UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

(CO)HOMOLOGÍAS RELATIVAS DE GRUPOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JUAN JOSÉ CATALÁN RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS: JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

CUERNAVACA MORELOS, 05 DE JUNIO DE 2017

Agradecimientos

Agradezco a Dios por que el me dió la inspiración
y las fuerzas para seguir adelante.

Al Dr. José Luis Cisneros por que es un modelo a seguir y
por que me ha apoyado durante esta etapa.

A todos mis amigos y todas las personas que me han
apoyado y motivado a continuar estudiando.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos
de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM.
IN106614 "singularidades y teoría K".

Índice general

Agradecimientos **I**

Índice general **III**

Introducción **V**

1. Teoría de módulos **1**
1.1. Módulos y submódulos 1
1.2. Homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos 3
1.3. El $\mathbb{A}$-módulo cociente 4
1.4. Suma y producto directo 8
1.5. Generadores de módulos, bases y módulos libres 12
1.6. Sucesiones de módulos y diagramas 16
1.7. Módulos proyectivos 21
1.8. Producto tensorial 23
1.9. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$ 26

2. Álgebra homológica **29**
2.1. Categorías y funtores 29
2.2. Complejos de cadenas y de cocadenas 33
2.3. Homología y cohomología 37
2.4. Tor y Ext 41
2.5. Álgebra homológica relativa 46

3. Preliminares topológicos **59**
3.1. Adjunción de espacios 59
3.2. Cilindro y cono de una aplicación 61
3.3. Complejos CW 63

3.4. Conjuntos simpliciales 64
3.5. Acciones de grupos en espacios topológicos 67
3.6. Espacios clasificantes para familias de subgrupos 70

4. (Co)homología de grupos **75**
4.1. G-módulos 75
4.2. (Co)invariantes 80
4.3. Algunos resultados importantes 83
4.4. Definiciones de (co)homología de grupos 88

5. (Co)homología relativa de grupos de Adamson **93**
5.1. Definición con álgebra homológica relativa 93
5.2. Definición algebraica 95
5.3. Definición topológica 98

6. (Co)homología relativa de grupos de Takasu **101**
6.1. Definición topológica 101
6.2. Definición algebraica 102
6.3. Definición con álgebra homológica 104
6.4. Comparación de las (co)homologías relativas de grupos 105

Bibliografía **109**

Introducción

La idea principal de la (co)homología relativa de grupos con coeficientes en cualquier G-módulo M consiste en que a cada pareja (G, H), donde G es un grupo y H es un subgrupo de G, le corresponde dos sucesiones de grupos abelianos:

$$\mathrm{H}_*(G, H; M) = \{\mathrm{H}_n(G, H; M)\}_{n\in\mathbb{Z}},$$
$$\mathrm{H}^*(G, H; M) = \{\mathrm{H}^n(G, H; M)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

A $\mathrm{H}_*(G, H; M)$ se le llama la homología relativa de la pareja (G, H) con coeficientes en M; y $\mathrm{H}^*(G, H; M)$ es la cohomología relativa de la pareja (G, H) con coeficientes en M.

Existen dos versiones de la (co)homología relativa de grupos:

- La **(co)homología relativa de grupos de Adamson**. Apareció por primera vez en el año de 1954 en un artículo escrito por Iain T. Adamson [1], aquí sólo se consideran subgrupos de G de índice finito.

  En 1956, G. Hochschild escribió un artículo [7], en el cual definió la (co)homología relativa de grupos de Adamson con un enfoque de álgebra homológica relativa.

  Posteriormente se realizaron otros trabajos que generalizan los trabajos de Adamson y de Hochschild; aquí se consideran G-conjuntos en lugar de parejas de grupos (G, H).

- La **(co)homología relativa de grupos de Takasu**. En 1954, en su tesis de doctorado, M. Auslander definió una (co)homología relativa de grupos, esta definición tiene fundamentos topológicos.

  Despues, Satoru Takasu escribió un artículo [12] en el cual definió la (co)homología relativa de grupos de Auslander con un enfoque de álgebra homológica.

En general estas dos versiones no coinciden. Recientemente José Antonio Arciniega y José Luis Cisneros escribieron un artículo [2] en el que comparan estas dos versiones, además dan las condiciones suficientes en el subgrupo H de G para que ambas (co)homologías relativas coincidan.

En esta tesis de maestría intentaremos dar los fundamentos necesarios para entender las (co)homologías relativas de grupos (Adamson y Takasu).

Capítulo 1

Teoría de módulos

En este capítulo daremos un pequeño repaso de la teoría de módulos. El objetivo es tener una noción de las definiciones y teoremas que necesitaremos más adelante para definir la homología y la cohomología de un grupo con un enfoque de álgebra homológica.

1.1. Módulos y submódulos

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{A}$ un anillo con elemento unitario 1 (no necesariamente conmutativo). Un **$\mathbb{A}$-módulo izquierdo** es un grupo conmutativo M junto con una función $\mu\colon \mathbb{A} \times M \to M$ $\big($escribiremos αx en lugar de $\mu(\alpha, x)\big)$, a la que llamaremos multiplicación escalar , la cual satisface que para todos $x, y \in M$ y para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ los siguientes axiomas se cumplen:

I. $1x = x$.

II. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

III. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

IV. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Si no hace falta especificar, diremos que M es un **$\mathbb{A}$-módulo** en lugar de decir que es un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo. A los elementos de $\mathbb{A}$ le llamaremos escalares.

Sea M un grupo conmutativo y sea

$$\mathrm{End}(M) = \{f\colon M \to M \mid f \text{ es homomorfismo de grupos}\}.$$

Si $f, g \in \operatorname{End}(M)$, entonces la función $(f+g)\colon M \to M$ definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ es un homomorfismo de grupos y también la composición $g \circ f\colon M \to M$ es un homomorfismo de grupos. Con estas operaciones el conjunto $\operatorname{End}(M)$ forma un anillo que no necesariamente es conmutativo.

Si tenemos un grupo conmutativo M y un homomorfismo de anillos $\varphi\colon \mathbb{A} \to \operatorname{End}(M)$ con la propiedad de que $\varphi(1) = Id_M$, entonces la función $\mu\colon \mathbb{A} \times M \to M$ definida por $\mu(\alpha, x) = \varphi(\alpha)(x)$ satisface los axiomas de la definición 1.1.1, por lo tanto M junto con la multiplicación escalar μ forman un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo.

Por otro lado, si M es un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo y $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces la función $f_\alpha\colon M \to M$ definida por $f_\alpha(x) = \alpha x$ es un homomorfismo de grupos. Por las propiedades de M como un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo tenemos que para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $f_{\alpha+\beta} = f_\alpha + f_\beta$ y $f_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ f_\beta$; así la función $\psi\colon \mathbb{A} \to \operatorname{End}(M)$ definida por $\psi(\alpha) = f_\alpha$ es un homomorfismo de anillos tal que $\psi(1) = Id_M$.

Por lo anterior tenemos una correpondencia biyectiva entre el conjunto $\{\mu\colon \mathbb{A} \times M \to M \mid \mu \text{ satisface los axiomas de la definición 1.1.1 }\}$ y el conjunto $\{\varphi\colon \mathbb{A} \to \operatorname{End}(M) \mid \varphi \text{ es homomorfismo de anillos y } \varphi(1) = Id_M \}$.

Así tenemos una definición equivalente para un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo.

Definición 1.1.2. Sea $\mathbb{A}$ un anillo con elemento unitario 1 (no necesariamente conmutativo). Un **$\mathbb{A}$-módulo izquierdo** es un grupo conmutativo M junto con un homomorfismo de anillos $\varphi\colon \mathbb{A} \to \operatorname{End}(M)$ tal que $\varphi(1) = Id_M$.

Definición 1.1.3. Sea M un $\mathbb{A}$-módulo y sea N un subgrupo de M. Se dice que N es un **submódulo** de M si N forma un $\mathbb{A}$-módulo con la multiplicación escalar definida en M. Si N es un submódulo de M lo denotamos por $N < M$.

Es fácil demostrar que un subconjunto no vacío N de un $\mathbb{A}$-módulo M es un submódulo de M si y sólo si, para todos $x, y \in M$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$ se tiene que $x + y \in N$ y $\alpha x \in N$.

Notemos que si M es un $\mathbb{A}$-módulo, entonces $\{0\}$ y M son submódulos de M. Al submódulo $\{0\}$ se le conoce como el **submódulo trivial** de M.

Proposición 1.1.4. *Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de un $\mathbb{A}$-módulo M. Entonces $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ es un submódulo de M.*

Demostración. Como $0 \in N_j$ para toda $j \in I$, entonces $0 \in \bigcap_{i\in I} N_i$. Así $N \neq \emptyset$. Sean $x, y \in N$, $\alpha \in \mathbb{A}$. Como $N = \bigcap_{i\in I} N_i \subset N_j$ y N_j es un submódulo de M, entonces $x + y \in N_j$ y $\alpha x \in N_j$ para toda $j \in I$, luego $x + y \in N$ y $\alpha x \in N$. ■

1.2. Homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos

Definición 1.2.1. Sean M y N dos $\mathbb{A}$-módulos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es un **homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos** o **$\mathbb{A}$-homomorfismo** si para todos $x, y \in M$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$ se cumple lo siguiente:

I. $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

II. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Sean M, N, N' $\mathbb{A}$-módulos. Se cumple que la identidad $Id_M\colon M \to M$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Si $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to N'$ son homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos, entonces la composición $g \circ f\colon M \to N'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. La función $h\colon M \to N$ definida por $h(x) = 0$ para toda $x \in M$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, se le conoce como el **homomorfismo trivial**. Si $f\colon M \to N$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos tal que f es biyectiva, entonces su inversa $f^{-1}\colon N \to M$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos.

Definición 1.2.2. Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Se define el **núcleo o kernel de** f como el conjunto $\operatorname{Ker} f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$. La **imagen de** f es el conjunto $\operatorname{Im} f = \{y \in N \mid \text{existe } x \in M \text{ tal que } f(x) = y\}$.

Proposición 1.2.3. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos.*

1. *Si N' es un submódulo de N, entonces $f^{-1}(N')$ es un submódulo de M.*

2. *Si M' un submódulo de M, entonces $f(M')$ es un submódulo de N.*

Demostración.

1. Sean $x, y \in f^{-1}(N')$, $\alpha \in \mathbb{A}$. Tenemos que $f(x)$ y $f(y) \in N'$. Como N' es un submódulo de N y f es un homomorfismo, entonces $f(x)+f(y) = f(x+y) \in N'$ y $\alpha f(x) = f(\alpha x) \in N'$, lo que implica que $x+y \in f^{-1}(N')$ y $\alpha x \in f^{-1}(N')$.

2. Sean $r, s \in f(M')$, $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces existen $x, y \in M'$ tales que $f(x) = r$ y $f(y) = s$. Como M' es un submódulo de M, entonces $x + y \in M'$ y $\alpha x \in M'$. Como f es un homomorfismo, entonces $f(x + y) = f(x) + f(y) \in f(M')$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x) \in f(M')$. ■

Corolario 1.2.4. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Entonces*

1. $\operatorname{Ker} f$ *es un submódulo de M.*

2. $\operatorname{Im} f$ *es un submódulo de N.*

Demostración.

1. Sabemos que $\{0\}$ es un submódulo de N, luego por la proposición 1.2.3 tenemos que $f^{-1}(\{0\})$ es un submódulo de M, pero $f^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} f$.

2. Sabemos que M es un submódulo de sí mismo, luego por la proposición 1.2.3 tenemos que $f(M)$ es un submódulo de N, pero $f(M) = \operatorname{Im} f$. ■

Definición 1.2.5. Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Se dice que f es un **isomorfismo** si f es biyectiva. Se dice que dos $\mathbb{A}$-módulos M y N son **isomorfos** y se denota por $M \cong N$, si existe un isomorfismo entre ellos.

1.3. El $\mathbb{A}$-módulo cociente

Sea M un $\mathbb{A}$-módulo y sea N un submódulo de M. Sabemos que N es un subgrupo de M, y como M es un grupo conmutativo se cumple que N es un subgrupo normal de M, así el grupo cociente M/N está bien definido. Recordemos que los elementos de M/N son clases de equivalencia donde $x \sim y$ si y sólo si, $x - y \in N$. Si x es un elemento de M, entonces $x + N$ es igual a la clase de equivalencia de x. Se define la suma en M/N como $(x+N)+(y+N) = (x+y)+N$, luego M/N forma un grupo conmutativo con esta operación.

Definición 1.3.1. Sea M un $\mathbb{A}$-módulo y sea N un submódulo de M. El grupo cociente M/N junto con la multiplicación escalar $\mu\colon \mathbb{A}\times M/N \to M/N$ definida por

$$\mu(\alpha, x+N) = \alpha x + N$$

forman un $\mathbb{A}$-módulo. Escribiremos $\alpha(x+N)$ en lugar de $\mu(\alpha, x+N)$ y a M/N le llamaremos el **$\mathbb{A}$-módulo cociente**.

Proposición 1.3.2. *La multiplicación escalar $\mu\colon \mathbb{A} \times M/N \to M/N$ está bien definida y satisface los axiomas de 1.1.1.*

Demostración. Vamos a demostrar que μ está bien definida, es decir, que es independiente del representate de clase. Supongamos $x+N = y+N$, entonces $x - y \in N$. Como N es un $\mathbb{A}$-módulo tenemos que $\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y \in N$ para toda $\alpha \in \mathbb{A}$, se sigue que $\alpha(x+N) = \alpha x + N = \alpha y + N = \alpha(y+N)$.

Demostrar que μ satisface los axiomas de la definicion 1.1.1 es inmediato a partir de que la multiplicación escalar definida en M satisface estos. ■

Teorema 1.3.3 (Teorema del homomorfismo inducido)**.** *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, sean M' y M'' submódulos de M, sean N' y N'' submódulos de N, y supongamos que*

$$M'' < M' < M,$$

$$N'' < N' < N,$$

$$f(M') \subset N',$$

$$f(M'') \subset N''.$$

Entonces f induce un homomorfismo $f_*\colon M'/M'' \to N'/N''$ definido por

$$f_*(x + M'') = f(x) + N''.$$

Demostración. Vamos a demostrar que f_* está bien definido. Como $f(M') \subset N'$, entonces el codominio de f_* está bien definido. Supongamos que $x+M'' = y+M''$, entonces $x-y \in M''$. Como $f(M'') \subset N''$, entonces $f(x-y) = f(x) - f(y) \in N''$, por lo tanto $f_*(x+M'') = f(x)+N'' = f(y)+N'' = f_*(y+M'')$. Así f_* es independiente del representante de clase.

Sólo falta demostrar que f_* es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Sean $x + M'', y + M'' \in M'/M''$, $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces

$$\begin{aligned} f_*\big((x+M'') + (y+M'')\big) &= f_*\big((x+y) + M''\big) \\ &= f(x+y) + N'' \\ &= f(x) + f(y) + N'' \\ &= f(x) + N'' + f(y) + N'' \\ &= f_*(x+M'') + f_*(y+M''). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_*\big(\alpha(x+M'')\big) &= f_*(\alpha x + M'') \\ &= f(\alpha x) + N'' \\ &= \alpha f(x) + N'' \\ &= \alpha(f(x) + N'') \\ &= \alpha f_*(x+M''). \ \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema del homomorfismo inducido es de gran importancia ya que muchos de los homomorfismos que aparecen en teoría de módulos y álgebra homológica son de esta forma.

Teorema 1.3.4 (Primer teorema de isomorfismo). *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Entonces*

$$M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f.$$

Demostración. Por el teorema 1.3.3 tenemos que f induce un homomorfismo $f_*\colon M/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f/\{0\}$. Es fácil ver que f_* es un isomorfismo, luego $M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f/\{0\} \cong \operatorname{Im} f$. ■

Definición 1.3.5. Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Se define la **coimagen de** f como el $\mathbb{A}$-módulo cociente $\operatorname{Coim} f = M/\operatorname{Ker} f$. Se define el **conúcleo o cokernel de** f como el $\mathbb{A}$-módulo cociente $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$.

Proposición 1.3.6. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Entonces*

1. *f es inyectiva si y sólo si,* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

2. *f es sobreyectiva si y sólo si,* $\operatorname{Coker} f = \{0\}$.

Demostración.

1. Supongamos que f es inyectiva. Como f es un homomorfismo, entonces $f(0) = 0$, luego $\{0\} = f^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} f$.

   Ahora supongamos que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Sean $x, y \in M$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $f(x-y) = f(x)-f(y) = 0$, lo que implica que $x-y \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$, luego $x = y$. Así f es inyectiva.

2. Supongamos que f es sobreyectiva. Entonces $N = f(M) = \operatorname{Im} f$, se sigue que $\operatorname{Coker} f = \operatorname{Im} f/\operatorname{Im} f = \{0\}$.

   Ahora supongamos que $\operatorname{Coker} f = \{0\}$. Sea $x \in N$. Entonces $x+\operatorname{Im} f \in N/\operatorname{Im} f = \{0 + \operatorname{Im} f\}$, por lo que $x \in \operatorname{Im} f$. Así $N = \operatorname{Im} f = f(M)$ y por lo tanto f es sobreyectiva. ■

Definición 1.3.7. Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Decimos que f es un **monomorfismo** si para todos $g_1, g_2\colon M' \to M$ homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$.

Decimos que f es un **epimorfismo** si para todos $g_1, g_2\colon N \to N'$ homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos, si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$.

Proposición 1.3.8. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Entonces*

1. *f es inyectiva si y sólo si, f es un monomorfismo.*

2. *f es sobreyectiva si y sólo si, f es un epimorfismo.*

Demostración.

1. Supongamos que f es inyectiva y que $g_1, g_2\colon M' \to M$ son dos homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Entonces $f\big(g_1(x)\big) = f\big(g_2(x)\big)$ para toda $x \in M$, luego como f es inyectiva, se tiene que $g_1(x) = g_2(x)$ para toda $x \in M$. Así $g_1 = g_2$.

   Ahora supongamos que f es un monomorfismo. Sea $i\colon \operatorname{Ker} f \to M$ la inclusión y sea $g\colon \operatorname{Ker} f \to M$ el homomorfismo trivial, entonces para toda $x \in \operatorname{Ker} f$ se tiene que $f \circ i(x) = f\big(i(x)\big) = f(x) = 0$ y $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(0) = 0$. Así $f \circ i = f \circ g$. Como f es un monomorfismo, entonces $i = g$, lo que implica que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, luego por el inciso 1 de la proposición 1.3.6 tenemos que f es inyectiva.

2. Supongamos que f es sobreyectiva y que $g_1, g_2\colon N \to N'$ son dos homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Sea $y \in N$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$, luego $g_1(y) = g_1\big(f(x)\big) = g_1 \circ f(x) = g_2 \circ f(x) = g_2\big(f(x)\big) = g_2(y)$. Así $g_1 = g_2$.

   Ahora supongamos que f es epimorfismo. Sea $p\colon N \to N/\operatorname{Im} f$ la proyección natural y sea $h\colon N \to N/\operatorname{Im} f$ el homomorfismo trivial, entonces para toda $x \in M$ se tiene que $p \circ f(x) = p\big(f(x)\big) = f(x) + \operatorname{Im} f = 0 + \operatorname{Im} f$ y $h \circ f(x) = h\big(f(x)\big) = 0 + \operatorname{Im} f$. Así $p \circ f = h \circ f$. Como f es un epimorfismo, entonces $p = h$, lo que implica que $N/\operatorname{Im} f = \{0\}$, luego por el inciso 2 de la proposición 1.3.6 tenemos que f es sobreyectiva. ∎

1.4. Suma y producto directo

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathbb{A}$-módulos. El producto cartesiano de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ es el conjunto

$$\prod_{i\in I} M_i = \{f\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i \mid f(j) \in M_j \text{ para toda } j \in I\}.$$

Como cada M_j es un $\mathbb{A}$-módulo, entonces para todos $f, g \in \prod_{i\in I} M_i$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$ se tiene que $f(j) + g(j) \in M_j$ y $\alpha f(j) \in M_j$. Así las funciones

$$(f+g)\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i,$$
$$(\alpha f)\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i$$

definidas por

$$(f+g)(j) = f(j) + g(j),$$
$$(\alpha f)(j) = \alpha f(j)$$

son también elementos de $\prod_{i\in I} M_i$.

Por lo anterior podemos definir dos operaciones sobre el producto cartesiano de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$. Definimos la suma

$$+\colon \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} M_i$$

por la correspondencia $(f, g) \mapsto (f+g)$, y la multiplicación escalar

$$\mu\colon \mathbb{A} \times \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} M_i$$

por la correspondencia $(\alpha, f) \mapsto (\alpha f)$.

El producto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i$ junto con la suma forman un grupo conmutativo. La asociatividad y conmutatividad de la suma se obtienen a partir de la asociatividad y conmutatividad de cada M_j. El elementro neutro en la suma es la función $0\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ definida por $0(j) = 0_j$, donde 0_j es el cero de cada M_j. Para todo $f \in \prod_{i\in I} M_i$ la función $\big((-1)f\big)\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ es el inverso de f en la suma.

La multiplicación escalar μ cumple los axiomas de la definición 1.1.1 a partir de que cada M_j es un $\mathbb{A}$-módulo con su respectiva multiplicación escalar.

Definición 1.4.1. El grupo conmutativo $\prod_{i \in I} M_i$ junto con la multiplicación escalar μ forman un $\mathbb{A}$-módulo. A este se le conoce como el **producto directo de la familia de $\mathbb{A}$-módulos** $\{M_i\}_{i \in I}$.

Definición 1.4.2. La **suma directa de la familia de $\mathbb{A}$-módulos** $\{M_i\}_{i \in I}$ se define como

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{f \in \prod_{i \in I} M_i \mid f(j) = 0 \text{ para casi toda } j \in I\}.$$

Notemos que la expresión **"para casi todo"** en la definición anterior significa que para toda $f \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ o bien f es la función cero o existe un conjunto no vacío y finito $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset I$ tal que $f(k_r) \neq 0$ para $r = 1, 2, \ldots, n$, y $f(j) = 0$ para toda $j \in (I - K)$.

Es fácil demostrar que $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$. En el caso donde I es finito tenemos que $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$, escribiremos a los elementos de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ con la notación usual, es decir, si I tiene n elementos, entonces

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Definición 1.4.3. Sea $j \in I$. La **inclusión natural** de M_j en el producto directo $\prod_{i \in I} M_i$ es la función $l_j \colon M_j \to \prod_{i \in I} M_i$ definida por la correspondencia

$$x \mapsto l_j(x)(k) = \begin{cases} x & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

La **proyección natural** del producto directo $\prod_{i \in I} M_i$ en M_j es la función $p_j \colon \prod_{i \in I} M_i \to M_j$ definida por $p_j(f) = f(j)$.

En ambas definiciones podemos sustituir la suma directa $\bigoplus_{i \in I} M_i$ en lugar del producto directo $\prod_{i \in I} M_i$. Se cumple que la inclusión natural es un monomorfismo y la proyección natural es un epimorfismo, además la composición $p_j \circ l_j = Id_{M_j}$.

Teorema 1.4.4 (Propiedad universal de la suma directa)**.** *Sean M, M_1, $M_2, \ldots, M_n$ $\mathbb{A}$-módulos. Si φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos* *tales que* $\varphi_i\colon M_i \to M$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *entonces existe un único homomorfismo* $\Phi\colon \bigoplus_{i=1}^n M_i \to M$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_j \arrow[ur, "\varphi_j"] \arrow[r, "l_j"'] & \bigoplus_{i=1}^n M_i \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Sea $\Phi\colon \bigoplus_{i=1}^n M_i \to M$ la función definida por

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i).$$

Como cada φ_i es un un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, entonces Φ es un un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos.

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y sea $x \in M_j$. Tenemos que $l_j(x) = (0, 0, \ldots, x, \ldots, 0)$, donde x aparece en la j-ésima componente y en todas las demás componentes tenemos cero. Por la definición de Φ tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi \circ l_j(x) &= \Phi\bigl(l_j(x)\bigr) \\ &= \Phi(0, 0, \ldots, x, \ldots, 0) \\ &= \sum_{i \neq j} \varphi_i(0) + \varphi_j(x). \end{aligned}$$

Como cada φ_i es un un homomorfismo, entonces $\varphi_i(0) = 0$, por lo tanto $\Phi \circ l_j(x) = \varphi_j(x)$. Así $\Phi \circ l_j = \varphi_j$.

Supongamos que $\Phi'\colon \bigoplus_{i=1}^n M_i \to M$ es un un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos tal que $\Phi' \circ l_j = \varphi_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi'(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \Phi'\bigl(\sum_{i=1}^n l_i(x_i)\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^n \Phi' \circ l_i(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \\ &= \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Así Φ es único. ■

La propiedad universal de la suma directa se puede generalizar a cualquier familia $\{\varphi_i \colon M_i \to M\}_{i\in I}$ de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos. En general, esta propiedad no es válida si sustituimos el producto directo en lugar de la suma directa.

Proposición 1.4.5. *En el teorema anterior, si φ_j es un epimorfismo para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces Φ es un epimorfismo.*

Demostración. Sea $y \in M$. Como φ_j es un epimorfismo, existe un $x \in M_j$ tal que $\varphi_j(x) = y$, se sigue que $\Phi\big(l_j(x)\big) = \Phi \circ l_j(x) = \varphi_j(x) = y$. Así Φ es un epimorfismo. ■

Teorema 1.4.6 (Propiedad universal del producto directo)**.** *Sean M, M_1, $M_2, \ldots, M_n$ $\mathbb{A}$-módulos. Si ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_n$ son homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos tales que $\psi_i \colon M \to M_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces existe un único homomorfismo $\Psi \colon M \to \prod_{i=1}^n M_i$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\Psi"] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\
\prod_{i=1}^n M_i \arrow[r, "p_j"] & M_j
\end{tikzcd}$$

conmuta para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Sea $\Psi \colon M \to \prod_{i=1}^n M_i$ la función definida por

$$\Phi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\big).$$

Como cada ψ_i es un un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, entonces Ψ es un un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos.

Sea $x \in M$. Entonces $p_j \circ \Psi(x) = p_j\big(\Psi(x)\big) = p_j\big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\big) = \psi_j(x)$. Así $p_j \circ \Psi = \psi_j$.

Supongamos que $\Psi' \colon M \to \prod_{i=1}^n M_i$ es un un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos tal que $p_j \circ \Psi' = \psi_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Sea $x \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Psi'(x) &= \big(p_1(\Psi'(x)), p_2(\Psi'(x)), \ldots, p_n(\Psi'(x))\big) \\
&= \big(p_1 \circ \Psi'(x), p_2 \circ \Psi'(x), \ldots, p_n \circ \Psi'(x)\big) \\
&= \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\big) \\
&= \Psi(x).
\end{aligned}$$

Así Ψ es único. ■

La propiedad universal del producto directo se puede generalizar a cualquier familia $\{\psi_i \colon M \to M_i\}_{i \in I}$ de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos. En general, esta propiedad no es válida si sustituimos la suma directa en lugar del producto directo.

Proposición 1.4.7. *En el teorema anterior, si ψ_j es un monomorfismo para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces Ψ es un monomorfismo.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in M$. Si $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$, entonces $\psi_j(x_1) = p_j \circ \Psi(x_1) = p_j \circ \Psi(x_2) = \psi_j(x_2)$, luego como ψ_j es un monomorfismo tenemos que $x_1 = x_2$. Así Ψ es un monomorfismo. ■

1.5. Generadores de módulos, bases y módulos libres

Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Una **combinación lineal** de los elementos x_1, $x_2, \ldots, x_n$ de M es una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

donde los coeficientes α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son elementos del anillo $\mathbb{A}$.

Definición 1.5.1. Sea M un $\mathbb{A}$-módulo y sea X cualquier subconjunto de M. El **submódulo generado por** X, denotado por $< X >$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los elementos de X con coeficientes en $\mathbb{A}$. Si $X = \emptyset$, por convención tenemos que $< X >= \{0\}$.

Si N es un submódulo de M tal que $N =< X >$ para algún subconjunto X de M, entonces decimos que X es un **conjunto de generadores** para N y que N es **generado** por X.

Decimos que un submódulo N de M es **finitamente generado** si es generado por algún subconjunto finito de M.

Estamos considerando anillos con elemento unitario 1, por lo tanto para cada subconjunto X de M tenemos que $X \subset< X >$. Es fácil demostrar que $< X >$ es efectivamente un submódulo de M, además $< X >$ es el submódulo de M más pequeño que contiene a X, en el sentido de que si

N es un submódulo de M que contiene a X, entonces $< X > \subset N$. Cada submódulo N de M tiene un conjunto de generadores ya que $N =< N >$, sin embargo podría existir más de un conjunto de generadores para N.

Una manera más general de representar los elementos de un $\mathbb{A}$-módulo M generado por un conjunto X es mediante sumas formales.

Una **suma formal** de los elementos de X con coeficientes en el anillo A, es una expresión de la forma

$$\sum_{x \in X} \alpha_x x,$$

donde la suma corre sobre todos los $x \in X$, los coeficientes están en el anillo $\mathbb{A}$ y casi todos son cero. Cada suma formal representa una combinación lineal finita de elementos de X con coeficientes en $\mathbb{A}$.

Definición 1.5.2. Sea L un $\mathbb{A}$-módulo y sea X un subconjunto de L. Decimos que L **es libre sobre** X y que X **es una base para** L si para toda $x \in L$, $x \neq 0$, existen únicos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$, $\alpha_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$.

Definición 1.5.3. Si L es un $\mathbb{Z}$-módulo libre sobre un conjunto X, entonces decimos que L es un **grupo abeliano libre sobre** X.

Notemos que si X es una base para un $\mathbb{A}$-módulo libre L, entonces $0 \notin X$, $L =< X >$, y los elementos de X son linealmente independientes, es decir, si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, entonces $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $\mathbb{A}$ un anillo con elemento unitario 1. Si $\mathbb{B}$ es un subanillo de $\mathbb{A}$ tal que $1 \in \mathbb{B}$, entonces $\mathbb{A}$ tiene estructura de $\mathbb{B}$-módulo tomando la multiplicación escalar como la multiplicación en el anillo. En particular $\mathbb{A}$ es un $\mathbb{A}$-módulo.

Dado cualquier conjunto no vacío I tenemos la familia de $\mathbb{A}$-módulos $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$, donde $\mathbb{A}_j = \mathbb{A}$ para toda $j \in I$. Un elemento $f \in \bigoplus_{i \in I} \mathbb{A}_i$ es una función $f \colon I \to \mathbb{A}$ tal que $f(j) = 0$ para casi toda $j \in I$.

Para cada $j \in I$ tenemos la inclusión natural $l_j \colon \mathbb{A} \to \bigoplus_{i \in I} \mathbb{A}_i$ definida por la correspondencia

$$\alpha \mapsto l_j(\alpha)(k) = \begin{cases} \alpha & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Notemos que $l_j(\alpha) = \alpha l_j(1)$ para toda $\alpha \in \mathbb{A}$.

Sea $f \in \bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$, $f \neq 0$. Por la definición de suma directa existe un único conjunto no vacío y finito $K = \{k_1, k_2, \dots k_n\}$ tal que $f(k_r) \neq 0$ para $r = 1, 2, \dots, n$ y $f(k) = 0$ para toda $k \in \big(I - K\big)$, entonces

$$\begin{aligned} f &= \sum_{r=1}^{n} l_{k_r}\big(f(k_r)\big) \\ &= \sum_{r=1}^{n} f(k_r) l_{k_r}(1). \end{aligned}$$

Así f se puede escribir como una combinación lineal finita de elementos de $\{l_i(1)\}_{i\in I}$ con coeficientes distintos de cero en el anillo $\mathbb{A}$, y además esta combinacion lineal es única.

Llamemosle e_j a la función $l_j(1)$, entonces el conjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base para $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$, a esta se le conoce como la **base canónica**. Así la suma directa de la familia $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ es un $\mathbb{A}$-módulo libre.

Proposición 1.5.4. *Dado cualquier conjunto X, existe un $\mathbb{A}$-módulo libre $F(X)$ que tiene como base a X.*

Demostración. Si $X = \emptyset$ definimos $F(X) = \{0\}$.

Sea X distinto del vacío. Sabemos que $\bigoplus_{i\in X} \mathbb{A}_i$ es un $\mathbb{A}$-módulo libre sobre $\{e_i\}_{i\in X}$. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto X y el conjunto $\{e_i\}_{i\in X}$ en la que identificamos cada elemento $x \in X$ con el elemento $e_x \in \{e_i\}_{i\in X}$.

Cada elemento distinto de cero de $\bigoplus_{i\in X} \mathbb{A}_i$ se puede representar como una combinación lineal finita de elementos de $\{e_i\}_{i\in X}$ con coeficientes en el anillo $\mathbb{A}$; $F(X)$ es el $\mathbb{A}$-módulo que se obtiene al sustituir el símbolo x en lugar del símbolo e_x en cada una de estas combinaciones lineales. Como $\{e_i\}_{i\in X}$ es una base para $\bigoplus_{i\in X} \mathbb{A}_i$, entonces X es una base para $F(X)$. ■

Proposición 1.5.5 (Extensión por linealidad)**.** *Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Si $f\colon I \to M$ es cualquier función, entonces existe un único homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $\Phi\colon \bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i \to M$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & M \\ I \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & \bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $g\colon I \to \bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$ es la función definida por $g(j) = e_j$.

Demostración. Para cada $j \in I$ tenemos la función $\varphi_j\colon \mathbb{A} \to M$ definida por $\varphi_j(\alpha) = \alpha f(j)$.

Cada φ_j es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos ya que para todos $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{A}$ se tiene que

$$\varphi_j(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)f(j) = \alpha f(j) + \beta f(j) = \varphi_j(\alpha) + \varphi_j(\beta),$$
$$\varphi_j(\lambda\alpha) = (\lambda\alpha)f(j) = \lambda\big(\alpha f(j)\big) = \lambda\varphi_j(\alpha).$$

Tenemos que $\{\varphi_j\colon \mathbb{A} \to M\}_{i\in I}$ es una familia de $\mathbb{A}$-módulos, por la propiedad universal de la suma directa existe un único homomorfismo $\Phi\colon \bigoplus_{i\in I}\mathbb{A}_i \to M$ tal que $\Phi \circ l_j = \varphi_j$ para toda $i \in I$. Sea $j \in I$. Entonces

$$\Phi \circ g(j) = \Phi\big(g(j)\big) = \Phi(e_j) = \Phi\big(l_j(1)\big) = \Phi \circ l_j(1) = \varphi_j(1) = f(j).$$

Así $\Phi \circ g = f$.

Supongamos que $\Phi'\colon \bigoplus_{i\in I}\mathbb{A}_i \to M$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos tal que $\Phi' \circ g = f$. Sea $e_j \in \{e_i\}_{i\in I}$. Entonces

$$\Phi'(e_j) = \Phi' \circ g(j) = f(j) = \Phi \circ g(j) = \Phi(e_j).$$

Como Φ y Φ' son iguales para cada elemento de la base, entonces $\Phi' = \Phi$. Así ϕ es única. ■

Proposición 1.5.6. *Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Si $f\colon X \to M$ es cualquier función, entonces existe un único homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $\Phi\colon F(X) \to M$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & M \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & F(X) \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, donde i es la inclusión.

Demostración. Por la definición de $F(X)$, existe un isomorfismo natural $\Psi\colon F(X) \to \bigoplus_{i\in X}\mathbb{A}_i$ que manda cada elemento $x \in X$ al elemento e_x de la base canónica de $\bigoplus_{i\in X}\mathbb{A}_i$. Por la proposición 1.5.5 existe un único homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $\Phi'\colon \bigoplus_{i\in X}\mathbb{A}_i \to M$ tal que $\Phi' \circ g = f$, donde la función $g\colon X \to \bigoplus_{i\in X}\mathbb{A}_i$ está definida por $g(x) = e_x$. Notemos que $g = \Psi \circ i$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & M \\ X \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "i"] & F(X) \arrow[r, "\Psi"] & \bigoplus_{i\in X}\mathbb{A}_i \arrow[u, "\Phi'"'] \end{tikzcd}$$

Sea $\Phi = \Phi' \circ \Psi$. Entonces $\Phi \circ i = (\Phi' \circ \Psi) \circ i = \Phi' \circ g = f$, y además Φ es único ya que Φ' es único. ■

Observación 1.5.7. En la proposición anterior $\Phi\colon F(X) \to M$ está definido por

$$\Phi\big(\sum_{x \in X} \alpha_x x\big) = \sum_{x \in X} \alpha_x f(x),$$

por lo tanto $\operatorname{Im}\Phi =< f(X) >$.

Proposición 1.5.8. *Todo $\mathbb{A}$-módulo es cociente de un $\mathbb{A}$-módulo libre.*

Demostración. Sea M un $\mathbb{A}$-módulo y sea X cualquier subconjunto de M tal que $M =< X >$.

Tenemos que la inclusión $i\colon X \to M$ se extiende por linealidad a un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $\Phi\colon F(X) \to M$, además Φ es un epimorfismo ya que $\operatorname{Im}\Phi =< i(X) >=< X >= M$, luego por el primer teorema de isomorfismo tenemos que $M \cong F(X)/\operatorname{Ker}\Phi$. ■

1.6. Sucesiones de módulos y diagramas

Ahora vamos a considerar sucesiones de la forma

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots,$$

donde $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de $\mathbb{A}$-módulos y $\{f_i\colon M_i \to M_{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos.

Definición 1.6.1. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta en M_i si $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i+1}$. Decimos que **la sucesión es exacta**, si es exacta en cada M_i, $i \in \mathbb{Z}$.

Notemos que en una sucesión exacta $f_i \circ f_{i+1} = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.6.2. *Sea*

$$\cdots \longrightarrow M_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \{0\} \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-2} \longrightarrow \cdots$$

una sucesión exacta en la que M_i es trivial para alguna $i \in \mathbb{Z}$. Entonces

1. *f_{i-1} es un monomorfismo.*

2. *f_{i+2} es un epimorfismo.*

Demostración. Tenemos que f_{i+1} y f_i son homomorfismos triviales. Como la sucesión es exacta, entonces $\operatorname{Ker} f_{i-1} = \operatorname{Im} f_i = \{0\}$ y $f_{i+2}(M_{i+2}) = \operatorname{Im} f_{i+2} = \operatorname{Ker} f_{i+1} = M_{i+1}$. Así f_{i-1} es un monomorfismo y f_{i+2} es un epimorfismo. ■

Definición 1.6.3. Sean M_1, M_0, N_1, N_0 $\mathbb{A}$-módulos y sean f_1, g_1, h_1 y h_0 homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos. Decimos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_0 \arrow[d, "h_0"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_0 \end{tikzcd}$$

conmuta si $h_0 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$.

Lema 1.6.4 (Lema del cinco)**.** *Supongamos que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & {} \\ {} \arrow[r] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_0 \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

es conmutativo y que los renglones son sucesiones exactas. Si h_4, h_3, h_1, h_0 son isomorfismos, entonces h_2 también es un isomorfismo.

Demostración. Vamos a demostrar que h_2 es un monomorfismo. Supongamos que $x \in \operatorname{Ker} h_2$, es decir, que $h_2(x) = 0$. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $(h_1 \circ f_2)(x) = (g_2 \circ h_2)(x) = g_2(0) = 0$, pero h_1 es un isomorfismo lo que implica que $f_2(x) = 0$ y por lo tanto $x \in \operatorname{Ker} f_2$. Como el primer renglón es exacto tenemos que $x \in \operatorname{Im} f_3 = \operatorname{Ker} f_2$ lo que implica que existe $y \in M_3$ tal que $f_3(y) = x$. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $(g_3 \circ h_3)(y) = (h_2 \circ f_3)(y) = h_2(x) = 0$, lo que implica que $h_3(y) \in \operatorname{Ker} g_3$. Como el segundo renglón es exacto tenemos que $h_3(y) \in \operatorname{Im} g_4 = \operatorname{Ker} g_3$, por lo tanto existe $z \in N_4$ tal que $g_4(z) = h_3(y)$. Como h_4 es un isomorfismo existe $w \in M_4$ tal que $h_4(w) = z$. Como el diagrama conmuta se sigue que $(h_3 \circ f_4)(w) = (g_4 \circ h_4)(w) = g_4(z) = h_3(y)$, pero h_3 es un isomorfismo, lo que implica que $f_4(w) = y$; si aplicamos f_3 a la igualdad anterior obtenemos que $f_3(y) = (f_3 \circ f_4)(w) = 0$, pero anteriormente tenï£¡amos que $f_3(y) = x$, luego $x = 0$ y por lo tanto $\operatorname{Ker} h_2 = \{0\}$. Así h_2 es un monomorfismo.

Ahora vamos a demostrar que h_2 es un epimorfismo. Supongamos que $y \in N_2$. Como h_1 es un isomorfismo existe $z \in M_1$ tal que $h_1(z) = g_2(y)$. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $(h_0 \circ f_1)(z) = (g_1 \circ h_1)(z) = (g_1 \circ g_2)(y) = 0$, pero h_0 es un isomorfismo, por lo que $f_1(z) = 0$ y por lo tanto $z \in \operatorname{Ker} f_1$. Como el primer renglón es exacto tenemos que $z \in \operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Ker} f_1$, lo que implica que existe $w \in M_2$ tal que $f_2(w) = z$. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $(g_2 \circ h_2)(w) = (h_1 \circ f_2)(w) = h_1(z) = g_2(y)$, por lo que $g_2\big(h_2(w) - y\big) = 0$ y por lo tanto $h_2(w) - y \in \operatorname{Ker} g_2$. Como el segundo renglón es exacto tenemos que $h_2(w) - y \in \operatorname{Im} g_3 = \operatorname{Ker} g_2$, lo que implica que existe $t \in N_3$ tal que $g_3(t) = h_2(w) - y$. Como h_3 es un isomorfismo existe $s \in M_3$ tal que $h_3(s) = t$. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $(h_2 \circ f_3)(s) = (g_3 \circ h_3)(s) = g_3(t) = h_2(w) - y$, lo que implica que $h_2\big(w - f_3(s)\big) = y$. Así h_2 es un epimorfismo. Se concluye que h_2 es un isomorfismo. ■

Definición 1.6.5. A una sucesión finita y exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

le llamaremos **sucesión exacta corta**. Los ceros que aparecen al comienzo y al final de la sucesión son el $\mathbb{A}$-módulo trivial.

Proposición 1.6.6. *Sea*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Entonces

1. *f es un monomorfismo.*

2. *g es un epimorfismo.*

3. *Existe un submódulo N de M tal que $N \cong M_1$ y $M/N \cong M_2$.*

Demostración. 1 y 2 son consecuencia de la proposición 1.6.2.

3. Sea $N = \operatorname{Im} f$. Como f es un monomorfismo, entonces $N \cong M_1$. Como la sucesión es exacta, entonces $N = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. Como g es un epimorfismo tenemos que $\operatorname{Im} g = M_2$, luego por el primer teorema de isomorfismo $M/N \cong M_2$. ■

Proposición 1.6.7. *Sean M_1 y M_2 $\mathbb{A}$-módulos. Entonces las sucesiones*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{l_1} M_1 \bigoplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{l_2} M_1 \bigoplus M_2 \xrightarrow{p_1} M_1 \longrightarrow 0$$

son exactas cortas, donde l_i es la inclusión natural y p_i es la proyección natural, para $i = 1, 2$.

Demostración. Por la definición de la inclusión natural y de la proyección natural tenemos que $\operatorname{Im} l_1 = M_1 \bigoplus \{0\} = \operatorname{Ker} p_2$, y $\operatorname{Im} l_2 = \{0\} \bigoplus M_2 = \operatorname{Ker} p_1$. ■

Lema 1.6.8 (Lema del tres)**.** *Supongamos que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y que los renglones son sucesiones exactas cortas. Si dos de los tres homomorfismos h_2, h_1, h_0 son isomorfismos, entonces el tercero también es un isomorfismo.

Demostración. Podemos completar el diagrama de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Supongamos que dos de los tres homomorfismos h_2, h_1, h_0 son isomorfismos, luego por el lema del cinco 1.6.4 tenemos que el tercero también es un isomorfismo. ■

Definición 1.6.9. Decimos que una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

se **escinde** si existe un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $g' \colon M_2 \to M$ tal que $g \circ g' = Id_{M_2}$.

Teorema 1.6.10. *Sea*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Entonces son equivalentes

1. *La sucesión se escinde.*
2. *Existe un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $f'\colon M \to M_1$ tal que $f' \circ f = Id_{M_1}$.*
3. *Existe un isomorfismo $\Delta\colon M \to M_1 \bigoplus M_2$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "l_1"] & M_1 \bigoplus M_2 \arrow[r, "p_2"] & M_2 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Supongamos que la sucesión se escinde, es decir, que existe un homomorfismo $g'\colon M_2 \to M$ tal que $g \circ g' = Id_{M_2}$. Vamos a demostrar el inciso 2. Tenemos los homomorfismos $f\colon M_1 \to M$ y $g'\colon M_2 \to M$. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un homomorfismo $\Phi\colon M_1 \bigoplus M_2 \to M$ tal que $\Phi \circ l_1 = f$ y $\Phi \circ l_2 = g'$, por lo tanto el primer cuadro del diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "l_1"] \arrow[d, "Id"] & M_1 \bigoplus M_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\Phi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $(x, y) \in M_1 \bigoplus M_2$. Como $g \circ f = 0$ y $g \circ g' = Id_{M_2}$, entonces $g \circ \Phi(x, y) = g\big(f(x) + g'(y)\big) = g \circ f(x) + g \circ g'(y) = y = p_2(x, y)$. Así $g \circ \Phi = p_2$, lo que implica que el diagrama anterior es conmutativo, luego por el lema del tres 1.6.8 tenemos que Φ es un isomorfismo. Sea $f' = p_1 \circ \Phi^{-1}$, entonces $f' \circ f = (p_1 \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ l_1) = p_1 \circ l_1 = Id_{M_1}$.

($2 \Rightarrow 3$) Ahora supongamos que existe un homomorfismo $f'\colon M \to M_1$ tal que $f' \circ f = Id_{M_1}$. Vamos a demostrar el inciso 3. Tenemos los homomorfismos $f'\colon M \to M_1$ y $g\colon M \to M_2$. Por la propiedad universal del producto directo, existe un homomorfismo $\Psi\colon M \to M_1 \bigoplus M_2$ tal que $p_1 \circ \Psi = f'$ y $p_2 \circ \Psi = g$, por lo tanto el segundo cuadro del diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Psi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "l_1"] & M_1 \bigoplus M_2 \arrow[r, "p_2"] & M_2 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $x \in M_1$. Como $f' \circ f = Id_{M_1}$ y $g \circ f = 0$, entonces $\Psi \circ f(x) = \big(f'(f(x)), g(f(x))\big) = \big(f' \circ f(x), g \circ f(x)\big) = (x, 0) = l_1(x)$. Así $\Psi \circ f = l_1$, lo que implica que el diagrama anterior es conmutativo, luego por el lema del tres 1.6.8 tenemos que Ψ es un isomorfismo.

(3 $\Rightarrow$ 1) Por último supongamos que existe un isomorfismo $\Delta\colon M \to M_1 \bigoplus M_2$ tal que el diagrama del inciso 3 es conmutativo. Vamos a demostrar el inciso 1. Como el diagrama es conmutativo tenemos que $\Delta \circ f = l_1$ y $g = p_2 \circ \Delta$. Sea $g' = \Delta^{-1} \circ l_2$, entonces $g \circ g' = (p_2 \circ \Delta) \circ (\Delta^{-1} \circ l_2) = p_2 \circ l_2 = Id_{M_2}$. ■

1.7. Módulos proyectivos

Definición 1.7.1. Sea P un $\mathbb{A}$-módulo. Decimos que P es **proyectivo** si para todo homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $f\colon P \to N_2$ y para todo epimorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $\psi\colon N \to N_2$, existe un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $h\colon P \to N$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\
N \arrow[r, "\psi"] & N_2
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.7.2. *Sea $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia de $\mathbb{A}$-módulos. Entonces $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es proyectivo si y sólo si, P_j es proyectivo para toda $j \in I$.*

Demostración. Supongamos que $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es proyectivo. Sea $j \in I$. Vamos a demostrar que P_j es proyectivo. Sean $f\colon P_j \to N_2$, $\psi\colon N \to N_2$ homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos tal que ψ es un epimorfismo. Tenemos que $f \circ p_j\colon \bigoplus_{i \in I} P_i \to N_2$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, donde p_j es la proyección natural. Como $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es proyectivo, entonces existe un homomorfismo

$h\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to N$ tal que $\psi\circ h = f\circ p_j$. Sea $h_j = h\circ l_j$, donde l_j es la inclusión natural, entonces $\psi\circ h_j = \psi\circ(h\circ l_j) = (f\circ p_j)\circ l_j = f$. Así P_j es proyectivo para toda $j\in I$.

Ahora supongamos que P_j es proyectivo para toda $j \in I$. Vamos a demostrar que $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es proyectivo. Sean $f\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to N_2$, $\psi\colon N \to N_2$ homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos tal que ψ es un epimorfismo. Sea $k \in I$. Tenemos que $f \circ l_k\colon P_k \to N_2$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, donde l_k es la inclusión natural. Como P_k es proyectivo, existe un homomorfismo $h_k : P_k \to N$ tal que $\psi \circ h_k = f \circ l_k$. Como k es arbitraria, entonces tenemos una familia de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos $\{h_i\colon P_i \to N\}_{i\in I}$ con la propiedad $\psi \circ h_j = f \circ l_j$ para toda $j \in I$. Por la propiedad universal de la suma directa existe un homomorfismo $h\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to N$ tal que $h \circ l_j = h_j$ para toda $j \in I$, entonces $(\psi \circ h) \circ l_j = \psi \circ h_j = f \circ l_j$ para toda $j \in I$. Sea $\omega \in \bigoplus_{i\in I} P_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi\circ h(\omega) &= \psi\circ h\big(\sum_{i\in I} l_i(\omega(i))\big)\\
&= \sum_{i\in I} \psi\circ h\circ l_i(\omega(i))\\
&= \sum_{i\in I} f\circ l_i(\omega(i))\\
&= f\big(\sum_{i\in I} l_i(\omega(i))\big)\\
&= f(\omega).
\end{aligned}$$

Así $\psi \circ h = f$. ■

Proposición 1.7.3. *Si L es un $\mathbb{A}$-módulo libre, entonces L es proyectivo.*

Demostración. Como L es libre, entonces L tiene una base X. Se cumple que $L \cong \bigoplus_{i\in X} \mathbb{A}_i$, por lo tanto basta con demostrar que $\bigoplus_{i\in X} \mathbb{A}_i$ es proyectivo; por la proposición 1.7.2 tenemos que $\bigoplus_{i\in X} \mathbb{A}_i$ es proyectivo si y sólo si, $\mathbb{A}_j$ es proyectivo para toda $j \in X$. Como $\mathbb{A}_j = \mathbb{A}$ para toda $j \in X$, entonces sólo tenemos que demostrar que $\mathbb{A}$ es un $\mathbb{A}$-módulo proyectivo.

Sean $f\colon \mathbb{A} \to N_2$, $\psi\colon N \to N_2$ homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos tal que ψ es un epimorfismo. Entonces existe $z \in \psi^{-1}\big(\{f(1)\}\big)$. La función $h\colon \mathbb{A} \to N$ definida por $h(\alpha) = \alpha z$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos y además $\psi\circ h = f$ ya que si $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces $\psi \circ h(\alpha) = \psi(\alpha z) = \alpha\psi(z) = \alpha f(1) = f(\alpha)$. Así $\mathbb{A}$ es un $\mathbb{A}$-módulo proyectivo. ■

1.8. Producto tensorial

Hasta ahora sólo hemos estudiado $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, sin embargo también existen $\mathbb{A}$-módulos derechos.

Definición 1.8.1. Un **$\mathbb{A}$-módulo derecho** es un grupo conmutativo M junto con una multiplicación escalar $\mu\colon M \times \mathbb{A} \to M$ $\big($escribiremos $x\alpha$ en lugar de $\mu(x,\alpha)\big)$, la cual satisface cuatro axiomas que son análogos a los de la definición 1.1.1.

Definición 1.8.2. Sean $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ anillos con elemento unitario (no necesariamente conmutativos). Un **$(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$-bimódulo** es un grupo conmutativo M tal que:

I. M es un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo.

II. M es un $\mathbb{A}'$-módulo derecho.

III. Para toda $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{A}$, y $\lambda \in \mathbb{A}'$ se tiene que $(\alpha x)\lambda = \alpha(x\lambda)$.

En ocasiones es necesario especificar si un $\mathbb{A}$-módulo es izquierdo o derecho, por lo tanto usaremos la siguiente notación: si M es un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo lo denotamos por ${}_{\mathbb{A}}M$, si es un $\mathbb{A}$-módulo derecho lo denotamos por $M_{\mathbb{A}}$, si es un $(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$-bimódulo lo denotamos por ${}_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}'}$.

Definición 1.8.3. Sean $M_{\mathbb{A}}$ y ${}_{\mathbb{A}}N$ módulos, y sea U un grupo conmutativo. Decimos que una función $f\colon M \times N \to U$ es **$\mathbb{A}$-biaditiva** si para todos $x, x' \in M$, $y, y' \in N$, $\alpha \in \mathbb{A}$ se tiene que

I. $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$.

II. $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$.

III. $f(x\alpha, y) = f(x, \alpha y)$.

Definición 1.8.4. Sean $M_{\mathbb{A}}$ y ${}_{\mathbb{A}}N$ módulos. El **producto tensorial de M y N sobre $\mathbb{A}$**, es un grupo conmutativo, denotado por $M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$, junto con una función $\mathbb{A}$-biaditiva $\kappa\colon M \times N \to M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$ que satisface la siguiente propiedad:

Para toda función $\mathbb{A}$-biaditiva $f\colon M\times N\to U$, existe un único homomorfismo de grupos $\Phi\colon M\bigotimes_{\mathbb{A}} N\to U$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "f"'] & M\bigotimes_{\mathbb{A}} N \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

conmuta.

Se puede demostrar que si $(M\bigotimes_{\mathbb{A}} N,\kappa)$ y (T,κ') son dos productos tensoriales de M y N sobre $\mathbb{A}$, entonces existe un isomorfismo $\varphi\colon M\bigotimes_{\mathbb{A}} N\to T$ tal que $\varphi\circ\kappa=\kappa'$ (ver [11, proposición 2.44]).

Proposición 1.8.5. *Sean $M_{\mathbb{A}}$ y ${}_{\mathbb{A}}N$ módulos. Entonces existe el producto tensorial de M y N sobre $\mathbb{A}$.*

Demostración. Sea $F(M\times N)$ el grupo abeliano libre con base $M\times N$. El subgrupo de $F(M\times N)$ generado por todos los elementos de la forma

1. $(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$,
2. $(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$,
3. $(x\alpha,y)-(x,\alpha y)$,

lo vamos a denotar por K.

El producto tensorial de M y N sobre $\mathbb{A}$ es el grupo cociente $F(M\times N)/K$ junto con la función $\mathbb{A}$-biaditiva $\kappa\colon M\times N\to F(M\times N)/K$ definida por $\kappa(x,y)=(x,y)+K$.

Sea $f\colon M\times N\to U$ una función $\mathbb{A}$-biaditiva. Por la proposición 1.5.6 f se extiende por linealidad a un homomorfismo de grupos $\Phi\colon F(M\times N)\to U$ definido por $\Phi(x,y)=f(x,y)$. Como f es $\mathbb{A}$-biaditiva, entonces $\Phi(K)=\{0\}$, luego por el teorema 1.3.3 tenemos que Φ induce un homomorfismo $\Phi_*\colon F(M\times N)/K\to U$ definido por $\Phi_*\big((x,y)+K\big)=\Phi(x,y)=f(x,y)$, lo que implica que $\Phi_*\circ\kappa=f$. Como $F(M\times N)/K$ es generado por todos los elementos de la forma $(x,y)+K$, entonces Φ_* es el único homomorfismo que satisface que $\Phi_*\circ\kappa=f$. ■

El grupo $F(M\times N)/K$ lo vamos a denotar por $M\bigotimes_{\mathbb{A}} N$. La clase lateral $(x,y)+K$ la vamos a denotar por $x\otimes y$. Así el producto tensorial de M y N sobre $\mathbb{A}$ es el grupo conmutativo $M\bigotimes_{\mathbb{A}} N$ generado por todos los elementos de la forma $x\otimes y$ con las relaciones

1. $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$,
2. $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$,
3. $(x\alpha) \otimes y = x \otimes (\alpha y)$,

junto con una función $\mathbb{A}$-biaditiva $\kappa\colon M \times N \to M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$ definida por $\kappa(x, y) = x \otimes y$.

Por las relaciones 1, 2, y 3 tenemos que $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$ y $m(x \otimes y) = (mx) \otimes y = x \otimes (my)$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, por lo tanto los elementos de $M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$ son sumas finitas de la forma $\sum_i x_i \otimes y_i$.

Definición 1.8.6. Sean $M_{\mathbb{A}}$ y $N_{\mathbb{A}}$ módulos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es un **homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos derechos** si para todos $x, y \in M$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$ se cumple lo siguiente:

I. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

II. $f(x\alpha) = f(x)\alpha$.

Definición 1.8.7. Sean ${}_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}'}$ y ${}_{\mathbb{A}}N_{\mathbb{A}'}$ módulos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es un **homomorfismo de** $(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$**-bimódulos** si f es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos y f es un homomorfismo de $\mathbb{A}'$-módulos derechos.

Proposición 1.8.8. *Sean $M_{\mathbb{A}}$, $M'_{\mathbb{A}}$, ${}_{\mathbb{A}}N$, ${}_{\mathbb{A}}N'$ módulos. Si $f\colon M \to M'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos derechos, $g\colon N \to N'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, $(M \bigotimes_{\mathbb{A}} N, \kappa)$ es el producto tensorial de M y N sobre $\mathbb{A}$, y $(M' \bigotimes_{\mathbb{A}} N', \kappa')$ es el producto tensorial de M' y N' sobre $\mathbb{A}$, entonces existe un único homomorfismo de grupos $f \otimes g\colon M \bigotimes_{\mathbb{A}} N \to M' \bigotimes_{\mathbb{A}} N'$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "f \times g"] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} N \arrow[d, dashed, "f \otimes g"] \\ M' \times N' \arrow[r, "\kappa'"] & M' \bigotimes_{\mathbb{A}} N' \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $f \times g$ es la función definida por $f \times g(x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$.

Demostración. Es fácil demostrar que la función $\kappa' \circ (f \times g)$ es $\mathbb{A}$-biaditiva. Por la definición 1.8.4 del producto tensorial existe un único homomorfismo $f \otimes g\colon M \bigotimes_{\mathbb{A}} N \to M' \bigotimes_{\mathbb{A}} N'$ tal que $(f \otimes g) \circ \kappa = \kappa' \circ (f \times g)$. ■

Observación 1.8.9.

1. El homomorfismo $f \otimes g$ está definido por $f \otimes g(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

2. $Id_M \otimes Id_N = Id_{M \bigotimes_{\mathbb{A}} N}$.

3. $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, siempre que la composición esté bien definida.

Definición 1.8.10. Sean ${}_{\mathbb{A}'}M_{\mathbb{A}}$ y ${}_{\mathbb{A}}N$ módulos. El grupo conmutativo $M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$ junto con la multiplicación escalar $\mu\colon \mathbb{A}' \times M \bigotimes_{\mathbb{A}} N \to M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$ definida por $\mu(\lambda, \sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i (\lambda x_i) \otimes y_i$ forman un $\mathbb{A}'$-módulo izquierdo.

Proposición 1.8.11. *Sean ${}_{\mathbb{A}'}M_{\mathbb{A}}$, ${}_{\mathbb{A}'}M'_{\mathbb{A}}$, ${}_{\mathbb{A}}N$, ${}_{\mathbb{A}}N'$ módulos. Si $f\colon M \to M'$ es un homomorfismo de $(\mathbb{A}', \mathbb{A})$-bimódulos y $g\colon N \to N'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, entonces el homomorfismo $f \otimes g$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}'$-módulos izquierdos.*

Demostración. Por la proposición 1.8.8 tenemos que $f \otimes g$ es un homomorfismo de grupos. Sean $x \otimes y \in M \bigotimes_{\mathbb{A}} N$, $\lambda \in \mathbb{A}'$. Entonces

$$\begin{aligned} f \otimes g\big(\lambda(x \otimes y)\big) &= f \otimes g\big((\lambda x) \otimes y\big) \\ &= f(\lambda x) \otimes g(y) \\ &= \big(\lambda f(x)\big) \otimes g(y) \\ &= \lambda\big(f(x) \otimes g(y)\big) \\ &= \lambda f \otimes g(x \otimes y). \blacksquare \end{aligned}$$

1.9. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$

Sean ${}_{\mathbb{A}}M$ y ${}_{\mathbb{A}}N$ módulos, y sea

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N) = \{f\colon M \to N \mid f \text{ es un homomorfismo de } \mathbb{A}\text{-módulos}\}.$$

Si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)$ entonces la función $(f + g)\colon M \to N$ definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos ya que para todo $x \in M$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$, $(f+g)(\alpha x) = f(\alpha x) + g(\alpha x) = \alpha\big(f(x) + g(x)\big) = \alpha(f + g)(x)$. Con esta operación $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)$ forma un grupo conmutativo. El elemento neutro es el homomorfismo trivial. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)$, entonces la función $(-f)\colon M \to N$ definida por $(-f)(x) = (-1)f(x)$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos y es el inverso de f.

Sea ${}_{\mathbb{A}}M$ cualquier módulo. Si $\varphi\colon N \to N'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, entonces φ induce un homomorfismo de grupos

$$\varphi_*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N')$$

definido por $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$.

Observación 1.9.1.

1. $(Id_N)_* = Id_{\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)}$.
2. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, siempre que la composición esté bien definida.

Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. Si $\psi\colon M' \to M$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, entonces ψ induce un homomorfismo de grupos

$$\psi^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M',N)$$

definido por $\psi^*(f) = f \circ \psi$.

Observación 1.9.2.

1. $(Id_M)^* = Id_{\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)}$.
2. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, siempre que la composición esté bien definida.

Ahora supongamos que ${}_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}'}$, ${}_{\mathbb{A}}N$ son módulos. Sean $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$, $\lambda \in \mathbb{A}'$. La función $(\lambda f)\colon M \to N$ definida por $(\lambda f)(x) = f(x\lambda)$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos ya que para todos $x, y \in M$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$ se tiene que

$$(\lambda f)(x+y) = f\big((x+y)\lambda\big) = f(x\lambda) + f(y\lambda) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y),$$

$$(\lambda f)(\alpha x) = f\big((\alpha x)\lambda\big) = f\big(\alpha(x\lambda)\big) = \alpha f(x\lambda) = \alpha(\lambda f)(x).$$

Definición 1.9.3. Sean ${}_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}'}$, ${}_{\mathbb{A}}N$ módulos. El grupo conmutativo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$ junto con la multiplicación escalar $\mu\colon \mathbb{A}' \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$ definida por $\mu(\lambda, f) = (\lambda f)$ forman un $\mathbb{A}'$-módulo izquierdo.

Proposición 1.9.4. *Sean ${}_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}'}$, ${}_{\mathbb{A}}N$, ${}_{\mathbb{A}}N'$ módulos. Si $\varphi\colon N \to N'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, entonces el homomorfismo inducido $\varphi_*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N')$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}'$-módulos izquierdos.*

Demostración. Tenemos que φ_* es un homomorfismo de grupos. Sean $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{A}'$. Entonces $\varphi \circ (\lambda f)(x) = \varphi\big(f(x\lambda)\big) = \varphi \circ f(x\lambda) = \lambda(\varphi \circ f)(x)$, lo que implica que $\phi_*(\lambda f) = \varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f) = \lambda\phi_*(f)$. ■

Tenemos otro caso interesante. Supongamos que ${}_{\mathbb{A}}M$, ${}_{\mathbb{A}}N_{\mathbb{A}'}$ son módulos. Sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$, $\lambda \in \mathbb{A}'$. La función $(f\lambda)\colon M \to N$ definida por $(f\lambda)(x) = f(x)\lambda$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos ya que para todos $x, y \in M$ y para toda $\alpha \in \mathbb{A}$ se tiene que

$$(f\lambda)(x+y) = f(x+y)\lambda = f(x)\lambda + f(y)\lambda = (f\lambda)(x) + (f\lambda)(y),$$
$$(f\lambda)(\alpha x) = f(\alpha x)\lambda = \big(\alpha f(x)\big)\lambda = \alpha\big(f(x)\lambda\big) = \alpha(f\lambda)(x).$$

Definición 1.9.5. Sean ${}_{\mathbb{A}}M$, ${}_{\mathbb{A}}N_{\mathbb{A}'}$ módulos. El grupo conmutativo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$ junto con la multiplicación escalar $\mu\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N) \times \mathbb{A}' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N)$ definida por $\mu(\lambda, f) = (f\lambda)$ forman un $\mathbb{A}'$-módulo derecho.

Proposición 1.9.6. *Sean ${}_{\mathbb{A}}M$, ${}_{\mathbb{A}}M$, ${}_{\mathbb{A}}N_{\mathbb{A}'}$ módulos. Si $\psi\colon M' \to M$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos, entonces el homomorfismo inducido $\psi^*\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M',N)$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos derechos.*

Demostración. Tenemos que ψ^* es un homomorfismo de grupos. Sean $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{A}'$. Entonces $(f\lambda) \circ \psi(x) = (f\lambda)\big(\psi(x)\big) = f\big(\psi(x)\big)\lambda = (f \circ \psi)(x)\lambda = \big((f \circ \psi)\lambda\big)(x)$, lo que implica que $\psi^*(f\lambda) = (f\lambda) \circ \psi = (f \circ \psi)\lambda = \psi^*(f)\lambda$. ■

Finalizamos esta sección enunciando un teorema que utilizaremos en el capítulo 4.

Teorema 1.9.7. *Sean ${}_{\mathbb{A}}M$, ${}_{\mathbb{A}'}N_{\mathbb{A}}$, ${}_{\mathbb{A}'}P$ módulos. Entonces existe un isomorfismo de grupos*

$$\Psi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}'}(N \bigotimes_{\mathbb{A}} M, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}\left(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}'}(N,P)\right)$$

definido de la siguiente manera: Si $f\colon N \bigotimes_{\mathbb{A}} M \to P$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}'$-módulos, entonces la función

$$\begin{array}{rcl} \Psi(f)\colon M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}'}(N,P) \\ x & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \Psi(f)(x)\colon N & \longrightarrow & P \\ y & \longmapsto & f(y \otimes x) \end{array}\right) \end{array}$$

es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos.

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [11, teoremas 2.75 y 2.76]. ■

Capítulo 2

Álgebra homológica

Este capítulo comienza con una breve introducción de categorías y funtores; despues daremos un repaso a la teoría de álgebra homológica; y por último estudiaremos el álgebra homológica relativa de Hochschild [7].

El objetivo de este capítulo es definir dos funtores relativos a la pareja $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, donde $\mathbb{A}$ es un anillo y $\mathbb{B}$ es un subanillo de $\mathbb{A}$; estos funtores son denotados por $\mathrm{Tor}_n^{(\mathbb{A},\mathbb{B})}$ y $\mathrm{Ext}_n^{(\mathbb{A},\mathbb{B})}$.

2.1. Categorías y funtores

Definición 2.1.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ se compone de:

I. Una clase de objetos, denotada por $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$.

II. Para cada pareja ordenada (A, B), donde A y B son objetos de $\mathcal{C}$, existe un conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$; los elementos de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se llaman **morfismos** de A en B.

III. Para cada terna ordenada (A, B, C), donde A, B, C son objetos de $\mathcal{C}$, existe un **producto o composición**

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C).$$

Un morfismo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es donotado por $f\colon A \to B$ o bien por $A \xrightarrow{f} B$; diremos que A es el dominio de f y B el codominio. Si $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$, entonces el producto o composición de f y g lo denotamos por gf o bien por $g \circ f$.

Una categoría $\mathcal{C}$ está sujeta a los siguientes axiomas:

(a) Si $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)\bigcap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)\neq\emptyset$, entonces $A=C$ y $B=D$.

(b) Para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe un morfismo identidad $Id_A\colon A\to A$ tal que para todo morfismo $f\colon A\to B$ y para todo morfismo $g\colon C\to A$ se tiene que $f\circ Id_A=f$ y $Id_A\circ g=g$.

(c) La composición es asociativa, es decir, si $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$, y $h\colon C\to D$ son morfismos, entonces $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

Definición 2.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que un morfismo $f\colon A\to B$ de $\mathcal{C}$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $g\colon B\to A$ de $\mathcal{C}$ tal que $g\circ f=Id_A$ y $f\circ g=Id_B$. Decimos que dos objetos A y B de $\mathcal{C}$ son **isomorfos** y lo denotamos por $A\cong B$, si existe un isomorfismo entre ellos.

A continuación daremos algunos ejemplos de las categorías mas comunes en matemáticas.

Ejemplo 2.1.3.

- **Conj**. Sus objetos son conjuntos y sus morfismos son funciones.
- **Gr**. Sus objetos son grupos y sus morfismos son homomorfismos de grupos.
- **Ab**. Sus objetos son grupos conmutativos y sus morfismos son homomorfismos de grupos.
- **An**. Sus objetos son anillos y sus morfismos son homomorfismos de anillos.
- ${}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}$. Sus objetos son $\mathbb{A}$-módulos izquierdos y sus morfismos son homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos izquierdos.
- $\mathbf{Mod}_{\mathbb{A}}$. Sus objetos son $\mathbb{A}$-módulos derechos y sus morfismos son homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos derechos.
- **Top**. Sus objetos son espacios topológicos y sus morfismos son funciones continuas.

Definición 2.1.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un **funtor covariante** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una regla que asocia a cada objeto A de $\mathcal{C}$, un objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$; a cada morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathcal{C}$, un morfismo $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ de $\mathcal{D}$; y satisface los siguientes axiomas:

I. $F(Id_A) = Id_{F(A)}$.

II. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Definición 2.1.5. Un **funtor contravariante** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una regla que asocia a cada objeto A de $\mathcal{C}$, un objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$; a cada morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathcal{C}$, un morfismo $F(f)\colon F(B) \to F(A)$ de $\mathcal{D}$; y satisface los siguientes axiomas:

I. $F(Id_A) = Id_{F(A)}$.

II. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

A continuación enunciaremos algunos de los funtores que construimos en el capítulo anterior.

Ejemplo 2.1.6. Definimos el funtor covariante $F\colon \mathbf{Conj} \to {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}$ de la siguiente manera: si X es un conjunto, entonces $F(X)$ es el $\mathbb{A}$-módulo libre con base X; si $f\colon X \to Y$ es una función, entonces f se extiende por linealidad a un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$.

Ejemplo 2.1.7. Funtores en el producto tensorial.

Sea $M_{\mathbb{A}}$ cualquier módulo. El funtor covariante $M \bigotimes_{\mathbb{A}} \_\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} N & \longmapsto & M \bigotimes_{\mathbb{A}} N, \\ (f\colon N \to N') & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} Id_M \otimes f\colon M \bigotimes_{\mathbb{A}} N & \longrightarrow & M \bigotimes_{\mathbb{A}} N' \\ x \otimes y & \longmapsto & x \otimes f(y) \end{array} \right). \end{array}$$

Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. El funtor covariante $\_ \bigotimes_{\mathbb{A}} N\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{A}} \to \mathbf{Ab}$ está definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} M & \longmapsto & M \bigotimes_{\mathbb{A}} N, \\ (f\colon M \to M') & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} f \otimes Id_N\colon M \bigotimes_{\mathbb{A}} N & \longrightarrow & M' \bigotimes_{\mathbb{A}} N \\ x \otimes y & \longmapsto & f(x) \otimes y \end{array} \right). \end{array}$$

Ejemplo 2.1.8. Funtores en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)$.

Sea ${}_{\mathbb{A}}M$ cualquier módulo. El funtor covariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, \_)\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} N & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N), \\ (\varphi\colon N \to N') & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \varphi_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N') \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} \right). \end{array}$$

Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. El funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(\_, N)\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} M & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N), \\ (\psi\colon M' \to M) & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \psi^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M', N) \\ f & \longmapsto & f \circ \psi \end{array} \right). \end{array}$$

Definición 2.1.9. Sea $F\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ un funtor covariante. Decimos que F es **exacto por la izquierda** si para cada sucesión exacta de $\mathbb{A}$-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$$

se tiene que la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M_2)$$

es exacta. Decimos que F es **exacto por la derecha** si para cada sucesión exacta de $\mathbb{A}$-módulos

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

se tiene que la sucesión inducida

$$F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M_2) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Definición 2.1.10. Sea $F\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ un funtor contravariante. Decimos que F es **exacto por la izquierda** si para cada sucesión exacta

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

se tiene que la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M_1)$$

es exacta.

Proposición 2.1.11.

1. *Los funtores covariantes* $M \bigotimes_{\mathbb{A}} \_$ *y* $\_ \bigotimes_{\mathbb{A}} N$ *son exactos por la derecha.*

2. *El funtor covariante* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(M, \_)$ *es exacto por la izquierda.*

3. *El funtor contravariante* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\_, N)$ *es exacto por la izquierda.*

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [11, teoremas 2.38, 2.40 y 2.63]. ■

2.2. Complejos de cadenas y de cocadenas

Definición 2.2.1. Un **complejo de cadenas** C **sobre** $\mathbb{A}$ es una familia de $\mathbb{A}$-módulos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ junto con una familia de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos $\{\partial_n \colon C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Escribiremos $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o bien

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

para describir a un complejo de cadenas C.

Los elementos de C_n se llaman n-**cadenas**. Los homomorfismos ∂_n se llaman **operadores frontera o diferenciales**.

Definición 2.2.2. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos de cadenas. Un **morfismo de cadenas** $f \colon C \to D$ es una familia de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos $\{f_n \colon C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si $f\colon C \to D$ y $g\colon D \to E$ son morfismos de cadenas, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "g_n"] & D_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "\partial''_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "\partial''_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Como $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ y $\partial''_n \circ g_n = g_{n-1} \circ \partial'_n$, entonces

$$\partial''_n \circ (g_n \circ f_n) = g_{n-1} \circ \partial'_n \circ f_n = (g_{n-1} \circ f_{n-1}) \circ \partial_n.$$

Definición 2.2.3. La **composición de los morfismos de cadenas** f y g se define como la familia $g \circ f = \{g_n \circ f_n \colon C_n \to E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

La colección de complejos de cadenas junto con sus morfismos de cadenas y su composición forman una categoría que se denota por $\mathbf{CC}$, o por $\mathbf{CC}_*$, o bien por $\mathbf{CC}_*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod})$. El morfismo identidad $Id_C\colon C \to C$ es la familia $\{Id_{C_n}\colon C_n \to C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. La asociatividad en la composición de morfismos de cadenas se da de manera natural ya que la composición de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos es asociativa.

Sea $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo de cadenas. Decimos que C es un **complejo de cadenas exacto** si $\operatorname{Im}\partial_{n+1} = \operatorname{Ker}\partial_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que C es un **complejo de cadenas trivial** si $C_n = \{0\}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que C es un **complejo de cadenas positivo** si $C_n = \{0\}$ para toda $n < 0$.

Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Una **aumentación** para un complejo de cadenas positivo C es un epimorfismo $\epsilon\colon C_0 \to M$ tal que $\epsilon \circ \partial_1 = 0$.

Decimos que un morfismo de cadenas $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un **morfismo de cadenas trivial** si $f_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.2.4. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos de cadenas. Decimos que D es un **subcomplejo** de C si cada D_n es un submódulo de C_n y cada operador frontera ∂'_n en D es la restricción del operador frontera ∂_n en C.

Si D es un subcomplejo de C, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos un $\mathbb{A}$-módulo cociente C_n/D_n. Como ∂'_n es la restricción del operador frontera ∂_n, entonces $\partial_n(D_n) \subset D_{n-1}$, luego por el teorema 1.3.3 tenemos que ∂_n induce un homomorfismo $\overline{\partial}_n \colon C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$ definido por

$$\overline{\partial}_n(c + D_n) = \partial_n(c) + D_{n-1}.$$

La composición $\overline{\partial}_n \circ \overline{\partial}_{n+1} = 0$ ya que si $c + D_{n+1} \in C_{n+1}/D_{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_n \circ \overline{\partial}_{n+1}(c + D_{n+1}) &= \overline{\partial}_n\big(\partial_{n+1}(c) + D_n\big) \\ &= \partial_n \circ \partial_{n+1}(c) + D_{n-1} \\ &= 0 + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Definición 2.2.5. El **complejo cociente** C/D es el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}/D_{n+1} \xrightarrow{\overline{\partial}_{n+1}} C_n/D_n \xrightarrow{\overline{\partial}_n} C_{n-1}/D_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Sea D un subcomplejo de C. El **morfismo inclusión** $i \colon D \to C$ es la familia $i = \{i_n \colon D_n \to C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde cada i_n es la inclusión. El **morfismo proyección** $p \colon C \to C/D$ es la familia $p = \{p_n \colon C_n \to C_n/D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde p_n es la proyección para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.2.6. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ complejos de cadenas, y sea $f \colon C \to D$ un morfismo de cadenas.
El **núcleo o kernel** de f, denotado por $\operatorname{Ker} f$, es el subcomplejo de C:

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ker} f_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \operatorname{Ker} f_n \xrightarrow{\partial_n} \operatorname{Ker} f_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

La **imagen** de f, denotada por $\operatorname{Im} f$, es el subcomplejo de D:

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Im} f_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} \operatorname{Im} f_n \xrightarrow{\partial'_n} \operatorname{Im} f_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

El **conúcleo o cokernel** de f, denotado por $\operatorname{Coker} f$, es el complejo cociente:

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1}/\operatorname{Im} f_{n+1} \xrightarrow{\overline{\partial'}_{n+1}} D_n/\operatorname{Im} f_n \xrightarrow{\overline{\partial'}_n} D_{n-1}/\operatorname{Im} f_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Observación 2.2.7. Los operadores frontera $\partial_n \colon \operatorname{Ker} f_n \to \operatorname{Ker} f_{n-1}$ y $\partial'_n \colon \operatorname{Im} f_n \to \operatorname{Im} f_{n-1}$ están bien definidos ya que $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$.

Como ya definimos el núcleo y la imagen de un morfismo de cadenas, entonces también podemos construir sucesiones exactas de complejos de cadenas. Una sucesión exacta corta de complejos de cadenas es una sucesion exacta de la forma

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0,$$

donde los ceros que aparecen al comienzo y al final de la sucesión son el complejo de cadenas trivial. En la siguiente sección veremos la importancia de este tipo de sucesiones.

Definición 2.2.8. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos de cadenas, y sean $f, g\colon C \to D$ morfismos de cadenas. Decimos que f y g son **homotópicos** si existe una familia de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos $\{h_n\colon C_n \to D_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\partial'_{n+1}\circ h_n + h_{n-1}\circ\partial_n = f_n - g_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Si f y g son homotópicos lo denotamos por $f \simeq g$. La familia $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se llama **homotopía de cadenas** entre f y g.

El siguiente diagrama representa una homotopía de cadenas entre f y g:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Es fácil demostrar que la relación de homotopía es una relación de equivalencia.

Sea $f\colon C \to D$ un morfismo de cadenas y sea $0\colon C \to D$ el morfismo de cadenas trivial. Decimos que f es **homotópicamente nulo** si $f \simeq 0$, y la homotopía de cadenas se llama **nulhomotopía de cadenas**. Decimos que f es una **equivalencia homotópica de cadenas** si existe un morfismo de cadenas $g\colon C \to D$ tal que $g\circ f \simeq Id_C$ y $f\circ g \simeq Id_D$.

Definición 2.2.9. Un **complejo de cocadenas** C **sobre** $\mathbb{A}$ es una familia de $\mathbb{A}$-módulos $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ junto con una familia de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos $\{\delta^n\colon C^n \to C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\delta^n\circ\delta^{n-1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Escribiremos $C = \{C^n, \delta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o bien

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

para describir a un complejo de cocadenas C.

Los elementos de C^n se llaman n-**cocadenas**. Los homomorfismos δ^n se llaman **operadores cofrontera**.

Dado un complejo de cadenas $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ podemos definir un complejo de cocadenas tomando $C^n = C_{-n}$ y $\delta^n = \partial_{-n}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. De manera análoga si comenzamos con un complejo de cocadenas podemos definir un complejo de cadenas.

Los morfismos de cocadenas se definen de la misma manera que los morfismos de cadenas (escribiendo los superíndices adecuadamente).

La categoría de complejos de cocadenas se denota por $\mathbf{CC}^*$ o bien por $\mathbf{CC}^*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod})$.

Las categorías $\mathbf{CC}_*$ y $\mathbf{CC}^*$ también se pueden definir sobre grupos abelianos, $\mathbb{A}$-módulos derechos, y $(\mathbb{A}, \mathbb{A}')$-bimódulos. Por ejemplo $\mathbf{CC}_*(\mathbf{Ab})$ es la categoría de complejos de cadenas en la que sus objetos son familias $\{C_n, \partial_n \colon C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de grupos abelianos y de homomorfismos de grupos tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

2.3. Homología y cohomología

Sea $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo de cadenas. El núcleo del homomorfismo ∂_n lo vamos a denotar por $Z_n(C)$; los elementos de $Z_n(C)$ se llaman n-**ciclos**. La imagen del homomorfismo ∂_{n+1} la vamos a denotar por $B_n(C)$; los elementos de $B_n(C)$ se llaman n-**fronteras**. La condición $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ es equivalente a que $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$, por lo tanto $B_n(C) < Z_n(C) < C_n$.

Definición 2.3.1. El n-**ésimo grupo de homología** de un complejo de cadenas C es el grupo cociente

$$\mathrm{H}_n(C) = Z_n(C)/B_n(C).$$

Decimos que dos n-ciclos c y d son **homólogos** si $c - d \in B_n(C)$. La clase lateral $c + B_n(C) \in \mathrm{H}_n(C)$ se llama **clase de homología** de c.

Sean $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos de cadenas, y sea $f = \{f_n \colon C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un morfismo de cadenas de C en D. Es fácil demostrar que $f_n\big(Z_n(C)\big) \subset Z_n(D)$ y $f_n\big(B_n(C)\big) \subset B_n(D)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, luego por el teorema 1.3.3 tenemos que cada homomorfismo $f_n\colon C_n \to D_n$ induce un homomorfismo $(f_n)_*\colon Z_n(C)/B_n(C) \to Z_n(D)/B_n(D)$ al cual lo vamos a denotar por $\mathrm{H}_n(f)$.

Definición 2.3.2. El **n-ésimo homomorfismo en homología** inducido por un morfismo de cadenas $f\colon C \to D$ es el homomorfismo de grupos

$$\mathrm{H}_n(f)\colon\ \mathrm{H}_n(C) \to \mathrm{H}_n(D)$$

definido por $\mathrm{H}_n(f)\big(c + B_n(C)\big) = f_n(c) + B_n(D)$.

Observación 2.3.3.

1. $\mathrm{H}_n(Id_C) = Id_{\mathrm{H}_n(C)}$.
2. $\mathrm{H}_n(g \circ f) = \mathrm{H}_n(g) \circ \mathrm{H}_n(f)$, siempre que la composición esté bien definida.

Proposición 2.3.4. *Sean $f, g\colon C \to D$ morfismos de cadenas. Si f y g son homotópicos, entonces $\mathrm{H}_n(f) = \mathrm{H}_n(g)$.*

Demostración. Como f y g son homotópicos, existe una homotopía de cadenas $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entre f y g. Supongamos que $c \in Z_n(C)$, es decir, que $\partial_n(c) = 0$. Como $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$, entonces

$$\begin{aligned} f_n(c) - g_n(c) &= \partial'_{n+1}\big(h_n(c)\big) + h_{n-1}\big(\partial_n(c)\big) \\ &= \partial'_{n+1}\big(h_n(c)\big), \end{aligned}$$

lo que implica que $f_n(c) + B_n(D) = g_n(c) + B_n(D)$. ■

Corolario 2.3.5. *Si $f\colon C \to D$ es una equivalencia homotópica de cadenas, entonces $\mathrm{H}_n(C) \cong \mathrm{H}_n(D)$.*

Demostración. Como $f\colon C \to D$ es una equivalencia homotópica de cadenas, existe $g\colon D \to C$ tal que $g \circ f \simeq Id_C$ y $f \circ g \simeq Id_D$, luego por la proposición anterior tenemos que $Id_{\mathrm{H}_n(C)} = \mathrm{H}_n(Id_C) = \mathrm{H}_n(g \circ f) = \mathrm{H}_n(g) \circ \mathrm{H}_n(f)$ y $Id_{\mathrm{H}_n(D)} = \mathrm{H}_n(Id_D) = \mathrm{H}_n(f \circ g) = \mathrm{H}_n(f) \circ \mathrm{H}_n(g)$.

Así $\mathrm{H}_n(g)$ es la inversa de $\mathrm{H}_n(f)$, por lo tanto $\mathrm{H}_n(f)\colon\ \mathrm{H}_n(C) \to \mathrm{H}_n(D)$ es un isomorfismo. ■

Definición 2.3.6. Un complejo de cadenas C es **acíclico** si $\mathrm{H}_n(C) = \{0\}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.3.7. *Sea $Id_C \colon C \to C$ el morfismo de cadenas identidad. Si Id_C es homotópicamente nulo, entonces C es acíclico.*

Demostración. Como Id_C es homotópicamente nulo, entonces $Id_C \simeq 0$, por lo tanto existe una homotopía de cadenas $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entre Id_C y 0. Supongamos que $c \in Z_n(C)$, es decir, que $\partial_n(c) = 0$. Como $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = Id_{C_n}$, entonces

$$\begin{aligned} c = Id_{C_n}(c) &= \partial'_{n+1}\big(h_n(c)\big) + h_{n-1}\big(\partial_n(c)\big) \\ &= \partial'_{n+1}\big(h_n(c)\big), \end{aligned}$$

lo que implica que $c \in B_n(C)$. Así $Z_n(C) = B_n(C)$. Se concluye que C es acíclico. ■

Sea $C = \{C^n, \delta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un complejo de cocadenas. El núcleo del homomorfismo δ^n lo vamos a denotar por $Z^n(C)$; los elementos de $Z^n(C)$ se llaman n-**cociclos**. La imagen del homomorfismo δ^{n-1} la vamos a denotar por $B^n(C)$; los elementos de $B^n(C)$ se llaman n-**cofronteras**. La condición $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ es equivalente a que $\operatorname{Im} \delta^{n-1} \subset \operatorname{Ker} \delta^n$, por lo tanto $B^n(C) < Z^n(C) < C^n$.

Definición 2.3.8. El n-**ésimo grupo de cohomología** de un complejo de cocadenas C es el grupo cociente

$$\mathrm{H}^n(C) = Z^n(C)/B^n(C).$$

El n-**ésimo homomorfismo en cohomología** inducido por un morfismo de cocadenas $f \colon C \to D$ es el homomorfismo de grupos

$$\mathrm{H}^n(f) \colon \mathrm{H}^n(C) \to \mathrm{H}^n(D)$$

definido por $\mathrm{H}^n(f)\big(c + B^n(C)\big) = f_n(c) + B^n(D)$.

Los grupos de (co)homología determinan que tan inexacto es un complejo de (co)cadenas. Si un complejo de cadenas es acíclico entonces es exacto.

La estructura de los grupos de (co)homología y de sus morfismos inducidos dependen de la categoría de complejos de (co)cadenas. Por ejemplo: si C es un objeto de $\mathbf{CC}_*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod})$, entonces $\mathrm{H}_n(C)$ es un objeto de ${}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}$; si f es un morfismo de $\mathbf{CC}_*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod})$, entonces $\mathrm{H}_n(f)$ es un morfismo de ${}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos los siguientes funtores covariantes:

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_n \colon \mathbf{CC}_*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}) \to {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}, \\ &\mathrm{H}_n \colon \mathbf{CC}_*(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}, \\ &\mathrm{H}^n \colon \mathbf{CC}^*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}) \to {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}, \\ &\mathrm{H}^n \colon \mathbf{CC}^*(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}. \end{aligned}$$

La categoría de los $\mathbb{A}$-módulos graduados, denotada por ${}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}}$, tiene como objetos familias de $\mathbb{A}$-módulos de la forma $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y sus morfismos son familias de homomorfismos de $\mathbb{A}$-módulos $\{f_i\colon M_i \to N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. El funtor covariante $\mathrm{H}_*\colon \mathbf{CC}_*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}) \to {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}}$ esta definido por la correspondencia

$$\begin{array}{rcl} C & \longmapsto & \{\mathrm{H}_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ (f\colon C\to D) & \longmapsto & \{\mathrm{H}_n(f)\colon \mathrm{H}_n(C)\to \mathrm{H}_n(D)\}_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

El funtor covariante $\mathrm{H}^*\colon \mathbf{CC}^*({}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}) \to {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}}$ se define análogamente.

Definición 2.3.9. La **homología** de un complejo de cadenas C es la familia $\mathrm{H}_*(C) = \{\mathrm{H}_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. La **cohomología** de un complejo de cocadenas D es la familia $\mathrm{H}^*(D) = \{\mathrm{H}^n(D)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en homología, se utiliza para calcular la homología de un complejo de cadenas.

Teorema 2.3.10 (Sucesion exacta larga en homología)**.** *Sea*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un homomorfismo $\Delta_n\colon \mathrm{H}_n(E) \to \mathrm{H}_{n-1}(C)$ tal que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_n(C) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(f)} \mathrm{H}_n(D) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(g)} \mathrm{H}_n(E) \xrightarrow{\Delta_n} \mathrm{H}_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

es exacta. Además la sucesión es natural, es decir, si tenemos un diagrama conmutativo de complejos de cadenas en el que los renglones son sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_n(C) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(f)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\alpha)"] & \mathrm{H}_n(D) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(g)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\beta)"] & \mathrm{H}_n(E) \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\gamma)"] & \mathrm{H}_{n-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}_{n-1}(\alpha)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_n(C') \arrow[r, "\mathrm{H}_n(f')"] & \mathrm{H}_n(D') \arrow[r, "\mathrm{H}_n(g')"] & \mathrm{H}_n(E') \arrow[r, "\Delta'_n"] & \mathrm{H}_{n-1}(C') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La demostración de este teorema se basa en el lema de la serpiente. Podemos encontrar una demostración en [9, capítulo 3, teorema 1.10] o bien en [14, teorema 1.3.1]. Existe una versión análoga para cohomología.

2.4. Tor y Ext

Definición 2.4.1. Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Una **resolución proyectiva de** M es un complejo de cadenas exacto de la forma

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

tal que P_n es proyectivo para toda $n \geq 0$.

El complejo de cadenas reducido

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$$

lo vamos a denotar por P_M y le llamaremos **resolución proyectiva reducida de** M. Escribiremos (P_M, ϵ) para denotar una resolución proyectiva de M.

Notemos que el epimorfismo ϵ es una aumentación para P_M, y que

$$\mathrm{H}_n(P_M) \cong \begin{cases} M & \text{si } n = 0, \\ \{0\} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Decimos que una resolución proyectiva (P_M, ϵ) de M es una **resolución libre de** M si cada P_n es un $\mathbb{A}$-módulo libre.

Proposición 2.4.2. *Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Entonces existe una resolución libre de M.*

Demostración. Vamos a construir de manera inductiva una resolución libre de M. Por la proposición 1.5.8 tenemos que M es cociente de un $\mathbb{A}$-módulo libre L_0, lo que implica que existe un epimorfismo $\epsilon \colon L_0 \to M$.

Supongamos que ya construimos la sucesión exacta

$$L_k \xrightarrow{\partial_k} L_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

donde L_j es un $\mathbb{A}$-módulo libre para $j = 0, 1, \ldots, k$.

Vamos a demostrar que existe un $\mathbb{A}$-módulo libre L_{k+1} y un homomorfismo $\partial_{k+1}\colon L_{k+1} \to L_k$ tal que la sucesión

$$L_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} L_k \xrightarrow{\partial_k} L_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es exacta.

De las hipótesis se sigue que la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \partial_k \xrightarrow{i} L_k \xrightarrow{\partial_k} L_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión; nuevamente por la proposición 1.5.8 tenemos que $\operatorname{Ker} \partial_k$ es cociente de un $\mathbb{A}$-módulo libre L_{k+1}, entonces existe un epimorfismo $\varphi\colon L_{k+1} \to \operatorname{Ker} \partial_k$. Sea $\partial_{k+1} = i \circ \varphi\colon L_{k+1} \to L_k$, entonces

$$\operatorname{Im} \partial_{k+1} = i \circ \varphi(L_{k+1}) = i\big(\varphi(L_{k+1})\big) = i(\operatorname{Ker} \partial_k) = \operatorname{Ker} \partial_k.$$

El complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de M. ■

Corolario 2.4.3. *Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Entonces existe una resolución proyectiva de M.*

Demostración. Por la proposición anterior existe una resolución libre $(\{L_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \epsilon)$ de M, luego por la proposición 1.7.3 tenemos que cada $\mathbb{A}$-módulo libre L_n es proyectivo. ■

Teorema 2.4.4. *Sea $k \in \mathbb{Z}$ y sean $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $D = \{D_n, \partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos de cadenas tales que C_n es un $\mathbb{A}$-módulo proyectivo para toda $n > k$ y $\mathrm{H}_n(D) = \{0\}$ para toda $n \geq k$. Si $\{f_n\colon C_n \to D_n\}_{n\leq k}$ es una familia de homomorfismos tales que $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ para toda $n \leq k$, entonces $\{f_n\}_{n\leq k}$ se extiende a un morfismo de cadenas $f\colon C \to D$ y esta extensión es única salvo homotopía de cadenas.*

Demostración. Supongamos que de forma inductiva hemos definido f_{k+1}, $f_{k+2}, \ldots, f_m$ tal que el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{m+1} \arrow[r, "\partial_{m+1}"] & C_m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, "f_m"] & C_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{m-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_k \arrow[r] \arrow[d, "f_k"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{m+1} \arrow[r, "\partial'_{m+1}"] & D_m \arrow[r, "\partial'_m"] & D_{m-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D_k \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama anterior es conmutativo y $\partial_m \circ \partial_{m+1} = 0$, entonces

$$\partial'_m \circ f_m \circ \partial_{m+1} = f_{m-1} \circ \partial_m \circ \partial_{m+1} = 0,$$

lo que implica que $\operatorname{Im}(f_m \circ \partial_{m+1}) \subset \operatorname{Ker} \partial'_m$. Como $\mathrm{H}_m(D) = \{0\}$, entonces $\operatorname{Im}(f_m \circ \partial_{m+1}) \subset \operatorname{Im} \partial'_{m+1} = \operatorname{Ker} \partial'_m$. Así el siguiente diagrama está bien definido:

$$\begin{tikzcd}
 & C_{m+1} \arrow[dl, dashed, "f_{m+1}"'] \arrow[d, "f_m \circ \partial_{m+1}"] \\
D_{m+1} \arrow[r, "\partial'_{m+1}"] & \operatorname{Im} \partial'_{m+1}.
\end{tikzcd}$$

Como C_{m+1} es un $\mathbb{A}$-módulo proyectivo entonces existe un homomorfismo $f_{m+1} \colon C_{m+1} \to D_{m+1}$ tal que $\partial'_{m+1} \circ f_{m+1} = f_m \circ \partial_{m+1}$.

El morfismo de cadenas $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una extensión de $\{f_n\}_{n \leq k}$. Supongamos que $f' = \{f'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es otra extensión de $\{f_n\}_{n \leq k}$.

Vamos a demostrar que f y f' son homotópicos, para esto tenemos que definir una homotopía de cadenas $h = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ entre f y f'. Definimos $h_n = 0$ para toda $n \leq k$. Supongamos que de forma inductiva hemos definido $h_{k+1}, h_{k+2}, \ldots, h_m$ tal que $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = f_n - f'_n$ para $n = k+1, k+2, \ldots, m$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\cdots \arrow[r] & C_{m+2} \arrow[r, "\partial_{m+2}"] \arrow[d, shift right, "f_{m+2}"'] \arrow[d, shift left, "f'_{m+2}"] & C_{m+1} \arrow[r, "\partial_{m+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{m+1}"'] \arrow[d, shift left, "f'_{m+1}"] \arrow[dl, dashed, "h_{m+1}"'] & C_m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, shift right, "f_m"'] \arrow[d, shift left, "f'_m"] \arrow[dl, "h_m"'] & C_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{m-1}"'] \arrow[d, shift left, "f'_{m-1}"] \arrow[dl, "h_{m-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{m+2} \arrow[r, "\partial'_{m+2}"] & D_{m+1} \arrow[r, "\partial'_{m+1}"] & D_m \arrow[r, "\partial'_m"] & D_{m-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $\partial'_{m+1} \circ h_m + h_{m-1} \circ \partial_m = f_m - f'_m$, entonces

$$\begin{aligned}
\partial'_{m+1} \circ h_m \circ \partial_{m+1} &= (\partial'_{m+1} \circ h_m + h_{m-1} \circ \partial_m) \circ \partial_{m+1} \\
&= (f_m - f'_m) \circ \partial_{m+1}.
\end{aligned}$$

Como $\partial'_{m+1} \circ f_{m+1} = f_m \circ \partial_{m+1}$ y $\partial'_{m+1} \circ f'_{m+1} = f'_m \circ \partial_{m+1}$, entonces

$$\partial'_{m+1} \circ (f_{m+1} - f'_{m+1}) = (f_m - f'_m) \circ \partial_{m+1},$$

se sigue que $\partial'_{m+1} \circ (f_{m+1} - f'_{m+1} - h_m \circ \partial_{m+1}) = 0$.

Sea $\sigma_{m+1} = f_{m+1} - f'_{m+1} - h_m \circ \partial_{m+1}$, entonces $\operatorname{Im} \sigma_{m+1} \subset \operatorname{Ker} \partial'_{m+1}$. Como $\mathrm{H}_{m+1}(D) = \{0\}$, entonces $\operatorname{Im} \sigma_{m+1} \subset \operatorname{Im} \partial'_{m+2} = \operatorname{Ker} \partial'_{m+1}$. Así el siguiente diagrama está bien definido:

$$\begin{tikzcd} & C_{m+1} \arrow[dl, dashed, "h_{m+1}"'] \arrow[d, "\sigma_{m+1}"] \\ D_{m+2} \arrow[r, "\partial'_{m+2}"] & \operatorname{Im} \partial'_{m+2}. \end{tikzcd}$$

Como C_{m+1} es un $\mathbb{A}$-módulo proyectivo entonces existe un homomorfismo $h_{m+1}\colon C_{m+1} \to D_{m+2}$ tal que $\partial'_{m+2} \circ h_{m+1} = (f_{m+1} - f'_{m+1}) - h_m \circ \partial_{m+1}$. ■

Proposición 2.4.5. *Sean M y M' $\mathbb{A}$-módulos y sean (P_M, ϵ) y $(Q_{M'}, \nu)$ resoluciones proyectivas de M y M' respectivamente. Si $\varphi\colon M \to M'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, entonces*

1. *Existe un morfismo de cadenas $f\colon (P_M, \epsilon) \to (Q_{M'}, \nu)$ tal que $f_{-1} = \varphi$, f es único salvo homotopía de cadenas.*

2. *Si φ es un isomorfismo, entonces f es una equivalencia homotópica de cadenas.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} (P_M, \epsilon)\colon \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ (Q_{M'}, \nu)\colon \cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "\partial'_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial'_1"] & Q_0 \arrow[r, "\nu"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1. Como (P_M, ϵ) y $(Q_{M'}, \nu)$ son resoluciones proyectivas de M y M' respectivamente, entonces P_n es un $\mathbb{A}$-módulo proyectivo para toda $n > -1$ y $\mathrm{H}_n(Q_{M'}, \nu) = \{0\}$ para toda $n \geq -1$. Sea $\{f_n\}_{n \leq -1}$ la familia de homomorfismos definida por $f_{-1} = \varphi$ y $f_n = 0$ para toda $n < -1$. Por el teorema 2.4.4 la familia $\{f_n\}_{n \leq -1}$ se extiende a un morfismo de cadenas $f\colon (P_M, \epsilon) \to (Q_{M'}, \nu)$ y esta extensión es única salvo homotopía de cadenas.

2. Como φ es un isomorfismo, existe un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $\varphi^{-1}\colon M' \to M$ tal que $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id_M$ y $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_{M'}$. Por el inciso

anterior existen los siguientes morfismos de cadenas:

$$
\begin{aligned}
f&\colon (P_M,\epsilon) \to (Q_{M'},\nu),\\
g&\colon (Q_{M'},\nu) \to (P_M,\epsilon),\\
u&\colon (P_M,\epsilon) \to (P_M,\epsilon),\\
v&\colon (Q_{M'},\nu) \to (Q_{M'},\nu),
\end{aligned}
$$

tales que $f_{-1} = \varphi$, $g_{-1} = \varphi^{-1}$, $u_{-1} = Id_M$, $v_{-1} = Id_{M'}$; además f, g, u, y v son únicos salvo homotopía de cadenas. Como $g_{-1} \circ f_{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_M$, entonces $g \circ f \simeq u$; por otro lado tenemos que $u \simeq Id_{(P_M,\epsilon)}$, luego por la transitividad en la relación de homotopía se tiene que $g \circ f \simeq Id_{(P_M,\epsilon)}$. De manera análoga $f \circ g \simeq Id_{(Q_{M'},\nu)}$. ■

Sea N un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo. Por la proposición 2.4.2 y por el corolario 2.4.3 siempre existe una resolución proyectiva (P_N,ϵ) de N. Para cualquier $\mathbb{A}$-módulo derecho M tenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} P_N\colon\ \cdots \longrightarrow M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} P_2 \xrightarrow{Id_M \otimes \partial_2} M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} P_1 \xrightarrow{Id_M \otimes \partial_1} M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} P_0 \longrightarrow 0.$$

Consideremos el n-ésimo grupo de homología $\mathrm{H}_n(M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_N)$.

Sea $\varphi\colon N \to N'$ un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, y sean (P_N,ϵ) y $(Q_{N'},\nu)$ resoluciones proyectivas de N y N' respectivamente. Por la proposición 2.4.5 existe un morfismo de cadenas $f\colon P_N \to Q_{N'}$ tal que $\nu \circ f_0 = \varphi \circ \epsilon$, además f es único salvo homotopía de cadenas; por las propiedades del producto tensorial tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_2 \arrow[r, "Id_M\otimes\partial_2"] \arrow[d, "Id_M\otimes f_2"] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_1 \arrow[r, "Id_M\otimes\partial_1"] \arrow[d, "Id_M\otimes f_1"] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_0 \arrow[r] \arrow[d, "Id_M\otimes f_0"] & 0\\
\cdots \arrow[r] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} Q_2 \arrow[r, "Id_M\otimes\partial'_2"] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} Q_1 \arrow[r, "Id_M\otimes\partial'_1"] & M \bigotimes_{\mathbb{A}} Q_0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Así φ induce un homomorfismo de grupos en homología

$$\mathrm{H}_n(\varphi)\colon\ \mathrm{H}_n(M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} P_N) \to \mathrm{H}_n(M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} Q_{N'}).$$

Sea (P'_N,ϵ') otra resolución proyectiva de N. Por la proposición 2.4.5 existe un morfismo de cadenas $f\colon P_N \to P'_N$ tal que $\epsilon' \circ f_0 = Id_N \circ \epsilon$ y además f es una equivalencia homotópica de cadenas, lo que implica que el morfismo de cadenas $Id \otimes f\colon M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_N \to M \bigotimes_{\mathbb{A}} P'_N$ también es una equivalencia homotópica de cadenas, luego por el corolario 2.3.5 tenemos que $\mathrm{H}_n(M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_N) \cong \mathrm{H}_n(M \bigotimes_{\mathbb{A}} P'_N)$.

Definición 2.4.6. Sea $M_{\mathbb{A}}$ cualquier módulo. El funtor covariante $\overline{\mathrm{Tor}}_n^{\mathbb{A}}(M, \_)\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por

$$\overline{\mathrm{Tor}}_n^{\mathbb{A}}(M, N) = \mathrm{H}_n(M \bigotimes_{\mathbb{A}} P_N),$$

donde P_N es cualquier resolución proyectiva reducida de N.

Definición 2.4.7. Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. El funtor covariante $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{A}}(\_, N)\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{A}} \to \mathbf{Ab}$ está definido por

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{A}}(M, N) = \mathrm{H}_n(P_M \bigotimes_{\mathbb{A}} N),$$

donde P_M es cualquier resolución proyectiva reducida de M.

Definición 2.4.8. Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. El funtor contravariante $\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}}^n(\_, N)\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{A}}^n(M, N) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(P_M, N)\right),$$

donde P_M es cualquier resolución proyectiva reducida de M.

2.5. Álgebra homológica relativa

En esta sección vamos a suponer que $\mathbb{A}$ es un anillo (no necesariamente conmutativo) con elemento unitario 1 y que $\mathbb{B}$ es un subanillo de $\mathbb{A}$ tal que $1 \in \mathbb{B}$.

Sea $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$ la suma directa de la familia $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$, donde $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}$ para toda $i \in I$. Sabemos que $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$ es un $\mathbb{A}$-módulo libre con base $\{e_i\}_{i\in I}$. Notemos que $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$ tiene estructura de $\mathbb{A}$-módulo derecho tomando la multiplicación escalar $\mu\colon \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i\right) \times \mathbb{A} \to \bigoplus_{i\in I} \mathbb{A}_i$ definida por

$$\mu(\sum_{i\in I} \alpha_i e_i, \lambda) = \sum_{i\in I} (\alpha_i \lambda) e_i.$$

Más aún, cada $\mathbb{A}$-módulo libre tiene estructura de $(\mathbb{A}, \mathbb{A})$-bimódulo. En particular el anillo $\mathbb{A}$ es un $(\mathbb{A}, \mathbb{A})$-bimódulo.

Si M es un $\mathbb{A}$-módulo con multiplicación escalar $\mu\colon \mathbb{A} \times M \to M$, entonces M tiene estructura de $\mathbb{B}$-módulo tomando la restricción $\mu|_{\mathbb{B}\times M}\colon \mathbb{B} \times M \to M$ como multiplicación escalar. Cada homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos es un homomorfismo de $\mathbb{B}$-módulos, en otras palabras $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(M, N)$

para cualesquiera $\mathbb{A}$-módulos izquierdos M y N. De manera análoga cada $\mathbb{A}$-módulo derecho es un $\mathbb{B}$-módulo derecho.

Por lo anterior tenemos que el anillo $\mathbb{A}$ tiene estructura de $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-bimódulo y de $(\mathbb{B},\mathbb{A})$-bimódulo. Para cualquier $\mathbb{B}$-módulo izquierdo N tenemos que los grupos $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathbb{A},N)$ tienen estructura de $\mathbb{A}$-módulo izquierdo (ver definiciones 1.8.10 y 1.9.5).

Proposición 2.5.1. *Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ un módulo. Entonces*

1. $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{A}} N \cong N$.

2. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A},N) \cong N$.

Demostración.

1. Como $\alpha\otimes x = 1\otimes(\alpha x)$ para toda $\alpha\in\mathbb{A}$ y para toda $x\in N$, entonces los elementos de $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{A}} N$ son de la forma $1\otimes x$. El homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{A}} N\to N$ definido por $\varphi(1\otimes x)=x$ es un isomorfismo.

2. Como $\mathbb{A}$ es un $\mathbb{A}$-módulo generado por $\{1\}$, entonces cada homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos $f\colon \mathbb{A}\to N$ esta determinado por $f(1)$. El homomorfismo $\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A},N)\to N$ definido por $\psi(f)=f(1)$ es un isomorfismo. ■

Teorema 2.5.2. *Sean ${}_{\mathbb{A}}M$ y ${}_{\mathbb{B}}N$ módulos. Entonces la función*

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M)\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(N,M)$$

definida por la correspondencia

$$f\longmapsto \Phi(f)(x)=f(1\otimes x)$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. La función Φ está bien definida ya que para todos $x,y\in N$ y para toda $\beta\in\mathbb{B}$ se tiene que

$$f\big(1\otimes(x+y)\big)=f(1\otimes x+1\otimes y)=f(1\otimes x)+f(1\otimes y),$$

$$f\big(1\otimes(\beta x)\big)=f(\beta\otimes x)=f\big(\beta(1\otimes x)\big)=\beta f(1\otimes x),$$

lo que significa que $\Phi(f)$ es un homomorfismo de $\mathbb{B}$-módulos.

Ahora vemos que Φ es un homomorfismo de grupos.
Sean $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N, M)$ y sea $x \in N$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g)(x) &= (f+g)(1 \otimes x) \\
&= f(1 \otimes x) + g(1 \otimes x) \\
&= \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x) \\
&= \big(\Phi(f) + \Phi(g)\big)(x).
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que Φ es biyectiva. Supongamos que $\Phi(f) = 0$. Entonces $f(1 \otimes x) = 0$ para toda $x \in N$. Como f es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, entonces $f(\alpha \otimes x) = f\big(\alpha(1 \otimes x)\big) = \alpha f(1 \otimes x) = 0$, lo que implica que $f = 0$. Así $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ y por lo tanto Φ es inyectiva.

Sólo falta demostrar que Φ es sobreyectiva. Sea $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M)$. La función $g \colon \mathbb{A} \times N \to M$ definida por $g(\alpha, x) = \alpha h(x)$ es $\mathbb{B}$-biaditiva (ver definición 1.8.3), luego por la definición 1.8.4 de producto tensorial, existe un único homomorfismo de grupos $\widetilde{h} \colon \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \times N \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N \arrow[d, dashed, "\widetilde{h}"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

conmuta. El homomorfismo $\widetilde{h}$ está definido por $\widetilde{h}(\alpha \otimes x) = \alpha h(x)$. Sean $\sum_i \alpha_i \otimes x_i \in \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$ y $\lambda \in \mathbb{A}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}\big(\lambda(\sum_i \alpha_i \otimes x_i)\big) &= \sum_i \widetilde{h}\big((\lambda\alpha_i) \otimes x_i\big) \\
&= \sum_i (\lambda\alpha_i) h(x_i) \\
&= \lambda\big(\sum_i \alpha_i h(x_i)\big) \\
&= \lambda\widetilde{h}(\sum_i \alpha_i \otimes x_i).
\end{aligned}$$

Así $\widetilde{h}$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos. Sea $x \in N$. Entonces $\Phi(\widetilde{h})(x) = \widetilde{h}(1 \otimes x) = h(x)$, lo que implica que $\Phi(\widetilde{h}) = h$. ■

Definición 2.5.3. Una sucesión exacta de $\mathbb{A}$-homomorfismos entre $\mathbb{A}$-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1}} M_i \xrightarrow{t_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta si, para cada i, el núcleo de t_i es un $\mathbb{B}$-módulo sumando directo de M_i.

Proposición 2.5.4. *Sea*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

una sucesión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$*-exacta corta. Si consideramos la sucesión* (2.1) *como una sucesión de* $\mathbb{B}$*-módulos, entonces la sucesión se escinde.*

Demostración. Como la sucesión (2.1) es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta corta, entonces existen $\mathbb{B}$-submódulos N y C de M tales que $N \cap C = \{0\}$, $M = N + C$ y $\operatorname{Ker} g = N$.

Cada elemento de M se puede escribir de manera única como una suma $x + y$, donde $x \in N$, $y \in C$. Sea $p_C \colon M \to C$ el $\mathbb{B}$-epimorfismo proyección definido por $p_C(x + y) = y$, donde $x \in N$, $y \in C$. Notemos que $\operatorname{Ker} p_C = N$. Como la sucesión (2.1) es exacta, entonces $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g = N = \operatorname{Ker} p_C$, luego obtenemos otra sucesión de $\mathbb{B}$-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p_C} C \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

que es $\mathbb{B}$-exacta corta. Sea $i_C \colon C \to M$ la inclusión, entonces $p_C \circ i_C = Id_C$, por lo que la sucesión (2.2) se escinde, luego por el teorema 1.6.10 existe un $\mathbb{B}$-homomorfismo $f' \colon M \to M_1$ tal que $f' \circ f = Id_{M_1}$. Nuevamente por el teorema 1.6.10 tenemos que la sucesión (2.1) se escinde. ■

Proposición 2.5.5. *Una sucesión*

$$\nu \colon \ \cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1}} M_i \xrightarrow{t_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

de $\mathbb{A}$*-homomorfismos es* $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$*-exacta si y sólo si,*

1. $t_i \circ t_{i+1} = 0$ *para cada* $i \in \mathbb{Z}$*, es decir,* ν *es un complejo de cadenas sobre* $\mathbb{A}$*.*

2. *Existe una* $\mathbb{B}$*-homotopía de cadenas tal que* $Id_\nu \colon \nu \to \nu$ *es homotópicamente nula, es decir, que existe una familia de* $\mathbb{B}$*-homomorfismos* $h = \{h_i \colon M_i \to M_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *tal que* $t_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ t_i = Id_{M_i}$ *para toda* $i \in \mathbb{Z}$*.*

Demostración. Supongamos que ν es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta. De manera usual denotamos $Z_i = \operatorname{Ker} t_i$ y $B_i = \operatorname{Im} t_{i+1}$.

La sucesión ν es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta, entonces es $\mathbb{A}$-exacta, luego $t_i \circ t_{i+1} = 0$ y $Z_i = B_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Así la sucesión

$$0 \longrightarrow Z_i \xrightarrow{g_i} M_i \xrightarrow{t_i} Z_{i-1} \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

es $\mathbb{A}$-exacta corta, donde g_i es la inclusión. Como ν es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta, entonces Z_i es un $\mathbb{B}$-módulo sumando directo de M_i, lo que implica que la sucesión (2.3) es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta corta.

Consideremos la sucesión (2.3) como una sucesión de $\mathbb{B}$-módulos, entonces por la proposición 2.5.4 tenemos que la sucesión (2.3) se escinde, luego por el teorema 1.6.10 existe un $\mathbb{B}$-isomorfismo $\Delta_i\colon M_i \to Z_i \bigoplus Z_{i-1}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "Id"] & M_i \arrow[r, "t_i"] \arrow[d, "\Delta_i"] & Z_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_i \arrow[r, "l_1^i"] & Z_i \bigoplus Z_{i-1} \arrow[r, "p_2^i"] & Z_{i-1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde l_1^i es la inclusión y p_2^i es la proyección. Sea $\widetilde{t_i} = l_1^{i-1} \circ p_2^i$. Entonces tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo y sus renglones son $\mathbb{B}$-exactos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "t_{i+1}"] \arrow[d, "\Delta_{i+1}"] & M_i \arrow[r, "t_i"] \arrow[d, "\Delta_i"] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Z_{i+1} \bigoplus Z_i \arrow[r, "\widetilde{t}_{i+1}"] & Z_i \bigoplus Z_{i-1} \arrow[r, "\widetilde{t_i}"] & Z_{i-1} \bigoplus Z_{i-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sea $\nu' = \{Z_i \bigoplus Z_{i-1}, \widetilde{t_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Notemos que $\Delta = \{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es un isomorfismo de cadenas de ν en ν'. Si $\Delta^{-1} = \{\Delta_i^{-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es el inverso de Δ, entonces $Id_\nu = \Delta^{-1} \circ \Delta$ y $Id_{\nu'} = \Delta \circ \Delta^{-1}$. Queremos demostrar que $Id_\nu \simeq 0$, para esto vemos que $Id_\nu \simeq 0$ si y sólo si, $\Delta \simeq 0$ o $\Delta^{-1} \simeq 0$ si y sólo si, $Id_{\nu'} \simeq 0$. Así basta con demostrar que $Id_{\nu'} \simeq 0$, es decir, que existe una sucesión de $\mathbb{B}$-homomorfismos $\widetilde{h} = \{\widetilde{h}_i\colon Z_i \bigoplus Z_{i-1} \to Z_{i+1} \bigoplus Z_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $\widetilde{t}_{i+1} \circ \widetilde{h}_i + \widetilde{h}_{i-1} \circ \widetilde{t_i} = Id_{Z_i \bigoplus Z_{i-1}}$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos las inclusiones y proyecciones:

$$l_1^i\colon Z_i \to Z_i \bigoplus Z_{i-1}, \qquad l_2^i\colon Z_{i-1} \to Z_i \bigoplus Z_{i-1},$$

$$p_1^i\colon Z_i \bigoplus Z_{i-1} \to Z_i, \qquad p_2^i\colon Z_i \bigoplus Z_{i-1} \to Z_{i-1}.$$

Sea $\widetilde{h}_i = l_2^{i+1} \circ p_1^i$. Como $(p_1^i \circ l_1^i) = Id_{Z_i}$ y $(p_2^i \circ l_2^i) = Id_{Z_{i-1}}$, entonces

$$\widetilde{t}_{i+1} \circ \widetilde{h}_i = (l_1^i \circ p_2^{i+1}) \circ (l_2^{i+1} \circ p_1^i) = l_1^i \circ p_1^i,$$
$$\widetilde{h}_{i-1} \circ \widetilde{t}_i = (l_2^i \circ p_1^{i-1}) \circ (l_1^{i-1} \circ p_2^i) = l_2^i \circ p_2^i.$$

Sea $(x, y) \in Z_i \bigoplus Z_{i-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\widetilde{t}_{i+1} \circ \widetilde{h}_i + \widetilde{h}_{i-1} \circ \widetilde{t}_i)(x, y) &= (l_1^i \circ p_1^i + l_2^i \circ p_2^i)(x, y) \\
&= l_1^i \circ p_1^i(x, y) + l_2^i \circ p_2^i(x, y) \\
&= l_1^i(x) + l_2^i(y) \\
&= (x, 0) + (0, y) \\
&= (x, y).
\end{aligned}$$

Así $\widetilde{t}_{i+1} \circ \widetilde{h}_i + \widetilde{h}_{i-1} \circ \widetilde{t}_i = Id_{Z_i \bigoplus Z_{i-1}}$ y por lo tanto $Id_{\nu'} \simeq 0$. Se concluye que el morfismo identidad Id_ν es homotópicamente nulo.

Ahora supongamos que ν es una sucesión de $\mathbb{A}$-homomorfismos que satisface los incisos 1 y 2. Por el inciso 1 tenemos que $B_i \subset Z_i$. Por el inciso 2 existe una familia de $\mathbb{B}$-homomorfismos $h = \{h_i \colon M_i \to M_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $t_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ t_i = Id_{M_i}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Si $x \in Z_i$, entonces $t_{i+1}\big(h_i(x)\big) = x$, por lo tanto $x \in B_i$. Así la sucesión ν es $\mathbb{A}$-exacta, lo que implica que la sucesión

$$0 \longrightarrow Z_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1}} Z_i \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

es $\mathbb{A}$-exacta corta, donde g_{i+1} es la inclusión. Sea $h|_{Z_i} \colon Z_i \to M_{i+1}$ la restricción de h_i, entonces $t_{i+1} \circ h|_{Z_i} = Id_{Z_i}$, por lo tanto la sucesión (2.4) es una sucesión $\mathbb{B}$-exacta corta que se escinde. Así Z_{i+1} es un $\mathbb{B}$-módulo sumando directo de M_{i+1}. ■

Definición 2.5.6. Un $\mathbb{A}$-módulo P es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$**-proyectivo** si, para cada sucesión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0$$

y para todo $\mathbb{A}$-homomorfismo $f \colon P \to M_2$, existe un $\mathbb{A}$-homomorfismo $h \colon P \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Lema 2.5.7. *Para cada $\mathbb{B}$-módulo N, el $\mathbb{A}$-módulo $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo.*

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

una sucesión $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta corta.

Consideremos la sucesión (2.5) como una sucesión de $\mathbb{B}$-módulos, entonces por la proposición 2.5.4 tenemos que la sucesión (2.5) se escinde, es decir, que existe un $\mathbb{B}$-homomorfismo $\psi'\colon M_2 \to M$ tal que $\psi\circ\psi' = Id_{M_2}$; luego ψ' induce un homomorfismo de grupos $\psi'_*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M)$ definido por $\psi'_*(f) = \psi'\circ f$.

Por el teorema 2.5.2 tenemos los siguientes isomorfismos de grupos:

$$\begin{aligned} \Phi_1\colon\ &\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M_2),\\ \Phi_2\colon\ &\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M). \end{aligned}$$

La inversa de Φ_2 es el homomorfismo $\Phi_2^{-1}\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M)$ definido por la correspondencia

$$h \longmapsto \Phi_2^{-1}(h)(\alpha\otimes x) = \alpha h(x).$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M) \arrow[d, "\Phi_2"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M_2) \arrow[d, "\Phi_1"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M) \arrow[r, shift left, "\psi_*"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M_2) \arrow[l, shift left, "\psi'_*"]
\end{tikzcd}$$

Sea $\Gamma = \Phi_2^{-1}\circ\psi'_*\circ\Phi_1$. Si $f\colon \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N \to M_2$ es un $\mathbb{A}$-homomorfismo, entonces $\Gamma(f)\colon \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N \to M$ es un $\mathbb{A}$-homomorfismo definido por $\Gamma(f)(\alpha\otimes x) = \alpha(\psi'\circ f)(1\otimes x)$, por lo tanto $\psi\circ\Gamma(f) = f$. Se concluye que $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo. ■

Corolario 2.5.8. *Cada $\mathbb{A}$-módulo N es $(\mathbb{A},\mathbb{A})$-proyectivo.*

Demostración. Por la proposición 2.5.1 tenemos que $N \cong \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{A}} N$, luego por el lema 2.5.7 tenemos que $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{A}} N$ es $(\mathbb{A},\mathbb{A})$-proyectivo. ■

Proposición 2.5.9. *Sea ${}_{\mathbb{B}}N$ un módulo. Si N es $\mathbb{B}$-proyectivo, entonces $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ es $\mathbb{A}$-proyectivo.*

Demostración. Sea $f\colon \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N \to M_2$ un $\mathbb{A}$-homomorfismo y sea $\psi\colon M \to M_2$ un $\mathbb{A}$-epimorfismo. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por el teorema 2.5.2 tenemos el siguiente isomorfismo de grupos:

$$\Phi_1\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M_2).$$

Así $\Phi_1(f)\colon N \to M_2$ es un $\mathbb{B}$-homomorfismo definido por $\Phi_1(f)(x) = f(1\otimes x)$. Como N es $\mathbb{B}$-proyectivo, existe un $\mathbb{B}$-homomorfismo $h\colon N \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\Phi_1(f)"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Nuevamente por el teorema 2.5.2 tenemos un isomorfismo de grupos

$$\Phi_2\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N, M) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M).$$

Tomemos la inversa de este isomorfismo. Así $\Phi_2^{-1}(h)\colon \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N \to M$ es un $\mathbb{A}$-homomorfismo definido por $\Phi_2^{-1}(h)(\alpha\otimes x) = \alpha h(x)$.

Tenemos que $\psi\circ h = \Phi_1(f)$. Sea $\alpha\otimes x \in \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi\circ\Phi_2^{-1}(h)(\alpha\otimes x) &= \psi\big(\alpha h(x)\big) \\ &= \alpha(\psi\circ h)(x) \\ &= \alpha\Phi_1(f)(x) \\ &= \alpha f(1\otimes x) \\ &= f(\alpha\otimes x). \end{aligned}$$

Así $\psi\circ\Phi_2^{-1}(h) = f$. Se concluye que $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ es es $\mathbb{A}$-proyectivo. ■

Sean ${}_{\mathbb{A}}M$, ${}_{\mathbb{B}}N$ módulos. En el teorema 2.5.2 definimos un isomorfismo de grupos, su inversa es el homomorfismo $\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N, M)$ definido por la correspondencia

$$h \longmapsto \Psi(h)(\alpha \otimes x) = \alpha h(x).$$

Sea $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, M)$ y sea $y \in M$. Si h es un epimorfismo, entonces existe $x \in N$ tal que $h(x) = y$, luego $\Psi(h)(1 \otimes x) = h(x) = y$, lo que implica que $\Psi(h)$ es un epimorfismo.

Si N es un $\mathbb{A}$-módulo izquierdo, entonces tenemos un isomorfismo de grupos $\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N, N)$. Notemos que $Id_N \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{B}}(N, N)$. Sea $\theta_N = \Psi(Id_N)$, entonces $\theta_N\colon \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N \to N$ es un epimorfismo de $\mathbb{A}$-módulos definido por $\theta_N(\alpha \otimes x) = \alpha x$ que induce una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\theta_N \longrightarrow \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N \xrightarrow{\theta_N} N \longrightarrow 0. \tag{2.6}$$

La función $\theta'\colon N \to \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$ definida por

$$x \longmapsto 1 \otimes x$$

es un $\mathbb{B}$-homomorfismo. Sea $x \in N$, entonces $\theta_N \circ \theta'(x) = \theta_n(1 \otimes x) = x$, por lo tanto $\theta_N \circ \theta' = Id_N$.

Si consideramos la sucesión (2.6) como una sucesión de $\mathbb{B}$-módulos entonces la sucesión se escinde, lo que implica que $\operatorname{Ker}\theta_N$ es un $\mathbb{B}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$, esto demuestra que la sucesión (2.6) es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta corta.

Proposición 2.5.10. *Sea $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia de $\mathbb{A}$-módulos. Entonces $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectivo si y sólo si, P_j es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectivo para toda $j \in I$.*

Demostración. Es igual a la demostración de la proposición 1.7.2. ■

Corolario 2.5.11. *Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ un módulo. Entonces N es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectivo si y sólo si, N es isomorfo a un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$ si y sólo si, $\operatorname{Ker}\theta_N$ es un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$.*

Demostración. Si N es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectivo, entonces la sucesión (2.6) se escinde, lo que implica que N es isomorfo a un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$, y $\operatorname{Ker}\theta_N$ es un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$.

Si $\operatorname{Ker}\theta_N$ es un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} N$, entonces la sucesión (2.6) es $(\mathbb{A}, \mathbb{A})$-exacta, luego por la proposición 2.5.4 tenemos que la sucesión (2.6) se escinde, por lo tanto N es isomorfo a un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$.

Por último supongamos que N es isomorfo a un $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$. Por el lema 2.5.7 tenemos que $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo, luego por la proposición 2.5.10 tenemos que cada $\mathbb{A}$-módulo sumando directo de $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} N$ es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo. Así N es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo. ■

A continuación vamos a dar una versión preliminar del funtor de Takasu, podemos encontrar más información de este funtor en [12].

Si M es un $\mathbb{A}$-módulo, entonces el epimorfismo $\theta_M\colon \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M \to M$ definido por $\theta_M(\alpha\otimes x)=\alpha x$ induce una sucesión $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta corta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\theta_M \longrightarrow \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M \xrightarrow{\theta_M} M \longrightarrow 0.$$

Sea $\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M)=\operatorname{Ker}\theta_M$. Si $f\colon M\to M'$ es un $\mathbb{A}$-homomorfismo, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(f)"] & \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "Id_{\mathbb{A}}\otimes f"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M') \arrow[r] & \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M' \arrow[r, "\theta_{M'}"] & M' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(f)$ es la restricción de $Id_{\mathbb{A}}\otimes f$.

Observación 2.5.12. Como $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}}\_$ es un funtor covariante, entonces

1. $\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(Id_M)=Id_{\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M)}$.
2. $\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(g\circ f)=\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(g)\circ\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(f)$, siempre que la composición esté bien definida.

Definición 2.5.13. El **funtor de Takasu** es el funtor covariante $\mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}\colon {}_{\mathbb{A}}\,\mathbf{Mod}\to_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod}$ definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl}
M & \longmapsto & \mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M), \\
(f\colon M\to M') & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(f)\colon \mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M) & \longrightarrow & \mathrm{I}_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M') \\ \sum_i \alpha_i\otimes x_i & \longmapsto & \sum_i \alpha_i\otimes f(x_i) \end{array}\right).
\end{array}$$

Ahora vamos a definir los funtores Tor y Ext relativos. Podemos encontrar estas definiciones y algunos otros resultados en [7].

Definición 2.5.14. Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Una **resolución** $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$**-proyectiva de** M es un complejo de cadenas $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacto de la forma

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\theta} M \longrightarrow 0$$

tal que P_n es $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectivo para toda $n \geq 0$.

El complejo de cadenas reducido

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$$

lo vamos a denotar por P_M y le llamaremos **resolución** $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$**-proyectiva reducida de** M. Escribiremos (P_M, θ) para denotar una resolución $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectiva de M.

Proposición 2.5.15. *Sea M un $\mathbb{A}$-módulo. Entonces existe una resolución $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectiva de M.*

Demostración. El epimorfismo $\theta_M : \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} M \to M$ induce una sucesión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta corta:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} \mathbb{A} \bigotimes\nolimits_{\mathbb{B}} M \xrightarrow{\theta_M} M \longrightarrow 0,$$

donde $M_1 = \operatorname{Ker} \theta_M$, i_1 es la inclusión. Como M_1 es un $\mathbb{A}$-módulo, entonces el epimorfismo $\theta_{M_1} : \mathbb{A} \bigotimes_{\mathbb{B}} M_1 \to M_1$ induce una sucesión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta corta:

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} \mathbb{A} \bigotimes\nolimits_{\mathbb{B}} M_1 \xrightarrow{\theta_{M_1}} M_1 \longrightarrow 0,$$

donde $M_2 = \operatorname{Ker} \theta_{M_1}$, i_2 es la inclusión.

Sea $M_0 = M$. Por inducción obtenemos, para cada $n \geq 0$, una sucesión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-exacta corta:

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{i_{n+1}} \mathbb{A} \bigotimes\nolimits_{\mathbb{B}} M_n \xrightarrow{\theta_{M_n}} M_n \longrightarrow 0,$$

donde $M_{n+1} = \operatorname{Ker} \theta_{M_n}$, i_{n+1} es la inclusión.

Para cada $n > 0$ tenemos

$$\mathbb{A} \bigotimes\nolimits_{\mathbb{B}} M_n \xrightarrow{\theta_{M_n}} M_n \xrightarrow{i_n} \mathbb{A} \bigotimes\nolimits_{\mathbb{B}} M_{n-1}.$$

Sea $\partial_n = i_n \circ \theta_{M_n}$. Como i_n es un monomorfismo, entonces

$$\operatorname{Ker}\partial_n = \operatorname{Ker}\theta_{M_n} = M_{n+1}.$$

Como $\theta_{M_{n+1}}$ es un epimorfismo, entonces

$$\operatorname{Im}\partial_{n+1} = i_{n+1}\circ\theta_{M_{n+1}}(\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M_{n+1}) = i_{n+1}(M_{n+1}) = M_{n+1} = \operatorname{Ker}\partial_n.$$

Por el lema 2.5.7 tenemos que $\mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M_n$ es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo para toda $n \geq 0$. Así el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{A}\bigotimes_{\mathbb{B}} M_0 \xrightarrow{\theta_M} M \longrightarrow 0$$

es una resolución $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectiva de M. ■

Teorema 2.5.16. *Sea $k\in\mathbb{Z}$ y sean $C=\{C_n,\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $D=\{D_n,\partial'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos de cadenas tales que C_n es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivo para toda $n>k$, $\mathrm{H}_n(D)=\{0\}$ para toda $n\geq k$, y la sucesión*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\partial'_n \longrightarrow D_n \xrightarrow{\partial'_n} \operatorname{Im}\partial'_n \longrightarrow 0$$

es $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-exacta corta para toda $n>k$. Si $\{f_n\colon C_n\to D_n\}_{n\leq k}$ es una familia de homomorfismos tales que $\partial'_n\circ f_n = f_{n-1}\circ\partial_n$ para toda $n\leq k$, entonces $\{f_n\}_{n\leq k}$ se extiende a un morfismo de cadenas $f\colon C\to D$ y esta extensión es única salvo homotopía de cadenas.

Demostración. Es igual a la demostración del teorema 2.4.4. ■

Proposición 2.5.17. *Sean M y M' $\mathbb{A}$-módulos y sean (P_M,θ) y $(Q_{M'},\nu)$ resoluciones $(\mathbb{A},\mathbb{B})$-proyectivas de M y M' respectivamente. Si $\varphi\colon M\to M'$ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$-módulos, entonces*

1. *Existe un morfismo de cadenas $f\colon(P_M,\theta)\to(Q_{M'},\nu)$ tal que $f_{-1}=\varphi$, f es único salvo homotopía de cadenas.*

2. *Si φ es un isomorfismo, entonces f es una equivalencia homotópica de cadenas.*

Demostración. Es igual a la demostración de la proposición 2.4.5. ■

Los siguientes funtores están definidos de forma análoga a los funtores $\overline{\operatorname{Tor}}_n^{\mathbb{A}}$, $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{A}}$ y $\operatorname{Ext}_{\mathbb{A}}^n$; recomendamos al lector ver los comentarios posteriores a la demostración de la proposición 2.4.5.

Definición 2.5.18. Sea $M_{\mathbb{A}}$ cualquier módulo. El funtor covariante $\overline{\mathrm{Tor}}_n^{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M, \_)\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por

$$\overline{\mathrm{Tor}}_n^{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M, N) = \mathrm{H}_n(M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} P_N),$$

donde P_N es cualquier resolución $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectiva reducida de N.

Definición 2.5.19. Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. El funtor covariante $\mathrm{Tor}_n^{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(\_, N)\colon\ \mathbf{Mod}_{\mathbb{A}} \to \mathbf{Ab}$ está definido por

$$\mathrm{Tor}_n^{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M, N) = \mathrm{H}_n(P_M \bigotimes\nolimits_{\mathbb{A}} N),$$

donde P_M es cualquier resolución $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectiva reducida de M.

Definición 2.5.20. Sea ${}_{\mathbb{A}}N$ cualquier módulo. El funtor contravariante $\mathrm{Ext}^n_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(\_, N)\colon {}_{\mathbb{A}}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por

$$\mathrm{Ext}^n_{(\mathbb{A},\mathbb{B})}(M, N) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(P_M, N)\right),$$

donde P_M es cualquier resolución $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$-proyectiva reducida de M.

Capítulo 3

Preliminares topológicos

En este capítulo vamos a dar una introducción sobre complejos CW, conjuntos simpliciales, y G-espacios.

El objetivo principal de este capítulo es definir un modelo para el espacio clasificante de una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G, donde G es un grupo discreto; utilizando conjuntos simpliciales vamos a construir un complejo CW, denotado por $E_{\mathcal{F}}(G)$, tal que G actúa sobre este espacio. En los capítulos siguientes será de gran importancia calcular los grupos de (co)homología del espacio de órbitas de $E_{\mathcal{F}}(G)$.

3.1. Adjunción de espacios

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida sobre un conjunto X. La clase de equivalencia de un elemento x de X es el conjunto $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. El conjunto de todas las clases de equivalencia lo vamos a denotar por $X/_{\sim}$. Dos clases de equivalencia son iguales o bien son disjuntas, por lo tanto $X/_{\sim}$ es una partición de X. La función proyección $\pi\colon X \to X/_{\sim}$ definida por $\pi(x) = [x]$ es sobreyectiva.

Si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X, entonces la proyección π induce una topología sobre $X/_{\sim}$ definida de la siguiente manera: un subconjunto $U \subset X/_{\sim}$ es abierto en $X/_{\sim}$ si y sólo si, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X. A $X/_{\sim}$ con esta topología le llamaremos **espacio cociente de** X o bien **espacio de identificación de** X. Notemos que con esta topología la función π es continua.

Proposición 3.1.1. *Una función $f\colon X/_{\sim} \to Y$ es continua si y sólo si, $f \circ \pi\colon X \to Y$ es continua.*

Demostración. Supongamos que f es continua. La composición de dos funciones continuas es continua, por lo tanto $f \circ \pi$ es continua.

Ahora supongamos que $f \circ \pi$ es continua. Sea U un abierto en Y. Entonces $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}\big(f^{-1}(U)\big)$ es abierto en X, luego por definición $f^{-1}(U)$ es abierto en $X/_{\sim}$. Así f es una función continua. ■

Proposición 3.1.2. *Si $g\colon X \to Y$ es una función continua tal que la restricción $g|_{[x]}$ es una función constante para toda $[x] \in X/_{\sim}$, entonces existe una única función continua $f\colon X/_{\sim} \to Y$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "g"] & \\ X/_{\sim} \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $f\colon X/_{\sim} \to Y$ la función definida por $f([x]) = g(x)$. Como $g|_{[x]}$ es constante para toda $[x] \in X/_{\sim}$, entonces f está bien definida.

Sea $x \in X$. Entonces $f \circ \pi(x) = f([x]) = g(x)$. Así $f \circ \pi = g$. Tenemos que $g = f \circ \pi$ es una función continua, se sigue por la proposición 3.1.1 que f es una función continua.

Supongamos que $f'\colon X/_{\sim} \to Y$ es una función continua tal que $f' \circ \pi = g$. Sea $x \in X$. Entonces $f'([x]) = f' \circ \pi(x) = g(x) = f \circ \pi(x) = f([x])$. Así f es única. ■

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. La **unión disjunta** de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ es el conjunto:

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\}).$$

Si tenemos una familia de espacios topológicos $\{X_i\}_{i\in I}$, entonces el conjunto

$$\beta = \{U \times \{i\} \,|\, U \text{ es abierto en } X_i,\ i \in I\}$$

es una base para una topología sobre $\bigsqcup_{i\in I} X_i$. Sea $j \in I$. Con esta topología la función $l_j\colon X_j \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$ definida por $l_j(x) = (x, j)$ es un encaje. Así podemos pensar que cada X_j es un subespacio de $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ tal que la topología de subespacio coincide con su topología original, además cada X_j es abierto y cerrado en $\bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Definición 3.1.3. Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset X$ un subespacio de X, y sea $f : A \to Y$ una función continua. El **espacio obtenido por adjuntar X a Y vía f**, denotado por $X \cup_f Y$, es el espacio cociente de $X \sqcup Y$ que se obtiene identificando los puntos $x \sim f(x)$ para toda $x \in X$.

La siguiente proposición nos dice que el espacio Y es homeomorfo a un subespacio de $X \cup_f Y$.

Proposición 3.1.4. *Sea A un subespacio de X y sea $f\colon A \to Y$ una función continua. Consideremos la proyección $\pi\colon X \sqcup Y \to X \cup_f Y$. Entonces la restricción $\pi|_Y\colon Y \to \pi(Y)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Si consideramos la clase de equivalencia de y como un subconjunto de $X \sqcup Y$ tenemos que

$$\pi^{-1}\big(\pi(y)\big) = [y] = f^{-1}(\{y\}) \sqcup \{y\};$$

más aún, si U es un subconjunto de Y, entonces

$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{y \in U} [y] = \bigcup_{y \in U} \big(f^{-1}(\{y\}) \sqcup \{y\}\big) = f^{-1}(U) \sqcup U.$$

Tenemos que $Y \cap [y] = \{y\}$ para toda $y \in Y$. Sean $y_1, y_2 \in Y$. Si $\pi|_Y(y_1) = \pi|_Y(y_2)$, entonces $[y_1] = [y_2]$, se sigue que $\{y_1\} = Y \cap [y_1] = Y \cap [y_2] = \{y_2\}$. Así $\pi|_Y$ es una función biyectiva.

Tenemos que $\pi|_Y$ es una función continua. Vamos a demostrar que $\pi|_Y$ es una función abierta y por lo tanto un homeomorfismo. Sea U un abierto de Y. Como f es una función continua, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en A, luego por definición de subespacio $f^{-1}(U) = A \cap V$, donde V es un abierto de X. Podemos escribir a V como $V = f^{-1}(U) \cup W$, donde $W = (X - A) \cap V$. Se cumple que $\pi(W) \cap \pi(Y) = \emptyset$ y $\pi^{-1}\big(\pi(W \cup U)\big) = V \cup U$.

Así $\pi(W \cup U)$ es un abierto de $X \cup_f Y$ tal que $\pi(U) = \pi(Y) \cap \pi(W \cup U)$, y por lo tanto $\pi(U)$ es abierto en $\pi(Y)$. ■

3.2. Cilindro y cono de una aplicación

Definición 3.2.1. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sea $I = [0, 1]$. El **cilindro de la aplicación** f, denotado por $\mathrm{Cyl}(f)$, es el espacio cociente de $(X \times I) \sqcup Y$ que se obtiene identificando los puntos $(x, 1) \sim f(x)$ para toda $x \in X$.

En otras palabras $\mathrm{Cyl}(f) = (X \times I) \cup_h Y$, donde $h\colon X \times \{1\} \to Y$ es la función continua definida por $h(x,1) = f(x)$.

Proposición 3.2.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Consideremos la proyección $\pi\colon (X \times I) \sqcup Y \to \mathrm{Cyl}(f)$. Entonces $\pi(Y)$ es un retracto por deformación de* $\mathrm{Cyl}(f)$.

Demostración. Sea $s \in I$ y sea $\psi_s\colon X \times I \to X \times I$ la función continua definida por $\psi_s(x,t) = \big(x, s + t(1-s)\big)$. Entonces la función

$$g_s\colon (X \times I) \sqcup Y \to (X \times I) \sqcup Y$$

definida por

$$g_s(\omega) = \begin{cases} \psi_s(\omega) & \text{si } \omega \in X \times I, \\ \omega & \text{si } \omega \in Y, \end{cases}$$

es una función continua.

Consideremos la composición $\pi \circ g_s\colon (X \times I) \sqcup Y \to \mathrm{Cyl}(f)$. Se cumple que la restricción $(\pi \circ g_s)|_{[\omega]}$ es constante para cada $[\omega] \in \mathrm{Cyl}(f)$ y para toda $s \in I$. Por la proposición 3.1.2, para cada $s \in I$, existe una única función continua $F_s\colon \mathrm{Cyl}(f) \to \mathrm{Cyl}(f)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \times I) \sqcup Y \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\pi \circ g_s"] & \\
\mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "F_s"] & \mathrm{Cyl}(f)
\end{tikzcd}$$

conmuta. La función $F\colon \mathrm{Cyl}(f) \times I \to \mathrm{Cyl}(f)$ definida por $F([\omega], s) = F_s([\omega])$ es una homotopía entre F_0 y F_1.

Si $y \in Y$, entonces $F_s([y]) = \pi \circ g_s(y) = [y]$.

Si $(x,t) \in X \times [0,1]$, entonces $F_s([(x,t)]) = \pi \circ g_s(x,t) = [\big(x, s + t(1-s)\big)]$.

Notemos que $F_0 = Id_{\mathrm{Cyl}(f)}$ y que $\mathrm{Im}\, F_1 = \pi(Y)$. Sea $r\colon \mathrm{Cyl}(f) \to \pi(Y)$ la función continua definida por $r([\omega]) = F_1([\omega])$, y sea $i\colon \pi(Y) \to \mathrm{Cyl}(f)$ la inclusión. Entonces $r \circ i = Id_{\pi(Y)}$ y $i \circ r = F_1 \simeq F_0 = Id_{\mathrm{Cyl}(f)}$. ■

Corolario 3.2.3. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Entonces los espacios Y y* $\mathrm{Cyl}(f)$ *son homotópicamente equivalentes.*

*Demostración.*Por la proposición 3.1.4 tenemos que Y es homeomorfo a $\pi(Y)$, luego por la proposición anterior $\pi(Y)$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{Cyl}(f)$, se sigue que Y y $\mathrm{Cyl}(f)$ son homotópicamente equivalentes. ■

Sean X un espacio topológico, A un subespacio no vacío de X, y sea $\{p\}$ un espacio topológico con un punto. Existe una única función continua $f\colon A \to \{p\}$. El espacio que se obtiene al **colapsar el subespacio** A **de** X **en un punto** se define por $X/A = X \cup_f \{p\}$.

El **cono de** X, denotado por CX, es el espacio cociente $(X\times I)/(X\times\{0\})$. El cono de cualquier espacio topológico es contraible.

Definición 3.2.4. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sea CX el cono de X. El **cono de la aplicación** f, denotado por $\mathrm{Cone}(f)$, es el espacio cociente de $CX \sqcup Y$ que se obtiene identificando los puntos $(x,1) \sim f(x)$ para toda $x \in X$.

Consideremos el espacio $\mathrm{Cyl}(f)$ y la proyección $\pi\colon (X\times I)\sqcup Y \to \mathrm{Cyl}(f)$. Otra forma de definir el cono de la aplicación f consiste en tomar el subespacio $\pi(X\times\{0\})$ de $\mathrm{Cyl}(f)$ y colapsarlo a un punto, es decir,

$$\mathrm{Cone}(f) = \mathrm{Cyl}(f)/\pi(X\times\{0\}).$$

3.3. Complejos CW

Sean D^n el disco n-dimensional, S^n la esfera n-dimensional, y sea Y un espacio topológico. Una n-**célula** D^n_α es un copia de D^n; la frontera de una n-célula es $\partial D^n_\alpha = S^{n-1}_\alpha$, donde S^{n-1}_α es una copia de S^{n-1}. El espacio obtenido por adjuntar una familia $\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de n-células a Y vía una familia $\{f_\alpha\colon S^{n-1}_\alpha \to Y\}_{\alpha\in J}$ de funciones continuas es el espacio cociente

$$\Big(\bigsqcup_{\alpha\in J} D^n_\alpha\Big) \cup_F Y,$$

donde $F\colon \bigsqcup_{\alpha\in J} S^{n-1}_\alpha \to Y$ es la función continua definida por $F(x) = f_\alpha(x)$ siempre que $x \in S^{n-1}_\alpha$.

Un **complejo CW o complejo celular** es un espacio topológico X junto con una sucesión $X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots X$ de subespacios de X tal que:

1. X^0 tiene la topología discreta. Los puntos de X^0 son las 0-células.

2. Para cada $n > 0$ el subespacio X^n es homeomorfo a un espacio obtenido por adjuntar una familia $\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de n-células a X^{n-1} vía una familia $\{f_\alpha\colon S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}\}_{\alpha\in J}$ de funciones continuas.

3. $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$. El espacio X tiene la topología débil en la que un subconjunto $U \subset X$ es abierto en X si y sólo si, $U \cap X^n$ es abierto en X^n para toda $n \geq 0$.

Al subespacio $X^n \subset X$ se le llama n-**esqueleto**.

Los complejos CW forman una categoría. Sean X y Y complejos CW. Un morfismo entre X y Y es una función continua $f\colon X \to Y$ tal que $f(X^n) \subset Y^n$ para toda $n \geq 0$.

3.4. Conjuntos simpliciales

Categoría Δ. Sus objetos son conjuntos de la forma $[m] = \{0, 1, \ldots, m\}$; sus morfismos son funciones no decrecientes, es decir, funciones $f\colon [m] \to [n]$ tales que $f(i) \leq f(j)$ siempre que $i < j$; la composición de morfismos en la categoría Δ es la composición de funciones.

Sea $m \geq 1$. El **morfismo cara** es la función $\partial_m^i\colon [m-1] \to [m]$ definida por

$$\partial_m^i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k < i, \\ k+1 & \text{si } k \geq i, \end{cases}$$

donde $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Sea $m \geq 0$. El **morfismo degeneración** es la función $\eta_m^i\colon [m+1] \to [m]$ definida por

$$\eta_m^i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq i, \\ k-1 & \text{si } k > i, \end{cases}$$

donde $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Cada morfismo en la categoría Δ se puede descomponer de manera única como una composición finita de morfismos cara y morfismos degeneración (ver [10, sección 1.2]).

Definición 3.4.1. Un **conjunto simplicial** es un funtor contravariante $X\colon \Delta \to$ **Conj**, es decir, es una familia de conjuntos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y funciones $X(f)\colon X_n \to X_m$, una para cada morfismo $f\colon [m] \to [n]$ de la categoría Δ, tal que

1. $X(Id_{[m]}) = Id_{X_m}$,

2. $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$.

Definición 3.4.2. Sean X, Y conjuntos simpliciales. Un **morfismo simplicial** $\varphi\colon X \to Y$ es una familia de funciones $\{\varphi_n\colon X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Y(f)\circ\varphi_n = \varphi_m \circ X(f)$ para cada morfismo $f\colon [m] \to [n]$ de la categoría Δ.

El n-**simplejo geométrico** es el subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\Delta_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

El i-ésimo vértice del n-simplejo Δ_n es el punto

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

donde 1 aparece en la i-ésima componenete.

A cada cada morfismo $f\colon [m] \to [n]$ de la categoría Δ le asociamos una transformación lineal $T_f\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $T(e_i) = e_{f(i)}$. La f-**ésima cara** es la función $\Delta_f\colon \Delta_m \to \Delta_n$ definida por $\Delta_f(x) = T_f(x)$.

Definición 3.4.3. La relización geométrica de un conjunto simplicial X es el espacio topológico

$$|X| = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n)/\sim,$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está definida de la siguiente manera: Sean $(r, x) \in \Delta_n \times X_n$, $(s, y) \in \Delta_m \times X_m$; $(r, x) \sim (s, y)$ si y sólo si, existe una función no decreciente $f\colon [m] \to [n]$ tal que

$$X(f)(x) = y,\ \Delta_f(s) = r.$$

Consideremos a X_n con la topología discreta. La topología sobre $|X|$ es la topología más débil para la cual la proyección

$$\pi\colon \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \to |X|$$

es una función continua.

Se puede demostrar que la realización geométrica de un conjunto simplicial X es un complejo CW (ver [6, proposición 2.3]). A continuación vamos a dar una descripción de la (co)homología de un conjunto simplicial, podemos encontrar más información de este tema en [5].

Sea X un conjunto simplicial y sea M cualquier grupo conmutativo. Para $n \geq 0$ definimos $C_n(X, M)$ como el conjunto de todas las sumas formales

$$\sum_{x \in X_n} \alpha_x x,$$

donde la suma corre sobre todos los $x \in X_n$, los coeficientes están en M y casi todos son cero; $C_n(X, M)$ forma un grupo conmutativo con la suma definida por

$$\sum_{x \in X_n} \alpha_x x + \sum_{x \in X_n} \beta_x x = \sum_{x \in X_n} (\alpha_x + \beta_x) x.$$

En el caso $M = \mathbb{Z}$, tenemos que $C_n(X, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre con base X_n. Escribiremos $C_n(X)$ en lugar de $C_n(X, \mathbb{Z})$.

Definimos $C^n(X, M)$ como el producto directo de la familia $\{M_x\}_{x \in X_n}$, donde $M_x = M$ para toda $x \in X_n$, es decir, $C^n(X, M) = \prod_{x \in X_n} M_x$.

Se puede demostrar que

$$\begin{array}{rcl} C_n(X, M) & \cong & C_n(X) \bigotimes_{\mathbb{Z}} M, \\ C^n(X, M) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), M). \end{array}$$

Para $n < 0$, definimos $C_n(X, M) = 0$ y $C^n(X, M) = 0$.

Consideremos el morfismo cara $\partial_n^i \colon [n-1] \to [n]$ de la categoría Δ. Para $n \geq 1$ el operador frontera $\partial_n \colon C_n(X, M) \to C_{n-1}(X, M)$ está definido por

$$\partial_n\Big(\sum_{x \in X_n} \alpha_x x \Big) = \sum_{x \in X_n} \alpha_x \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X(\partial_n^i)(x);$$

si $n < 1$, $\partial_n = 0$.

Para $n \geq 0$ el operador cofrontera $\delta^n \colon C^n(X, M) \to C^{n+1}(X, M)$ se define por

$$(\delta^n f)(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f\big(X(\partial_{n+1}^i)(x)\big);$$

si $n < 0$, $\delta^n = 0$.

Definición 3.4.4. Sea M cualquier grupo conmutativo. La **(co)homología de un conjunto simplicial** X **con coeficientes en** M se define por

$$\mathrm{H}_n(X, M) = \mathrm{H}_n(C_*(X, M)),$$
$$\mathrm{H}^n(X, M) = \mathrm{H}^n(C^*(X, M)).$$

3.5. Acciones de grupos en espacios topológicos

Definición 3.5.1. Sea G un grupo. Decimos que G es un **grupo topológico** si G es un espacio topológico y las funciones

$$\begin{aligned}\mu &: G \times G \to G,\\ \nu &: G \to G,\end{aligned}$$

definidas por $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ y $\nu(g) = g^{-1}$ son continuas.

Definición 3.5.2. Sea G un grupo topológico. Un G**-espacio izquierdo** es un espacio topológico X junto con una función continua $\kappa\colon G \times X \to X$ (escribiremos gx en lugar de $\kappa(g, x)$), tal que para toda $x \in M$ y para todos $g_1, g_2 \in G$ los siguientes axiomas se cumplen:

1. $ex = x$, donde $e \in G$ es la identidad.
2. $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$.

Definición 3.5.3. Sea G un grupo topológico. Un G**-espacio derecho** es un espacio topológico X junto con una función continua $\kappa\colon X \times G \to X$ (escribieremos xg en lugar de $\kappa(x, g)$), la cual satisface dos axiomas que son análogos a los de la definición anterior.

A la función κ le llamaremos **acción de** G **sobre** X. Si no hace falta especificar, diremos que X es un G**-espacio** en lugar de decir que es un G-espacio izquierdo o derecho.

Sea X un G-espacio y sea $x \in X$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}G_x &= \{g \in G \mid gx = x\},\\ O_x &= \{gx \mid g \in G\}.\end{aligned}$$

A G_x se le llama **estabilizador o subgrupo de isotropía de** x; a O_x se le llama **órbita de** X. Es fácil demostrar que G_x es un subgrupo de G. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ sobre X de la siguiente manera: $x \sim y$ si y sólo si, existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Para cada $x \in X$, la clase de equivalencia de x coincide con su órbita; así el conjunto de todas las órbitas, denotado por X/G, forma una partición de X, por lo tanto la proyección $\pi\colon X \to X/G$ induce la topología cociente sobre X/G. El conjunto X/G con la topología cociente es llamado **espacio de órbitas** del G-espacio X.

Decimos que la acción de G sobre X es **trivial** si $gx = x$ para toda $x \in X$ y para toda $g \in G$. Decimos que la acción es **transitiva** si X/G tiene un sólo punto.

Definición 3.5.4. Sea X un G-espacio. Decimos que X es un G-**conjunto** si G y X tienen la topología discreta.

Definición 3.5.5. Sea X un G-espacio y sea Y un subespacio de X. Decimos que Y es un G-**subespacio** o que es G-**invariante** si $gy \in Y$ para toda $y \in Y$ y para toda $g \in G$.

Notemos que si Y es un G-subespacio de X, esntonces Y es la unión de órbitas de elementos de X.

Definición 3.5.6. Sean X y Y G-espacios y sea $f\colon X \to Y$ una función. Decimos que f es G-**equivariante** si $f(gx) = gf(x)$ para toda $x \in X$ y para toda $g \in G$. Decimos que f es una G-**función continua** si f es continua y también es G-equivariante. Decimos que f es un G-**homeomorfismo** si f es un homeomorfismo y es G-equivariante.

Proposición 3.5.7. *Sea $f\colon X \to Y$ G-equivariante. Si $x \in X$, entonces*

1. $G_x \subset G_{f(x)}$,
2. $f(O_x) \subset O_{f(x)}$.

Demostración.
1. Sea $g \in G_x$, es decir, $gx = x$. Como f es G-equivariante, entonces $gf(x) = f(gx) = f(x)$, lo que implica que $g \in G_{f(x)}$. Así $G_x \subset G_{f(x)}$.
2. Sea $y \in O_x$, es decir, $y = gx$ para alguna $g \in G$. Como f es G-equivariante, entonces $f(y) = f(gx) = gf(x)$, por lo tanto $f(y) \in O_x$. Así $f(O_x) \subset O_{f(x)}$. ■

Proposición 3.5.8. *Sea $f\colon X \to Y$ una G-función continua. Entonces f induce una función continua $f/G\colon X/G \to Y/G$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/G \arrow[r, "f/G"] & Y/G \end{tikzcd}$$

conmuta, donde π y π' son las proyecciones.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\pi\circ f"] & \\ X/G \arrow[r, dashed] & Y/G \end{tikzcd}$$

Por la proposición anterior tenemos que $f(O_x) \subset O_{f(x)}$, luego $O_{f(y)} = O_{f(x)}$ para toda $y \in O_x$, o escrito de otra forma tenemos que $\pi' \circ f(y) = \pi' \circ f(x)$ para toda $y \in O_x$. Así la función $(\pi' \circ f)|_{O_x}$ es constante para cada $O_x \in X/G$. Por la proposición 3.1.2 se sigue que existe una única función continua $f/G \colon X/G \to Y/G$ tal que $f/G \circ \pi = \pi' \circ f$. ■

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de G-espacios topológicos y consideremos a $\prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto. Sean $f \in \prod_{i\in I} X_i$, $g \in G$. Como cada X_i es un G-espacio, entonces la función $(gf)\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ definida por $(gf)(j) = gf(j)$ es un elemento de $\prod_{i\in I} X_i$. La función $\kappa\colon G \times \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_i$ definida por $\kappa(g, f) = (gf)$ es continua y satisface los axiomas de la definición 3.5.2; así $\prod_{i\in I} X_i$ junto con la acción κ forman un G-espacio. La acción κ es llamada **acción diagonal**.

Definición 3.5.9. Consideremos el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ como un G-espacio, donde G actúa trivialmente sobre I.

Sean $f_0, f_1 \colon X \to Y$ G-funciones continuas. Decimos que f_0 y f_1 son **G-homotópicas** y lo denotamos por $f_0 \simeq_G f_1$ si existe una G-función continua

$$F\colon X \times I \to Y$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$ para toda $x \in X$; aquí $X \times I$ tiene la acción diagonal. A la función F le llamaremos **G-homotopía** de f_0 a f_1.

La relación $\simeq_G$ es una relación de equivalencia. Denotamos por $[X, Y]_G$ al conjunto de todas las clases de G-homotopía de G-funciones continuas de X en Y.

3.6. Espacios clasificantes para familias de subgrupos

En la sección 3.3 definimos los complejos CW. En la literatura podemos encontrar otro tipo de espacios llamados **complejos CW equivariantes** o G-**complejos CW**, estos son G-espacios que se construyen adjuntando n-células equivariantes.

Un grupo topológico G es un **grupo discreto** si G tiene la topología discreta. En el caso particular en que G es un grupo discreto tenemos una relación entre los complejos CW ordinarios y los G-complejos CW.

Definición 3.6.1. Sea G un grupo discreto y sea X un G-espacio y un complejo CW. Decimos que G **actúa celularmente** sobre X si cumple lo siguiente:

I. Para cada $g \in G$ y para cada célula abierta σ de X, la traslación $g\sigma$ es nuevamente una célula abierta de X.

II. Si $g\sigma = \sigma$, entonces la traslación $L_g \colon \sigma \to \sigma$ definida por la correspondencia $x \mapsto gx$ es la identidad.

En [13, proposición 1.15] se demuestra que si G es un grupo discreto y X es un complejo CW tal que G actúa celularmente sobre X, entonces X es un G-complejo CW. En esta sección y en los siguientes capítulos le llamaremos G-**complejo CW** a cualquier complejo CW junto con una acción continua y celular de G sobre este espacio.

Sean X y Y G-complejos CW y sea $f \colon X \to Y$ una G-función continua. Decimos que f **es celular** si $f(X_n) \subset Y_n$ para cada n-esqueleto X_n y Y_n. Uno de los resultados más importantes en la teoría de G-complejos CW es el siguiente.

Teorema 3.6.2. *Sea $f \colon X \to Y$ una G-función continua. Entonces existe una G-homotopía $H \colon X \times I \to Y$ tal que $H_0 = f$ y H_1 es celular.*

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [13, teorema 2.1]. ■

Sea G un grupo discreto. Una **familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de** G es un conjunto de subgrupos de G que es cerrado bajo la conjugación y tomando subgrupos. Sea $\{H_i\}_{i\in I}$ un conjunto de subgrupos de G, denotamos por $\mathcal{F}(\{H_i\}_{i\in I})$ a la familia que consiste de todos los subgrupos de elementos de

$\{H_i\}_{i\in I}$ y de todos los conjugados por elementos de G, a esta familia le llamaremos **familia generada por** $\{H_i\}_{i\in I}$. En el caso en que H es un subgrupo de G, la **familia** $\mathcal{F}(H)$ **generada por** H consiste de todos los subgrupos de H y de sus conjugados por elementos de G.

Definición 3.6.3. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G. Un **modelo para el espacio clasificante de la familia** $\mathcal{F}$, denotado por $E_{\mathcal{F}}(G)$, es un G-complejo CW que satisface las siguientes propiedades:

I. Todos los grupos de isotropía de $E_{\mathcal{F}}(G)$ pertenecen a la familia $\mathcal{F}$.

II. Si Y es un G-complejo CW cuyos grupos de isotropía pertenecen a $\mathcal{F}$, entonces existe una G-función continua $\Phi\colon Y \to E_{\mathcal{F}}(G)$; además Φ es única salvo G-homotopía.

Con las siguientes dos proposiciones daremos a conocer un modelo para el espacio clasificante de cualquier familia de subgrupos $\mathcal{F}$.

Sea X un G-conjunto y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los subgrupos de G que fijan al menos un punto de X. Es fácil demostrar que $\mathcal{D}$ es una familia de subgrupos de G, y que $\mathcal{D}$ coincide con la familia generada por los subgrupos de isotropía $\{G_x\}_{x\in X}$.

Proposición 3.6.4. *Dada una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G, existe un G-conjunto $X_{\mathcal{F}}$ tal que la familia $\mathcal{F}$ coincide con el conjunto de subgrupos de G que fijan al menos un punto de $X_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Sea $\{H_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$ cualquier conjunto de subgrupos de G tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(H_i)$. Tomemos el G-conjunto

$$X_{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{i\in I} G/H_i,$$

y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de subgrupos de G que fijan almenos un punto de $X_{\mathcal{F}}$.

Si $H \in \{H_i\}_{i\in I}$, entonces $eH \in G/H$ ($e \in G$ es la identidad) es un elemento de $X_{\mathcal{F}}$ que queda fijo bajo la acción de H, luego $H \in \mathcal{D}$. Así $\{H_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ es una familia de subgrupos, entonces $\mathcal{F}(H_i) \subset \mathcal{D}$.

Sea $K \in \mathcal{D}$, es decir, existen $H \in \{H_i\}_{i\in I}$ y $gH \in G/H \subset X_{\mathcal{F}}$ tal que $(kg)H = gH$ para toda $k \in K$, pero esto ocurre si y sólo si $g^{-1}kg \in H$ para toda $k \in K$, si y sólo si $g^{-1}Kg$ es un subgrupo de H; por lo tanto $K \in \mathcal{F}(H_i)$. Se concluye que $\mathcal{F}(H_i) = \mathcal{D}$. ■

Proposición 3.6.5. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G y sea $X_{\mathcal{F}}$ como en la proposición anterior. Un modelo para el espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}$ es la realización geométrica Y del conjunto simplicial cuyos n-simplejos son $(n+1)$-uplas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de $X_{\mathcal{F}}$. Los operadores cara están dados por*

$$\partial_n^i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n),$$

donde $\widehat{x}_i$ significa que se omitió x_i. Los operadores degeneración están definidos por

$$\eta_n^i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n).$$

La acción de G sobre un n-simplejo está dada por

$$g(x_0, \ldots, x_n) = (gx_0, \ldots, gx_n).$$

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [2, proposición 4.16]. ■

A este modelo le llamaremos **modelo simplicial** para el espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}$.

Es fácil ver que si $E_{\mathcal{F}}(G)$ y $E'_{\mathcal{F}}(G)$ son dos modelos para el espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}$, entonces $E_{\mathcal{F}}(G)$ y $E'_{\mathcal{F}}(G)$ son G-homotópicamente equivalentes.

Definición 3.6.6. Sea $E_{\mathcal{F}}(G)$ un modelo para el espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}$. Al espacio $E_{\mathcal{F}}(G)$ también se le llama **espacio universal de la familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de** G. El espacio de órbitas $E_{\mathcal{F}}(G)/G$ lo vamos a denotar por $B_{\mathcal{F}}(G)$ y le llamaremos **espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de** G.

En el caso en que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{e\})$, donde $\{e\}$ es el subgrupo trivial de G, denotamos por EG al espacio universal y por BG al espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}(\{e\})$.

Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son dos familias de subgrupos de G, tales que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, entonces por la definición 3.6.3 existe una G-función continua (única salvo G-homotopía) $\Phi\colon E_{\mathcal{F}_1}(G) \to E_{\mathcal{F}_2}(G)$, luego por la proposición 3.5.8 tenemos que Φ induce una funcion continua $\Phi/G\colon B_{\mathcal{F}_1}(G) \to B_{\mathcal{F}_2}(G)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E_{\mathcal{F}_1}(G) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & E_{\mathcal{F}_2}(G) \arrow[d, "\pi'"] \\ B_{\mathcal{F}_1}(G) \arrow[r, "\Phi/G"] & B_{\mathcal{F}_2}(G), \end{tikzcd}$$

donde π y π' son las proyecciones.

Sea M un grupo conmutativo. En los siguientes capítulos será de gran importancia calcular la (co)homología del espacio $B_{\mathcal{F}}(G)$ con coeficientes M, para esto tenemos el siguiente precedimiento.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G y sea $X_{\mathcal{F}}$ un G-conjunto como en la proposición 3.6.4. Para cada $n \geq 0$ tenemos que G actúa sobre $X_{\mathcal{F}}^{n+1}$ de la siguiente manera:

$$g(x_0, \ldots, x_n) = (gx_0, \ldots, gx_n).$$

Sea W la realización geométrica del conjunto simplicial cuyos n-simplejos son el conjunto de órbitas $X_{\mathcal{F}}^{n+1}/G$, es decir, cada n-simplejo es una clase de equivalencia, la cual vamos a denotar por

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Los operadores cara están dados por

$$\overline{\partial_n^i}\big([x_0, \ldots, x_n]\big) = [x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n],$$

donde $\widehat{x}_i$ significa que se omitió x_i. Los operadores degeneración están definidos por

$$\overline{\eta_n^i}\big([x_0, \ldots, x_n]\big) = [x_0, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n].$$

Notemos que en la proposición 3.6.5 los operadores cara y degeneración son G-equivariantes, luego por la proposición 3.5.8 tenemos que $\overline{\partial_n^i}$ y $\overline{\eta_n^i}$ están bien definidos.

El espacio $B_{\mathcal{F}}(G)$ es homotópicamente equivalente a W, por lo tanto calcular la (co)homología del espacio $B_{\mathcal{F}}(G)$ es lo mismo que calcular la (co)homología de W. En la sección 3.4 dimos una descripción de la (co)homología de un conjunto simplicial, así tenemos la siguiente definición.

Definición 3.6.7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G y sea $X_{\mathcal{F}}$ como en la proposición 3.6.4. Vamos a definir un complejo de cadenas positivo:

$$\cdots \longrightarrow C_n(B_{\mathcal{F}}(G)) \xrightarrow{\overline{\partial}_n} C_{n-1}(B_{\mathcal{F}}(G)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(B_{\mathcal{F}}(G)) \longrightarrow 0.$$

Sea $C_n(B_{\mathcal{F}}(G))$ el grupo abeliano libre con base $X_{\mathcal{F}}^{n+1}/G$. El operador frontera está definido por

$$\overline{\partial}_n\big([x_0,\ldots,x_n]\big) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[x_0,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_n],$$

donde $\widehat{x}_i$ significa que se omitió x_i.

Sea M cualquier grupo conmutativo. La **(co)homología del espacio** $B_{\mathcal{F}}(G)$ **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(B_{\mathcal{F}}(G),M) &= \mathrm{H}_n\left(C_*(B_{\mathcal{F}}(G))\bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} M\right),\\ \mathrm{H}^n(B_{\mathcal{F}}(G),M) &= \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(C_*(B_{\mathcal{F}}(G)),M\right)\right).\end{aligned}$$

Capítulo 4

(Co)homología de grupos

En este capítulo daremos varias definiciones de la (co)homología de un grupo G: la primer definición tiene un enfoque de álgebra homológica; la segunda se basa en una construcción algebraica de un complejo de cadenas al cual se le conoce como complejo estándar de G; la tercer definición relaciona el complejo estándar de G con un funtor covariante al cual le llamaremos funtor de coinvariantes, además esta definición tiene una interpretación topológica, es decir, que la (co)homología de un grupo G es la (co)homología de un tipo de espacio topológico denotado por $K(G,1)$.

4.1. G-módulos

Definición 4.1.1. Sea G un grupo. Un G**-módulo izquierdo** es un grupo conmutativo M junto con una función $\kappa\colon G \times M \to M$ $\big($escribiremos gx en lugar de $\kappa(g,x)\big)$, tal que para todos $x, y \in M$ y para todos $g, g' \in G$ los siguientes axiomas se cumplen:

I. $ex = x$, donde $e \in G$ es la identidad.

II. $g(g'x) = (gg')x$.

III. $g(x+y) = gx + gy$.

En otras palabras, un G-módulo izquierdo es un grupo conmutativo M junto con una acción izquierda de G sobre M tal que la acción es distributiva respecto a la suma de M.

De manera análoga se definen los G-módulos derechos. Dado un G-módulo izquierdo M definimos una acción derecha de G sobre M de la siguiente manera:

$$xg = g^{-1}x.$$

Con esta acción tenemos que M es un G-módulo derecho. Así cada G-módulo izquierdo es también un G-módulo derecho.

Si no hace falta especificar, diremos que M es un G-**módulo** en lugar de decir que es un G-módulo izquierdo o derecho.

Sea M un grupo conmutativo. El conjunto

$$\mathrm{Aut}(M) = \{f\colon M \to M \mid f \text{ es isomorfismo de grupos}\}$$

forma un grupo con la composición de funciones. Si tenemos un homomorfismo de grupos $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(M)$, entonces la función $\kappa\colon G \times M \to M$ definida por $\kappa(g,x) = \varphi(g)(x)$ satisface los axiomas de la definición 4.1.1, por lo tanto M junto con la acción κ forman un G-módulo izquierdo.

Por otro lado, si M es un G-módulo izquierdo y $g \in G$, entonces la función $L_g\colon M \to M$ definida por $L_g(x) = gx$ es un isomorfismo de grupos con inversa $L_{g^{-1}}$. Por las propiedades de M como un G-módulo izquierdo tenemos que para todos $g, g' \in G$, $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$; así la función $\psi\colon G \to \mathrm{Aut}(M)$ definida por $\psi(g) = L_g$ es un homomorfismo de grupos.

Por lo anterior tenemos una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\{\kappa\colon G \times M \to M \mid \kappa \text{ satisface los axiomas de la definición 4.1.1 }\}$ y el conjunto $\{\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(M) \mid \varphi \text{ es homomorfismo de grupos}\}$.

Así tenemos una definición equivalente para un G-módulo izquierdo.

Definición 4.1.2. Sea G un grupo. Un G-**módulo izquierdo** es un grupo conmutativo M junto con un homomorfismo de grupos $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(M)$.

Definición 4.1.3. Sea $G = \{g_i\}_{i\in I}$ un grupo. El **anillo del grupo** G **sobre** $\mathbb{Z}$, denotado por $\mathbb{Z}[G]$, es el conjunto de todas las sumas formales

$$\sum_{i\in I} n_i g_i,$$

donde $g_i \in G$, $n_i \in \mathbb{Z}$ y $n_i = 0$ para casi toda $i \in I$, junto con dos operaciones:

$$+\colon \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G],$$
$$\cdot\colon \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G],$$

definidas por

$$\Big(\sum_{i\in I} m_i g_i\Big) + \Big(\sum_{i\in I} n_i g_i\Big) = \sum_{i\in I}(m_i+n_i)g_i,$$

$$\Big(\sum_{i\in I} m_i g_i\Big) \cdot \Big(\sum_{i\in I} n_i g_i\Big) = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{g_j g_k = g_i} m_j n_k\Big)g_i.$$

Es claro que $\mathbb{Z}[G]$ forma un anillo con estas operaciones. Denotamos por g_j al elemento $\sum_{i\in I} n_i g_i$, donde $n_i = 0$ para toda $i \neq j$ y $n_j = 1$; así el anillo $\mathbb{Z}[G]$ contiene a G. La identidad $e \in G$ es también el elemento unitario de $\mathbb{Z}[G]$. En general $\mathbb{Z}[G]$ no es conmutativo; se cumple que si G es un grupo conmutativo, entonces $\mathbb{Z}[G]$ es un anillo conmutativo.

Si M es un G-módulo izquierdo, entonces la función $\mu\colon \mathbb{Z}[G]\times M \to M$ definida por

$$\mu\Big(\sum_{i\in I} n_i g_i, x\Big) = \sum_{i\in I} n_i(g_i x)$$

satisface los axiomas de la definición 1.1.1, por lo tanto M junto con la multiplicación escalar μ forman un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo.

Por otro lado, si M es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo con multiplicación escalar μ, entones la restricción $\kappa = \mu|_{G\times M}\colon G\times M \to M$ satisface los axiomas de la definición 4.1.1, luego M junto con la acción κ forman un G-módulo izquierdo.

Por lo anterior tenemos una correpondencia biyectiva entre el conjunto $\{\mu\colon \mathbb{Z}[G]\times M \to M \mid \ \mu$ satisface los axiomas de la definición 1.1.1 $\}$ y el conjunto $\{\kappa\colon G\times M \to M \mid \ \kappa$ satisface los axiomas de la definición 4.1.1 $\}$.

Sabemos que cada G-módulo izquierdo M es también un G-módulo derecho con la acción definida por $xg = g^{-1}x$, luego M es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo derecho con la multiplicación escalar $\mu\colon M\times\mathbb{Z}[G]\to M$ definida por

$$\mu\Big(x, \sum_{i\in I} n_i g_i\Big) = \sum_{i\in I} n_i(g_i^{-1}x).$$

De aquí en adelante diremos que M es un G-módulo en lugar de decir que M es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo o derecho.

Si M y N son G-módulos siempre podemos definir su producto tensorial $M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N$, además se cumplen las relaciones

$$(gx)\otimes y = (xg^{-1})\otimes y = x\otimes(g^{-1}y) = x\otimes(yg),$$

luego si sustituimos gy en lugar de y obtenemos $x \otimes y = (gx) \otimes (gy)$.

La función $\varphi\colon M \times N \to N \times M$ definida por $\varphi(x, y) = (y, x)$ es biyectiva. Sea U un grupo conmutativo. Si $f\colon N \times M \to U$ es una función $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva (ver definición 1.8.3), entonces $f \circ \varphi\colon M \times N \to U$ es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva ya que

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(xg, y) &= f(y, xg) \\ &= f(y, g^{-1}x) \\ &= f(yg^{-1}, x) \\ &= f(gy, x) \\ &= f \circ \varphi(x, gy). \end{aligned}$$

De manera análoga, si $f'\colon M \times N \to U$ es un función $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva, entonces $f' \circ \varphi^{-1}\colon N \times M \to U$ es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva.

Proposición 4.1.4 (Conmutatividad)**.** *Sean M y N G-módulos. Entonces*

$$M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M.$$

Demostración. Tenemos los productos tensoriales $(M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N, \kappa)$ y $(N \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M, \kappa')$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\varphi"] & M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \arrow[d, dashed] \\ N \times M \arrow[r, "\kappa'"] & N \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M. \end{tikzcd}$$

Las funciones $\kappa' \circ \varphi$ y $\kappa \circ \varphi^{-1}$ son $\mathbb{Z}[G]$-biaditivas, luego por la definición 1.8.4 de producto tensorial existen homomorfismos de grupos

$$\begin{aligned} \Phi\colon M \textstyle\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \to N \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M, \\ \Psi\colon N \textstyle\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \to M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N, \end{aligned}$$

definidos por

$$\begin{aligned} \Phi(x \otimes y) = y \otimes x, \\ \Psi(y \otimes x) = x \otimes y. \end{aligned}$$

Vemos que Ψ es la inversa de Φ, por lo tanto $M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M$. ■

Definición 4.1.5. Sea M un G-módulo. Decimos que M es un G-**módulo trivial** si $gx = x$ para toda $x \in M$ y para toda $g \in G$.

Notemos que si M es un G-módulo trivial, entonces, para toda $x \in M$ y para toda $\sum_{i\in I} n_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$

$$\Big(\sum_{i\in I} n_i g_i\Big)x = \Big(\sum_{i\in I} n_i\Big)x.$$

Sean M y N G-módulos triviales y sea U un grupo conmutativo. Si $f\colon M \times N \to U$ es una función $\mathbb{Z}$-biaditiva (ver definición 1.8.3), entonces f es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva ya que

$$f(xg, y) = f(x, y) = f(x, gy).$$

Por otro lado, cada función $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva es $\mathbb{Z}$-biaditiva.

Proposición 4.1.6. *Sean M y N G-módulos triviales. Entonces*

1. $M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong M \bigotimes_{\mathbb{Z}} N$.

2. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$.

Demostración.
1. Tenemos los productos tensoriales $(M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N, \kappa)$ y $(M \bigotimes_{\mathbb{Z}} N, \kappa')$, donde κ es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva y κ' es $\mathbb{Z}$-biaditiva. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\kappa'"'] & M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \arrow[d, dashed] \\
& M \bigotimes_{\mathbb{Z}} N
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $x \otimes y$ los generadores de $M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ y por $x \otimes_{\mathbb{Z}} y$ los generadores de $M \bigotimes_{\mathbb{Z}} N$.

Como M y N son G-módulos triviales se cumple que cada función $f\colon M \times N \to U$ $\mathbb{Z}$-biaditiva es en realidad $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva. Así κ' es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva. Por la definición 1.8.4 de producto tensorial existen homomorfismos de grupos

$$\begin{aligned}
\Phi &\colon M \textstyle\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \to M \bigotimes_{\mathbb{Z}} N,\\
\Psi &\colon M \textstyle\bigotimes_{\mathbb{Z}} N \to M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N,
\end{aligned}$$

definidos por

$$\begin{aligned}
\Phi(x \otimes y) &= x \otimes_{\mathbb{Z}} y,\\
\Psi(x \otimes_{\mathbb{Z}} y) &= x \otimes y.
\end{aligned}$$

Vemos que Ψ es la inversa de Φ, luego $M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong M \bigotimes_{\mathbb{Z}} N$.

2. Tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M,N) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$. Como M y N son G-módulos triviales, entonces $f(gx) = f(x) = gf(x)$ para toda $x \in X$ y para toda $g \in G$, por lo tanto $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M,N)$. ■

Cada $\mathbb{Z}$-módulo M es un G-módulo trivial. De aquí en adelante vamos a considerar a $\mathbb{Z}$ como un G-módulo trivial.

Sabemos que cada G-módulo izquierdo es también un G-módulo derecho con la acción definida por $xg = g^{-1}x$. En general M no es un $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}[G])$-bimódulo (ver definición 1.8.2) ya que

$$(g_1x)g_2 = g_2^{-1}(g_1x) = (g_2^{-1}g_1)x,$$

y por otro lado

$$g_1(xg_2) = g_1(g_2^{-1}x) = (g_1g_2^{-1})x.$$

En el caso en que G es conmutativo o M es un G-módulo trivial tenemos que M es un $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}[G])$-bimódulo.

Proposición 4.1.7 (Asociatividad)**.** *Sean M, N, y P G-módulos. Si G es conmutativo o N es un G-módulo trivial, entonces*

$$M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \left(N \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} P\right) \cong \left(M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N\right) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} P.$$

La demostración la podemos encontrar de una forma más general en [11, proposición 2.57].

4.2. (Co)invariantes

Definición 4.2.1. Sean G un grupo, H un subgrupo de G, y sea M un G-módulo. Vamos a denotar por $< M, H >$ al subgrupo de M generado por todos los elementos de la forma $x - hx$, donde $x \in M$, $h \in H$. El **grupo de coinvariantes de M sobre H**, es el grupo cociente

$$M_H = M / < M, H > .$$

El **subgrupo de invariantes de M sobre H** está definido por

$$M^H = \{x \in X \mid hx = x \text{ para toda } h \in H\}.$$

Es fácil demostrar que M^H es un subgrupo de M. La siguiente proposición relaciona los subgrupos de G con los subgrupos de M.

Proposición 4.2.2. *Sea M un G-módulo. Si K y H son subgrupos de G tales que $K \subset H$, entonces*

1. $< M, K > \subset < M, H >$.
2. $M^H \subset M^K$.

Demostración. 1. Es inmediato.

2. Si $x \in M^H$, entonces $hx = x$ para toda $h \in H$. Como $K \subset H$, entonces $hx = x$ para toda $h \in K$, por lo tanto $x \in M^K$. ■

La siguiente proposición demuestra que si H es un subgrupo normal de G, entonces M_H y M^H son G-módulos.

Proposición 4.2.3. *Sea M un G-módulo. Si H es un subgrupo normal de G, entonces $< M, H >$ y M^H son submódulos de M.*

Demostración. Basta con demostar que $< M, H >$ y M^H son cerrados bajo la multiplicación escalar de M.

Sea $G = \{g_i\}_{i \in I}$ y sea $\alpha = \sum_{i \in I} n_i g_i \in \mathbb{Z}[G]$. Si $(x - hx) \in < M, H >$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(x - hx) &= \sum_{i \in I} n_i(g_i x - g_i h x) \\ &= \sum_{i \in I} n_i(g_i x - h_i g_i x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

La igualdad (4.1) la obtenemos a partir de que H es un subgrupo normal de G. Como cada $(g_i x - h_i g_i x)$ pertenece a $< M, H >$, entonces $\sum_{i \in I} n_i(g_i x - h_i g_i x) \in < M, H >$. Así $< M, H >$ es un submódulo de M.

Si $x \in M^H$, $h \in H$, entonces

$$\begin{aligned} h(\alpha x) &= \sum_{i \in I} n_i(h g_i x) \\ &= \sum_{i \in I} n_i(g_i h_i x) \\ &= \sum_{i \in I} n_i(g_i x) \\ &= \alpha x. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La igualdad (4.2) la obtenemos a partir de que H es un subgrupo normal de G. Así M^H es un submódulo de M. ■

Notemos que si M es un G-módulo y H es un subgrupo normal de G, entonces M_H y M^H son G-módulos tales que H actúa trivialmente sobre M_H y M^H, y por lo tanto son G/H-módulos.

Proposición 4.2.4. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de G-módulos y sea H un subgrupo de G. Entonces las restricciones*

$$\begin{array}{l} f|_{<M,H>}\colon < M,H > \longrightarrow < N,H >, \\ f|_{M^H}\colon M^H \to N^H \end{array}$$

son homomorfismos de grupos.

Demostración. Sólo vamos a demostrar que $f|_{<M,H>}$ y $f|_{M^H}$ están bien definidos.

Sea $(x - hx) \in < M, X >$. Como f es un homomorfismo de G-módulos, entonces $f(x - hx) = f(x) - hf(x) \in < N, H >$. Así $f|_{<M,H>}$ está bien definido.

Sea $x \in M^H$, es decir, $hx = x$ para toda $h \in H$. Como f es un homomorfismo de G-módulos, entonces $hf(x) = f(hx) = f(x)$ para toda $h \in H$, lo que implica que $f(x) \in N^H$. Así $f|_{M^H}$ está bien definido. ■

Definición 4.2.5. Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de G-módulos y sea H un subgrupo de G. Definimos los siguientes homomorfismos de grupos:

$$f_H\colon M_H \to N_H$$

está definido por $f_H(x+ < M, H >) = f(x)+ < N, H >$;

$$f^H\colon M^H \to N^H$$

es la restricción $f^H = f|_{M^H}$.

Por la proposición anterior y por el teorema 1.3.3 tenemos que f_H y f^H están bien definidos; además si H es un subgrupo normal de G, entonces f_H y f^H son homomorfismos de G-módulos.

La categoría de los G-módulos la vamos a denotar por ${}_G\mathbf{Mod}$. Para cada H subgrupo de G tenemos los siguientes funtores covariantes:

El **funtor de coinvariantes** $F_H\colon {}_G\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} M & \longmapsto & M_H, \\ (f\colon M \to N) & \longmapsto & (f_H\colon M_H \to N_H). \end{array}$$

El **funtor de invariantes** $F^H\colon {}_G\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ está definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} M & \longmapsto & M^H, \\ (f\colon M \to N) & \longmapsto & (f^H\colon M^H \to N^H). \end{array}$$

4.3. Algunos resultados importantes

Lema 4.3.1. *Sea M un G-módulo y consideremos a $\mathbb{Z}$ como un G-módulo trivial. Entonces*

1. $M_G \cong \mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M$.

2. $M^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

Demostración.

1. La función $\kappa\colon \mathbb{Z}\times M \to M_G$ definida por $\kappa(n,x) = \overline{nx}$ es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva (ver definición 1.8.3). Sea U un grupo conmutativo. Si $f\colon \mathbb{Z}\times M \to U$ es una función $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva, entonces la función $\Phi\colon M_G \to U$ definida por $\Phi(\overline{x}) = f(1,x)$ es el único homomorfismo de grupos tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times M \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "f"'] & M_G \arrow[d, "\Phi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

conmuta. Así (M_G,κ) satisface la definición 1.8.4 de producto tensorial, luego el producto tensorial de $\mathbb{Z}$ y M es único salvo isomorfismo, por lo tanto $M_G \cong \mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M$.

2. Tenemos que $\mathbb{Z}$ (como G-módulo trivial) es generado por 1, entonces cada homomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ está determinado por $f(1)$. Como $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial, entonces $f(1) = f(g\cdot 1) = gf(1)$ para toda $g \in G$. La función $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \to M^G$ definida por $\Psi(f) = f(1)$ es un isomorfismo de grupos. ■

Observación 4.3.2. En el lema anterior, la función $\Phi\colon \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \to M_G$ definida por $\Phi(n\otimes x) = \overline{nx}$ es un isomorfismo de grupos.

Lema 4.3.3. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de G-módulos. Entonces los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[r, "Id\otimes f"] \arrow[d, "\Phi_1"] & \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \arrow[d, "\Phi_2"] \\
M_G \arrow[r, "f_G"] & N_G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Psi_1"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) \arrow[d, "\Psi_2"] \\
M^G \arrow[r, "f^G"] & N^G
\end{tikzcd}$$

Aquí Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2 son isomorfismos de grupos definidos como en el lema anterior.

Demostración. Sea $n \otimes x \in \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_2 \circ (Id \otimes f)(n \otimes x) &= \Phi_2\big(n \otimes f(x)\big) \\
&= \overline{nf(x)} \\
&= \overline{f(nx)} \\
&= f_G\big(\overline{nx}\big) \\
&= f_G \circ \Phi_1(n \otimes x).
\end{aligned}$$

Sea $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Psi_2 \circ f_*(\sigma) &= \Psi_2(f \circ \sigma) \\
&= f \circ \sigma(1) \\
&= f\big(\sigma(1)\big) \\
&= f^G\big(\sigma(1)\big) \\
&= f^G \circ \Psi_1(\sigma). \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolario 4.3.4. *El funtor F_G es exacto por la derecha y el funtor F^G es exacto por la izquierda.*

Demostración. Por la proposición 2.1.11 tenemos que $\mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \_$ es exacto por la derecha y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_)$ es exacto por la izquierda. Se sigue por el lema anterior que F_G es exacto por la derecha y F^G es exacto por la izquierda. $\blacksquare$

Teorema 4.3.5. *Sean M y N G-módulos. Entonces*

1. $M_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N_G$,

2. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M_G, N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N^G)$.

Demostración.
1. Por las proposiciones 4.1.4 y 4.1.7, y por el lema 4.3.1 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} M_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N &\cong \big(\mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M\big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \\ &\cong \big(M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}\big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \\ &\cong M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \big(\mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N\big) \\ &\cong M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N_G. \end{aligned}$$

2. Por el lema 4.3.1 y por el teorema 1.9.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M_G, N) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M, N) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N^G). \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 4.3.6. En el teorema anterior:

1. La función $\Phi\colon M_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \to M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N_G$ definida por $\Phi(\overline{x} \otimes y) = x \otimes \overline{y}$ es un isomorfismo de grupos.

2. La función $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M_G, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N^G)$ definida por la correpondencia

$$(\sigma\colon M_G \to N) \longmapsto \left(\begin{array}{rcl} \Psi(\sigma)\colon M & \longrightarrow & N^G \\ x & \longmapsto & \sigma(\overline{x}) \end{array} \right)$$

   es un isomorfismo de grupos.

Teorema 4.3.7. *Sea $f\colon M \to M'$ un homomorfismo de G-módulos y sea N cualquier G-módulo. Entonces los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd} M_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \arrow[r, "f_G \otimes Id"] \arrow[d, "\Phi_1"] & M'_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N \arrow[d, "\Phi_2"] \\ M \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N_G \arrow[r, "f \otimes Id"] & M' \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N_G \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M'_G, N) & \xrightarrow{f_G^*} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M_G, N) \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_2} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M', N^G) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N^G) \end{array}$$

Aquí Φ_1*,* Φ_2*,* Ψ_1*,* Ψ_2 *son isomorfismos de grupos definidos como en la observación anterior.*

Demostración. Sea $\overline{x} \otimes y \in M_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} N$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi_2 \circ (f_G \otimes Id)(\overline{x} \otimes y) &= \Phi_2\big(f_G(\overline{x}) \otimes y\big) \\ &= \Phi_2\big(\overline{f(x)} \otimes y\big) \\ &= f(x) \otimes \overline{y} \\ &= f \otimes Id(x \otimes \overline{y}) \\ &= (f \otimes Id) \circ \Phi_1(\overline{x} \otimes y). \end{aligned}$$

Sea $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M'_G, N)$ y sea $x \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} \Psi_2 \circ f_G^*(\sigma)(x) &= \Psi_2(\sigma \circ f_G)(x) \\ &= \sigma \circ f_G(\overline{x}) \\ &= \sigma\big(f_G(\overline{x})\big) \\ &= \sigma\big(\overline{f(x)}\big) \\ &= \Psi_1(\sigma)\big(f(x)\big) \\ &= \Psi_1(\sigma) \circ f(x) \\ &= f^* \circ \Psi_1(\sigma)(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Si tenemos un G-conjunto X, entonces el grupo abeliano libre sobre X, denotado por $F(X)$, es un G-módulo con la acción definida por

$$g \sum_{x \in X} n_x x = \sum_{x \in X} n_x (gx).$$

Denotemos por $F(X/G)$ el grupo abeliano libre sobre el conjunto de órbitas X/G. La siguiente proposición demuestra que existe un isomorfismo de grupos entre $F(X/G)$ y el grupo de coinvariantes $F(X)_G$.

Lema 4.3.8. *Sea X un G-conjunto y sea X/G el conjunto de órbitas. Entonces*

$$F(X/G) \cong \mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} F(X).$$

Demostración. Sea $x \in X$. Vamos a denotar por $[x]$ la órbita de x. En cada una de las órbitas elegimos un representante de clase y sea $\{x_i\}_{i \in I}$ el conjunto de representantes, así los elementos de $F(X/G)$ son de la forma

$$\sum_{i \in I} n_i [x_i].$$

La función $\kappa \colon \mathbb{Z} \times F(X) \to F(X/G)$ definida por

$$\kappa(m, \sum_{x \in X} n_x x) = \sum_{x \in X} (m n_x)[x]$$

es $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva (ver definición 1.8.3). Sea U un grupo conmutativo. Si $f \colon \mathbb{Z} \times F(X) \to U$ es una función $\mathbb{Z}[G]$-biaditiva, entonces la función $\Phi \colon F(X/G) \to U$ definida por

$$\Phi(\sum_{i \in I} n_i [x_i]) = \sum_{i \in I} n_i f(1, x_i)$$

es el único homomorfismo de grupos tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \times F(X) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "f"'] & F(X/G) \arrow[d, "\Phi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

conmuta. Así $\big(F(X/G), \kappa\big)$ satisface la definición 1.8.4 de producto tensorial, luego el producto tensorial de $\mathbb{Z}$ y $F(X)$ es único salvo isomorfismo, por lo tanto $F(X/G) \cong \mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} F(X)$. ■

Observación 4.3.9. En el lema anterior, la función $\Phi \colon \mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} F(X) \to F(X/G)$ definida por

$$\Phi\big(m \otimes (\sum_{x \in X} n_x x)\big) = \sum_{x \in X} (m n_x)[x] = \sum_{i \in I} \big(\sum_{x \in [x_i]} m n_x \big)[x_i]$$

es un isomorfismo de grupos.

4.4. Definiciones de (co)homología de grupos

Sea G un grupo y consideremos a $\mathbb{Z}$ como un G-módulo trivial. Sabemos que siempre es posible encontrar una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ (ver proposición 2.4.2 y corolario 2.4.3).

Definición 4.4.1. Sea M cualquier G-módulo. La **(co)homología de** G **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_n(G,M) = \mathrm{H}_n(P \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M),\\ &\mathrm{H}^n(G,M) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P,M)\right),\end{aligned}$$

donde P es cualquier resolución proyectiva reducida del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$.

En otras palabras $\mathrm{H}_n(G,M) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$ y $\mathrm{H}^n(G,M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$.

A continuación vamos a definir un complejo de cadenas positivo:

$$\cdots \longrightarrow C_n(G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(G) \longrightarrow 0,$$

a este le llamaremos **complejo estándar de** G, y lo vamos a denotar por $C_*(G)$.

Sea $C_n(G)$ el grupo abeliano libre con base G^{n+1}; el operador frontera $\partial_n\colon C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ está definido por

$$\partial_n(g_0,\ldots,g_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\ldots,\widehat{g_i},\ldots,g_n),$$

donde $\widehat{g_i}$ significa que se omitió g_i. El grupo G actúa sobre $C_n(G)$ de la siguiente manera:

$$g(g_0,\ldots,g_n) = (gg_0,\ldots,gg_n).$$

Así cada $C_n(G)$ es un G-módulo. También tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_n\big(g(g_0,\ldots,g_n)\big) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(gg_0,\ldots,\widehat{gg_i},\ldots,gg_n)\\ &= g\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\ldots,\widehat{g_i},\ldots,g_n)\\ &= g\partial_n(g_0,\ldots,g_n),\end{aligned}$$

lo que implica que cada operador frontera es un homomorfismo de G-módulos.

Sea $\epsilon\colon C_0(G) \to \mathbb{Z}$ el G-epimorfismo definido por

$$\epsilon\Big(\sum_{i\in I} n_i g_i\Big) = \sum_{i\in I} n_i.$$

En el capítulo siguiente vamos a demostrar, de una manera más general, que el complejo aumentado

$$\cdots \longrightarrow C_n(G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$.

Así tenemos una definición equivalente para la (co)homología de un grupo G con coeficientes en M.

Definición 4.4.2. Sea M cualquier G-módulo. La **(co)homología de** G **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(G, M) &= \mathrm{H}_n\left(C_*(G) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M\right), \\ \mathrm{H}^n(G, M) &= \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(C_*(G), M\right)\right), \end{aligned}$$

donde $C_*(G)$ es el complejo estándar de G.

En la práctica es común hacer cálculos de la (co)homología de un grupo G tomando los coeficientes en el G-módulo trivial $\mathbb{Z}$. En este caso usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(G) &= \mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z}), \\ \mathrm{H}^n(G) &= \mathrm{H}^n(G, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

En el caso en que M es cualquier G-módulo trivial, en particular $M = \mathbb{Z}$, tenemos que la (co)homología de G con coeficientes en M tiene propiedades adicionales.

Sea M cualquier G-módulo trivial. Notemos que el grupo de coinvariantes M_G y el subgrupo de invariantes M^G coinciden con M (ver definición 4.2.1), es decir,

$$M = M^G \cong M_G.$$

Sea P cualquier resolución proyectiva reducida del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y consideremos el funtor de coinvariantes F_G. Por los teoremas 4.3.5 y 4.3.7 tenemos que los siguientes digramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} (P_n)_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[r, "(\partial_n)_G \otimes Id"] \arrow[d, "\Phi_n"] & (P_{n-1})_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[d, "\Phi_{n-1}"] \\ P_n \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[r, "\partial_n \otimes\ Id"] & P_{n-1} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big((P_n)_G, M\big) \arrow[r, "(\partial_{n+1})^*_G"] \arrow[d, "\Psi_n"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big((P_{n+1})_G, M\big) \arrow[d, "\Psi_{n+1}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_n, M) \arrow[r, "\partial^*_{n+1}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_{n+1}, M),
\end{tikzcd}$$

donde Φ_n y Ψ_n son isomorfismos para toda $n \geq 0$ (ver observación 4.3.6). Por lo tanto tenemos los siguientes isomorfismos de (co)cadenas:

$$F_G(P) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong P \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M,$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big(F_G(P), M\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P, M).$$

Si elegimos $P = C_*(G)$ obtenemos otra definición equivalente para la (co)homología de un grupo con coeficientes en M.

Definición 4.4.3. Sea M cualquier G-módulo trivial. La **(co)homología de G con coeficientes en M** se define por

$$\mathrm{H}_n(G, M) = \mathrm{H}_n\left(F_G\big(C_*(G)\big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M\right),$$
$$\mathrm{H}^n(G, M) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(F_G\big(C_*(G)\big), M\right)\right),$$

donde $C_*(G)$ es el complejo estándar de G y F_G es el funtor de coinvariantes.

Por último tenemos una interpretación topológica de la (co)homología de un grupo.

Definición 4.4.4. Sea Y un complejo CW. Decimos que Y es un **espacio de Eilenberg-MacLane de tipo** $(G, 1)$, o que Y es un $K(G, 1)$, si Y satisface las siguientes propiedades:

I. Y es conexo.

II. El grupo fundamental $\pi_1(Y, y) \cong G$ para toda $y \in Y$.

III. El cubriente universal de Y es contraible.

Sea X el cubriente universal de Y. La condición III se puede remplazar por: $\mathrm{H}_n(X) = \{0\}$ para toda $n \geq 2$.

Consideremos el espacio universal EG de la familia de subgrupos generada por el subgrupo trivial de G. Un ejemplo de espacio $K(G, 1)$ es el espacio clasificante BG.

Sea $C_*(BG)$ el complejo de cadenas positivo

$$\cdots \longrightarrow C_n(BG) \xrightarrow{\overline{\partial}_n} C_{n-1}(BG) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(BG) \xrightarrow{\overline{\partial}_1} C_0(BG) \longrightarrow 0,$$

donde $C_n(BG)$ es el grupo abeliano libre que tiene como base al conjunto de órbitas G^{n+1}/G; el operador frontera está definido por

$$\overline{\partial}_n\big([g_0,\ldots,g_n]\big) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[g_0,\ldots,\widehat{g}_i,\ldots,g_n],$$

donde $\widehat{g}_i$ significa que se omitió g_i.

De acuerdo a la definición 3.6.7 la (co)homología del espacio BG con coeficientes en cualquier grupo conmutativo M se define por

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(BG,M) &= \mathrm{H}_n\left(C_*(BG)\bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} M\right),\\ \mathrm{H}^n(BG,M) &= \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(C_*(BG),M\right)\right).\end{aligned}$$

Sea $C_*(G)$ el complejo estándar de G. Por el lema 4.3.8, para cada $n \geq 0$, existe un isomorfismo $\Phi_n\colon \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_n(G) \to C_n(BG)$ (ver observación 4.3.9). Es fácil ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_n(G) \arrow[r, "Id\otimes\partial_n"] \arrow[d, "\Phi_n"] & \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_{n-1}(G) \arrow[d, "\Phi_{n-1}"] \\
C_n(BG) \arrow[r, "\overline{\partial}_n"] & C_{n-1}(BG)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, luego por el lema 4.3.1 y por el lema 4.3.3 tenemos los siguientes isomorfismos de cadenas:

$$C_*(BG) \cong \mathbb{Z}\bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} C_*(G) \cong F_G\big(C_*(G)\big).$$

Consideremos a M y a cada $C_n(BG)$ como un G-módulo trivial. Por la proposición 4.1.6 y por lo anterior tenemos los siguientes isomorfismos de (co)cadenas:

$$\begin{gathered}C_*(BG)\bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} M \cong C_*(BG)\bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M \cong F_G\big(C_*(G)\big)\bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M,\\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(C_*(BG),M\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(C_*(BG),M\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(F_G\big(C_*(G)\big),M\right).\end{gathered}$$

La (co)homología de un grupo G (ver definición 4.4.3) coincide con la (co)homología del espacio BG. Así tenemos la siguiente definición.

Definición 4.4.5. Sea M cualquier G-módulo trivial. La **(co)homología de** G **con coeficientes en** M es la (co)homología de cualquier espacio $K(G,1)$ con coeficientes en M.

Capítulo 5

(Co)homología relativa de grupos de Adamson

En este capítulo vamos a dar una generalización de la (co)homología de un grupo G. Ahora vamos a considerar parejas (G, H), donde G es un grupo y H es cualquier subgrupo de G.

La (co)homología relativa de Adamson de (G, H) con coeficientes en un G-módulo M apareció por primera vez en el año de 1954 en un artículo escrito por Iain T. Adamson [1], aquí sólo se consideran subgrupos de índice finito.

Existen varias definiciones para la (co)homología relativa de Adamson de (G, H); en este capítulo estudiaremos cada una de estas definiciones.

5.1. Definición con álgebra homológica relativa

Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Notemos que el anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$ tiene como subanillo a $\mathbb{Z}[H]$, y que cada G-módulo es también un H-módulo.

Las siguientes definiciones las podemos encontrar, de forma más general, en la sección 2.5.

Definición 5.1.1. Una sucesión exacta de G-homomorfismos entre G-módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1}} M_i \xrightarrow{t_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada (G, H)-exacta si, para cada i, el núcleo de t_i es un H-módulo sumando directo de M_i.

Definición 5.1.2. Un G-módulo P es (G,H)**-proyectivo** si, para cada sucesión (G,H)-exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0$$

y para todo G-homomorfismo $f\colon P \to M_2$, existe un G-homomorfismo $h\colon P \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] & M_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definición 5.1.3. Sea M un G-módulo. Una **resolución** (G,H)**-proyectiva de** M es un complejo de cadenas (G,H)-exacto de la forma

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\theta} M \longrightarrow 0$$

tal que P_n es (G,H)-proyectivo para toda $n \geq 0$.

El complejo de cadenas reducido

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$$

lo vamos a denotar por P_M y le llamaremos **resolución** (G,H)**-proyectiva reducida de** M. Escribiremos (P_M,θ) para denotar una resolución (G,H)-proyectiva de M.

Consideremos a $\mathbb{Z}$ como un G-módulo trivial. Por la proposición 2.5.15 tenemos que siempre es posible encontrar una resolución (G,H)-proyectiva de $\mathbb{Z}$.

Definición 5.1.4. Sea M cualquier G-módulo. La **(co)homología relativa de Adamson de la pareja** (G,H) **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n([G,H];M) &= \mathrm{H}_n(P \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M), \\ \mathrm{H}^n([G,H];M) &= \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P,M)\right), \end{aligned}$$

donde P es cualquier resolución (G,H)-proyectiva reducida del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$.

La proposición 2.5.17 demuestra que la (co)homología relativa de Adamson de la pareja (G,H) con coeficientes en M es independiente de la elección de la resolución (G,H)-proyectiva reducida de $\mathbb{Z}$, es decir, que esta (co)homología es única salvo isomorfismo. En otras palabras

$$\begin{array}{l} \mathrm{H}_n([G,H];M) = \mathrm{Tor}_n^{(G,H)}(\mathbb{Z},M), \\ \mathrm{H}^n([G,H];M) = \mathrm{Ext}^n_{(G,H)}(\mathbb{Z},M). \end{array}$$

5.2. Definición algebraica

Sea G/H el conjunto de todas las clases laterales izquierdas de H en G. A continuación vamos a definir un complejo de cadenas positivo:

$$\cdots \longrightarrow C_n(G/H) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(G/H) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(G/H) \longrightarrow 0,$$

a este le llamaremos **complejo estándar de** G/H, y lo vamos a denotar por $C_*(G/H)$.

Sea $C_n(G/H)$ el grupo abeliano libre con base $(G/H)^{n+1}$; el operador frontera $\partial_n \colon C_n(G/H) \to C_{n-1}(G/H)$ está definido por

$$\partial_n(g_0H,\ldots,g_nH) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0H,\ldots,\widehat{g_iH},\ldots,g_nH),$$

donde $\widehat{g_iH}$ significa que se omitió g_iH. El grupo G actúa sobre $C_n(G/H)$ de la siguiente manera:

$$g(g_0H,\ldots,g_nH) = (gg_0H,\ldots,gg_nH).$$

Así cada $C_n(G/H)$ es un G-módulo. También tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_n\big(g(g_0H,\ldots,g_nH)\big) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(gg_0H,\ldots,\widehat{gg_iH},\ldots,gg_nH) \\ &= g\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0H,\ldots,\widehat{g_iH},\ldots,g_nH) \\ &= g\partial_n(g_0H,\ldots,g_nH), \end{aligned}$$

lo que implica que cada operador frontera es un homomorfismo de G-módulos.

Sea $\theta\colon C_0(G/H) \to \mathbb{Z}$ el G-epimorfismo definido por

$$\theta\big(\sum_{i\in I} n_i(g_iH)\big) = \sum_{i\in I} n_i.$$

Con un poco de paciencia se puede demostrar que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ y que $\theta \circ \partial_1 = 0$. Así $C_*(G/H)$ efectivamente es un complejo de cadenas y θ es una aumentación para $C_*(G/H)$.

Proposición 5.2.1. *El complejo aumentado*

$$\cdots \longrightarrow C_n(G/H) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(G/H) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(G/H) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}$$

es (G,H)-exacto

Demostración. Vamos a demostrar que existe una H-homotopía de cadenas tal que el morfismo identidad $Id\colon \big(C_*(G/H),\theta\big) \to \big(C_*(G/H),\theta\big)$ es homotópicamente nulo, es decir, que existe una familia $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos de H-módulos tal que $\partial_{n+1}\circ S_n + S_{n-1}\circ\partial_n = Id_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ (con $\partial_0 = \theta$). Despues por la proposición 2.5.5 se sigue que el complejo aumentado $\big(C_*(G/H),\theta\big)$ es (G,H)-exacto.

Para $n \geq 0$ definimos $S_n\colon C_n(G/H) \to C_{n+1}(G/H)$ por

$$S_n(g_0H,\ldots,g_nH) = (H, g_0H,\ldots,g_nH).$$

Definimos $S_{-1}\colon \mathbb{Z} \to C_0(G/H)$ por $S_{-1}(1) = H$, y $S_n = 0$ para toda $n < -1$.

Sea $h \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} S_n\big(h(g_0H,\ldots,g_nH)\big) &= (H, hg_0H,\ldots,hg_nH) \\ &= (hH, hg_0H,\ldots,hg_nH) \\ &= h(H, g_0H,\ldots,g_nH) \\ &= hS_n(g_0H,\ldots,g_nH). \end{aligned}$$

Así cada S_n es un H-homomorfismo.

Tenemos lo siguiente: $\partial_0 \circ S_{-1}(1) = \partial_0(H) = \theta(H) = 1$.

$$\begin{aligned} \partial_1 \circ S_0(gH) &= \partial_1(H, gH) \\ &= gH - H \\ &= gH - S_{-1}(1) \\ &= gH - S_{-1}\circ\partial_0(gH). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{n+1} \circ S_n(g_0H, \ldots, g_nH) &= \partial_{n+1}(H, g_0H, \ldots, g_nH) \\
&= (g_0H, \ldots, g_nH) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (H, g_0H, \ldots, \widehat{g_{i-1}H}, \ldots, g_nH) \\
&= (g_0H, \ldots, g_nH) - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (H, g_0H, \ldots, \widehat{g_jH}, \ldots, g_nH) \\
&= (g_0H, \ldots, g_nH) - S_{n-1} \circ \partial_n(g_0H, \ldots, g_nH). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 5.2.2. *Para cada $n \geq 1$*

$$C_n(G/H) \cong \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} C_{n-1}(G/H);$$

y también

$$C_0(G/H) \cong \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}.$$

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [2, lema 4.10]. $\blacksquare$

Por el lema 2.5.7 tenemos que, para cada H-módulo N, el G-módulo $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} N$ es (G, H)-proyectivo. Combinando esto con la proposición 5.2.1 y con el lema 5.2.2 obtenemos que el complejo aumentado

$$\cdots \longrightarrow C_n(G/H) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(G/H) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(G/H) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}$$

es una resolución (G, H)-proyectiva del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$. Así tenemos una definición equivalente para la (co)homología relativa de Adamson de (G, H) con coeficientes en M.

Definición 5.2.3. Sea M cualquier G-módulo. La **(co)homología relativa de Adamson de la pareja** (G, H) **con coeficientes en** M se define por

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}_n([G, H]; M) = \mathrm{H}_n\left(C_*(G/H) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M\right), \\
&\mathrm{H}^n([G, H]; M) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(C_*(G/H), M\right)\right),
\end{aligned}
$$

donde $C_*(G/H)$ es el complejo estándar de G/H.

En el caso en que M es cualquier G-módulo trivial, en particular $M = \mathbb{Z}$, tenemos que la (co)homología relativa de Adamson de (G, H) con coeficientes en M tiene propiedades adicionales.

Sea M cualquier G-módulo trivial. Notemos que el grupo de coinvariantes M_G y el subgrupo de invariantes M^G coinciden con M (ver definición 4.2.1), es decir,

$$M = M^G \cong M_G.$$

Sea P cualquier resolución (G,H)-proyectiva reducida del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y consideremos el funtor de coinvariantes F_G. Por los teoremas 4.3.5 y 4.3.7 tenemos que los siguientes digramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
(P_n)_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[r, "(\partial_n)_G \otimes Id"] \arrow[d, "\Phi_n"] & (P_{n-1})_G \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[d, "\Phi_{n-1}"] \\
P_n \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[r, "\partial_n \otimes Id"] & P_{n-1} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big((P_n)_G, M\big) \arrow[r, "(\partial_{n+1})^*_G"] \arrow[d, "\Psi_n"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big((P_{n+1})_G, M\big) \arrow[d, "\Psi_{n+1}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_n, M) \arrow[r, "\partial^*_{n+1}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_{n+1}, M),
\end{tikzcd}$$

donde Φ_n y Ψ_n son isomorfismos para toda $n \geq 0$ (ver observación 4.3.6). Por lo tanto tenemos los siguientes isomorfismos de (co)cadenas:

$$F_G(P) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong P \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M,$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big(F_G(P), M\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P, M).$$

Si elegimos $P = C_*(G/H)$ obtenemos otra definición equivalente para la (co)homología relativa de Adamson de (G,H) con coeficientes en M.

Definición 5.2.4. Sea M cualquier G-módulo trivial. La **(co)homología relativa de Adamson de la pareja** (G,H) **con coeficientes en** M se define por

$$\mathrm{H}_n([G,H];M) = \mathrm{H}_n\left(F_G\big(C_*(G/H)\big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M\right),$$
$$\mathrm{H}^n([G,H];M) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(F_G\big(C_*(G/H)\big), M\right)\right),$$

donde $C_*(G/H)$ es el complejo estándar de G/H y F_G es el funtor de coinvariantes.

5.3. Definición topológica

En esta sección vamos a considerar a G como un grupo discreto. Sea H un subgrupo de G y sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(H)$ la familia de subgrupos de G generada por H, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los subgrupos de H y de sus conjugados por elementos de G.

Por la proposición 3.6.4 tenemos que el conjunto de clases laterales izquierdas G/H es un G-conjunto tal que la familia $\mathcal{F}$ coincide con el conjunto de subgrupos de G que fijan al menos un punto de G/H. La proposición 3.6.5 describe un modelo para el espacio clasificante de la familia $\mathcal{F}$; aquí el espacio $E_{\mathcal{F}}(G)$ es la realización geométrica de un conjunto simplicial que se construye a partir de G/H, además $E_{\mathcal{F}}(G)$ es un complejo CW tal que G actúa celularmente sobre $E_{\mathcal{F}}(G)$. El espacio clasificante $B_{\mathcal{F}}(G)$ también es un complejo CW. Al final de la sección 3.6 describimos un metodo para obtener la (co)homología del espacio $B_{\mathcal{F}}(G)$ a partir de un conjunto simplicial.

Sea $C_*(B_{\mathcal{F}}(G))$ el complejo de cadenas positivo

$$\cdots \longrightarrow C_n(B_{\mathcal{F}}(G)) \xrightarrow{\overline{\partial}_n} C_{n-1}(B_{\mathcal{F}}(G)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(B_{\mathcal{F}}(G)) \longrightarrow 0,$$

donde $C_n(B_{\mathcal{F}}(G))$ es el grupo abeliano libre que tiene como base al conjunto de órbitas $(G/H)^{n+1}/G$; el operador frontera está definido por

$$\overline{\partial}_n\big([g_0H, \ldots, g_nH]\big) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[g_0H, \ldots, \widehat{g_iH}, \ldots, g_nH],$$

donde $\widehat{g_iH}$ significa que se omitió g_iH.

De acuerdo a la definición 3.6.7 la (co)homología del espacio $B_{\mathcal{F}}(G)$ con coeficientes en cualquier grupo conmutativo M se define por

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(B_{\mathcal{F}}(G), M) &= \mathrm{H}_n\left(C_*(B_{\mathcal{F}}(G)) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} M\right), \\ \mathrm{H}^n(B_{\mathcal{F}}(G), M) &= \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(C_*(B_{\mathcal{F}}(G)), M\right)\right). \end{aligned}$$

Sea $C_*(G/H)$ el complejo estándar de G/H. Por el lema 4.3.8, para cada $n \geq 0$, existe un isomorfismo $\Phi_n\colon \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_n(G/H) \to C_n(B_{\mathcal{F}}(G))$ (ver observación 4.3.9). Es fácil ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_n(G/H) \arrow[r, "Id\otimes\partial_n"] \arrow[d, "\Phi_n"] & \mathbb{Z}\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_{n-1}(G/H) \arrow[d, "\Phi_{n-1}"] \\ C_n(B_{\mathcal{F}}(G)) \arrow[r, "\overline{\partial}_n"] & C_{n-1}(B_{\mathcal{F}}(G)) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, luego por el lema 4.3.1 y por el lema 4.3.3 tenemos los siguientes isomorfismos de cadenas:

$$C_*(B_{\mathcal{F}}(G)) \cong \mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*(G/H) \cong F_G\big(C_*(G/H)\big).$$

Consideremos a M y a cada $C_n(B_{\mathcal{F}}(G))$ como un G-módulo trivial. Por la proposición 4.1.6 y por lo anterior tenemos los siguientes isomorfismos de (co)cadenas:

$$\begin{aligned} C_*(B_{\mathcal{F}}(G)) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}} M &\cong C_*(B_{\mathcal{F}}(G)) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M \\ &\cong F_G\big(C_*(G/H)\big) \bigotimes\nolimits_{\mathbb{Z}[G]} M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(C_*(B_{\mathcal{F}}(G)), M\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big(C_*(B_{\mathcal{F}}(G)), M\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\big(F_G\big(C_*(G/H)\big), M\big). \end{aligned}$$

La (co)homología relativa de Adamson de (G, H) (ver definición 5.2.4) coincide con la (co)homología del espacio $B_{\mathcal{F}}(G)$. Así tenemos la siguiente definición.

Definición 5.3.1. Sea M cualquier G-módulo trivial. La **(co)homología relativa de Adamson de la pareja** (G, H) **con coeficientes en** M se define por

$$\mathrm{H}_n([G, H]; M) = \mathrm{H}_n\big(B_{\mathcal{F}}(G), M\big),$$
$$\mathrm{H}^n([G, H]; M) = \mathrm{H}^n\big(B_{\mathcal{F}}(G), M\big).$$

Capítulo 6

(Co)homología relativa de grupos de Takasu

En este capítulo vamos a dar tres definiciones de la (co)homología relativa de grupos de Takasu. Podemos encontrar más información en [2] y en [12].

6.1. Definición topológica

Sean G un grupo y H un subgrupo de G. En esta sección vamos a considerar a G y H como grupos discretos.

Sean EG y EH los espacios universales de la familia de subgrupos generada por el subgrupo trivial de G, y sean BG y BH los espacios clasificantes. La inclusión $H \hookrightarrow G$ induce una función continua

$$\Phi\colon BH \to BG.$$

El cilindro de la aplicación Φ, denotado por $\mathrm{Cyl}(\Phi)$, es un espacio topológico que tiene como subespacio a BH y es homotópicamente equivalente a BG (ver definición 3.2.1 y corolario 3.2.3). Elegimos una teoría de (co)homología $\mathcal{H}$ que sea admisible, es decir, que admita a cada pareja $(\mathrm{Cyl}(\Phi), BH)$, y que considere coeficientes en cualquier grupo conmutativo M.

Definición 6.1.1. Sea M cualquier grupo conmutativo. La **(co)homología relativa de Takasu de la pareja** (G,H) **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(G,H;M) &= \mathcal{H}_n\big(\,\mathrm{Cyl}(\Phi), BH; M\big), \\ \mathrm{H}^n(G,H;M) &= \mathcal{H}^n\big(\,\mathrm{Cyl}(\Phi), BH; M\big). \end{aligned}$$

Usando el modelo simplicial descrito en la proposición 3.6.5 tenemos que el espacio BH es homeomorfo a un subespacio de BG, así podemos pensar que $BH \subset BG$. Usando la (co)homología simplicial relativa tenemos la siguiente definición.

Definición 6.1.2. Sea M cualquier grupo conmutativo. La **(co)homología relativa de Takasu de la pareja** (G, H) **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(G,H;M) &= \mathrm{H}_n\big(BG,BH;M\big) = \mathrm{H}_n\left(\frac{C_*(BG)\bigotimes_{\mathbb{Z}} M}{C_*(BH)\bigotimes_{\mathbb{Z}} M}\right), \\ \mathrm{H}^n(G,H;M) &= \mathrm{H}^n\big(BG,BH;M\big) = \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\frac{C_*(BG)}{C_*(BH)}, M\right)\right), \end{aligned}$$

donde $C_*(BG)$ y $C_*(BH)$ están definidos como en 3.6.7.

6.2. Definición algebraica

En la sección 4.4 definimos el complejo estándar de G y lo denotamos por $C_*(G)$, de manera análoga se define $C_*(H)$.

Sea M cualquier G-módulo. Para cada $n \geq 0$ sea

$$\Phi_n \colon C_n(H) \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \to C_n(G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M$$

el homomorfismo definido por

$$\Phi_n\big((h_0, \dots, h_n) \otimes x\big) = (h_0, \dots, h_n) \otimes x.$$

En [8, Apéndice A.1] podemos encontrar una breve sección sobre Homología relativa de grupos; aquí se menciona un truco para mostrar que el homomorfismo Φ_n es inyectivo.

Es fácil ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C_n(H) \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \arrow[r, "\partial_n \otimes Id"] \arrow[d, "\Phi_n"] & C_{n-1}(H) \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \arrow[d, "\Phi_{n-1}"] \\ C_n(G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \arrow[r, "\partial_n \otimes Id"] & C_{n-1}(G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M. \end{tikzcd}$$

Cada Φ_n es un monomorfismo, entonces $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de cadenas que induce la siguiente sucesión exacta corta entre complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \xrightarrow{\Phi} C_*(G)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \longrightarrow \frac{C_*(G)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M}{C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M} \longrightarrow 0,$$

donde $\dfrac{C_*(G)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M}{C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M} = \operatorname{Coker}\Phi$.

Hacemos $M = \mathbb{Z}[G]$. Así la sucesión anterior induce la siguiente sucesión exacta corta entre complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow C_*(G) \longrightarrow \frac{C_*(G)}{C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G]} \longrightarrow 0.$$

Definición 6.2.1. Sea M cualquier G-módulo. La **(co)homología relativa de Takasu de la pareja** (G,H) **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(G,H;M) &= \mathrm{H}_n\left(\frac{C_*(G)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M}{C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M}\right), \\ \mathrm{H}^n(G,H;M) &= \mathrm{H}^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}\left(\frac{C_*(G)}{C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G]}, M\right)\right). \end{aligned}$$

En el caso en que M es un G-módulo trivial, en particular $M = \mathbb{Z}$, tenemos los siguientes isomorfismos de cadenas.

$$\begin{gathered} C_*(BG)\bigotimes_{\mathbb{Z}} M \cong C_*(BG)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong C_*(G)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} M, \\ C_*(BH)\bigotimes_{\mathbb{Z}} M \cong C_*(BH)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \cong C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M. \end{gathered}$$

Se sigue que la definición 6.2.1 coincide con la definición 6.1.2.

6.3. Definición con álgebra homológica

Si M es un G-módulo, entonces el epimorfismo $\theta_M \colon \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \to M$ definido por $\theta_M(g \otimes x) = gx$ induce una sucesión (G, H)-exacta corta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\theta_M \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \xrightarrow{\theta_M} M \longrightarrow 0.$$

Sea $\mathrm{I}_{(G,H)}(M) = \operatorname{Ker}\theta_M$. Si $f \colon M \to M'$ es un G-homomorfismo, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{I}_{(G,H)}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{I}_{(G,H)}(f)"] & \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "Id\otimes f"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{I}_{(G,H)}(M') \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M' \arrow[r, "\theta_{M'}"] & M' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{I}_{(G,H)}(f)$ es la restricción de $Id \otimes f$.

Definición 6.3.1. El **funtor de Takasu** es el funtor covariante $\mathrm{I}_{(G,H)} \colon {}_G\,\mathbf{Mod} \to_G \mathbf{Mod}$ definido por la correpondencia

$$\begin{array}{rcl} M & \longmapsto & \mathrm{I}_{(G,H)}(M), \\ (f \colon M \to M') & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} \mathrm{I}_{(G,H)}(f) \colon \mathrm{I}_{(G,H)}(M) & \longrightarrow & \mathrm{I}_{(G,H)}(M') \\ \sum_i g_i \otimes x_i & \longmapsto & \sum_i g_i \otimes f(x_i) \end{array} \right). \end{array}$$

El funtor de Takasu tiene propiedades muy interesantes, algunas de estas las vamos a mencionar en la siguiente proposición.

Proposición 6.3.2.

1. $\mathrm{I}_{(G,H)}(M)$ *es un funtor covariente exacto con respecto a la variable* M*.*

2. *Si* M *es* G*-proyectivo, entonces* $\mathrm{I}_{(G,H)}(M)$ *es* G*-proyectivo.*

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [12, proposición 1.1]. ■

Por la proposición 2.4.2 y por corolario 2.4.3 siempre es posible encontrar una resolución proyectiva del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$. Por la proposición anterior podemos aplicar el funtor de Takasu a cualquier resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ y así obtener una resolución proyectiva de $\mathrm{I}_{(G,H)}(\mathbb{Z})$.

Definición 6.3.3. Sea M cualquier G-módulo. La **(co)homología relativa de Takasu de la pareja** (G, H) **con coeficientes en** M se define por

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(G, H; M) &= \mathrm{Tor}_{n-1}^G(\mathrm{I}_{(G,H)}(\mathbb{Z}), M),\\ \mathrm{H}^n(G, H; M) &= \mathrm{Ext}_G^{n-1}(\mathrm{I}_{(G,H)}(\mathbb{Z}), M).\end{aligned}$$

La siguiente proposición demuestra que la definición anterior coincide con la definición 6.2.1.

Proposición 6.3.4. *El complejo cociente* $\dfrac{C_*(G)}{C_*(H)\bigotimes_{\mathbb{Z}[H]}\mathbb{Z}[G]}$ *(con el grado modificado adecuadamente) es una resolución proyectiva de* $\mathrm{I}_{(G,H)}(\mathbb{Z})$.

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [12, proposición 3.3]. ■

6.4. Comparación de las (co)homologías relativas de grupos

En esta sección vamos a comparar las (co)homologías relativas de grupos de Adamson y de Takasu. El n-ésimo grupo de homología relativa de Adamson de la pareja (G, H) lo vamos a denotar por $\mathrm{H}_n([G, H]; M)$, mientras que el n-ésimo grupo de homología relativa de Takasu lo denotamos por $\mathrm{H}_n(G, H; M)$, de manera análoga se denotan los n-ésimos grupos de cohomología.

La siguiente proposición será de gran ayuda al momento de calcular la (co)homología relativa de Adamson de la pareja (G, H), en el caso en que H es un subgrupo normal de G.

Proposición 6.4.1. *Sea M cualquier G-módulo trivial. Si H es un subgrupo normal de G, entonces*

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n([G, H]; M) &\cong \mathrm{H}_n(G/H; M),\\ \mathrm{H}^n([G, H]; M) &\cong \mathrm{H}^n(G/H; M).\end{aligned}$$

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [2, corolario 4.29]. ■

Definición 6.4.2. Sean H y K subgrupos de G tal que H es un subgrupo de K. Decimos que H es K-**malnormal** si para toda $g \in G - K$ se tiene que $H \cap gHg^{-1} = \{e\}$, donde $e \in G$ es la identidad. Decimos que H es **malnormal** si es H-malnormal.

En el siguiente teorema vamos a enunciar algunos casos en los que la (co)homología relativa de grupos de Adamson coincide con la de Takasu.

Teorema 6.4.3. *Sea M cualquier G-módulo trivial.*

1. *Sea H cualquier subgrupo de G. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_1([G,H];M) &\cong \mathrm{H}_1(G,H;M), \\ \mathrm{H}^1([G,H];M) &\cong \mathrm{H}^1(G,H;M). \end{aligned}$$

2. *Si H es un subgrupo malnormal de G, entonces*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n([G,H];M) &\cong \mathrm{H}_n(G,H;M), \\ \mathrm{H}^n([G,H];M) &\cong \mathrm{H}^n(G,H;M). \end{aligned}$$

Demostración. Podemos encontrar una demostración en [2, proposición 7.9, y teorema 7.13]. ∎

Los siguientes ejemplos muestran que la (co)homología relativa de grupos de Takasu no coincide con la (co)homología relativa de grupos de Adamson.

Ejemplo 6.4.4. Sea $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y sea $H = \mathbb{Z}\times\{0\} \cong \mathbb{Z}$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\mathbb{Z};\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{H}_n(B(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),B\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{H}_n(T^2,S^1;\mathbb{Z}) \\ &\cong \widetilde{\mathrm{H}}_n(T^2/S^1;\mathbb{Z}) \\ &\cong \widetilde{\mathrm{H}}_n(S^2\vee S^1;\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

donde T^2 es el toro, S^1 el meridiano, y $\widetilde{\mathrm{H}}_n$ denota la homología reducida. Por otro lado tenemos que $\mathbb{Z}\times\{0\}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, se sigue por la proposición 6.4.1 que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n([\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\mathbb{Z}];\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{H}_n(\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{H}_n(B\mathbb{Z};\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{H}_n(S^1;\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ejemplo 6.4.5. Sea $G = \mathbb{Z}$ y sea $H = 2\mathbb{Z}$. Tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_n(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) &\cong \mathrm{H}_n(M, S^1; \mathbb{Z}) \\
&\cong \widetilde{\mathrm{H}}_n(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \\
&\cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 1, \\ \{0\} & \text{en otro caso,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

donde M es la banda de Möbius y S^1 es la frontera de M. Por otro lado tenemos que $2\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{Z}$, se sigue por la proposición 6.4.1 que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_n([\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}]; \mathbb{Z}) &\cong \mathrm{H}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \\
&\cong \mathrm{H}_n(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \\
&\cong \mathrm{H}_n(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}) \\
&\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{0\} & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Los ejemplos anteriores fueron sugeridos por Francisco Gonzáles Acuña.

Bibliografía

[1] Iain T. Adamson. Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 2:66–76, 1954.

[2] J. Antonio Arciniega and J. L. Cisneros. Comparison of relative group (co)homologies. *Bol. Soc. Mat. Mex*, 2016.

[3] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[4] David Dummit and Richard Foote. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Inc., third edition, 2004.

[5] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[6] Paul G. Goerss and Jhon F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Birkhauser, 1997.

[7] G. Hochschild. Relative homological algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:246–269, 1956.

[8] Kevin P. Knudson. *Homology of linear groups*, volume 193 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[9] Emilio Lluis-Puebla. *Algebra homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica*. Addison-WesleyIberoamericana, 1990.

[10] J. Peter May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. The University of Chicago, 1967.

[11] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[12] Satoru Takasu. Relative homology and relative cohomology theory of groups. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I*, 8:75–110, 1959.

[13] Tammo tom Dieck. *Transformation Groups*. Number 8 in Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[14] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1994.