



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Maestría en Ciencias (Física)

Análisis experimental de una transición cuadrupolar eléctrica en átomos a temperatura ambiente usando un haz con estructura espacial

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA
SANTIAGO HERNÁNDEZ GÓMEZ

TUTOR PRINCIPAL:
JOSÉ IGNACIO JIMÉNEZ MIER Y TERÁN
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

PEDRO ANTONIO QUINTO SU
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO, D. F. JUNIO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi madre por su cariño incondicional y su constante apoyo. Nunca habría llegado a donde estoy si no fuera por ti.

A Tania, tu amor me ha permitido seguir adelante en los momentos más difíciles. Pero más importante aún, me has hecho feliz en todos los aspectos posibles. Te amo.

A mi familia y amigos por estar siempre que los necesito. Y por todas las risas que hemos compartido.

A mi tutor el Dr. Jiménez por su paciencia, sus consejos y su amistad.

A la Dra. Jáuregui por su innegable apoyo en el desarrollo teórico de este trabajo.

Al Dr. Fernando Ramírez Martínez y al Dr. Jesús Flores Mijangos por dejar siempre abierta su puerta para mí.

A todo el equipo de trabajo del Laboratorio de Átomos Fríos por su ayuda durante la realización de este proyecto. En particular a Francisco, Cristian, Pablo, Óscar y Óscar quienes trabajaron conmigo y me ayudaron a superar los problemas que surgían día a día. A José Rangel del taller mecánico del ICN.

Al CONACYT por la beca de maestría del Programa Nacional de Posgrados de Calidad y por el apoyo del proyecto SEP-CONACYT No. 168451-11 “Medición de la transición cuadrupolar eléctrica $5p2P_{3/2} \rightarrow 6p2P_{1/2}$ en rubidio en una trampa magneto-óptica”.

A la DGAPA por el apoyo de los proyectos PAPIIT No. IN112516 “Estudio teórico y experimental de la interacción entre dos campos de radiación y átomos multinivel” y PAPIIT No. IN107317 “Espectroscopía de precisión en átomos fríos”.

Al Laboratorio Nacional de Materia Cuántica: Materia Ultrafría e Información Cuántica (LANMAC, No. 232652).

Resumen

En este trabajo se presenta el primer avance realizado en el *Laboratorio de Átomos Fríos* del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM para estudiar la transferencia de momento angular orbital de la luz hacia las coordenadas internas de un átomo. Dicho estudio está inspirado en los resultados teóricos previamente publicados por la Dra. Rocío Jáuregui Renaud del Instituto de Física de la UNAM.

El trabajo consistió en un estudio experimental y teórico de la interacción entre haces Bessel escalares y átomos de rubidio a temperatura ambiente. En la parte experimental se indujo la transición cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ con un haz láser de 911 nm, el cual fue modulado en intensidad y fase para convertirlo en un haz Bessel, siendo así el responsable de transferir momento angular orbital a los átomos. Para poder estudiar la transición antes mencionada es necesario preparar átomos en el estado $5P_{3/2}$ ($F = 3$), lo cual fue posible gracias a la interacción con luz láser de 780 nm. La espectroscopía consistió en medir la presencia de fotones azules emitidos de manera espontánea por los átomos doblemente excitados, cuando éstos regresaban a su estado base partiendo del estado $6P_{3/2}$. Se realizaron tres experimentos en donde se modificó el ancho del haz Bessel y las potencias de los haces de excitación, con la esperanza de amplificar los efectos que podría tener el cambiar la carga topológica del haz Bessel sobre los espectros medidos.

En la parte teórica se generalizó un modelo previamente desarrollado en el *Laboratorio de Átomos Fríos* que predice la probabilidad de medir fotones azules emitidos por el proceso físico antes mencionado, mientras se varía la dirección de la polarización de los haces de excitación. Dicho modelo utiliza la aproximación de onda plana para describir la radiación que induce la transición cuadrupolar eléctrica. La generalización aquí desarrollada permite modelar esta radiación como un haz Gaussiano o un haz Bessel, ambos en la aproximación paraxial.

Se encontró un excelente acuerdo entre teoría y experimento. Los resultados experimentales muestran que es posible realizar espectroscopías utilizando como haz de excitación un haz Bessel, es decir que es posible que átomos a temperatura ambiente absorban fotones que transportan momento angular orbital. Sin embargo el modelo teórico muestra que observar cambios en la intensidad de las líneas espectrales, debido a cambios en la cantidad de momento angular orbital transportado por la radiación electromagnética, no es posible bajo las condiciones en que se realizaron los experimentos, que entre otras incluyen utilizar: átomos a temperatura ambiente, haces paraxiales e intensidades del haz de 911 nm que no saturan la transición cuadrupolar.

Abstract

This thesis shows the progress done in the *Laboratorio de Átomos Fríos* (Cold Atoms Laboratory) of the *Instituto de Ciencias Nucleares - UNAM* to study the transfer of orbital angular momentum from light to the internal coordinates of rubidium atoms. This study was inspired by the theoretical results published by Dra. Rocío Jáuregui Renaud (*Instituto de Física - UNAM*).

During this project an experimental and theoretical analysis of the interaction between scalar Bessel beams and room-temperature rubidium atoms was performed. In the experiment the electric quadrupole transition $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ was induced on atoms, using a 911 nm laser beam previously modulated in phase and intensity in order to transform it into a scalar Bessel beam (responsible of transferring the orbital angular momentum towards the atoms). In order to study the electric quadrupole transition, the atoms are first excited into the $5P_{3/2}$ ($F = 3$) state by interacting with a 780 nm laser beam. After interacting with the second radiation field, the atoms decay from the $6P_{3/2}$ state into its ground state, emitting blue photons during this process. A spectroscopy can then be performed by detecting these spontaneously emitted blue photons. Three different experiments were performed, on each of them the width and power of the excitation beams were modified, in the hope of amplifying the effects that the different topological charges of the Bessel beams may have had in the measured spectra.

The theoretical part of the project was to generalize a model, previously developed in the *Laboratorio de Átomos Fríos*, that predicts the probability of measuring blue emitted photons (during the excitation process mentioned above) whilst changing the excitation beams' polarization. The previous model uses the plane wave approximation to simulate the light that induces the electric quadrupole transition. The generalization reported here simulates this radiation field as a Bessel or Gaussian beam, both of them in the paraxial regime.

A very good agreement was found between the theory and experiment. The experimental results showed that the spectroscopy was possible while using Bessel beams, meaning that it is possible for room-temperature atoms to absorb photons with orbital angular momentum. However the theoretical model shows that measuring variations in the intensity of the spectral lines, due to changes in the amount of orbital angular momentum carried by the electromagnetic radiation, is not possible under the circumstances on which the experiments were performed, which include using: room-temperature atoms, paraxial beams, 911 nm beam intensities bellow saturation, among others. This was confirmed by the experimental results.

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelo de tres pasos con haces Bessel	5
2.1. Elementos de matriz: dipolares y cuadrupolares	5
2.2. Introducción al modelo de tres pasos	7
2.3. Sobre tensores esféricos	9
2.3.1. Tensor dipolar	10
2.3.2. Tensor cuadrupolar	11
2.3.3. Dependencia espacial de la probabilidad	14
2.4. Análisis del tensor generalizado \mathcal{T}	16
2.4.1. Caso 1: Haz Gaussiano	16
2.4.2. Caso 2: Haz Bessel	18
2.4.3. Análisis de los factores α y β	21
2.5. Resumen	27
3. Control y Caracterización del SLM	30
3.1. Haces estructurados	30
3.1.1. Pequeña introducción al axicón	31
3.1.2. Pequeña introducción al LCoS-SLM	32
3.2. Software de control del SLM	33
3.3. Caracterización	33
3.3.1. Axicón	33
3.3.2. SLM	34
4. Dispositivo Experimental y Procedimiento	37
4.1. Arreglo experimental	37
4.1.1. Sistema de excitación	37
4.1.2. Sistema de detección	39
4.2. Procedimiento	40
4.2.1. Primer experimento	40
4.2.2. Segundo experimento: con tamaño del haz Bessel reducido	41
4.2.3. Tercer experimento: distribución angular	43

5. Análisis de datos experimentales	45
5.1. Caracterización espacial del primer haz de excitación (780 nm)	45
5.2. Primer experimento	48
5.2.1. Distribución transversal de intensidad del haz Bessel	48
5.2.2. Análisis de los espectros medidos	54
5.3. Segundo experimento: con tamaño del haz Bessel reducido	57
5.3.1. Distribución transversal de intensidad del haz Bessel	57
5.3.2. Análisis de los espectros medidos	61
5.4. Tercer experimento: distribución angular	63
5.4.1. Pureza en polarización	63
5.4.2. Distribución transversal de intensidad del haz cuadrupolar	63
5.4.3. Análisis de los espectros medidos	65
6. Resultados	72
6.1. Resultados del modelo teórico de tres pasos	72
6.2. Resultados del primer experimento	74
6.3. Resultados del segundo experimento	75
6.4. Resultados del tercer experimento	75
7. Conclusiones	80
7.1. Trabajo a futuro	81
A. Acoplamiento Luz-Átomo	83
B. Sobre tensores esféricos de rango 2	87
B.1. Tensor cuadrupolar esférico	88
B.2. Término cuadrupolar como producto de tensores	89
B.3. Término cuadrupolar como producto de tensores esféricos	89
B.4. Análisis de los haces Bessel en el espacio de momentos	91
C. Fotografías de los perfiles de intensidad de los haces de excitación	94
C.1. Primer experimento	94
C.2. Segundo experimento: con tamaño del haz Bessel reducido	96
C.3. Tercer experimento: distribución angular	98

Índice de figuras

1.1. Diagrama de niveles energéticos del átomo de rubidio junto con los campos electromagnéticos con los que interactúa.	3
2.1. Esquema con la elección de ejes coordenados. El eje X es el eje de propagación de los haces, el eje Z está fijo por la dirección de polarización del haz de acoplamiento (780 nm) y los fotones azules detectados se propagan en la dirección Y	8
2.2. Ejemplo de tres distintos modelos de un haz Bessel de orden cero. Figura (a): haz Bessel ideal que ocupa todo el espacio. Figura (b): haz Bessel ideal tras pasar por un iris de radio finito. Figura (c): haz Bessel modificado (ver texto).	22
2.3. Gráfica de $\alpha_m(s_B)$ y $\beta_m(s_B)$ para los órdenes 0, 4, 8. Las líneas verticales punteadas indican la posición del primer anillo oscuro para cada orden distinto de la función Bessel ideal. La línea gruesa color gris indica la recta $y = \frac{s_B}{\pi}$	29
3.1. Esquema experimental para la generación de haces Bessel de distintos órdenes. Un axicón modula la amplitud del haz mientras que el SLM le induce una fase tipo vórtice.	31
3.2. Una visión simple del axicón.	32
3.3. Diagrama de flujo para explicar parte del código de control del SLM.	34
3.4. Una muestra de algunas funciones incluidas en el software de control del SLM. Nótese que <code>capturaImg</code> requiere que esté conectada una cámara por USB, mientras que las demás funciones requieren que el controlador del SLM esté conectado vía DVI.	35
3.5. Diagrama para mostrar esquemáticamente el procedimiento utilizado para calibrar el SLM. Las flechas sólidas indican señales de entrada o salida y la flecha ondulada representa a la luz viajando desde el SLM hasta el sensor CCD.	36
3.6. Estas gráficas muestran la variación de la intensidad registrada por el CCD (de una webcam) de los órdenes ± 1 como función del tono de gris utilizado para inducir la fase tipo rejilla en el haz.	36

3.7.	Fotografías del perfil de intensidad del haz Bessel para distintos órdenes. Los números en los ejes indican la posición del pixel. Cada pixel mide $5.3 \mu\text{m}$	36
4.1.	Dispositivo experimental completo. Las etiquetas indican: M→espejo, P→polarizador, PBS→cubo polarizador, F→filtro pasa-bandas (azul), PD→fotodiodo, T→telescopio. La línea negra punteada encierra el sistema de anclado en frecuencia del láser de 780 nm. El propósito de las otras dos líneas punteadas (verde y roja) se explicará en la sección 4.2.	38
5.1.	Fotografía del perfil transversal del haz de 780 nm. Las líneas rojas indican el centro (aproximado) del haz. Las líneas azules(verdes) indican el inicio y el fin de los cortes verticales(horizontales) graficados en la figura 5.2.	46
5.2.	Cortes del perfil de intensidad del haz de 780nm. (A): gráfica de 500 cortes verticales. (B): gráfica de 200 cortes horizontales. En ambas imágenes la línea negra indica el corte en el centro del haz, las líneas rojas punteadas indican el ancho, mínimo y máximo, estimado del haz.	47
5.3.	1er experimento: Fotografías del papel cuadriculado (arriba) y del perfil de intensidad del haz Bessel de orden cero (abajo) tras ser dispersado por el papel. La imagen inferior no está en escala de grises ya que, para evitar saturación, la fotografía es muy oscura.	49
5.4.	1er experimento: Distribución radial de intensidad del haz Bessel de orden cero. Los puntos negros son el resultado del análisis de la fotografía y la línea verde es el ajuste.	51
5.5.	1er experimento: Distribución radial de intensidad de varios órdenes distintos del haz Bessel. Los puntos negros son el resultado del análisis de las fotografías y las líneas verdes son los ajustes.	52
5.6.	1er experimento: Fotografías y ajustes de algunos órdenes del haz Bessel. Las gráficas están recortadas al tamaño del haz de 780 nm.	53
5.7.	1er experimento: Valores de la intensidad efectiva, calculados al traslapar imágenes de los perfiles de intensidad de ambos haces de excitación y sumando todas las entradas de la matriz resultante. Estos valores se utilizarán más adelante como factores de normalización al comparar espectros.	54
5.8.	1er experimento: Ejemplo de eliminación de espectros ‘defectuosos’ y centrado de pico alto, para el haz Bessel de orden 5.	56
5.9.	1er experimento: Promedio de las alturas ajustadas a los tres picos de los espectros.	57
5.10.	2do experimento: Distribución radial de intensidad de varios órdenes distintos del haz Bessel. Los puntos negros son el resultado del análisis de las fotografías y las líneas verdes son los ajustes.	59

5.11. 2do experimento: Fotografías y ajustes de algunos órdenes del haz Bessel. Las gráficas están recortadas al tamaño del haz de 780 nm.	60
5.12. 2do experimento: Valores de la intensidad efectiva, calculados al traslapar imágenes de los perfiles de intensidad de ambos haces de excitación y sumando todas las entradas de la matriz resultante. Comparar con las gráficas de la figura 5.7.	61
5.13. 2do experimento: Ejemplo de eliminación de espectros ‘defectuosos’ y centrado del pico más alto, para el haz Bessel de orden 7.	62
5.14. 3er experimento: Corroboración de la Ley de Malus para los haces de excitación. Los puntos azules son los datos experimentales y la línea negra es el ajuste a dichos datos de la función $f(x) = A \cos^2(x - \phi)$	64
5.15. Cortes del perfil de intensidad Gaussiano del haz de 911 nm. (A): gráfica de 44 cortes verticales. (B): gráfica de 64 cortes horizontales. En ambas imágenes la línea negra es el promedio de dichos cortes y la línea roja el ajuste.	66
5.16. 3er experimento: Distribución radial de intensidad de varios órdenes distintos del haz Bessel. Los puntos negros son el resultado del análisis de las fotografías y las líneas verdes son los ajustes.	67
5.17. 3er experimento: Fotografías y ajustes del haz de 911 nm. Las gráficas están recortadas al tamaño del haz de 780 nm.	68
5.18. 3er experimento: (A.1) y (B.1) Todos los espectros medidos para el caso del haz Gaussiano con polarizaciones perpendiculares y paralelas, respectivamente. La señal triangular indica el voltaje aplicado al piezo del láser de 911 nm (no se muestra su escala en el eje Y). (A.2) y (B.2) En gris: promedio de los espectros de las figuras A.1 y B.1. En negro: ajuste de tres Lorentzianas. En rojo: predicción teórica de las alturas de los picos (ver capítulo 2).	70
6.1. 1er experimento: Promedio normalizado de las alturas de los tres picos de cada espectro. La normalización se realizó a partir de los valores de la intensidad efectiva (ver figura 5.7).	74
6.2. 2do experimento: En gris: promedio de los espectros obtenidos para el haz Bessel de orden 6. En negro: un ajuste de tres Lorentzianas. En rojo: predicción teórica de las alturas de los picos (ver sección 6.1), para un ángulo relativo entre polarizaciones $\theta \simeq 0.36\pi$	76
6.3. 2do experimento: Promedio de las alturas ajustadas a los tres picos de los espectros. Las líneas rojas punteadas indican la predicción teórica para un ángulo relativo entre polarizaciones $\theta \simeq 0.36\pi$	76

6.4.	3er experimento: Distribución angular de las líneas de los espectros, para el caso Gaussiano, como función del ángulo relativo entre la polarización del haz de 911 nm y la polarización del haz de 780 nm. Los puntos son los resultados experimentales y la línea sólida es la predicción teórica. En los puntos experimentales se utilizan marcas triangulares, circulares y cuadradas para indicar las transiciones a los estados hiperfinos con $F'' = 3$, $F'' = 2$ y $F'' = 1$, respectivamente.	78
6.5.	3er experimento: Distribución angular de las líneas de los espectros, para distintos órdenes del haz Bessel, como función del ángulo relativo entre la polarización del haz de 911 nm y la polarización del haz de 780 nm. Los puntos son los resultados experimentales y la línea sólida es la predicción teórica. En los puntos experimentales se utilizan marcas triangulares, circulares y cuadradas para indicar las transiciones a los estados hiperfinos con $F'' = 3$, $F'' = 2$ y $F'' = 1$, respectivamente. . .	79

Capítulo 1

Introducción

Los haces Bessel son soluciones de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas, fueron propuestos de manera teórica por Durnin en 1987 [1] y ese mismo año Durnin y col. [2] realizaron una propuesta para generar de manera experimental un haz que aproxima a un haz Bessel ideal. Sus dos características principales son: que el módulo cuadrado de su amplitud es independiente de la posición en el eje de propagación, lo que se conoce como adifraccionalidad; y que el frente de onda tiene una fase azimutal descrita por $e^{im\phi}$, lo que implica que dichos haces transportan un momento angular orbital (OAM) igual a $m\hbar$ por fotón [3].

El estudio de la interacción entre materia y haces Bessel ha generado en el pasado mucho trabajo teórico y experimental, para una revisión de dichos trabajos se sugiere revisar la discusión al respecto de McGloin y Dholakia [4]. Algunas aplicaciones interesantes son su uso en trampas atómicas dipolares y como guías de onda [5] así como su uso en óptica no lineal, como en el caso de la generación de segundos armónicos (SHG) [6].

Una aplicación mucho más relacionada con el presente proyecto es el uso de los haces Bessel en el campo de las pinzas ópticas, donde se utilizan para micro-manipular partículas dieléctricas. La adifraccionalidad de los haces Bessel permite trasladar partículas una distancia mayor a lo que la longitud de Rayleigh de un haz Gaussiano permitiría [7]. Existen estudios tanto teóricos como experimentales sobre la transferencia de OAM de la luz hacia las micro-partículas atrapadas [8]. Como resultado de dicha transferencia las partículas atrapadas orbitan alrededor del centro del haz Bessel y la velocidad angular a la que giran es proporcional al OAM transferido [9, 10], lo cual es independiente del giro inducido debido a la polarización de los haces.

Aún más relacionado con el proyecto actual es el estudio de la interacción entre átomos y haces Bessel. Desde 1994 se había encontrado que cuando átomos absorben luz con OAM $m\hbar$ se induce una torca proporcional a m [11] en sus coordenadas externas (centro de masa). De hecho, el OAM puede ser transferido no sólo a las coordenadas externas sino también a las coordenadas internas de los átomos [12].

Es en este punto donde radica el interés principal del presente trabajo, motivado

por los estudios teóricos realizados en el tema por la Dra. Rocío Jáuregui Renaud, quien en 2004 [13] estudió la probabilidad de que un átomo emitiera un fotón tipo Bessel fuera del límite paraxial, tanto para átomos libres como para átomos sujetos a una trampa armónica. Más tarde en 2015, y con ayuda del trabajo realizado sobre las propiedades de los haces Bessel [14, 15], la Dra. Jáuregui extendió su trabajo para predecir teóricamente como al interactuar con radiación electromagnética las tasas de transición, tanto en las coordenadas internas como externas de un átomo, deben ser afectadas por la estructura del haz de excitación utilizado [16]. En particular encontró que una transición cuadrupolar eléctrica debe facilitar la observación de los efectos causados por la transferencia de OAM de la luz hacia las coordenadas internas del átomo, cuando su centro de masa cumple ciertas condiciones específicas. Las transiciones cuadrupolares eléctricas son aquellas descritas por el segundo término de la expansión multipolar y son prohibidas por las reglas de selección en la aproximación dipolar eléctrica.

Con esto en mente el *Laboratorio de Átomos Fríos*, en colaboración con la Dra. Jáuregui, se puso como tarea estudiar de manera experimental este fenómeno. En este laboratorio se trabaja con rubidio atómico y se encontró que la transición cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ podía ser un buen candidato para realizar el estudio. Este tipo de transiciones son mucho menos probables que las dipolares eléctricas (para más detalles ver capítulo 2), por lo que su estudio requiere espectroscopías de precisión, lo cual es la especialidad del laboratorio. En 2014 se construyó y caracterizó un láser de diodo de 911 nm [17] que, con ayuda de un sistema de detección [18] y amplificación [19], permitió medir experimentalmente dicha transición [20, 21]. Para lograr esto se midió la presencia de fotones de 420 nm emitidos de manera espontánea por los átomos de rubidio, lo que ocurre únicamente cuando dichos átomos absorben dos fotones, cada uno de 780 nm y 911 nm, que inducen las transiciones dipolar y cuadrupolar eléctricas $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ (ver figura 1.1).

Este fue el punto de partida para el presente trabajo, en el cual se estudió esta transición cuadrupolar eléctrica utilizando haces Bessel con distintas cargas topológicas, esperando así definir si era posible detectar de manera experimental, en átomos a temperatura ambiente, cambios en las tasas de transición internas de los átomos debido a la cantidad de OAM transportado por la radiación electromagnética.

Ya avanzado este proyecto, en el *Laboratorio de Átomos Fríos* se encontró en un proyecto paralelo que era posible utilizar las reglas de selección cuadrupolares para controlar, con la polarización de la radiación, la distribución de población en el estado excitado $6P_{3/2}$ [22, 23]. Este efecto se estudió de manera experimental y se desarrolló un modelo teórico que describe el fenómeno. El modelo aprovecha el hecho de que la transición cuadrupolar eléctrica es mucho menos probable que la dipolar eléctrica, de modo que el haz de 911 nm actúa como un haz de prueba en el proceso de excitación. Para el presente trabajo se realizó una generalización de dicho modelo para poder incluir haces Bessel en la descripción.

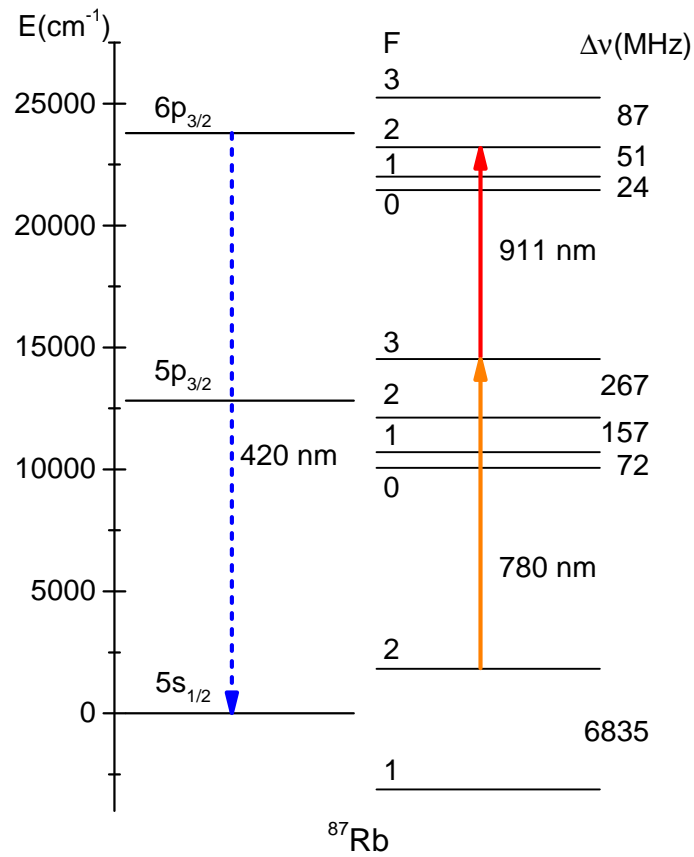


Figura 1.1: Diagrama de niveles energéticos del átomo de rubidio junto con los campos electromagnéticos con los que interactúa.

El contenido de este trabajo se presenta de la siguiente manera: en el capítulo 2 se encuentra el desarrollo de la teoría necesaria para la generalización del modelo antes mencionado, al cual se le llama modelo de tres pasos. Dicho capítulo concluye presentando las ecuaciones que predicen la probabilidad de medir fotones azules emitidos espontáneamente por átomos doblemente excitados. El capítulo 3 está dedicado a describir el sistema experimental utilizado para generar haces Bessel, que consta principalmente de un axicón y un modulador de fase espacial (SLM¹). Ahí mismo se describe el método de caracterización de dicho sistema. En el capítulo 4 se presenta con detalle el montaje experimental completo para realizar los experimentos principales del proyecto, así como la metodología utilizada para realizar las mediciones asociadas a dichos experimentos. El análisis de los datos experimentales se encuentra en el capítulo 5, además de un análisis de las propiedades de los haces de excitación. El resumen de los resultados obtenidos en el capítulo de análisis se encuentra en el capítulo 6, así como los resultados del modelo teórico del capítulo 2. Finalmente se concluye en el capítulo 7, donde además se plantean proyectos para el futuro.

¹Por sus siglas en inglés: Spatial Light Modulator

Capítulo 2

Modelo de tres pasos con haces Bessel

En este capítulo se presenta la generalización de un modelo, desarrollado en [22] y publicado en [21, 23], que calcula la probabilidad de observar fotones azules emitidos por el decaimiento espontáneo de átomos de rubidio desde el estado $6P_{3/2}$ hacia su estado base (ver figura 1.1). La presencia de estos fotones azules es justamente lo que se mide en el experimento del presente trabajo. El modelo original simula los campos electromagnéticos como ondas planas, la generalización desarrollada aquí consiste en describir el haz de excitación cuadrupolar como un haz Gaussiano o como un haz Bessel.

Este capítulo está dividido en cinco secciones. La primer sección describe el tratamiento semiclásico del acoplamiento entre la radiación electromagnética y un átomo hidrogenoide, lo cual permite deducir la forma general de los elementos de matriz que describen las transiciones atómicas. En la siguiente sección se plantea la ecuación principal que describe el modelo de tres pasos, para mayor detalle se sugiere consultar la tesis del Dr. Mojica [22]. Posteriormente se muestra el tratamiento con tensores esféricos para resolver los elementos de matriz para la transición cuadrupolar y para el decaimiento (dipolar) espontáneo. En la sección posterior se analizan los casos en que la luz láser se modela como un haz Gaussiano o como un haz Bessel. Finalmente se incluye una sección donde se muestra un resumen de las ecuaciones obtenidas para el modelo, de modo que su consulta sea más simple.

2.1. Elementos de matriz: dipolares y cuadrupolares

En el apéndice A se muestra que el Hamiltoniano de interacción para un átomo hidrogenoide en presencia de un campo electromagnético es (ver ecuación (A.12)):

$$H_I = \frac{e}{m_e} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) \quad (2.1)$$

Donde e es la carga del electrón, m_e es su masa, \vec{p} es el operador-momento para las coordenadas internas del átomo y \vec{r}_e es el operador-posición para las coordenadas del electrón. Este es el tipo de interacción estudiado en la referencia [16]. En el mismo apéndice A se muestra que la amplitud de transición debido a este Hamiltoniano de interacción esta dada por:

$$\begin{aligned} T_{0F} &= \langle \Psi^F | H_I | \Psi^0 \rangle \\ &= \omega_{0F} \frac{\mu}{m_e} \int d\omega S(\omega) \frac{1}{\omega} e^{i(\omega_{0F}-\omega)t} \int d^3\vec{k} \delta\left(k_{\parallel} - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2}\right) \times \\ &\quad \times \langle \phi_{CM}^F | e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} | \phi_{CM}^0 \rangle \langle \phi_{rel}^F | e^{i\frac{\mu}{m_e} \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{\vec{r}} | \phi_{rel}^0 \rangle \cdot \vec{E}(k_{\perp}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde $\hbar\omega_{0F} = E^{(F)} - E^{(0)}$; \vec{r} y \vec{R} son los operadores de posición para las coordenadas relativas y del centro de masa, respectivamente; S es la distribución espectral de la luz y $\vec{E}(k_{\perp})$ es el campo eléctrico en el espacio de momentos \vec{k} .

El factor $\langle \phi_{CM}^F | e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} | \phi_{CM}^0 \rangle$ indica que el átomo debe cambiar su momento en un valor igual a $\hbar\vec{k}$ [24] al absorber la radiación electromagnética. Esto es muy importante cuando se quiere enfriar átomos, por ejemplo, en una trampa magneto óptica. Sin embargo en el presente trabajo los átomos se encuentran dentro de una celda a temperatura ambiente, lo que quiere decir que entran y salen de la zona de interacción con la luz tan rápidamente que estos cambios en momento pasan desapercibidos. Por lo cual es razonable pensar que el estado de movimiento del centro de masa de los átomos no es afectado por el Hamiltoniano de interacción aquí estudiado, o dicho de otra manera $|\phi_{CM}^F\rangle = |\phi_{CM}^0\rangle$. Dado que se quiere encontrar una expresión para la amplitud de transición, se utilizará una descripción semiclassical del átomo de tal manera que sus coordenadas externas se tratarán como las de un sistema clásico mientras que las internas se seguirán tratando como las de un sistema cuántico. De modo que los eigenestados del Hamiltoniano sin interacción serán ahora $|\Psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{rel}^{(i)}t} |\phi_{rel}\rangle$ y \vec{R} ya no representará un operador sino la posición, desde el punto de vista clásico, del centro de masa del átomo. Con lo cual la amplitud de transición se reescribe como

$$\begin{aligned} T_{0F} &= \omega_{0F} \frac{\mu}{m_e} \int d\omega S(\omega) \frac{1}{\omega} e^{i(\omega_{0F}-\omega)t} \int d^3\vec{k} \delta\left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2}\right) \times \\ &\quad \times e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \langle \phi_{rel}^F | e^{i\frac{\mu}{m_e} \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{\vec{r}} | \phi_{rel}^0 \rangle \cdot \vec{E}(k_{\perp}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde ahora $\hbar\omega_{0F} = E_{rel}^{(F)} - E_{rel}^{(0)}$.

Dado que este modelo pretende predecir los resultados obtenidos durante el trabajo experimental, el cual se realizó con láseres de onda continua, tiene sentido asumir que el espectro de frecuencias está descrito por una Delta de Dirac centrada en la frecuencia de emisión del láser: $S(\omega) = \delta(\omega - \omega_\ell)$, si además se asume que dicha frecuencia se encuentra en sintonía con la transición que se intenta inducir entonces $\omega_\ell \simeq \omega_{0F}$. Por otro lado, se puede aproximar $\mu \simeq m_e$ y, dado que $\vec{k} \cdot \vec{r} \simeq 3 \times 10^{-3} \ll 1$, se puede aproximar $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \simeq 1 + i\vec{k} \cdot \vec{r}$. Tomando en cuenta todo lo anterior y eligiendo el eje X como eje de propagación del campo (por razones que se darán más adelante), se puede hacer el siguiente tratamiento a la expresión para la amplitud de transición:

$$\begin{aligned}
T_{0F} &= \int d^3\vec{k} \delta\left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2}\right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \langle \phi_{rel}^F | (1 + i\vec{k} \cdot \vec{r}) e\vec{r} | \phi_{rel}^0 \rangle \cdot \vec{E}(k_\perp) \\
&= \langle \phi_{rel}^F | \left(\int d^3\vec{k} \delta\left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2}\right) (1 + i\vec{k} \cdot \vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \vec{E}(k_\perp) \right) \cdot e\vec{r} | \phi_{rel}^0 \rangle \\
&= \langle \phi_{rel}^F | \left(\int d^3\vec{k} \delta\left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2}\right) (1 + \vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \vec{E}(k_\perp) \right) \cdot e\vec{r} | \phi_{rel}^0 \rangle \\
&= \langle \phi_{rel}^F | (1 + \vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r}) \left(\int d^3\vec{k} \delta\left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2}\right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \vec{E}(k_\perp) \right) \cdot e\vec{r} | \phi_{rel}^0 \rangle \\
&= \langle \phi_{rel}^F | (1 + \vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r}) (e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | \phi_{rel}^0 \rangle \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Los dos términos de la ecuación anterior describen procesos de excitación distintos:

$$\text{Transición dipolar eléctrica} \rightarrow \langle \phi_{rel}^F | e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}) | \phi_{rel}^0 \rangle$$

$$\text{Transición cuadrupolar eléctrica} \rightarrow \langle \phi_{rel}^F | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r}) (e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | \phi_{rel}^0 \rangle$$

Cuando $\langle \phi_{rel}^F | e\vec{r} | \phi_{rel}^0 \rangle \neq 0$ el segundo término es despreciable, y se dice que se trata de una transición dipolar eléctrica. Cuando $\langle \phi_{rel}^F | e\vec{r} | \phi_{rel}^0 \rangle = 0$ se dice que la transición es prohibida por las reglas de selección dipolares, y es necesario incluir el segundo término que describe una transición cuadrupolar eléctrica.

2.2. Introducción al modelo de tres pasos

El modelo describe la probabilidad de observar un fotón azul, resultante del decaimiento espontáneo $6P_{3/2} \rightsquigarrow 5S_{1/2}$ para un átomo de rubidio excitado por dos láseres

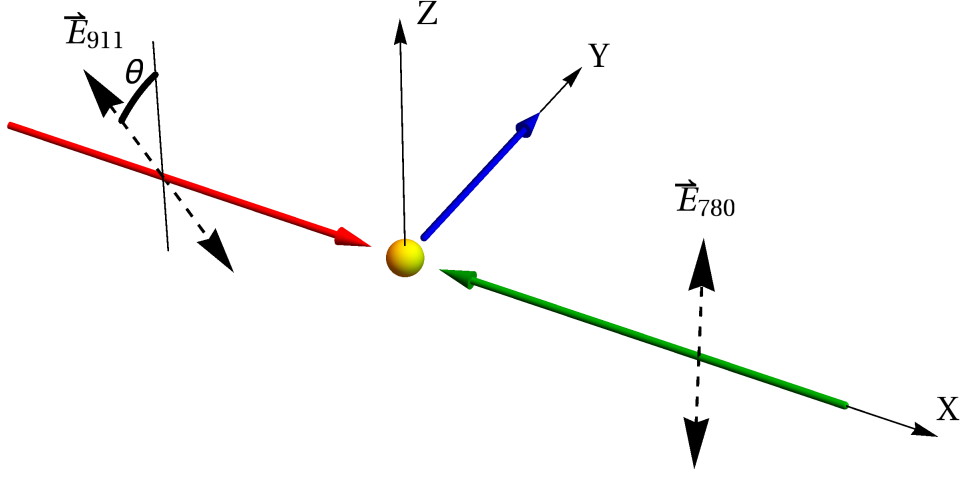


Figura 2.1: Esquema con la elección de ejes coordenados. El eje X es el eje de propagación de los haces, el eje Z está fijo por la dirección de polarización del haz de acoplamiento (780 nm) y los fotones azules detectados se propagan en la dirección Y .

en resonancia con las transiciones: dipolar eléctrica $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ y cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$. El cálculo analiza por separado los tres procesos anteriores, esquematizados en la figura 1.1, de modo que para calcular la probabilidad de observar fotones azules calcula por separado la probabilidad de que ocurra cada uno de los procesos. Esto es válido únicamente cuando el acoplamiento entre los niveles $5P_{3/2} - 6P_{3/2}$ es muy débil comparado con el acoplamiento entre los niveles $5S_{1/2} - 5P_{3/2}$. Siendo este el caso, se nombra al haz que genera la transición dipolar *haz de acoplamiento* y al haz que genera la transición cuadrupolar *haz de prueba*. Para el presente trabajo se utilizó un haz de acoplamiento con polarización lineal, lo cual sugiere que una buena opción es elegir que la dirección del eje de cuantización (eje Z) coincida con la dirección de polarización de dicho haz. Dejando entonces el eje X como el eje de propagación de los haces, esto se puede ver gráficamente en la figura 2.1. La ecuación que describe la separación en probabilidades descrita arriba es

$$\begin{aligned} \tilde{P}(F_3; \rho, \phi, x_{cm}) = & \sum_{M_3=-F_3}^{F_3} \sum_{M_2=-F_2}^{F_2} \sum_{F'_1=1}^2 \sum_{M'_1=-F'_1}^{F'_1} \sigma(F_2, M_2) \left| \langle 6P_{3/2}; F_3, M_3 | D_{xz}^{(1)} | 5S_{1/2}; F'_1, M'_1 \rangle \right|^2 \\ & \times \left| \langle 6P_{3/2}; F_3, M_3 | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | 5P_{3/2}; F_2, M_2 \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde \vec{R} indica la posición del centro de masa del átomo, que en coordenadas cilíndricas se escribe como $\vec{R} = (\rho, \phi, x_{cm})$ con $\rho = \sqrt{z_{cm}^2 + y_{cm}^2}$ y $\phi = \arctan(\frac{z_{cm}}{y_{cm}})$.

Cada uno de los factores en la expresión anterior se explicarán por separado:

1. $\sigma(F_2, M_2)$

El haz de acoplamiento induce una transición cíclica en los átomos de rubidio de modo que se establece una población de equilibrio en el estado $|5P_{3/2}; F_2, M_2\rangle$ con $F_2 = 3$ para ^{87}Rb ¹. A la distribución en los subniveles magnéticos de dicha población se le denomina $\sigma(F_2, M_2)$. Para el presente trabajo no se realizó el cálculo de este factor, en cambio se utilizaron los resultados obtenidos en las dos referencias [22, 25]. La primera utiliza la aproximación de evolución temporal de poblaciones de Einstein y la segunda utiliza el formalismo de matriz densidad para plantear las ecuaciones de Bloch y resolverlas numéricamente. Ambos métodos arrojan el mismo resultado.

2. $\left| \langle 6P_{3/2}; F_3, M_3 | D_{xz}^{(1)} | 5S_{1/2}; F_1, M_1 \rangle \right|^2$

Este factor indica la probabilidad de que fotones azules que se propagan en la dirección Y sean emitidos de manera espontánea debido al decaimiento a partir del nivel $|6P_{3/2}; F_3, M_3\rangle$ hacia el estado base. El cálculo de este factor se desarrolla en la sección 2.3.1.

3. $\left| \langle 6P_{3/2}; F_3, M_3 | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | 5P_{3/2}; F_2, M_2 \rangle \right|^2$

Este factor calcula la probabilidad de que un fotón de 911 nm sea absorbido por un átomo de rubidio, dando lugar a la transición cuadrupolar antes mencionada. Nótese que este factor incluye la dependencia en la posición del centro de masa. Los detalles sobre el cálculo de este factor se muestran en la sección 2.3.2.

2.3. Sobre tensores esféricos

Por comodidad, a partir de este punto se utilizará la notación $|i\rangle$ para referir a los eigenestados estacionarios $|\phi_{rel}\rangle$ del Hamiltoniano hidrogenoide. Estos estados son $|i\rangle = |n s l J I F M_F\rangle$, donde $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ y $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$. Nótese que sin la presencia de campos magnéticos, hay degeneración en las proyecciones M_F del momento angular total \vec{F} . Los elementos de matriz de un tensor esférico de rango k se pueden calcular utilizando el conocido **Teorema de Wigner-Eckart**²:

$$\begin{aligned} \langle n' \frac{1}{2} l' J' I F' M'_F | T_q^{(k)} | n \frac{1}{2} l J I F M_F \rangle = \\ (-1)^{F'-M'_F} \begin{pmatrix} F' & k & F \\ -M'_F & q & M_F \end{pmatrix} \langle n' \frac{1}{2} l' J' I F' || T^{(k)} || n \frac{1}{2} l J I F \rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Para ^{85}Rb es $F_2 = 4$.

²[26, (pp57)], [27, (pp77)], [28, (pp75)], [29, (pp1076)]

Bajo la suposición de que $T^{(k)}$ no actúa sobre el momento de espín nuclear I , el término $\langle n' \frac{1}{2} l' J' I F' | T^{(k)} | n \frac{1}{2} l J I F \rangle$ se puede reescribir desacoplando los momentos \vec{J} e \vec{I} (ver [28, eq.(7.1.7) pp111]) de la siguiente manera

$$\langle n' \frac{1}{2} l' J' I F' | T^{(k)} | n \frac{1}{2} l J I F \rangle = (-1)^{J'+I+F+k} \sqrt{(2F+1)(2F'+1)} \left\{ \begin{matrix} J' & F' & I \\ F & J & k \end{matrix} \right\} \langle n' \frac{1}{2} l' J' | T^{(k)} | n \frac{1}{2} l J \rangle \quad (2.7)$$

Por lo que el elemento de matriz para un tensor esférico de rango k es

$$\langle n' \frac{1}{2} l' J' I F' M'_F | T_q^{(k)} | n \frac{1}{2} l J I F M_F \rangle = (-1)^{F'-M'_F+J'+I+F+k} \sqrt{(2F+1)(2F'+1)} \left(\begin{matrix} F' & k & F \\ -M'_F & q & M_F \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} J' & F' & I \\ F & J & k \end{matrix} \right\} \langle n' \frac{1}{2} l' J' | T^{(k)} | n \frac{1}{2} l J \rangle \quad (2.8)$$

2.3.1. Tensor dipolar

Operador decaimiento espontáneo

La probabilidad de que fotones azules que se propagan en la dirección Y sean emitidos espontáneamente debido al decaimiento $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$, está dada por $|\langle 3 | D_{xz}^{(1)} | 1 \rangle|^2 = q^2 |\langle 3 | x + z | 1 \rangle|^2$, donde $D_{xz}^{(1)} = q(x + z)$ es el operador de decaimiento. Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{-1}^1 - Y_{+1}^1) \\ y &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{i}{\sqrt{2}} (Y_{-1}^1 + Y_{+1}^1) \\ z &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_0^1 \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} |\langle 3 | D_{xz}^{(1)} | 1 \rangle|^2 &= q^2 |\langle 3 | x + z | 1 \rangle|^2 \\ &= \frac{4\pi}{3} q^2 |\langle 3 | r \left(\frac{Y_{-1}^1 - Y_{+1}^1}{\sqrt{2}} + Y_0^1 \right) | 1 \rangle|^2 \end{aligned}$$

Utilizando entonces la ecuación (2.8) para los armónicos esféricos se obtiene

$$\begin{aligned} |\langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 I F_3 M_{F_3} | D_{xz}^{(1)} | n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 I F_1 M_{F_1} \rangle|^2 &= \\ &= \frac{4\pi}{3} q^2 |\langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 | r | n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 \rangle|^2 (2F_1+1)(2F_3+1) \left\{ \begin{matrix} J_3 & F_3 & I \\ F_1 & J_1 & 1 \end{matrix} \right\}^2 \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\begin{matrix} F_3 & 1 & F_1 \\ -M_{F_3} & -1 & M_{F_1} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} F_3 & 1 & F_1 \\ -M_{F_3} & 1 & M_{F_1} \end{matrix} \right) \right] + \left(\begin{matrix} F_3 & 0 & F_1 \\ -M_{F_3} & 0 & M_{F_1} \end{matrix} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Una de las condiciones necesarias para que un símbolo 3-j arbitrario $\begin{pmatrix} j & j' & j'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix}$ sea distinto de cero, es que la suma de las proyecciones (renglón inferior) sea cero: $m + m' + m'' = 0$. Esto permite reescribir la ecuación (2.9) como:

$$\begin{aligned} & \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 I F_3 M_{F_3} | D_{xz}^{(1)} | n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 I F_1 M_{F_1} \rangle \right|^2 = \\ & = \frac{4\pi}{3} q^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 | r | n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 \rangle \right|^2 (2F_1 + 1)(2F_3 + 1) \left\{ \begin{matrix} J_3 & F_3 & I \\ F_1 & J_1 & 1 \end{matrix} \right\}^2 \\ & \times \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} F_3 & 1 & F_1 \\ -M_{F_3} & -1 & M_{F_1} \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F_3 & 1 & F_1 \\ -M_{F_3} & 1 & M_{F_1} \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} F_3 & 1 & F_1 \\ -M_{F_3} & 0 & M_{F_1} \end{pmatrix}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por comodidad se define una expresión que incluye la parte geométrica como:

$$g_q^k(i, j) = (2F_i + 1)(2F_j + 1) \left\{ \begin{matrix} J_j & F_j & I \\ F_i & J_i & k \end{matrix} \right\}^2 \begin{pmatrix} F_j & k & F_i \\ -M_{F_j} & q & M_{F_i} \end{pmatrix}^2 \quad (2.11)$$

De modo que

$$\boxed{\begin{aligned} & \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 I F_3 M_{F_3} | D_{xz}^{(1)} | n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 I F_1 M_{F_1} \rangle \right|^2 = \\ & = \frac{4\pi}{3} q^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 | r | n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 \rangle \right|^2 \left[\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right] \end{aligned}} \quad (2.12)$$

2.3.2. Tensor cuadrupolar

Construcción del tensor cuadrupolar esférico

Lo que se quiere conocer es el valor de

$$\left| \langle 3 | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | 2 \rangle \right|^2 \quad (2.13)$$

Para lo cual es muy útil introducir el concepto de tensor cuadrupolar:

$$Q_{ij} = q \frac{1}{2} (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) \quad (2.14)$$

Las definiciones de este tensor varían de autor a autor:

Sobelman [27, ec.(6.8)] lo define como: $Q_{ij} \equiv q(3r_i r_j - \delta_{ij} r^2)$

Cohen-Tannoudji [30, capítulo IV ec.(C.32.c)] lo define: $Q_{ij} \equiv \frac{1}{2} q(r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2)$

Sin embargo todos coinciden en que se puede escribir en términos de tensores esféricos como:

$$Q_p^{(2)} = q r^2 C_p^2 \quad p = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.15)$$

Donde $C_p^l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_p^l$. En el apéndice B.1 se demuestra con detalle lo anterior. Definiendo un segundo tensor:

$$(\mathcal{K}_{\vec{R}})_{jk} \equiv \partial_j E_k(\vec{R}) \quad (2.16)$$

Se tiene entonces que:

$$(\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\mathcal{K}_{\vec{R}})_{jk} Q_{jk} \quad (2.17)$$

O en término de tensores esféricos:

$$(\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) = \sum_{p=-2}^2 (-1)^p (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} Q_{-p}^{(2)} \quad (2.18)$$

La demostración de las ecuaciones (2.17) y (2.18) se encuentra en los apéndices B.2 y B.3 respectivamente.

Elemento de matriz cuadrupolar

Utilizando el resultado anterior y que $(\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)}$ no depende de las coordenadas internas del átomo, la expresión (2.13) resulta ser igual a:

$$\begin{aligned} \left| \langle 3 | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | 2 \rangle \right|^2 &= \left| \langle 3 | \sum_{p=-2}^2 (-1)^p (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} Q_{-p}^{(2)} | 2 \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{p=-2}^2 (-1)^p (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} \langle 3 | Q_{-p}^{(2)} | 2 \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Utilizando entonces la ecuación (2.8) para elementos de matriz de tensores esféricos, uno puede escribir:

$$\begin{aligned} \langle n' \frac{1}{2} l' J' I F' M'_F | Q_p^{(2)} | n \frac{1}{2} l J I F M_F \rangle &= (-1)^{F'-M'_F+J'+I+F+2} \sqrt{(2F+1)(2F'+1)} \\ &\times \begin{pmatrix} F' & 2 & F \\ -M'_F & p & M_F \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} J' & F' & I \\ F & J & 2 \end{matrix} \right\} \langle n' \frac{1}{2} l' J' | |q r^2| | n \frac{1}{2} l J \rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nótese entonces que dadas M'_F y M_F , hay un solo valor de p para el cual $\langle 3 | Q_{-p}^{(2)} | 1 \rangle \neq 0$. Lo cual quiere decir que

$$\left| \sum_{p=-2}^2 (-1)^p (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} \langle 3 | Q_{-p}^{(2)} | 2 \rangle \right|^2 = \sum_{p=-2}^2 |(\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)}|^2 \left| \langle 3 | Q_{-p}^{(2)} | 2 \rangle \right|^2 \quad (2.21)$$

Dejando finalmente la expresión

$$\begin{aligned}
& \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 I F_3 M_{F_3} | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 I_2 F_2 M_{F_2} \rangle \right|^2 = \\
& = q^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 | | r^2 | | n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 \rangle \right|^2 \times \\
& \times \sum_{p=-2}^2 \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} \right|^2 (2F_2 + 1)(2F_3 + 1) \left\{ \begin{matrix} J_3 & F_3 & I \\ F_2 & J_2 & 2 \end{matrix} \right\}^2 \left(\begin{matrix} F_3 & 2 & F_2 \\ -M_{F_3} & p & M_{F_2} \end{matrix} \right)^2 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la definición de $g_q^k(i, j)$ para la parte geométrica (ver ecuación (2.11)):

$$g_q^k(i, j) = (2F_i + 1)(2F_j + 1) \left\{ \begin{matrix} J_j & F_j & I \\ F_i & J_i & k \end{matrix} \right\}^2 \left(\begin{matrix} F_j & k & F_i \\ -M_{F_j} & q & M_{F_i} \end{matrix} \right)^2$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned}
& \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 I F_3 M_{F_3} | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 I_2 F_2 M_{F_2} \rangle \right|^2 = \\
& = q^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 | | r^2 | | n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 \rangle \right|^2 \sum_{p=-2}^2 \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} \right|^2 g_p^2(2, 3) \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Más adelante se probará que $\left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_i^{(2)} \right|^2 = \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_{-i}^{(2)} \right|^2$, por lo cual la expresión anterior se reescribe como:

$$\boxed{
\begin{aligned}
& \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 I F_3 M_{F_3} | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{r})(e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R})) | n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 I_2 F_2 M_{F_2} \rangle \right|^2 = \\
& = q^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 | | r^2 | | n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 \rangle \right|^2 \times \\
& \times \left(\left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_0^{(2)} \right|^2 g_0^2(2, 3) + \sum_{p=1}^2 \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} \right|^2 (g_p^2(2, 3) + g_{-p}^2(2, 3)) \right) \quad (2.24)
\end{aligned}
}$$

2.3.3. Dependencia espacial de la probabilidad

Utilizando las ecuaciones (encerradas en un recuadro) (2.12) y (2.24), y factorizando el elemento de matriz reducido se puede reescribir la ecuación (2.5) como:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(F_3; \rho, \phi, x_{cm}) &= \\
&= c_1 \left(\left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)} \right|_0^2 \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) (g_0^2(2, 3)) \right. \\
&\quad + \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)} \right|_1^2 \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) (g_1^2(2, 3) + g_{-1}^2(2, 3)) \\
&\quad \left. + \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)} \right|_2^2 \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) (g_2^2(2, 3) + g_{-2}^2(2, 3)) \right)
\end{aligned}$$

Donde

$$c_1 = \frac{4\pi}{3} q^4 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 \mid \mid r^2 \mid \mid n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 \rangle \right|^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 \mid \mid r \mid \mid n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 \rangle \right|^2 \quad (2.25)$$

Si además se definen los siguientes coeficientes

$$A_0 = \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) (g_0^2(2, 3)) \quad (2.26a)$$

$$A_i = \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) (g_i^2(2, 3) + g_{-i}^2(2, 3)) \quad (2.26b)$$

$i = 1, 2.$

Se obtiene que la probabilidad de observar fotones azules en la dirección Y es:

$$\tilde{P}(F_3; \rho, \phi, x_{cm}) = c_1 \sum_{p=0}^2 \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)} \right|_p^2 A_p \quad (2.27)$$

Nótese que la dependencia en \vec{R} de $\mathcal{K}_{\vec{R}}$ realmente está hablando de la dependencia en \vec{R} del campo eléctrico que induce la transición cuadrupolar. Es decir que la probabilidad de que un átomo emita fotones azules depende de lo que vale ese campo eléctrico en el punto del espacio definido por el centro de masa del átomo. Esto implica que si el átomo se encuentra fuera del haz de excitación cuadrupolar (donde $\vec{E} = 0$) entonces la probabilidad de que dicho átomo emita fotones azules es cero.

Si uno continúa por este camino podría desarrollar la expresión anterior para casos particulares, por ejemplo una onda plana, un haz Gaussiano o un haz Bessel, obteniendo así una expresión para la probabilidad que depende de \vec{R} . Sin embargo, por cómo se realizó el experimento del presente trabajo, no es posible identificar de qué punto específico del espacio provienen los fotones azules medidos por el detector (ver

sección 4.1.2). Por lo cual, para encontrar una expresión que prediga los resultados experimentales, es necesario sumar las contribuciones de los átomos distribuidos en todo el espacio. Esto se traduce en integrar la expresión (2.27), como se muestra a continuación.

$$P(F_3) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dV_{\vec{R}} \tilde{P}(F_3; \rho, \phi, x_{cm}) \varrho_{at}(\vec{R}) \quad (2.28)$$

Donde $\varrho_{at}(\vec{R})$ es la densidad de átomos. Dado que estos átomos se encuentran confinados en una celda cilíndrica entonces $\varrho_{at}(\vec{R}) = 0$ fuera del volumen de la misma, de modo que la integración se puede reducir a ese volumen: $\int_{\mathbb{R}^3} \leftrightarrow \int_{V_{celda}}$, donde el volumen de la celda se puede escribir como $V_{celda} = \ell A_{celda}$, es decir el área de la base circular por el largo de la celda. Más aún, los haces de excitación atraviesan la celda a todo lo largo, pero su anchos son mucho menores, y se requiere de ambos haces para que los átomos puedan emitir los fotones azules, por lo cual el área de integración se puede reducir al área definida por el ancho del haz de 911 nm, asumiendo que éste es menor que el ancho del haz de 780 nm. A esta área se le llamará A_c , de modo que

$$P(F_3) = \int_0^\ell dx \int_{A_c} dA_{\vec{R}} \tilde{P}(F_3; \rho, \phi, x_{cm}) \varrho_{at}(\vec{R}) \quad (2.29)$$

Nótese que para utilizar este procedimiento se tienen que despreciar dos efectos:

1. Los átomos no interactúan entre ellos (no hay colisiones).
2. Los fotones azules emitidos por un átomo no interactúan con otros átomos (no hay re-absorción ni re-emisión).

Asumiendo además que la distribución de átomos es uniforme, entonces la densidad de átomos dentro de la celda es constante.

Definiendo ahora una generalización del tensor \mathcal{K} como:

$$\mathcal{T}_p \equiv \int_0^\ell dx \int_{A_c} dA_{\vec{R}} |(\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)}|^2 \varrho_{at} \quad (2.30)$$

Entonces la probabilidad de medir fotones azules en la dirección Y , provenientes de algún punto dentro de la celda es:

$$P(F_3) = c_1 \sum_{p=0}^2 \mathcal{T}_p A_p \quad (2.31)$$

2.4. Análisis del tensor generalizado \mathcal{T}

2.4.1. Caso 1: Haz Gaussiano

En el caso en el que se modele el haz láser, utilizando la aproximación paraxial, como un haz Gaussiano que se propaga en el eje X , la parte espacial del campo eléctrico se puede escribir como:

$$\vec{E}(x) \simeq \hat{\epsilon} E_0 e^{ikx} e^{-\frac{z^2}{\rho_z^2} - \frac{y^2}{\rho_y^2}} \quad (2.32)$$

Donde $\hat{\epsilon} = \cos(\theta)\hat{z} + \sin(\theta)\hat{y}$ es el vector de polarización y ρ_z, ρ_y son los radios o cinturas del haz. En la expresión anterior se ha supuesto que $x \ll x_0$, siendo x_0 la longitud de Rayleigh, o dicho de otra manera se ha supuesto que se estudiará la luz en una sección del espacio en donde la cintura del haz se mantiene prácticamente constante. Para el experimento $|x| < 7$ cm (longitud de la celda de rubidio) y se utiliza un haz con $x_0 > 25$ cm, por lo cual la aproximación de la expresión anterior resulta válida. Utilizando entonces las ecuaciones (B.9) del apéndice B.3 para $(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}$ es fácil probar que

$$\begin{aligned} |(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}_0|^2 &= |E_0|^2 e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} \left(2\frac{z}{\rho_z^2}\right)^2 \cos^2 \theta \\ |(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}_{\pm 1}|^2 &= \frac{1}{6} |E_0|^2 e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} \left(\left(2\frac{z}{\rho_z^2}\right)^2 \sin^2 \theta + \left(k^2 \pm 2\frac{y}{\rho_y^2}\right)^2 \cos^2 \theta \right) \\ |(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}_{\pm 2}|^2 &= \frac{1}{6} |E_0|^2 e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} \left(2\frac{y}{\rho_y^2} \pm k^2\right)^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Antes de calcular los valores del tensor generalizado \mathcal{T}_p vale la pena notar que las tres expresiones anteriores se sumarán para poder calcular $P(F_3)$, sin embargo $2\frac{y}{\rho_y^2} \ll k$ y $2\frac{z}{\rho_z^2} \ll k$ por lo que es posible despreciar los términos que no contengan k^2 , quedando entonces³:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}_0|^2 &= 0 \\ |(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}_{\pm 1}|^2 &= \frac{1}{6} |E_0|^2 k^2 \cos^2 \theta e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} \\ |(\mathcal{K}_{\vec{R}})^{(2)}_{\pm 2}|^2 &= \frac{1}{6} |E_0|^2 k^2 \sin^2 \theta e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} \end{aligned}$$

³La sección del espacio limitada por $|y| \leq 2\rho_y$ y $|z| \leq 2\rho_z$ es donde se encuentra el 86% de la potencia del haz, utilizando los valores medidos experimentalmente para ρ_y y ρ_z (ver sección 5.4.2) se obtiene entonces que $2\frac{y}{\rho_y^2}, 2\frac{z}{\rho_z^2} \simeq 3 \times 10^4$ (para los máximos valores de $|y|$ y $|z|$). Por otro lado $k = \frac{2\pi}{\lambda} \simeq 7 \times 10^6$.

El siguiente paso es calcular el tensor generalizado $\mathcal{T}_p = \int_0^\ell dx \int_{A_c} dA_{\vec{R}} \left| (\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)} \right|^2 \varrho_{at}$. Nótese que la integral en x se realiza de manera trivial ya que $|(\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)}|^2$ no depende de x , dejando únicamente la integral en el área:

$$\mathcal{T}_0 = 0 \quad (2.33a)$$

$$\mathcal{T}_1 = \varrho_{at} \frac{\ell}{6} |E_0|^2 k^2 \cos^2 \theta \int_{A_c} e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} dA_{\vec{R}} \quad (2.33b)$$

$$\mathcal{T}_2 = \varrho_{at} \frac{\ell}{6} |E_0|^2 k^2 \sin^2 \theta \int_{A_c} e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} dA_{\vec{R}} \quad (2.33c)$$

Estas integrales se pueden resolver utilizando integrales Gaussianas, pero no es necesario, como se verá a continuación.

Para el experimento, al variar la estructura espacial del haz, se mantuvo constante la potencia, no la norma cuadrada del campo. De modo que para comparar los resultados obtenidos en los distintos experimentos no es útil una expresión que quede en términos de $|E_0|^2$. La potencia \mathcal{P} de un haz que se propaga a lo largo del eje X se puede calcular como $\mathcal{P} = \int_{A_c} \vec{S} \cdot \hat{x} dA_{\vec{R}}$, donde \vec{S} es el vector de Poynting. Tomando $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ y $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}/c$ entonces se puede obtener que

$$\mathcal{P} = \frac{1}{c\mu_0} \int_{A_c} (\hat{k} \cdot \hat{x}) |\vec{E}|^2 dA_{\vec{R}} \simeq \frac{1}{c\mu_0} \int_{A_c} |\vec{E}|^2 dA_{\vec{R}} \quad (2.34)$$

Donde se ha tomado $(\hat{k} \cdot \hat{x}) \simeq 1$ ya que se está trabajando con haces casi paraxiales. Nótese que el área de integración es A_c ya que fuera de esa área la amplitud del campo es cero. En este caso particular entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{c\mu_0} |E_0|^2 \int_{A_c} e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} dA_{\vec{R}} \\ \Rightarrow |E_0|^2 &= c\mu_0 \mathcal{P} \left(\int_{A_c} e^{-2\left(\frac{z^2}{\rho_z^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2}\right)} dA_{\vec{R}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Al substituir esto en las ecuaciones (2.33), la integral Gaussiana se cancela dejando únicamente

$$\mathcal{T}_0 = 0 \quad (2.36a)$$

$$\mathcal{T}_1 = c\mu_0 \varrho_{at} \frac{\ell}{6} \mathcal{P} k^2 \cos^2 \theta \quad (2.36b)$$

$$\mathcal{T}_2 = c\mu_0 \varrho_{at} \frac{\ell}{6} \mathcal{P} k^2 \sin^2 \theta \quad (2.36c)$$

Nótese que este resultado es igual al que se obtendría si se tomara una onda plana como modelo para el campo eléctrico.

Expresión final

Substituyendo lo anterior en la ecuación (2.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} P(F_3) &= c_1 c_2 (A_1 \cos^2 \theta + A_2 \sin^2 \theta) \\ &= c_1 c_2 (A_2 + (A_1 - A_2) \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Donde se ha definido la constante $c_2 \equiv c\mu_0 \mathcal{P}_6^{\frac{1}{6}} \varrho_{at} \ell k^2$ y los valores de A_0 y A_1 son los definidos en las ecuaciones (2.26a) y (2.26b). Esta es una de las expresiones que se utilizarán en la sección 6.1 para generar una predicción de algunos de los resultados experimentales.

2.4.2. Caso 2: Haz Bessel

En el caso en el que se modele el haz láser como un haz Bessel *ideal* (paraxial) que se propaga en el eje X , la parte espacial del campo eléctrico se puede escribir como:

$$\vec{E} \simeq \hat{\epsilon} E_0 e^{ik_x x} J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\phi} \quad (2.38)$$

Donde $\hat{\epsilon} = \cos(\theta)\hat{z} + \sin(\theta)\hat{y}$ es el vector unitario que indica la dirección de polarización. Utilizando nuevamente las ecuaciones (B.9) del apéndice B.3 para $(\mathcal{K}_{\vec{R}})_p^{(2)}$ se obtiene

$$(\mathcal{K}_{\vec{R}})_0^{(2)} = \partial_z E_z \quad (2.39a)$$

$$(\mathcal{K}_{\vec{R}})_{\pm 1}^{(2)} = \mp \sqrt{\frac{1}{6}} (\partial_x E_z \pm i(\partial_z E_y + \partial_y E_z)) \quad (2.39b)$$

$$(\mathcal{K}_{\vec{R}})_{\pm 2}^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{6}} (-\partial_y E_y \pm i\partial_x E_y) \quad (2.39c)$$

Recordando que $\rho = \sqrt{z^2 + y^2}$ y $\phi = \arctan(\frac{z}{y})$, entonces $\partial_z = \sin \phi \partial_{\rho} + \frac{1}{\rho} \cos \phi \partial_{\phi}$ y $\partial_y = \cos \phi \partial_{\rho} - \frac{1}{\rho} \sin \phi \partial_{\phi}$. Con lo cual

$$(\mathcal{K}_{\vec{R}})_0^{(2)} = (\hat{\epsilon} \cdot \hat{z}) E_0 e^{ik_x x} \left(\sin \phi \partial_{\rho} + im \frac{1}{\rho} \cos \phi \right) J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\phi} \quad (2.40a)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_{\vec{R}})_{\pm 1}^{(2)} &= \mp i E_0 e^{ik_x x} \sqrt{\frac{1}{6}} \left((\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})(k_x \pm \cos \phi \partial_{\rho} \mp im \frac{1}{\rho} \sin \phi) \right. \\ &\quad \left. \pm (\hat{\epsilon} \cdot \hat{y})(\sin \phi \partial_{\rho} + im \frac{1}{\rho} \cos \phi) \right) J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\phi} \end{aligned} \quad (2.40b)$$

$$(\mathcal{K}_{\vec{R}})_{\pm 2}^{(2)} = (\hat{\epsilon} \cdot \hat{y}) E_0 e^{ik_x x} \sqrt{\frac{1}{6}} \left(-\cos \phi \partial_{\rho} + im \frac{1}{\rho} \sin \phi \mp k_x \right) J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\phi} \quad (2.40c)$$

Se quiere ahora calcular la integral

$$\mathcal{T}_p = \int_0^\ell dx \int_{A_c} dA_{\bar{R}} |(\mathcal{K}_{\bar{R}})_p^{(2)}|^2 \varrho_{at} = \int_0^\ell dx \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho_c} \rho d\rho |(\mathcal{K}_{\bar{R}})_p^{(2)}|^2 \varrho_{at} \quad (2.41)$$

pero para hacerlo vale la pena notar dos cosas:

1. Al obtener la norma cuadrada la dependencia en x desaparece, por lo que

$$\int_0^\ell dx |(\mathcal{K}_{\bar{R}})_p^{(2)}|^2 = \ell |(\mathcal{K}_{\bar{R}})_p^{(2)}|^2 \quad (2.42)$$

2. Al obtener la norma cuadrada la dependencia en ϕ queda en términos proporcionales a $\sin \phi$, $\sin \phi \cos \phi$, $\cos \phi$, $\sin^2 \phi$ y $\cos^2 \phi$ pero

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi = \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \cos \phi = \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \\ \pi &= \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \phi = \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \end{aligned}$$

de modo que se puede afirmar lo siguiente: sea $\mathcal{K} = A + B \sin \phi + C \cos \phi$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\phi |\mathcal{K}|^2 = 2\pi |A|^2 + \pi |B|^2 + \pi |C|^2 \quad (2.43)$$

Utilizando las dos anotaciones anteriores uno puede demostrar que

$$\mathcal{T}_0 = |E_0|^2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \pi \ell \varrho_{at} \int_0^{\rho_c} \left((\partial_\rho J_m(k_\perp \rho))^2 + \frac{m^2}{\rho^2} (J_m(k_\perp \rho))^2 \right) \rho d\rho \quad (2.44a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 = \frac{|E_0|^2}{6} \pi \ell \varrho_{at} \int_0^{\rho_c} \left((\partial_\rho J_m(k_\perp \rho))^2 + \frac{m^2}{\rho^2} (J_m(k_\perp \rho))^2 + \right. \\ \left. + 2(\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 k_x^2 (J_m(k_\perp \rho))^2 \right) \rho d\rho \quad (2.44b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 = \frac{|E_0|^2}{6} (\hat{\epsilon} \cdot \hat{y})^2 \pi \ell \varrho_{at} \int_0^{\rho_c} \left((\partial_\rho J_m(k_\perp \rho))^2 + \frac{m^2}{\rho^2} (J_m(k_\perp \rho))^2 + \right. \\ \left. + 2k_x^2 (J_m(k_\perp \rho))^2 \right) \rho d\rho \quad (2.44c) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $s = k_\perp \rho$ para adimensionalizar el argumento de

las funciones Bessel se obtiene:

$$\mathcal{T}_0 = |E_0|^2 \pi \ell \varrho_{at} (\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \int_0^{s_c} \left(\left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (J_m)^2 \right) s ds \quad (2.45a)$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{|E_0|^2}{6} \pi \ell \varrho_{at} \int_0^{s_c} \left(\left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (J_m)^2 + 2(\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \frac{k_x^2}{k_\perp^2} (J_m)^2 \right) s ds \quad (2.45b)$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{|E_0|^2}{6} \pi \ell \varrho_{at} (\hat{\epsilon} \cdot \hat{y})^2 \int_0^{s_c} \left(\left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (J_m)^2 + 2 \frac{k_x^2}{k_\perp^2} (J_m)^2 \right) s ds \quad (2.45c)$$

Donde se ha hecho $J_m(s) = J_m$ para simplificar notación y se ha definido $s_c = k_\perp \rho_c$. Definiendo ahora las siguientes constantes:

$$\alpha_m = \int_0^{s_c} \left(\left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (J_m)^2 \right) s ds \quad (2.46)$$

$$\beta_m = \int_0^{s_c} (J_m)^2 s ds \quad (2.47)$$

Se obtienen las ecuaciones

$$\mathcal{T}_0 = |E_0|^2 \pi \ell \varrho_{at} (\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \alpha_m \quad (2.48a)$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{|E_0|^2}{6} \pi \ell \varrho_{at} \left(\alpha_m + 2(\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \frac{k_x^2}{k_\perp^2} \beta_m \right) \quad (2.48b)$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{|E_0|^2}{6} \pi \ell \varrho_{at} (\hat{\epsilon} \cdot \hat{y})^2 \left(\alpha_m + 2 \frac{k_x^2}{k_\perp^2} \beta_m \right) \quad (2.48c)$$

Antes de seguir, al igual que en el caso Gaussiano, se calculará la potencia del haz en términos de $|E_0|^2$ utilizando la ecuación (2.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\simeq \frac{1}{c\mu_0} \int_{A_c} |\vec{E}|^2 dA_{\vec{R}} \\ &= \frac{1}{c\mu_0} |E_0|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho_c} (J_m(k_\perp \rho))^2 \rho d\rho \\ &= \frac{2\pi}{c\mu_0} |E_0|^2 \frac{1}{k_\perp^2} \beta_m \\ \Rightarrow |E_0|^2 &= c\mu_0 \mathcal{P} \frac{1}{2\pi} \frac{k_\perp^2}{\beta_m} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Recordando que $c_2 = c\mu_0\mathcal{P}\frac{1}{6}\varrho_{at}\ell k^2$ se puede obtener finalmente que

$$\mathcal{T}_0 = 6c_2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} \quad (2.50a)$$

$$\mathcal{T}_1 = c_2 \left(\frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} + (\hat{\epsilon} \cdot \hat{z})^2 \frac{k_x^2}{k^2} \right) \quad (2.50b)$$

$$\mathcal{T}_2 = c_2 (\hat{\epsilon} \cdot \hat{y})^2 \left(\frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} + \frac{k_x^2}{k^2} \right) \quad (2.50c)$$

Expresión final

Substituyendo las tres ecuaciones anteriores en la ecuación (2.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} P_m(F_3) &= c_1 c_2 \left[6 A_0 \frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} \cos^2 \theta + A_1 \left(\frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} + \frac{k_x^2}{k^2} \cos^2 \theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + A_2 \left(\frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} + \frac{k_x^2}{k^2} \right) \sin^2 \theta \right] = \\ &= c_1 c_2 \left[\left(\frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} (A_1 + A_2) + \frac{k_x^2}{k^2} A_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_m k_{\perp}^2}{2\beta_m k^2} (6A_0 - A_2) + \frac{k_x^2}{k^2} (A_1 - A_2) \right) \cos^2 \theta \right] \quad (2.51) \end{aligned}$$

Nótese que en el límite en el que $k_{\perp} \rightarrow 0$ y $k_x \rightarrow k$ la ecuación anterior es idéntica a la encontrada para el caso del haz Gaussiano (2.37). Nótese además que la única dependencia en el orden m del haz Bessel se encuentra en el cociente $\frac{\alpha_m}{2\beta_m}$.

2.4.3. Análisis de los factores α y β

Hay un problema con las integrales en la definición de los factores α_m y β_m (ecuaciones (2.46), (2.47)). Previamente se había especificado que el área A_c estaba definida por el tamaño de la sección transversal del haz de 911 nm, de modo que integrar de cero a $s_c = k_{\perp}\rho_c$ significa que se está utilizando el parámetro ρ_c , es decir el radio del haz. Sin embargo un haz Bessel ideal no tiene un ancho definido ya que, a diferencia de los haces Gaussianos, no se puede definir una sección del espacio donde se encuentre la mayor parte de su potencia, esto es debido a que

$$\lim_{s_c \rightarrow \infty} \int_0^{s_c} (J_m)^2 s ds \rightarrow \infty \quad (2.52)$$

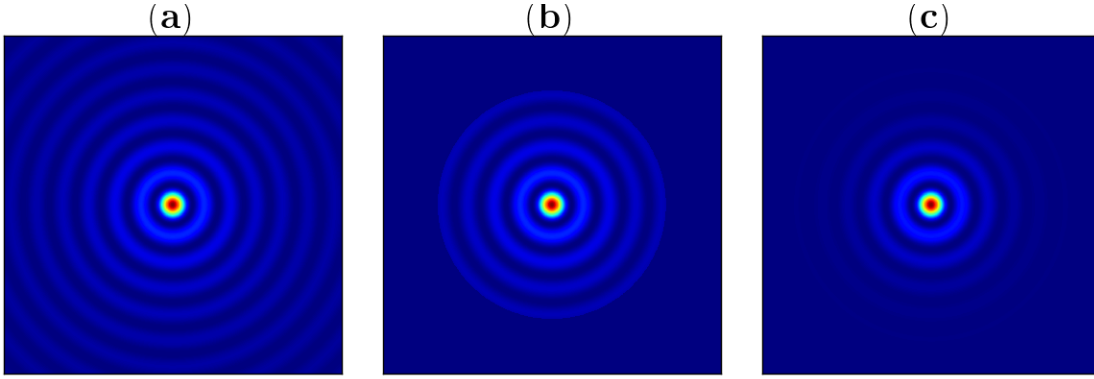


Figura 2.2: Ejemplo de tres distintos modelos de un haz Bessel de orden cero. Figura (a): haz Bessel ideal que ocupa todo el espacio. Figura (b): haz Bessel ideal tras pasar por un iris de radio finito. Figura (c): haz Bessel modificado (ver texto).

Sin embargo un haz creado en el laboratorio tiene un ancho finito. Para tomar esto en cuenta se puede proceder de dos maneras distintas:

1. Utilizar el modelo del haz Bessel ideal pero cortar el tamaño del haz hasta un cierto radio ρ_B (medido experimentalmente) que represente el ancho real del haz.
2. Utilizar un modelo más realista del haz que tome en cuenta su ancho finito.

Ambos métodos se exploran a continuación. En la figura 2.2 se muestra un ejemplo del perfil de intensidad para ambos modelos.

Caso ideal con corte

Cambiando el límite de integración a $s_B = k_{\perp} \rho_B$, donde ρ_B es el radio experimental del haz Bessel, las ecuaciones (2.46), (2.47) se reescriben como:

$$\alpha_m = \int_0^{s_B} \left(\left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (J_m)^2 \right) s ds \quad (2.53)$$

$$\beta_m = \int_0^{s_B} (J_m)^2 s ds \quad (2.54)$$

La integral del factor β_m se puede resolver analíticamente utilizando las integrales de Lommel [31, pp135-ec.(11)]:

$$\int_0^a J_m^2(x) x dx = \frac{1}{2} a^2 (J_m^2(a) - J_{m-1}(a) J_{m+1}(a)) \quad (2.55)$$

Con lo cual se puede escribir una expresión cerrada para β_m :

$$\beta_m = \frac{1}{2}s_B^2 (J_m^2(s_B) - J_{m-1}(s_B)J_{m+1}(s_B)) \quad (2.56)$$

Por otro lado, a primera vista las integrales para α no parecen tener solución analítica, sin embargo se puede realizar el siguiente tratamiento:

La integral de la derivada al cuadrado de la función J_m se puede resolver por partes

$$\int_0^{s_B} \left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 s ds = J_m \frac{d J_m}{ds} s \Big|_0^{s_B} - \int_0^{s_B} J_m \frac{d}{ds} \left[\frac{d J_m}{ds} s \right] ds$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{d J_m}{ds} s \right] &= s \frac{d^2 J_m}{ds^2} + \frac{d J_m}{ds} \\ &= \frac{m^2}{s} J_m - s J_m \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado el hecho de que J_m es solución de la ecuación diferencial de Bessel:

$$s^2 \frac{d^2 J_m}{ds^2} + s \frac{d J_m}{ds} + (s^2 - m^2) J_m = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int_0^{s_B} \left(\left(\frac{d J_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (J_m)^2 \right) s ds \\ &= J_m \frac{d J_m}{ds} s \Big|_0^{s_B} + \int_0^{s_B} (J_m)^2 s ds \\ &= J_m \frac{d J_m}{ds} s \Big|_0^{s_B} + \beta_m \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nuevamente aparece la integral de Lommel, si además se utiliza que la derivada de la función Bessel es [32, pp361-ec.(9.1.27)]:

$$\frac{d J_m(x)}{dx} = \frac{1}{2} (J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x))$$

se puede obtener que

$$\begin{aligned} \alpha_m &= J_m \frac{d J_m}{ds} s \Big|_0^{s_B} + \beta_m = \\ &= \frac{1}{2} s_B J_m(s_B) (J_{m-1}(s_B) - J_{m+1}(s_B)) + \\ &\quad + \frac{1}{2} s_B^2 (J_m^2(s_B) - J_{m-1}(s_B) J_{m+1}(s_B)) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones (2.56) y (2.58)

$$\frac{\alpha_m}{2\beta_m} = \frac{1}{2} + \frac{J_m \frac{d J_m}{ds} s \Big|_0^{s_B}}{2 \int_0^{s_B} (J_m)^2 s ds} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{J_m(s_B)(J_{m-1}(s_B) - J_{m+1}(s_B))}{s_B (J_m^2(s_B) - J_{m-1}(s_B)J_{m+1}(s_B))} \right] \quad (2.59)$$

Caso realista (haz Bessel modificado)

En el espacio de momentos un haz Bessel ideal queda descrito por la función [33, ecs.(12),(14)]:

$$F(\mathbf{k}, \phi_{\mathbf{k}}) = \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\perp})}{k_{\perp}} i^m e^{i m \phi_{\mathbf{k}}} \quad (2.60)$$

La demostración de esto se puede encontrar en el apéndice B.4. Dado que los haces Bessel producidos en el laboratorio no son ideales, se pueden modelar de manera aproximada substituyendo la Delta de Dirac de la ecuación anterior por una Gaussiana $\frac{1}{W\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_{\perp})^2}{2W^2}\right)$ [33, ec.(13)]. De modo que en el espacio de momentos el haz Bessel modificado queda descrito por la función:

$$\tilde{F}(\mathbf{k}, \phi_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{k_{\perp} W \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\perp})^2}{2W^2}\right) i^m e^{i m \phi_{\mathbf{k}}} \quad (2.61)$$

Donde $W \ll k_{\perp}$. En el apéndice B.4 también se prueba que esto implica que la función Bessel modificada en el espacio de configuración está dada por:

$$\tilde{J}_m(k_{\perp} \rho) = \frac{1}{k_{\perp} W \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\perp})^2}{2W^2}\right) J_m(k\rho) k dk \quad (2.62)$$

Dado que esta expresión ya toma en cuenta el tamaño transversal finito del haz, el límite superior en las integrales que definen los coeficientes α_m y β_m puede ser tomado como infinito:

$$\alpha_m = \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{d \tilde{J}_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (\tilde{J}_m)^2 \right) s ds \quad (2.63)$$

$$\beta_m = \int_0^{\infty} (\tilde{J}_m)^2 s ds \quad (2.64)$$

Para resolver estas integrales se comenzará por regresar a la variable original $\rho = s/k_{\perp}$, de modo que:

$$\begin{aligned}
\beta_m &= \int_0^{\infty} (\tilde{J}_m)^2 s \, ds = k_{\perp}^2 \int_0^{\infty} (\tilde{J}_m(k_{\perp}\rho))^2 \rho \, d\rho \\
&= k_{\perp}^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\perp}^2 W^2 2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} J_m(k\rho) k \, dk \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(k'-k_{\perp})^2}{2W^2}} J_m(k'\rho) k' \, dk' \right) \rho \, d\rho \\
&= \frac{1}{W^2 2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} e^{-\frac{(k'-k_{\perp})^2}{2W^2}} \left(\int_0^{\infty} J_m(k\rho) J_m(k'\rho) \rho \, d\rho \right) k' \, dk' k \, dk
\end{aligned}$$

En el apéndice **A** de la referencia [14] se pueden encontrar integrales útiles que involucran funciones Bessel en su integrando. En particular la ecuación (A1) dicta que

$$\int_0^{\infty} J_m(k\rho) J_m(k'\rho) \rho \, d\rho = \frac{1}{k} \delta(k - k')$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\beta_m &= \frac{1}{W^2 2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} e^{-\frac{(k'-k_{\perp})^2}{2W^2}} \frac{1}{k} \delta(k - k') k' \, dk' k \, dk \\
&= \frac{1}{W^2 2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} k' \, dk' \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{k_{\perp}}{W} \left(\sqrt{\pi} + \frac{W}{k_{\perp}} \right) \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Nótese que en este caso β_m es independiente del orden m . Por otro lado, realizando un desarrollo similar para el caso del coeficiente α_m :

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{d\tilde{J}_m}{ds} \right)^2 + \frac{m^2}{s^2} (\tilde{J}_m)^2 \right) s \, ds = \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{d\tilde{J}_m(k_{\perp}\rho)}{d\rho} \right)^2 + \frac{m^2}{\rho^2} (\tilde{J}_m(k_{\perp}\rho))^2 \right) \rho \, d\rho \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{k_{\perp}^2 W^2 2\pi} \left[\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} k \, dk \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(k'-k_{\perp})^2}{2W^2}} \frac{dJ_m(k'\rho)}{d\rho} k' \, dk' \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{\rho^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} J_m(k\rho) k \, dk \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{(k'-k_{\perp})^2}{2W^2}} J_m(k'\rho) k' \, dk' \right) \right] \rho \, d\rho \\
&= \frac{1}{k_{\perp}^2 W^2 2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(k-k_{\perp})^2}{2W^2}} e^{-\frac{(k'-k_{\perp})^2}{2W^2}} \\
&\quad \times \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \frac{dJ_m(k'\rho)}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho^2} J_m(k\rho) J_m(k'\rho) \right) \rho \, d\rho \right] k' \, dk' k \, dk
\end{aligned}$$

Consultando nuevamente el apéndice **A** de la referencia [14], la ecuación (A3) dicta que

$$\int_0^\infty \left(\frac{m^2}{kk'\rho} J_m(k\rho) J_m(k'\rho) + \rho J'_m(k\rho) J'_m(k'\rho) \right) d\rho = \frac{1}{k} \delta(k - k')$$

donde $J'_m(s) = \frac{dJ_m(s)}{ds}$, de modo que

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{k_\perp^2 W^2 2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{(k-k_\perp)^2}{2W^2}} e^{-\frac{(k'-k_\perp)^2}{2W^2}} [k' \delta(k - k')] k' dk' k dk \\ &= \frac{1}{k_\perp^2 W^2 2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{(k'-k_\perp)^2}{W^2}} (k')^3 dk' \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{k_\perp}{W} \left(2\sqrt{\pi} + 6\frac{W}{k_\perp} + 3\sqrt{\pi} \frac{W^2}{k_\perp^2} + 2\frac{W^3}{k_\perp^3} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Al igual que en el caso de β_m , en este caso α_m no depende del orden m , por lo que se omitirán los subíndices. El resultado final es entonces

$$\frac{\alpha}{2\beta} = \frac{1}{4} \frac{\left(2\sqrt{\pi} + 6\frac{W}{k_\perp} + 3\sqrt{\pi} \frac{W^2}{k_\perp^2} + 2\frac{W^3}{k_\perp^3} \right)}{\left(\sqrt{\pi} + \frac{W}{k_\perp} \right)} \simeq \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

Donde se ha utilizado que $W \ll k_\perp$.

2.5. Resumen

Para facilitar la consulta, las tres secciones anteriores se resumen en lo siguiente (se conserva la numeración de las ecuaciones originales):

A continuación se muestran las ecuaciones que describen la probabilidad $P(F_3)$ de detectar fotones azules emitidos de manera espontánea, a lo largo de un eje ortogonal al eje de propagación de los haces y ortogonal a la polarización del haz de acoplamiento (780 nm, ver figura 2.1).

También se muestra el modelo del campo eléctrico utilizado para simular el haz de prueba (911 nm) y las condiciones que estos deben cumplir para que el modelo sea válido en cada caso. El vector de polarización es siempre $\hat{\epsilon} = \cos(\theta)\hat{z} + \sin(\theta)\hat{y}$ y el eje de propagación es X .

Gaussiano: $x \ll x_0$ con $x_0 =$ longitud de Rayleigh.

$$\vec{E}(x) \simeq \hat{\epsilon} E_0 e^{ikx} e^{-\frac{z^2}{\rho_z^2} - \frac{y^2}{\rho_y^2}} \quad (2.32)$$

Probabilidad:

$$P(F_3) = c_1 c_2 (A_2 + (A_1 - A_2) \cos^2 \theta) \quad (2.37)$$

Bessel ideal cortado: $k_\perp \ll k_x$ y $k_\perp \rho < s_B$.

$$\vec{E} \simeq \hat{\epsilon} E_0 e^{ik_x x} J_m(k_\perp \rho) e^{im\phi} \quad (2.38)$$

Probabilidad:

$$P_m(F_3) = c_1 c_2 \left[\left(\frac{\alpha_m}{2\beta_m} \frac{k_\perp^2}{k^2} (A_1 + A_2) + \frac{k_x^2}{k^2} A_2 \right) + \left(\frac{\alpha_m}{2\beta_m} \frac{k_\perp^2}{k^2} (6A_0 - A_2) + \frac{k_x^2}{k^2} (A_1 - A_2) \right) \cos^2 \theta \right] \quad (2.51)$$

Bessel modificado: $k_\perp \ll k_x$ y $W \ll k_\perp$.

$$\vec{E} \simeq \hat{\epsilon} E_0 e^{ik_x x} \tilde{J}_m(k_\perp \rho) e^{im\phi} \quad (2.68)$$

con

$$\tilde{J}_m(k_\perp \rho) = \frac{1}{k_\perp W \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(k - k_\perp)^2}{2W^2}\right) J_m(k\rho) k dk \quad (2.62)$$

Probabilidad:

$$P(F_3) = c_1 c_2 \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta} \frac{k_\perp^2}{k^2} (A_1 + A_2) + \frac{k_x^2}{k^2} A_2 \right) + \left(\frac{\alpha}{2\beta} \frac{k_\perp^2}{k^2} (6A_0 - A_2) + \frac{k_x^2}{k^2} (A_1 - A_2) \right) \cos^2 \theta \right] \quad (2.69)$$

Donde:

$$A_0 = \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) \left(g_0^2(2, 3) \right) \quad (2.26a)$$

$$A_i = \sum_{M_3, M_2, F'_1, M'_1} \sigma(F_2, M_2) \left(\frac{1}{2} g_{-1}^1(1, 3) + \frac{1}{2} g_1^1(1, 3) + g_0^1(1, 3) \right) \left(g_i^2(2, 3) + g_{-i}^2(2, 3) \right) \quad (2.26b)$$

$i = 1, 2.$

$$g_q^k(i, j) = (2F_i + 1)(2F_j + 1) \left\{ \begin{matrix} J_j & F_j & I \\ F_i & J_i & k \end{matrix} \right\}^2 \left(\begin{matrix} F_j & k & F_i \\ -M_{F_j} & q & M_{F_i} \end{matrix} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$c_1 = \frac{4\pi}{3} q^4 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 \mid \mid r^2 \mid \mid n_2 \frac{1}{2} l_2 J_2 \rangle \right|^2 \left| \langle n_3 \frac{1}{2} l_3 J_3 \mid \mid r \mid \mid n_1 \frac{1}{2} l_1 J_1 \rangle \right|^2 \quad (2.25)$$

$$c_2 = c\mu_0 \mathcal{P} \frac{1}{6} \rho_{at} \ell k^2 \quad (2.70)$$

$$\frac{\alpha_m}{2\beta_m} = \frac{1}{2} + \frac{J_m \frac{dJ_m}{ds} \Big|_0^{s_B}}{2 \int_0^{s_B} (J_m)^2 ds} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{J_m(s_B)(J_{m-1}(s_B) - J_{m+1}(s_B))}{s_B (J_m^2(s_B) - J_{m-1}(s_B)J_{m+1}(s_B))} \right] \quad (2.59)$$

$$\frac{\alpha}{2\beta} = \frac{1}{4} \frac{\left(2\sqrt{\pi} + 6\frac{W}{k_{\perp}} + 3\sqrt{\pi}\frac{W^2}{k_{\perp}^2} + 2\frac{W^3}{k_{\perp}^3} \right)}{\left(\sqrt{\pi} + \frac{W}{k_{\perp}} \right)} \simeq \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

Comentario sobre dependencia en el orden del haz Bessel.

Nótese que para el caso del haz Bessel modificado se ha perdido la dependencia en el orden m del haz Bessel m mientras que en el caso del Bessel cortado la dependencia sigue ahí. Sin embargo vale la pena notar que al graficar $\alpha_m(s_B)$ y $\beta_m(s_B)$ (ecuaciones (2.58) y (2.56)) se obtiene lo mostrado en la figura 2.3.

Asintóticamente tanto $\alpha_m(s_B)$ como $\beta_m(s_B)$ tienden a $\frac{s_B}{\pi}$, de modo que para valores de s_B tales que el corte permita ver varios anillos del haz Bessel, el valor $\frac{\alpha_m}{2\beta_m} \sim \frac{1}{2}$. Es decir que es igual al resultado del caso con el haz Bessel modificado (salvo por las pequeñas oscilaciones).

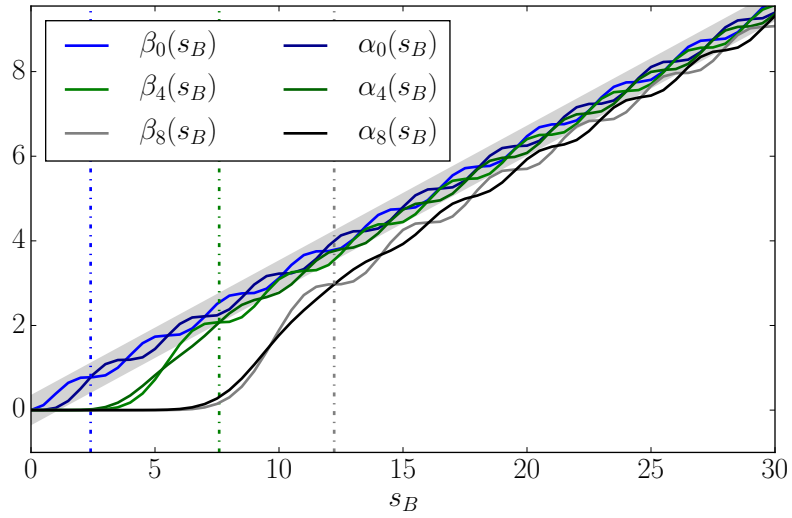


Figura 2.3: Gráfica de $\alpha_m(s_B)$ y $\beta_m(s_B)$ para los órdenes 0, 4, 8. Las líneas verticales punteadas indican la posición del primer anillo oscuro para cada orden distinto de la función Bessel ideal. La línea gruesa color gris indica la recta $y = \frac{s_B}{\pi}$.

Capítulo 3

Control y Caracterización del SLM

Previo a este trabajo, no existía en el *Laboratorio de Átomos Fríos* un sistema de generación de haces Bessel, por lo que una parte importante del mismo fue implementar dicho sistema. Para esto se utilizó un *modulador de fase espacial de cristal líquido sobre silicio* o LCoS-SLM¹ (Hamamatsu LCOS-SLM X10468-07) y un axicón. En este capítulo se presenta todo lo relacionado con el control y la caracterización de este sistema.

El capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección se discuten varios métodos para generar haces tipo Bessel, incluyendo una descripción detallada del método utilizado para el presente trabajo. En la segunda sección se presenta el programa de control para el SLM. Finalmente se describe la caracterización del sistema y una muestra del resultado final para la generación de haces Bessel.

3.1. Haces estructurados

Actualmente hay una gran variedad de métodos utilizados para generar haces con estructura espacial, dentro de los más comunes se encuentra el emplear una placa de fase programable, también conocida como modulador de fase espacial (SLM), para modular simultáneamente la fase y la amplitud de un haz Gaussiano expandido y con polarización lineal [34-39]. Al modular la amplitud es necesario eliminar el orden cero de difracción, para lo cual es muy común inducir una fase tipo rejilla, de modo que en el plano de Fourier el haz presentará un patrón de difracción tipo *sinc* que permite seleccionar fácilmente el primer orden de difracción. Este método es muy popular ya que genera haces muy limpios, pero el utilizar únicamente el primer orden de difracción implica una pérdida sustancial de potencia. Dado que se planea utilizar el haz Bessel para inducir una transición cuadrupolar, las pérdidas en potencia deben minimizarse, de modo que el método anterior no es una opción.

Otro método para generar haces Bessel consiste en modular amplitud y fase por

¹Liquid Crystal on Silicon - Spatial Light Modulator.

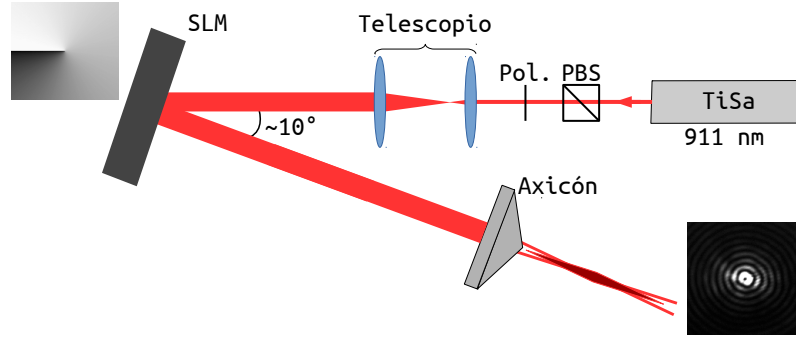


Figura 3.1: Esquema experimental para la generación de haces Bessel de distintos órdenes. Un axicón modula la amplitud del haz mientras que el SLM le induce una fase tipo vórtice.

separado: por un lado se modula la amplitud haciendo pasar al haz a través de un axicón, lo cual genera un haz Bessel de orden cero; y por otro lado se induce una fase helicoidal que varía el orden del haz Bessel [8, 9]. En particular un SLM puede ser utilizado para inducir dicha fase [40-42]. En este caso el orden del haz Bessel será igual al número de ciclos que tenga el holograma tipo hélice.

Un dispositivo como el mostrado en la figura 3.1 utiliza la idea anterior y fue el utilizado para el presente trabajo. Para que la modulación en fase sea óptima es necesario que la luz que llegue al SLM tenga polarización horizontal (lineal). Para garantizar que esta condición se cumpliera, se incluyó en el dispositivo experimental un divisor de haz sensible a la polarización y un polarizador.

3.1.1. Pequeña introducción al axicón

Un axicón es una lente cónica y es una herramienta que se ha utilizado desde hace ya muchos años (ver [43, McLeod 1954]). Sin mucho esfuerzo es posible deducir algunas de sus propiedades, por ejemplo: obsérvese la figura 3.2, utilizando un análisis simple de óptica geométrica es posible encontrar la máxima distancia z_{max} a la que el patrón de interferencia (distribución aproximadamente tipo Bessel) se puede observar; utilizando además la Ley de Snell se puede encontrar una expresión que relaciona la divergencia del haz θ con el ángulo de apertura γ del axicón:

$$z_{max} = w_0 \cot(\theta)$$

$$n_{ax} \sin(\gamma) = \sin(\gamma + \theta)$$

donde w_0 es la cintura del haz justo antes de atravesar el axicón y n_{ax} es el índice de refracción del material del que está hecho el axicón. Si se utiliza la aproximación

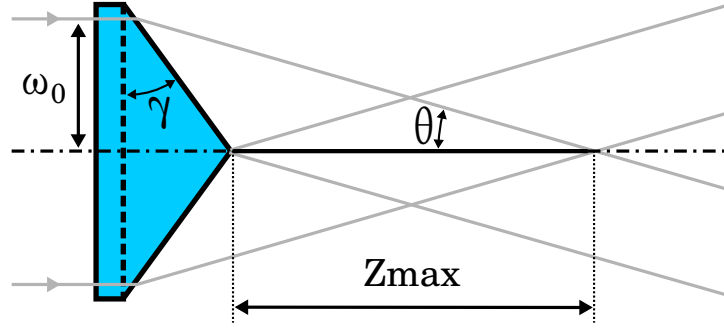


Figura 3.2: Una visión simple del axicón.

paraxial las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir como

$$z_{max} \approx \frac{w_0}{\theta} \quad (3.1)$$

$$\theta \approx (n_{ax} - 1)\gamma \quad (3.2)$$

Conocer z_{max} es importante para planear el dispositivo experimental. Por otro lado, al conocer la divergencia es posible calcular cómo será la descomposición del vector de onda \vec{k} :

$$k_{\perp} = k \sin \theta \quad (3.3)$$

$$k_{\parallel} = k \cos \theta \quad (3.4)$$

Lo cual permite conocer el tamaño del haz Bessel resultante, ya que la dependencia radial de su distribución de intensidad es proporcional al cuadrado de $J_m(k_{\perp}\rho)$. Esto y más se puede encontrar en [44] y [45].

3.1.2. Pequeña introducción al LCoS-SLM

El LCoS-SLM (Hamamatsu LCOS-SLM X10468-07) es una pequeña pantalla de cristal líquido diseñada para reflejar un haz de luz induciéndole una fase en el proceso. Su funcionamiento será brevemente explicado a continuación, para un análisis detallado se sugiere revisar la tesis de doctorado [46, Jesacher 2007].

La pantalla está formada por un cristal líquido (LC) encerrado entre dos placas, una es un microchip reflector de silicio [46] y la otra está hecha de vidrio (este modelo en particular tiene un recubrimiento anti-reflejante para 620 – 1100 nm). Cuando se aplica un voltaje al LC su índice de refracción cambia. Esto significa que al elegir qué voltaje aplicar a cada pixel, uno puede controlar el tiempo que pasa la luz dentro del material. O, dicho de otra manera, la fase inducida en el frente de onda incidente se modifica dependiendo de qué tono de gris se elija para cada pixel, donde por tono de gris se entiende voltaje aplicado a una sección del microchip reflector. En particular

el LCoS-SLM de Hamamatsu tiene 800×600 píxeles con una profundidad de color de 8-bits.

3.2. Software de control del SLM

El fabricante provee un software de control pero para obtener un mayor beneficio del aparato, se creó un nuevo software² cuyos detalles se explicarán a continuación.

Se escribieron dos códigos para controlar el SLM, uno en *Julia* y otro en *Python*. En ambos códigos se utilizó el sistema de *módulo*, de manera que al cargarlos se habilitan una serie de funciones que mandan imágenes al controlador del SLM a través de una conexión DVI. El código en *Julia* se puede descargar [aquí](#) y el código en *Python* se puede descargar [aquí](#), en estas ligas se encuentra también el manual de operación para ambos casos. En la figura 3.3 se muestra un diagrama de flujo que muestra el funcionamiento básico de la versión en *Julia*. Hay varias funciones disponibles en el *módulo*, las de uso más frecuente se muestran en el cuadro 3.4 junto con una imagen para representar su resultado.

3.3. Caracterización

Tanto el axicón como el SLM fueron caracterizados antes de ser utilizados en el experimento principal.

3.3.1. Axicón

Los detalles sobre la caracterización de los axicones utilizados se pueden encontrar en la tesis de licenciatura [47]. En ese trabajo se exponen procedimiento y resultados de la caracterización de tres axicones distintos³. La idea principal fue utilizar cada axicón para modular una ‘onda plana’ (un haz Gaussiano expandido) y fotografiar su perfil de intensidad transversal en varios puntos a lo largo del eje de propagación del haz. Con estos resultados fue posible definir en qué punto de la mesa óptica se colocaría la celda donde los átomos de rubidio serían posteriormente excitados.

²Por su ayuda en la creación de este nuevo software se agradece a los siguientes grupos de investigación:

- *Laboratorio de micromanipulación óptica*, IF-UNAM. A cargo de la Dra. Karen Patricia Volke Sepulveda.
- *Laboratorio de Óptica Aplicada*, ICN-UNAM. A cargo del Dr. Pedro Antonio Quinto Su.

³Un axicón fue creado en el INAOE (Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica) y otros dos se compraron a la compañía *Altechna* (1-APX-2-NIR-J254-P & 1-APX-2-NIR-E254-P).

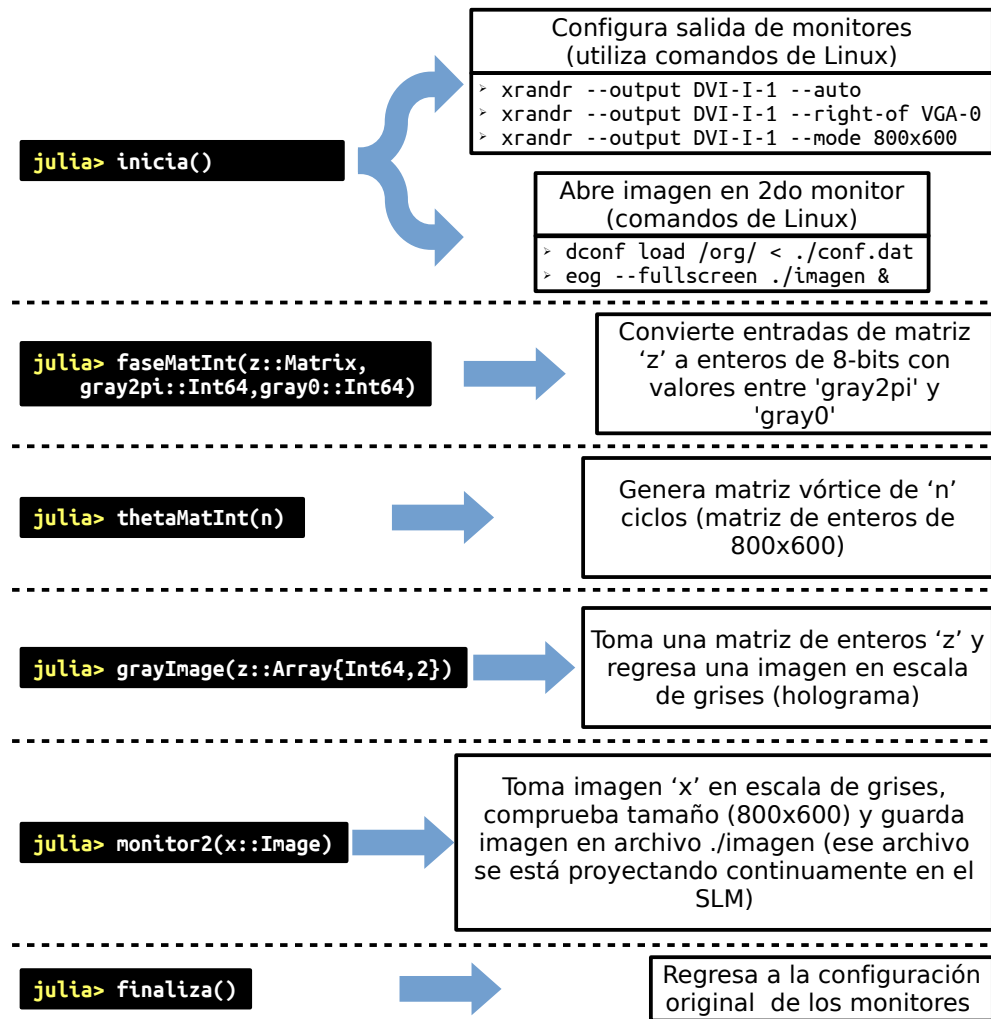


Figura 3.3: Diagrama de flujo para explicar parte del código de control del SLM.

3.3.2. SLM

Al SLM se envían imágenes en escala de grises de 8-bits, es decir que hay 256 tonos distintos para variar la fase. Pero el tono de gris específico para inducir una fase de 2π en el haz, depende de la longitud de onda del mismo. Para conocer dicho tono se utilizó la función `calibrar()` incluida en el software de control (ver apéndice ??). Esta función llama a otra función llamada `escalon(h, τ)`⁴. La idea fue inducir una máscara de fase tipo rejilla al haz colimado para después hacerlo pasar por una lente, de modo que en el plano de Fourier la luz se redistribuyera en un patrón tipo *sinc*.

⁴Esta función genera una matriz con dos valores posibles, 0 y h , en cada entrada y con una periodicidad igual a τ , ver figuras 3.4 y 3.5

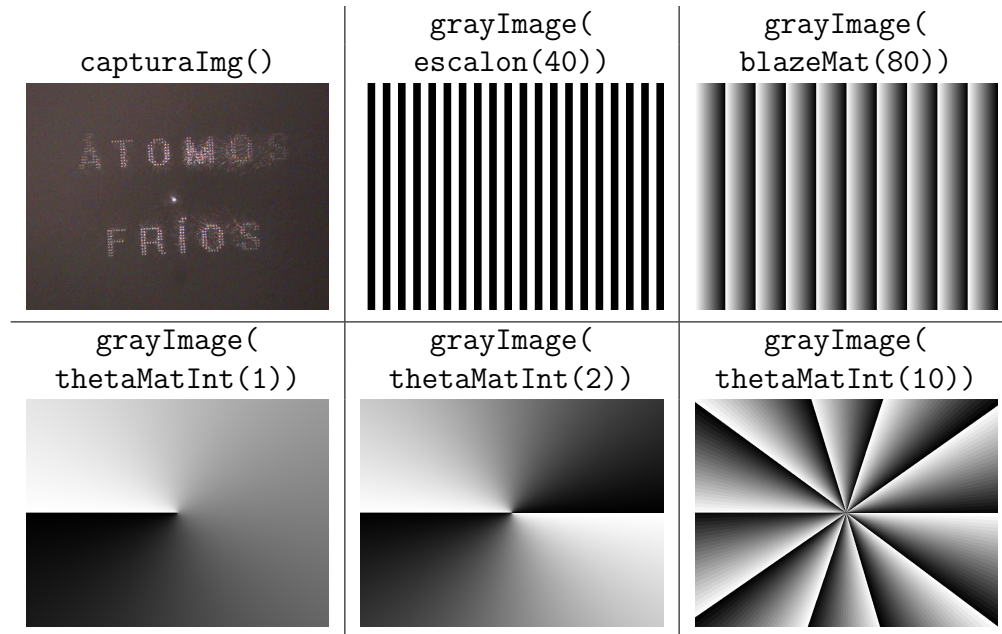


Figura 3.4: Una muestra de algunas funciones incluidas en el software de control del SLM. Nótese que `capturaImg` requiere que esté conectada una cámara por USB, mientras que las demás funciones requieren que el controlador del SLM esté conectado vía DVI.

Utilizando un sensor CCD para detectar dicho patrón se puede medir la intensidad de los órdenes ± 1 (ver figura 3.5). Cuando la fase inducida corresponde al valor 2π estos órdenes deben desaparecer ya que no debe haber interferencia. En la figura 3.6 se muestran gráficas para distintas longitudes de onda en donde se compara el tono de gris con las intensidades de los órdenes ± 1 . El tono de gris que elimina la interferencia para cada longitud de onda fue: $h_{633} = 114 \pm 1$, $h_{780} = 143 \pm 1$ y $h_{911} = 172 \pm 1$, donde el sufijo indica la longitud de onda en nm. Esto quiere decir que para modular en fase luz de 911 nm las imágenes utilizadas como hologramas deben estar normalizadas a 172 tonos de gris, en lugar de los 256 que originalmente puede proyectar el SLM.

Con esta información y utilizando el montaje mostrado en la figura 3.1 se pudo generar el haz Bessel de 911 nm, el cual se hizo incidir en la celda de rubidio. En la figura 3.7 se muestran algunas fotografías de los perfiles de intensidad obtenidos. Las fotografías se tomaron haciendo incidir el haz Bessel directamente sobre el sensor CCD, utilizando un par de filtros de densidad neutra para evitar dañar el sensor.

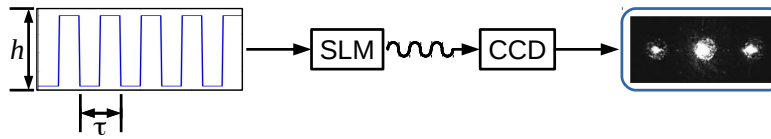


Figura 3.5: Diagrama para mostrar esquemáticamente el procedimiento utilizado para calibrar el SLM. Las flechas sólidas indican señales de entrada o salida y la flecha ondulada representa a la luz viajando desde el SLM hasta el sensor CCD.

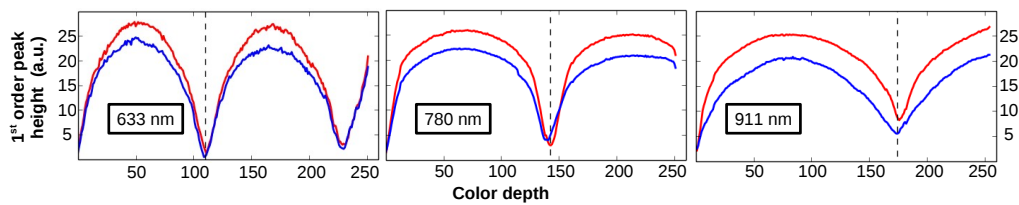


Figura 3.6: Estas gráficas muestran la variación de la intensidad registrada por el CCD (de una webcam) de los órdenes ± 1 como función del tono de gris utilizado para inducir la fase tipo rejilla en el haz.

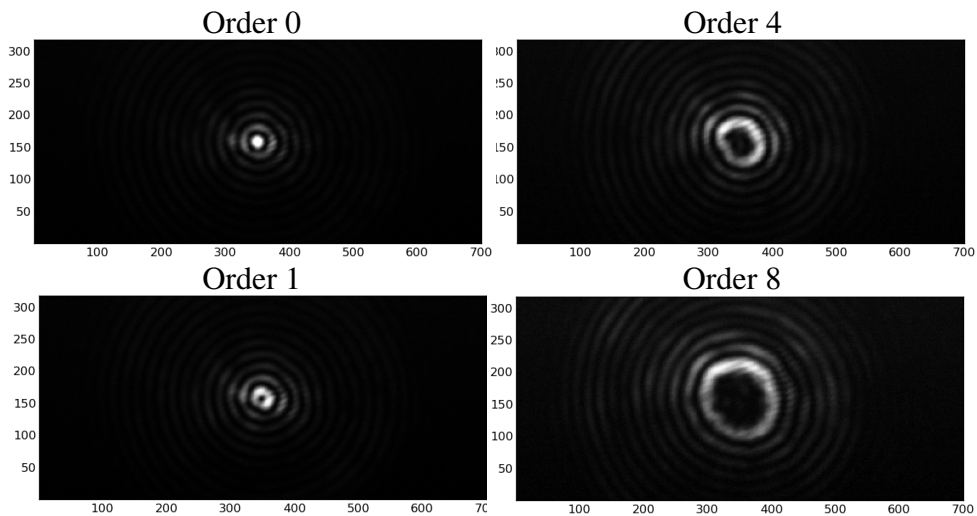


Figura 3.7: Fotografías del perfil de intensidad del haz Bessel para distintos órdenes. Los números en los ejes indican la posición del pixel. Cada pixel mide $5.3 \mu\text{m}$.

Capítulo 4

Dispositivo Experimental y Procedimiento

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección se presentan las distintas partes que conforman el arreglo experimental. En la segunda sección se hace una descripción del procedimiento utilizado para realizar las mediciones del presente trabajo, así como los detalles de las modificaciones realizadas al dispositivo experimental en un intento por aumentar la posibilidad de observar algún efecto debido a la transferencia de momento angular orbital de la luz hacia los átomos.

4.1. Arreglo experimental

El dispositivo experimental utilizado para este trabajo consiste en varios aparatos y elementos, todos mostrados en la figura 4.1. Para facilitar la explicación del dispositivo, éste se ha separado en dos partes principales: el sistema de excitación y el sistema de detección. El sistema de excitación está relacionado con todo lo necesario para excitar a los átomos de rubidio, desde el estado base hasta el estado $6P_{3/2}$, utilizando dos fotones. El sistema de detección consiste en los aparatos utilizados para detectar la presencia de fotones azules resultantes del decaimiento del estado excitado $6P_{3/2}$ de vuelta al estado base. En las siguientes dos sub-secciones se presentan con detalle ambas partes.

4.1.1. Sistema de excitación

Como se muestra en el diagrama de niveles de la figura 1.1 dos transiciones son inducidas en los átomos de rubidio: $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ y $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$. La primera corresponde a la línea *D2* que es dipolar y ocurre a ~ 780.2 nm. Para inducirla se utiliza un láser de diodo de cavidad extendida de 780 nm fabricado en el *Laboratorio de Átomos Fríos*. El diseño original de este láser pertenece a [48, Sussex 1998] pero los detalles sobre la construcción de este tipo de láseres en este laboratorio pueden

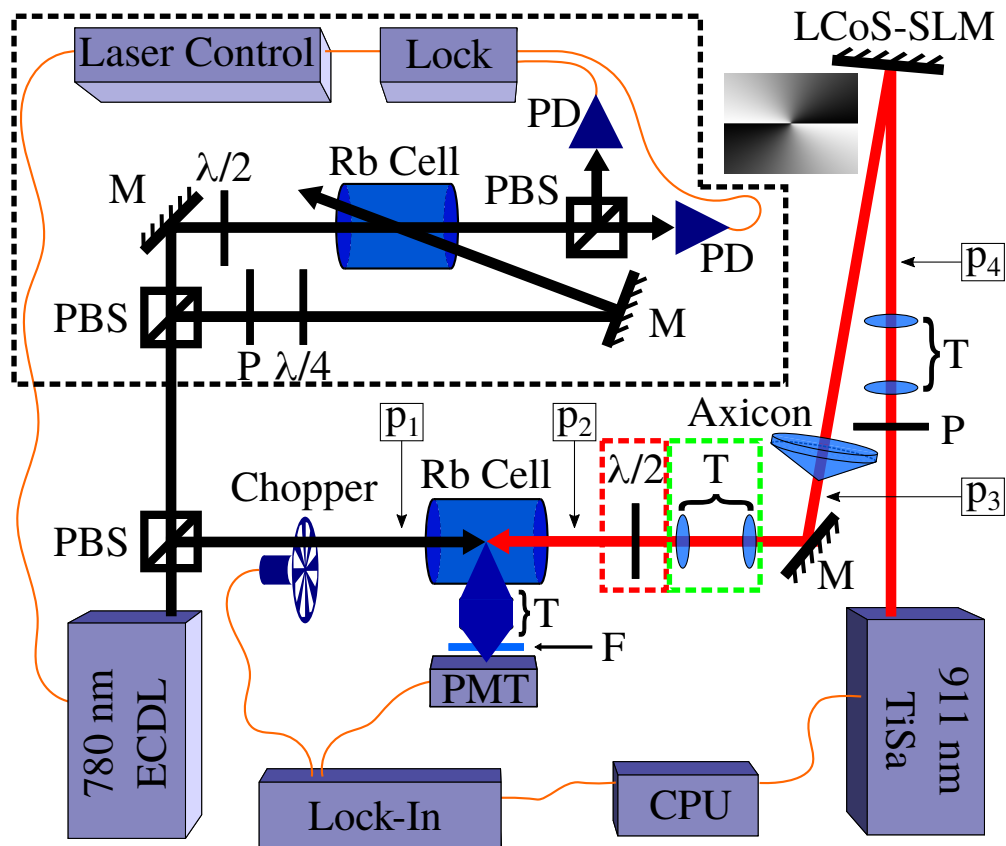


Figura 4.1: Dispositivo experimental completo. Las etiquetas indican: M→espejo, P→polarizador, PBS→cubo polarizador, F→filtro pasa-bandas (azul), PD→fotodiodo, T→telescopio. La línea negra punteada encierra el sistema de anclado en frecuencia del láser de 780 nm. El propósito de las otras dos líneas punteadas (verde y roja) se explicará en la sección 4.2.

encontrarse en estos trabajos [17, 49-51]. La emisión de este láser de 780 nm tiene un ancho de línea de ~ 6 MHz y una potencia máxima de ~ 20 mW. Utilizando un sistema de espectroscopía por polarización, es posible anclar la frecuencia de este láser a la transición hiperfina $5S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5P_{3/2}(F = 3)$ para el caso de ^{87}Rb ¹. A grandes rasgos, lo que se hace es inducir una anisotropía en el gas atómico debido a la presencia de un haz de bombeo con polarización circular, lo cual es censado por un haz de prueba polarizado linealmente a 45° y que después es separado y detectado en sus componentes horizontal y vertical, permitiendo así generar una señal de dispersión que se utiliza para realizar el anclado en frecuencia. Los detalles sobre este sistema de anclado se pueden encontrar en la tesis de licenciatura [49, Adonis 2008].

La segunda transición ($E2$) es prohibida por las reglas de selección en la aproximación dipolar, pero es bien descrita por la aproximación cuadrupolar y ocurre a 911.075 nm. Para inducirla se utiliza un láser comercial de Titanio-Safiro (*MSquared SolsTiS*). Este láser puede emitir a longitudes de onda entre 700 nm y 980 nm, a 780 nm su potencia máxima es > 1.6 W con un ancho de línea < 50 KHz. Este láser es modulado en fase y amplitud para generar un perfil de intensidad tipo Bessel utilizando la metodología descrita en la sección 3.1.

Ambos láseres se hacen incidir dentro de una celda comercial de rubidio (*Tryad Technology*) de manera contra-propagante, eliminando así el ensanchamiento de las líneas de absorción por efecto Doppler.

Es importante mencionar que la intensidad del segundo haz de excitación debe ser grande, comparada con la del primer haz de excitación, para contrarrestar el hecho de que la transición cuadrupolar es $\sim 10^7$ veces menos probable. Por lo cual se pone especial cuidado en las posibles pérdidas de potencia. En la figura 4.1 las etiquetas $\boxed{p_i}$ indican los valores de la potencia de cada haz en distintas posiciones: la potencia del haz de 780 nm justo antes de entrar en la celda lleva la etiqueta $\boxed{p1}$; la potencia del haz de 911 nm justo antes de entrar en la celda, su potencia después de atravesar el axicón y su potencia antes de ser reflejado en el SLM llevan las etiquetas $\boxed{p2}$, $\boxed{p3}$ y $\boxed{p4}$, respectivamente.

4.1.2. Sistema de detección

El sistema para medir la presencia de fotones azules dentro de la celda de rubidio es el mismo que se reporta en [20, 21, 23]. A continuación se explica detalladamente.

Los fotones de 420.18 nm emitidos de manera espontánea son recolectados por un telescopio (formado por dos lentes) que los enfoca en el foto-cátodo de un tubo foto-multiplicador (PMT). Un filtro pasa-bandas centrado en 420 nm es alineado con el telescopio para reducir el ruido de fondo (ver figura 4.1).

El PMT es un tubo foto-multiplicador analógico (Hamamatsu 1P28) que amplifica la corriente generada cuando llegan fotones a su foto-cátodo [18]. Para aumentar el

¹En el caso de ^{85}Rb se ancla a la transición $5S_{1/2}(F = 3) \rightarrow 5P_{3/2}(F = 4)$.

cociente de señal a ruido se utilizó un sistema de detección en fase [19], conformado por un obturador mecánico (Optical chopper, Thorlabs MC2000) y un amplificador en fase (Lock-In amplifier, EG&G Princeton Applied Research 5209). Mientras el obturador modula el haz de 911 nm con una frecuencia de 1 kHz, el amplificador filtra y analiza la señal proveniente del PMT en fase con la frecuencia de 1 kHz. Esto permite eliminar componentes de ruido que ocurran a frecuencias distintas a las del obturador.

Un programa de computadora, escrito en *LabView*, realiza dos acciones de manera simultanea:

- A través de un canal de la tarjeta de adquisición de datos² registra la salida analógica del amplificador en fase (Lock-In).
- Una vez que ha leído esta información, manda una orden a través de un puerto USB a una fuente de voltaje programable³ para que modifique su voltaje de salida. Esta fuente está conectada al elemento piezo-eléctrico, que controla la frecuencia de emisión del láser de 911 nm, de modo que al modificar el voltaje de salida, se modifica la frecuencia de emisión de dicho láser.

Es de esta manera que se generan series de datos que relacionan la cantidad de fotones azules detectados con la frecuencia de emisión del láser de 911 nm (a través de el voltaje aplicado a su elemento piezo-eléctrico). Estas series de datos son las que se denominan espectros.

4.2. Procedimiento

Para el presente trabajo se realizaron varios experimentos, pero los resultados principales se obtuvieron de tres de ellos. En esta sección se incluye la información concerniente a cómo dichos experimentos fueron realizados y qué cantidades fueron medidas en el proceso.

Para los tres experimentos se utilizó el mismo sistema de medición, descrito al final de la sección anterior.

4.2.1. Primer experimento

En este experimento se tomaron espectros para distintas cargas topológicas del haz Bessel. El objetivo era comparar dichos espectros para tratar de identificar cambios entre ellos, ya que esto implicaría que la cantidad de momento angular orbital (OAM) de la luz de 911 nm tiene influencia en las tasas de transición de los átomos. Para lo cual se utilizó el montaje mostrado esquemáticamente en la Fig. 4.1, sin incluir las

²National Instruments DAQ USB-6363

³Tektronix PWS4305

lentes ni la placa retardadora de media onda encerrados en la figura por los recuadros verde y rojo, respectivamente. Para los dos haces de excitación la polarización se mantuvo lineal, en las direcciones: vertical para el haz de 780 nm y horizontal para el haz de 911 nm.

Para este primer experimento se utilizó el isótopo ^{85}Rb y las potencias⁴ de los láseres fueron:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{p1}} &= (117 \pm 2) \mu\text{W} \\ \boxed{\text{p2}} &= (47 \pm 2) \text{mW} \\ \boxed{\text{p3}} &= (55 \pm 2) \text{mW} \\ \boxed{\text{p4}} &= (70 \pm 2) \text{mW} \end{aligned}$$

El orden del haz Bessel se varió de 0 a 8 en pasos enteros. Para cada uno de estos ordenes se tomaron 76 espectros distintos.

El análisis de los datos obtenidos en el experimento se muestra en la sección 5.2. Un resumen con los resultados principales se muestra en la sección 6.2.

Tras observar los resultados de dicho análisis se realizó una caracterización del perfil espacial de los haces, utilizando para esto una técnica desarrollada en el *Laboratorio de Átomos Fríos* un par de años atrás [19]. El método consiste en capturar con un sensor CCD la luz proveniente de un papel, que actúa como medio dispersivo, iluminado con el haz láser que se quiere caracterizar. La potencia de dicho haz se debe controlar de modo que las fotografías no exhiban píxeles saturados. Las fotografías se pueden escalar en distancia ya que el papel utilizado tiene impresas líneas horizontales y verticales separadas por un milímetro. Las imágenes de las capturas mostrando el perfil espacial de los haces se muestran en el apéndice C.1 y el análisis de dichas imágenes se encuentra en la sección 5.2.1.

Esta caracterización reveló que la cantidad de energía, involucrada en el proceso de excitación, disminuye al aumentar el tamaño del anillo central del haz Bessel. Por lo cual los resultados del experimento se ven alterados, esto se muestra en la sección 5.2.2.

Aún cuando es posible normalizar los espectros para tomar en cuenta esta efecto, se tomó la decisión de medir nuevamente dichos espectros utilizando haces Bessel de menor tamaño.

4.2.2. Segundo experimento: con tamaño del haz Bessel reducido

Este experimento es muy similar al primero, sólo se hicieron dos modificaciones en el dispositivo experimental:

⁴Estas potencias fueron medidas utilizando los siguientes productos de la compañía *Coherent*: medidor de potencia *FieldMate*; sensores *LM-2 VIS* y *PM10-19C*.

1. Para reducir el tamaño del haz Bessel se incluyó un telescopio formado por dos lentes de distancias focales $f_1 = 13.5$ cm y $f_2 = 3.5$ cm (ver recuadro verde en la Fig. 4.1). De este modo, para el haz Bessel de orden cero, el diámetro del primer anillo oscuro valía (74.3 ± 5.3) μm .
2. Por otro lado, se aumentó la potencia en cada brazo de los láseres para aumentar la señal a ruido en los espectros. En este segundo experimento las potencias de los láseres fueron:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{p1}} &= (179 \pm 2) \mu\text{W} \\ \boxed{\text{p2}} &= (58 \pm 2) \text{mW} \\ \boxed{\text{p3}} &= (78 \pm 2) \text{mW} \\ \boxed{\text{p4}} &= (100 \pm 2) \text{mW} \end{aligned}$$

Hubo una tercer modificación respecto al primer experimento: se trabajó con el isótopo ^{87}Rb , que tiene mayor separación entre los niveles hiperfinos, lo cual facilita el análisis de los espectros obtenidos.

Antes de iniciar con la toma de espectros, se hizo una caracterización del perfil espacial de los haces, utilizando una técnica distinta a la utilizada en el primer experimento. El procedimiento fue hacer incidir el haz láser directamente en un sensor CCD (*Edmund Optics EO-1312M-GL LE*), sin utilizar lentes o medios dispersivos (papel), pero disminuyendo la intensidad del haz incidente con filtros de densidad neutra (tantos como sean necesarios). Esto último es muy importante, ya que de otra manera es muy alta la probabilidad de dañar el sensor CCD. En este caso particular se utilizaron dos filtros: *Thorlabs NE30A-B* y *NE60A-B*. Utilizando entonces las especificaciones técnicas del sensor CCD, para conocer el tamaño de cada pixel, fue posible escalar espacialmente las imágenes capturadas. Las fotografías de los haces se muestran en el apéndice C.2.

Para la toma de espectros se varió el orden del haz Bessel de 0 a 8 en pasos enteros. Se tomaron 70 espectros distintos para cada uno de estos órdenes.

Análogamente al caso anterior, el análisis de los datos experimentales se muestra en la sección 5.3 (incluyendo el análisis de la estructura espacial de los haces y el análisis de los espectros) y un resumen con los resultados finales se muestra en la sección 6.3.

Estos resultados sugieren que al cambiar la carga topológica del haz Bessel no es posible observar cambios en los espectros obtenidos, dentro de la precisión del método experimental utilizado.

Esto podría haber sido la conclusión final para el presente trabajo. Sin embargo, recientemente el *Laboratorio de Átomos Fríos* publicó un trabajo [23] en el que se muestra que al cambiar la dirección de polarización de los haces de excitación se puede dar preferencia a ciertas transiciones de las permitidas por las reglas de selección, y que esta preferencia se puede medir utilizando un montaje experimental equivalente

al mostrado en la figura 4.1. Por lo cual se tomó la decisión de realizar un tercer y último experimento, para definir si los resultados publicados en dicho trabajo son independientes de la estructura espacial del segundo haz de excitación.

4.2.3. Tercer experimento: distribución angular

Los resultados de los primeros dos experimentos no muestran evidencia de cambios en los espectros debido a cambios en el orden de los haces Bessel. Ambos experimentos se realizaron con la polarización del haz de 780 nm vertical y la del haz de 911 nm horizontal, es decir con estados de polarización cruzados. El objetivo de este tercer experimento fue tomar espectros variando la dirección de polarización del segundo haz de excitación y comparar los resultados obtenidos para distintos tipos de perfiles de intensidad en el haz cuadrupolar.

La dirección de polarización del haz de 911 nm se varió utilizando la placa retardadora de media onda (en el recuadro rojo) mostrada en la Fig. 4.1. Los tipos de estructura de este mismo haz fueron: Bessel, de orden 0, 2, 4, 6 y 8, y Gaussiano.

El caso Gaussiano ya había sido estudiado en [22, 23], sin embargo se repitió dicha medición para intentar que todas las condiciones experimentales fueran iguales en ambos casos (con haz Gaussiano y con haz Bessel), ya que de este modo la comparación entre resultados es más directa.

Para incluir ambos tipos de haces en el dispositivo, se dividió el haz de 911 nm en dos brazos unidos posteriormente, de manera análoga a lo que se hace en un interferómetro de Mach-Zehnder, sin embargo en este caso uno de los brazos fue modulado para generar un haz Bessel mientras que el otro se mantuvo inalterado. De modo que a la celda de rubidio podía llegar un haz Bessel o un haz Gaussiano, dependiendo de qué brazo del interferómetro se bloqueara.

De manera análoga a lo realizado en el experimento previo, antes de iniciar con la toma de espectros se hizo una caracterización del perfil espacial de los haces. En este caso, además, se midió la pureza de la polarización de los mismos utilizando un polarizador y un medidor de potencia.

Para este tercer experimento las potencias de los láseres fueron (las potencias p_3 y p_4 no se midieron en este caso):

$$\begin{aligned} \boxed{p_1} &= (300 \pm 2) \mu\text{W} \\ \boxed{p_2} &= (138 \pm 2) \text{mW} \end{aligned}$$

En cuanto a la toma de espectros, en un principio se planteó seguir el mismo procedimiento que en los experimentos anteriores, sin embargo finalmente se tomó la decisión de realizar las mediciones sin utilizar el sistema de amplificación en fase Lock-In, esto debido a dos factores:

1. Durante la realización de los primeros dos experimentos, la máxima potencia de salida del láser de Titanio-Safiro (a 911 nm) era menor a 250 mW. Para

poder medir la presencia de fotones azules en la celda, con esa potencia, el sistema de amplificación en fase era indispensable. En cambio cuando se realizó el tercer experimento, la potencia de salida disponible era mayor a 600 mW (este aumento en potencia fue debido a un proceso de mantenimiento del láser), de modo que fue posible mandar ~ 138 mW de luz de 911 nm a la celda, lo que permite realizar mediciones sin la ayuda del detector en fase.

2. El otro factor fue el tiempo invertido en la toma de datos. El filtrado realizado por el sistema de amplificación en fase Lock-In es relativamente lento; medir un espectro con este sistema toma en promedio ~ 6 segundos. Tomando en cuenta que se querían tomar 50 espectros para cada tipo de haz y para 15 ángulos relativos distintos, entonces la toma de datos hubiera tomado ~ 7.5 horas. Sin utilizar ese sistema de filtrado, es posible tomar 50 espectros en ~ 30 segundos, con lo cual fue posible reducir el tiempo invertido en tomar datos a ~ 45 minutos. Nótese que las estimaciones de tiempo anteriores son únicamente para la toma de datos, falta tomar en cuenta el tiempo invertido en cambiar parámetros (como el ángulo de polarización y la estructura del haz cuadrupolar) y el invertido en asegurar que las condiciones del experimento se mantengan invariantes (potencia de los láseres, anclado de frecuencia, etc.).

El análisis de los datos experimentales se muestra en la sección 5.4 (incluyendo el análisis de la estructura espacial de los haces y el análisis de los espectros) y los resultados principales se resumen en la sección 6.4.

Capítulo 5

Análisis de datos experimentales

En este capítulo se incluye el análisis de los datos experimentales obtenidos. El capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primer sección se muestra el análisis del perfil espacial de intensidad del haz de 780 nm. Las otras tres secciones están dedicadas a cada uno de los tres experimentos. Cada una de estas tres secciones está a su vez dividida en sub-secciones, para mostrar el análisis de algunas propiedades de los haces de excitación y el análisis de los espectros por separado.

5.1. Caracterización espacial del primer haz de excitación (780 nm)

El haz de 780 nm se hizo incidir directamente en un sensor CCD para poder caracterizar su perfil de intensidad. El resultado de una captura de dicho sensor se muestra en la figura 5.1. Cada pixel del sensor CCD mide $5.3 \mu\text{m}^1$ por lo que este es el factor de conversión *posición pixel* \leftrightarrow *distancia* utilizado. Hay dos características del haz que son evidentes al ver la fotografía: en primer lugar el haz no presenta una distribución Gaussiana de intensidad, en segundo lugar el tamaño del haz en la dirección horizontal es distinto al tamaño en la dirección vertical. Ambas características son consecuencia de que el haz sea producido por un diodo láser. A diferencia de los haces Gaussianos, donde el ancho se define a partir del radio del haz cuando la intensidad disminuye en un factor de $1/e^2$, para el presente caso no hay una convención establecida sobre cómo definir el tamaño del haz.

En la figura 5.2 se muestran cortes horizontales y verticales del perfil de intensidad. Lo cual deja aún mas claro que el haz no es Gaussiano, sin embargo se puede utilizar la idea del ancho Gaussiano de la siguiente manera: se define una altura máxima h_{max} como el máximo valor de los cortes centrales, dichos cortes están graficados en negro en la figura 5.2; posteriormente se guarda la primer y última posición donde la intensidad es mayor que h_{max}/e^2 ; se repite esto para cada corte por separado, lo cual

¹De acuerdo las especificaciones del fabricante (*Edmund Optics EO-1312M-GL LE*).

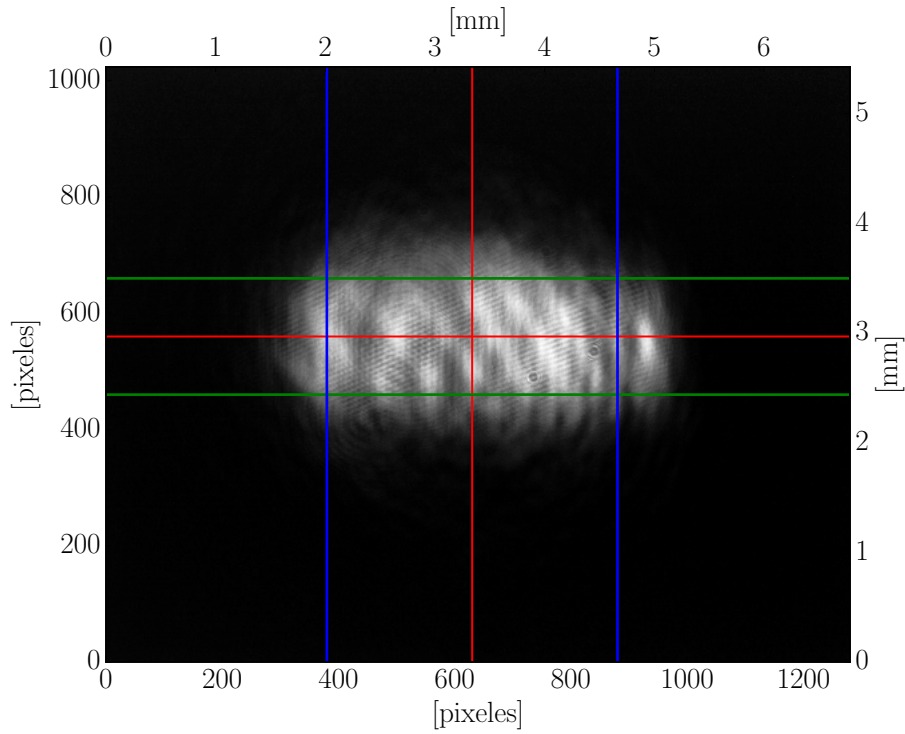


Figura 5.1: Fotografía del perfil transversal del haz de 780 nm. Las líneas rojas indican el centro (aproximado) del haz. Las líneas azules(verdes) indican el inicio y el fin de los cortes verticales(horizontales) graficados en la figura 5.2.

da varios valores para las ‘orillas’ del haz en ambas direcciones, que tras promediar y obtener su desviación estandar resulta en :

Orillas [<i>pixeles</i>]		Anchos [<i>pixeles</i>]
$x_1 = 297 \pm 9$	$x_2 = 969 \pm 5$	$\Delta x = x_2 - x_1 = 672 \pm 14$
$y_1 = 394 \pm 9$	$y_2 = 734 \pm 17$	$\Delta y = y_2 - y_1 = 340 \pm 26$

Recordando que para expresar cantidades en μm hay que multiplicar por 5.3 se obtienen los anchos

$$\Delta x = (3561.6 \pm 74.2) \mu\text{m} \quad (5.1a)$$

$$\Delta y = (1802.0 \pm 137.8) \mu\text{m} \quad (5.1b)$$

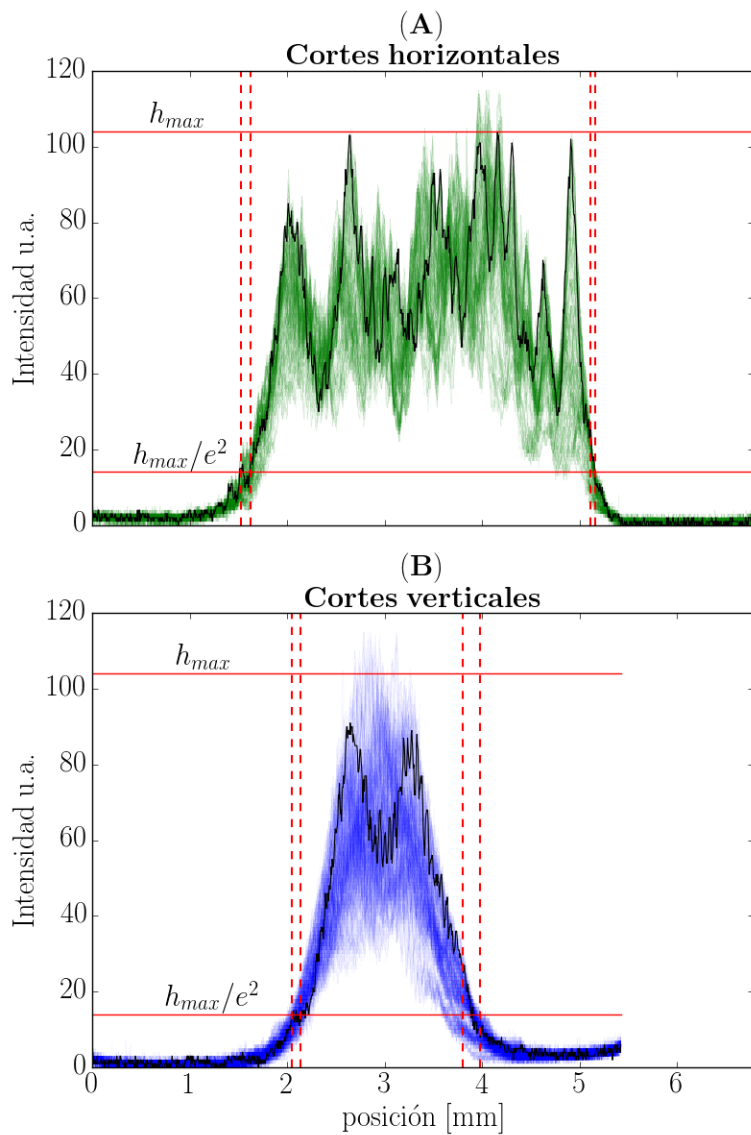


Figura 5.2: Cortes del perfil de intensidad del haz de 780nm. (A): gráfica de 500 cortes verticales. (B): gráfica de 200 cortes horizontales. En ambas imágenes la línea negra indica el corte en el centro del haz, las líneas rojas punteadas indican el ancho, mínimo y máximo, estimado del haz.

5.2. Primer experimento

En este experimento se midieron espectros para 9 órdenes distintos del haz Bessel, con los haces de excitación polarizados linealmente y en direcciones ortogonales. Aún cuando cronológicamente se midieron primero los espectros y después los perfiles de intensidad del haz Bessel, para presentar el análisis tiene más sentido empezar por los perfiles de intensidad y después mostrar el análisis completo de los espectros.

5.2.1. Distribución transversal de intensidad del haz Bessel

Para caracterizar el perfil de intensidad del haz se utilizó, únicamente para este primer experimento, el método descrito en 4.2.1, en el cual el haz se hace incidir sobre un papel milimétrico y no directamente sobre el sensor CCD. Este método tiene como ventaja no arriesgar la integridad del sensor CCD, pero tiene dos desventajas: las capturas presentan puntos brillantes debido al granulado del papel y el método para escalar las imágenes es indirecto.

Escalamiento de imágenes

El proceso para escalar espacialmente las imágenes es el siguiente: con el haz láser bloqueado y con la luz de la habitación encendida se fotografía el papel cuadriculado, posteriormente se elimina la luz de la habitación y se desbloquea el haz láser. En la figura 5.3 se muestra un ejemplo de ambas capturas, en este caso se trata de un haz Bessel de orden cero. Las fotografías del mismo haz para órdenes superiores se encuentran en el apéndice C.1. El análisis de la primer fotografía de la figura 5.3 permite obtener la posición de los pixeles donde se encuentran las líneas oscuras (horizontales y verticales), lo cual permite obtener un factor de conversión entre posición del pixel y distancia: $u = u_{horiz} = u_{vert} = (59 \pm 1)pixel/mm$. En este caso el factor de conversión resulta ser igual en ambas direcciones. Como además se utilizó una lente cóncava de distancia focal $f = -2.5$ cm para expandir el haz, permitiendo así tener mayor resolución en las fotografías, hace falta tomar en cuenta el factor de magnificación de la misma y dado que el papel milimétrico se encontraba a $d = (2.8 \pm 0.1)$ cm de la lente, entonces la magnificación es $v = \frac{d+|f|}{|f|} = (2.1 \pm 0.05)$. Por lo cual el factor de conversión final es:

$$m = u * v = (123.9 \pm 5)pixel/mm \quad (5.2)$$

Utilizando la información anterior fue posible escalar todas las fotografías (capturadas con este método).

Análisis radial de la distribución de intensidad

Dado que los haces Bessel tienen simetría axial, analizar las fotografías en las direcciones X y Y no parece ser la mejor opción, en lugar de esto se utilizó una

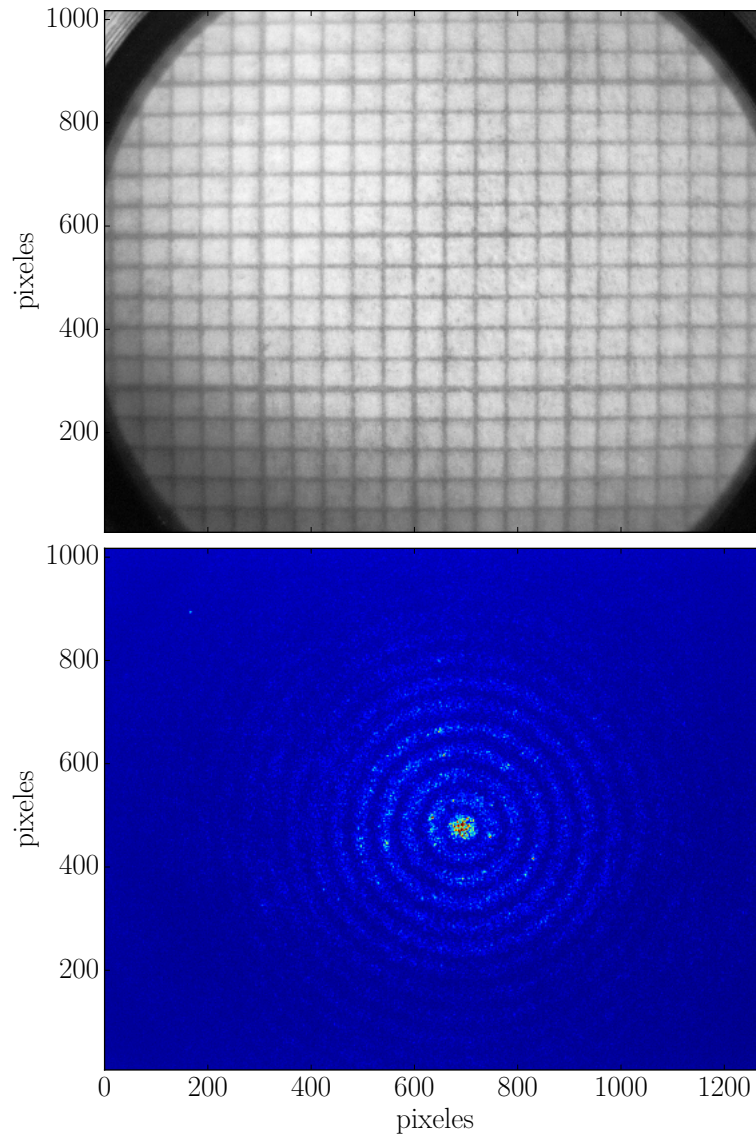


Figura 5.3: 1er experimento: Fotografías del papel cuadriculado (arriba) y del perfil de intensidad del haz Bessel de orden cero (abajo) tras ser dispersado por el papel. La imagen inferior no está en escala de grises ya que, para evitar saturación, la fotografía es muy oscura.

rutina que lee la información de las fotografías en el formato de matriz y regresa la información en un arreglo lineal asociado al radio medido en pixeles (respecto a un punto central que se elige para cada fotografía). El procedimiento se explica a continuación. Si las coordenadas de la matriz original se nombran (x, y) y se define el centro como (x_0, y_0) , entonces el radio se calcula como $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Esto implica que para distintos radios hay un número distinto de entradas disponibles en la matriz, como se muestra en la siguiente tabla:

ρ	(x,y)	# de entradas
0	(0,0)	1
1	(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)	4
$\sqrt{2}$	(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)	4
2	(2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2)	4
$\sqrt{5}$	(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2), (2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)	8
$\sqrt{8}$	(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)	4

En el caso en que un valor del radio tenga asociado más de una entrada de la matriz, se promedian los valores de estas entradas, de modo que se tiene un solo valor de intensidad asociado con cada valor radial. En la figura 5.4 se muestra un ejemplo del resultado de este proceso para el caso del haz Bessel de orden cero. Ahí mismo se muestra también el ajuste a los datos experimentales de la función

$$f(\rho, p) = p_1 J_n(p_2(\rho - p_0))^2 + p_3 \quad (5.3)$$

Con $n = 0$ y donde los p_i 's son los parámetros libres del ajuste. Los datos experimentales para los órdenes superiores se muestran en la figura 5.5, junto con las funciones correspondientes ajustadas. En todas estas gráficas el límite en el eje X se fijó en 400 pixeles, ya que para valores mayores las oscilaciones se pierden en el ruido de las fotografías.

Utilizando el parámetro p_2 y tomando en cuenta que el primer cero de la función J_0 ocurre cuando su argumento vale 2.405 [45], es posible concluir que el primer anillo oscuro del haz Bessel de orden cero tiene como radio (nótese que se incluye el factor de conversión m):

$$\rho_0 = \frac{2.405}{m * p_2} = (281 \pm 14) \mu\text{m} \quad (5.4)$$

Comparación en tamaño de haces de 911 y 780 nm

Como se mencionó antes, el radio máximo ρ_{max} para el cual las oscilaciones de intensidad de los haces Bessel aún son visibles es de 400 pixeles, que en este caso equivale a

$$\rho_{max} = \frac{400\text{pixeles}}{m} = (3.228 \pm 0.130)\text{mm} \quad (5.5)$$

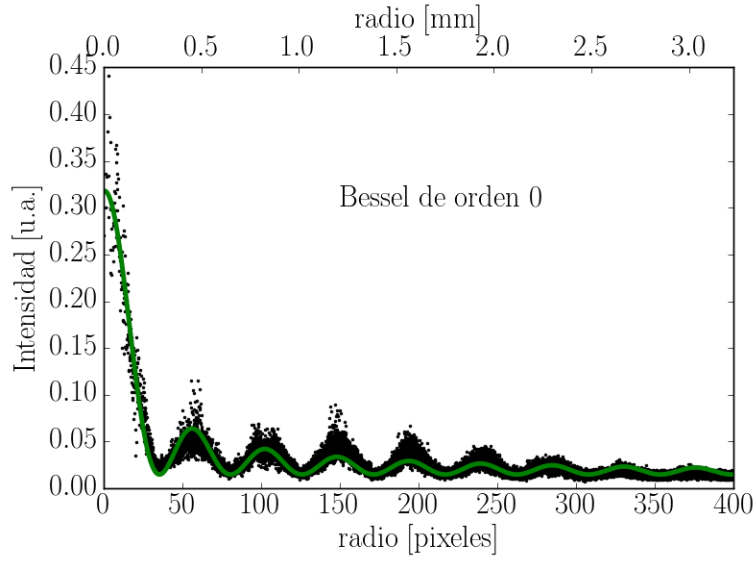


Figura 5.4: 1er experimento: Distribución radial de intensidad del haz Bessel de orden cero. Los puntos negros son el resultado del análisis de la fotografía y la línea verde es el ajuste.

Lo que quiere decir que el diámetro vale

$$\Delta_{\rho_{max}} = (6.456 \pm 0.260)mm \quad (5.6)$$

Sin embargo, como se mostró en la ecuación (5.1), el tamaño del haz de 780 nm es

$$\begin{aligned} \Delta x &= (3561.6 \pm 74.2) \mu m \\ \Delta y &= (1802.0 \pm 137.8) \mu m \end{aligned}$$

Lo cual indica que el haz Bessel no cabe completamente dentro del haz de 780 nm. Esto es muy importante ya que en el experimento se estudió una transición de dos fotones. Para poder comparar entre los espectros obtenidos para distintos órdenes del haz Bessel fue entonces necesario calcular un factor de normalización, gobernado por la cantidad de luz de ambos haces en una sección del espacio. El haz de 780 nm se modeló básicamente como un rectángulo de lados $\Delta x \times \Delta y$ por lo cual es necesario recortar las imágenes del haz Bessel al tamaño del haz de 780 nm. En la figura 5.6 se muestran fotografías de haces Bessel de órdenes 0, 4 y 8 recortadas, además se muestra una visualización de los ajustes.

Dado que la probabilidad de transición es proporcional a la intensidad del haz de excitación, es posible calcular una intensidad efectiva asociada al proceso de excitación de dos fotones a través del traslape de las fotografías de ambos haces de excitación.

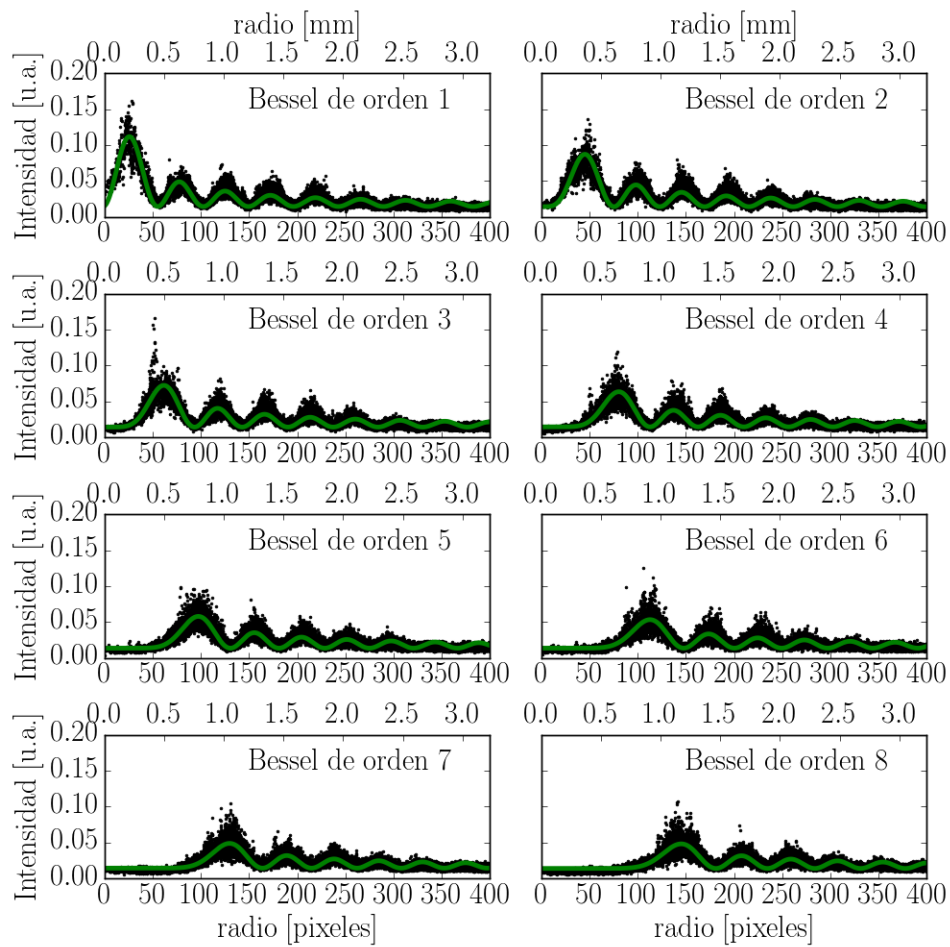


Figura 5.5: 1er experimento: Distribución radial de intensidad de varios órdenes distintos del haz Bessel. Los puntos negros son el resultado del análisis de las fotografías y las líneas verdes son los ajustes.

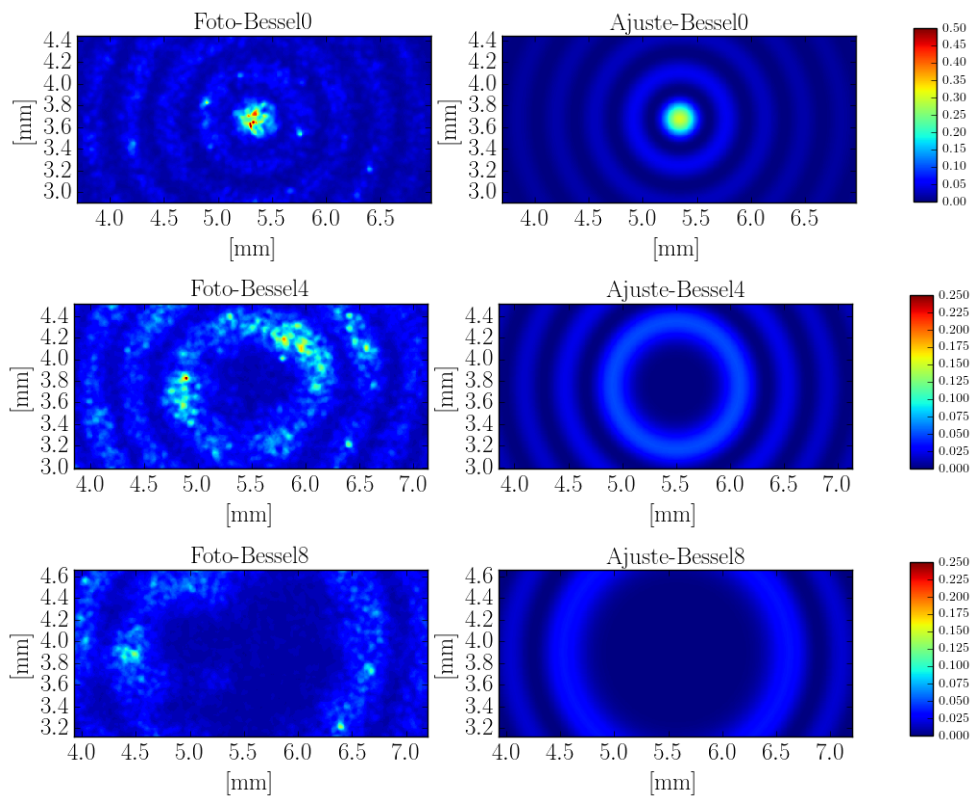


Figura 5.6: 1er experimento: Fotografías y ajustes de algunos órdenes del haz Bessel. Las gráficas están recortadas al tamaño del haz de 780 nm.

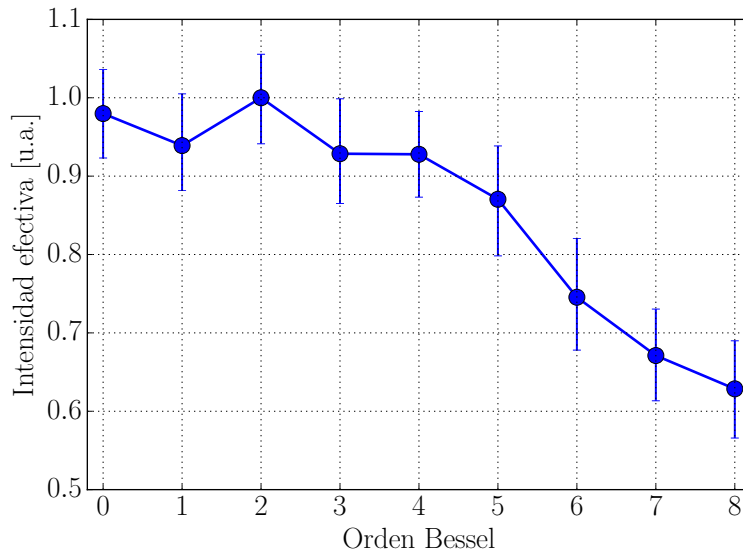


Figura 5.7: 1er experimento: Valores de la intensidad efectiva, calculados al traslapar imágenes de los perfiles de intensidad de ambos haces de excitación y sumando todas las entradas de la matriz resultante. Estos valores se utilizarán más adelante como factores de normalización al comparar espectros.

Como además no hay manera de saber de qué punto en el espacio provienen los fotones azules detectados por el tubo fotomultiplicador, hay que sumar todas las posibles contribuciones, que en el caso de las fotografías significa sumar todas las entradas de la matriz resultante del traslape. Si se hace esto se obtiene un valor de la intensidad efectiva para cada orden del haz Bessel, que se usará más adelante como factor de normalización de los espectros. En la figura 5.7 se muestran estos valores como función del orden del haz Bessel.

5.2.2. Análisis de los espectros medidos

Tanto en este como en los demás experimentos se tomaron espectros utilizando el sistema de detección descrito en 4.1.2. El procedimiento para este experimento se encuentra en 4.2.1.

En total se tomaron 76 espectros para cada orden del haz Bessel entre 0 y 8, además se repitió la medición para el orden 0 al final para corroborar que no hubiera cambiado algún parámetro durante la toma de datos. Esto quiere decir que se guardaron $76 \cdot 10 = 760$ espectros, por lo que analizar uno por uno sería muy ineficiente. En lugar de esto se escribió un programa que hace lo siguiente:

- Genera listas con los nombres de los archivos. Cada lista es para un orden distinto del haz Bessel.

- Para cada lista se hace el siguiente análisis
 1. Se leen los datos de los archivos, que corresponden a dos columnas, la primera es el voltaje aplicado al piezo-eléctrico del láser de 911 nm y la segunda es la señal que se quiere medir. Para facilitar esta explicación se nombrarán *volt* y *señal* dichas columnas.
 2. Cada espectro debe constar de dos picos principales². Una función detecta la cantidad de picos cuya altura es mayor que cierto valor mínimo (establecido por encima del nivel del ruido) y si algún espectro presenta más de dos picos ya no es tomado en cuenta para el análisis posterior.
 3. Se detecta la posición del punto máximo en *señal* y se guarda el valor de *volt* para esta posición en un arreglo. Esto permite restarle a *volt* un offset de modo que el pico más alto se encuentre centrado en cero para todos los espectros. Un ejemplo del resultado de los dos pasos anteriores se muestra en la figura 5.8.
 4. Se ajustan tres Lorentzianas a cada espectro, con tres parámetros libres: centro, altura y ancho. El parámetro que ajusta el ancho es el mismo para los tres picos. La posición del centro del pico más pequeño se fija, debido a la proporción conocida entre los niveles hiperfinos del ⁸⁵Rb. Los valores de los parámetros ajustados se guardan en un archivo.

Una vez concluido el análisis por separado de cada espectro, es posible obtener un promedio de los parámetros ajustados. Esto permitirá hacer una comparación entre los resultados para cada orden distinto del haz Bessel. En la figura 5.9 se muestra el promedio de los tres parámetros correspondientes a las alturas de los picos. Hay que tener cuidado al analizar esta gráfica, ya que es claro que las alturas tienden a disminuir al aumentar el orden del haz Bessel, sin embargo es necesario recordar que la cantidad de energía involucrada en el proceso también cambia, lo cual se puede apreciar en la figura 5.7. De hecho al comparar ambas gráficas se observa que la tendencia parece ser la misma. Tras utilizar los valores de la intensidad efectiva como factor de normalización, se graficaron nuevamente las alturas de los picos, este resultado se muestra en el capítulo 6 en la figura 6.1.

Una vez normalizadas, las alturas de los picos pierden su tendencia a disminuir. Nótese que la normalización aumentó el tamaño de las barras de error. Dadas estas barras de error no es posible discernir si hay o no un cambio en la probabilidad de transición cuadrupolar debido al cambio de orden del haz Bessel. Para disminuir las barras de error se realizó el segundo experimento.

²En realidad deben ser tres picos, pero para esta configuración de polarizaciones es difícil distinguir el tercer pico debido al ruido.

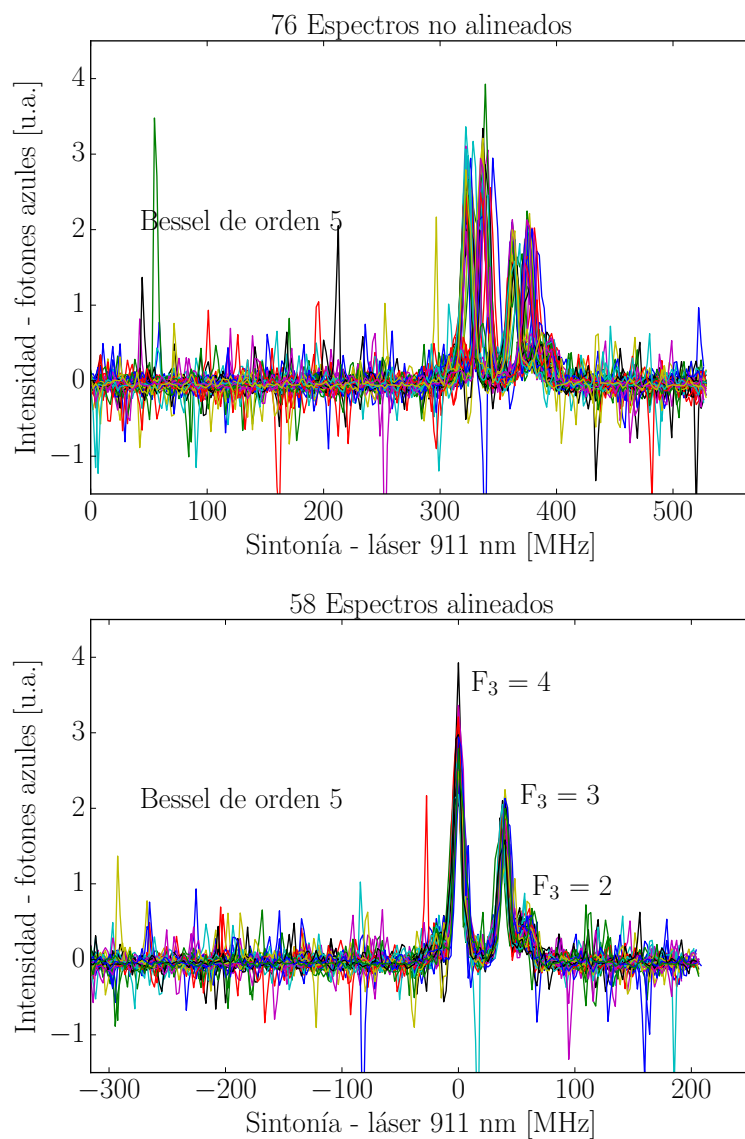


Figura 5.8: 1er experimento: Ejemplo de eliminación de espectros ‘defectuosos’ y centrado de pico alto, para el haz Bessel de orden 5.

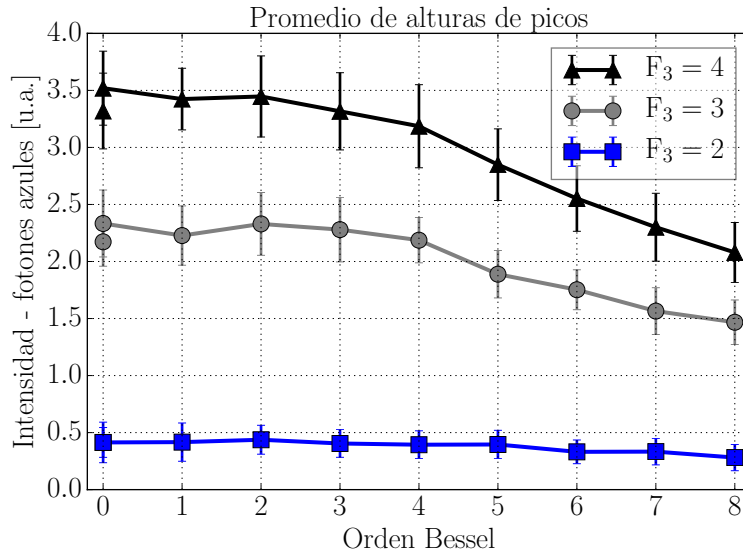


Figura 5.9: 1er experimento: Promedio de las alturas ajustadas a los tres picos de los espectros.

5.3. Segundo experimento: con tamaño del haz Bessel reducido

Este experimento se podría considerar como una repetición del anterior, pero hubo tres cambios que permitieron aumentar la precisión de las mediciones. En primer lugar se aumentó la potencia de los haces de excitación, lo cual aumenta el cociente de señal a ruido del sistema de detección. Por otro lado se redujo en un factor de ~ 3.8 el tamaño del haz Bessel, lo cual (como se verá en esta sección) permitió eliminar la necesidad de un factor de normalización, eliminando por lo tanto la propagación de errores. Finalmente se utilizó el isótopo ^{87}Rb ya que este presenta una mayor separación en las líneas hiperfinas, lo cual hace que los ajustes de las curvas Lorentzianas sean más precisos.

Para este experimento primero se caracterizó el perfil de intensidad del haz Bessel y posteriormente se realizó la toma de espectros. En este mismo orden se presenta el análisis de ambas acciones.

5.3.1. Distribución transversal de intensidad del haz Bessel

Como se menciona en la sección 4.2.2, se hizo incidir el haz Bessel directamente en el sensor CCD, lo que quiere decir que para escalar espacialmente las imágenes

capturadas únicamente es necesario multiplicar por el factor de conversión:

$$m' \equiv 5.3 \frac{\mu\text{m}}{\text{pixel}} \quad (5.7)$$

De la misma manera que se hizo en la sección 5.1. Salvo por esta diferencia el proceso de análisis es el mismo que el realizado en la sección 5.2.1. Por lo que se presentarán aquí los resultados de dicho análisis sin entrar en tantos detalles, salvo cuando sea necesario. Para más detalles consultar la sección 5.2.1.

Las imágenes de las capturas se muestran en el apéndice C.2

Análisis radial de la distribución de intensidad

En este segundo experimento sucedió algo que pasó inadvertido hasta el momento en que se realizó el análisis del perfil de intensidad del haz: por cuestiones de alineamiento, el haz no fue tan fuertemente expandido antes de llegar al modulador de fase espacial SLM (ver figura 4.1). Por lo cual el haz Bessel presentó una envolvente que se concluyó, a la hora de estudiar la distribución de intensidad radial, era de tipo Lorentziana. De modo que a estos datos no se les ajustó la función (5.3), en cambio se les ajustó la función

$$f(\rho, p) = p_1 \frac{J_n(p_2(\rho - p_0))^2}{(\rho/p_4)^2 + 1} + p_3 \quad (5.8)$$

Tanto los datos experimentales como los ajustes se muestran en la figura 5.10. En las gráficas el límite en el eje X se fijó en 250 píxeles, ya que para valores mayores las oscilaciones se pierden en el ruido de las fotografías. Para este segundo experimento el radio ρ_0 del primer anillo oscuro del haz Bessel de orden cero valía:

$$\rho_0 = \frac{2.405 m'}{p_2} = (74.3 \pm 5.3) \mu\text{m} \quad (5.9)$$

Comparación en tamaño de haces de 911 y 780 nm

Para calcular la intensidad efectiva, de manera análoga a lo realizado en la sección 5.2.1, primero se recortan las imágenes del haz Bessel al tamaño del haz de 780 nm. En la figura 5.11 se muestran fotografías de haces Bessel de órdenes 0, 4 y 8 recortadas, además se muestra una visualización de los ajustes.

Al comparar dichas gráficas con las de la figura 5.6 es claro que, para este nuevo tamaño del haz Bessel, la intensidad efectiva no cambiará significativamente al cambiar el orden del haz Bessel. En la figura 5.12 se muestran los nuevos valores de la intensidad efectiva, la escala en el eje Y se mantuvo igual a la de la gráfica de la figura 5.7 para facilitar la comparación. Dicha comparación hace evidente que al cambiar el orden del haz Bessel la cantidad de energía involucrada en el proceso prácticamente no cambia. Por lo que para este experimento no será necesario renormalizar los espectros.

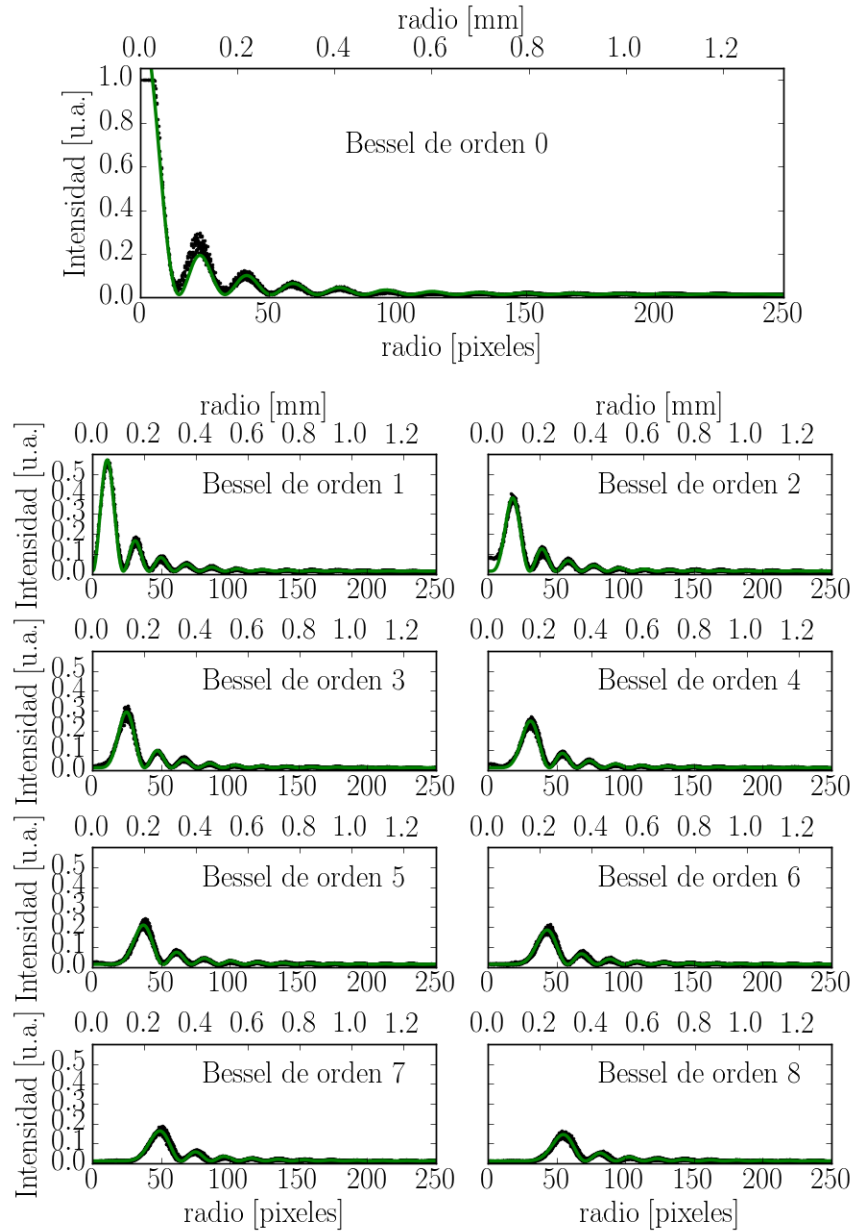


Figura 5.10: 2do experimento: Distribución radial de intensidad de varios órdenes distintos del haz Bessel. Los puntos negros son el resultado del análisis de las fotografías y las líneas verdes son los ajustes.

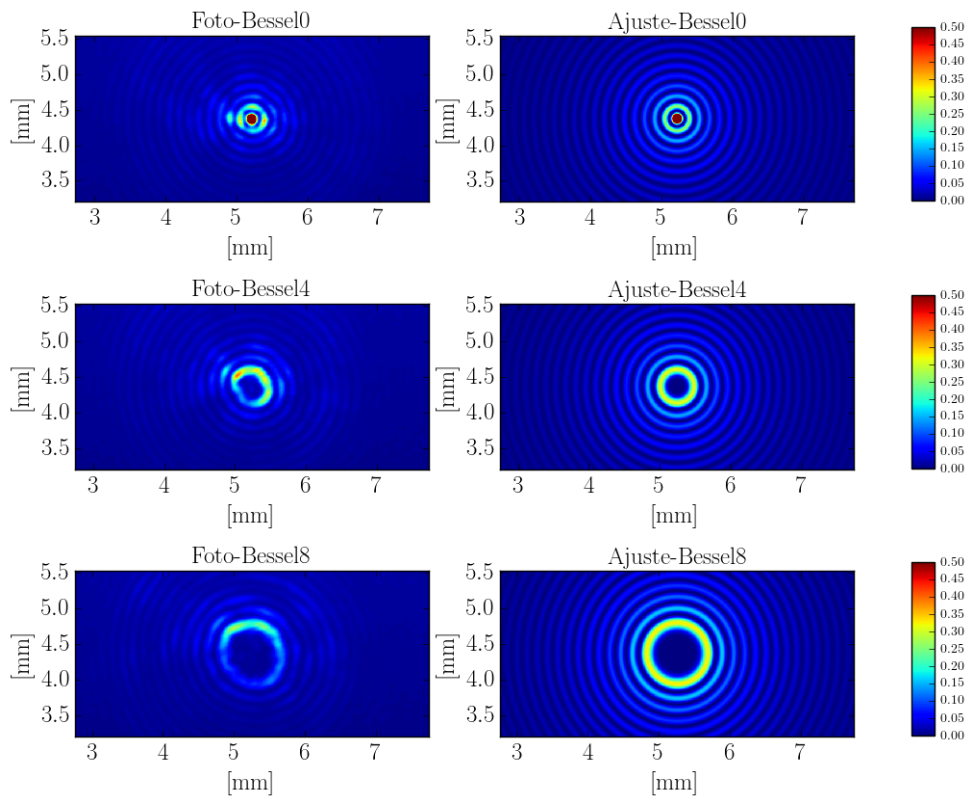


Figura 5.11: 2do experimento: Fotografías y ajustes de algunos órdenes del haz Bessel. Las gráficas están recortadas al tamaño del haz de 780 nm.

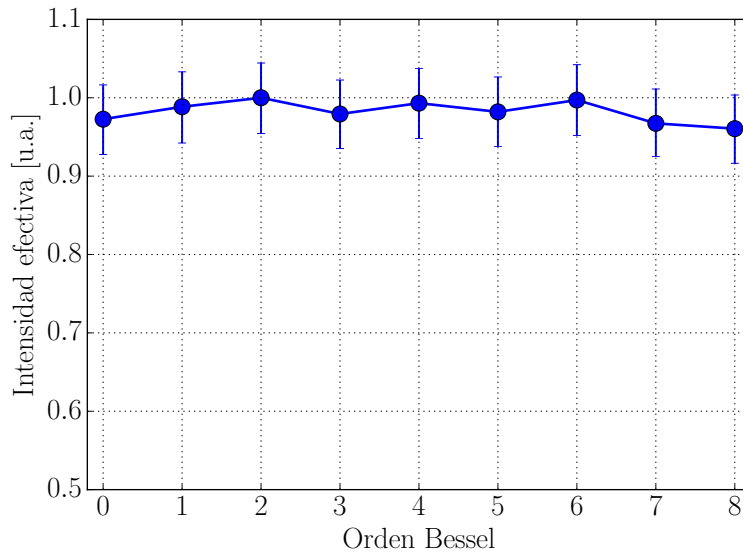


Figura 5.12: 2do experimento: Valores de la intensidad efectiva, calculados al traslapar imágenes de los perfiles de intensidad de ambos haces de excitación y sumando todas las entradas de la matriz resultante. Comparar con las gráficas de la figura 5.7.

5.3.2. Análisis de los espectros medidos

El procedimiento utilizado para tomar datos durante este 2do experimento se encuentra en 4.2.2.

Se tomaron 70 espectros para cada orden del haz Bessel, el cual se varió entre 0 y 8. Esto da un total de 630 espectros, para analizarlos se utilizó el mismo programa que se utilizó para el 1er experimento, descrito brevemente en la sección 5.2.2. Un ejemplo de los espectros medidos para el haz Bessel de orden 7 se muestra en la figura 5.13. En la figura se muestra el resultado de centrar los espectros descartando aquellos que tengan más de dos picos principales. Vale la pena notar que la señal a ruido ha disminuido significativamente respecto a los espectros del primer experimento.

Tras ajustar las curvas Lorentzianas se obtuvo un promedio de los tres parámetros correspondientes a las alturas de los picos, para cada juego de espectros. En el capítulo 6 en la figura 6.3 se muestran estos promedios. Como se ha mencionado antes, no hay necesidad de renormalizar las alturas de los espectros, por lo que este es el resultado final del 2do experimento. Nótese que se reafirma el resultado obtenido en el primer experimento, es decir que bajo las condiciones en que se tomaron los datos, no es posible detectar algún cambio en las tasas de transición debido a cambios del orden del haz Bessel.

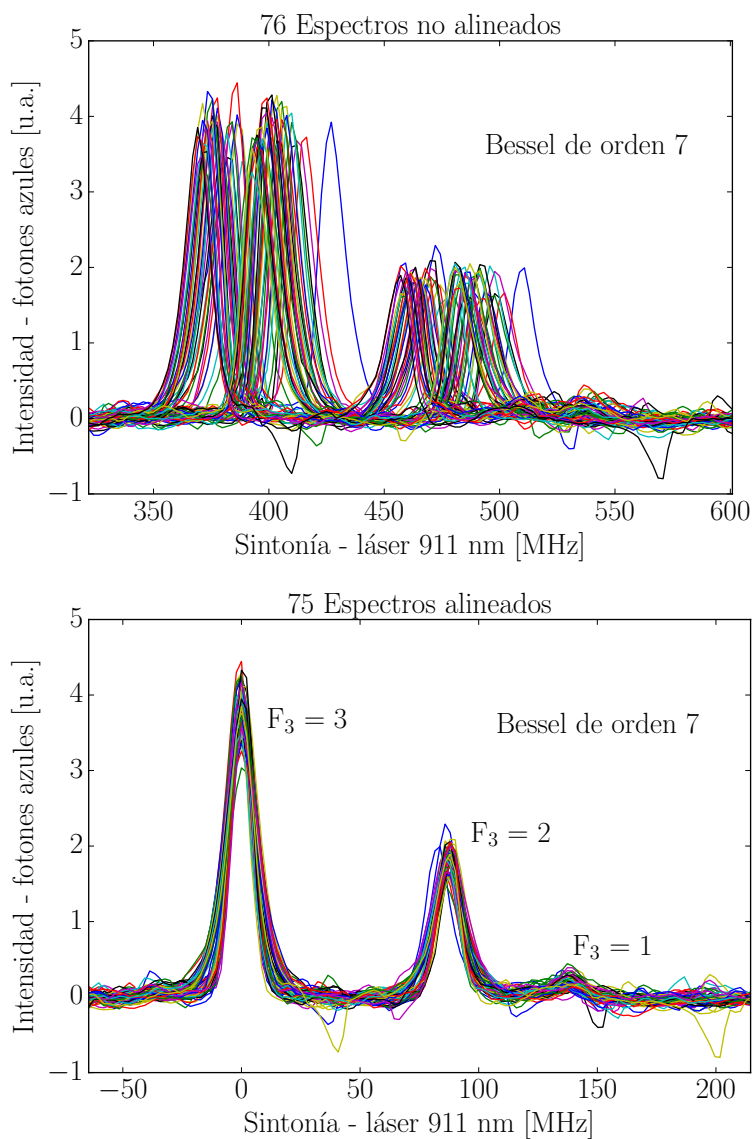


Figura 5.13: 2do experimento: Ejemplo de eliminación de espectros ‘defectuosos’ y centrado del pico más alto, para el haz Bessel de orden 7.

5.4. Tercer experimento: distribución angular

Antes de concluir la parte experimental de el presente trabajo, se decidió realizar una última medición. El procedimiento completo se encuentra en la sección 4.2.3, pero la idea principal fue variar la dirección relativa de la polarización de los haces de excitación, con dos objetivos

1. Tratar de encontrar en los espectros alguna huella sobre la carga topológica del segundo haz de excitación.
2. Comparar los resultados con los obtenidos en [23].

Al igual que en el experimento anterior, antes de tomar espectros se realizó una caracterización del perfil de intensidad del haz de excitación cuadrupolar. Pero aún antes de esto se realizó una caracterización de la pureza en polarización de ambos haces de excitación. Así inicia esta sección de análisis.

5.4.1. Pureza en polarización

Para este experimento se hizo una caracterización de la pureza de la polarización, ya que es muy importante que la polarización de ambos haces de excitación no tenga componentes elípticas. Para hacer esto se utilizó un polarizador y un medidor de potencia. De acuerdo con la Ley de Malus si la polarización es lineal, entonces la intensidad transmitida por el polarizador debe ser proporcional al coseno cuadrado del ángulo del polarizador respecto a la dirección de polarización del haz. En la figura 5.14 se muestran los datos experimentales de esta medición junto con los ajustes de la función coseno cuadrado. La pureza en polarización $\%Pol$ se calculó como

$$\%Pol = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_{max} + p_{min}} \quad (5.10)$$

Donde p_{max} y p_{min} son la potencia máxima y mínima en cada caso.

5.4.2. Distribución transversal de intensidad del haz cuadrupolar

Para realizar la caracterización de la distribución de intensidad del 2do haz de excitación se utilizó el mismo método que en el experimento anterior, en el cual se hace incidir el haz en el sensor CCD. Las imágenes de las capturas se muestran en el apéndice C.3.

Dado que para este experimento se utilizaron distintas distribuciones de intensidad, primero se explicará el método utilizado para analizar el caso Gaussiano y posteriormente se mostrará el análisis del caso Bessel.

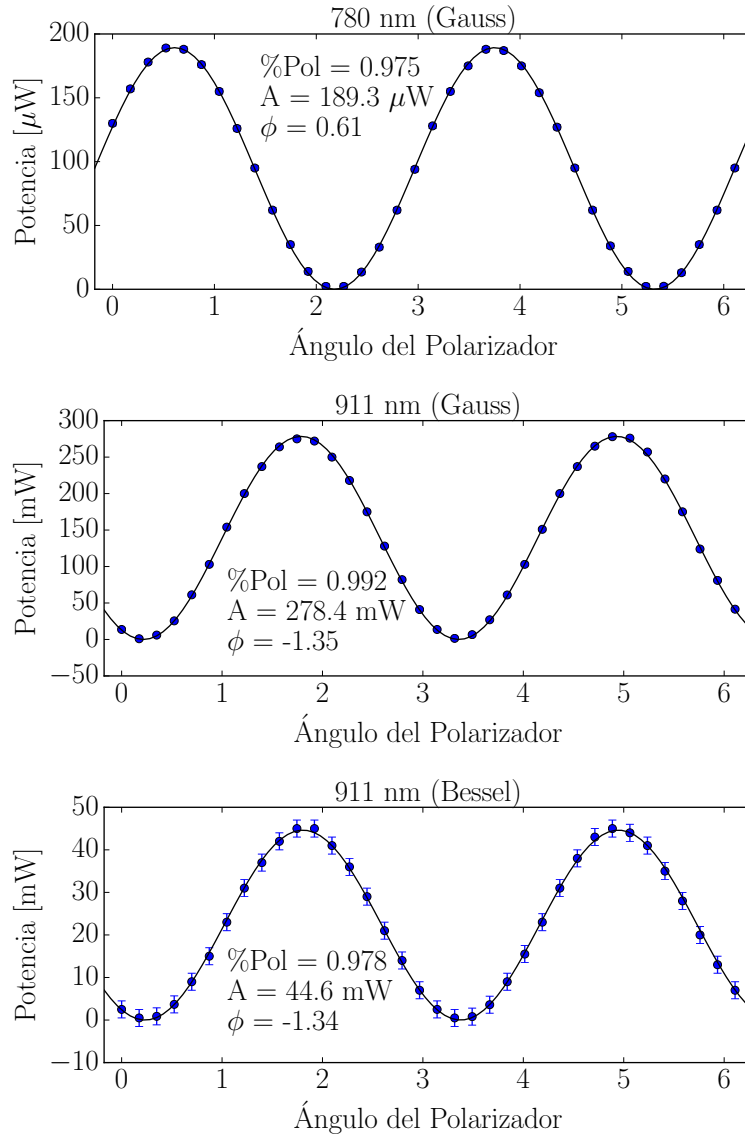


Figura 5.14: 3er experimento: Corroboración de la Ley de Malus para los haces de excitación. Los puntos azules son los datos experimentales y la línea negra es el ajuste a dichos datos de la función $f(x) = A \cos^2(x - \phi)$.

Caso para haz Gaussiano

El haz Gaussiano presenta un ligero astigmatismo, por lo cual no es útil hacer un análisis radial como en el caso de los haces Bessel. Sin embargo se puede realizar un análisis similar al que se utilizó para el haz de 780 nm en la sección 5.1. En la figura 5.15 se muestran cortes horizontales y verticales del perfil de intensidad, además se muestra el promedio de dichos cortes y la curva Gaussiana ajustada al mismo.

Utilizando los parámetros de dicho ajuste es posible obtener que el radio $1/e^2$ del haz es

$$\rho_x = 2\sigma_x = (357.3 \pm 0.7) \mu\text{m} \quad (5.11)$$

$$\rho_y = 2\sigma_y = (269.8 \pm 1.0) \mu\text{m} \quad (5.12)$$

Caso Bessel: análisis radial de la distribución de intensidad

Para este caso se realizó un análisis equivalente al utilizado en el segundo experimento: se obtuvo la distribución radial de intensidad y se le ajustó una función Bessel cuadrada (ver ecuación (5.3)). Los datos experimentales junto con los ajustes se muestran en la figura 5.16. En este tercer experimento el radio del primer anillo para el Bessel de orden cero fue

$$\rho_0 = (33.9 \pm 5.3) \mu\text{m} \quad (5.13)$$

Comparación en tamaño de haces de 911 y 780 nm

Para asegurar que no fuera necesario normalizar los espectros se recortaron las imágenes del haz de 911 nm al tamaño del haz de 780 nm. En la figura 5.17 se muestran fotografías y mapa de los ajustes realizados a dichas fotografías para el caso Gaussiano y para el caso del haz Bessel para órdenes 0, 4 y 8. Los ajustes del haz Bessel están restringidos a un radio máximo, para que sean más comparables con el caso experimental. El radio máximo se eligió a partir de las gráficas de la figura 5.16. Es muy claro que el tamaño de estos haces es mucho menor que el tamaño del haz de 780 nm. De hecho son tan pequeños que no es fácil distinguir su estructura en la escala en que se muestran las fotografías, pero se presentaron de esta manera únicamente para comparar dimensiones. Para detalles de la estructura se puede referir a las figuras 5.16 y 5.15.

5.4.3. Análisis de los espectros medidos

Para este experimento se modificó ligeramente el sistema de detección, eliminando el sistema de filtrado Lock-In. Al final de la sección 4.2.3 se explican detalles sobre esta modificación. Una consecuencia de esto es que los espectros resultan más ruidosos que en el caso de los dos experimentos anteriores, por lo cual no se puede utilizar el

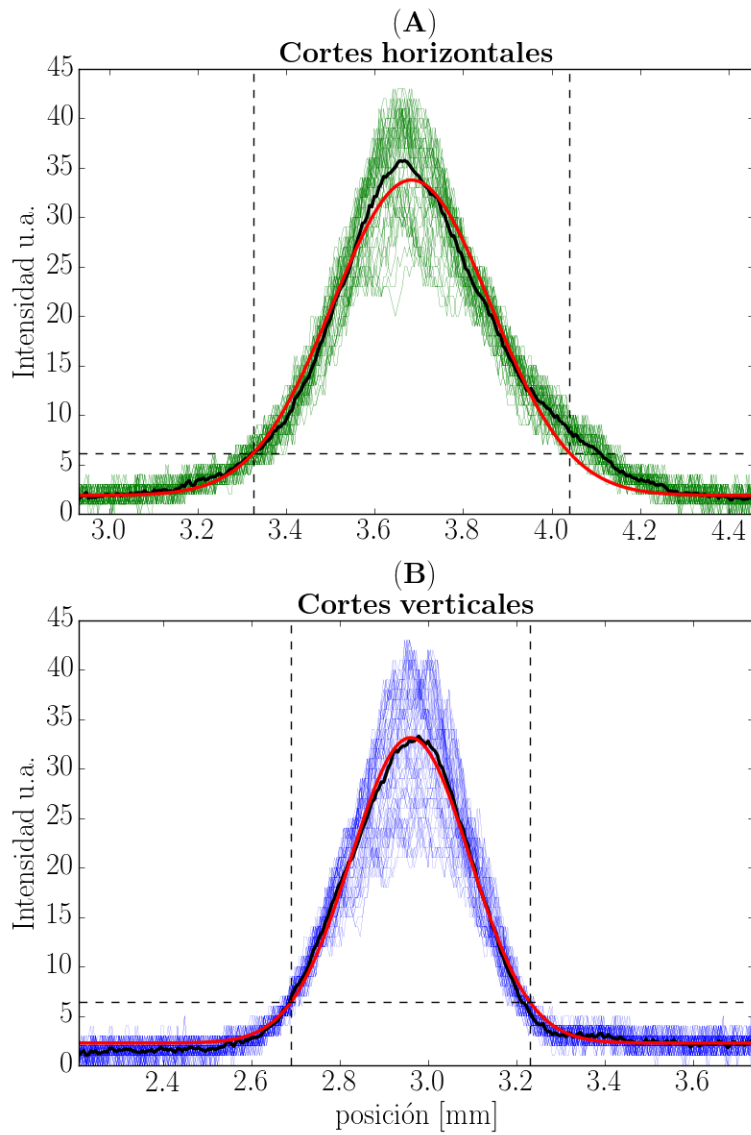


Figura 5.15: Cortes del perfil de intensidad Gaussiano del haz de 911 nm. (A): gráfica de 44 cortes verticales. (B): gráfica de 64 cortes horizontales. En ambas imágenes la línea negra es el promedio de dichos cortes y la línea roja el ajuste.

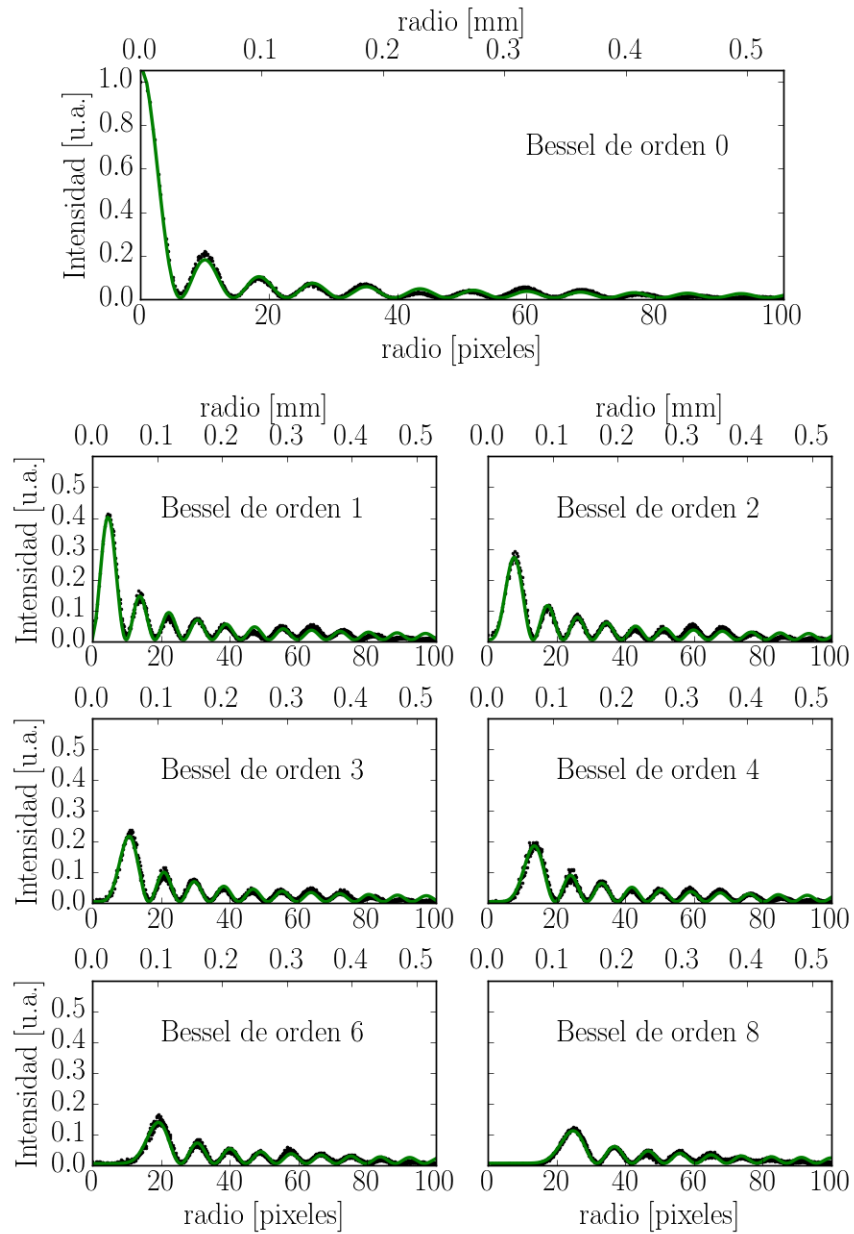


Figura 5.16: 3er experimento: Distribución radial de intensidad de varios órdenes distintos del haz Bessel. Los puntos negros son el resultado del análisis de las fotografías y las líneas verdes son los ajustes.

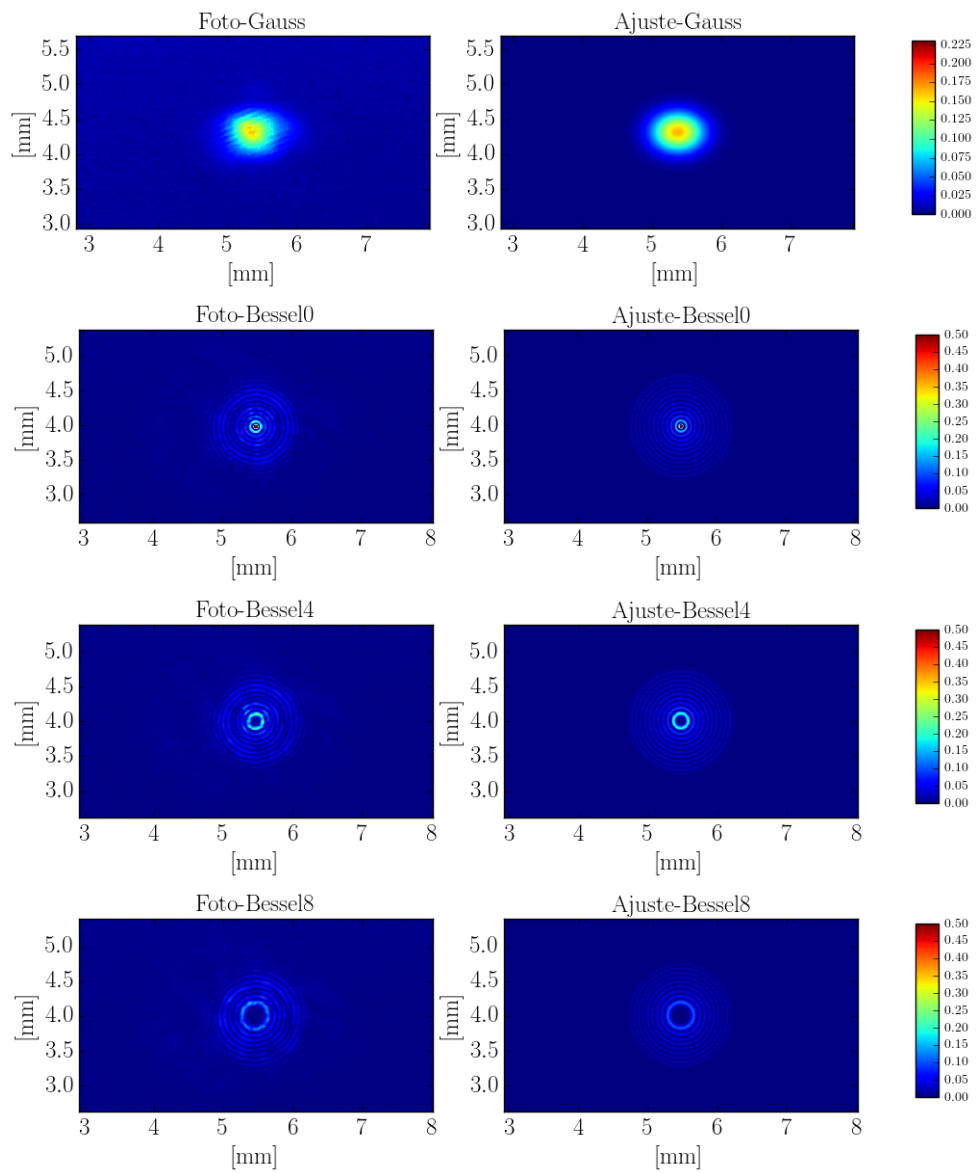


Figura 5.17: 3er experimento: Fotografías y ajustes del haz de 911 nm. Las gráficas están recortadas al tamaño del haz de 780 nm.

mismo método de análisis, al menos no inmediatamente. Sin embargo se aumentó la potencia de ambos haces de excitación, lo que significa que aún sin la detección en fase (Lock-In) es posible detectar las transiciones en los espectros.

El barrido del elemento piezo-eléctrico del láser de 911 nm se realizó con una señal tipo triángulo, y se guardaron datos cuando la pendiente de dicha señal era positiva y cuando era negativa. Bajo las condiciones en que se realizó el experimento, la señal era tan estable que al promediar los espectros directamente (sin hacer ninguna modificación) se puede observar algo como lo que se muestra en la figura 5.18. Nótese que hay un cambio en las alturas relativas de los picos debido al cambio en la dirección de polarización del haz de 911 nm, esto da pie a que se realice un análisis de la distribución angular de estas alturas (lo cual se mostrará más adelante). En la figura también se muestra el ajuste de tres curvas Lorentzianas al promedio, además de una línea roja que indica la altura de la línea predicha por la teoría del capítulo 2.

Uno podría pensar que este análisis es suficiente, el problema de hacer esto es que no permite hacer estadística sobre los datos experimentales. Es necesario obtener información de cada espectro por separado para luego hacer un análisis estadístico de los parámetros obtenidos. Sin embargo el análisis del promedio sí sirve para obtener cierta información: nótese que al no haber aplicado un filtrado a los datos, los picos de la transición son más estrechos (comparar con gráficas de la figura 5.13). De hecho en este caso el ancho máximo a media altura (FWHM) de las curvas Lorentzianas es de ~ 8 MHz, mientras que en el caso del segundo experimento fue ~ 11 MHz (no se hace comparación con el primer experimento ya que se trata de un isótopo distinto). Esto sugiere que la detección en fase aumenta el ancho de las líneas medidas en un factor de ~ 1.375 . Por otro lado, el análisis del promedio también da una buena idea de qué parámetros iniciales dar a los ajustes de los espectros por separado.

Lo que se hizo entonces para analizar espectro por espectro fue aplicar un filtro pasa bajos a cada uno de ellos, emulando así el proceso realizado por el Lock-In en los experimentos previos. Para esto se utilizó la función `LowpassFilter` de *Mathematica*, generando así una nueva lista de archivos de datos ya filtrados, que pueden ser analizados con los programas utilizados en los experimentos anteriores.

Mientras se ajustan las tres Lorentzianas a todos los espectros filtrados (para 16 ángulos relativos de polarización distintos y para haces tipo: Gauss y Bessel de órdenes 0, 2, 4, 6 y 8) se guardan los parámetros de ajuste en una serie de archivos. Dado que la cantidad de espectros es muy grande no tiene sentido presentar aquí el ajuste a cada uno de ellos o la lista de parámetros ajustados. En lugar de esto, se pueden mostrar los promedios de dichos parámetros en una sola gráfica. Sin embargo para entender esta gráfica es necesario tomar en cuenta el análisis teórico realizado en el capítulo 2. En dicha sección se explica que la distribución angular que deben seguir los picos de los espectros queda definido por una expresión del tipo $B_2 + B_1 \cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo relativo entre polarizaciones y las constantes B_1 y B_2 dependen del tipo de haz que se utilice (para más detalles ver capítulo 2).

En la sección 6.4 se presentan los resultados de este experimento. En la figura 6.4

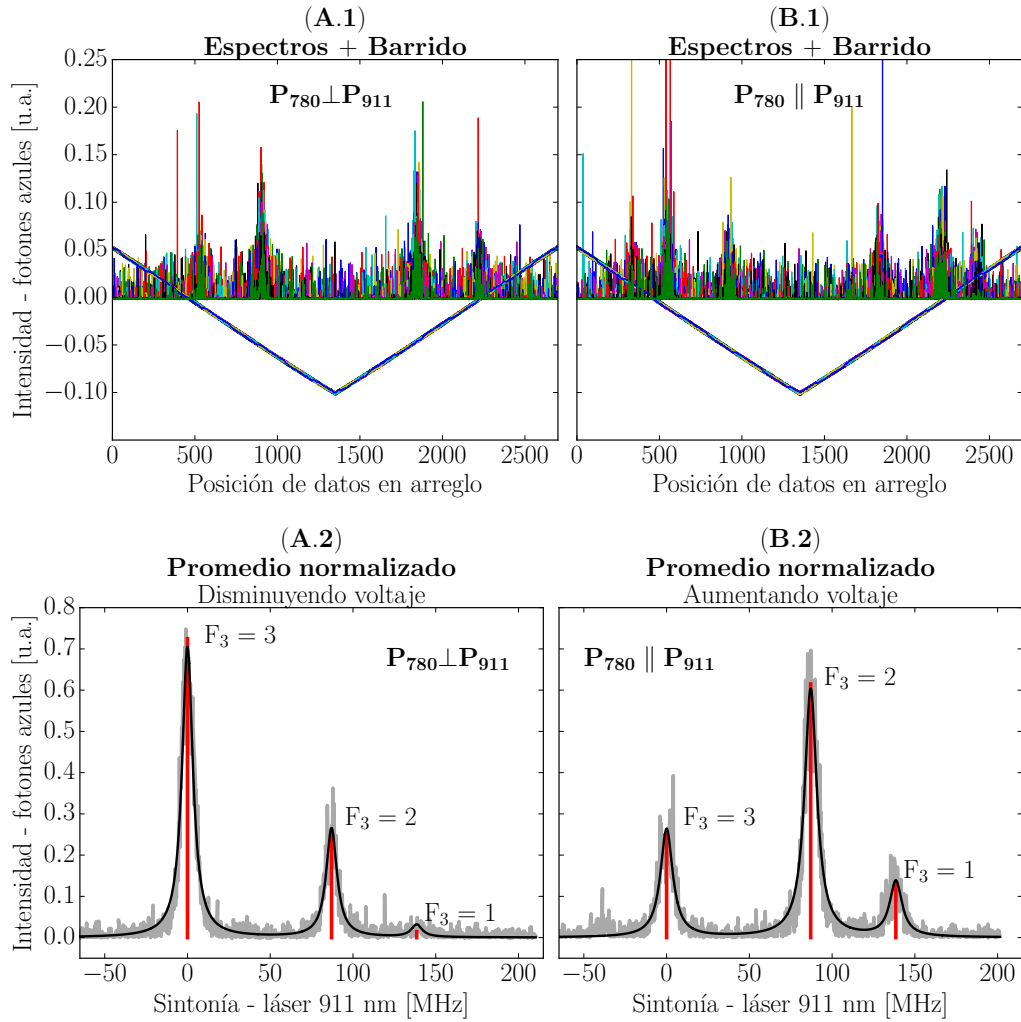


Figura 5.18: 3er experimento: (A.1) y (B.1) Todos los espectros medidos para el caso del haz Gaussiano con polarizaciones perpendiculares y paralelas, respectivamente. La señal triangular indica el voltaje aplicado al piezo del láser de 911 nm (no se muestra su escala en el eje Y). (A.2) y (B.2) En gris: promedio de los espectros de las figuras A.1 y B.1. En negro: ajuste de tres Lorentzianas. En rojo: predicción teórica de las alturas de los picos (ver capítulo 2).

se muestran los promedios (pesados por los errores en los ajustes) de los parámetros de alturas ajustados a los datos experimentales para el caso del haz Gaussiano. Además se muestra una línea sólida que indica la predicción teórica. En la figura 6.5 se muestra lo equivalente a la anterior, pero en el caso de los haces Bessel. En ambas figuras, las curvas teóricas se han ajustado a los datos experimentales únicamente a través de dos parámetros: la fase del \cos^2 y la normalización de las tres curvas (simultáneamente).

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo se hace un resumen de los resultados más importantes obtenidos durante el capítulo anterior (5), así como de los resultados obtenidos a partir del modelo teórico del capítulo 2.

El capítulo se divide en cuatro secciones. En la sección 6.1 se presentan los resultados del modelo teórico. Las secciones 6.2, 6.3 y 6.4 presentan los resultados para cada uno de los tres experimentos. En las secciones del segundo y tercer experimento se muestra la comparación entre los resultados teóricos y los resultados experimentales.

6.1. Resultados del modelo teórico de tres pasos

Como puede verse en la sección 2.5 la probabilidad de observar fotones azules como función del ángulo relativo θ entre las polarizaciones de los haces de excitación, sigue una dependencia del tipo

$$P(F_3) \propto B_2 + B_1 \cos^2 \theta \quad (6.1)$$

donde B_1 y B_2 son distintos para el caso de los haces Gaussianos y de los Bessel.

Para el haz Bessel es necesario conocer k_{\perp} . Comparando las ecuaciones (2.38) y (5.3), que son respectivamente el modelo teórico del campo eléctrico del haz y la función de ajuste para el análisis de las fotografías del perfil de intensidad del haz, es claro que el parámetro $p_2 = k_{\perp}$. Que en el caso del tercer experimento valía:

$$k_{\perp} = (0.0709 \pm 0.0005) \frac{1}{\mu\text{m}} \quad (6.2)$$

Para el caso del haz Bessel modificado es además necesario conocer el radio de corte que define el tamaño del haz Bessel, que en el caso del tercer experimento (como se puede ver por el límite en las gráficas de la figura 5.17) valía $\rho_c = 530 \mu\text{m}$.

Utilizando lo anterior y las expresiones de la sección 2.5 se obtiene lo siguiente:

$F_3 =$		B_1			B_2		
		3	2	1	3	2	1
Gaussiano		-8.916051	6.382655	2.198412	13.472024	4.839618	0.273025
Bessel ideal cortado	J_0	-8.914160	6.382449	2.198947	13.471573	4.839982	0.273146
	J_1	-8.914207	6.382424	2.198908	13.471523	4.839937	0.273139
	J_2	-8.914160	6.382448	2.198947	13.471572	4.839981	0.273146
	J_3	-8.914206	6.382425	2.198910	13.471524	4.839939	0.273139
	J_4	-8.914163	6.382447	2.198944	13.471568	4.839978	0.273146
	J_5	-8.914200	6.382428	2.198914	13.471530	4.839944	0.273140
	J_6	-8.914173	6.382442	2.198936	13.471558	4.839969	0.273144
	J_7	-8.914186	6.382435	2.198926	13.471545	4.839957	0.273142
	J_8	-8.914191	6.382432	2.198921	13.471539	4.839952	0.273141
Bessel mod.		-8.914183	6.382436	2.198928	13.471547	4.839959	0.273143

Cuadro 6.1: Parámetros B_1 y B_2 (ver ecuación (6.1)) para cada caso de haz de excitación cuadrupolar y para cada valor de F_3 para el estado $6P_{3/2}$. Éstos se calcularon a partir del modelo teórico del capítulo 2. Todos los valores van multiplicados por un factor 10^{-4} .

Al observar los valores de la tabla en el Cuadro 6.1, queda claro que la diferencia entre utilizar como haz de excitación un haz Gaussiano o un haz Bessel es prácticamente imperceptible en estas condiciones. La máxima diferencia porcentual entre el caso Gaussiano y el caso Bessel ocurre en el parámetro B_2 para $F_3 = 1$, lo que quiere decir que la mejor alternativa para detectar algún efecto sería medir con la mayor precisión posible ese pico del espectro cuando las polarizaciones de los haces fueran ortogonales (de modo que en la ecuación (6.1) $\cos^2 \theta = 0$). Sin embargo, aún en ese caso, la diferencia en alturas sería del orden de 0.05 %, lo que quiere decir que las mediciones tendrían que ser más precisas que las aquí realizadas, donde en el mejor de los casos se obtuvo una barra de error en la altura de dicho pico de ~ 0.35 %. Por otro lado, para detectar cambios entre distintos haces Bessel la mejor opción es fijarse en el mismo pico, pero se requeriría una precisión tal que el error en la medición fuera menor que 0.003 %.

La ecuación (6.1) con los valores de la tabla 6.1, fue lo que se utilizó como función de ajuste para los datos experimentales del tercer experimento (más adelante en figuras 6.4 y 6.5), dejando dos parámetros libres en el ajuste: una fase en θ y un factor de escala global. Para el segundo experimento, dado que las polarizaciones de los haces de excitación eran ortogonales, se tomó $\theta = \frac{\pi}{2}$. De modo que para comparar con los resultados experimentales únicamente se utilizó el parámetro B_2 de la misma tabla. Para el tercer experimento se utilizó el modelo completo.

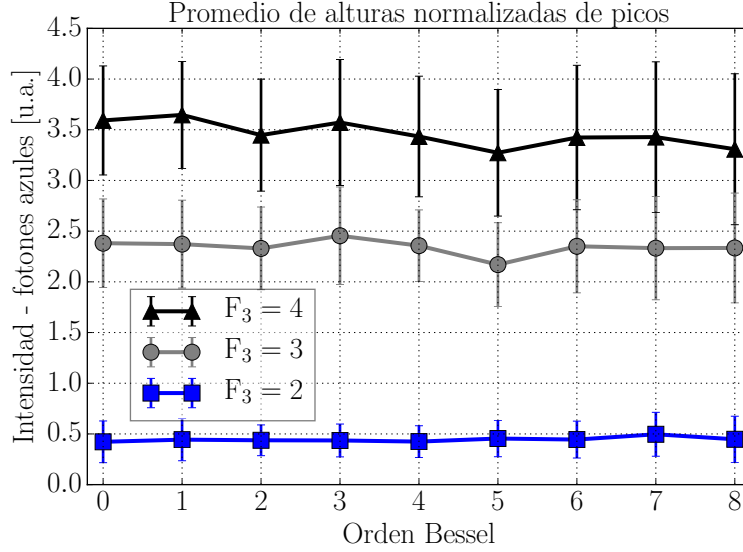


Figura 6.1: 1er experimento: Promedio **normalizado** de las alturas de los tres picos de cada espectro. La normalización se realizó a partir de los valores de la intensidad efectiva (ver figura 5.7).

6.2. Resultados del primer experimento

En este experimento se utilizó un haz Bessel de órdenes 0, 1, ..., 8 de 911 nm para excitar una transición cuadrupolar eléctrica en rubidio atómico a temperatura ambiente. Para una descripción del procedimiento de medición de este experimento ver la sección 4.2.1. La componente, ortogonal al eje de propagación, del vector de onda del haz Bessel utilizado tenía como valor

$$k_{\perp} = (0.0086 \pm 0.0002) \frac{1}{\mu\text{m}} \quad (6.3)$$

Variando la frecuencia del láser cerca de sintonía se obtuvieron espectros de emisión de luz azul de 420 nm, una muestra del tipo de espectros obtenidos se presenta en la figura 5.8. Dichos espectros presentan tres picos, que corresponden a las transiciones hiperfinas $F_2 = 3 \rightarrow F_3 = 3, 2, 1$. Ajustando tres curvas Lorentzianas a dichos espectros, y promediando los valores de las alturas de dichas curvas se obtiene una medición de la cantidad de fotones azules como función del orden del haz Bessel, lo cual se muestra en la gráfica de la figura 6.1.

Los datos mostrados en dicha figura ya han sido normalizados para tomar en cuenta el hecho de que para los órdenes superiores del haz Bessel, el ancho de dicho haz era mayor que el ancho del primer haz de excitación de 780 nm (ver figuras 5.6 y 5.7). Una vez tomada en cuenta esta normalización, es evidente que cuando

la cantidad de luz (potencia) involucrada en el proceso de excitación se mantiene constante, el cambio del orden del haz Bessel no afecta la cantidad de fotones de 420 nm emitidos, bajo las condiciones en que se realizó el experimento.

6.3. Resultados del segundo experimento

Este experimento fue muy similar al anterior, pero con el ancho del haz Bessel reducido, de modo que no hubiera variaciones perceptibles en la cantidad de luz involucrada en el proceso de excitación, al variar el orden del haz Bessel. Para este segundo experimento la componente ortogonal del vector de onda del haz Bessel valía

$$k_{\perp} = (0.0323 \pm 0.0002) \frac{1}{\mu m} \quad (6.4)$$

Una muestra del tipo de espectros obtenidos para este experimento se presenta en la figura 5.13. Aún cuando el análisis de dichos espectros se realizó por separado (espectro por espectro) es muy ilustrativo observar el promedio de una serie de ellos. En la figura 6.2 se muestra el dicho promedio para la serie medida para el haz Bessel de orden 6, junto con la predicción teórica. Al realizar el experimento se asumió que las polarizaciones eran ortogonales, debido a que el haz de 780 nm provenía de un reflejo en un cubo polarizador mientras que el haz de 911 había sido transmitido por otro cubo polarizador. Sin embargo, al analizar las alturas de los espectros, se concluyó que el ángulo θ entre los haces no era $\frac{\pi}{2}$ sino $\sim 0.36\pi$. Esta es una de las ventajas de poder comparar datos experimentales con predicciones teóricas.

Por otro lado, al analizar por separado los espectros se obtiene, al igual que en el experimento anterior, una medición de la cantidad de fotones azules como función del orden del haz Bessel. Esto se presenta en la gráfica de la figura 6.3. A diferencia del experimento anterior, en este experimento no fue necesario normalizar estas alturas ya que, como se mencionó antes, el cambio en orden del haz Bessel no cambiaba la cantidad de radiación que interactuaba con los átomos de rubidio. El resultado de este experimento reafirma el resultado del experimento anterior.

6.4. Resultados del tercer experimento

Para este experimento la polarización de los haces de excitación era muy importante, de modo que se hizo una caracterización completa de la misma, resultando en que los haces tenían una pureza en polarización cercana a uno, es decir, la polarización era lineal.

El experimento es similar a los anteriores, pero realizándose para distintas orientaciones de la polarización del haz de 911 nm. En el modelo teórico θ es el ángulo que define esta orientación (ver ecuación (6.1)).

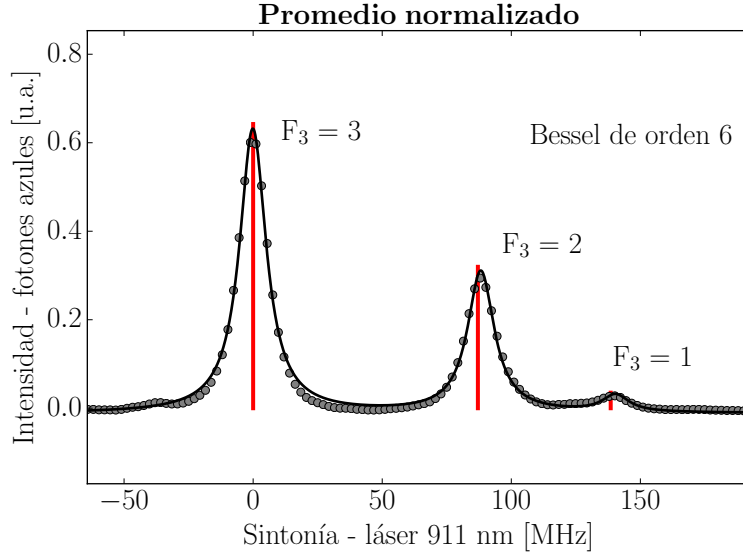


Figura 6.2: 2do experimento: En gris: promedio de los espectros obtenidos para el haz Bessel de orden 6. En negro: un ajuste de tres Lorentzianas. En rojo: predicción teórica de las alturas de los picos (ver sección 6.1), para un ángulo relativo entre polarizaciones $\theta \simeq 0.36\pi$.

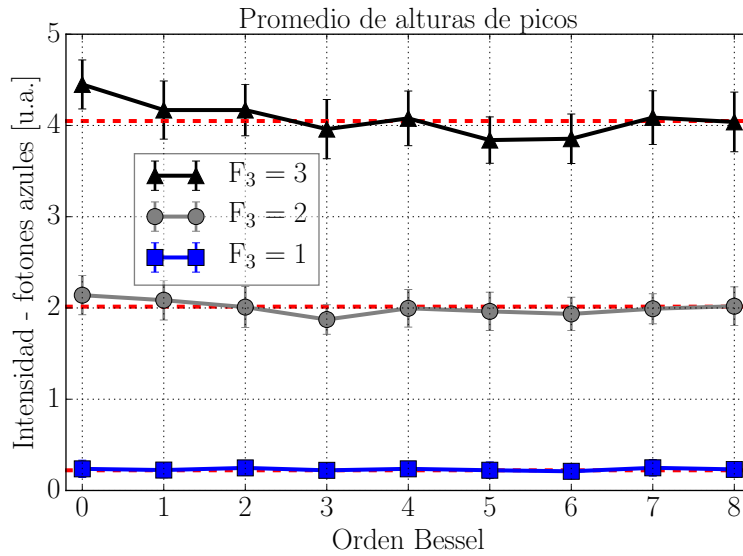


Figura 6.3: 2do experimento: Promedio de las alturas ajustadas a los tres picos de los espectros. Las líneas rojas punteadas indican la predicción teórica para un ángulo relativo entre polarizaciones $\theta \simeq 0.36\pi$.

La estructura del haz cuadrupolar se varió en las mediciones. Primero se hizo para un haz Gaussiano enfocado y luego para un haz Bessel de órdenes 0, 2, 4, 6 y 8. En este caso la componente ortogonal del vector de onda del haz Bessel valía

$$k_{\perp} = (0.0709 \pm 0.0005) \frac{1}{\mu m} \quad (6.5)$$

El sistema de detección se modificó ligeramente respecto a los experimentos anteriores, para más detalles ver la sección 4.2.3. Un ejemplo de los espectros obtenidos en este experimento se muestra en la figura 5.18, ahí mismo se muestra el promedio de dichos espectros junto con las líneas rojas que indican la predicción teórica.

Al igual que en los casos anteriores, al analizar espectro por espectro se puede hacer un análisis estadístico de la altura de las líneas espectrales, pero esta vez se hizo el estudio de estas alturas como función del ángulo relativo entre las polarizaciones de los haces de excitación. En la figura 6.4 se muestra el caso del haz Gaussiano. Los puntos son los resultados experimentales y las líneas sólidas son la predicción teórica, dichas líneas se ajustaron a los datos experimentales a través de únicamente dos parámetros libres: una fase en el ángulo relativo y un factor de escala global. En la figura 6.5 se muestra lo equivalente para el caso de los haces Bessel. La comparación entre el caso Gaussiano y el Bessel no pudo hacerse directamente debido a la dificultad de mantener la alineación exactamente igual al cambiar la estructura del haz. Sin embargo la teoría predice que estas curvas deberían ser prácticamente las mismas. La comparación entre los distintos órdenes del haz Bessel es mucho más directa, y sustenta lo ya dicho antes: el acuerdo entre la teoría y el experimento es muy bueno; el cambio en la carga topológica del haz Bessel no presenta influencia en las alturas de las líneas espectrales medidas experimentalmente bajo las condiciones en que se realizaron los experimentos.

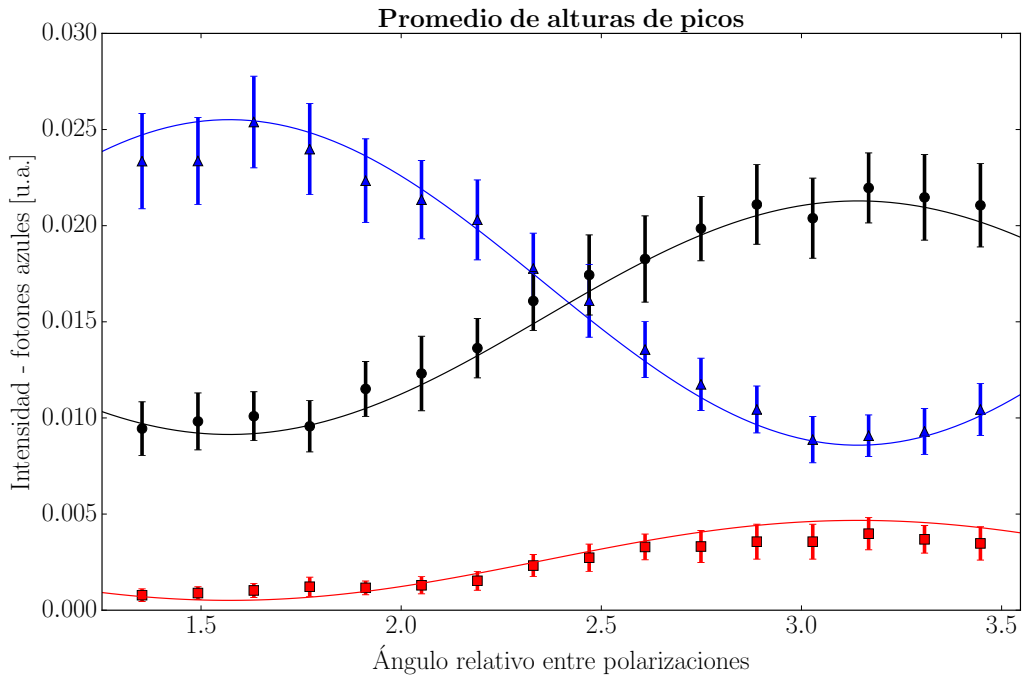


Figura 6.4: 3er experimento: Distribución angular de las líneas de los espectros, para el caso Gaussiano, como función del ángulo relativo entre la polarización del haz de 911 nm y la polarización del haz de 780 nm. Los puntos son los resultados experimentales y la línea sólida es la predicción teórica. En los puntos experimentales se utilizan marcas triangulares, circulares y cuadradas para indicar las transiciones a los estados hiperfinos con $F'' = 3$, $F'' = 2$ y $F'' = 1$, respectivamente.

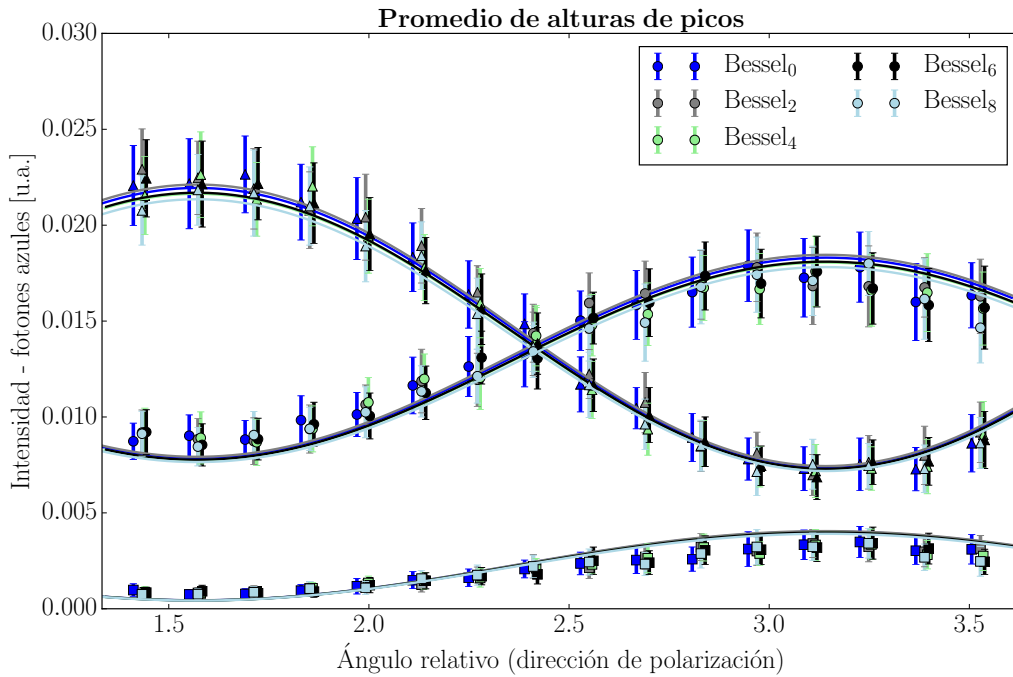


Figura 6.5: 3er experimento: Distribución angular de las líneas de los espectros, para distintos órdenes del haz Bessel, como función del ángulo relativo entre la polarización del haz de 911 nm y la polarización del haz de 780 nm. Los puntos son los resultados experimentales y la línea sólida es la predicción teórica. En los puntos experimentales se utilizan marcas triangulares, circulares y cuadradas para indicar las transiciones a los estados hiperfinos con $F'' = 3$, $F'' = 2$ y $F'' = 1$, respectivamente.

Capítulo 7

Conclusiones

En primer lugar se diseñó, caracterizó y probó el funcionamiento de un sistema para generar haces Bessel escalares. Dicho sistema utiliza un SLM para inducir una máscara de fase helicoidal y un axicón para modular la distribución transversal de intensidad. Se escribió una rutina, en código *Julia*, que permite calibrar el SLM además de proyectar en el mismo una serie de distintos hologramas, incluido el patrón tipo vórtice necesario para la generación de haces Bessel.

El objetivo principal de este trabajo fue comprobar si era o no posible observar cambios en los espectros medidos, utilizando el sistema experimental descrito en el capítulo 4, debido a cambios en la carga topológica del haz Bessel de 911 nm que excita la transición cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$. Es decir, medir cambios en las tasas de transición en las coordenadas internas de átomos de rubidio a temperatura ambiente debido a la transferencia de momento angular orbital de la luz hacia los átomos. Dado que se fue posible la medición de espectros, esto indica que sí es posible que los átomos en celda a temperatura ambiente absorban fotones que transportan momento angular orbital. Sin embargo, dados los resultados de los primeros dos experimentos se concluyó que, bajo las condiciones en que éstos se realizaron, no es posible medir dichos cambios. Estas condiciones incluyen utilizar átomos a temperatura ambiente y haces de excitación en el régimen paraxial.

Previo a este trabajo se había desarrollado un modelo teórico que predice la probabilidad de medir fotones azules, propagándose en cierta dirección, debido al decaimiento espontáneo de un átomo de rubidio doblemente excitado hacia su estado base, en donde los haces de excitación para las transiciones dipolar eléctrica $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ ($\lambda \sim 780$ nm) y cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ ($\lambda \sim 911$ nm) se modelaron como ondas planas. Para este trabajo se realizó una generalización de dicho modelo tomando ahora en cuenta que los fotones azules pueden provenir de un átomo localizado en una sección finita del espacio (definida por el tamaño de los haces de excitación) y que los haces de excitación tienen un tamaño transversal finito. El nuevo modelo tiene tres versiones distintas para el haz de excitación cuadrupolar, que son un haz Gaussiano, un haz Bessel ideal cortado (de modo que no se distribuya la energía en

todo el espacio) y un haz Bessel modificado (que toma en cuenta el tamaño finito del haz). Para los tres casos anteriores se asume que los haces son paraxiales (no tienen componente de polarización a lo largo del eje de propagación), ya que este era el caso de los haces del dispositivo experimental. Al ver las gráficas de las figuras 6.4 y 6.5 es claro que existe un excelente acuerdo entre la predicción teórica y los resultados experimentales.

En conjunto, la teoría y los resultados del tercer experimento muestran que no hay diferencias significativas entre excitar la transición cuadrupolar eléctrica con un haz Gaussiano o con un haz Bessel de algún orden entre 0 y 8 (de hecho con el modelo teórico es posible extender la predicción para un haz Bessel de mayor orden, pero la conclusión es la misma), siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones:

1. La potencia del haz de 911 nm se mantenga constante al cambiar su estructura.
2. El ancho del haz de 911 nm sea siempre menor que el ancho del primer haz de excitación (de 780 nm).
3. El ancho del haz de 911 nm sea siempre menor que la sección del espacio en la cual el sistema de detección es capaz de medir la presencia de fotones azules.
4. El haz de 911 nm sea paraxial (que no tenga componente de polarización a lo largo del eje de propagación).

7.1. Trabajo a futuro

El modelo teórico aquí presentado no se puede utilizar para predecir qué ocurriría lejos del régimen paraxial, sin embargo plantea las bases para hacer una nueva generalización que permita hacer este tipo de predicciones. Actualmente se está trabajando en dicho modelo, el cual debe tomar en cuenta que la expresión utilizada durante este trabajo para describir el campo eléctrico de un haz Bessel (ecuación 2.38) está incompleta. Si bien la ecuación es solución de la ecuación de onda, no cumple con las ecuaciones de Maxwell, en particular no cumple que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Imponiendo esta condición sobre \vec{E} se obtiene que el campo debe tener una componente de polarización a lo largo del eje de propagación, que resulta ser proporcional a $\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}$ (razón por la cual no suele tomarse en cuenta en el régimen paraxial). Sin embargo agregar esta componente hace que las expresiones se vuelvan mucho más complicadas.

Por otro lado, en el *Laboratorio de Átomos Fríos* se está trabajando para hacer incidir los haces Bessel, generados por el sistema aquí desarrollado, dentro de una trampa magento-óptica (MOT), de modo que éstos interactúen con átomos fríos en lugar de con átomos térmicos. Utilizando los resultados obtenidos en el presente trabajo se podrá planear mejor cómo incluir los haces Bessel en el dispositivo experimental para incrementar las posibilidades de medir efectos de transferencia de momento angular orbital de la luz a las coordenadas internas de los átomos fríos.

Por último, se planea utilizar este tipo de haces para estudiar la transferencia coherente de momento angular orbital durante los procesos de suma de frecuencias y mezclado de cuatro ondas. Para lo cual es esencial el sistema de generación de haces Bessel aquí desarrollado. Además se está trabajando en el desarrollo de un modelo que utiliza el formalismo de matriz densidad para poder simular dicho fenómeno de manera teórica.

Apéndice A

Acoplamiento Luz-Átomo

El Hamiltoniano de un sistema de dos partículas en un *potencial central* en presencia de un campo electromagnético es [30, ec.(D.2) pp33] [52, ec.5.1.1 pp146]:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p}_e + e\vec{A}(\vec{r}_e) \right)^2 + \frac{1}{2m_N} \left(\vec{p}_N - e\vec{A}(\vec{r}_N) \right)^2 + e(U(\vec{r}_N) - U(\vec{r}_e)) + V(|\vec{r}_e - \vec{r}_N|) \quad (\text{A.1})$$

Donde \vec{A} y U son los potenciales vectorial y escalar del campo EM, V es el potencial central electrostático y los subíndices e y N refieren al electrón y al núcleo, respectivamente. Utilizando entonces la *norma de Coulomb* y la aproximación de campo débil (despreciando términos con \vec{A}^2) es posible reescribir el Hamiltoniano de la siguiente manera¹:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p}_e^2 + 2e\vec{p}_e \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) \right) + \frac{1}{2m_N} \left(\vec{p}_N^2 - 2e\vec{p}_N \cdot \vec{A}(\vec{r}_N) \right) + V(|\vec{r}_e - \vec{r}_N|) \quad (\text{A.2})$$

Cambiando al sistema de coordenadas relativas y del centro de masa:

$$\vec{R} = \frac{m_e\vec{r}_e + m_N\vec{r}_N}{M} \quad (\text{A.3a}) \quad \vec{r}_e = \vec{R} + \frac{\mu}{m_e}\vec{r} \quad (\text{A.4a})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_N \quad (\text{A.3b}) \quad \vec{r}_N = \vec{R} - \frac{\mu}{m_N}\vec{r} \quad (\text{A.4b})$$

Donde $M = m_e + m_N$ es la masa total y $\mu = m_em_N/M$ es la masa reducida.

¹Dado que $[p^x, f(x)] = -i\hbar f'(x)$ se sigue que $[\vec{p}_i, \vec{A}(\vec{r}_i)] = -i\hbar \vec{\nabla}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i)$. De modo que en la norma de Coulomb ($\vec{\nabla}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) = 0$) se puede afirmar que \vec{p}_i y $\vec{A}(\vec{r}_i)$ conmutan. Si se utiliza además la norma de radiación $U(\vec{r}_i) = 0$.

Entonces:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = \vec{p}_e + \vec{p}_N \quad (\text{A.5a}) \quad \vec{p}_e = \frac{m_e}{M}\vec{P} + \vec{p} \quad (\text{A.6a})$$

$$\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}} = \mu\left(\frac{\vec{p}_e}{m_e} - \frac{\vec{p}_N}{m_N}\right) \quad (\text{A.5b}) \quad \vec{p}_N = \frac{m_N}{M}\vec{P} - \vec{p} \quad (\text{A.6b})$$

Nótese que \vec{P} y \vec{p} conmutan entre sí y que las nuevas variables cumplen las relaciones de conmutación básicas:

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j} \quad (\text{A.7})$$

$$[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{i,j} \quad (\text{A.8})$$

Utilizando las ecuaciones (A.6a) y (A.6b) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\vec{p}_N^2}{2m_N} &= \frac{1}{2m_e} \left(\frac{m_e}{M}\vec{P} + \vec{p}\right)^2 + \frac{1}{2m_N} \left(\frac{m_N}{M}\vec{P} - \vec{p}\right)^2 \\ &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Lo cual permite reescribir el Hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{\vec{P}^2}{2M}\right) + \left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)\right) + e\left(\frac{1}{m_e}\vec{p}_e \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) - \frac{1}{m_N}\vec{p}_N \cdot \vec{A}(\vec{r}_N)\right) \\ &\equiv H_{CM} + H_{hidrogenoide} + H_I \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Donde se ha bautizado como H_I al Hamiltoniano de interacción:

$$\begin{aligned} H_I &= e\left(\frac{1}{m_e}\vec{p}_e \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) - \frac{1}{m_N}\vec{p}_N \cdot \vec{A}(\vec{r}_N)\right) \\ &= e\left(\frac{1}{m_e}\left(\frac{m_e}{M}\vec{P} + \vec{p}\right) \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) - \frac{1}{m_N}\left(\frac{m_N}{M}\vec{P} - \vec{p}\right) \cdot \vec{A}(\vec{r}_N)\right) \\ &= e\left(\frac{\vec{P}}{M} \cdot \left(\vec{A}(\vec{r}_e) - \vec{A}(\vec{r}_N)\right) + \vec{p} \cdot \left(\frac{\vec{A}(\vec{r}_e)}{m_e} + \frac{\vec{A}(\vec{r}_N)}{m_N}\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dado que el valor del potencial vectorial \vec{A} es prácticamente el mismo en la posición del electrón o del núcleo, entonces $\vec{A}(\vec{r}_e) - \vec{A}(\vec{r}_N) \sim 0$ y $\frac{\vec{A}(\vec{r}_e)}{m_e} + \frac{\vec{A}(\vec{r}_N)}{m_N} \sim \frac{\vec{A}(\vec{r}_e)}{m_e}$. Con lo cual se reescribe el Hamiltoniano de interacción como:

$$\boxed{H_I = \frac{e}{m_e}\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e)} \quad (\text{A.12})$$

Utilizando el hecho de que $\vec{p} = i\mu/\hbar [H_0, \vec{r}]$ donde $H_0 = H_{CM} + H_{hidrogenoide}$, es posible calcular la amplitud de transición entre los eigenestados (de H_0) $|\Psi^0\rangle$ y $|\Psi^F\rangle$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
T_{0F} &= \langle \Psi^F | H_I | \Psi^0 \rangle \\
&= \langle \Psi^F | \frac{e}{m_e} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) | \Psi^0 \rangle \\
&= i \frac{e\mu}{\hbar m_e} \langle \Psi^F | [H_0, \vec{r}] \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) | \Psi^0 \rangle \\
&= i \frac{e\mu}{\hbar m_e} \langle \Psi^F | H_0 \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) - \vec{r} \cdot H_0 \vec{A}(\vec{r}_e) | \Psi^0 \rangle \\
&= i \frac{e\mu}{\hbar m_e} \langle \Psi^F | H_0 \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) - \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) H_0 - \vec{r} \cdot [H_0, \vec{A}(\vec{r}_e)] | \Psi^0 \rangle \\
&= i \frac{e\mu}{\hbar m_e} \left((E^{(F)} - E^{(0)}) \langle \Psi^F | \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) | \Psi^0 \rangle - \langle \Psi^F | \vec{r} \cdot [H_0, \vec{A}(\vec{r}_e)] | \Psi^0 \rangle \right) \\
&= i \frac{e\mu}{\hbar m_e} \left((E^{(F)} - E^{(0)}) \langle \Psi^F | \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_e) | \Psi^0 \rangle \right) \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado que $[H_0, \vec{A}(\vec{r}_e)] = 0$ lo cual es consecuencia de estar trabajando en la norma de Coulomb. Recordando que siempre es posible expresar el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}_e, t)$ de una onda electromagnética como una superposición de ondas planas:

$$\vec{E}(\vec{r}_e, t) = \int d\omega S(\omega) \int d^3\vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_e - \omega t)} \delta \left(k_{\parallel} - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2} \right) \vec{E}(k_{\perp}) \tag{A.14}$$

Donde k_{\parallel} es la componente del vector de onda a lo largo del eje de propagación, S es la distribución espectral y $\vec{E}(k_{\perp})$ es el espectro vectorial en el espacio de momentos \vec{k} . Dado que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (en norma de radiación [53, ec(6.31) pp242]) entonces el potencial vectorial es:

$$\vec{A}(\vec{r}_e, t) = \int d\omega S(\omega) \frac{1}{i\omega} \int d^3\vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_e - \omega t)} \delta \left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2} \right) \vec{E}(k_{\perp}) \tag{A.15}$$

Substituyendo esto en la ecuación (A.13) se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_{0F} &= \omega_{0F} \frac{\mu}{m_e} \int d\omega S(\omega) \frac{1}{\omega} \int d^3\vec{k} \delta \left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2} \right) \times \\
&\quad \times \langle \Psi^F | e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_e - \omega t)} e \vec{r} \cdot \vec{E}(k_{\perp}) | \Psi^0 \rangle \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Donde se ha definido $\hbar\omega_{0F} \equiv E^{(F)} - E^{(0)}$. Dado que $|\Psi^0\rangle$ y $|\Psi^F\rangle$ son eigenestados de un Hamiltoniano ($H_0 = H_{CM} + H_{hidrogenoide}$) que no depende explícitamente del tiempo entonces $|\Psi^i\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(i)}t} |\psi^i\rangle$. Asumiendo además que los estados estacionarios son separables: $|\psi^i\rangle = |\phi_{CM}\rangle \otimes |\phi_{rel}\rangle$ y recordando cómo se expresa la coordenada del electrón \vec{r}_e en términos de las coordenadas relativas y del centro de masa (ecuación (A.4a)) entonces la ecuación anterior se puede separar como:

$$T_{0F} = \omega_{0F} \frac{\mu}{m_e} \int d\omega S(\omega) \frac{1}{\omega} e^{i(\omega_{0F} - \omega)t} \int d^3\vec{k} \delta\left(k_x - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2}\right) \times \\ \times \langle \phi_{CM}^F | e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} | \phi_{CM}^0 \rangle \langle \phi_{rel}^F | e^{i\frac{\mu}{m_e}\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{r}} | \phi_{rel}^0 \rangle \cdot \vec{E}(k_{\perp}) \quad (\text{A.17})$$

Esta expresión es análoga a la ecuación (26) de la referencia [16].

Apéndice B

Sobre tensores esféricos de rango 2

Un tensor de rango-2 T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) tiene 9 parámetros libres. Éste puede ser separado en un escalar (traza) T , un tensor antisimétrico \bar{T} y un tensor simétrico de traza cero $\bar{\bar{T}}$ [26, (chap.IV pp50)]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} \sum_k T_{kk} \\ \bar{T}_{ij} &= \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \\ \bar{\bar{T}}_{ij} &= \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k T_{kk} \end{aligned} \tag{B.1}$$

De modo que $T_{ij} = T + \bar{T}_{ij} + \bar{\bar{T}}_{ij}$. A partir de estos términos podemos construir los tensores esféricos o irreducibles de rango- k $T_q^{(k)}$ con $(2k+1)$ parámetros libres [27, (chap.4 pp76)]:

Rango cero:	$T_0^{(0)} = T$
	<hr/>
	$T_0^{(1)} = \bar{T}_{xy}$
Rango uno:	$T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{T}_{yz} \pm i\bar{T}_{zx})$
	<hr/>
	$T_0^{(2)} = \bar{\bar{T}}_{zz}$
Rango dos:	$T_{\pm 1}^{(2)} = \mp \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{\bar{T}}_{zx} \pm i\bar{\bar{T}}_{zy})$
	$T_{\pm 2}^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{6}} (\bar{\bar{T}}_{xx} - \bar{\bar{T}}_{yy} \pm 2i\bar{\bar{T}}_{xy})$

B.1. Tensor cuadrupolar esférico

La ecuación (2.14) dicta que:

$$Q_{ij} = q \frac{1}{2} (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) \quad (2.14)$$

Para reescribir el tensor anterior en términos de sus componentes irreducibles, nos valemos de las definiciones de las ecuaciones (B.1):

$$\begin{aligned} Q &= q \frac{1}{2} \left(\sum_i r_i^2 - \frac{1}{3} \sum_i \delta_{ij} r^2 \right) = 0 \\ \bar{Q}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(q \frac{1}{2} (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) - q \frac{1}{2} (3r_j r_i - \delta_{ji} r^2) \right) = 0 \\ \bar{\bar{Q}}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(q \frac{1}{2} (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) + q \frac{1}{2} (3r_j r_i - \delta_{ji} r^2) \right) - \delta_{ij} Q = Q_{ij} \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q_0^{(0)} = Q_{0,\pm 1}^{(1)} = 0$ y quedan únicamente tensores irreducibles de rango-2:

$$Q_0^{(2)} = Q_{zz} \quad (B.2)$$

$$Q_{\pm 1}^{(2)} = \mp \sqrt{\frac{2}{3}} (Q_{zx} \pm iQ_{zy}) \quad (B.3)$$

$$Q_{\pm 2}^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{6}} (Q_{xx} - Q_{yy} \pm 2iQ_{xy}) \quad (B.4)$$

Sustituyendo (2.14) en las ecuaciones (B.2)-(B.4) podemos encontrar que:

$$\begin{aligned} Q_0^{(2)} &= \frac{q}{2} (3z^2 - r^2) = \frac{q}{2} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) = q r^2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{2,0} \\ Q_{\pm 1}^{(2)} &= \mp q \sqrt{\frac{3}{2}} (zx \pm izy) = \mp q r^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} = q r^2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{2,\pm 1} \\ Q_{\pm 2}^{(2)} &= q \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - y^2 \pm i2xy) = q r^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta (\cos \phi \pm i \sin \phi)^2 = q r^2 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{2,\pm 2} \end{aligned}$$

Y utilizando que $\sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{i,j} = C_j^i$

Se obtiene finalmente que

$$Q_i^{(2)} = q r^2 C_i^2 \quad i = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (B.5)$$

B.2. Término cuadrupolar como producto de tensores

Se quiere demostrar que la ecuación (2.17) es válida, para lo cual se desarrolla la expresión:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{E}) &= (\partial_x r_x + \partial_y r_y + \partial_z r_z)(r_x E_x + r_y E_y + r_z E_z) \\
 &= \partial_x E_x r_x^2 + \partial_y E_y r_y^2 + \partial_z E_z r_z^2 + \\
 &\quad + (\partial_x E_y + \partial_y E_x) r_x r_y + (\partial_x E_z + \partial_z E_x) r_x r_z + (\partial_y E_z + \partial_z E_y) r_y r_z \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

Este resultado se guarda para ser utilizado más adelante. Recordando las definiciones de los tensores Q_{ij} y \mathcal{K}_{ij} (ver ecuaciones (2.14) y (2.16)) es posible desarrollar:

$$\begin{aligned}
 \sum_j \sum_k \mathcal{K}_{jk} Q_{jk} &= \sum_j \sum_k \partial_j E_k q \frac{1}{2} (3r_j r_k - \delta_{jk} r^2) \\
 &= q \frac{3}{2} (\partial_x E_x r_x^2 + \partial_x E_y r_x r_y + \partial_x E_z r_x r_z + \\
 &\quad + \partial_y E_x r_y r_x + \partial_y E_y r_y^2 + \partial_y E_z r_y r_z + \\
 &\quad + \partial_z E_x r_z r_x + \partial_y E_z r_y r_z + \partial_z E_z r_z^2 + \\
 &\quad - \frac{1}{3} (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z) r^2) \\
 &= q \frac{3}{2} (\partial_x E_x r_x^2 + \partial_x E_y r_x r_y + \partial_x E_z r_x r_z + \\
 &\quad + \partial_y E_x r_y r_x + \partial_y E_y r_y^2 + \partial_y E_z r_y r_z + \\
 &\quad + \partial_z E_x r_z r_x + \partial_y E_z r_y r_z + \partial_z E_z r_z^2) \quad (\text{B.7})
 \end{aligned}$$

Uniendo las dos ecuaciones anteriores se obtiene lo que se quería demostrar:

$$\sum_j \sum_k \mathcal{K}_{jk} Q_{jk} = \frac{3}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})(q\vec{r} \cdot \vec{E}) \quad (\text{B.8})$$

B.3. Término cuadrupolar como producto de tensores esféricos

Se quiere probar que la ecuación (2.18) es válida, para lo cual se recuerda la definición del tensor \mathcal{K} (2.16):

$$\mathcal{K}_{jk} = \partial_j E_k$$

Y se procede de manera similar a lo realizado en B.1, usando las ecuaciones (B.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{1}{3} \sum_k \mathcal{K}_{kk} = \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \bar{\mathcal{K}}_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ji}) - \delta_{ij}\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_{ij} + \mathcal{K}_{ji})\end{aligned}$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0^{(2)} &= \bar{\mathcal{K}}_{zz} = \partial_z E_z \\ \mathcal{K}_{\pm 1}^{(2)} &= \mp 2\sqrt{\frac{1}{6}}(\bar{\mathcal{K}}_{zx} \pm i\bar{\mathcal{K}}_{zy}) \\ &= \mp\sqrt{\frac{1}{6}}(\partial_z E_x + \partial_x E_z \pm i(\partial_z E_y + \partial_y E_z)) \\ \mathcal{K}_{\pm 2}^{(2)} &= \sqrt{\frac{1}{6}}(\bar{\mathcal{K}}_{xx} - \bar{\mathcal{K}}_{yy} \pm 2i\bar{\mathcal{K}}_{xy}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}}(\partial_x E_x - \partial_y E_y \pm i(\partial_x E_y + \partial_y E_x))\end{aligned}\tag{B.9}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{K}_0^{(2)}Q_0^{(2)} = q \partial_z E_z \frac{1}{2}(3r_z^2 - r^2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{+1}^{(2)}Q_{-1}^{(2)} &= -q \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\partial_z E_x + \partial_x E_z + i(\partial_z E_y + \partial_y E_z))\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}r_z r_x - i\frac{3}{2}r_z r_y\right) \\ \mathcal{K}_{-1}^{(2)}Q_{+1}^{(2)} &= -q \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\partial_z E_x + \partial_x E_z - i(\partial_z E_y + \partial_y E_z))\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}r_z r_x + i\frac{3}{2}r_z r_y\right) \\ \Rightarrow \mathcal{K}_{+1}^{(2)}Q_{-1}^{(2)} + \mathcal{K}_{-1}^{(2)}Q_{+1}^{(2)} &= -q ((\partial_z E_x + \partial_x E_z)r_z r_x + (\partial_z E_y + \partial_y E_z)r_z r_y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{+2}^{(2)}Q_{-2}^{(2)} &= q \sqrt{\frac{1}{6}}(\partial_x E_x - \partial_y E_y + i(\partial_x E_y + \partial_y E_x))\sqrt{\frac{1}{6}}\left(\frac{3}{2}r_x^2 - \frac{3}{2}r_y^2 - i3r_x r_y\right) \\ \mathcal{K}_{-2}^{(2)}Q_{+2}^{(2)} &= q \sqrt{\frac{1}{6}}(\partial_x E_x - \partial_y E_y - i(\partial_x E_y + \partial_y E_x))\sqrt{\frac{1}{6}}\left(\frac{3}{2}r_x^2 - \frac{3}{2}r_y^2 + i3r_x r_y\right) \\ \Rightarrow \mathcal{K}_{+2}^{(2)}Q_{-2}^{(2)} + \mathcal{K}_{-2}^{(2)}Q_{+2}^{(2)} &= q \left(\frac{1}{2}(\partial_x E_x - \partial_y E_y)(r_x^2 - r_y^2) + (\partial_x E_y + \partial_y E_x)r_x r_y\right)\end{aligned}$$

Sumando estas últimas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=-2}^2 (-1)^p \mathcal{K}_p^{(2)} Q_{-p}^{(2)} = \\
& = q \left[\partial_z E_z r_z^2 - \frac{1}{2} \partial_z E_z r_x^2 - \frac{1}{2} \partial_z E_z r_y^2 + \right. \\
& \quad + (\partial_z E_x + \partial_x E_z) r_z r_x + (\partial_z E_y + \partial_y E_z) r_z r_y + \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_x E_x - \partial_y E_y) r_x^2 - \frac{1}{2} (\partial_x E_x - \partial_y E_y) r_y^2 + (\partial_x E_y + \partial_y E_x) r_x r_y \right] \\
& = q \left[\partial_x E_x r_x^2 + \partial_y E_y r_y^2 + \partial_z E_z r_z^2 + \right. \\
& \quad \left. + (\partial_x E_y + \partial_y E_x) r_x r_y + (\partial_z E_x + \partial_x E_z) r_z r_x + (\partial_z E_y + \partial_y E_z) r_z r_y \right] \\
& = q (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{E})
\end{aligned}$$

En donde en la última línea se utilizó la ecuación (B.6).

B.4. Análisis de los haces Bessel en el espacio de momentos

Caso ideal

Se quiere demostrar que en el espacio de momentos un haz Bessel queda descrito por la función:

$$F(\mathbf{k}, \phi_{\mathbf{k}}) = \frac{\delta(\mathbf{k} - k_{\perp})}{k_{\perp}} i^m e^{i m \phi_{\mathbf{k}}} \quad (\text{B.10})$$

Para lo cual primero se demostrará lo siguiente: si $F(\mathbf{k}, \phi_{\mathbf{k}}) = G(\mathbf{k}) e^{i m \phi_{\mathbf{k}}}$ es la transformada da Fourier de $f(\rho, \phi)$ entonces

$$f(\rho, \phi) = i^m e^{i m \phi} \int_0^{\infty} G(\mathbf{k}) J_m(k\rho) k dk \quad (\text{B.11})$$

Demostración. Sea $F(\mathbf{k}, \phi_{\mathbf{k}}) = G(\mathbf{k}) e^{i m \phi_{\mathbf{k}}}$. Entonces su anti-transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}
f(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i k \rho \cos(\phi - \phi_{\mathbf{k}})} F(\mathbf{k}, \phi_{\mathbf{k}}) k dk d\phi_{\mathbf{k}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i k \rho \cos(\phi - \phi_{\mathbf{k}})} G(\mathbf{k}) e^{i m \phi_{\mathbf{k}}} k dk d\phi_{\mathbf{k}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(\mathbf{k}) \left(\int_0^{2\pi} e^{i k \rho \cos(\phi - \phi_{\mathbf{k}})} e^{i m \phi_{\mathbf{k}}} d\phi_{\mathbf{k}} \right) k dk
\end{aligned}$$

Utilizando la expansión de Jacobi-Anger: $e^{ia \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(a) e^{in\theta}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(k) \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho) e^{in(\phi-\phi_k)} e^{im\phi_k} d\phi_k \right) k dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(k) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho) e^{in\phi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi_k} d\phi_k \right) k dk \end{aligned}$$

Dado que m y n son enteros $\Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi_k} d\phi_k = \delta_{m,n}$

$$\begin{aligned} f(\rho, \phi) &= \int_0^\infty G(k) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho) e^{in\phi} \delta_{m,n} \right) k dk \\ &= i^m e^{im\phi} \int_0^\infty G(k) J_m(k\rho) k dk \end{aligned}$$

□

Una vez probada la ecuación (B.11), se puede utilizar para probar que la ecuación (B.10) es la transformada de Fourier de la ecuación que describe el perfil transversal de un haz Bessel: en el caso particular en que $G(k) = \frac{\delta(k-k_\perp)}{k_\perp} i^m$ entonces

$$\begin{aligned} f(\rho, \phi) &= i^{2m} e^{im\phi} \int_0^\infty \frac{\delta(k-k_\perp)}{k_\perp} J_m(k\rho) k dk \\ &= -J_m(k_\perp \rho) e^{im\phi} \end{aligned} \tag{B.12}$$

Que es lo que se quería demostrar. El signo negativo se puede eliminar redefiniendo el cero de la variable ϕ , lo cual no es problema ya que hasta ahora no se ha hablado de ninguna dirección privilegiada.

Caso no ideal

Dado que los haces Bessel producidos en el laboratorio no son ideales, se pueden modelar de manera aproximada haciendo la siguiente substitución en la ecuación (B.10):

$$\delta(k-k_\perp) \leftrightarrow \frac{1}{W\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-k_\perp)^2}{2W^2}\right) \tag{B.13}$$

De modo que la nueva función, nombrada \tilde{F} , en el espacio de momentos queda descrita por:

$$\tilde{F}(k, \phi_k) = \frac{1}{k_{\perp} W \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k - k_{\perp})^2}{2W^2}\right) i^m e^{i m \phi_k} \equiv H(k) e^{i m \phi_k} \quad (\text{B.14})$$

Usando entonces la ecuación (B.11) para $\tilde{F}(k, \phi_k)$ se obtiene:

$$\tilde{f}(\rho, \phi) = i^m e^{i m \phi} \int_0^{\infty} H(k) J_m(k\rho) k dk \quad (\text{B.15})$$

Y en analogía con que $J_m(k_{\perp}\rho) = e^{-i m \phi} f(\rho, \phi)$ entonces se define la función *Bessel modificada* \tilde{J}_m como:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_m(k_{\perp}\rho) &\equiv e^{-i m \phi} \tilde{f}(\rho, \phi) \\ &= i^m \int_0^{\infty} H(k) J_m(k\rho) k dk \\ &= \frac{1}{k_{\perp} W \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(k - k_{\perp})^2}{2W^2}\right) J_m(k\rho) k dk \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

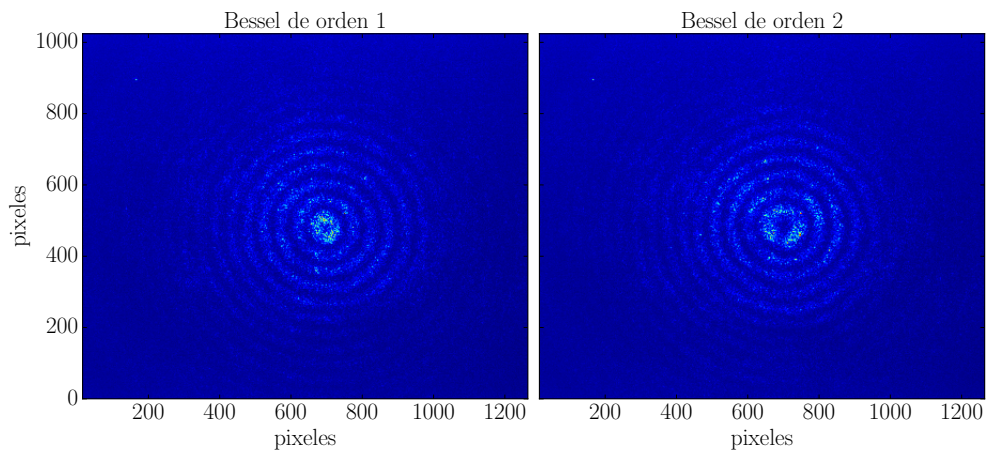
Nótese que al igual que en el caso ideal el signo negativo resultante de tener i^{2m} se eliminó por redefinir el cero de la variable ϕ .

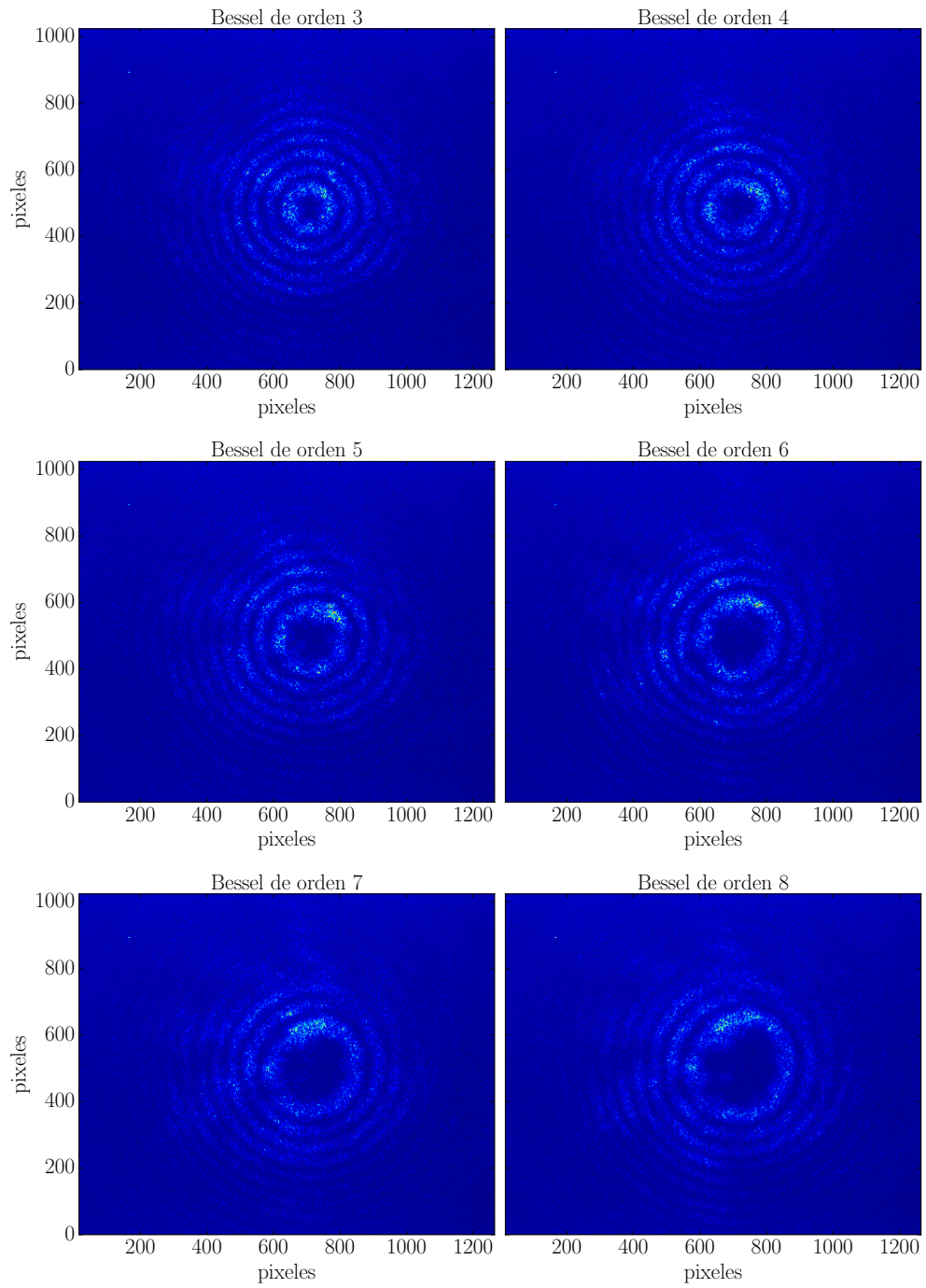
Apéndice C

Fotografías de los perfiles de intensidad de los haces de excitación

C.1. Primer experimento

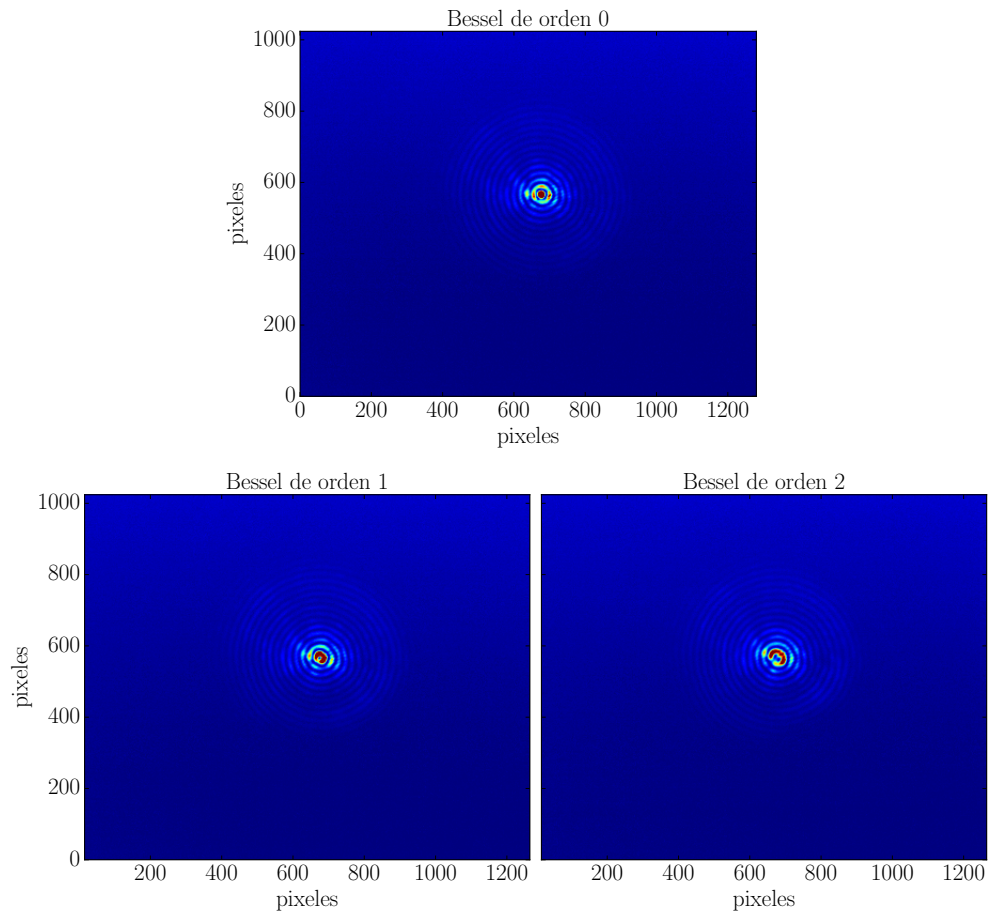
Fotografías del perfil de intensidad del haz Bessel, al ser dispersado por el papel cuadrículado, para órdenes 1,2, 3,4, 5,6, 7,8. Las imágenes no se muestran en escala de grises ya que, para evitar saturación, las fotografías originales son muy oscuras.

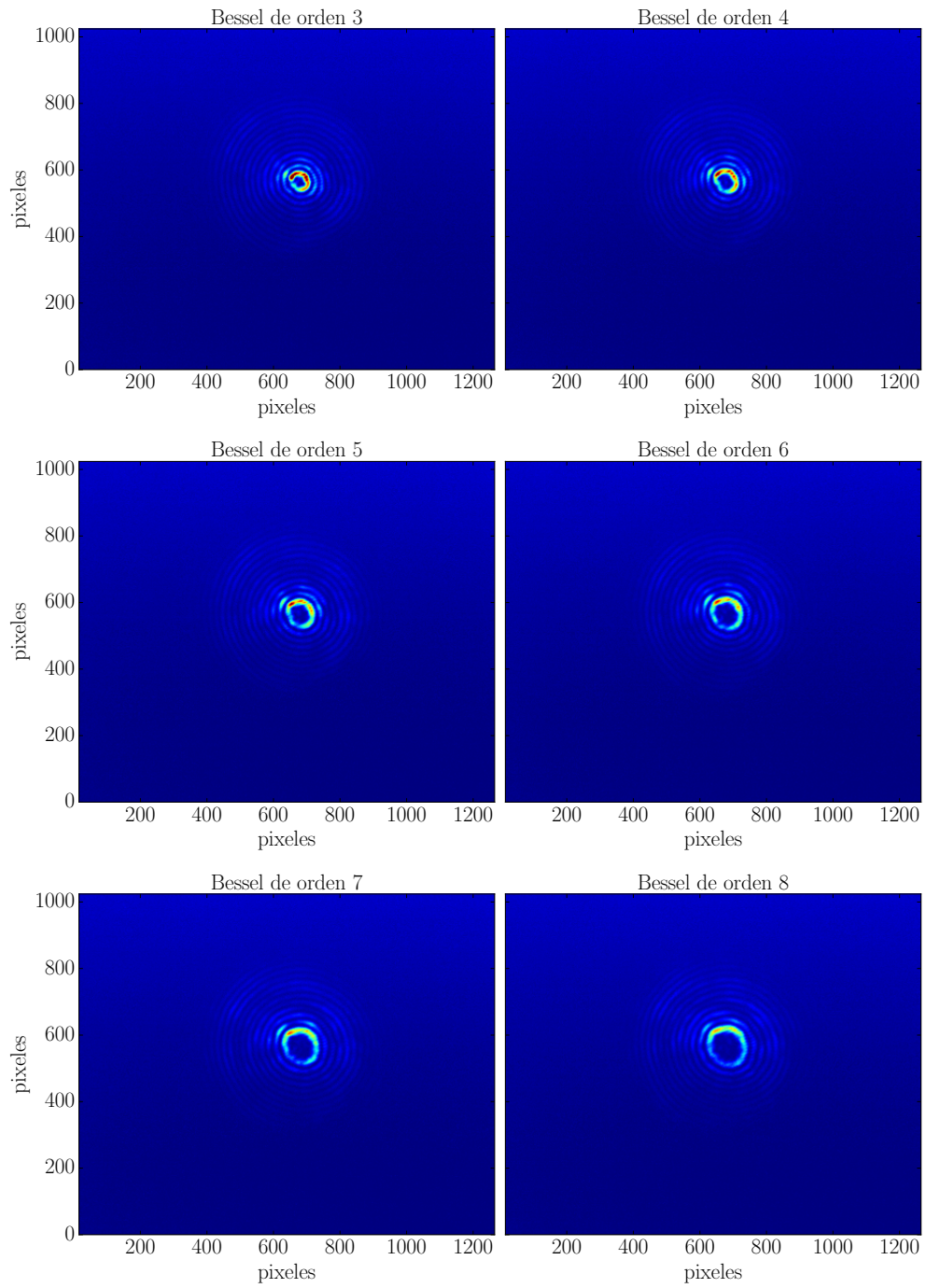




C.2. Segundo experimento: con tamaño del haz Bessel reducido

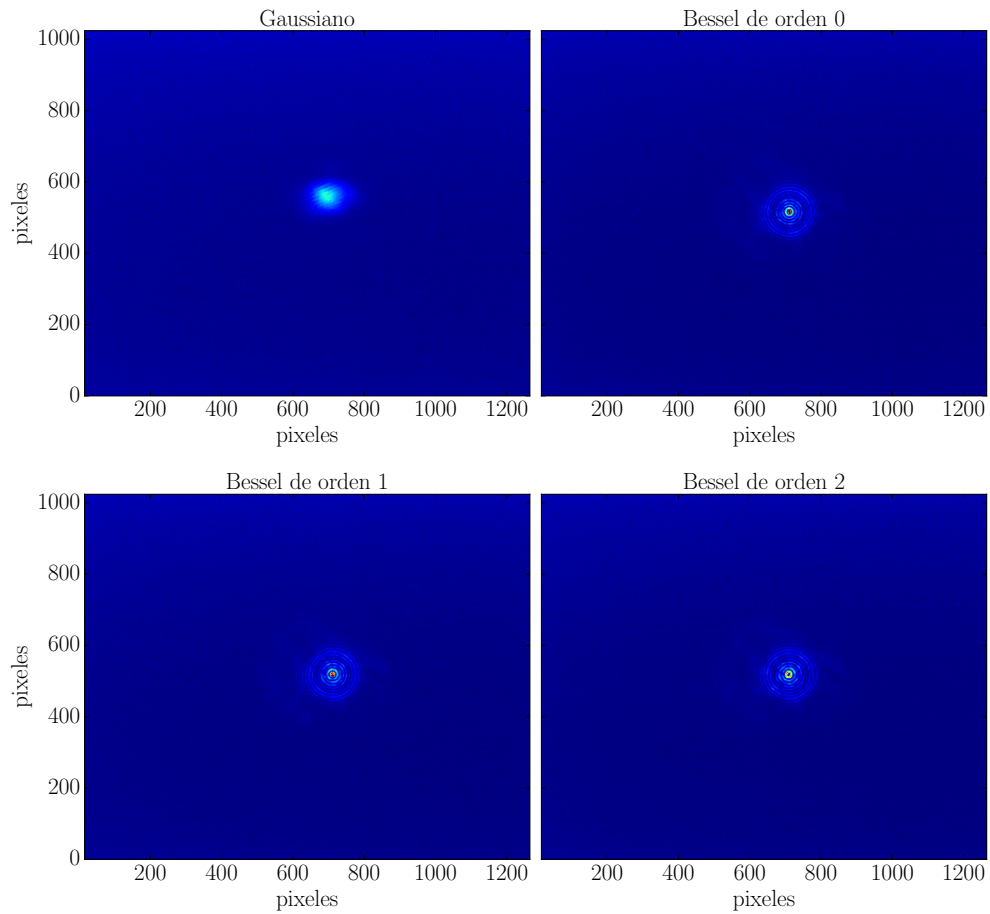
Fotografías del perfil de intensidad del haz Bessel, al incidir el mismo directamente sobre el sensor CCD. Se muestran los órdenes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Las imágenes no se muestran en escala de grises ya que, para evitar saturación, las fotografías originales son muy oscuras.

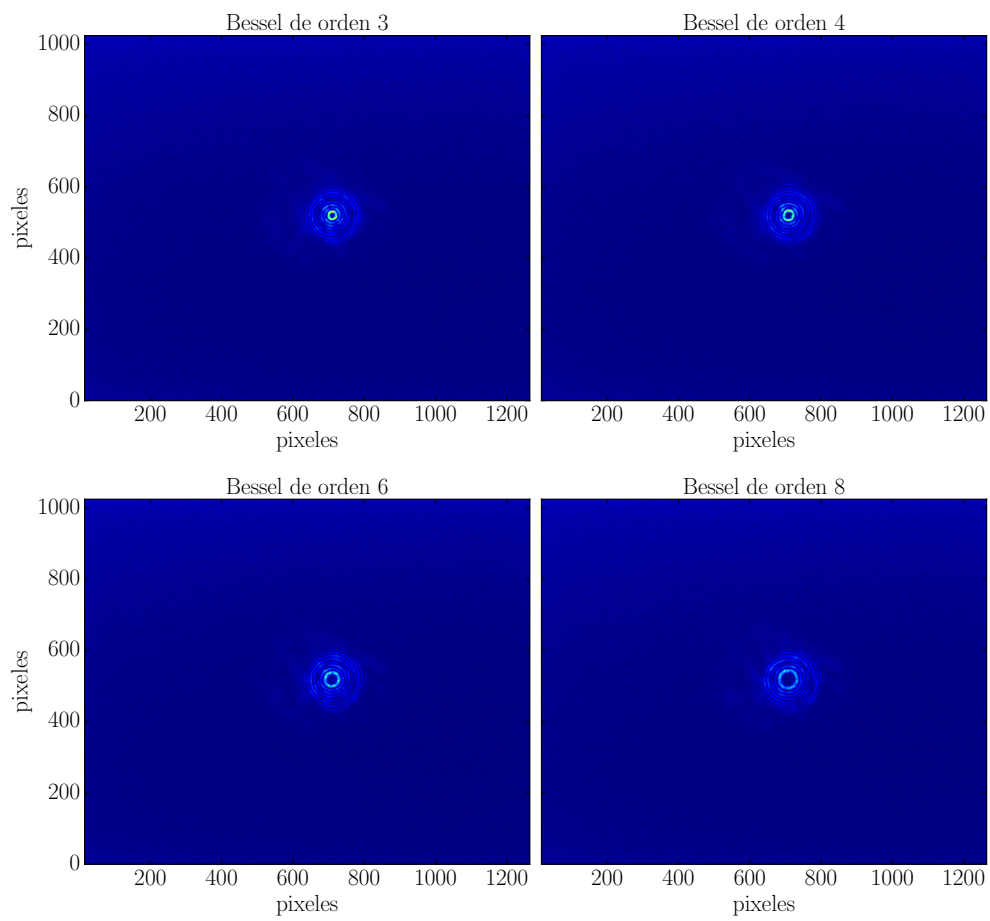




C.3. Tercer experimento: distribución angular

Fotografías del perfil de intensidad del haz de 911 nm al incidir directamente sobre el sensor CCD. Se muestra el caso Gaussiano y el caso Bessel para los órdenes 1,2, 3,4, 6,8. Las imágenes no se muestran en escala de grises ya que, para evitar saturación, las fotografías originales son muy oscuras.





Bibliografía

- [1] J. Durnin. «Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 4.4 (abr. de 1987), págs. 651-654. DOI: [10.1364/JOSAA.4.000651](https://doi.org/10.1364/JOSAA.4.000651).
- [2] J. Durnin, J. J. Miceli y J. H. Eberly. «Diffraction-free beams». En: *Phys. Rev. Lett.* 58 (15 abr. de 1987), págs. 1499-1501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.58.1499](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1499).
- [3] L. Allen y col. «Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes». En: *Phys. Rev. A* 45 (11 jun. de 1992), págs. 8185-8189. DOI: [10.1103/PhysRevA.45.8185](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185).
- [4] D McGloin y K Dholakia. «Bessel beams: Diffraction in a new light». En: *Contemporary Physics* 46.1 (2005), págs. 15-28. DOI: [10.1080/0010751042000275259](https://doi.org/10.1080/0010751042000275259).
- [5] Jochen Arlt y col. «Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams». En: *Phys. Rev. A* 63 (6 mayo de 2001), pág. 063602. DOI: [10.1103/PhysRevA.63.063602](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.063602).
- [6] T. Wulle y S. Herminghaus. «Nonlinear optics of Bessel beams». En: *Phys. Rev. Lett.* 70 (10 mar. de 1993), págs. 1401-1404. DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.1401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1401).
- [7] J Arlt y col. «Optical micromanipulation using a Bessel light beam». En: *Optics Communications* 197.4-6 (2001), págs. 239-245. ISSN: 0030-4018. DOI: [10.1016/S0030-4018\(01\)01479-1](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(01)01479-1).
- [8] K Volke-Sepulveda y col. «Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam». En: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 4.2 (2002), S82. URL: <http://stacks.iop.org/1464-4266/4/i=2/a=373>.
- [9] V. Garcés-Chávez y col. «Transfer of orbital angular momentum to an optically trapped low-index particle». En: *Phys. Rev. A* 66 (6 dic. de 2002), pág. 063402. DOI: [10.1103/PhysRevA.66.063402](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.063402).
- [10] V. Garcés-Chávez y col. «Observation of the Transfer of the Local Angular Momentum Density of a Multiringed Light Beam to an Optically Trapped Particle». En: *Phys. Rev. Lett.* 91 (9 ago. de 2003), pág. 093602. DOI: [10.1103/PhysRevLett.91.093602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.093602).

- [11] M. Babiker, W. L. Power y L. Allen. «Light-induced Torque on Moving Atoms». En: *Phys. Rev. Lett.* 73 (9 ago. de 1994), págs. 1239-1242. DOI: [10.1103/PhysRevLett.73.1239](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.1239).
- [12] S.J. Van Enk y G. Nienhuis. «Commutation Rules and Eigenvalues of Spin and Orbital Angular Momentum of Radiation Fields». En: *Journal of Modern Optics* 41.5 (1994), págs. 963-977. DOI: [10.1080/09500349414550911](https://doi.org/10.1080/09500349414550911).
- [13] R. Jáuregui. «Rotational effects of twisted light on atoms beyond the paraxial approximation». En: *Phys. Rev. A* 70 (3 sep. de 2004), pág. 033415. DOI: [10.1103/PhysRevA.70.033415](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.033415).
- [14] R. Jáuregui y S. Hacyan. «Quantum-mechanical properties of Bessel beams». En: *Phys. Rev. A* 71 (3 mar. de 2005), pág. 033411. DOI: [10.1103/PhysRevA.71.033411](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.033411).
- [15] Karen Volke-Sepúlveda y Rocío Jáuregui. «All-optical 3D atomic loops generated with Bessel light fields». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 42.8 (2009), pág. 085303. URL: <http://stacks.iop.org/0953-4075/42/i=8/a=085303>.
- [16] R. Jáuregui. «Control of atomic transition rates via laser-light shaping». En: *Phys. Rev. A* 91 (4 abr. de 2015), pág. 043842. DOI: [10.1103/PhysRevA.91.043842](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.043842).
- [17] Francisco Sebastián Ponciano Ojeda. *Espectroscopía de la transición cuadrupolar eléctrica $5P_{3/2-} \rightarrow 6P_{3/2}$ en el átomo de rubidio*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2014.
- [18] Oscar López Hernández. *Espectroscopía de la transición de dos fotones $5S_{1/2-} \rightarrow 5P_{3/2-} \rightarrow 5D_{3/2}$ por decaimiento del estado $6P$ en Rb atómico*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2015.
- [19] Santiago Hernández Gómez. *Sistema para producir estados de Rydberg en rubidio atómico a temperatura ambiente con tres fotones*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2014.
- [20] R Colín-Rodríguez y col. «Polarization effects in the interaction between multi-level atoms and two optical fields». En: *Physica Scripta* 90.6 (2015), pág. 068017. URL: <http://stacks.iop.org/1402-4896/90/i=6/a=068017>.
- [21] F. Ponciano-Ojeda y col. «Observation of the $5p_{3/2} \rightarrow 6p_{3/2}$ electric-dipole-forbidden transition in atomic rubidium using optical-optical double-resonance spectroscopy». En: *Phys. Rev. A* 92 (4 oct. de 2015), pág. 042511. DOI: [10.1103/PhysRevA.92.042511](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.042511).
- [22] Cristian Adán Mojica Casique. «Espectroscopía libre de Doppler en el sistema en escalera $5s- \rightarrow 5p- \rightarrow 6p$ en rubidio atómico: efectos de la polarización de la luz en la transición cuadrupolar eléctrica $5p_{3/2-} \rightarrow 6p_{3/2}$ ». Tesis doct. Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

- [23] C Mojica-Casique y col. «Control of electronic magnetic state population via light polarization in the $5p\ 3/2 \rightarrow 6p\ 3/2$ electric quadrupole transition in atomic rubidium». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 50.2 (2017), pág. 025003. URL: <http://stacks.iop.org/0953-4075/50/i=2/a=025003>.
- [24] Claude Cohen-Tannoudji; David Guéry-Odelin. *Advances in atomic physics : an overview*. 1.^a ed. World Scientific, 2011.
- [25] Oscar Gerardo Lazo Arjona. *Estudio Experimental y Teórico de la Transición de Dos Fotones $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ en Átomos Fríos de Rubidio*. Tesis de Maestría. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM. 2016.
- [26] D.M. Brink y G.R. Satchler. *Angular Momentum*. 3.^a ed. Oxford science publications. Clarendon Press, 1993.
- [27] J.P. Toennis e I.I. Sobelman. *Atomic Spectra and Radiative Transitions*. 2.^a ed. Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. Springer Berlin Heidelberg, 1992.
- [28] A.R. Edmonds. *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Investigations in Physics Series. Princeton University Press, 1957.
- [29] Albert Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover books on physics. Dover Publications, 1961.
- [30] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc y G. Grynberg. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1997.
- [31] G.N. WATSON. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed. Cambridge at the University Press, 1944.
- [32] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Tenth Printing. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. USA Department of Commerce, 1972.
- [33] Y. Jerónimo-Moreno y R. Jáuregui. «On-demand generation of propagation-invariant photons with orbital angular momentum». En: *Phys. Rev. A* 90 (1 jul. de 2014), pág. 013833. DOI: [10.1103/PhysRevA.90.013833](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.013833).
- [34] K. Dholakia y T. Cizmar. «Shaping the future of manipulation». En: *Nat. Photonics* 5 (6 jun. de 2011), pág. 335.
- [35] E. G. van Putten, I. M. Vellekoop y A. P. Mosk. «Spatial amplitude and phase modulation using commercial twisted nematic LCDs». En: *Appl. Opt.* 47.12 (abr. de 2008), págs. 2076-2081. DOI: [10.1364/AO.47.002076](https://doi.org/10.1364/AO.47.002076).
- [36] U. Ruiz y col. «Polarization holograms allow highly efficient generation of complex light beams». En: *Opt. Express* 21.6 (mar. de 2013), págs. 7505-7510. DOI: [10.1364/OE.21.007505](https://doi.org/10.1364/OE.21.007505).

- [37] C. L. Hernández-Cedillo y col. «Scattering of dilute thermal atom clouds on optical Weber beams». En: *Phys. Rev. A* 87 (2 feb. de 2013), pág. 023404. DOI: [10.1103/PhysRevA.87.023404](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.023404).
- [38] R. Jáuregui y P. A. Quinto-Su. «On the general properties of symmetric incomplete Airy beams». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 31.11 (nov. de 2014), págs. 2484-2488. DOI: [10.1364/JOSAA.31.002484](https://doi.org/10.1364/JOSAA.31.002484).
- [39] Rafael Paez-Lopez y col. «Optical manipulation using optimal annular vortices». En: *Opt. Lett.* 41.17 (sep. de 2016), págs. 4138-4141. DOI: [10.1364/OL.41.004138](https://doi.org/10.1364/OL.41.004138).
- [40] Mingzhou Chen y col. «Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam». En: *Opt. Lett.* 38.22 (nov. de 2013), págs. 4919-4922. DOI: [10.1364/OL.38.004919](https://doi.org/10.1364/OL.38.004919).
- [41] Mingzhou Chen y col. «Creating and probing of a perfect vortex in situ with an optically trapped particle». En: *Optical Review* 22.1 (2015), págs. 162-165. ISSN: 1349-9432. DOI: [10.1007/s10043-015-0031-7](https://doi.org/10.1007/s10043-015-0031-7).
- [42] Mingzhou Chen y col. «Optical trapping with a perfect vortex beam». En: *Proc. SPIE* 9164 (2014). DOI: [10.1117/12.2064080](https://doi.org/10.1117/12.2064080).
- [43] John H. McLeod. «The Axicon: A New Type of Optical Element». En: *J. Opt. Soc. Am.* 44.8 (ago. de 1954), págs. 592-597. DOI: [10.1364/JOSA.44.000592](https://doi.org/10.1364/JOSA.44.000592).
- [44] G. Indebetouw. «Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis». En: *J. Opt. Soc. Am. A* 6.1 (ene. de 1989), págs. 150-152. DOI: [10.1364/JOSAA.6.000150](https://doi.org/10.1364/JOSAA.6.000150).
- [45] D McGloin y K Dholakia. «Bessel beams: Diffraction in a new light». En: *Contemporary Physics* 46.1 (2005), págs. 15-28. DOI: [10.1080/0010751042000275259](https://doi.org/10.1080/0010751042000275259).
- [46] Alexander Jesacher. «Applications of spatial light modulators for optical trapping and image processing». Tesis doct. Leopold-Franzens University, Innsbruck, 2007.
- [47] Pablo Ortega Escorza. *Sistema para generar haces Bessel escalares*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2017.
- [48] A. S. Arnold, J. S. Wilson y M. G. Boshier. «A simple extended-cavity diode laser». En: *Review of Scientific Instruments* 69.3 (1998), págs. 1236-1239. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1148756>.
- [49] Adonis Reyes Reyes. *Espectroscopía de polarización en vapor de rubidio utilizando un diodo láser con cavidad extendida*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2008.
- [50] José Eduardo Navarro Navarrete. *Diseño, construcción y caracterización de un láser de diodo de cavidad extendida de 1049 nm para producir estados de Rydberg en átomos de rubidio*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2015.

- [51] Víctor Augusto Samayoa Donado. *Diseño, construcción y caracterización de cavidades externas para láseres de diodo en configuración cat-eye y Littrow*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2017.
- [52] M.O. Scully y M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [53] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Third Edition. John Wiley & Sons, 1999.