparten vértices.

**Caso 2.**  $a \in A(\gamma)$  y  $b \in A(G) - A(\gamma)$

Como  $b \in A(G) - A(\gamma)$  entonces  $b \in M - A(\gamma)$  y al ser  $M$  un apareamiento los vértices que inciden en  $b$  no pertenecen a  $V(\gamma)$ . Por lo tanto  $a$  y  $b$  no comparten vértices.

**Caso 3.**  $b \in A(\gamma)$  y  $a \in A(G) - A(\gamma)$

Este caso es análogo al caso anterior.

**Caso 4.**  $a, b \in A(G) - A(\gamma)$ .

Como  $\{a, b\} \in A(G) - A(\gamma)$  entonces  $\{a, b\} \in M$  y al ser  $M$  un apareamiento  $a$  y  $b$  no comparten vértices.

En todos los casos llegamos a que  $a$  y  $b$  no comparten vértices y por lo tanto  $M'$  es un apareamiento.

- $M'$  es un apareamiento perfecto.

Sea  $x \in V(G)$  veamos que  $x$  está  $M'$ -apareado. Tenemos los siguientes casos:

**Caso a.**  $x \in V(G) - V(\gamma)$ .

Sea  $x$  un vértice que no pertenecen a los vértices de  $\gamma$ . Como  $M$  es un apareamiento perfecto existe  $a \in M$  tal que  $M$ -satura a  $x$  y por definición de  $M'$  la arista  $a$  también  $M'$ -satura a  $x$ .

**Caso b.**  $x \in V(\gamma)$ .

Sea  $x$  un vértice que pertenece a los vértices de  $\gamma$ . Como  $\gamma$  alterna aristas de  $M$  y  $A(G) - M$  todos los vértices en  $\gamma$  son incidentes a una arista  $a \in M$  y una arista  $b \in A(G) - M$ . Por definición de  $M'$  la arista  $b \in M'$  y por ende  $b$   $M'$ -satura a  $x$ .

Por lo tanto  $M'$  también es un apareamiento perfecto de  $G$ . □

**Corolario 3.4.** [12] *Sea  $G$  una gráfica euleriana 2-coloreada por aristas. Si para todo  $v \in V(G)$   $\delta_i(v)$  es impar con  $i = 1, 2$ , entonces  $G$  tiene un ciclo alternante.*

#### **Demostración.**

Sea  $G$  una gráfica euleriana 2-coloreada por aristas tal que  $\delta_i(v)$  es impar,  $i = 1, 2$ , para todo  $v \in V(G)$ .

Sea  $x$  un vértice arbitrario de  $G$ . Consideramos la gráfica  $G - \{x\}$  y  $W_1, W_2, \dots, W_n$  sus componentes conexas.

Definimos, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i = \{xw_i \in A(G) \mid w_i \in V(W_i)\}$ , es decir,  $A_i$  es el conjunto de aristas que inciden en  $x$  y en un vértice de  $W_i$ .

**Afirmación.** Para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $|A_i|$  es par.

**Caso 1.**  $n = 1$ .

Toda arista que incide en  $x$  pertenece a  $A_1$ , además  $\delta(x)$  es par debido a que  $G$  es una gráfica euleriana. Por lo tanto  $|A_i|$  es par.

**Caso 2.**  $n \geq 2$ .

Como  $n \geq 2$ , existe  $j \neq i$  tal que  $W_j$  no es vacío. Sea  $P = (z_1, z_2, \dots, z_m = z_1)$  el paseo euleriano cerrado de  $G$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $z_1 \in W_j$ .

Sea  $z_k$  el primer vértice en  $P$  que pertenece a  $W_i$ ,  $i \neq j$ , entonces  $z_{k-1} = x$  y  $z_{k-1} \in V(W_i)$  pues  $G$  no tiene aristas múltiples y no existen aristas de  $W_i$  a  $W_r$  para todo  $r \neq i$ .

Como  $z_m \in V(W_j)$  existe una primera arista posterior a  $z_k z_{k+1}$  que incide en  $x$ . Por lo tanto, por cada  $xW_i$  arista en  $P$ , existe



una  $W_ix$  arista en  $P$ . Se sigue que  $|A_i \cap A(P)|$  es par y como  $A_i \subseteq A(P) = A(G)$  concluimos que  $|A_i|$  es par.

Por hipótesis  $\delta_1(x)$  es impar y por la Afirmación  $|A_i|$  es par para todo  $1 \leq i \leq n$ , entonces existe  $A_j$  tal que  $|\chi(A_i)| = 2$ , para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Por lo tanto para todo  $v \in V(G)$  existe una componente conexa  $W_i$  en  $G - \{v\}$  tal que  $|\chi(A_i)| = 2$ . Por el teorema 3.1  $G$  tiene un ciclo bien coloreado.  $\square$

En [1] se propuso la conjetura 3.5, la cual es la generalización del teorema 1.6 para gráficas coloreadas por aristas.

**Conjetura 3.5.** *Si  $G$  es una gráfica  $c$ -coloreada por aristas de orden  $n$  con  $\delta_{mon}(G) = d \geq 1$ , entonces  $G$  tiene un ciclo bien coloreado de longitud al menos  $\min\{n, cd\}$ . Más aún, si  $c > 2$ , entonces  $G$  tiene un ciclo bien coloreado de longitud al menos  $\min\{n, cd + 1\}$ .*

Gutin en [13] demostró que la conjetura 3.5 es falsa, además encontró una familia infinita de gráficas que no cumplen la conjetura.

**Teorema 3.6.** [13] *Para cada  $d \geq 1$  existe  $G$  una gráfica  $c$ -coloreada por aristas con  $\delta_{mon}(G) = d$  y sin ciclos bien coloreados.*

**Demostración.**

Sea  $(p_1, p_2, \dots, p_c)$  un vector donde sus coordenadas son números enteros no negativos. Para un vector arbitrario  $(p_1, p_2, \dots, p_c)$ , la gráfica  $G(p_1, p_2, \dots, p_c)$  está definida de forma recursiva como sigue:

Tomamos las gráficas  $H_1 = G(p_1 - 1, p_2, \dots, p_c)$  si  $p_1 > 0$ ,  $H_2 = G(p_1, p_2 - 1, \dots, p_c)$  si  $p_2 > 0$ , ...,  $H_c = G(p_1, p_2, \dots, p_c - 1)$  si  $p_c > 0$ . Agregamos un nuevo vértice  $x$  y una arista de color  $i$  entre  $x$  y cada vértice de  $H_i$ , para cada  $i$  para el cual  $p_i > 0$ . En especial la gráfica  $G(0, 0, \dots, 0) = K_1$ , véase figura 3.3. Notar que la gráfica  $G(0, 0, \dots, p_i, \dots, 0)$  es una gráfica completa de orden  $p_i + 1$  y con todas sus aristas de color  $i$ , esto se puede demostrar fácilmente por inducción sobre  $p_i$ .

Veamos por inducción sobre  $n = p_1 + p_2 + \dots + p_c$  que  $G(p_1, p_2, \dots, p_c)$  no tiene ciclos bien coloreados,  $|V(G(p_1, p_2, \dots, p_c))| > p_1 + p_2 + \dots + p_c$  y  $\delta_{mon}(G(p_1, p_2, \dots, p_c)) = \min\{p_i \mid i = 1, 2, \dots, c\}$ .

- **Base de inducción.** Claramente  $G(0, 0, \dots, 0) = K_1$  no tiene ciclos bien coloreados,  $|V(G(0, 0, \dots, 0))| = 1 > 0$  y  $\delta_{mon}(G(0, 0, \dots, 0)) = 0$ .
- **Hipótesis de inducción.** Supongamos que toda gráfica  $G(p'_1, \dots, p'_c)$  con  $p'_1 + p'_2 + \dots + p'_c < n$ , cumple que:

- a'. no tiene ciclos bien coloreados,
- b'.  $|V(G(p'_1, \dots, p'_c))| > p'_1 + \dots + p'_c$  y
- c'.  $\delta_{mon}(G(p'_1, \dots, p'_c)) = \min\{p'_i \mid i = 1, \dots, c\}$ .

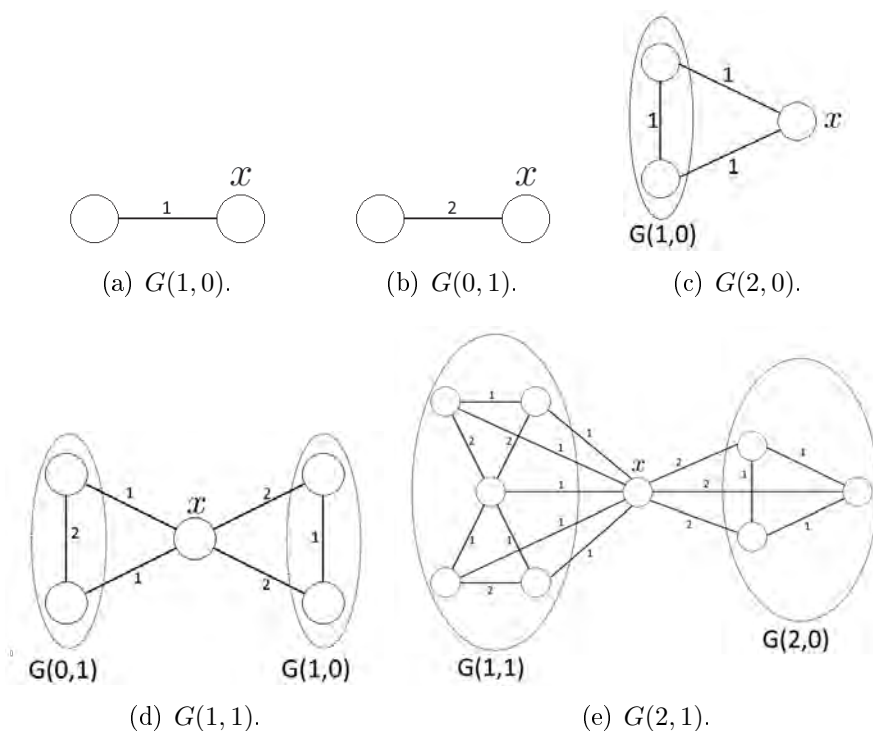


Figura 3.3: Ejemplos de como construir las gráficas  $G(p_1, p_2)$ .

■ **Paso inductivo.** Por demostrar que  $G(p_1, p_2, \dots, p_c)$ , con  $p_1 + p_2 + \dots + p_c = n \geq 1$ , cumple que:

- a. no tiene ciclos bien coloreados,
- b.  $|V(G(p_1, \dots, p_c))| > p_1 + \dots + p_c$  y
- c.  $\delta_{mon}(G(p_1, \dots, p_c)) = \min\{p_i \mid i = 1, \dots, c\}$ .

Sea  $G = G(p_1, p_2, \dots, p_c)$  una gráfica tal que  $p_1 + p_2 + \dots + p_c = n$ . La gráfica  $G$  está definida a partir de las gráficas  $H_1 = G(p_1 - 1, p_2, \dots, p_c)$  si  $p_1 > 0$ ,  $H_2 = G(p_1, p_2 - 1, \dots, p_c)$  si  $p_2 > 0$ , ...,  $H_c = G(p_1, p_2, \dots, p_c - 1)$  si  $p_c > 0$  y el nuevo vértice  $x$ . Notar que  $x$  es un vértice de corte en  $G$ .

a.  $G(p_1, \dots, p_c)$  no tiene ciclos bien coloreados.

Por hipótesis de inducción las gráficas  $H_1, H_2, \dots, H_c$  no tiene ciclos bien coloreados. Entonces si  $G(p_1, p_2, \dots, p_c)$  tiene un ciclo  $\gamma$ , éste debe pasar por el vértice  $x$ , pero al ser  $x$  un vértice de corte y tener aristas de un sólo color a cada una de las gráficas  $H_1, \dots, H_c$  ningún ciclo puede pasar por  $x$  y por lo tanto  $G(p_1, p_2, \dots, p_c)$  no tiene ciclos bien coloreados.

b.  $|V(G(p_1, \dots, p_c))| > p_1 + p_2 + \dots + p_c$ .

Como  $n \geq 1$  existe  $p_i \geq 1$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, c\}$ , por lo que la gráfica  $H_i = G(p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_c)$  está definida y por hipótesis de inducción  $|V(H_i)| > p_1 + \dots + (p_i - 1) + \dots + p_c$ .

Por otra parte tenemos que  $|V(G(p_1, p_2, \dots, p_c))| \geq |V(H_i)| + 1$ , puesto que  $V(H_i) \subset V(G(p_1, p_2, \dots, p_c))$  además agregamos el vértice  $x$ . Por lo tanto  $|V(G(p_1, \dots, p_c))| \geq |V(H_i)| + 1 > p_1 + p_2 + \dots + p_c - 1 + 1 = p_1 + p_2 + \dots + p_c$ .

c.  $\delta_{mon}(G(p_1, \dots, p_c)) = \text{mín}\{p_i \mid i = 1, 2, \dots, c\}$ .

Sea  $a = \text{mín}\{p_i \mid i = 1, 2, \dots, c\}$ .

**Caso 1.**  $a = 0$ .

Como  $a = 0$ , existe  $p_i = 0$  y la gráfica  $H_i$  no está definida. Por lo tanto el  $\delta_i(x) = 0$  y  $\delta_{mon}(G(p_1, \dots, p_c)) = 0$ .

**Caso 2.**  $a \geq 1$ .

Para todo  $1 \leq i \leq c$ , la gráfica  $H_i = G(p_1, p_2, \dots, p_i - 1, \dots, p_c)$  está definida y por hipótesis de inducción cumple que:

$$\delta_{mon}(H_i) = \begin{cases} a - 1 & \text{si } a = p_i, \\ a & \text{si } a \neq p_i. \end{cases}$$

Por definición de  $G$  el vértice  $x$  tiene  $\delta_i(x) = |V(H_i)|$  y al ser  $H_i$  una gráfica con  $\delta_{mon}(H_i) \geq a - 1$  tiene al menos  $a$  vértices, para todo  $1 \leq i \leq c$ , en consecuencia  $\delta_i(x) \geq a$ , para todo  $1 \leq i \leq c$ .

Sea  $y \in V(G) - \{x\}$  y  $k \in \{1, \dots, c\}$ . Entonces  $y \in V(H_i)$  para algún  $1 \leq i \leq c$  y  $\delta_k^{H_i}(y) \geq a - 1$ .

- Si  $\delta_k^{H_i}(y) \geq a$ , entonces  $\delta_k^G(y) \geq a$  ya que  $H_i$  es una subgráfica de  $G$ .
- Si  $\delta_k^{H_i}(y) = a - 1$  tenemos los siguientes dos casos:

**Subcaso 1.**  $k = i$ .

Como  $\delta_k^{H_i}(y) = a - 1$ , entonces  $\delta_k^G(y) = a$ , pues agregamos la arista  $xy$  con color  $i = k$ .

**Subcaso 2.**  $k \neq i$ .

Sea  $y \in V(H_i)$  con  $\delta_k^{H_i}(y) = a - 1$  donde  $p_i = a$  y  $k \neq i$ . La gráfica  $G_1 = H_i$  está definida a partir de las gráficas  $H_1^1, \dots, H_c^1$  y el vértice  $x_1$ , notamos que todas las gráficas están definidas salvo  $H_i^1$  si  $p_i = 1$ . Entonces tenemos dos posibles casos  $y = x_1$  y  $y \neq x_1$ .

**a.** Si  $y = x_1$ , entonces por definición de la gráfica  $H_i$  tenemos que  $\delta_k^{H_i} = |V(H_k^1)|$ .

Como  $p_k, p_i \geq a \geq 1$  y  $H_k^1 = G(p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_k - 1, \dots, p_c)$  tenemos que  $|V(H_k^1)| > p_1 + \dots + p_c - 2 \geq p_i + p_k - 2 \geq 2a - 2 = 2(a - 1) \geq a - 1$ , contradiciendo que  $\delta_k^{H_i} = a - 1$ .

**b.** Si  $y \neq x_1$ , entonces como  $y \neq x_1$ ,  $y \in V(H_j^1)$ , para algún  $1 \leq j \leq c$ , donde  $G_2 = H_j^1 = G(p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_j - 1, \dots, p_c)$  está definida a partir de las gráficas  $H_1^2, \dots, H_c^2$  y el vértice  $x_2$ .

- Si  $y = x_2$ , entonces con un análisis igual al del caso  $a$  llegamos a una contradicción.
- Si  $y \neq x_2$ , entonces  $y \in V(H_l^3)$ , para algún  $1 \leq l \leq c$ ,  $G_3 = H_l^3$ .

Siguiendo con este proceso y haciendo un razonamiento igual al caso (a), el vértice  $y$  nunca puede ser el vértice  $x_n$  en ningún paso, además por definición de la gráfica  $G_{n-1}$  tenemos que:

$$\delta_k^{G_n}(y) = \begin{cases} \delta_k^{G_{n-1}}(y) - 1 & \text{si } G_n = H_k^n, \\ \delta_k^{G_{n-1}}(y) & \text{si } G_n \neq H_k^n. \end{cases}$$

Paramos cuando  $y \in V(G(0, 0, \dots, 0, p'_k, 0, \dots, 0))$  o  $y \in V(G(p'_1, p'_2, \dots, 0, \dots, p'_c))$ , véase figura 3.5.

- Si  $y \in V(G(0, 0, \dots, 0, p'_k, 0, \dots, 0))$ , entonces tenemos que  $G_m = G(0, 0, \dots, 0, p'_k, 0, \dots, 0)$  es la gráfica completa de orden  $p'_k + 1$  con todas las aristas de color  $k$  y por lo tanto  $\delta_k^{G_m}(y) = p'_k$ .

Por otro lado  $\delta_k^{G_m}(y) = (a - 1) - (p_k - p'_k) = a + p'_k - p_k - 2$  pues  $(a - 1)$  es el  $k$ -ésimo grado de  $y$  en  $G_1$  y le restamos el número de grados que disminuyó en el proceso.

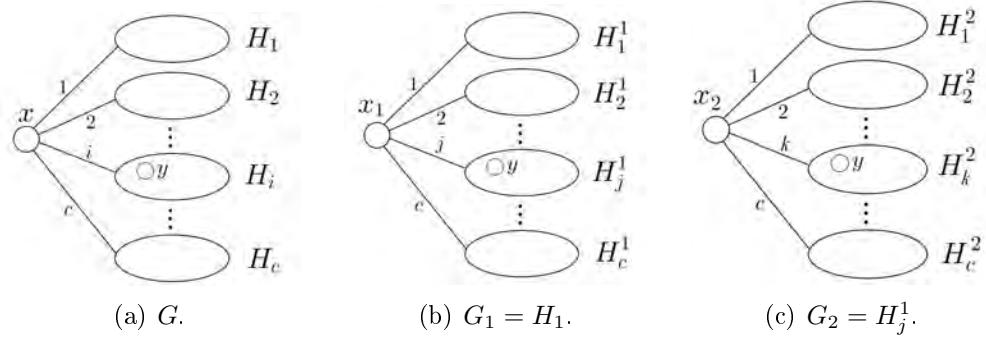


Figura 3.4: Proceso para llegar a  $G_m$ .

Por lo tanto  $a + p'_k - p_k - 2 = p'_k$ , despejando y reduciendo tenemos que  $a - p_k = 2$  lo que contradice que  $a \leq p_k$ .

- Si  $y \in V(G(p'_1, p'_2, \dots, 0, \dots, p'_c))$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $G_m = G(p'_1, p'_2, \dots, p'_k = 0, \dots, p'_c)$  y por ende  $\delta_k^{G_m}(y) = (a - 1) - p_k$ , pues  $(a - 1)$  es el  $k$ -ésimo grado de  $y$  en  $G_1$  y le restamos el número de grados que disminuyó en el proceso, que es  $p_k$ , pero  $(a - 1) - p_k < 0$  pues  $a \leq p_k$  contradiciendo que  $G_m$  es una gráfica.

Por lo tanto  $\delta_k^{H_i}(y) \geq a$  si  $i \neq k$ .

En todos los casos  $\delta_k^G(y) \geq a$  y por consiguiente  $\delta_{mon}(G) = a$ .

□

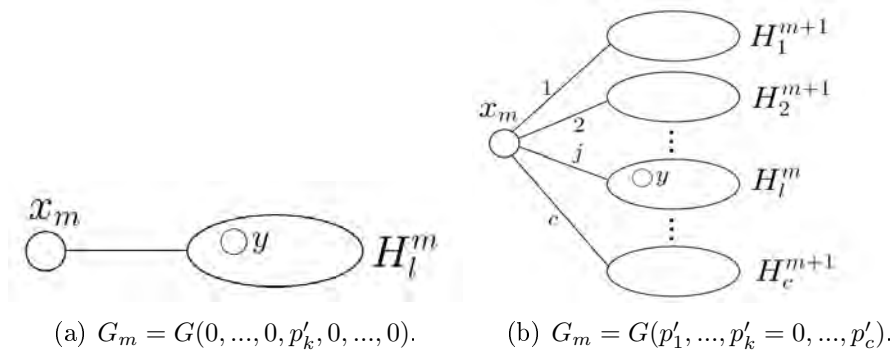


Figura 3.5: Las dos posibles gráficas  $G_m$ .

## 3.2. Trayectorias bien coloreadas

Todas las gráficas con al menos una arista tiene al menos una trayectoria bien coloreada (a saber, la que consiste de una arista) es por esto que se busca la trayectoria bien coloreada de longitud máxima. En esta sección daremos una cota para la longitud de la trayectoria bien coloreada de longitud máxima.

El siguiente teorema nos da una cota inferior de la longitud de la trayectoria alternante de longitud máxima de una gráfica 2-coloreada por aristas dado el grado mínimo monocromático de la gráfica. Después se dará un resultado similar para gráficas  $c$ -coloreadas por aristas, con  $c \geq 3$ .

**Teorema 3.7.** [1] *Si  $G$  es una gráfica 2-coloreada por aristas con  $\delta_{mon}(G) = d \geq 1$ , entonces  $G$  tiene una trayectoria alternante de longitud al menos  $2d$ .*

### Demostración.

Supongamos, por contradicción, que existe una gráfica  $G$  2-coloreada por aristas con  $\delta_{mon}(G) = d \geq 1$  y  $P$  una trayectoria de longitud máxima de  $G$  de longitud  $r < 2d$ . Sean  $x$  y  $y$  los vértices finales de  $P$ .

Diremos que la arista  $xz$  (respectivamente  $yz$ ) de  $G$  es *externa* si es de color diferente al color de la única arista en  $P$  que incide en  $x$  (respectivamente  $y$ ). Al ser  $P$  de longitud máxima no existen aristas externas  $xz$  o  $yz$  con  $z \in V(G) - V(P)$ . Además existen al menos  $2d$  aristas externas debido a que  $\delta_{mon}(G) = d$ .

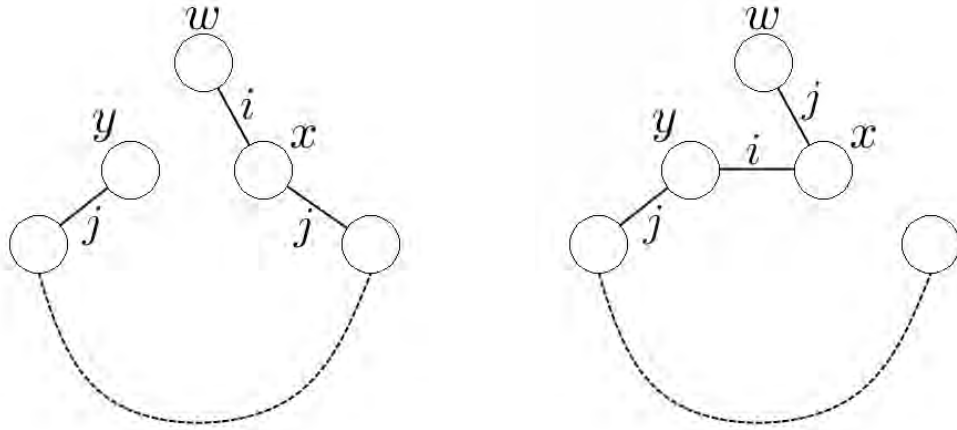
**Observación 1.** Si un vértice  $u$  es el vértice final de dos trayectorias alternantes  $P_1$  y  $P_2$  ambas de longitud máxima en  $G$  y  $\chi(w_1u) \neq \chi(w_2u)$  donde  $w_1u \in A(P_1)$  y  $w_2u \in A(P_2)$ , entonces todos los vecinos de  $u$  están en  $P_1 \cup P_2$  y por ende  $|V(P_1) \cup V(P_2)|$  es al menos  $2d + 1$ .

La observación se sigue de que  $P_1$  y  $P_2$  ambas son de longitud máxima por lo que todas las aristas externas de  $P_1$  que inciden en  $u$  tiene que estar en  $P_1$  y todas las aristas externas de  $P_2$  que inciden en  $u$  tiene que estar en  $P_2$ , además como el color inicial de las trayectorias es diferente en  $u$  todas las aristas que inciden en  $u$  son aristas externas de  $P_1$  o de  $P_2$ . Por lo tanto todos los vecinos de  $u$  están en  $P_1 \cup P_2$ . Además como  $d(u) \geq 2d$  tenemos que  $|V(P_1) \cup V(P_2)|$  es al menos  $2d + 1$ .

**Observación 2.** Los vértices de  $P$  no pertenecen a ningún ciclo alternante de longitud  $r + 1$ .

Si  $P$  es de longitud par no existen ciclos alternantes de longitud  $r + 1$  pues  $r + 1$  es impar.

Supongamos, por contradicción, que  $P$  es de longitud impar y sus vértices pertenecen a un ciclo alternante  $\gamma$  de longitud  $r + 1$ . Como  $|V(\gamma)| = r + 1 \leq 2d \leq d(x)$  y  $G$  no tiene lazos entonces existe al menos un vértice  $w \in V(G) - V(P)$  adyacente a  $x$  y podemos construir  $P'$  una trayectoria alternante de longitud mayor a  $P$  con la arista  $wx$  y el ciclo  $\gamma$  conservando el patrón alternante, véase figura 3.6, lo que es una contradicción.



(a) Si las aristas  $wx$  y  $xy$  tienen el mismo color.

(b) Si las aristas  $wx$  y  $xy$  tienen distinto color.

Figura 3.6: En ambos casos  $i, j \in \{1, 2\}$  y  $j \neq i$ .

Para lo que resta de la prueba si tenemos un ciclo alternante  $C$  y una arista  $uv$  con  $u \notin V(C)$  y  $v \in V(C)$ , existe una única manera de pasar de  $uv$  a  $C$  y seguir a lo largo de  $C$  manteniendo el patrón alternante. Denotaremos a la trayectoria alternante resultante de longitud  $|C|$  por  $(u, v, C)$ .

**Observación 3.** La subgráfica inducida por los vértices de  $P$  no contiene ningún ciclo alternante de longitud  $r$ .

Si  $r$  es impar  $G$  no tiene ciclos de longitud  $r$ .

Supongamos, por contradicción, que  $r$  es par y la subgráfica inducida por los vértices de  $P$  contiene un ciclo alternante de longitud  $r$ .

Sea  $C = (x_1, x_2, \dots, x_r = x_1)$  el ciclo alternante. Como la longitud de  $C$  es  $r$ , entonces  $|V(C)| = r$  y existe un vértice  $u \in V(P) - V(C)$ . Como los vértices de  $P - \{u\}$  están contenidos en  $C$ , el vértice  $u$  está unido al ciclo  $C$

con dos aristas de distinto color, ya sean las dos aristas que inciden en  $u$  en  $P$  si  $u \notin \{x, y\}$  o en el caso que  $u = x$  (o  $u = y$ ) la arista de  $P$  que incide en  $x$  (respectivamente en  $y$ ) y una arista externa que incide en  $x$  (respectivamente a  $y$ ), recordando que todas las aristas externas tienen ambos vértices en  $P$ .

Sean  $ux_i$  y  $ux_j$  las aristas que unen a  $u$  con  $C$  de color 1 y 2, respectivamente, ver figura 3.7. Entonces  $P_1 = ((u, x_i, C,))$  y  $P_2 = (u, x_j, C)$  son dos trayectorias alternantes de longitud  $r$ .

Además  $u$  es vértice inicial de  $P_1$  y  $P_2$  y  $\chi_{inicial}(P_1) \neq \chi_{inicial}(P_2)$ . Entonces por la Observación 1  $|V(P_1) \cup V(P_2)| \geq 2d + 1$  pero  $V(P_1) \cup V(P_2) = V(P)$  lo que contradice que la longitud de  $P$  es menor a  $2d$ . La observación es cierta.

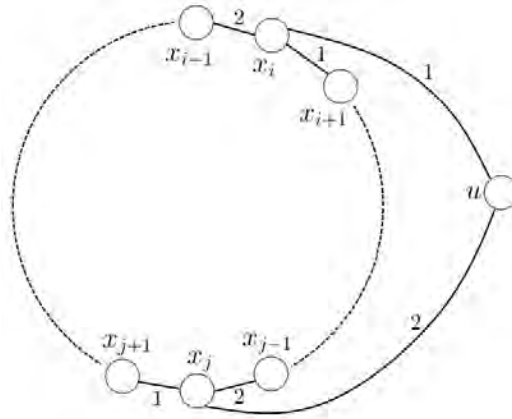


Figura 3.7: Ciclo  $C$ .

**Afirmación 1.** Existe una partición de  $V(P)$  ya sea en dos ciclos alternantes o en dos ciclos alternantes y un vértice  $u$ . Más aún, en el último caso el vértice  $u$  está unido a los ciclos con dos aristas de diferente color.

Dependiendo de la paridad de  $r$  se presentan los siguientes dos casos:

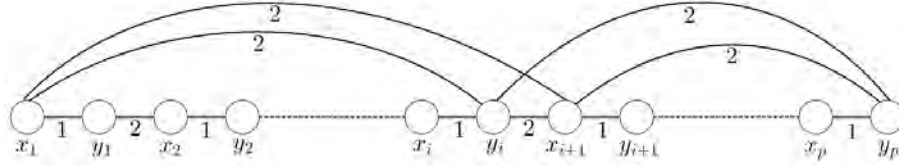
**Caso 1.**  $r$  es impar.

Sea  $P = (x = x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p = y)$  para algún  $p \geq 1$  tal que  $r = 2p - 1$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la arista  $x_1y_1$  es color rojo. Entonces la arista  $x_py_p$  es color rojo y todas las aristas externas de  $P$  son color azul. Además, cada arista externa inciden en un vértice final de alguna arista azul  $y_ix_{i+1}$ ,  $i \leq p - 1$ . Como existen al menos  $2d > 2(p - 1)$  aristas externas y sólo  $p - 1$  aristas de color azul de la forma  $y_ix_{i+1}$  en  $P$ , entonces existe al menos una arista  $y_ix_{i+1}$  a la cual son adyacentes al menos 3 aristas externas.



Considerando las 4 combinaciones posibles de las aristas externas que inciden en la arista  $y_i x_{i+1}$  construiremos un ciclo de longitud  $r + 1$  o una partición de los vértices de  $P$  en dos ciclos, la siguiente figura muestra las 4 posibles aristas externas.

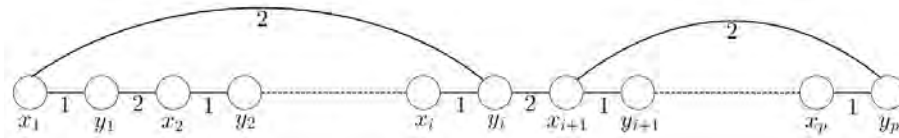


De las siguientes 4 combinaciones posibles de aristas externas, que son adyacentes a la arista  $y_i x_{i+1}$ , en dos de ellas las aristas  $\{x_1 y_i, y_p x_{i+1}\}$  son externas y en las otras dos las aristas  $\{x_1 x_{i+1}, y_p y_i\}$  son externas.

**Subcaso 1.**  $\{x_1 y_i, y_p x_{i+1}\}$  son aristas externas.

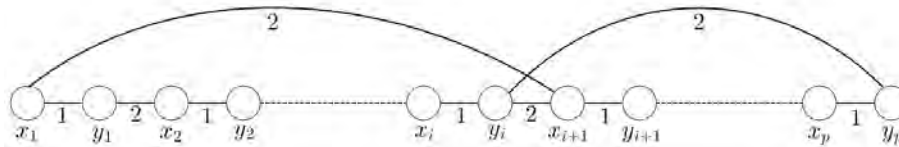
Tenemos que  $C_1 = (x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, x_1)$  y  $C_2 = (x_{i+1}, y_{i+1}, \dots, x_p, y_p, x_{i+1})$  son ciclos alternantes debido a que las aristas  $x_i y_i$  y  $x_{i+1} y_{i+1}$  son rojas.

Además  $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$  y  $V(C_1) \cup V(C_2) = V(P)$ , entonces existe una partición de  $P$  en dos ciclos alternantes.



**Subcaso 2.**  $\{x_1 x_{i+1}, y_p y_i\}$  son aristas externas.

En este caso  $C = (x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, y_p, x_p, y_{p-1}, \dots, x_{i+1}, x_1)$  es un ciclo alternante de longitud  $r + 1$  que por la Observación 2 es imposible.



**Caso 2.**  $r$  es par.

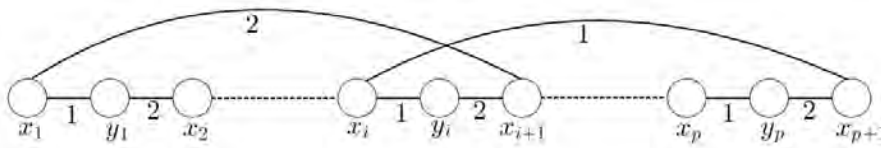
Supongamos que la afirmación es falsa, es decir, no existe una partición de los vértices de  $P$  en dos ciclos ni en dos ciclos y un vértice  $u$ .

Teniendo en cuenta que  $G$  sólo puede tener ciclos de longitud par y  $|V(P)| = r + 1$  es impar, no existe una partición de los vértices de  $P$  en dos ciclos.

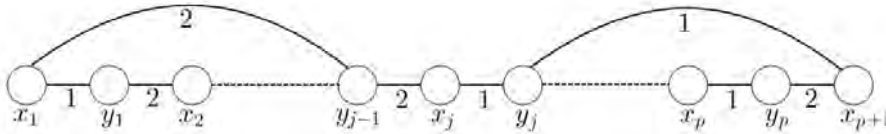
Sea  $P = (x = x_1, y_1, \dots, x_p, y_p, x_{p+1} = y)$ , con  $p \leq d - 1$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la arista  $x_1y_1$  es de color rojo.

Las siguientes dos observaciones nos ayudarán a contar un número de aristas que no pueden ser aristas externas:

1. Para cada vértice  $y_i$ ,  $i \leq p - 1$ , una de las aristas  $x_1x_{i+1}$ ,  $x_ix_{p+1}$  no es externa, en caso contrario  $C = (x_1, y_1, \dots, x_i, x_{p+1}, y_p, x_p, \dots, x_{i+1}, x_1)$  es un ciclo alternante de longitud  $r$  lo que contradice la Observación 3.



2. Para cada vértice  $x_j$ ,  $j > 1$ , las aristas  $x_1y_{j-1}$  no es externa o la arista  $y_jx_{p+1}$  no es externa, de lo contrario  $x_j$  y los ciclos  $C_1 = (x_1, y_1, \dots, y_{j-1})$  y  $C_2 = (y_j, x_{j+1}, \dots, x_{p+1}, y_j)$  son la partición que supusimos no existía.



Por otra parte los vértices  $x_1$  y  $x_{p+1}$  a lo más pueden ser adyacentes a  $2p$  vértices cada uno, entonces tenemos un total de  $2(2p) - 1$  posibles aristas externas (el -1 aparece pues contamos dos veces la arista  $x_1x_{p+1}$ ).

Por 1, en cada pareja de vértices  $x_i, x_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq p - 1$ , al menos uno de ellos no forma una arista externa con alguno de los vértices  $x_i, x_{p+1}$  y existen  $p - 1$  parejas.

Por 2, en cada pareja de vértices  $y_{j-1}, y_j$ ,  $2 \leq j \leq p$ , al menos uno de ellos no forma una arista externa y existen  $p - 1$  parejas.

Entonces el número de vértices de  $P$  que no forman aristas externas serían al menos  $2(p - 1) = 2p - 2$ .

Por lo tanto, el número de posibles aristas externas es  $2(2p) - 1 - 2p + 2 = 2p + 1$ , pero  $2p + 1 \leq 2d - 1 < 2d$  lo que contradice que existen al menos  $2d$  aristas externas.

Por lo tanto la afirmación es cierta.

Regresando a la prueba del teorema consideramos una partición de los vértices de  $P$  como nos asegura la Afirmación 1. El ciclo de longitud menor de la partición se denotará por  $C_1$ . Diremos que la arista  $vz$  es **ajena** si incide en un vértice de  $C_1$  y en un vértice de  $G - P$ .

Nuevamente tenemos 2 casos donde dependiendo de la paridad de  $r$  se tienen distintas afirmaciones que ayudarán a demostrar el teorema.

**Caso A.**  $r$  es impar.

Sean  $C_1$  y  $C_2$  los ciclos alternantes que dividen los vértices de  $P$  como en la Afirmación 1.

Como los vértices de  $C_1$  y  $C_2$  son los vértices de  $P$ , existe al menos una arista entre  $C_1$  y  $C_2$ . Si  $C_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$  y  $C_2 = (y_1, y_2, \dots, y_t, y_1)$  podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $x_1y_1$  es la arista entre los dos ciclos y  $\chi(x_1y_1) = \chi(x_1x_2)$ . Además  $k \leq d$  pues  $k \leq t$  y  $k+t = r+1 \leq 2d$ .

También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la aristas  $x_1y_1$  y  $x_1x_2$  son de color azul, entonces  $Q_1 = (x_2, x_3, \dots, x_k, x_1, y_1, C_2)$  es una trayectoria alternante, véase figura 3.8.

**Afirmación A1.** No existen aristas ajenas que inciden en  $x_2$  de color azul.

La trayectoria  $Q_1$  tiene longitud  $r$  y, por consiguiente, no existen aristas ajenas que inciden en  $x_2$  de color azul o una trayectoria de longitud al menos  $r + 1$  existiría.

Por consecuencia de la Afirmación A1 y la condición de grado de  $x_2$ , existe una arista  $x_2y_l$  color azul, para algún  $l \in \{1, 2, \dots, t\}$ .

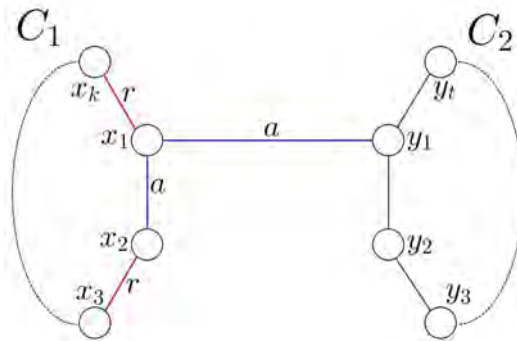


Figura 3.8: Partición de los vértices de  $P$  en dos ciclos.

**Afirmación A2.** No existen aristas ajenas que inciden en  $x_3$  de color rojo.

Supongamos, por contradicción, que existe una arista ajena que incide en  $x_3$  de color rojo, entonces existen  $w \in V(G) - V(P)$  y  $v \notin V(C_1)$  tal que  $x_3w$  es de color rojo y  $wv$  es de color azul, la existencia de  $v$  se sigue de la condición de grado de  $w$ ,  $C_1$  tiene  $k$  vértices y  $ux_3$  es de color rojo.

- Si  $v \notin V(C_2)$ , entonces  $(v, w, x_3, x_4, \dots, x_1, y_1, C_2)$  es una trayectoria de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima, ver figura 3.9.
- Si  $v = y_q \in V(C_2)$ , entonces  $(x_2, x_1, x_k, \dots, x_3, w, v = y_q, C_2)$  es una trayectoria de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima, ver figura 3.9.

Por lo tanto no existen aristas ajenas que inciden en  $x_3$  de color rojo.

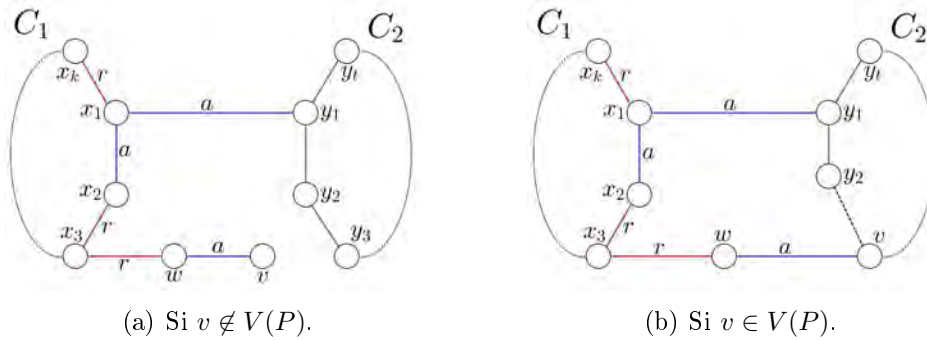


Figura 3.9: Si existe una arista ajena que incide en  $x_3$  de color rojo.

De la Afirmación A2, la condición de grado de  $x_3$  y  $k \leq d$ , concluimos que existe una arista roja de la forma  $x_3y_m$ .

Entonces  $Q_2 = (x_2, x_1, x_k, \dots, x_3, y_m, C_2)$  es una trayectoria de longitud  $r$ . Por la Observación 1 aplicada a las trayectorias  $Q_1$  y  $Q_2$  se tiene que  $|V(Q_1) \cup V(Q_2)| \geq 2d + 1$  pero  $V(Q_1) \cup V(Q_2) = V(P)$  contradiciendo la longitud de  $P$ . Concluyendo así el caso  $r$  impar.

**Caso B.**  $r$  es par.

Sean  $C_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ ,  $C_2 = (y_1, y_2, \dots, y_t, y_1)$  y  $u_1$  los dos ciclos alternantes y el vértice, respectivamente, tal que dividen los vértices de  $P$  como nos asegura la Afirmación 1. Recordar que  $C_1$  es el ciclo de longitud menor de los dos ciclos, es decir,  $k \leq d$ . Además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\chi(u_1x_1) \neq \chi(x_1x_2)$  y  $\chi(u_1y_1) \neq \chi(y_1y_2)$ , donde las aristas  $u_1x_1$  y  $u_1y_1$  conectan a  $u_1$  con  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente.

Recordemos que debido a la Afirmación 1  $\chi(u_1x_1) \neq \chi(u_1y_1)$ , digamos que el color de  $u_1x_1$  es color de rojo y  $u_1y_1$  es color de azul, véase figura 3.10.

Entonces  $Q_3 = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, u_1, y_1, y_2, \dots, y_t)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r$ . Observemos que la arista  $x_kx_{k-1}$  es de color azul. En consecuencias tenemos la siguiente afirmación:

**Afirmación B1.** No existen aristas ajenas que inciden en  $x_k$  de color rojo.

Por la condición de grado de  $x_k$  y la Afirmación B1, existe al menos una arista roja de la forma  $x_ky_l$ .

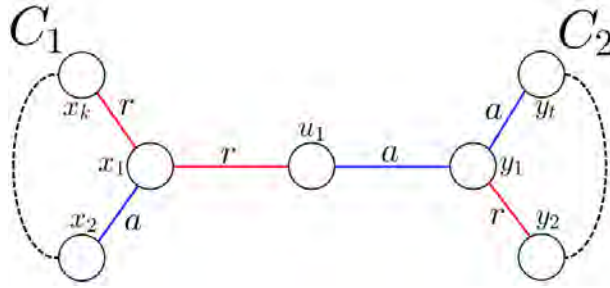


Figura 3.10: Partición de los vértices de  $P$  en dos ciclos y un vértice.

**Afirmación B2.** No existen aristas ajenas que inciden en  $x_{k-1}$  de color azul.

Supongamos, por contradicción, que existe al menos una arista ajena que incide en  $x_{k-1}$  de color azul. Sea  $x_{k-1}v$  dicha arista donde  $v \notin V(P)$ . Por la condición de grado de  $v$  junto con el hecho de que ni  $vx_k$  ni  $vx_{k-1}$  son de color rojo, debe existir la arista  $vw$  de color rojo, con  $w \notin V(C_1) \cup \{u_1\}$ .

1. Si  $w \notin C_2$ , entonces  $(w, v, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1, u_1, y_1, y_2, \dots, y_t)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima, ver figura 3.11.
2. Si  $w \in C_2$ , entonces  $P' = (x_k, x_1, \dots, x_{k-1}, v, w, C_2)$  es una trayectoria alternante, ver figura 3.11. Entonces,  $V(Q_3) \cup V(P') = V(P) \cup \{v\}$  y por la observación 1  $|V(Q_3) \cup V(P')| \geq 2d + 1$ . Tenemos los siguientes dos casos:
  - a) Si  $|V(Q_3) \cup V(P')| > 2d + 1$ , entonces  $|V(P)| \geq 2d + 1$  contradiciendo la longitud de  $P$ .
  - b) Si  $|V(Q_3) \cup V(P')| = 2d + 1$ , entonces  $|V(P)| = r + 1 = 2d$  contradiciendo que  $r$  es par.

Por lo tanto no existen aristas ajenas que inciden en  $x_{k-1}$  de color azul.

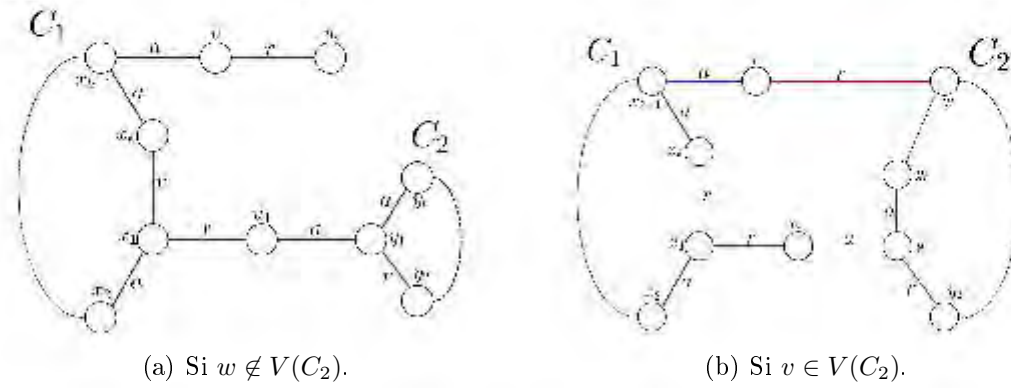


Figura 3.11: Si existe una arista ajena que incide en  $x_{k-1}$  de color azul.

De la Afirmación B2 y la condición de grado de  $x_{k-1}$  concluimos que existe al menos una arista de la forma  $x_{k-1}y_n$  de color azul.

Por otra parte, si ninguna arista ajena de color azul incide en  $x_k$  terminamos puesto que por la Afirmación B1 y está suposición todos los vecinos de  $x_k$  están en  $P$  y existen al menos  $2d$  vecinos de  $x_k$ , contradiciendo la longitud de  $P$ .

Entonces existe  $x_k u_k$ , con  $u_k \in V(G) - V(P)$ , una arista de color azul. Notar que  $u_k$  no puede tener vecinos de color rojo fuera de  $P$  porque si existe un vértice  $z \in V(G) - V(P)$ , con  $u_k z$  de color rojo, se tiene que  $(z, u_k, x_k, x_1, \dots, x_{k-1}, y_n, C_2)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ . Además por la condición de grado de  $u_k$  concluimos que debe existir al menos un vértice  $z_k \in C_2$  tal que  $u_k z_k$  es de color rojo.

Notemos que podemos repetir el mismo proceso que hicimos con los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y el vértice  $u_1$  para encontrar los vértice  $u_k$  y  $z_k$ , pero ahora con los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y el vértice  $u_k$  y encontrar los vértice  $u_{k-1} \in V(G) - V(P)$  y  $z_{k-1} \in V(C_2)$  tal que las aristas  $x_i u_i$  de color rojo y  $u_i z_i$  de color azul existan.

Si repetimos el proceso obtenemos la siguiente afirmación:

**Afirmación B3.** Para todo vértice  $x_i \in C_1$ , existen dos vértices  $u_i \in V(G) - V(P)$  y  $z_i \in V(C_2)$  tal que:

1. Si  $i$  es impar, entonces existen las aristas  $x_i u_i$  de color rojo y  $u_i z_i$  de color azul.
2. Si  $i$  es par, entonces existen las aristas  $x_i u_i$  de color azul y  $u_i z_i$  de color rojo.

Consideramos el conjunto  $X = \{x_i \in V(C_1) \mid i \equiv 1 \pmod{2}\}$  y el conjunto  $Y = \{x_i \in V(C_1) \mid i \equiv 0 \pmod{2}\}$ . Notemos que  $|X| = |Y| = \frac{k}{2}$ .

**Observación 4.** La trayectoria  $P_i = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{x+1}, u_{i+1}, C_2)$  es alternante de longitud máxima para toda  $x_i \in V(C_1)$ . Además si  $x_i \in X$  ( $x_i \in Y$ ) el color inicial de la trayectoria  $P_i$  es rojo (azul), ver figura 3.12.

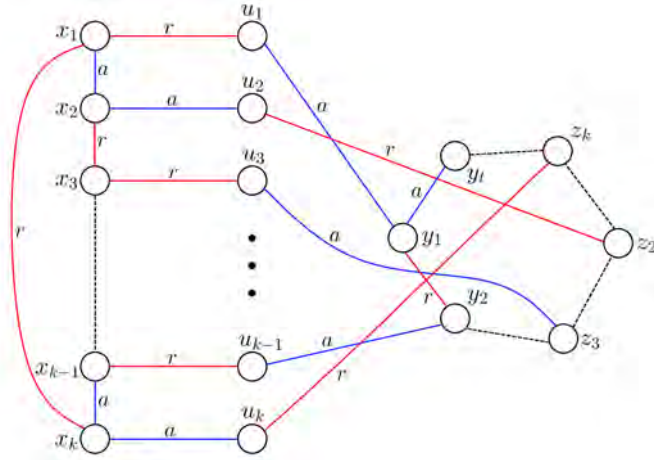


Figura 3.12: Si  $i = 2$ ,  $x_2 \in Y$  y  $P_2 = (x_2, x_1, \dots, x_3, u_3, z_3, C_2)$ .

**Observación 5.** No existen aristas de color azul entre  $X$  y  $V(G) - V(P)$  ni aristas de color rojo entre  $Y$  y  $V(G) - V(P)$  puesto que si alguna existiera podríamos alargar alguna de las trayectorias alternantes de la Observación 4.

**Observación 6.** No existen aristas  $x_i x_j$ ,  $\{x_i, x_j\} \subseteq X$ , de color azul, de lo contrario  $T = (x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{j+1}, u_{j+1}, z_{j+1}, C_2)$  es una trayectoria alternante de longitud máxima con arista inicial de color rojo y con vértice inicial  $x_{i+1} \in Y$ , véase figura 3.13. Por la Observación 5, la trayectoria  $P_{i+1}$  empieza en  $x_{i+1}$  con una arista de color azul y aplicando la Observación 1 a las trayectorias  $T$  y  $P_{i+1}$  tenemos que  $|V(T)| + 1 = |V(T) \cup V(P_{i+1})| \geq 2d + 1$  que al igual que en la Afirmación B2 Caso 2 nos lleva a una contradicción.

De manera análoga a la observación 6 obtenemos la siguiente afirmación:

**Observación 7.** No existen aristas  $x_i x_j$  con  $\{x_i, x_j\} \subseteq Y$ , de color rojo.

De la Observación 6 y que  $x_i x_{i+1}$  es de color azul, con  $i$  impar, se deduce que todo vértice  $x_i \in X$  no tiene más de  $|Y| - 1 = \frac{k}{2} - 1$  aristas de color azul

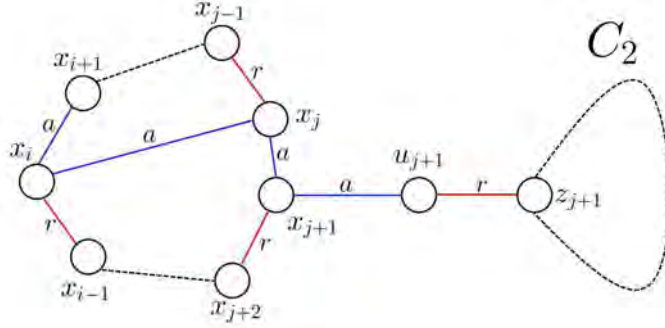


Figura 3.13: Si existe una arista  $x_i x_j$  de color azul podemos hacer la trayectoria alternante  $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{j+1}, u_{j+1}, z_{j+1}, C_2)$ .

que incidan en vértices de  $C_1$ .

De la Observación 7 y que  $x_j x_{j+1}$  es de color rojo, con  $j$  par, se deduce que todo vértice  $x_j \in Y$  no tiene más de  $|X| - 1 = \frac{k}{2} - 1$  aristas de color rojo que incidan en vértices de  $C_1$ .

Por la Observación 5, tenemos que todo vértice  $x_j \in V(C_1)$  tiene al menos  $d$  aristas que inciden en un vértice de  $P$ , con  $d \geq \frac{r}{2} = \frac{k+t}{2} = (\frac{k}{2}-1) + (\frac{t}{2}+1)$ . En consecuencia se tiene la siguiente afirmación:

**Afirmación B4.** Cada vértice  $x_j \in X$  ( $x_j \in Y$ ) tiene al menos  $\frac{t}{2}$  aristas de color azul (rojo) incidentes a un vértice de  $C_2$ .

**Afirmación B5.** Todos los vértices  $z$  adyacentes a  $u_1$  con arista de color azul están en  $V(P)$ .

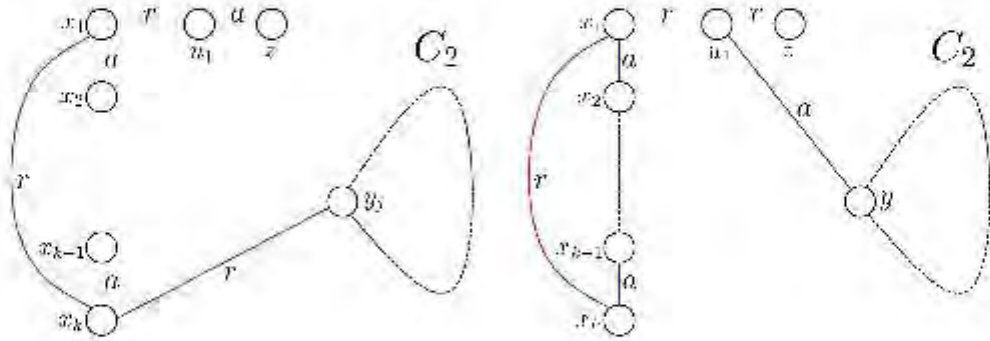
Supongamos, por contradicción, que existe una arista  $u_1 z$  de color azul con  $z \notin V(P)$ . Entonces  $(z, u_1, x_1, x_2, \dots, x_k, y_j, C_2)$ , la aristas  $x_k y_j$  existe por la Afirmación B5, es una trayectoria alternante de longitud  $r+1$  contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima, ver figura 3.14 (a).

**Afirmación B6.** Todos los vértices  $z$  adyacentes a  $u_1$  con arista de color rojo están en  $V(P)$ .

Supongamos, por contradicción, que existe una arista  $u_1 z$  de color rojo con  $z \notin V(P)$ , ver figura 3.14 (b).

Primero veremos que todos los vértices adyacentes a  $u_1$  con arista de color azul están en  $V(C_2)$ . Después encontraremos una arista  $y_i y_{i+1} \in A(C_2)$  de color azul tal que  $y_i u_1$  y  $y_{i+1} x_j$  son aristas de color azul o  $y_{i+1} u_1$  y  $y_i x_j$





(a) Si existe  $u_1z$  de color azul.

(b) Si existe  $u_1z$  de color azul.

Figura 3.14: Si existe un vértice  $z \in V(G) - V(P)$  adyacente a  $u_1$ .

son aristas de color azul, en ambos casos  $x_k \in X$ , lo cual nos llevará a una contradicción.

Supongamos que existe al menos una arista  $u_1x_i$  de color azul, con  $x_i \in V(C_1)$ . Entonces tenemos los siguientes dos casos:

**Caso 1.** Si  $x_i \in Y$  entonces  $(z, u_1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i-1}, y_m, C_2)$ , la arista  $x_{i-1}y_m$  existe por la Afirmación B5, es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima.

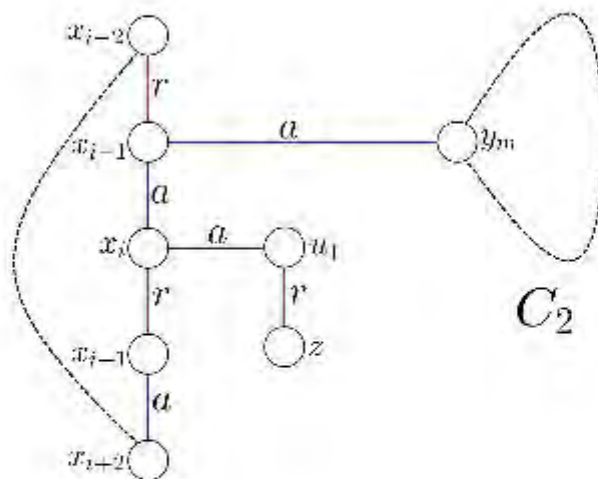


Figura 3.15

**Caso 2.** Si  $x_i \in X$  tenemos los siguientes dos casos:

- a) Si  $z \neq u_{i+1}$ , entonces  $(z, u_1, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i+1}, u_{i+1}, z_{i+1}, C_2)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima, ver figura 3.16 (a).
- b) Si  $z = u_{i+1}$ , entonces  $(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1, u_1, u_{i+1}, x_{i+1}, C_1)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima, ver figura 3.16 (b).

En ambos subcasos  $u_1 \neq u_{i+1}$  puesto que si fueran iguales estaríamos en el Caso 1 ya que  $u_1$  sería adyacente a  $x_{i+1} \in Y$  con arista de color azul.

Por lo tanto todos los vértices adyacentes a  $u_1$  con arista de color azul están en  $V(C_2)$  y por hipótesis existen al menos  $d$  aristas de azules incidentes a  $u_1$ .

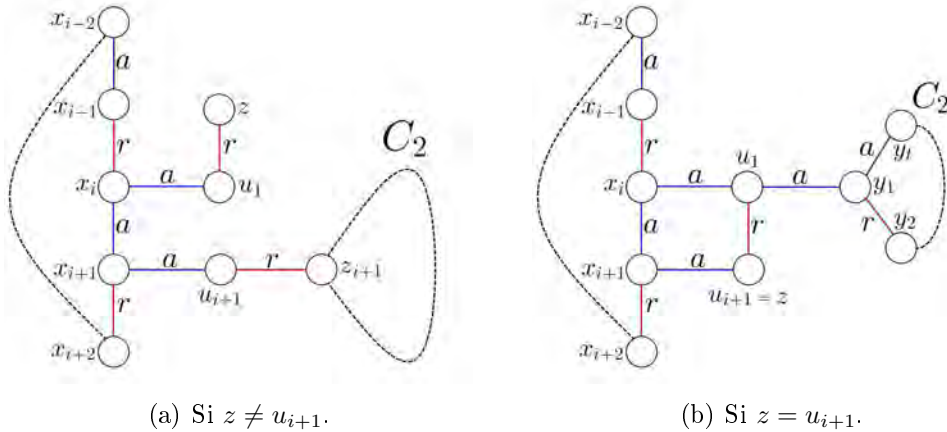


Figura 3.16: Si existe una arista  $u_1x_i$  de color azul con  $x_i \in X$ .

En lo que resta de la demostración diremos que un vértice  $u$  es adyacente a una arista  $xy$  si  $u$  es adyacente a  $x$  o a  $y$ . Y diremos que  $u$  y  $v$  son adyacentes a diferentes vértices de la arista  $xy$  si  $u$  es adyacente a  $x$  y  $v$  es adyacente a  $y$  o  $u$  es adyacente a  $y$  y  $v$  es adyacente a  $x$ .

Ahora veamos que existe una arista,  $y_iy_{i+1} \in A(C_2)$ , de color azul tal que  $u_1$  y  $x_j$  son adyacentes a diferentes vértices de  $y_iy_{i+1}$  con aristas de color azul, con  $x_j \in X$ . Para ello supongamos que ninguna arista de color azul en  $C_2$  lo cumple.

Como  $C_2$  tiene longitud  $t$  y  $y_1y_2$  es de color rojo, existen  $\frac{t}{2}$  aristas de color azul en  $C_2$  y son de la forma  $y_my_{m+1}$  con  $m$  par. Más aun, para todo vértice  $y_m \in C_2$  existe una única arista azul en  $C_2$  incidente a  $y_m$ .

Por otro lado, la Afirmación B5 asegura que existen al menos  $\frac{t}{2}$  aristas azules adyacentes a  $x_j \in X$ . Notemos que  $x_j$  puede ser adyacente al menos a  $\lceil \frac{t}{4} \rceil$  aristas de color azul de  $C_2$  y a lo más a  $\frac{t}{2}$ .

- I. Si  $x_j$  es adyacente a las  $\frac{t}{2}$  aristas azules de  $C_2$ .

Entonces  $x_j$  es adyacente a uno y sólo uno de los dos vértices de cada arista azul de  $C_2$  y por ende  $u_1$  sólo puede ser adyacente a los mismo vértices que son adyacentes a  $x_j$ , en caso contrario existe una arista  $y_i y_{i+1}$  tal que  $u_1$  y  $x_j$  son adyacentes a diferentes vértices de  $y_i y_{i+1}$  con aristas de color azul.

Por lo tanto,  $u_1$  es adyacente a lo más a  $\frac{t}{2}$  vértices en  $C_2$  con arista de color azul, pero  $\frac{t}{2} < d$  contradiciendo que existen  $d$  vértices en  $C_2$  adyacentes a  $u_1$ .

- II. Si  $x_j$  es adyacente a  $\frac{t}{2} - n$  aristas azules de  $C_2$ , con  $1 \leq n \leq \lfloor \frac{t}{4} \rfloor$ , ver figura 3.17.

Entonces existen  $n$  aristas tal que  $x_j$  es adyacente a ambos vértices de la arista con arista de color azul, por lo que  $u_1$  no puede ser adyacente a ninguno de los dos vértices (en caso contrario existe una arista que supusimos no existía).

Existen  $(\frac{t}{2} - n) - n$  aristas azules de  $C_2$  a las cuales  $x_j$  es adyacente a solo uno de sus vértices. De manera similar al caso I tenemos que  $u_1$  a lo más puede ser adyacente a los mismo  $(\frac{t}{2} - n) - n$  vértices que son adyacentes a  $x_j$ .

Además  $x_j$  no es adyacente a  $n$  aristas azules de  $C_2$ , por lo que el vértice  $u_1$  puede ser adyacente a ambos vértices de dicha arista.

Por lo tanto  $u_1$  a lo más puede ser adyacente a  $(\frac{t}{2} - n - n) + (2n) = \frac{t}{2}$  vértices en  $C_2$  con arista de color azul, contradiciendo que existen  $d$  vértices en  $C_2$  adyacentes a  $u_1$ .

Por lo tanto existe una arista,  $y_i y_{i+1} \in A(C_2)$ , de color azul tal que  $u_1$  y  $x_j$  son adyacentes a diferentes vértices de  $y_i y_{i+1}$  con aristas de color azul, con  $x_j \in X$ .

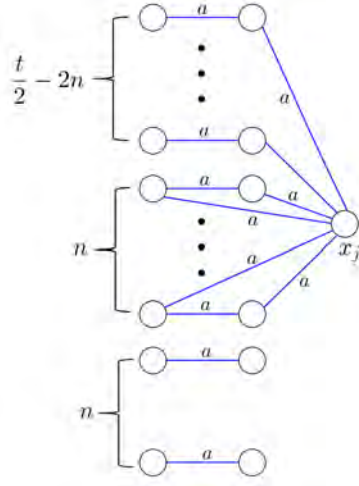


Figura 3.17: Si  $x_j$  es adyacente a  $\frac{t}{2} - n$  aristas azules de  $C_2$ .

Sea  $y_i y_{i+1} \in A(C_2)$  una arista de color azul tal que  $u_1$  y  $x_j$  son adyacentes a diferentes vértices de  $y_i y_{i+1}$  con aristas de color azul, con  $x_j \in X$ . Entonces tenemos los siguientes dos casos:

1. Si  $y_i$  es adyacente a  $u_1$  y  $y_{i+1}$  es adyacente a  $x_j$ , ver figura 3.18 (a).

Entonces  $(z, u_1, y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i+1}, x_j, C_1)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima.

2. Si  $y_i$  es adyacente a  $x_j$  y  $y_{i+1}$  es adyacente a  $u_1$ , ver figura 3.18 (b).

Entonces  $(z, u_1, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_i, x_j, C_1)$  es una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ , contradiciendo que  $P$  es de longitud máxima.

Por lo tanto, todas los vértices  $z$  adyacentes a  $u_1$  con aristas de color rojo están en  $V(P)$ . Demostrando la Afirmación B7.

Por hipótesis existen al menos  $2d$  vértices adyacentes a  $u_1$  y por las Afirmaciones B6 y B7 todos los vértices adyacentes a  $u_1$  están en  $V(P)$ , contradiciendo que la longitud de  $P$  es menor a  $2d$ .

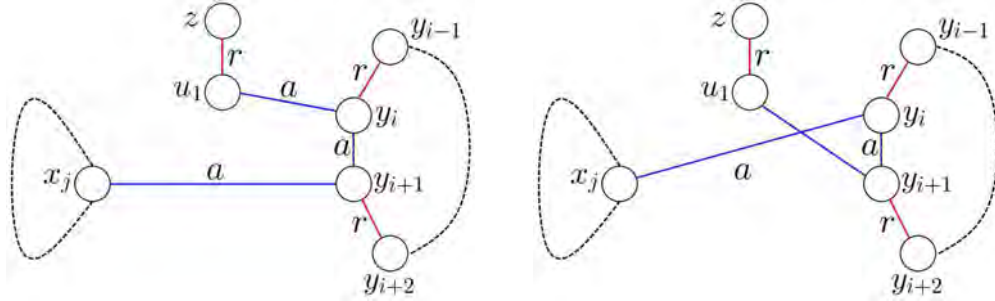
Concluyendo el caso  $r$  par.

Por lo tanto existe una trayectoria alternante de longitud al menos  $2d$ .

□

La demostración fue hecha en [1] pero se corrigió la demostración de la Afirmación B2 y se llegó a la contradicción del caso B de una forma diferente.

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 3.7.



(a) Si  $y_i$  es adyacente a  $u_1$  y  $y_{i+1}$  es adyacente a  $x_j$ .

(b) Si  $y_i$  es adyacente a  $x_j$  y  $y_{i+1}$  es adyacente a  $u_1$ .

Figura 3.18: En ambos casos existe una trayectoria alternante de longitud  $r + 1$ .

**Corolario 3.8.** Si  $G$  es una gráfica  $c$ -coloreada por aristas, con  $c \geq 3$  y  $\delta_{mon}(G) = d \geq 1$ , entonces  $G$  tiene una trayectoria bien coloreada de longitud  $2\lfloor \frac{c}{2} \rfloor d$ .

**Demostración.**

Sea  $G$  una gráfica  $c$ -coloreada por aristas,  $c \geq 3$ , con  $\delta_{mon}(G) = d$ .

Hacemos una gráfica nueva  $G'$  cambiando todas las aristas de colores impares de  $G$  por aristas de color rojo y todas las aristas de colores pares de  $G$  por aristas de color azul. Entonces  $G'$  está 2-coloreada por aristas y  $\delta_{mon}(G') = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor d$  debido a que  $V(G) = V(G')$ , todo vértice de  $G$  tiene al menos  $d$  aristas de cada color en  $G$  y existen  $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor$  colores pares en  $G$ . Por el Teorema 3.7 existe  $T$  una trayectoria alternante en  $G'$  de longitud al menos  $2\lfloor \frac{c}{2} \rfloor d$ . La trayectoria  $T$  también es una trayectoria en  $G$  puesto que  $V(G) = V(G')$ , además  $T$  está bien coloreada en  $G$  porque dos aristas adyacente de  $T$  tiene distinto color en  $G'$  si y sólo si las aristas en  $G$  tiene color de distinta paridad.

Por lo tanto  $G$  tiene una trayectoria de longitud al menos  $2\lfloor \frac{c}{2} \rfloor d$ . □

Se cree que el Corolario 3.8 esta lejos de ser lo mejor posible y en [1] se propone la siguiente conjetura:

**Conjetura 3.9.** Si  $G$  es una gráfica  $c$ -coloreada por aristas, con  $c \geq 3$  y  $\delta_{mon}(G) = d \geq 1$ , entonces  $G$  tiene una trayectoria bien coloreada de longitud  $2cd$ .

# Conclusiones

En el presente trabajo se dan las bases para el estudio de paseos, ciclos y trayectorias bien coloreadas en gráficas coloreadas por aristas.

En paseos bien coloreados se abordó de una manera muy detallada la demostración del Teorema de Kotzig. Además, se ofrecen dos algoritmos para encontrar un paseo euleriano, si existe; y con las transformaciones de orden se pueden encontrar todos los paseos eulerianos de la gráfica.

En ciclos bien coloreados se da una condición suficiente para que una gráfica coloreada por aristas, no contenga ciclos bien coloreados; y se demostraron varios corolarios derivados de este teorema. También se demostró de una forma detallada el Teorema 3.6 que resuelve de manera negativa la Conjetura 3.5.

En trayectorias bien coloreadas se da una cota inferior de la longitud de la trayectoria bien coloreada de longitud máxima con el Teorema 3.7. Asimismo, se corrigió la demostración del Teorema 3.7 hecha por Abouelaoualim, Das, De la Vega Karpinski, Manoussakis, Martinhon y Saad, en [1].

Aún quedan varias conjeturas y preguntas abiertas por estudiar en este campo, en especial, en ciclos y trayectorias bien coloreados. Por ejemplo, la conjetura planteada por Abouelaoualim, Das, De la Vega Karpinski, Manoussakis, Martinhon y Saad en [1], donde toda gráfica completa regular  $c$ -coloreada por aristas,  $c \geq 3$ , tiene un ciclo hamiltoniano bien coloreado, además de la Conjetura 3.9 en trayectorias.

# Bibliografía

- [1] ABOUELAOUALIM, A., DAS, K. C., DE LA VEGA, W. F., KARPINSKI, M., MANOUSSAKIS, Y., MARTINHON, C., y SAAD, R. Cycles and paths in edge-colored graphs with given degrees. *Journal of Graph Theory* 64, 1 (2010), 63–86.
- [2] ALEXANDERSON, G. About the cover: Euler and königsberg’s bridges: A historical view. *Bulletin of the american mathematical society* 43, 4 (2006), 567–573.
- [3] BANG-JENSEN, J., y GUTIN, G. Z. *Digraphs: theory, algorithms and applications*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [4] BENJAMIN, A., CHARTRAND, G., y ZHANG, P. *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton University Press, 2015.
- [5] BENKOUAR, A., MANOUSSAKIS, Y., PASCHOS, V. T., y SAAD, R. On the complexity of some hamiltonian and eulerian problems in edge-colored complete graphs. In *International Symposium on Algorithms* (1991), Springer, pp. 190–198.
- [6] BENKOUAR, A., MANOUSSAKIS, Y., PASCHOS, V. T., y SAAD, R. Hamiltonian problems in edge-colored complete graphs and eulerian cycles in edge-colored graphs: some complexity results. *Revue française d’automatique, d’informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle* 30, 4 (1996), 417–438.
- [7] BENNETT, M. Nucleotypic basis of the spatial ordering of chromosomes in eukaryotes and the implications of the order for genome evolution and phenotypic variation. *Genome evolution/edited by GA Dover, RB Flavell* (1982).
- [8] BONDY, J. A., y MURFY, U. S. R. *Graph theory with applications*, vol. 290. Citeseer, 1976.

- 
- [9] DORNINGER, D. Hamiltonian circuits determining the order of chromosomes. *Discrete Applied Mathematics* 50, 2 (1994), 159–168.
- [10] DORNINGER, D., y TIMISCHL, W. Geometrical constraints on bennett's predictions of chromosome order. *Heredity* 58 (1987), 321–325.
- [11] FLEISCHNER, H., SABIDUSSI, G., y WENGER, E. Transforming eulerian trails. *Discrete mathematics* 109, 1-3 (1992), 103–116.
- [12] GROSSMAN, J. W., y HÄGGKVIST, R. Alternating cycles in edge-partitioned graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 34, 1 (1983), 77–81.
- [13] GUTIN, G. Note on edge-colored graphs and digraphs without properly colored cycles. *Australas. J. Combin* 42 (2008), 137–140.
- [14] HESLOP-HARRISON, J., y BENNETT, M. Prediction and analysis of spatial order in haploid chromosome complements. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences* 218, 1211 (1983), 211–223.
- [15] KOTZIG, A. Moves without forbidden transitions in a graph. *Matematiký časopis* 18, 1 (1968), 76–80.
- [16] MANOUSSAKIS, Y. Alternating paths in edge-colored complete graphs. *Discrete Applied Mathematics* 56, 2 (1995), 297–309.
- [17] PEVZNER, P. A. Dna physical mapping and alternating eulerian cycles in colored graphs. *Algorithmica* 13, 1-2 (1995), 77–105.
- [18] SAAD, R. Finding a longest alternating cycle in a 2-edge-coloured complete graph is in rp. *Combinatorics, Probability and Computing* 5, 03 (1996), 297–306.
- [19] YEO, A. A note on alternating cycles in edge-coloured graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 69, 2 (1997), 222–225.