



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SUPERTAREAS Y LA TOPOLOGÍA DEL  
ESPACIO-TIEMPO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**MATEMÁTICA**

PRESENTA:

**LORENA YUNES ARRIAGA**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CÉSAR SIMÓN LÓPEZ MONSALVO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mi familia y amigos, quienes siempre creyeron en  
mí.*



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## RESUMEN

FACULTAD DE CIENCIAS

Licenciatura en Matemáticas

### **SUPERTAREAS Y LA TOPOLOGÍA DEL ESPACIO-TIEMPO**

por

Lorena Yunes Arriaga

Una supertarea se define como una sucesión numerable de operaciones secuenciales que ocurren en un tiempo finito. La demostración de la veracidad (o falsedad) de cualquier proposición en teoría de números puede obtenerse a través de su verificación para cada número natural. Dicha tarea es un ejemplo de una sucesión numerable de operaciones. La imposibilidad de verificar una infinidad de posibilidades en un tiempo finito está anclada a la noción Newtoniana del espacio y del tiempo, i.e. una operación precede a la siguiente y el término de cada operación define un evento temporal *universal*. Sin embargo, con el surgimiento de la teoría de la relatividad, la noción de tiempo universal tuvo que ser abandonada por la idea colectiva de espacio-tiempo [1, 2]. Bajo esta perspectiva, se abre la posibilidad de estudiar la clase de espacios-tiempo para los cuales el resultado de una infinidad de pasos temporales puede ser accesible para algún observador en un *tiempo propio* finito [3]. El estudio de la topología de los espacios-tiempos relativistas que admiten la realización de supertareas ha sido objeto de estudio durante los últimos años.

En esta tesis estudiaremos las condiciones de causalidad suficientes y – de ser posible – necesarias para que un espacio-tiempo admita una familia de observadores para la cual el resultado de una tarea que demande una infinidad numerable de pasos sea accesible en un tiempo propio finito. Tal situación fue concebida por Hogarth [4] y estudiada por Norton y Earman [5, 3]. Estos trabajos forman el núcleo de una nueva área de investigación interdisciplinaria en áreas de Matemáticas puras (teoría de números), ciencias de la computación (computabilidad) y física-matemática (topología del espacio-tiempo).

El programa a desarrollar en este trabajo consiste en un reporte acerca de las ideas recientes en computo relativista y el estudio de las condiciones de causalidad suficientes [2] para la realización de una supertarea. En particular, se estudiará el caso de espacios-tiempos relevantes desde el punto de vista físico para argumentar

que la posibilidad de obtener el resultado de una supertarea es realizable en una clase de soluciones a las Ecuaciones de Einstein en el vacío compatibles con las observaciones acerca del universo.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Contenido</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>xiii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Máquina de Turing . . . . .	2
1.1.1. La máquina universal de Turing . . . . .	4
1.2. Supertareas . . . . .	5
1.2.1. Máquina de Turing acelerada (MTA) . . . . .	7
1.2.2. Máquina Universal de Turing Acelerada (MUTA) . . . . .	8
1.2.3. Hipercomputabilidad . . . . .	9
1.3. Principios de la Relatividad Especial . . . . .	10
1.4. Principios de la Relatividad General . . . . .	12
1.4.1. Historia de la TRG . . . . .	13
<b>2. Tesis de Church-Turing</b>	<b>15</b>
2.1. Tesis de Turing . . . . .	15
2.1.1. ¿Es realmente la Tesis de Turing una tesis? . . . . .	16
2.2. Tesis de Church-Turing (PhCT) . . . . .	16
2.3. Realización de una hipercomputadora . . . . .	17



2.3.1. Tesis de Gandy . . . . .	18
2.3.2. Realización física de una hipercomputadora . . . . .	20
2.3.3. Máquina de Turing Acelerada (MTA) . . . . .	21
2.4. ¿Una MTA puede computar lo incomputable? . . . . .	22
2.4.1. Paradoja del problema de la parada . . . . .	23
2.4.2. Interpretación del resultado . . . . .	25
<b>3. Espacio-Tiempo</b>	<b>27</b>
3.1. Causalidad y cronología . . . . .	27
3.1.1. Condiciones de causalidad . . . . .	36
3.2. Espacios-tiempo aptos para supertareas . . . . .	37
3.2.1. Supertareas . . . . .	37
3.2.2. Espacio-tiempo de Pitowski . . . . .	38
3.2.3. Espacio-tiempo de Malament-Hogarth . . . . .	39
<b>4. Geometría y gravedad</b>	<b>43</b>
4.1. Ecuaciones de Einstein . . . . .	43
4.2. Diagramas de Carter-Penrose . . . . .	44
4.2.1. Coordenadas de Kruskal . . . . .	45
4.2.2. Compactificación . . . . .	46
4.3. Agujeros negros de Malament-Hogarth . . . . .	47
4.3.1. Reissner-Nordström . . . . .	47
4.3.2. Kerr-Newman . . . . .	49
<b>5. Computabilidad en el Espacio-Tiempo</b>	<b>53</b>
5.0.1. Retirar un punto . . . . .	54
5.0.2. Identificar dos secciones . . . . .	57
5.1. Implicaciones filosóficas . . . . .	58
5.1.1. Determinismo . . . . .	59
5.2. Evitar el indeterminismo . . . . .	61
<b>6. Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>A. Definiciones Generales</b>	<b>67</b>

<b>B. Geometria Diferencial</b>	<b>75</b>
B.1. Transporte paralelo, conexión y derivada covariante . . . . .	75
B.1.1. Conexiones lineales . . . . .	75
B.2. Torsión y curvatura . . . . .	77
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>



# Lista de Figuras

3.1. Desigualdad del triángulo. . . . .	34
3.2. Cono de luz. Las dimensiones espaciales $\mathbb{R}^3$ se representan en un plano y la dimensión temporal en otra componente. . . . .	34
3.3. (a) Esta curva en un espacio de Minkowski es localmente del tipo tiempo, pero no es un conjunto acronal pues contiene pares de puntos con una separación tipo tiempo. (b) Incluso una hipersuperficie tipo tiempo suave en el espacio de Minkowski puede no ser acronal. (c) En este espacio-tiempo (Un pedazo de 2-espacio de Minkowski con dos identificaciones) no hay viajes causales cerrados, pero existe una hipersuperficie $S$ suave del tipo espacio que es compacta (y sin "borde") pero el cual no es un conjunto acronal.	35
4.1. Diagrama coordenadas Kruskal . . . . .	46
4.2. Diagrama de Penrose para espacio-tiempo de la solución de Reissner-Nordström maximal ( $e^2 < m^2$ ). Una cadena infinita de regiones asintóticamente planas $I$ ( $\infty > r > r_+$ ) son conectadas por regiones $II$ ( $r_+ > r > r_-$ ) y $III$ ( $r_- > r > 0$ ); cada región está acotada por una singularidad temporal en $r = 0$ [2]. . . . .	48
4.3. En la solución de Kerr con $0 < a^2 < m^2$ , la ergosfera se encuentra entre la superficie de límite estacionario y el horizonte en $r = r_+$ . Partículas pueden escapar al infinito de la región I (fuera del horizonte $r = r_+$ ) pero no de la región II (entre $r = r_-$ y $r = r_+$ ) y la región III ( $r < r_-$ ; esta región contiene al anillo de singularidades) [2]. . . . .	50

4.4. Fragmento de diagrama de Penrose de un agujero negro que rota mostrando múltiples universos. . . . .	52
5.1. Se retira un punto $q$ en el pasado de $p'$ , en $D^+[\Sigma]$ . Haciendo a $p'$ un punto de MH. . . . .	55
5.2. Se retira un punto el cual se identifica con otra región y se extiende en líneas, topológicamente equivalente a retirar dos secciones $\alpha$ y $\beta$ . Donde $\alpha, \beta \in D^+[\Sigma] \subset I^-(p')$ . . . . .	58
5.3. Se retira un punto $q \in D^+(\Sigma)$ . De esta forma se observa que la región sombreada $I^+(r)$ es la región donde se pierde el determinismo. . . . .	61
5.4. Se retira un punto $q \in H^+(\Sigma)$ . Se observa que la región indeterminista se reduce al máximo. . . . .	62
A.1. Un homeomorfismo $\varphi_i$ mapea $W_i$ a un subconjunto abierto $U_i \subset \mathbb{R}^m$ , otorgándole coordenadas a un punto $p \in W_i$ . Si $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ , la transición de un sistema de coordenadas a otro es suave. . . . .	68

# Agradecimientos

Gracias a la UNAM, mi alma mater. Gracias a mi asesor de Tesis Dr. César Simón López Monsalvo por su dedicación, atención y apoyo a lo largo de todo este proceso. Gracias a mis padres y a mi familia por su presencia permanente. A todos mis amigos por su apoyo incondicional. En especial Daniel Green Tripp y Sebastián Corzo Sánchez, sin ellos no podría haber llegado hasta donde estoy. A Íñigo Tarsicio Hernandez Blanes por siempre estar a mi lado y ser la motivación para lograr todo lo que me propuse. Y a mis sinodales Hernando Quevedo Cubillos, Francisco Nettel Rueda, Alessandro Bravetti y Carlos Iván Lingán Pérez por sus consejos y ayuda en esta etapa.

Lorena Yunes Arriaga  
Ciudad de México  
2017



# 1

## Introducción

A principios del Siglo XXI, Michael Atiyah presentó en un artículo publicado en el Boletín de la Sociedad Matemática de Londres un compendio sobre lo que, a su visión, habían sido las *Matemáticas del Siglo XX* [6]. Ahí, presentó diversos temas como la transición de lo local a lo global, de lo conmutativo a lo no-conmutativo, o de lo lineal a lo no-lineal. Sin embargo, es el apartado *Álgebra versus Geometría* el que sirve como motivación del presente trabajo. En ese apartado, Atiyah presenta la dicotomía clásica en términos precisos. Por un lado, argumenta, la Geometría es acerca del espacio mientras que, por otro lado, el Álgebra se trata del tiempo. La primera afirmación pareciera obvia, mientras que la segunda resulta desconcertante. Sin embargo, elabora, todo procedimiento algebraico consiste en una *secuencia ordenada* de pasos para llegar a un resultado. En ese sentido, la naturaleza *algorítmica* del Álgebra es quien le otorga su carácter *temporal* y la hace una pieza central para la teoría de computación.

De manera general, un algoritmo es útil únicamente cuando la secuencia de pasos termina, es decir, solo cuando se requiere un número finito de pasos para llegar al resultado final. Esta restricción obedece (en parte) a que si el número de pasos fuera infinito, sería necesario esperar una eternidad para conocer el resultado. Por tanto, la idea de poder realizar un trabajo que requiere de una infinidad de pasos en un tiempo finito es, al menos, intrigante. A esta idea se le conoce como *supertarea*.

De ser realizables, las supertareas serían suficientes para demostrar o refutar



cualquier proposición o conjetura que pudiera ser formulada en términos algorítmicos. Tal es el caso de las conjeturas en teoría de números, donde necesitaríamos realizar una infinidad de pasos para garantizar que un contraejemplo no existe y de esta forma verificar directamente cada conjetura.

Decir que una infinidad de pasos requiere un tiempo infinito es un enunciado incompleto. Esto es debido a que ahora sabemos que el tiempo no es absoluto. Es decir, lo que para un observador es un tiempo muy largo, puede no serlo tanto para otro. Así pues cabe preguntarse si es posible extender esta idea y encontrar situaciones en las cuales un observador es capaz de obtener el resultado de una tarea que a otro observador le tomaría un tiempo infinito conocer.

El objetivo de este trabajo es analizar espacios-tiempo donde sea posible realizar estas supertareas haciendo uso de una máquina conocida como Máquina de Turing. Se explorará cuáles son las implicaciones físicas, filosóficas y matemáticas que tienen dichos espacios que se conocen como espacios-tiempo de Malament-Hogarth.

## 1.1. Máquina de Turing

David Hilbert (1862-1943) ideó una serie de 23 problemas de los cuales, hasta la fecha, algunos siguen sin ser resueltos. Uno de esos problemas es conocido como *Entscheidungsproblem*. El cual se traduce del alemán como problema de decisión. El problema trata sobre si es posible encontrar un algoritmo el cual podría ser aplicado a cualquier problema y obtener como respuesta la veracidad o falsedad de dicho problema. Es decir, al aplicarse a cualquier fórmula de cálculo de primer orden éste podría decirnos si es un teorema.

Al Entscheidungsproblem lo describe Sieg como sigue:

Este problema fue considerado como el problema central de la lógica matemática y se suplicaba por una definición rigurosa de un procedimiento mecánico o procedimiento de decisión finita. [7]

Este problema se ha estudiado en el marco de la teoría de la computabilidad, la cual tiene como objetivo estudiar problemas de decisión que pueden o no ser resueltos algorítmicamente. Aquellos problemas que *no* pueden ser resueltos mediante algoritmos se les llama *indecidibles*. Los resultados presentados en

este trabajo tendrán relevancia en dos problemas indecidibles: El Entscheidungsproblem y el problema de la parada o detención, el cual consiste en decidir si un programa con una entrada dada, eventualmente, se detendrá ó continuará corriendo indefinidamente.

Alan Turing ideó una máquina la cual podría resolver este tipo de problemas de manera mecánica. Llamó a esta máquina simplemente como *máquina automática* [8]. Inicialmente, debido a la época, pensó a la computadora simplemente como una persona que seguía una serie de instrucciones dadas y realizaba una tarea. Como estas tareas eran realizadas por personas, debían ser operaciones que un ser humano común y corriente pudiera realizar con lápiz y papel siguiendo una serie de pasos sin necesidad de *imaginación* ni *entendimiento*. Más adelante se le llamó a dicha máquina *Máquina de Turing* y se llevó la analogía a un dispositivo mecánico el cual realiza esa serie de operaciones.

Una máquina de Turing,  $m$ , consta de una cinta infinita, de una fila, la cual está dividida en casillas donde se escribirán las operaciones. El siguiente fragmento es una traducción del artículo escrito por Turing en 1936. Él describe su máquina de la siguiente manera

Podemos comparar a un hombre en el proceso de computar un número real con una máquina la cual es sólo capaz de un número finito de condiciones  $q_1, q_2, \dots, q_k$  las cuales serán llamadas *m-configuraciones*. La máquina estará equipada con una cinta (el análogo al papel) corriendo a través de ella, y dividida en secciones llamadas *casillas*, cada una capaz de soportar el símbolo  $\mathfrak{S}(r)$  el cual está en la máquina. Llamaremos a esta casilla *casilla escaneada*. El símbolo en la casilla escaneada lo llamaremos *símbolo escaneado*. El símbolo escaneado es el único del cual la máquina está, por decir, directamente consciente. Sin embargo, al alterar su *m-configuración* la máquina puede eficazmente recordar algunos de los símbolos los cuales ha escaneado anteriormente. El posible comportamiento de la máquina en cualquier momento está determinado por la *m-configuración*  $q_n$  y el símbolo escaneado  $\mathfrak{S}(r)$ . Al par  $q_n, \mathfrak{S}(r)$  se le llamará *configuración*: así la configuración determina el posible comportamiento de la máquina. [8]

La máquina está equipada con un dispositivo el cual leerá lo que está escrito en la casilla correspondiente. Éste sólo puede leer e interactuar con una única casilla a la vez. Dependiendo del algoritmo que tiene predeterminada la máquina, este dispositivo, al leer lo escrito sobre la casilla lo borrará cambiando por otra cosa escrita o lo dejará intacto. Después, según el algoritmo, el dispositivo se moverá hacia la derecha o hacia la izquierda una sola casilla y repetirá el mismo proceso hasta que al llegar a un estado final, dado por el algoritmo, entonces se detendrá y dará aviso al observador que el cálculo ha finalizado.

Cabe destacar que existen muchas variaciones de la máquina de Turing. Por ejemplo, la cinta es quien se mueve y el dispositivo que lee la cinta está fijo. También se tiene que la cinta no es necesariamente de una sola fila. Pero, sin importar las variaciones en la estructura física del dispositivo, el funcionamiento de la máquina es el mismo. En el presente trabajo sólo trabajaremos con la estructura de la máquina que se describió al principio.

La dificultad del algoritmo dependerá de lo que queremos obtener. Por ejemplo, podemos resolver alguna operación aritmética simple o se puede buscar un contraejemplo para alguna conjetura de teoría de números, donde se requieren de operaciones más complejas.

### 1.1.1. La máquina universal de Turing

De forma breve, una máquina universal de Turing es una máquina de Turing la cual imita a una máquina de Turing.

Una máquina universal de Turing funciona mediante la lectura de la configuración de la máquina que está simulando y la entrada de la cinta de la máquina que imita. Es decir, si está simulando a una máquina de Turing  $m$  con entrada  $n$ , la máquina universal de Turing para esa máquina esta definida por el par  $(m, n)$

Penrose la explica de la siguiente manera:

La idea básica es codificar la lista de instrucciones para una máquina de Turing  $T$  en una cadena de Os y Is que pueden ser representados en una cinta. Esta cinta es usada en la parte inicial de la entrada de una máquina  $U$  de Turing particular llamada máquina universal de Turing la cual actúa como recordatorio de la entrada tal como  $T$  lo hubiera hecho. La máquina de Turing universal es una mímica

universal. ¡La parte inicial de la cinta le da a la máquina universal la información completa que necesita para imitar cualquier máquina  $T$  dada exactamente! [9]

Este concepto fue usado por Turing para poder resolver el Entscheidungsproblem. Pues con ésta demostró que no podía ser posible la existencia de dicho algoritmo. El problema de la parada, o de la detención, también puede ser resuelto haciendo uso del concepto de la máquina de Turing Universal. Pues con ésta se podría imitar una máquina de Turing y observar si efectivamente, para una entrada dada, se detendrá o seguirá corriendo indefinidamente. La demostración de que no se puede resolver el problema se logra por medio de una reducción al absurdo.

El problema con las maquinas de Turing, al igual que con el álgebra, es que son esencialmente temporales. En efecto, si el tiempo es universal y si a la máquina de Turing más eficiente le toma un tiempo comparable con la edad del universo encontrar un contraejemplo a una conjetura falsa, entonces el uso de este tipo de razonamientos para resolver problemas computables directamente es muy poco práctico. Sin embargo, sabemos a través de la Teoría de la Relatividad que el tiempo no es universal.

## 1.2. Supertareas

Una supertarea es la realización de una infinidad de operaciones en un tiempo finito [10].

Existen ejemplos muy interesantes de supertareas ideados por distintos filósofos. Un ejemplo interesante es la lámpara de Thompson [3]. Imaginemos que tenemos una lámpara que en un minuto permanece encendida y al llegar al minuto ésta se apaga. Después de medio minuto se vuelve a prender. Un cuarto de minuto después se vuelve a apagar. Un octavo de minuto después es encendida de nuevo. Y así continúa el proceso encendiendo y apagándose cada  $1/2^n$  minutos. Así, al cabo de 2 minutos se encendió y apagó una infinidad de veces. Una pregunta interesante que surge sobre el comportamiento de esta lámpara es si la lámpara estará encendida o apagada al finalizar los dos minutos. ¿Cómo podríamos saberlo? Si tratamos de pensar qué es lo que pasa cuando están apunto

de transcurrir los dos minutos es muy confuso. Si pensamos que se encuentra apagada casi al llegar a éste tiempo, entonces se volverá a encender y apagar de nuevo una infinidad de veces antes de completar el tiempo. Y si nos "acercamos" aún más al minuto dos, tratando de forzar la imaginación, sigue sucediendo lo mismo una y otra vez. No podemos saber cómo es que se encuentra la lámpara en el minuto dos. Más adelante al hablar de las Máquinas de Turing Aceleradas abordaremos con más detalle éste tipo de comportamientos.

Una cuestión importante sobre la lámpara de Thompson es que no es posible su realización física, pues – como consecuencia de la Teoría de la Relatividad – existe un límite para la velocidad con la que algo puede moverse. Así, si se quisiera realizar una lámpara que funcione de la manera en la que Thompson lo plantea, aunque diseñáramos un dispositivo que funcione a una velocidad increíblemente rápida, el cual encienda y apague la luz de la lámpara, nos encontraríamos con que no es posible realizar ésta supertarea pues después de cierto punto necesitaría funcionar más rápido que la velocidad de la luz para seguir acelerándose y cumplir con lo que se desea. Mas aún, si quitáramos la restricción impuesta por la Física, seguiríamos enfrentando un problema matemático acerca de la convergencia de una sucesión alternante, en este caso no hay un "estado final". Es así que la lámpara de Thompson no es físicamente realizable, pero surgen preguntas interesantes al plantearse este tipo de comportamientos.

Otro ejemplo interesante es la máquina de Platón [5]. Dicha máquina tiene como objetivo resolver una conjetura de teoría de números. Ésta máquina intenta sustituir uno por uno todos los enteros positivos para tratar de encontrar un contraejemplo. Esto lo realiza en 2 segundos, siguiendo un patrón temporal parecido al de la lámpara de Thompson. En el primer segundo intenta con el número "1" y comprueba si es cierta o no para éste. Le queda un segundo. Para el siguiente medio segundo lo hace para el número "2". Luego, a la mitad del tiempo restante prueba para el "3". Y así sucesivamente sigue probando con todos los enteros positivos de forma que al terminar el tiempo habrá tratado con todos. Así, si no encontró un contraejemplo queda demostrada la conjetura, y en caso de que haya encontrado un contraejemplo se comprobó que es falsa.

Notemos que esta máquina, conceptualmente, es parecida a la máquina de Turing. Pero en un tiempo finito puede resolver un problema que requiere una infinidad de tiempo. A este tipo de máquinas se les llama máquinas aceleradas

(cf. sección 1.2.1, abajo).

Es fácil que el lector se pregunte entonces para qué nos sirve pensar en las supertareas si su realización física al parecer no es posible. Pero no hay que caer en ese error, pues las ciencias, en gran parte, se han fundamentado y han brotado ramas de la ciencia que nacieron a partir de hacerse preguntas que no podemos resolver. Pero el simplemente pensarlas, analizarlas y entenderlas nos han abierto muchos caminos para comprender nuestra realidad.

En el presente trabajo supondremos que el tiempo no es absoluto, sino que esta intrínsecamente ligado al espacio, formando así un solo ente al que llamaremos *espacio-tiempo*. Más adelante mostraremos ejemplos de espacios-tiempo donde la realización de supertareas es posible.

### 1.2.1. Máquina de Turing acelerada (MTA)

**Definición 1.2.1** (Máquina de Turing Acelerada). *Una máquina de Turing acelerada (MTA) [11] es una máquina que puede realizar una tarea que requiere una infinidad de operaciones en un tiempo finito. Es decir, realiza una supertarea.*

Esto se logra haciendo que después de realizar una operación tarde menos tiempo para realizar la siguiente, el que procede sea aún más corto y así sucesivamente de forma que el tiempo que tarda en realizar cada operación es menor al anterior. Un ejemplo sería que la cinta de la máquina, la cual está en movimiento, acelere de forma que el dispositivo pueda realizar una supertarea. Pero se debe hacer énfasis en algo, una MTA no es más que una máquina de Turing común y corriente, la cual sufre de una aceleración para realizar su objetivo en un tipo muy corto.

Copeland [11] fue el primero en introducir este concepto. Y dio un ejemplo de una MTA la cual puede computar la función de parada. La función de parada acepta como argumento al par  $(m, n)$  y regresa un "1" si la  $m$ -ésima máquina de Turing se detiene en la entrada  $n$ , y regresa a "0" de lo contrario. Esta función es un ejemplo de algo que no puede ser computable por una máquina universal de Turing. Y de hecho, en caso de ser cierta la tesis de Church-Turing, explicada más adelante, dicha función no puede ser computable por medio de ningún algoritmo.

Para poder resolver el problema de la computabilidad de la función de detención, Copeland ideó una máquina universal de Turing acelerada (MUTA). Así

como una máquina universal de Turing cualquiera, ésta puede computar todo lo que sea computable por una máquina de Turing, pero sufre de una aceleración así como la MTA.

### 1.2.2. Máquina Universal de Turing Acelerada (MUTA)

La *MUTA* ideada para resolver el problema de la parada funciona de la siguiente forma [11]. El programa de la máquina de Turing es finito, por lo que podemos codificar el código en una fila de 0's y 1's y así podemos alimentar el código que está pareado con todos los datos binarios como entrada de la máquina universal [10]. Así, la *MUTA* puede escanear este código y simular las operaciones que realizaría la máquina de Turing,  $m$ , a la cual está imitando. Entonces cuando tenga un par de argumentos  $(m, n)$ , como entrada, la *MUTA* simula las operaciones de la máquina de Turing en la entrada  $n$ , siguiendo todos sus pasos. Y revisa después de cada operación que simula si la máquina,  $m$ , se detuvo. Para poder decir si se detiene o no la máquina de Turing, tiene como instrucción que en cierta celda en la cinta se escriba un "0", lo que significa que no se detiene nunca. Y si al realizar la simulación, la máquina se detiene, la *MUTA* cambia el "0" por un "1" y así avisa al programador que efectivamente la máquina de Turing simulada se detuvo y termina su proceso. En caso que no se detenga el "0" se mantiene sin ser modificado y sigue simulando las operaciones de  $m$ . Al ser una máquina que realiza una supertarea es, en mi opinión, lo que Copeland estaba buscando con ésta máquina. Pues al ser una máquina acelerada no debemos esperar mucho tiempo a que simule todas y cada una de las operaciones de la máquina de Turing, pues podemos hacer que en un tiempo finito realice una infinidad de operaciones y ver si se detuvo o no la máquina simulada, todo en un tiempo muy corto.

Hay que notar algo muy importante, la *MUTA* no computa la función de detención [10]. Simula a una máquina de Turing la cual computa la función y avisa cambiando el valor de "0" de la celda por un "1" si la máquina simulada se detiene. Pero como tal ésta no la computa. Es muy importante hacer esta aclaración, pues si realmente la *MUTA* pudiera computar la función de detención iría en contra de la tesis de Church-Turing.

### 1.2.3. Hipercomputabilidad

**Definición 1.2.2** (Hipercomputadora). *Una hipercomputadora es cualquier máquina que procese información, puede ser sólo la noción de ella o la máquina físicamente, la cual es capaz de realizar más trabajo que el que un ser humano podría realizar usando simplemente su memoria [11].*

La hipercomputabilidad tiene como uno de sus objetivos argumentar la existencia de máquinas que puedan computar funciones no computables. Normalmente algunos autores que debaten sobre la no existencia de estos dispositivos se basan en la idea de infinitos encajados, o en la idea de una máquina que su funcionamiento no es descrito de forma clara. Estos dos conceptos se conocen como el argumento de infinitos encajados y el argumento de la vaguedad física [12].

Hasta ahora se han descrito distintos modelos de máquinas de Turing o de dispositivos los cuales, pareciera, que nos acercan cada vez más a una respuesta sobre si una máquina podría resolver o no el problema de la parada o si algún dispositivo nos ayudaría a encontrar un contraejemplo para alguna conjetura matemática en un tiempo propio finito y suficientemente corto para que el mismo observador que configura la máquina pueda saber la respuesta.

Para dar un panorama hacia donde se está dirigiendo este trabajo, consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que un observador, ya sea un matemático o alguien con la curiosidad de saber si una conjetura de teoría de números es cierta o no, configura una máquina para buscar una respuesta. Este observador sólo cuenta con una cantidad finita de tiempo, es claro que en algún momento va a morir. ¿Será posible modificar la topología del espacio y el tiempo de forma que, en un tiempo finito pueda la computadora realizar una infinidad de cálculos y darle una respuesta al observador? La respuesta es que si. Pero como todo, se tendrá que pagar algún precio para poder lograrlo. En los siguientes capítulos se realizarán propuestas de modificaciones en la topología del espacio-tiempo y las implicaciones que estas tendrán en el determinismo y la causalidad de los eventos.



### 1.3. Principios de la Relatividad Especial

La *Relatividad Especial* surgió de observar que la velocidad de la luz en el vacío es la misma sin importar el sistema de referencia inercial y de suponer todas las consecuencias asociadas al principio de relatividad de Galileo, i.e. que ningún observador inercial puede distinguir el reposo del movimiento a velocidad uniforme.

La Teoría de la Relatividad Especial (TRE) elimina la posibilidad que el tiempo y el espacio sean absolutos. Esto implica que las mediciones asociadas a la distancia entre dos puntos o el tiempo entre dos sucesos pueden ser distintas para distintos observadores. Sin embargo, como veremos más adelante, es posible encontrar cantidades en las que todos los observadores pueden estar de acuerdo. En adelante consideraremos la unión del espacio y el tiempo en un solo objeto matemático al que llamaremos *espacio-tiempo*.

Tenemos los siguientes postulados dentro de la TRE:

1. Principio especial de la relatividad: Las leyes de la física son las mismas sin importar el sistema de referencia inercial en donde se encuentre.
2. Invariancia de la velocidad de la luz: La velocidad de la luz en el vacío es constante. Es una constante universal representada por la letra  $c$ . Esta constante es independiente del movimiento de la fuente de la luz.

El primero de los postulados es un *principio de simetría*. Nos dice que las leyes de la física son iguales para cualquier observador, sea cual sea su marco de referencia inercial. Dicho de otro modo, existe un grupo de transformaciones del espacio y el tiempo que no cambian la forma de las leyes de la física entre marcos de referencia que satisfacen alguna propiedad determinada. Galileo definió un marco de referencia inercial como aquel que tiene un movimiento sin cambios de velocidad o dirección. Esto llevó a Galileo a concluir que no se puede distinguir la física de un estado en movimiento uniforme a uno que se encuentra en reposo. Él usaba un ejemplo conocido ahora como el bote de Galileo. Según la traducción de Stillman Drake, Galileo decía lo siguiente:

Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros

pequeños animales voladores. Colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma. Haced que el barco vaya con velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro. Las gotas caerán en el recipiente inferior sin desviarse hacia la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire. Las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si se cansaran de seguir el curso del barco. [13]

Lo que Galileo quería hacer ver en este texto es que las leyes de la física no cambian si el sistema de referencia se encuentra en movimiento uniforme.

Llevando esta analogía a la Tierra es que podemos entender porqué la humanidad tardó tantos años en descubrir que la Tierra está girando sobre su eje y que giramos alrededor del Sol. Pues para nosotros la Tierra, de forma local, es un marco de referencia inercial según la definición de Galileo. Ahora sabemos que efectivamente estamos girando y moviéndonos a grandes velocidades a través del espacio. Un ejemplo formulado por Norton [14], donde queda clara esta situación, es cuando un atleta corre en una pista de atletismo ovalada. La pista al ser tan grande, respecto al tamaño del atleta, su curvatura no es percibida por el corredor de forma significativa, pues para él la pista es prácticamente recta debido a que para su marco de referencia los intervalos que recorre son, de forma local, rectos.

De hecho cada instante que pasa estamos en un lugar diferente del espacio, pues la Tierra no sólo está rotando sobre su eje, está girando alrededor del Sol, el sistema solar está girando alrededor del centro de la galaxia, la galaxia se está moviendo a través del espacio. ¡Estamos moviéndonos todo el tiempo en el espacio! Y ni siquiera lo notamos. Pero al ser uniformes y locales todos estos movimientos es que no nos percatamos de ellos [13]. También por lo que podemos considerar a la Tierra como un marco de referencia localmente uniforme es porque las distancias que podemos medir y los tiempos que normalmente usamos al realizar un experimento son muy pequeñas comparadas con las grandes velocidades a las que se mueve nuestro planeta y con las distancias que ésta recorre. Y sólo en tiempos y medidas considerablemente mayores podemos observar el

efecto del movimiento de la Tierra. Un ejemplo clásico es el péndulo de Foucault.

Esto nos lleva a concluir que no importa si estamos en un tren en movimiento a velocidad constante o en un avión viajando cuando no está sufriendo una aceleración. Las leyes de la física serán las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

Respecto al segundo postulado, éste nos definirá una forma invariante de medir magnitudes para todos los observadores. Ésta será la motivación para introducir un *tensor métrico indefinido* sobre el espacio-tiempo.

## 1.4. Principios de la Relatividad General

La relatividad general, como se puede intuir a partir de su nombre, es la generalización de la Teoría de la Relatividad Especial. En la TRE se considera un espacio plano, donde la trayectoria que siguen las partículas es recta. En la Teoría de la Relatividad General (TRG) se considera que el espacio puede ser curvo y las trayectorias que siguen las partículas están determinadas por caminos no necesariamente rectos conocidos como geodésicas. Las partículas ahora se ven afectadas por la gravedad, por ende sus trayectorias también.

Esta generalización se encuentra de forma más clara en el principio de equivalencia.

Los principios generales que definen a esta teoría son los siguientes:

1. Principio general de covariancia: En cualquier sistema de coordenadas las leyes de la física son las mismas.
2. Principio de equivalencia o invariancia de Lorentz: Las leyes de la TRE se aplican localmente de igual manera a todos los observadores inerciales.
3. La curvatura del espacio tiempo: Es lo que se observa como resultado de la presencia de materia en el campo gravitacional. Pues la geometría del espacio tiempo se modifica con la densidad de dicha materia. Es así que las partículas en movimiento libre inercial siguen una trayectoria geodésica.

La visión de Einstein considera que los movimientos inerciales son aquellos que siguen las partículas cuando las fuerzas totales, que no tienen un origen

gravitacional, que actúan sobre ellas son cero. Es decir, están en caída libre. Algo que para la visión de Newton es revolucionario, pues Einstein no consideraba que algo estático tuviera un movimiento inercial, pues se encontraría afectado por la fuerza gravitacional.

#### 1.4.1. Historia de la TRG

Antes de Descartes se consideraba que las reglas de la naturaleza estaban regidas por fuerzas que influenciaban a los objetos desde la distancia [15]. Descartes modificó esta idea. Para él, las interacciones físicas sólo podían suceder si había contacto entre los objetos.

Una generación después Newton introdujo la idea que la gravedad podía violar la idea que tenía Descartes. Para Newton esta fuerza era instantánea y podía actuar a distancia. Durante mucho tiempo por el hecho que esto iba en contra de lo que Descartes decía, Newton se sintió disgustado por su propia idea. Pero mientras pasó el tiempo y comenzaron a descubrir la certeza de esta nueva teoría, poco a poco se fue difuminando y perdiendo el desprecio del mismo Newton.

Dos siglos después Faraday introdujo el concepto de campo. Para Faraday un campo era un conjunto de líneas que conformaban el espacio. Cada línea comienza y termina en una carga, si no hay una la línea se cierra formando un “loop”. Fue Maxwell quien formalizó las ideas de Faraday con la teoría del campo electromagnético, cuya consecuencia fundamental es que la interacción no es instantánea, sino que ocurre en un tiempo finito. En la teoría del campo electromagnético una carga  $q_1$  que se encuentra a una distancia  $d$  de una carga  $q_2$ , produce una fuerza en un tiempo  $t = \frac{d}{c}$  en afectar a  $q_2$ .

Einstein, a partir de la idea de Maxwell, dedujo que la gravedad debía de estar regida por una teoría de campos. Por lo que la gravedad tampoco actuaba de manera instantánea. Así fue que Einstein le dio vida a lo que hoy conocemos como Teoría de la Relatividad General.

Un problema con el que Einstein se enfrentó fue con la noción de espacio y movimiento absoluto que Newton utilizaba. Antes Newton consideraba que el espacio era absoluto. Los movimientos de los objetos eran, para él, la interacción de éstos con un espacio absoluto que los rodea. Para Newton el espacio era una

”entidad”. Dentro de la misma idea del espacio absoluto, Newton tenía la misma noción sobre el movimiento. Como el espacio era una entidad, el movimiento se puede definir como el desplazamiento de un punto en el espacio a otro. Así es que para Newton el concepto de movimiento también era absoluto.

Para explicar esto Newton usaba un ejemplo, conocido hoy como la cubeta de Newton. Newton decía que si se tiene una cubeta llena de agua colgada con una cuerda larga y se hace girar la cubeta, primero sólo la cubeta girará y el agua se mantendrá estática. Una vez que la fricción de la cubeta comienza a afectar el agua, el agua empieza a rotar junto con la cubeta y ahora la superficie del agua ya no plana como lo era antes sino cóncava.

Newton argumentaba que la rotación del agua es respecto al espacio absoluto que la rodea. Decía que la concavidad del agua era el efecto del movimiento absoluto de la misma respecto al espacio absoluto, no a los cuerpos que la rodean.

Aunque el argumento anterior parezca convincente, la explicación a dicho fenómeno llegó tiempo después con la TRG. El agua no está rotando respecto al espacio absoluto, está rotando respecto al campo gravitacional que la rodea. Por lo que en efecto, el agua está rotando respecto a una entidad física, pero no como Newton lo pensaba.

La dinámica de los cuerpos está regida por la interacción de los objetos con el campo gravitacional. Esto lo explicó Einstein y en su publicación ”On the Electrodynamics of Moving Bodies” [16] introdujo el principio de relatividad. Fue en ese trabajo donde aseguró que las leyes de la mecánica, electrodinámica y óptica mantienen su forma en todos los marcos inerciales [14]. Los principios de la TRE y la TRG han sido verificados con asombrosa precisión a lo largo de los últimos 100 años. De este modo, la idea de Newton donde había que considerar un espacio inmóvil y un tiempo absoluto fue abandonada.

## 2

# Tesis de Church-Turing

Hemos hablado de supertareas y sobre algunos conceptos de computabilidad que nos han ayudado a comprender el camino que se seguirá en este trabajo.

En el presente capítulo se presentarán algunas definiciones y tesis propuestas por el mismo Turing y algunos autores que han trabajado sobre este tipo de problemas. Se discutirá un poco sobre las posibilidades que se tienen respecto a problemas incomputables y se abordarán algunos problemas que podrían presentar al tratar de realizar una supertarea con un dispositivo como una máquina de Turing.

**Definición 2.0.1** (Tesis de Church-Turing). *Cualquier dispositivo o experimento físicamente realizable diseñado por cualquier civilización futura debe de ser simulable, siempre, por una máquina de Turing. [17].*

### 2.1. Tesis de Turing

**Tesis 2.1.1** (Tesis de Turing). *Aquello que es efectivamente calculable es computable.*

**Definición 2.1.1** (Función efectivamente calculable). *Una función  $f : A \rightarrow B$  es efectivamente calculable si existe un procedimiento efectivo  $L$  que nos permita, dado cualquier  $a \in A$  obtener el valor de  $f(a)$ .*

**Definición 2.1.2** (Número computable). *Los números computables se definen*

como los números reales tales que su expresión decimal es calculable mediante un número finito de operaciones. Es decir, puede ser escrito por una máquina [8].

### 2.1.1. ¿Es realmente la Tesis de Turing una tesis?

La palabra tesis viene del griego "thêsis" que significa "algo que se propone". Se refiere a algo que puede ser puesto en debate y que se mantiene por razonamiento. [18]

Una tesis no es equivalente a un teorema o una proposición que se puede demostrar. Entonces por qué si Turing demostró su "tesis" es que se sigue llamando tesis. Para poder responder esto hay que conocer un poco de la historia detrás de ésta. No entraremos mucho en detalle sobre esta cuestión, sólo se mencionará de forma breve.

El hecho de si el trabajo de Turing era o no una tesis fue controversial en su época pues para algunos, como Gödel, Gandy o Church, era claro que Turing la había demostrado [18]. Pero para otros, como Kleene, no era tan evidente. Es así que Kleene en uno de sus libros otorgó el nombre de tesis al trabajo de Turing, calificándolo como una hipótesis debatible. Gandy defendió el trabajo de Turing diciendo que de hecho se está probando un teorema.

## 2.2. Tesis de Church-Turing (PhCT)

**Tesis 2.2.1** (Tesis de Church-Turing). *Una función de enteros positivos es efectivamente calculable si y sólo si es recursiva. Se dice que un problema de decisión es recursivamente resoluble si existe un procedimiento efectivo, es decir un algoritmo, para resolver el problema de decisión [19].*

La PhCT fue ideada y aceptada alrededor de los años 30. Ésta tuvo una gran importancia para la elaboración de los fundamentos en la computación teórica, lógica y otras áreas relacionadas. Es una equivalencia entre ambas tesis, la tesis de Church y la de Turing. Al restringir ambas tesis a funciones de enteros positivos [12] es que se obtiene la equivalencia entre ambas y se tiene la tesis de Church-Turing.

Hoy en día lo que en esos años era la física en pleno auge, para nosotros es ahora sentido común. Es por eso que muchos pensadores consideran que PhCT

es una tesis basada en matemáticas y sentido común.

De hecho Turing siempre tuvo la idea que algo lo cual pudiera ser calculable es computable. Turing nunca estuvo muy interesado en la parte de computabilidad como tal. Él se refería más bien a lo que la mente del ser humano podía calcular, y eso era su noción de "computabilidad". Es por eso que las nociones de Turing son un tanto intuitivas, pues de cierta forma están ligadas a lo que está al alcance de la mente humana.

### 2.3. Realización de una hipercomputadora

Una máquina en el sentido de Turing, como se definió anteriormente, es un dispositivo que tiene un número finito de estados, tiene una cinta lineal la cual está dividida en casillas, es determinista y opera de forma de secuencia, y Turing la comparaba con "un humano en el proceso de computar un número real [si es lo que es] sólo capaz de un número finito de condiciones."

Éstas pueden computar funciones las cuales resuelven problemas que rebasan el poder de una máquina universal de Turing.

El enfoque de Turing siempre fue más hacia lo que un ser humano podía realizar, pues en su época la noción de computadora era muy diferente a la que tenemos hoy en día.

**Tesis 2.3.1** (Tesis T). *Lo que puede ser calculado por un ser humano abstracto trabajando en una rutina es computable [por una máquina de Turing]*

Esta tesis no puede ser demostrada al no tener un fundamento matemático, pero una demostración informal para Turing se basaba en argumentos intuitivos [8]:

1. Un recurso directo es la intuición.
2. Una demostración de la equivalencia de dos definiciones (en caso que la nueva definición tenga un recurso mayor a la intuición).
3. Dar ejemplos de una gran cantidad de clases de números que fueran computables.

Si es que el Entscheidungsproblem tenía solución, para Turing, debía de poder ser computado por un ser humano. Así es que sus argumentos están basados en



la capacidad de una persona. Por ejemplo, para el primer argumento se toma en cuenta que un humano, en nuestro caso una máquina, tiene una capacidad limitada para recordar y distinguir un número de símbolos finito en un momento dado.

Las limitaciones con las que se encontraba el ser humano para poder computar fueron formalizadas por Sieg [7]. Supone a un computador como una persona que realiza las operaciones.

1. Estar acotada. Es decir, un computador puede reconocer inmediatamente únicamente un número finito de configuraciones.
2. Localidad. Un computador puede modificar sólo un número finito de configuraciones por vez.

Gandy fue quien logró unir las capacidades de abstracción humana con lo que una computadora podría realizar. Para esto tomó en cuenta dos condiciones que las leyes de la física tienen y se hacen ciertas restricciones. Una de ellas es que hay un límite inferior para las dimensiones espaciales. Y la otra es que nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz.

### 2.3.1. Tesis de Gandy

Gandy propuso la siguiente tesis:

**Tesis 2.3.2** (Tesis M). *Lo que puede ser calculado por una computadora es computable.*

De nuevo, no existe una prueba para la tesis anterior al no ser un argumento matemático [20]. Pero su sustento se basa en las restricciones que Gandy tenía para dispositivo mecánico y sus posibilidades físicas basándose en que la velocidad de la luz tiene un límite y que las medidas de un dispositivo tienen un límite inferior.

Tomaremos dispositivos como sinónimo de máquina, cualquier dispositivo que cumpla con los principios de los axiomas siguientes se considera una máquina de Gandy. Éstas consisten en clases de estados con una operación de transición. Éstas están dadas por operaciones restringidas de estado en estado, llamadas

”operaciones estructurales”. Los estados se representan por subclases de conjuntos finitos hereditarios (FH) construidos por un conjunto infinito de átomos, los cuales conforman a la máquina, cerrados bajo estructuras isomorfas. Dichas subclases se conocen como ”clases estructurales”. Aran Nayebi aproxima los cuatro principios de Gandy de la siguiente manera:

1. La Forma de Descripción. Una máquina de Gandy  $M$  puede ser descrita por el par  $\langle S, F \rangle$ , donde  $S$  es una clase estructural y  $F$  una operación de  $S$  en  $S$ . Así, si  $x_0 \in S$  es un estado inicial de  $M$ , se tiene que  $F(x_0), F(F(x_0)), \dots$  son los estados subsecuentes.
2. El Principio de la Limitación de Jerarquía. El rango del conjunto teórico de los estados está acotado. Es decir, cada estado de  $S$  puede estar armado por partes, y esas partes de otras partes, etc., pero la complejidad de la estructura está acotada.
3. Principio de Armado Único. Cada estado en  $S$  puede ser armado por partes básicas de un tamaño acotado, y existe una única forma de juntarlos.
4. Principio de Causalidad Local. Para cualquier estado  $x \in S$ ,  $F(x)$  es armado de partes acotadas de  $x$ . La superposición se incluye en este principio.

Así, con lo anterior, Gandy ”probó” el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.1.** *Lo que puede ser calculado por un dispositivo que satisfaga los principios I - IV es computable.*

Y así llega a una versión más definitiva de la Tesis  $M$ .

**Tesis 2.3.3** (Tesis P). *Un dispositivo determinista discreto satisface los principios I - IV.*

La diferencia entre una máquina de Gandy y una de Turing yace en que la de Turing puede modificar únicamente una parte limitada del estado, mientras que la de Gandy no, pues él considera las máquinas que trabajan paralelamente dentro de sus opciones.

### 2.3.2. Realización física de una hipercomputadora

Piccinini describió la limitación de usabilidad de la siguiente forma [21]:

**Definición 2.3.1** (Limitación de usabilidad). *Si un proceso físico es una computación, éste puede ser usado por un observador finito para obtener los resultados deseados de una función.*

Por observador finito Piccinini se refería a un ser inteligente con capacidades con las mismas limitaciones que las humanas. Por lo que en sí esta limitación a lo que se refiere es que la información pueda ser leída e interpretada por, digamos, el ser humano.

Piccinini formuló 6 sub-limitaciones para poder entender lo que significa que un proceso físico sea usable para un observador finito. Nayebi los resume de la siguiente forma:

1. Entradas y salidas legibles. Deben de poder ser leídas las entradas y salidas; en el sentido que éstas pueden ser medidas con el grado de aproximación deseado.
2. Regla del Proceso Independiente. En una computación genuina, el problema que está siendo resuelto debe de estar definido independientemente del proceso para resolverlo. Esta sub-limitación implica que la modelación de un sistema físico usando otro no es suficiente para la computación.
3. Repetibilidad. Para un proceso físico en una computación genuina, debe de poder ser reproducido por un observador finito competente que quiera obtener sus resultados, en el sentido que la misma secuencia de estados ocurre tanto en el mismo sistema físico en diferentes tiempos o en dos sistemas suficientemente similares.
4. Configurabilidad. Un sistema de computación ordinario puede computar cualquier valor para una o más funciones, dentro de sus límites. Es más, un sistema es configurable si un usuario puede elegir qué valor de la función va a ser generada en dicho caso.
5. Constructibilidad física. Si un sistema no puede ser físicamente construido, puede ser considerado que realiza la noción de cómputo, pero son irrelevantes para fines físicos.

6. Confiabilidad. La máquina debe cumplir que su tiempo de funcionamiento es suficiente como para dar resultados aunque sea alguna vez. Una computadora que no puede completar su proceso no vale la pena ser construida.

### 2.3.3. Máquina de Turing Acelerada (MTA)

**Definición 2.3.2** (División temporal de Russell-Blake-Weyl). *A la división del tiempo en la cual se sigue el patrón de realizar una acción en la mitad del tiempo que llevó el paso anterior, realizando esta partición una infinidad de veces en un tiempo finito, se le llama división temporal de Russell-Blake-Weyl.*

Anteriormente se dio una definición para la Máquina de Turing Acelerada. Se dará una definición análoga, pero ahora de manera más precisa, haciendo uso del patrón temporal mencionado anteriormente.

**Definición 2.3.3** (Máquina de Turing Acelerada). *Una Máquina de Turing Acelerada (MTA) es una máquina de Turing la cual realiza sus operaciones con el patrón de tiempo de Russell-Blake-Weyl [11].*

Es importante hacer una aclaración. En los libros se suele utilizar el término de Máquina de Turing Acelerada para dos tipos de máquinas diferentes. La diferencia entre ambas máquinas está en que una incluye el final del segundo estado en la especificación de la máquina y la otra no. Nosotros hablaremos del tipo de máquina que no incluye el final del segundo estado en su especificación.

Llamemos a nuestra máquina de Turing acelerada  $H$ . La especificación de  $H$  está sólo definida para el intervalo semi-abierto de tiempo  $[0, 2)$ . No podemos saber qué pasa en el momento 2, ni lo que pasa después. Esto debido a la configuración de nuestra máquina. El problema para saber qué sucede en ese momento es el mismo con el que se encuentra la lámpara de Thompson. Ocurre lo mismo con nuestra máquina realizando cualquier operación. No podemos conocer el estado final de ésta pues deberíamos de conocer cuál fue su última operación, por ende deberíamos de conocer la anterior y así sucesivamente.

Para las máquinas que incluyen su estado final, se tiene que el segundo momento está definido por la especificación de la máquina. Este tipo de máquinas se definieron por primera vez de forma explícita por Steinhart. Él decía que una MTA, de éste tipo, es una máquina de Turing clásica con un límite incluido. A

éstas le llamaremos  $MTA^+$ . Y la denotaremos como  $H^+$ . La manera en como Hamkins explica la salida de la máquina  $MTA^+$  es que en el estado límite el valor que se encontrará en la casilla será el límite de los estados anteriores.

Hay que resaltar algo, las máquinas  $MTA^+$  no son máquinas de Turing pues no tienen la estructura computacional de una máquina de Turing. El final del estado en el segundo momento no es parte de la especificación de una máquina de Turing. Una máquina de Turing en cada estado está determinada por la configuración de dicho estado. Turing lo explicaba de la siguiente manera: El posible comportamiento de la máquina en cualquier momento está determinado por la  $m$ -configuración  $q_n$  y el símbolo escaneado  $\mathcal{C}(r)$  [8].

Así, la máquina con el límite agregado no está completamente determinada por la configuración. Y debido a que la máquina en el estado final no está determinada por su estado anterior, tampoco está determinada la configuración en el límite. Esto se debe a que existen una infinidad de estados anteriores al estado final entre cualquier estado anterior al mismo y el final. Entonces, aunque para todos los estados la configuración de la máquina está determinada por los estados anteriores, esto no sucede para el estado límite. Por lo que  $H^+$  no es una máquina de Turing. Por lo que las máquinas de Turing aceleradas que tienen su límite incluido no cuentan como tal con la estructura de una máquina de Turing y la aceleración con la que cuentan no deriva en su poder hiper-computacional.

Recordemos que  $H$  es una máquina de Turing, sólo que su tiempo de acción es finito y sigue el patrón temporal que definimos anteriormente. Pero nos encontramos con algunos problemas con dicha máquina. El primero es que si suponemos que  $H$  puede resolver el problema de la parada nos encontraremos con una contradicción. Y el segundo es que en caso de tener un problema computable, cómo es que el observador podría leer el resultado sin morir en el intento. Ambos problemas se abordarán a continuación.

## 2.4. ¿Una MTA puede computar lo incomputable?

Una super tarea no incrementa el poder computacional, pues aunque éstas puedan computar más allá del límite de Turing, el poder computacional está relacionado con su estructura computacional. Esto no quiere decir que éstas no sean hiper-computadoras, sino que el hecho que puedan realizar una supertarea

está ligado con la estructura de la misma [10].

El poder computacional se refiere a la clase de funciones que pueden ser computadas por un dispositivo.

El poder computacional de esta máquina de Turing no rebasa el poder de una máquina de Turing que no realiza una supertarea.

Hermann Weyl, en 1927, consideró una máquina que realizaba una secuencia infinita de operaciones diferentes en un tiempo finito. La máquina, que no especifica cómo es su estructura, obtiene el primer resultado en medio minuto, luego encuentra el segundo resultado en el siguiente cuarto de minuto y así continua realizando las operaciones en la mitad del tiempo que le tomó la acción anterior. Así, en dos minutos pudo realizar una infinidad de operaciones y podría resolver algún problema de decisión cuya respuesta sea si o no.

La primera persona en proponer este tipo de "división" temporal para realizar una actividad fue Bertrand Russell en 1914 [11]. En 1926 Ralph Blake propuso la misma idea del patrón del tiempo que Russell y Weyl, pero él propuso aprovechar esta idea para poder resolver un problema matemático.

#### 2.4.1. Paradoja del problema de la parada

La paradoja sobre si una MTA puede resolver el problema de la parada es la siguiente. Si  $H$  puede computar el problema de la parada, esta contradiciendo el "Teorema de la parada" el cual nos dice que ninguna máquina de Turing puede computarlo.

Sin importar que nuestra máquina puede realizar una supertarea y arrojar un resultado en un tiempo finito, no deja de ser una máquina de Turing y continúa cumpliendo con el "Teorema de la parada".

Para resolver dicho problema algunos trataron de argumentar que una MTA no era una máquina de Turing pues no operaba en intervalos de tiempo discretos [22]. Pero este no es un buen argumento pues aunque podría parecer que las operaciones dejan de realizarse de forma discreta debido a la aceleración, esto no sucede pues la máquina sigue operando de forma discreta.

Otro argumento con el que se trata de resolver este problema es decir que en general una MTA no puede resolver el problema de la parada. Es muy fácil creer que por que puede realizar una infinidad de acciones en un tiempo finito, al final

nos va a arrojar un resultado incuestionable. Pero no necesariamente es cierto esto. Según la definición de una máquina de Turing, una máquina de este tipo es aquella que computa valores definidos de una función  $f$  si es que la máquina comenzó con una entrada  $x$  y alcanza un estado final con el valor  $f(x)$ . Es decir, para una entrada dada  $x$  y una función  $f$  determinada, en la casilla donde se marca el estado de salida se puede leer el resultado  $f(x)$  cuando la máquina llega a su estado final y para. Así, si la máquina nunca para y no muestra el estado final, la computadora sigue corriendo y realizando una infinidad de pasos. Y aunque en un tiempo finito se detendrá  $H$  no necesariamente significa que haya alcanzado un estado final y parado. Por lo que  $H$  no computa el problema de la parada.

Supongamos que  $H$  está definida con una función  $g$  la cual arroja un "1" si en su estado final si la máquina para y un "0" si no lo hace. Como  $H$  nunca alcanza ese estado final, nunca marca ni "0" ni "1". Por lo que el hecho que nuestra máquina de Turing esté acelerada no tiene ninguna diferencia computacional para tratar de resolver el problema de la parada en contraste con una máquina de Turing no acelerada.

Una tercera forma para resolver este problema está relacionado con la computabilidad externa e interna. Primero debemos comprender a lo que cada una de estas nuevas definiciones se refiere.

**Definición 2.4.1** (Función computable en el sentido interno). *Una función  $f$  es computable en el sentido interno si puede producir  $f(n)$  para cualquier argumento  $n$  en el dominio, indicando que el valor  $f(n)$  fue producido parando una vez que éste se tiene.*

La única restricción que se tiene para la computabilidad interna, es que para indicar que el valor ha sido obtenido no se puede contar con algún dispositivo que sea externo a la especificación de la máquina.

**Definición 2.4.2** (Función computable en el sentido externo). *Una función  $f$  es computable en el sentido externo si puede producir  $f(n)$  para cualquier argumento  $n$  en el dominio, al hacer o fallar en hacer alguna acción preespecificada durante un intervalo de tiempo preespecificado que está delimitado con referencia a la actividad de alguna entidad externa a la máquina.*

Para la computabilidad externa la máquina sólo debe de producir  $f(n)$  y marcarlo, no importa cuando lo haga, mientras lo haga en un número finito de pasos. Es sólo así que  $H$  puede computar la función de la parada, pero sólo en el sentido externo. El valor de la función es "1" si hay un corrimiento en el contenido de la casilla de salida antes del final del segundo momento. Y si no hay el valor de la función es "0".

#### 2.4.2. Interpretación del resultado

Supongamos que nuestra máquina logra resolver el problema de la parada. Surge la pregunta de cómo es que el observador puede leer el resultado final.

Uno pensaría que simplemente saca el papel de la máquina y lee "0" ó "1", pero en realidad no se especifica qué hace la máquina una vez que tiene el producto de la función. Éste podría desaparecer una vez que se tenga y el observador nunca podría leer el resultado. Pero imaginemos que la tinta se mantiene en el papel. ¿Qué importancia tiene la física de donde se encuentra la máquina para que aunque se mantenga el resultado final, el observador en verdad pueda leerlo? Notemos que éste tipo de cuestiones ya no se encuentran dentro de la especificación de la máquina, y nos encontramos con problemas que pueden ser tan complicados como nos los proponemos. Podemos imaginar que la máquina se encuentra muy lejana al observador y ésta le envía una señal desde lo lejos. Pero, ¿qué pasa si el observador se encuentra en alguna región del espacio tiempo como un agujero negro? La señal de la máquina podría quemarlo y éste morir. Pues aumentaría cada vez más la frecuencia de la señal al entrar al agujero negro, por lo que al llegar al observador llegaría en forma de calor y lo quemaría. Así, éste moriría y, claramente, no podría leer el resultado.

Ya que contamos con suficientes bases computacionales, en el siguiente capítulo nos concentraremos en explicar todo lo necesario para comprender el espacio-tiempo, para después poder hacer las modificaciones necesarias en su topología para la realización de una supertarea.





# 3

## Espacio-Tiempo

En este trabajo consideramos las siguientes hipótesis:

1. El espacio y el tiempo conforman una variedad de Hausdorff de cuatro dimensiones reales, diferenciable y orientable denotada por  $\mathcal{M}$ . A los puntos de  $\mathcal{M}$  los llamamos *eventos*.
2. Todo proceso dinámico es una solución a un conjunto de ecuaciones diferenciales definidas sobre  $\mathcal{M}$ .
3. [Principio de Relatividad] Las leyes de la Física definen un producto interior único e invariante en cada punto de  $\mathcal{M}$  para todos los *observadores*, i.e. define un tensor métrico  $g$  sobre  $\mathcal{M}$  (cf. Definiciones 3.1.1 y 3.1.3, abajo).

Al par  $(\mathcal{M}, g)$  le llamamos *espacio-tiempo*.

### 3.1. Causalidad y cronología

Las definiciones y proposiciones en esta sección están basadas principalmente en [1].

**Definición 3.1.1** (Tensor métrico). *Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable. Un tensor métrico sobre  $\mathcal{M}$  es un mapeo bilineal y diferenciable*

$$g : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \in \mathcal{M} \tag{3.1}$$

tal que

(a) es simétrico, i.e.  $g(X, Y) = g(Y, X)$  y

(b) positivo definido, i.e.  $g(X, X) \geq 0$  y  $g(X, X) = 0 \iff X = 0$ .

Aquí,  $T_p\mathcal{M}$  denota el espacio tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $p$ . Decimos que un tensor métrico  $g$  es de signatura indefinida cuando en lugar de (b) se tiene que

(b')  $\exists X \in T_p\mathcal{M}, X \neq 0$  tal que  $g(X, X) = 0$ .

Por ejemplo, la ecuación de onda en coordenadas cartesianas  $\{t, x, y, z\}$  es

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi = 0, \quad (3.2)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación. La ecuación (3.2) está escrita en la forma canónica de una *ecuación diferencial parcial hiperbólica* cuya estructura define al tensor métrico

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i, \quad (3.3)$$

donde  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$ . Llamamos a  $\eta$  tensor métrico de Minkowski.

**Lema 3.1.1.** *Sea  $(\mathcal{M}, \eta)$  el espacio-tiempo equipado con el tensor métrico de Minkowski.  $\eta$  no es positivo definido.*

*Demostración.* Consideramos al vector

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \in T_p\mathcal{M}. \quad (3.4)$$

Entonces

$$\eta(X, X) = \eta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.5)$$

$$= \eta \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) + \eta \left( \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.6)$$

$$= -dt \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) dt \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + dz \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) dz \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.7)$$

$$= -1 + 1 \quad (3.8)$$

$$= 0. \quad (3.9)$$

Con lo que se tiene  $X \in T_p\mathcal{M}$ ,  $X \neq 0$  y  $\eta(X, X) = 0$ .  $\square$

En este trabajo tomaremos como postulado empírico a las ecuaciones de Maxwell. Se puede mostrar que estas se pueden llevar a la forma dada por (3.2) y por lo tanto, de acuerdo con nuestra tercera hipótesis, el tensor métrico del espacio-tiempo es de signatura indefinida.

Todo  $X \in T_p\mathcal{M}$  puede entenderse como un vector tangente a una curva que pasa por el punto  $p \in \mathcal{M}$  en la dirección  $X$ . De este modo, tenemos la siguiente

**Definición 3.1.2.** *Sea  $(\mathcal{M}, \eta)$  el espacio-tiempo de Minkowski,  $X \in T_p\mathcal{M}$ . Decimos que*

$$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ es tipo tiempo si } g(X, X) < 0 \\ X \text{ es tipo espacio si } g(X, X) > 0 \\ X \text{ es tipo luz si } g(X, X) = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

En este trabajo consideramos únicamente curvas cuyo conjunto de vectores tangentes pertenecen a una sola de las clases de la definición 3.1.2.

**Definición 3.1.3** (Curvas tipo-tiempo). *Sea  $(\mathcal{M}, \eta)$  el espacio-tiempo de Minkowski. Consideremos una curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ . Decimos que  $\gamma$  es una curva tipo-tiempo si para todo  $t \in I \subset \mathbb{R}$*

$$\eta(X|_p, X|_p) < 0, \quad X|_p = \left. \frac{d\gamma}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} \in T_p\mathcal{M}, \quad \gamma(\tau_0) = p. \quad (3.11)$$

La definición anterior es análoga para curvas tipo espacio y tipo luz, respectivamente. En un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$  las curvas tipo-tiempo definen a la clase de *observadores* referida en la hipótesis 3.

Con la definición 3.1.3 podemos decir que pares de eventos en el espacio-tiempo están *temporalmente relacionados* si existe una curva tipo-tiempo que los une. Sin embargo, esto no es suficiente para determinar el orden en el que ocurren. Para esto, necesitamos introducir la idea de orientación temporal.

**Definición 3.1.4** (Orientabilidad temporal). *Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un espacio-tiempo,  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$  dos vectores tipo-tiempo sobre  $p \in \mathcal{M}$ . Decimos que  $Y \sim X$  si*

y sólo si  $g(X, Y) < 0$ . En este caso,  $Y \in [X]$  indica que  $Y$  tiene la misma orientación temporal que  $X$  en el punto  $p$ .

Es evidente que sólo existen dos clases de equivalencia temporal posibles en cada punto. Debido a que hay 3 coordenadas espaciales y sólo una temporal. A los vectores en cada clase los llamamos *orientados al futuro* y *orientados al pasado*, respectivamente.

**Definición 3.1.5** (Espacio-tiempo temporalmente orientable). *Decimos que un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$  es temporalmente orientable si y sólo si es posible hacer una elección continua de vectores tipo-tiempo con una orientación temporal definida sobre todo  $\mathcal{M}$ .*

**Lema 3.1.2.** *El espacio-tiempo de Minkowski  $(\mathcal{M}, \eta)$  es temporalmente orientable*

*Demostración.* Consideremos el espacio-tiempo de Minkowski junto con el par de vectores  $X, Y \in T_p\mathcal{M}$

$$X = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p, \quad Y = -\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p. \quad (3.12)$$

Es inmediato verificar que  $X$  y  $Y$  son vectores tipo tiempo para cada  $p \in \mathcal{M}$ , sin embargo

$$\eta(X, Y) = -dt \otimes dt \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p, -\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p \right) = -dt \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p \right) dt \left( -\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_p \right) = (-1)(-1) = 1 > 0. \quad (3.13)$$

Por tanto,  $X$  y  $Y$  apuntan en direcciones temporalmente opuestas en cada evento  $p \in \mathcal{M}$ . Mas aún, se puede extender directamente la definición de  $X$  a un campo vectorial sobre todo  $\mathcal{M}$ . Como  $X$  es continuo, podemos escoger a la clase  $[X]$  en cada evento de manera continua. Por tanto  $(\mathcal{M}, \eta)$  es temporalmente orientable.  $\square$

Ahora, podemos introducir relaciones temporales entre eventos en el espacio-tiempo.

**Definición 3.1.6** (Relación cronológica). *Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un espacio-tiempo,  $p \in \mathcal{M}$ . El futuro cronológico de  $p$  es el conjunto de puntos  $q \in \mathcal{M}$  para los cuales existe*

una curva tipo-tiempo orientada hacia el futuro con punto inicial  $p$  y punto final  $q$ , i.e.

$$I^+(p) = \{q \in \mathcal{M} \mid \exists \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M} \text{ tipo-tiempo, tal que, } \gamma(0) = p \text{ y } \gamma(1) = q\}. \quad (3.14)$$

El pasado cronológico de  $p \in \mathcal{M}$  se define de manera análoga. Decimos que dos eventos  $p$  y  $q \in \mathcal{M}$  están cronológicamente relacionados si y solo si

$$I^+(p) \cap I^-(q) \neq \emptyset. \quad (3.15)$$

Usaremos la notación  $p \ll q$  para decir que el evento  $p$  precede cronológicamente al evento  $q$ .

**Definición 3.1.7** (Distancia Temporal). Sean  $p, q \in \mathcal{M}$  cronológicamente relacionados con  $q \in I^+(p)$ . Sea

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \gamma \text{ es tipo-tiempo, } \gamma(0) = p \text{ y } \gamma(1) = q\}. \quad (3.16)$$

y  $\ell : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$  el funcional longitud de arco definido por

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{-g(X, X)} \, d\tau, \quad X = \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau). \quad (3.17)$$

La distancia temporal entre  $p$  y  $q$  es

$$d(p, q) \equiv \sup_{\gamma \in \Gamma} \ell(\gamma) \quad (3.18)$$

A la curva  $\gamma_0 \in \Gamma$  tal que  $d(p, q) = \ell(\gamma_0)$  se le llama geodésica.

Notamos que el signo en el argumento de la raíz cuadrada en (3.17) garantiza que la distancia (3.18) sea real. También, observamos que la definición 3.1.7 nos dice que la distancia temporal entre dos eventos cronológicamente relacionados es el *supremo* del funcional *longitud de arco* tomado sobre todas las curvas tipo-tiempo que conectan  $p$  con  $q$ . Esto se debe contrastar con la definición de distancia entre dos puntos en geometría Euclidea, donde se toma el *ínfimo*. La definición 3.1.7 tiene sentido pues en una variedad con un tensor métrico indefinido se puede aproximar una curva tipo-tiempo con una curva nula diferenciable a trozos cuya

longitud de arco es idénticamente cero [1].

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un espacio-tiempo,  $p, q, r \in \mathcal{M}$  eventos cronológicamente relacionados tal que  $r \in I^+(p) \cap I^-(q)$ . La distancia temporal entre  $p$  y  $q$  satisface*

$$(a) \quad d(p, q) = d(q, p)$$

$$(b) \quad d(p, q) = 0 \iff p = q$$

$$(c) \quad d(p, q) \geq d(p, r) + d(r, q).$$

*Demostración.* La prueba de (a) y (b) es directa de la definición. Para probar (c) notemos que  $r \in I^+(p)$  y  $q \in I^+(r)$ , entonces existen  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  tales que  $\gamma_1(0) = p$ ,  $\gamma_1(1) = r$ ,  $\gamma_2(0) = r$ , y  $\gamma_2(1) = q$ . Sea

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1), & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Por construcción,  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  (cf. definición (3.16)), de donde se sigue que

$$d(p, q) = \ell(\gamma_0) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \ell(\gamma) \geq \ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2), \quad (3.19)$$

Consideremos a su vez que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tienen longitud de arco máxima, i.e.  $\ell(\gamma_1) = d(p, r)$  y  $\ell(\gamma_2) = d(r, q)$ . Entonces (3.19) implica que

$$d(p, q) \geq d(p, r) + d(r, q). \quad (3.20)$$

□

Notemos que el paso que precede a (3.20) no es arbitrario pues cualquier otra elección de curvas tendría una longitud de arco combinada menor. También usamos el hecho que el funcional longitud de arco (3.17) es invariante bajo re-parametrizaciones afines de las curvas, i.e. cuando hacemos un cambio de parámetro de la forma  $t \rightarrow at + b$  donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias y  $a \neq 0$ . Notemos también que la curva  $\tilde{\gamma}$  es tipo tiempo en todos lados excepto quizá en el punto  $r$ , donde la derivada puede no estar definida. Para solucionar eso, basta

notar que, por construcción

$$\lim_{t \rightarrow 1} g(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1) < 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow 0} g(\dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_2) < 0 \quad (3.21)$$

por lo que podemos considerar a  $\tilde{\gamma}$  como una geodésica tipo-tiempo a pedazos.

**Definición 3.1.8** (Viaje). *Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un espacio-tiempo,  $p, q \in \mathcal{M}$  eventos cronológicamente relacionados. Definimos un viaje entre  $p$  y  $q$  como una geodésica a pedazos y orientada hacia el futuro donde cada segmento es tipo-tiempo.*

Con lo anterior es que se explica la llamada *paradoja de los gemelos*. Esta consiste en el hipotético caso de dos gemelos para los cuales existe un evento  $p$  en el que se separan y otro evento posterior  $q$  en el que se vuelven a encontrar. Uno de los gemelos viaja por el espacio-tiempo siguiendo una trayectoria  $\gamma$  tipo-tiempo arbitraria mientras que el otro se queda en reposo a esperar el retorno de su hermano, es decir, sigue la trayectoria  $\gamma_0$ . Debido a que la longitud de arco de la trayectoria seguida por el gemelo en reposo es justamente  $d(p, q)$ , se sigue que el gemelo viajero registra una distancia temporal menor y, por lo tanto, será más joven que su hermano al re-encontrarse en el punto  $q$  (cf. figura 3.1).

**Definición 3.1.9** (Estructura nula). *Sea  $(\mathcal{M}, \eta)$  el espacio-tiempo de Minkowski. Consideremos un punto  $p \in \mathcal{M}$ . El cono nulo o cono de luz sobre  $p$  es el subconjunto de vectores nulos de  $T_p\mathcal{M}$ . Al conjunto de conos nulos sobre  $\mathcal{M}$  se le llama la estructura nula de  $(\mathcal{M}, \eta)$ .*

Notemos que la estructura nula de  $(\mathcal{M}, \eta)$  es un *invariante conforme*. Esto es, la estructura nula se preserva bajo re-escalamientos del tensor métrico.

**Lema 3.1.3.** *Sea  $(\mathcal{M}, \eta)$  el espacio-tiempo de Minkowski,  $\Omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que no se anula en ningún punto  $p \in \mathcal{M}$ . Consideremos el espacio-tiempo conforme a Minkowski  $(\mathcal{M}, \tilde{\eta})$ , con  $\tilde{\eta} = \Omega^2\eta$ . La estructura nula de  $(\mathcal{M}, \tilde{\eta})$  es la misma que la de  $(\mathcal{M}, \eta)$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in \mathcal{M}$ .  $X \in T_p\mathcal{M}$  un vector nulo de  $(\mathcal{M}, \eta)$ . Entonces,

$$\tilde{\eta}(X, X) = \Omega^2\eta(X, X) = 0. \quad (3.22)$$

Por tanto,  $X$  es un vector nulo de  $(\mathcal{M}, \tilde{\eta})$ . □



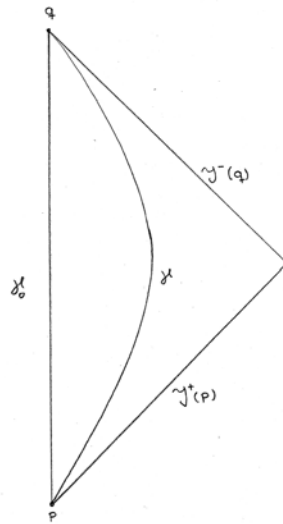
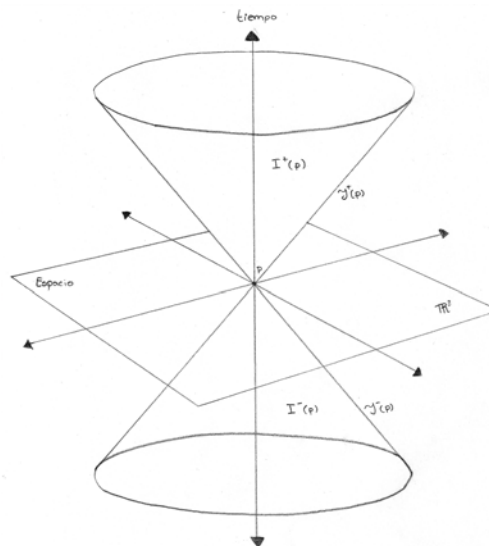


Figura 3.1: Desigualdad del triángulo.

Figura 3.2: Cono de luz. Las dimensiones espaciales  $\mathbb{R}^3$  se representan en un plano y la dimensión temporal en otra componente.

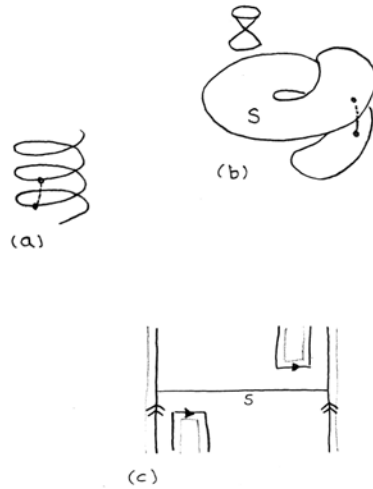


Figura 3.3: (a) Esta curva en un espacio de Minkowski es localmente del tipo tiempo, pero no es un conjunto acronal pues contiene pares de puntos con una separación tipo tiempo. (b) Incluso una hipersuperficie tipo tiempo suave en el espacio de Minkowski puede no ser acronal. (c) En este espacio-tiempo (Un pedazo de 2-espacio de Minkowski con dos identificaciones) no hay viajes causales cerrados, pero existe una hipersuperficie  $S$  suave del tipo espacio que es compacta (y sin "borde") pero el cual no es un conjunto acronal.

**Definición 3.1.10** (Subconjunto acronal). *Un conjunto  $S \subset \mathcal{M}$  se le llama acronal si no existen dos puntos de  $S$  relacionados cronológicamente (i.e. si  $x, y \in S$  entonces  $x \not\ll y$ )*

Notemos que un conjunto puede ser localmente del tipo tiempo sin ser acronal. La figura 3.3 ilustra distintos ejemplos.

**Definición 3.1.11** (Dominios de dependencia). *Sea  $S$  un subconjunto acronal de  $\mathcal{M}$ . Se definen los dominios de dependencia pasado y futuro de  $S$  respectivamente como sigue:*

$$D^+(S) = \{x \mid \text{todo viaje pasado sin final que contiene a } x \text{ llega a } S\}$$

$$D^-(S) = \{x \mid \text{todo viaje futuro sin final que contiene a } x \text{ llega a } S\}$$

$$D(S) = \{x \mid \text{todo viaje sin final que contiene a } x \text{ llega a } S\}$$

$$\text{Claramente } D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$$

El horizonte futuro de Cauchy  $H^+(S)$  de  $S$  es el límite del dominio futuro de dependencia  $D^+(S)$  de  $S$

**Definición 3.1.12** (Horizonte de Cauchy futuro). *El horizonte de Cauchy futuro, pasado y total de un subconjunto cerrado  $S$  se define respectivamente como:*

$$H^+(S) = \{x \mid x \in D^+(S) \text{ pero } I^+(x) \cap D^+(S) = \emptyset\}$$

$$H^-(S) = \{x \mid x \in D^-(S) \text{ pero } I^-(x) \cap D^-(S) = \emptyset\}$$

$$H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$$

### 3.1.1. Condiciones de causalidad

**Definición 3.1.13** (Viaje causal). *Un viaje causal se define de la misma manera que un viaje, definido anteriormente, a excepción que las geodésicas temporales son reemplazadas por geodésicas causales. Se denota como  $x \prec y$  si y sólo si existe un viaje causal de  $x$  a  $y$ .*

En un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$  se puede hacer una clasificación jerárquica global de acuerdo a las condiciones de causalidad [1]. A continuación las enumeramos ordenadas de la más débil a la más fuerte.

1. No totalmente viciosa: Para algunos puntos  $p \in \mathcal{M}$  se tiene que  $p \not\prec p$
2. Cronológica: No existen curvas tipo tiempo cerradas. i.e. la relación cronológica es irreflexiva:  $q \not\prec p$  para todo  $p \in \mathcal{M}$
3. Causal: No hay curvas cerradas causales. i.e. Sean  $p, q \in \mathcal{M}$ ,  $p \prec q$  y  $q \prec p$  entonces  $p = q$
4. Distinguible:
  - a. Pasado distinguible: Si dos puntos  $p, q \in \mathcal{M}$  comparten el mismo pasado cronológico son el mismo punto. i.e. Si  $I^-(p) = I^-(q)$  entonces  $p = q$ .  
Para toda vecindad  $U$  de  $p \in \mathcal{M}$  existe una vecindad  $V \subset U$ ,  $p \in V$  tal que ninguna curva no espacial pasado dirigida de  $p$  intersecta a  $V$  más de una vez.
  - b. Futuro distinguible: Si dos puntos  $p, q \in \mathcal{M}$  comparten el mismo futuro cronológico son el mismo punto. i.e. Si  $I^+(p) = I^+(q)$  entonces  $p = q$ .  
Para toda vecindad  $U$  de  $p \in \mathcal{M}$  existe una vecindad  $V \subset U$ ,  $p \in V$  tal

que ninguna curva no espacial futuro dirigida de  $p$  intersecta a  $V$  más de una vez.

5. Fuertemente Causal: Para cualquier  $p \in \mathcal{M}$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  donde existe una curva no temporal que pasa a través de  $U$  más de una vez.

Para cualquier vecindad  $U$  de  $p \in \mathcal{M}$  existe una vecindad  $V \subset U$ ,  $p \in V$  tal que  $V$  es causalmente convexa en  $\mathcal{M}$ , por lo tanto también en  $U$ .

6. Establemente Causal: Una variedad la cual cumpla con las condiciones de causalidad más débiles mencionadas anteriormente tendrán fallas si se realiza una perturbación.

Un espacio-tiempo es establemente causal si no se puede lograr que contenga curvas cerradas causales por medio de pequeñas perturbaciones arbitrarias de la métrica.

7. Globalmente hiperbólica: Esta es la más fuerte de todas las condiciones.  $\mathcal{M}$  se dice ser globalmente hiperbólica si para todo conjunto  $J^+(x) \cap J^-(y)$ , con  $x, y \in M$ , es compacto.

## 3.2. Espacios-tiempo aptos para supertareas

En esta sección se mostrarán diferentes espacios-tiempo donde se puede realizar una supertarea.

### 3.2.1. Supertareas

Si quisiéramos verificar una conjetura de teoría de números, que aún no esté resuelta, y configuráramos una computadora para intentar con cada uno de los enteros positivos para dicha conjetura, podría llevarnos una infinidad de tiempo que ésta encontrara un contraejemplo o quizá nunca lo encuentre. La idea de usar espacios-tiempo convenientes para resolver un problema como este es interesante pues podríamos hacer que la máquina tenga tiempo propio infinito. Mientras verifica para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  pueda permitirse a si misma prolongar su tiempo para seguir tratando con todos los números. El observador, teniendo un tiempo propio finito, encontrarse en el cono pasado que contiene toda la línea de

mundo de la computadora. Así, el observador podría conocer toda la información necesaria y en un tiempo finito obtener una respuesta. Es así que el observador y la computadora estarían realizando una supertarea, aunque no sea el observador quien realiza la infinidad de operaciones, el par de observador junto con máquina realizan una supertarea.

También si se desea resolver el problema de la parada o de la decisión, podemos aprovechar las propiedades de algunos espacios para tratar de conocer la respuesta. Pues al contar con una infinidad de tiempo, configurando el dispositivo de forma conveniente, suena convincente que podríamos obtener un resultado.

En seguida mencionaremos espacios-tiempo en los cuales podría ser realizable una supertarea de la forma que se explicó anteriormente.

### 3.2.2. Espacio-tiempo de Pitowski

Este espacio-tiempo fue el primero en ser pensado para la realización una supertarea [5]. Como su nombre lo dice, fue ideado por Pitowski y lo definió de la siguiente forma:

**Definición 3.2.1** (Espacio-tiempo de Pitowski).  $\mathcal{M}, g_{ab}$  es un espacio-tiempo de Pitowski si existen curvas tipo tiempo futuro dirigidas  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}$  tal que

$$\int_{\gamma_1} d\tau = \infty, \int_{\gamma_2} d\tau < \infty \text{ y } \gamma_1 \subset I^-(\gamma_2) \quad (3.23)$$

Pitowski cuenta una historia que ejemplifica la definición anterior [23]. Trata sobre un profesor, con línea de mundo  $\gamma_2$ , que está en el espacio orbitando. Su tiempo propio pasa mucho más lento que el tiempo propio de los que viven en la Tierra. Sus alumnos se encuentran trabajando en la conjetura de Fermat buscando un contraejemplo. Cuando dichos alumnos envejecen, le transfieren la tarea a sus respectivos alumnos y así muchas generaciones de alumnos están en búsqueda de un contraejemplo. Si se encuentra un contraejemplo, se envía una señal al profesor con un mensaje diciendo que se ha demostrado que la conjetura no es cierta .

Pitowski dice que al recibir este mensaje el profesor pisará el freno y regresará a casa. Pero que, si nunca se encuentra un contraejemplo, el profesor se desintegrará con una sonrisa sabiendo que la conjetura es cierta después de todo.

Más allá de lo triste que suene la historia, son muy interesantes las implicaciones físicas del relato anterior.

Aunque no sea como tal una máquina lo que está buscando un contraejemplo, la idea de la realización de una supertarea es la misma de la que se habló al principio en la sección de supertareas. El profesor, en un tiempo finito, descubrirá si la conjetura es cierta o no. Tomando como su tiempo propio finito a sus años de vida.

Existen algunos problemas con la historia anterior. Uno es que para que la historia tenga sentido el profesor debe de sobrevivir, pero si se espera que vaya a una velocidad suficientemente rápida y con una aceleración constante el profesor morirá por las fuerzas  $g$  que debe alcanzar la nave para cumplir el objetivo.

También puede suceder que el profesor siga y siga viajando a través del espacio y nunca recibir una señal de los alumnos y esto conlleva a un problema, pues no puede estar seguro que no ha recibido nada debido a que no existe un contraejemplo, no lo han encontrado aún y debe seguir esperando indefinidamente, o que efectivamente encontraron un contraejemplo pero simplemente nunca recibió la señal por alguna falla técnica.

Malament y Hogarth idearon un espacio-tiempo donde, por su estructura, no ocurrieran los problemas del ejemplo anterior.

### 3.2.3. Espacio-tiempo de Malament-Hogarth

**Definición 3.2.2** (Espacio-tiempo de Malament Hogarth).  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  es un espacio-tiempo de Malament-Hogarth (MH) si existe una curva tipo tiempo  $\gamma_1 \subset \mathcal{M}$  y un punto  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $\int_{\gamma_1} d\tau = \infty$  y  $\gamma_1 \subset I^-(p)$ . A  $p$  se le conoce como punto de Malament-Hogarth.

Notemos que para esta definición no existe un observador que reciba la información. Lo importante aquí es que si  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  es un espacio-tiempo de Malament-Hogarth, entonces existe una curva tipo tiempo futuro dirigida  $\gamma_2$  de un punto  $q \in I^-(p)$  a  $p$  tal que  $\int_{\gamma_2(q,p)} d\tau < \infty$ , donde  $q$  puede ser elegida de forma conveniente, haciendo que esté en el futuro causal del punto final del pasado de  $\gamma_1$ . Esto funciona, pues al tener  $q$  ubicado de esa forma el observador que se mueve sobre  $\gamma_2$ , al llegar a  $p$ , puede estar totalmente seguro que si no recibió ninguna señal del dispositivo, con línea de mundo  $\gamma_1$ , avisando que encontró un

contraejemplo, puede tener la certeza que la conjetura es verdadera. Esto resolviendo el problema que se tenía en el ejemplo de Pitowski sobre la certeza de la solución ante una falta de respuesta por los alumnos.

Un ejemplo sería el siguiente.

**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $(\mathbb{R}^2, \eta)$  Minkowski-2 consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $q \in \Omega$ . Sea  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $\Omega \subset I^-(p)$ . Y sea  $\lambda : \frac{\mathbb{R}^2}{\{q\}} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\lambda = 1$  para toda  $r \in I^-(p) \cap \Omega^c$  y  $\lim_{r \rightarrow q} \lambda \rightarrow \infty$ . El espacio-tiempo  $(\mathbb{R}^2 - q, \lambda^2 \eta)$  es de Malament-Hogarth.

Un espacio-tiempo contiene curvas cerradas tipo tiempo si existe  $p \in \mathcal{M}$  tal que  $p \in I^+(p)$

**Proposición 3.2.1.** Si un espacio-tiempo contiene curvas tipo tiempo cerradas, entonces es un espacio-tiempo de MH.

**Proposición 3.2.2.** Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un espacio-tiempo de Malament-Hogarth con una curva tipo tiempo  $\gamma_c$ . Entonces  $(\mathcal{M}, g)$  no es globalmente hiperbólico. Más aún, si  $p \in \mathcal{M}$  es un punto de MH y  $S \subset \mathcal{M}$  es una hipersuperficie conectada tipo espacio tal que  $Im(\gamma_c) \subset J^+(S)$  entonces  $p$  está en o sobre  $H^+(S)$ , el horizonte futuro de Cauchy de  $S$ .

*Demostración.* Consideremos el punto  $q \in \mathcal{M}$  tal que  $\gamma_c(0) = q$ . Si  $(\mathcal{M}, g)$  es globalmente hiperbólico entonces  $(\mathcal{M}, g)$  será fuertemente causal y, en particular,  $J^-(p) \cap J^+(q) \subset \mathcal{M}$  compacto. Sabemos que  $Im \gamma_c \subset J^-(p) \cap J^+(q)$ . Como consecuencia su punto final futuro (y pasado) están contenidos en  $J^-(p) \cap J^+(q)$ . Pero,  $\gamma_c$  es una curva causal con  $\|\gamma_c\| = \infty$ . Así, es que es futuro inextendible, i.e., no tiene punto final futuro. Pero esto es imposible pues  $J^-(p) \cap J^+(q)$  no puede ser compacta o la causalidad fuerte debe ser violada por lo que es una contradicción.

Luego, para el segundo punto, asumimos que  $p \in D^+(S) \cup \partial D^+(S)$ , i.e.,  $p$  es un punto interior del dominio de dependencia futuro de  $S$ . Así, existe  $r \in D^+(S)$  cronológicamente precedido por  $p$  (con respecto a alguna función tiempo asignada a la foliación de Cauchy  $D^+(S)$ ) Haciendo que  $N := J^-(r) \cap J^+(S)$  entonces  $N \subset D^+(S)$  por lo que  $(N, g|_N)$  es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico que contiene al punto de Malament-Hogarth  $p$  y la curva  $\gamma_c$ . Y por consecuencia llegamos a una contradicción [24].  $\square$

**Lema 3.2.1.** *Un espacio-tiempo MH no es globalmente hiperbólico.*

Una demostración informal, por contradicción, esta dada por [5] como sigue.

Como un espacio-tiempo globalmente hiperbólico  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  contiene una superficie de Cauchy y como un espacio-tiempo con una superficie de Cauchy puede ser partida por una familia de superficies de Cauchy. Supongamos que  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  es globalmente hiperbólica y contiene un punto de MH,  $p \in \mathcal{M}$ , tal que , existe una curva futuro dirigida del tipo tiempo  $\gamma$  tal que  $\gamma \subset I^-(p)$  y que  $\int_{\gamma} d\tau = \infty$ . Elegimos una superficie de Cauchy  $S$  a través de  $p$ , y extendemos  $\gamma$  de forma maximal en el pasado. Esta  $\gamma'$  está también contenida en  $I^-(p)$ . Como  $\gamma'$  no tiene punto final tanto en el pasado como en el futuro, intersecta a  $S$ . Pero como hay una curva tipo tiempo del punto de intersección a  $p$ ,  $S$  no es acronal y no puede ser una superficie de Cauchy como se supuso en un principio.

El regreso del lema no es necesariamente cierto. algunos espacios-tiempo que no son globalmente hiperbólicos pueden no ser espacios-tiempo de MH. Un ejemplo sería el espacio-tiempo de Minkowski al quitarle un conjunto cerrado de puntos. Éste no contiene una superficie de Cauchy, pero tampoco es un espacio-tiempo de MH.

El problema de que un espacio-tiempo no sea globalmente hiperbólico es que, debido a su estructura, no podemos determinar el futuro. Esto pues existen puntos en el espacio-tiempo los cuales no pueden ser conectados de manera causal.

A partir de ahora sólo se hablará de espacios-tiempos que son establemente causales, los cuales conllevan a la existencia de una función de tiempo global.

Los espacios-tiempo de MH tienen, desafortunadamente para nuestro propósito, la característica física de corrimiento azul divergente. El dispositivo medirá durante todo su tiempo propio una cantidad infinita de vibraciones, las cuales tomarán la misma cantidad de su tiempo propio. Así, el observador recibirá una infinidad de señales para una cantidad finita de su tiempo propio, correspondientes a las señales de la computadora. Por lo que el observador estará percibiendo que la frecuencia de la fuente de la máquina crece sin límite. Esto claramente es un problema para el matemático o quien esté realizando las observaciones pues si esto ocurre podría ser quemado. El hecho de que un espacio de MH da un corrimiento azul tan grande para un fotón implica que la estructura de este espacio-tiempo es equivalente a un amplificador de energía muy poderoso. Esto



siendo muy peligroso para nuestro observador pues la amplificación del sonido térmico podría destruirlo.

# 4

## Geometría y gravedad

En este capítulo argumentamos que algunos espacios-tiempos que se consideran físicos satisfacen la condición de ser de Malament-Hogarth. Por tanto, admiten la realización de supertareas.

### 4.1. Ecuaciones de Einstein

Para Einstein la gravedad era una entidad geométrica. Un cuerpo en movimiento únicamente bajo el efecto de la gravedad se mueve sobre una geodésica. Esto se puede contrastar con la idea de Newton, pues para él un cuerpo en movimiento bajo la acción de ninguna fuerza se mueve sobre una línea recta.

Existen dos tipos de fuerzas, diferenciales y universales. Un ejemplo claro de una fuerza diferencial es aplicar calor a un cuerpo, pues dependiendo del material al que se le aplique, éste se verá afectado de diferente manera a comparación de otro. Las fuerzas universales no funcionan así, no importa a que material se le aplique ni si existe alguna barrera física, la fuerza es la misma siempre. Einstein notó que la gravedad cumplía con ser una fuerza universal.

Para que una fuerza pueda ser considerada universal debe cumplir dos propiedades:

1. Afectar a todos los materiales en la misma manera.
2. No existir paredes aislantes.

Es así que cualquier fuerza que no cumpla con estas propiedades se considera una fuerza diferenciable [25].

Einstein se dio cuenta que la gravedad cumple con ambas características por lo que es una fuerza universal.

Las ecuaciones de Einstein que determinan al tensor métrico del espacio-tiempo a partir de la distribución de energía que hay en él son

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}(R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (4.1)$$

donde:

1.  $R_{ab}$  es el tensor de Ricci (tensor cero - dos, simétrico).
2.  $g$  es la métrica del espacio-tiempo.
3.  $R$  es el escalar de curvatura.
4.  $\Lambda$  es la constante cosmológica. La cual se interpreta como la densidad de energía del vacío.
5.  $T_{ab}$  es el tensor energía momento. El cual especifica la densidad y los flujos de energía y momento.

Estas son ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, no homogéneas y de segundo orden acopladas para  $g$ .

Para poder encontrar una solución a dichas ecuaciones, debido a su complejidad, debemos de hacer algunas suposiciones para simplificarlas y encontrar una solución.

## 4.2. Diagramas de Carter-Penrose

La primera solución fue pensada por Schwarzschild unas semanas después de que Einstein propusiera sus ecuaciones. Para lograrlo tuvo que hacer varias suposiciones. Primero supuso que la constante cosmológica  $\Lambda$  era igual a cero. Supuso que el sistema se encontraba en el vacío i.e.  $T_{ab} = 0$  y que el sistema tenía simetría esférica y era estático. A su vez supuso que era independiente del tiempo por lo que  $g_{ab} = g_{ab}(r)$ . Aunque esto no era necesario pues según el

teorema de Birkhoff las ecuaciones de Einstein, debido a su construcción, ya son independientes del tiempo. Tenía simetría de inversión temporal  $t \rightarrow -t$ . Por lo que la métrica quedaba reducida a una métrica diagonal y después de algunos cálculos llegó a la siguiente solución:

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr \otimes dr + r^2[d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi] \quad (4.2)$$

Donde  $m$  es la masa de la fuente. Aquí ya se supone que se están usando coordenadas geométricas por lo que  $G = c = 1$ . Esta solución describe el campo gravitacional externo generado por cualquier masa esférica estática. Está definida para  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 < r < 2m$  en la región  $II$  y  $r > 2m$  en la región  $I$

Notemos que esta métrica tiene dos singularidades:

1.  $r = 2m$
2.  $r = 0$

#### 4.2.1. Coordenadas de Kruskal

Para la máxima extensión del espacio-tiempo se usan estas coordenadas para compactificar.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv dw + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi] \quad (4.3)$$

$r \neq 2m$  esta determinado por  $\frac{1}{2}(v - w) = v + 2m \log(r - 2m)$  y cuando es conformalmente plano  $ds^2 = -dv dw$

La transformación de coordenadas más general que deja este dos espacio expresado de esta forma es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{dv}{dv'}\frac{dw}{dw'}dv' dw' + r^2(d\Omega^2) \quad (4.4)$$

con  $v' = v'(v)$  y  $w' = w'(w)$ .

Definamos  $x' = \frac{1}{2}(v' - w')$  y  $t' = \frac{1}{2}(v' + w')$ .

Así, tenemos que  $ds^2 = F^2(t', x')(-dt'^2 + dx'^2) + r^2(t', x')d\Omega^2$

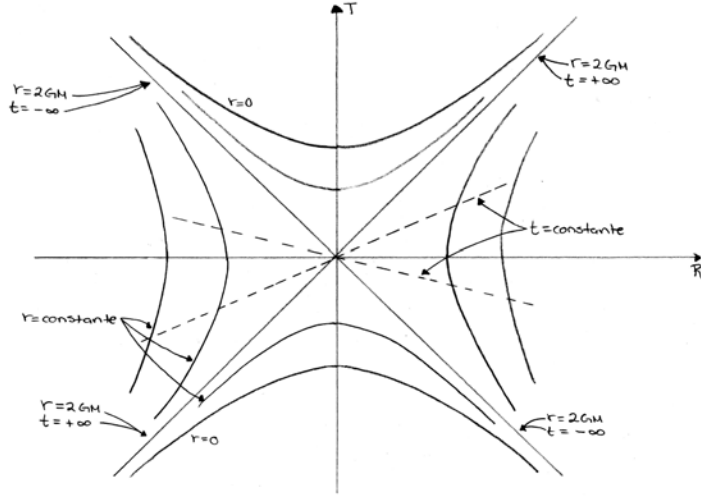


Figura 4.1: Diagrama coordenadas Kruskal

Por lo que  $v' = \exp(\frac{v}{4m})$  y  $w' = -\exp(\frac{-w}{4m})$ , entonces  $(t')^2 - (x')^2 = -(r - 2m) \exp(\frac{r}{2m})$  y  $F^2 = \exp(\frac{-2}{2m}) 16 \frac{m^2}{r}$ .

Así para la variedad  $\mathcal{M}^*$  con coordenadas  $(t', x', \theta, \varphi)$  se tiene lo siguiente

1.  $(t')^2 - (x')^2 < 2m$  con  $r$  y  $F$  positivas y analíticas. en la región  $I$   $x' > |t'|$  es isométrica a  $r > 2m$ .
2.  $x' > -t'$  Regiones  $I$  y  $II$  son isométricas a extensiones avanzadas de Finkelstein.
3.  $x' > t'$  Región  $I$  y  $II'$  isométricas a retardadas de Finkelstein.
4.  $x' < -|t'|$  Región  $I'$  isométrica a  $r > 2m$

$$t = cte \text{ tal que } \frac{v'}{w'} = \frac{\exp(\frac{v}{4m})}{-\exp(\frac{-w}{4m})} = -\exp[\frac{v}{4m} + \frac{w}{4m}] = -\exp[\frac{t}{2m}]$$

Entonces  $v' \propto w'$ , así  $x' = \frac{1}{2}\alpha v'$  y  $t' = \frac{1}{2}\beta v'$  por lo que  $v' = \frac{2}{\alpha}x'$  y  $t' = \frac{1}{2}(\frac{2}{\alpha})\beta x'$  la cual es una línea a través del origen.

#### 4.2.2. Compactificación

$$v'' = \arctan(\frac{v'}{\sqrt{2m}}) \quad -\pi < v'' + w'' < \pi$$

$$w'' = \arctan(\frac{w'}{\sqrt{2m}}) \quad -\frac{1}{2}\pi < v'' < \frac{1}{2}\pi \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2}\pi < w'' < \frac{1}{2}\pi$$

### 4.3. Agujeros negros de Malament-Hogarth

Para poder realizar una supertarea no es necesario que todo el espacio-tiempo sea de MH, puede ser que sólo una región lo sea y nos es útil para el objetivo de este trabajo. Es lógico que el lector se pregunte si existen regiones en nuestro universo que cumplen con ser de MH. Y la respuesta es que sí. Los agujeros negros son un ejemplo de ello.

#### 4.3.1. Reissner-Nordström

El espacio-tiempo de Reissner-Nordström tiene la característica de ser una solución para las ecuaciones de campo de Einstein, siendo la única simétricamente esférica con vacío electromagnético, con  $\Lambda = 0$ . El razonamiento para encontrar la solución es muy parecido al espacio-tiempo de Schwarzschild y además cumple con ser de MH. En este espacio-tiempo una perturbación, por pequeña que sea, en un valor inicial en la hipersuperficie  $S$  puede producir un efecto infinito en el horizonte de Cauchy futuro  $H^+(S)$  de  $S$ . Así es que es, aunque en el mínimo sentido, una posibilidad física realizable para nuestro propósito.

Un punto interesante es que este espacio-tiempo tiene una infinidad de puntos de MH debido a su construcción, ver 4.2.

Así que si pensamos en un espacio-tiempo de MH que nos pueda servir para realizar una supertarea sería éste. Suponiendo que  $p$  tiene como línea de mundo a  $\gamma_1$  y  $O$  a  $\gamma_2$ . Haciendo que  $O$  se vaya a la singularidad en  $r = 0$  y que  $P$  se vaya a la sección II. Aunque nos enfrentamos con algunos problemas para la realización de una supertarea en este espacio-tiempo. Un aspecto que debemos considerar es que la aceleración de  $O$  debe estar acotada. Pues podría destrozarse debido a las fuerzas  $g$  de no ser así. En un espacio-tiempo de Reissner-Nordström podemos seleccionar una geodésica tipo tiempo donde  $\gamma_2$  pueda empezar en el trazo temporal  $S$  e ir hacia el futuro tipo tiempo  $i^+$ . Y así  $\gamma_2 \subset I^+(p)$  para un punto apropiado  $p \in H^+(S)$ .

Otro problema con el que nos enfrentamos no es la falta de tiempo por parte de  $O$  para realizar todos los cálculos para probar una conjetura, la de Fermat por ejemplo, sino por la falta de materia en el universo. No sólo para la infinita cinta o combustible que requiere, sino porque el hardware en general requerirá de una infinidad de recursos materiales para cumplir su misión y esto contradi-

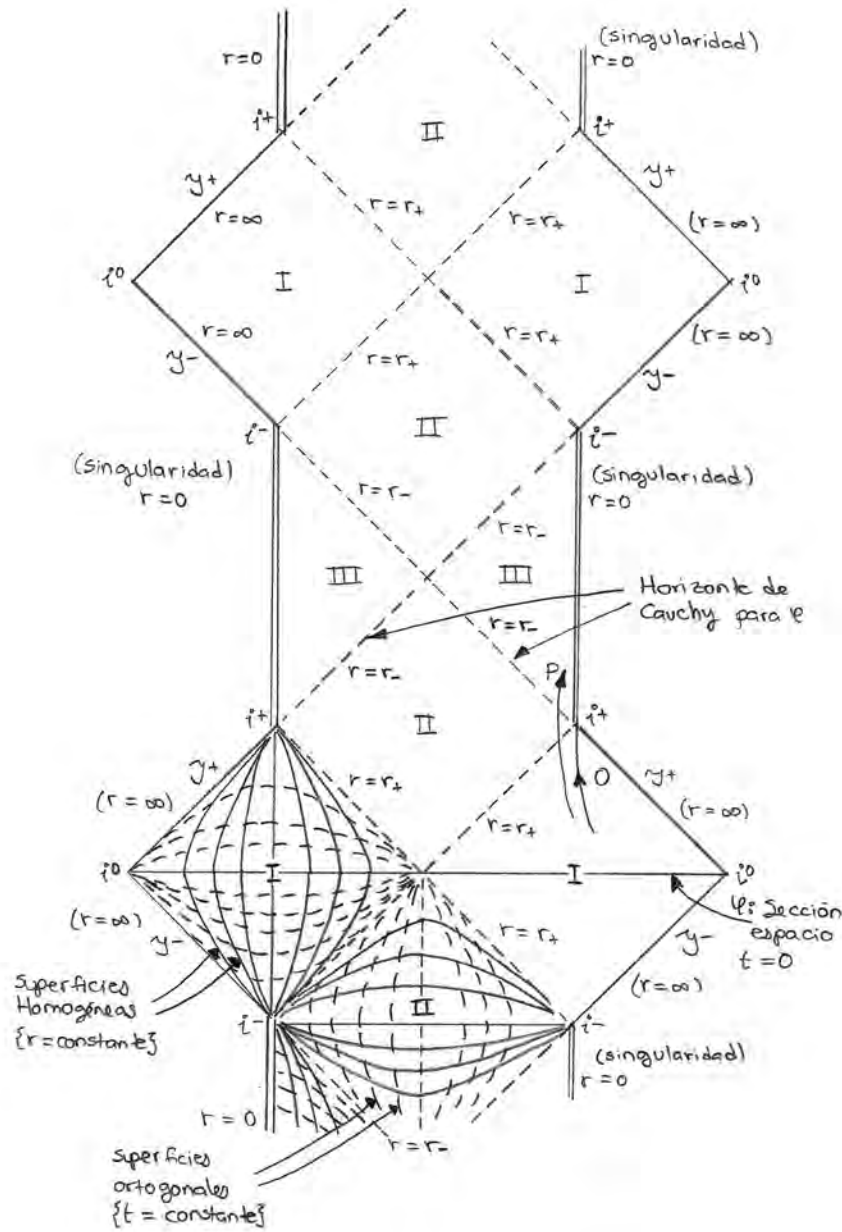


Figura 4.2: Diagrama de Penrose para espacio-tiempo de la solución de Reissner-Nordström maximal ( $e^2 < m^2$ ). Una cadena infinita de regiones asintóticamente planas I ( $\infty > r > r_+$ ) son conectadas por regiones II ( $r_+ > r > r_-$ ) y III ( $r_- > r > 0$ ); cada región está acotada por una singularidad temporal en  $r = 0$  [2].

ce aspectos de la física. Esto pues aún usando cada partícula del universo, nos terminaríamos quedando sin hardware para realizar los cálculos necesarios. Para solucionar este problema podríamos intentar tener softwares, parte de la computadora  $O$ , encargados de ir borrando la información y dejando espacio para los nuevos resultados. El problema de esto es que necesitamos suficientes softwares que se encarguen de esta tarea y se regresa al mismo problema del principio

A su vez, algo que debemos de tomar en cuenta es que, debido a la estructura de nuestro espacio-tiempo, podría emerger una señal falsa de una singularidad dando una respuesta errónea al observador. Esto pues, si  $S$  es una hipersuperficie de valor inicial donde se especifican valores iniciales, cualquier punto  $p \in \gamma_2$  de MH estará más allá de  $H^+(S)$  para cualquier  $S$  apropiada [3]. En un espacio-tiempo de Reissner-Nordström los rayos nulos pasan muy cerca de un punto  $p \in H^+(S)$  y terminan en la dirección pasada de la singularidad. Y esto puede llevar a que una señal falsa salga de la singularidad y engañe al observador con una respuesta que no es correcta. Claro que si el observador está esperando una respuesta a la conjetura de Fermat, puede simplemente sustituir los valores recibidos y comprobar que la señal era falsa. Y así con todas las señales que reciba y si ninguna funciona y llega al momento, en su tiempo propio, donde él sabía que  $O$  ha tratado con todos los posibles valores y todas las señales que él recibió fueron falsas, puede concluir que efectivamente la conjetura de Fermat es cierta. Vale la pena notar que si es un número considerablemente grande de señales falsas las que recibe  $P$  podría ser un problema pues deberá de probar con todas esas combinaciones de números que recibió, y podría llevarle mucho tiempo en verificar si alguna de éstas fue una señal verdadera. Es por eso que por ahora supondremos que se configura la máquina de la forma que  $C$  envía una señal suficientemente compleja para que el observador, al recibirla, pueda saber que proviene del dispositivo.

#### 4.3.2. Kerr-Newman

Como los objetos astronómicos rotan no podríamos esperar que la solución fuera de ellos sea simétricamente esférica de forma exacta. Las soluciones de Kerr son las únicas que pueden representar un campo asintóticamente plano estacionario y axisimétrico fuera del cuerpo masivo. Serán las soluciones exteriores sólo



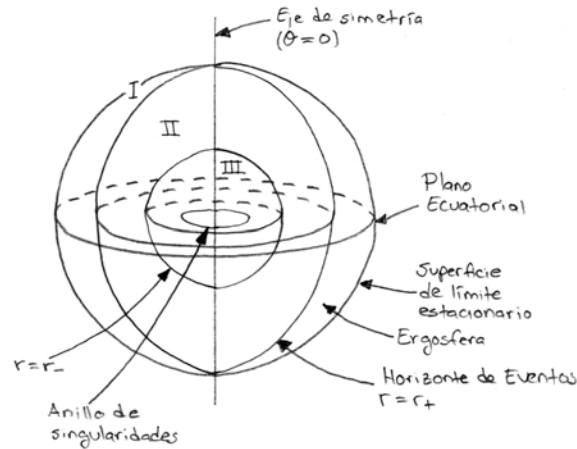


Figura 4.3: En la solución de Kerr con  $0 < a^2 < m^2$ , la ergosfera se encuentra entre la superficie de límite estacionario y el horizonte en  $r = r_+$ . Partículas pueden escapar al infinito de la región I (fuera del horizonte  $r = r_+$ ) pero no de la región II (entre  $r = r_-$  y  $r = r_+$ ) y la región III ( $r < r_-$ ; esta región contiene al anillo de singularidades) [2].

para cuerpos masivos que roten con una combinación particular de momentos bipolares. Así, debido a que considera todos los parámetros de los que pueden depender las soluciones: masa, carga y momento angular, éstas parecen ser las únicas soluciones exteriores posibles para agujeros negros [2]. Por lo que a su vez, es la más general al corresponder al estado final de equilibrio de un agujero negro.

Los agujeros negros de Kerr tienen dos horizontes de eventos, uno interno y otro externo. Dentro del horizonte interno se encuentra un anillo de singularidades en el plano ecuatorial de los ejes  $X, Y$ . Como se muestra en 4.3.2.

Imaginemos que tenemos dos observadores sobre el horizonte externo. Se encuentran a una distancia constante entre ellos haciendo uso de los motores de sus naves. Supongamos que uno de los observadores  $O$  se encuentra suspendido más arriba que el otro observador,  $P$ . Así,  $P$  ve por encima de él a  $O$ . Por la dilatación temporal se tendrá que el reloj de  $O$  vaya más rápido que el reloj de  $P$ . Este efecto ambos lo notan pues se tiene que mantienen comunicación vía fotones. Si

mantenemos la altura de  $O$  constante y comenzamos a descender a  $P$  hacia el horizonte interno, mientras más baje este observador, su reloj correrá más lento ante la perspectiva de  $O$ . Si  $P$  llegara a colocarse en el horizonte interno,  $O$  vería como si el reloj del otro observador estuviera completamente detenido. En cambio para  $P$  el reloj de  $O$  iría infinitamente rápido. Es justo esto lo que nos permitirá la realización de una supertarea. El problema de este plan es que es imposible mantener al observador  $O$  suspendido en el horizonte externo. Este problema se resuelve colocando al observador suficientemente cerca del horizonte externo de eventos, pero no sobre él. Y para lograr el efecto que el tiempo pase infinitamente rápido ante la perspectiva de  $P$ , haríamos descender a  $P$  lentamente hacia el horizonte interno de tal forma que exista una frontera finita de tiempo  $b$ , tal que en toda la historia del universo de  $P$  los relojes siempre tengan un valor menor que  $b$ . Así cuando  $O$  envíe un fotón a  $P$ ,  $P$  recibirá dicho fotón antes del tiempo  $b$  ante el reloj de  $P$ .

Otro problema que se tiene es que mientras más se acerca  $P$  al horizonte interno, la aceleración gravitacional tiende a infinito. Si no se logra que se acerque de forma suave, podría suceder que no le lleguen algunos fotones enviados por  $O$ . Para esto es que se pide que el agujero negro esté rotando lentamente. Pues, al tener esta peculiaridad en la estructura de nuestro espacio-tiempo, podemos lograr que esta "caída" sea lenta aprovechando la fuerza centrífuga del agujero. Así también se evita que  $P$  muera debido a la aceleración gravitacional.

El horizonte interno de eventos marca el lugar donde la fuerza repulsiva supera a la gravitacional. Dentro de éste es posible que el observador  $P$  se mantenga suspendido a una distancia constante del centro del agujero negro. Etesi muestra la posibilidad que si  $O$  envía un mensaje a  $P$  es posible construir una trayectoria de  $P$  de tal forma que el fotón enviado por  $O$  llega a  $P$  antes que éste llegue al horizonte interno de eventos, esto en un tiempo  $b$  según el reloj de  $P$  [24].

Así es como logramos tener una aceleración infinita del tiempo para realizar nuestra supertarea.

Vale la pena notar que como el horizonte internos de eventos de un agujero negro de Kerr es un horizonte de Cauchy para observadores externos, se tiene que este espacio no es globalmente hiperbólico lo cual, como se vio anteriormente, es una propiedad esencial de los espacios de MH.

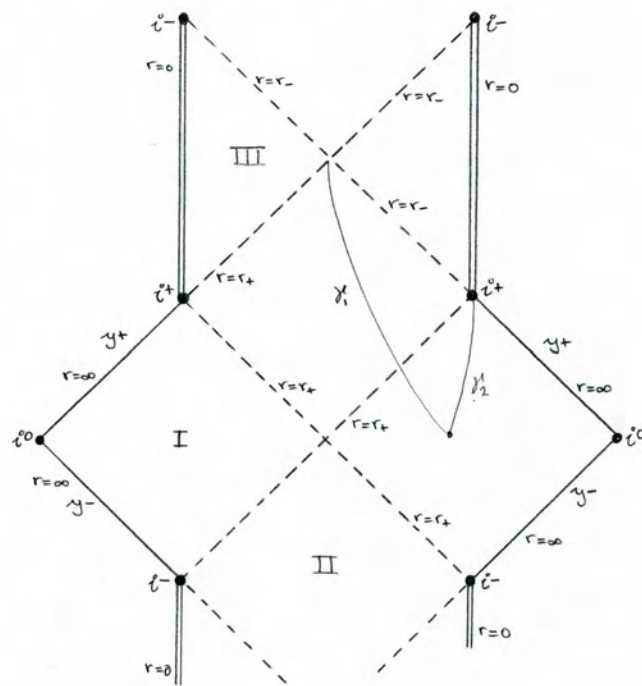


Figura 4.4: Fragmento de diagrama de Penrose de un agujero negro que rota mostrando múltiples universos.

## 5

# Computabilidad en el Espacio-Tiempo

Anteriormente se mencionó que existen regiones del espacio-tiempo las cuales cumplen con ser de Malament-Hogarth. Recordemos que  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  es un espacio-tiempo de Malament-Hogarth (MH) si existe una curva tipo tiempo  $\gamma_2 \subset \mathcal{M}$  y un punto  $p' \in \mathcal{M}$  tal que  $\int_{\gamma_2} d\tau = \infty$  y  $\gamma_2 \subset I^-(p')$ . Es decir, si existe un punto  $p'$  en la variedad para el cual en su pasado cronológico se encuentre completamente contenida una curva tipo tiempo con tiempo propio infinito, extendible.

Este tipo de espacios-tiempo son importantes para el objetivo de este trabajo pues, si contamos con una máquina  $C$  la cual tenga como línea de mundo a  $\gamma_2$ , un observador  $P$  puede configurar la máquina en un punto  $r$  y mandar a  $C$  a alguna región del espacio-tiempo donde el tiempo propio del dispositivo pase infinitamente más rápido que el del observador. Por lo que  $P$  puede tener certeza que al llegar al punto de MH,  $p'$ , la máquina realizó todos los cálculos posibles para el problema algorítmico para el cual él configuró al dispositivo. Y al estar  $\gamma_2 \subset I^-(p')$ ,  $P$  cuenta con toda la información que  $C$  obtuvo en una infinidad de tiempo. Por ejemplo, si se configurara a la computadora para buscar un contraejemplo a una conjetura en teoría de números, si el observador llega al punto de MH y no obtiene respuesta de  $C$  es que no existe un contraejemplo, por lo que la conjetura es cierta. Y si llegara a encontrar alguno le puede enviar una señal a  $P$  con el número, para el cual el problema falla, y así antes de llegar a  $p'$  tendría la respuesta a su pregunta.

De igual manera, para el problema de la parada y el problema de decisión.

Recordemos que el problema de la parada consiste en decidir si un programa con una entrada dada, eventualmente, se detendrá ó continuará corriendo indefinidamente. Y el problema de decisión trata sobre si es posible encontrar un algoritmo el cual podría ser aplicado a cualquier problema y obtener como respuesta la veracidad o falsedad de dicho problema. De igual manera, en este tipo de regiones del espacio-tiempo se podrían resolver estos problemas pues contamos con una infinidad de tiempo para realizar operaciones.

Se trató con anterioridad el hecho que una máquina universal de Turing puede imitar una máquina de Turing la cual computa la función de detención. Así, podemos llevar este análisis a pensar que  $C$  es una máquina de Turing universal con una configuración tal, que nos dará respuesta a nuestra pregunta. ¿Realmente se detendrá la máquina con una entrada dada?  $C$  se configura de tal forma que si se detiene, envíe una señal a  $P$ .

De igual forma si se configura a  $C$  para que resuelva el problema de decisión, si encuentra que es verdadero, enviará una señal a  $P$ .

Es obvio que surgen preguntas sobre la posibilidad de que  $P$  reciba señales falsas provenientes de singularidades causadas por el punto de MH. Pero eso se trató anteriormente y se propuso el hecho de "confiar ciegamente" en que la señal recibida por  $C$  está configurada de tal forma que el observador, al recibirla, puede estar seguro que proviene de la máquina que envió a resolver el problema. Claro que esto causa un poco de incomodidad por lo que, enseguida, para los espacios-tiempo que propondremos analizaremos la forma de eliminar este problema o minimizarlo de la forma mas conveniente.

En esta sección se propondrán diversos tipos de espacios-tiempo que cumplen ser de MH, en los cuales se podría realizar una supertarea y cumplir con el objetivo de este trabajo.

### 5.0.1. Retirar un punto

Sea  $(\mathbb{R}^2, \eta)$  una variedad donde un punto  $q$  es retirado y se cumple que  $q \in U$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Así,  $p'$  es un punto de MH. Observar 5.1. La métrica  $g$  en esta

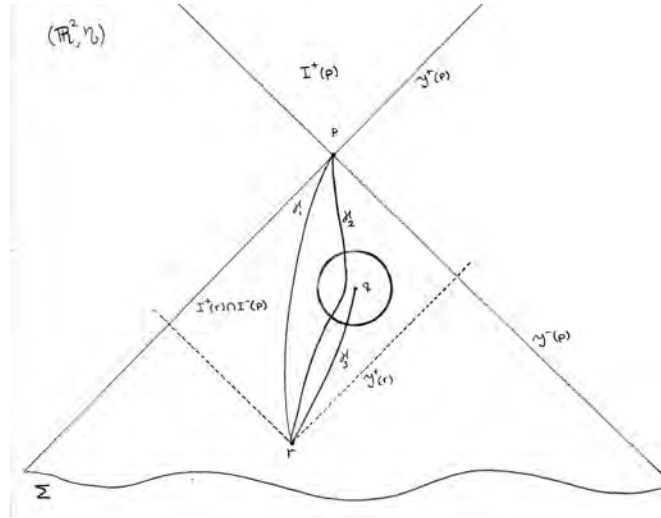


Figura 5.1: Se retira un punto  $q$  en el pasado de  $p'$ , en  $D^+[\Sigma]$ . Haciendo a  $p'$  un punto de MH.

región se define como

$$g = \begin{cases} \eta, & \text{si } p \in M - U \\ \Omega^2 \eta, & \text{si } p \in U \end{cases} \quad (5.1)$$

Donde  $\Omega^2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{p \rightarrow q} \Omega \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow p' \in \partial \Omega} \Omega = 1. \quad (5.2)$$

Así, en el punto  $q$  hacemos diverger las trayectorias, por lo que al acercarse lo suficiente, una máquina podría quedarse ahí por una infinidad de tiempo, cumpliendo con la condición que este sub-espacio es de MH, pues  $p'$  es un punto de MH.

El observador  $P$  sigue la línea de mundo  $\gamma_1$  y las posibles trayectorias de la computadora  $C$  son  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$ .

Así, como se muestra en 5.1, en el punto  $r$ ,  $P$  y  $C$  están juntos. Por lo que ese sería el momento donde el observador configura la máquina. La máquina podría seguir  $\gamma_2$  o  $\gamma_3$ . Podemos hacer que la trayectoria de  $C$  se prolongue lo suficiente

para buscar respuesta a nuestra pregunta al acercarse a  $q$ . Pero en realidad sería conveniente que su línea de mundo sea  $\gamma_3$  para que ésta cuente con una infinidad de tiempo propio. Entonces, tratando el problema de la parada, si la máquina se detiene puede mandar una señal a  $P$  donde le indique que lo hizo. Por lo que al llegar a  $p$  el observador sabría si se detiene o no, pues si llega a este punto y no recibió una señal, puede estar seguro que no paró nunca.

Es lógico, como se mencionó anteriormente, que el lector se pregunte sobre la posibilidad de que broten señales de la singularidad  $q$ . De hecho no hay forma de saber qué podría salir de dicho punto. Por ende surge la pregunta de cómo el observador puede asegurarse que la señal que obtiene es de hecho de  $C$  y no es producto de alguna interacción extraña de la singularidad. Anteriormente se habló sobre las formas de resolver este problema. Si se tratara de buscar un contraejemplo a alguna conjetura sería relativamente sencillo pues bastaría con que  $P$  intentara con el número que recibió en la señal y si efectivamente sirve como contraejemplo realmente no importaría si lo envió  $C$  o proviene de la singularidad, pues el objetivo del experimento se cumple al encontrar alguno. En caso de que al probar con ese entero no sea un contraejemplo puede descartar que la respuesta proviene de la singularidad y continuar esperando una respuesta de  $C$ . Se dice que es relativamente fácil descartarlo, porque claro, también está la posibilidad que salgan una cantidad muy grande de respuestas absurdas de la singularidad y el observador necesitaría mucho tiempo para tratar con todas, por lo que se pierde el sentido de lo que se trataba de lograr.

Si tratáramos de quitar más puntos para así mandar otras máquinas para ayudar al observador a interpretar el resultado, sería absurdo, pues lo único que lograríamos sería aumentar el tamaño de las regiones donde se pierde el determinismo. Pues los conos futuros de todos estos puntos serían regiones donde la información es desconfiable.

Pero entonces ¿cómo puede  $P$  asegurarse que realmente paró la máquina o que la respuesta al problema de decisión la obtuvo la máquina? Pues lo más fácil sería configurar la computadora de forma tal que nos envíe un "1" si es que la respuesta es positiva a cualquiera de éstas preguntas. Pero si emerge de la singularidad un "1" el observador podría ser engañado y pensar tiene una respuesta. Algo que

viene a la mente es pensar que podría configurar a  $C$  de forma que al tener una respuesta positiva a cualquiera de los problemas envíe una secuencia de números suficientemente compleja para que la posibilidad de que salga de la singularidad un arreglo de números parecidos sea muy baja, pero de nuevo, no sabemos qué podría salir de ahí. Es más, podríamos configurarla de forma que la señal sea el nombre del observador en binario, pero no importa qué tan complejo lo hagamos, estamos de vuelta al mismo problema. De la singularidad puede salir cualquier cosa y no lo podemos predecir. El determinismo dado por la superficie acronal de nuestra región pierde todo el sentido al retirar un punto y contar con una singularidad. Es un precio que, por tener un punto de MH, debemos pagar. Pero un poco más adelante hablaremos de una forma de resolver este problema.

### 5.0.2. Identificar dos secciones

De nuevo supongamos que el observador  $P$  sigue la línea de mundo  $\gamma_1$  y la trayectoria de la computadora  $C$  es  $\gamma_2$ .  $\Sigma$  es la superficie acronal.

En 5.2 elongamos un punto, siendo topológicamente equivalente a una la línea  $\alpha$  y la identificamos con  $\beta$ . Ambas secciones están identificadas por lo que  $C$  al llegar a  $\alpha$  se identifica con  $\beta$  y podemos modificar el ángulo de su trayectoria haciendo que quede completamente vertical durante una infinidad de tiempo propio para  $C$  y mantenerla atrapada. Al detenerse el cálculo, si es que lo hace, modificar su ángulo y enviar una señal al observador,  $P$ . De esta forma si el observador llega a  $p'$  y no recibió la señal que la máquina concluyó los cálculos sabrá la respuesta del problema de la parada con certeza. Pues si la recibe será en un punto  $p$  anterior a  $p'$ .

Para esta región se tiene una ventaja a comparación del ejemplo anterior. Es que podemos contar con que la máquina no se "atrapa" en un punto como antes. Pero la desventaja es que se pierde la causalidad.

Lo único que hay que cuidar es que la ubicación de la computadora, al tener una posición donde se identifica de manera "vertical", es tal que la señal pueda salir para interceptar la trayectoria de  $P$  sin que  $\alpha$  esté en su camino y la señal se quede atrapada.



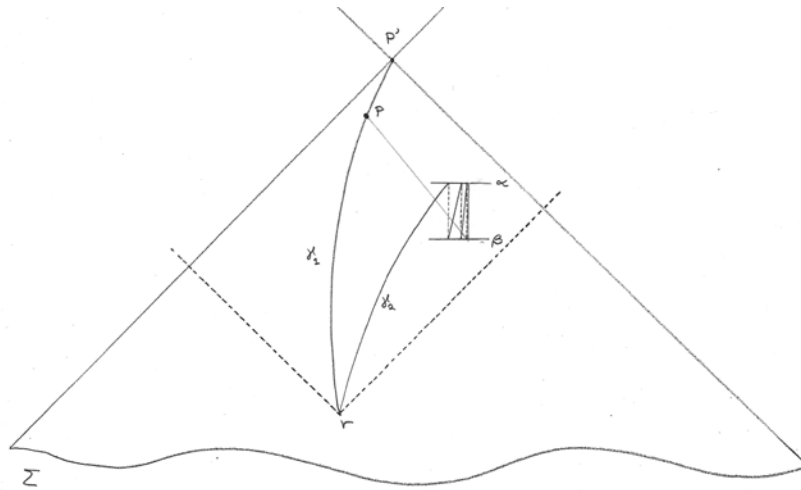


Figura 5.2: Se retira un punto el cual se identifica con otra región y se extiende en líneas, topológicamente equivalente a retirar dos secciones  $\alpha$  y  $\beta$ . Donde  $\alpha, \beta \in D^+[\Sigma] \subset I-(p')$ .

### 5.1. Implicaciones filosóficas en los espacios-tiempo de MH

Según Popper toda teoría científica puede ser aceptada, pero no ser verificada. Esto pues según su ideología, basada en el falsacionismo, no es posible demostrar un hecho científico el cual no puede ser refutado mediante un contraejemplo [26]. El falsacionismo es uno de los pilares del método científico. Un ejemplo que se hace comúnmente para ilustrar esta ideología es el argumento sobre el color de los cuervos. Uno podría pensar que todos los cuervos son negros, pero esto se basa simplemente en el hecho que no se ha visto uno de otro color. No es hasta que alguien ve un cuervo de otro color que toda esa "teoría" sobre el color de los cuervos deja de ser verdadera. Justamente la relevancia de esa teoría se basa en el hecho que no contamos con una infinidad de tiempo para verificar todas las posibilidades existentes para poder fundamentar una teoría.

Una pregunta interesante debido a la estructura que nos brindan los espacios-tiempo de M-H, es si justamente esta forma de verificabilidad sigue teniendo relevancia cuando contamos con una infinidad de tiempo para demostrar la veracidad de una teoría científica. Pues, regresando al ejemplo de los cuervos, en un espacio-tiempo de M-H podemos verificar cualquier teoría sin necesidad de

recurrir al falsacionismo. Claro que para motivos de este trabajo necesitamos que sea un problema computable para poder resolverlo con una máquina de Turing.

### 5.1.1. Determinismo

El determinismo es un concepto que para diversos autores ha sido motivo de debate. Para algunos, como Popper, el determinismo era algo inconcebible. Pues para ellos la libertad humana y la epistemología entran en juego. Para otros, como Laplace, la realidad está regida por él [27].

El determinismo consiste en la teoría en que todo lo que nos rodea está ligado de forma causal a eventos que les anteceden. En espacios-tiempo "comunes" el determinismo es algo que se podría poner sobre la mesa, pues si contamos con una superficie acronal  $\Sigma$  podríamos conocer todas las condiciones iniciales, pues ponemos las condiciones iniciales en ella. Y así darnos una idea de lo que va a suceder en un futuro. Pero, en espacios-tiempo como el de Malament-Hogarth, a mi punto de vista, el determinismo deja de estar de nuestro lado al momento de tener singularidades de las cuales pueden emerger "cosas" las cuales desconocemos. Por lo que de los puntos que retiramos perdemos todo sentido determinista en el cono futuro que se forma a partir de él. Es por eso que mientras más puntos retiremos para realizar nuestro objetivo, perdemos seguridad en que la respuesta que recibe el observador es verídica si no se plantea el problema de forma conveniente desde el principio.

Laplace defendía el determinismo. Para él, si un "demonio" pudiera conocer absolutamente todas las condiciones que son parte del universo. Éste podría conocer todo lo que ha sucedido y sucederá a ciencia cierta. Hace referencia a un ente no humano, pues somos seres finitos y no somos capaces de conocer en su totalidad al universo. Para él, las leyes de Newton rigen todo en la naturaleza, por lo que mediante el conocimiento y dominio de dichas leyes, todo en la naturaleza está determinado.

"Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la Naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del uni-

verso y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.” [28]

Justamente el par (Computadora, observador) en un espacio-tiempo de MH podría hacer alusión al demonio al que Laplace se refería. Aunque claro, es probable que este tipo de ejemplos no pasaran por su cabeza debido al contexto histórico.

Popper, en cambio, defendía que el determinismo no era cierto. Algunos autores alegan que el sustento en el que se basaba Popper para este argumento era que confundía predictibilidad con determinismo.

Para Popper el determinismo no podía ser cierto, pues entonces iría en contra del falsacionismo. Pues al aceptar que están determinadas algunas cosas y pueden ser demostrados algunos resultados según las condiciones iniciales, estaría contradiciendo el hecho de que nada puede ser probado. Y estaría aceptando el hecho que podemos conocer con certeza de forma experimental las condiciones iniciales de un sistema.

”...mantengo que el determinismo Laplaciano es insostenible y, además, que no lo requieren ni la física clásica ni la contemporánea. Este es un cometido serio, que no tiene nada que ver con subterfugios verbales. Mi argumentación, pues, será más en un plano cosmológico: hablaré del carácter de nuestro mundo en vez de hablar del significado de las palabras.” [29]

El contexto histórico de cada autor es fundamental para comprender el porqué de la ideología de cada uno. Laplace vivió en los años 1800's, en ese momento las leyes de la física seguían regidas al cien por ciento por la mecánica Newtoniana. No era siquiera posible creer que podía existir algo más que lo que Newton describió en su momento. Pues lo que era la realidad para ese entonces es lo observable. Laplace sólo pensaba en la parte teórica y respaldaba su ideología en eso. En cambio, Popper vivió la época del nacimiento de la mecánica cuántica y relativista. El principio de incertidumbre ya estaba presente, los agujeros negros y singularidades del espacio-tiempo comenzaban a entrar en el juego de la ciencia. Y aunque si, las ecuaciones de movimiento son deterministas como defendía Laplace, debido al teorema de existencia y unicidad, al plantear el problema

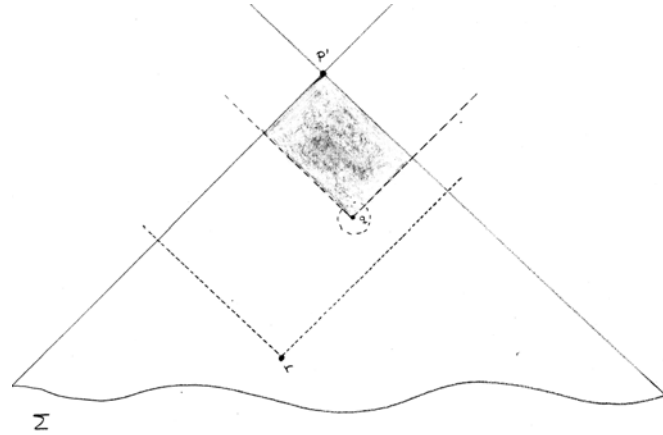


Figura 5.3: Se retira un punto  $q \in D^+(\Sigma)$ . De esta forma se observa que la región sombreada  $I^+(q)$  es la región donde se pierde el determinismo.

práctico no se pueden conocer las condiciones iniciales a ciencia cierta, pues no importa que tan precisos sean nuestros instrumentos de medición, siempre habrá un error a considerar por lo que el determinismo no tiene sentido al llevarlo a la práctica.

Laplace consideraba simplemente el determinismo en la física teórica, pero al llevarlo a la experimentación, tal como Popper defendía, el determinismo deja de tener sentido.

## 5.2. Evitar el indeterminismo: Retirar un punto en el horizonte de Cauchy

En el presente trabajo tenemos que el determinismo se pierde en algunas regiones al retirar puntos, pues como se observa en 5.3 se pierde toda la información que contiene el cono futuro de  $q$ . Ya que al entrar en  $I^-(p') \cap I^+(q)$ , puede salir algo desconocido de  $q$  y perdemos conocimiento de las condiciones iniciales de lo que pueda suceder ahí, por lo que el determinismo se pierde. Es así que lo más conveniente es que  $q$  se encuentre en el horizonte de Cauchy  $H^+[\Sigma]$  para que la región no determinista sea la menor posible y así asegurar que la información

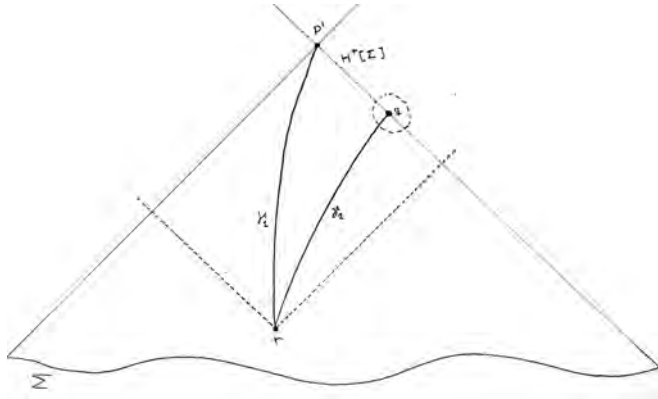


Figura 5.4: Se retira un punto  $q \in H^+(\Sigma)$ . Se observa que la región indeterminista se reduce al máximo.

que recibe el observador sea confiable. Así, con la misma idea que se planteó al inicio de este capítulo pero ahora  $q \in H^+(\Sigma)$ , como se muestra en 5.4. Por lo que tomando este panorama en cuenta podemos confiar en la información que recibe  $P$  al llegar a  $p'$ . Siendo así que esta propuesta es la más conveniente para el objetivo de este trabajo. Pues en el único lugar donde  $P$  podría dudar del origen de un resultado es justamente en el punto  $p'$  pues ahí, en caso de salir un fotón de  $q$  le llegaría en ese momento. Entonces, en caso de recibir una señal falsa en el punto  $p'$ , al ser sólo un instante, podría solo comprobar si este cumple con la condición de ser un contraejemplo en caso que no haya recibido otra señal de  $C$ . Y así podría demostrar su conjetura.

Es así que esta última propuesta es la más conveniente para poder realizar una supertarea minimizando las regiones del indeterminismo. El problema de la parada puede ser resuelto en este tipo de espacios-tiempo. Se consideran estos, pues al ser un problema algorítmico con una infinidad de pasos, requeríamos de una infinidad de tiempo para conocer la verdad. Con espacios-tiempo de MH contamos con esa infinidad de tiempo y podemos, aunque sacrificando el determinismo, realizar cálculos que normalmente no podríamos realizar.

Los seres humanos no pueden lidiar con la ambigüedad por lo que siempre están

buscando formas de axiomatizar lo que les rodea. Un ejemplo claro es Descartes con el método científico. El determinismo es una forma de respaldarse para hacerse creer que comprendemos lo que nos rodea y nos domina. Por eso el falsacionismo duele tanto, pues no poder comprender lo que nos rodea a ciencia cierta es como si nos quitaran el piso y dejáramos de saber donde estamos parados.

A Popper no le dio miedo admitir que no sabemos nada, que no podremos conocer nunca en su totalidad. La ignorancia duele, pero duele más el hecho de que no somos capaces de conocer. Y de hecho, en el fondo, ese es el propósito de este trabajo. Es un intento por conocer respuestas que en el mundo real no podríamos saber. Por lo que todo en la ciencia y la naturaleza humana siempre se reduce a tratar de comprender lo que nos rodea y salir de las tinieblas de la ignorancia.



# 6

## Conclusiones

En el presente trabajo se abordaron temas de computación, física, matemáticas y un poco de filosofía. De manera que se integraron diversas ramas de la ciencia para lograr el objetivo de este trabajo. El cual consistió en proponer y analizar modificaciones a la topología del espacio-tiempo para la realización de supertareas.

El objetivo del trabajo se cumple, pues pudimos observar que es posible modificar la topología del espacio-tiempo para elaborar una supertarea. Y que en el universo existen regiones ya conocidas donde podríamos realizarlas, siendo éstas los agujeros negros. Claro, las propuestas que se dan, aparte de los agujeros negros, tienen implicaciones desfavorables en algunos sentidos, por lo que esta idea se debe seguir desarrollándose.

Probablemente el lector no quede convencido que regiones como estas puedan ser de utilidad. Esto pues, podría pensarse que no se conocen en el universo observado lugares donde las particularidades que se manejan en este trabajo se cumplan, a excepción de agujeros negros. Es decir, regiones del espacio-tiempo que sean de Malament-Hogarth. Pero justamente es por eso que tiene sentido pensarlo. No sabemos, aún, si algún lugar desconocido del universo cumple con las características que se proponen en esta tesis.

Las modificaciones en la topología del espacio-tiempo que se plantean y se analizan a lo largo de la tesis son casos anteriormente pensados por otros autores, algunos con el objetivo de realizar supertareas. Las implicaciones computaciona-



les y físicas de la ejecución de supertareas en agujeros negros no es muy novedosa, pero la modificación de la topología del espacio-tiempo para dicho propósito es reciente.

Este trabajo, por ser de licenciatura en matemáticas, no entra a fondo en cuestiones físicas o computacionales. Y da pie a seguir desarrollando ideas sobre la realización de supertareas. En la actualidad, propuestas de espacios-tiempo como la que se dan en este trabajo están siendo estudiadas en el área de computación cuántica.

Esta tesis puede servir como introducción a proyectos más enfocados en la teoría de la complejidad computacional. Por ejemplo, el problema de P contra NP. Esto pues, es posible que este problema tenga solución en espacios-tiempo de MH. Siendo un seguimiento específico para este trabajo.

# A

## Definiciones Generales

**Definición A.0.1** (Variedad diferenciable).  $\mathcal{M}$  es una variedad diferenciable  $m$ -dimensional si

1.  $\mathcal{M}$  es un espacio topológico;
2.  $\mathcal{M}$  está provista por una familia de pares  $\{(W_i, \varphi_i)\}$ ;
3.  $\{W_i\}$  es una familia de conjuntos abiertos que cubren  $\mathcal{M}$ , esto es  $\bigcup_i W_i = \mathcal{M}$ .  $\varphi_i$  es un homeomorfismo de  $W_i$  a un subconjunto abierto  $U_i$  de  $\mathbb{R}^m$  ??;
4. dados  $W_i$  y  $W_j$  tales que  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ , el mapeo  $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  de  $\varphi_j(W_i \cap W_j)$  a  $\varphi_i(W_i \cap W_j)$  es infinitamente diferenciable.

Al par  $(W_i, \varphi_i)$  se llama carta, cuya definición formal está más adelante. A la familia  $\{(W_i, \varphi_i)\}$  se le llamará atlas. A  $W_i$  le llamaremos la vecindad coordinada y a  $\varphi_i$  la función coordinada o, simplemente coordinada.

**Definición A.0.2** (Mapeo diferenciable). Sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapeo de una variedad  $m$ -dimensional  $\mathcal{M}$  a una variedad  $n$ -dimensional  $\mathcal{N}$ . Si un punto  $p \in \mathcal{M}$  es mapeado a un punto  $f(p) \in \mathcal{N}$ , digamos  $f : p \mapsto f(p)$ . Tomamos una carta  $(U, \varphi)$  en  $\mathcal{M}$  y  $(V, \psi)$  en  $\mathcal{N}$ , donde  $p \in U$  y  $f(p) \in V$ . Así,  $f$  tiene la siguiente presentación coordinada:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{A.1}$$

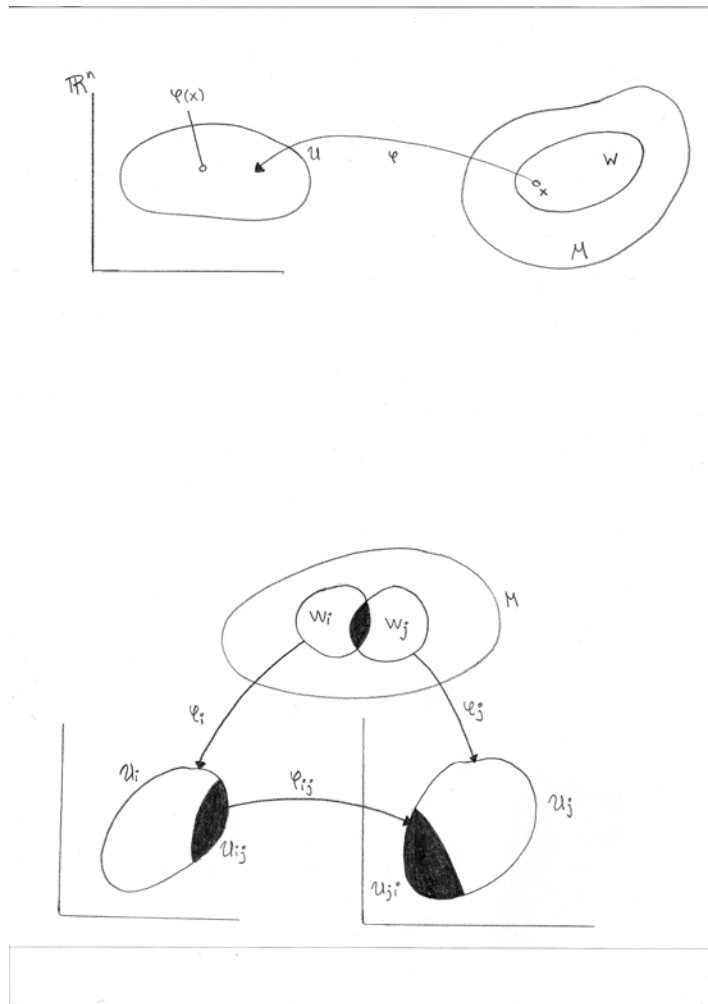


Figura A.1: Un homeomorfismo  $\varphi_i$  mapea  $W_i$  a un subconjunto abierto  $U_i \subset \mathbb{R}^m$ , otorgándole coordenadas a un punto  $p \in W_i$ . Si  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ , la transición de un sistema de coordenadas a otro es suave.

**Definición A.0.3** (Mapeo diferenciable alternativa). *Una función real  $f$  evaluada en una  $n$ -variedad diferencial  $M$  es diferenciable en un punto  $p \in M$  si es diferenciable en cualquier carta coordenada definida alrededor de  $p$ , i.e. si  $(W, \varphi)$  es una carta donde  $W$  es un conjunto abierto alrededor de  $p$  en  $M$  y  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el mapeo que define la carta, entonces  $f$  es diferenciable si y sólo si*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{A.2}$$

*es diferenciable en  $\varphi(p)$*

**Definición A.0.4** (Carta). *Una carta es un dominio  $U \subset \mathbb{R}^n$  junto con un mapeo biyectivo  $\varphi : W \rightarrow U$  de un subconjunto  $W$  en una variedad  $M$  en  $U$ . Llamamos a  $\varphi(x)$  la imagen del punto  $x \in W \subset M$  en la carta  $U$ .*

**Definición A.0.5** (Cartas consistentes). *Dos cartas  $\varphi_i : W_i \rightarrow U_i$  y  $\varphi_j : W_j \rightarrow U_j$  son consistentes si:*

1. *Los conjuntos  $U_{ij}$  y  $U_{ji}$  son abiertos (posiblemente vacíos);*
2. *Los mapeos  $\varphi_{ij}$  y  $\varphi_{ji}$  (los cuales están definidos si  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ ) son difeomorfismos en dominios de  $\mathbb{R}^n$*

**Definición A.0.6** (Atlas). *Una colección de cartas  $\varphi_i : W_i \rightarrow U_i$  es un atlas en  $M$  si*

1. *Cualesquiera dos cartas son consistentes;*
2. *cualquier punto  $x \in M$  tiene su imagen en por lo menos una carta.*

**Definición A.0.7** (Atlas equivalentes). *Dos atlas en  $M$  son equivalentes si su unión es de nuevo un atlas (i.e., si cualquier carta del primer atlas es consistente con cualquier carta del segundo.)*

**Proposición A.0.1.** *La estructura de una variedad diferenciable en  $M$  es una clase de equivalencia de atlas.*

**Definición A.0.8** (Cartas analíticamente compatibles). *Una carta de coordenadas compleja en  $M$  es una pareja  $(U, \phi)$ , donde  $U \subset M$  es un abierto y*

$\phi : U \rightarrow V \subset C$  es un homeomorfismo. Dos cartas  $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$  son analíticamente compatibles si la composición  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$  es un biholomorfismo.

**Definición A.0.9** (Vector tangente). Un vector tangente  $v_x$  a una variedad diferenciable  $X$  en el punto  $x$  es una función lineal de un espacio de funciones definido y diferenciable en algunas vecindades  $x \in X$  a  $\mathbb{R}$  las cuales satisfacen la regla de Leibniz:

$v_x(\alpha f + \beta g) = \alpha v_x(f) + \beta v_x(g)$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f, g$  funciones en  $X$  diferenciable en  $x$ ;

$$v_x(fg) = f(x)v_x(g) + g(x)v_x(f) \text{ Regla de Leibniz}$$

Estas dos propiedades juntas implican que  $v_x(\alpha) = 0$ .

Un mapeo lineal que satisface la regla de Leibniz se le llama derivación. Así,  $v_x(f)$  es la derivada direccional de  $f$  a lo largo de  $v_x$

**Definición A.0.10** (Espacio vectorial tangente  $T_x X$ ). El espacio  $T_x X$  de vectores tangentes a  $X$  en  $x$  junto con una suma y multiplicación definida por

$$(\alpha v_x + \beta v_x)(f) = \alpha v_x(f) + \beta v_x(f)$$

es un espacio vectorial llamado el espacio vectorial tangente.

**Definición A.0.11** (Homeomorfismo). Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Un mapeo  $f$  tal que  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo si es continuo y tiene inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  también continua.

**Definición A.0.12** (Difeomorfismo). Sea  $f : M \rightarrow N$  un homeomorfismo y  $\psi$  y  $\varphi$  funciones coordenadas. Si  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  es invertible (esto es, existe un mapeo  $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ ) y ambas  $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$  y  $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$  son  $C^\infty$ , a  $f$  se le llama difeomorfismo y  $M$  se dice ser difeomorfo a  $N$  y vice versa, denotado por  $M \equiv N$

**Definición A.0.13** (Atlas complejo). Un atlas complejo en  $M$  es una colección de cartas de coordenadas  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$ , donde  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Dos atlas complejos son analíticamente equivalentes si toda carta de  $\mathcal{U}$  es analíticamente compatible con toda carta de  $\mathcal{U}'$

**Definición A.0.14** (Estructura compleja). *Una estructura compleja en  $M$  es una clase de equivalencia de atlas analíticamente equivalentes en  $M$ , de acuerdo con la relación de equivalencia definida en la def anterior.*

**Definición A.0.15** (Superficie de Riemann). *Una superficie de Riemann  $X$  es una pareja  $(X, \nu)$  donde  $X$  es una superficie topológica real conexa y  $\nu$  es una estructura compleja en  $X$ .*

**Definición A.0.16** (Espacio topológico). *Sea  $X$  cualquier conjunto y  $T = \{U_i \mid i \in I\}$  denota una cierta colección de subconjuntos de  $X$ . El par  $(X, T)$  es un espacio topológico si  $T$  satisface las siguientes condiciones:*

1.  $\emptyset, X \in T$
2. Si  $T$  es cualquiera (puede ser infinita) subcolección de  $I$ , la familia  $\{U_j \mid j \in J\}$  satisface que  $\bigcup_{j \in J} U_j \in T$ .
3. Si  $K$  es cualquier subcolección finita de  $I$ , la familia  $\{U_k \mid k \in K\}$  satisface que  $\bigcap_{k \in K} U_k \in T$

A  $X$  se le conoce a veces como espacio topológico. Los  $U_i$  se llaman conjuntos abiertos y  $T$  le da la topología a  $X$

**Definición A.0.17** (Métrica). *Una métrica  $d$  es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes condiciones:*

1.  $d(x, y) = d(y, x)$
2.  $d(x, y) \geq 0$  donde la igualdad se satisface si y sólo si  $x = y$
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

para cualesquiera  $x, y, z \in X$ . Si  $X$  es dotado por una métrica  $d$ ,  $X$  es convertido en un espacio topológico cuyos conjuntos abiertos están dados por discos abiertos,

$$U_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \quad (\text{A.3})$$

y todas sus posibles uniones. Así, la topología  $T$  se define como la topología métrica determinada por  $d$ . El espacio topológico  $(X, T)$  es llamado espacio métrico.

**Definición A.0.18** (Vecindad). *Supongamos que  $T$  nos da una topología para  $X$ ,  $N$  es una vecindad del punto  $x \in X$  si  $N$  es un subconjunto de  $X$  y  $N$  contiene algunos (cuando menos uno) conjuntos abiertos  $U_i$  al cual  $x$  pertenece. (El subconjunto  $N$  no es necesariamente abierto. Si  $N$  es abierto en  $T$ , se le llama vecindad abierta.)*

**Definición A.0.19** (Espacio de Hausdorff). *Un espacio topológico  $(X, T)$  es un espacio de Hausdorff si, para cualquier par arbitrario de puntos  $x, x' \in X$ , existen siempre vecindades  $U_x$  de  $x$  y  $U_{x'}$  de  $x'$  tales que  $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$*

**Definición A.0.20** (Cubiertas). *Sea  $(X, T)$  un espacio topológico. Una familia  $\{A_i\}$  de subconjuntos de  $X$  es una cubierta de  $X$  si*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X$$

*Si todas las  $A_i$  son conjuntos abiertos de la topología  $T$ , la cubierta se le llama cubierta abierta.*

**Definición A.0.21** (Compacidad). *Considere un conjunto  $X$  y todas las posibles cubiertas de  $X$ . El conjunto  $X$  es compacto si, para cada cubierta abierta  $\{U_i \mid i \in I\}$ , existe un subconjunto finito  $J$  de  $I$  tal que  $\{U_j \mid j \in J\}$  es también una cubierta de  $X$ .*

**Definición A.0.22** (Tensores). *Un tensor del tipo  $(q, r)$  es un objeto multilinear que mapea elementos de  $T_p^* \mathcal{M}$  y  $r$  elementos de  $T_p \mathcal{M}$  a un número real.*

$\mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  denota al conjunto del tipo  $(q, r)$  tensores en  $p \in \mathcal{M}$ . Un elemento de  $\mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  se escribe en términos de las bases como:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r} \quad (\text{A.4})$$

**Definición A.0.23** (Campo vectorial). *Si un vector es asignado de forma suave a cada punto de  $\mathcal{M}$ , se le llama campo vectorial sobre  $\mathcal{M}$ . En otras palabras,  $V$  es un campo vectorial si  $V[f] \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$  para cualquier  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ .*

Claramente cada componente de un espacio vectorial es una función suave de  $\mathcal{M}$  a  $\mathbb{R}$ . Un campo vectorial  $X$  en  $p \in \mathcal{M}$  se denota como  $X|_p$ , el cual es un elemento de  $T_p \mathcal{M}$ . De forma similar podemos definir un campo tensorial.

**Definición A.0.24** (Campo tensorial). Definimos un campo tensorial de tipo  $(q, r)$  con una asignación suave de un elemento de  $\mathcal{T}_{r,p}^q(\mathcal{M})$  en cada punto  $p \in \mathcal{M}$ . Al conjunto de campos tensoriales del tipo  $(q, r)$  en  $\mathcal{M}$  se le denota como  $\mathcal{T}_r^q(\mathcal{M})$

**Definición A.0.25** (Diagramas de Penrose). Son también conocidos como diagramas de Penrose-Carter. Son diagramas en  $\mathbb{R}^2$  que preservan la información sobre las relaciones causales entre los eventos del espacio-tiempo y representan regiones infinitas en diagramas finitos. Por lo que sacrifican información sobre las distancias entre eventos del espacio-tiempo. La métrica de los diagramas de Penrose es conformemente equivalente con una restricción bidimensional de la métrica real del espacio-tiempo que representan. El factor conforme es elegido de forma que se pueda representar todo el espacio-tiempo en un diagrama finito. La frontera no forma parte del espacio-tiempo original.

**Definición A.0.26** (Campos o cuerpos). Un campo es un anillo de división conmutativo, es decir, un anillo conmutativo y unitario en el que todo elemento distinto de cero es invertible respecto del producto. Así, un campo es un conjunto  $K$  en el que se han definido dos operaciones,  $+$  y  $\cdot$ , llamadas adición y multiplicación respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades:

1.  $K$  es cerrado para la adición y la multiplicación:

$$\text{Para todo } a, b \in K, a + b \in K \text{ y } a \cdot b \in K$$

2. Asociatividad de la adición y la multiplicación:

$$\text{Para toda } a, b, c \in K, a + (b + c) = (a + b) + c \text{ y } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. Conmutatividad de la adición y la multiplicación:

$$\text{Para toda } a, b \in K, a + b = b + a \text{ y } a \cdot b = b \cdot a.$$

4. Existencia de un elemento neutro para la adición y la multiplicación:

$$\text{Existe un elemento } 0 \in K, \text{ tal que para todo } a \in K, a + 0 = a.$$

$$\text{Existe un elemento } 1 \in K, \text{ diferente de } 0, \text{ tal que para todo } a \in K, a \cdot 1 = a.$$

5. Existencia de elemento opuesto y de inversos:

$$\text{Para cada } a \in K, \text{ existe un elemento } -a \in K, \text{ tal que } a + (-a) = 0.$$



Para cada  $a \neq 0$  en  $K$ , existe un elemento  $a^{-1} \in K$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

6. Distributividad de la multiplicación respecto de la adición

Para toda  $a, b, c, \in K$ ,  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ .

**Definición A.0.27** (Grupo). Las condiciones necesarias y suficientes para que el par  $(G, \otimes)$  sea un grupo son: Si  $a, b \in G$ ,  $a \otimes b \in G$ , con  $c \in G$ . La operación  $\otimes$  debe cumplir con lo siguiente:

1. Ser cerrado bajo esa operación
2. Existir un neutro  $a \in G$  tal que  $a \otimes b = b$
3. Existir un inverso  $b' \in G$  tal que  $b' \otimes b = a$
4. Ser asociativo

Y en caso de ser conmutativo es un grupo abeliano.

# B

## Geometria Diferencial

### B.1. Transporte paralelo, conexión y derivada covariante

Un vector  $X$  es una derivada direccional que actúa en  $f \in F(X)$  como  $X : f \mapsto X[f]$ . Pero notemos que no hay ninguna derivada direccional actuando sobre un campo tensorial del tipo  $(p, q)$ , el cual surge de la estructura diferenciable de  $\mathcal{M}$ . Para resolver este problema necesitamos una estructura extra la cual no dependa de la derivada de los vectores en  $\mathcal{M}$ , la cual llamaremos conexión. Dicha conexión nos dice cómo se transportan los tensores a través de una curva y así podemos comparar unos con otros.

Para lograr definir esta estructura, primero debemos entender el concepto de transporte paralelo y derivada covariante.

#### B.1.1. Conexiones lineales

Cada vector es tangente a la variedad en un punto  $p$  y dicho vector genera un espacio tangente diferente para cada punto. Por lo que necesitamos definir una estructura la cual nos diga como comparar dos vectores en una variedad.

**Definición B.1.1** (Conexión lineal). Sean  $X, Y$  espacios vectoriales. Una conexión lineal es un mapeo  $\nabla$  que satisface  $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$  tal que

1.  $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$  es lineal en el segundo argumento para funciones constantes pero

2.  $\nabla_x[fY] = f\nabla_X Y + X[f]Y$  no es lineal en el segundo argumento pero si lo es en el primero.

3.  $\nabla_f X Y = f\nabla_X Y$

y actúa en funciones de la siguiente forma

4.  $\nabla_X f = X[f]$

**Definición B.1.2** (Derivada covariante). *La derivada covariante de un campo vectorial  $\nabla Y$  es un campo tensorial  $(1, 1)$ , pues es un mapeo lineal.*

$\nabla Y : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$

Consideremos una base para  $T_p\mathcal{M}$   $\{\hat{e}_{(a)}\}$  entonces

1.  $\nabla \hat{e}_{(a)}$  es un tensor  $(1, 1)$
2.  $\nabla \hat{e}_{(a)} \hat{e}_{(b)}$  es un elemento de  $T_p\mathcal{M}$  así existen  $\Gamma_{ba}^c$  escalares tal que  $\nabla \hat{e}_{(a)} \hat{e}_{(b)} = \Gamma_{ba}^c \hat{e}_c$ . Donde  $\Gamma_{ba}^c$  son las componentes de la conexión.

Notemos que la conexión está completamente determinada por la elección de  $\Gamma_{ba}^c$  y la base para  $T_p\mathcal{M}$ .

Así, la componente sobre la dirección  $O$  de  $\nabla_X Y$  es

$$[\nabla_X Y]^c = X^a \hat{e}_{(a)}(Y^c) + \Gamma_{ba}^c X^a Y^b = [\hat{e}_{(a)} Y^c + \Gamma_{ba}^c Y^b] X^a \quad (\text{B.1})$$

en una base coordenada. i.e.  $\hat{e}_{(a)} = \frac{\partial}{\partial x^a}$

Así

$$[\nabla_X Y]^c = \left[ \frac{\partial}{\partial x^a} Y^c + \Gamma_{ba}^c Y^b \right] X^a \quad (\text{B.2})$$

Y así tenemos que

$$[\nabla Y]_a^c = Y_{,a}^c + \Gamma_{ba}^c Y^b \equiv Y_{;a}^c \quad (\text{B.3})$$

**Definición B.1.3** (Transporte paralelo). *Si  $\nabla_X Y = 0$  entonces se dice que  $Y$  se transporta paralelamente con respecto a  $X$ .*

**Definición B.1.4** (Geodésicas). *Sea  $X$  un campo vectorial tal que  $\nabla_X X = 0$  entonces las curvas integrales de  $X$  se llaman geodésicas.*

**Teorema B.1.1.** *Existe una única geodésica a través de un punto dado  $p \in M$  en una dirección dada  $X_p$*

*Demostración.* Elijamos coordenadas locales  $x^a$ .  $X^a$  las componentes del vector tangente a la misma curva .

$$\frac{d}{d\tau}x^a(\tau) = X^a[x^b(\tau)], \quad x^a(\tau) = x_p^a$$

La curva es geodésica si y sólo si  $0 = [\nabla_X X]^a = X^a{}_{;b} X^b = [X^a{}_{;b} + \Gamma_{bc}^a X^c]X^b = X^a{}_{;b} X^b + \Gamma_{bc}^a X^c X^b$

Pero  $f_{,a} X^a = X[f] = \frac{df}{d\tau}$ , así  $X^a{}_{;b} X^b = \frac{d}{d\tau}X^a = -\Gamma_{bc}^a X^c X^b$  ó  $\frac{d^2}{d\tau^2}x^a(\tau) = -\Gamma_{bc}^a(x^a(\tau)) \frac{dx^c}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau}$ . Ésta es una ecuación diferencial ordinaria para  $x^a(\tau)$  sujeta a los datos iniciales  $x^i(0) = x_p^i$ ,  $\frac{dx^i}{d\tau} = x_p^i$  y por el teorema fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que la solución existe localmente y es única. Así la ecuación de la geodésica es, en coordenadas locales,

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \tag{B.4}$$

□

**Corolario B.1.1.** *Localmente existe una única geodésica que une dos puntos vecinos.*

Notemos que el corolario anterior falla globalmente.

## B.2. Torsión y curvatura

Recordemos que  $\nabla$  no es un tensor pero hay dos objetos centrales relacionados con él.

**Definición B.2.1** (Torsión). *La torsión es un campo tensorial  $(0, 2)$   $T$  definido por*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{B.5}$$

Notemos que  $T(X, Y) = -T(Y, X)$  por lo que se muestra linealidad en el primer argumento. Así,  $T(X + Z, Y) = T(X, Y) + T(Z, Y)$

**Definición B.2.2** (Curvatura de Riemann). *La curvatura de Riemann es un campo tensorial  $(1, 3)$  donde*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z \tag{B.6}$$

en cada punto.

**Definición B.2.3** (Base coordenada). Sea  $\{\hat{e}_{(a)}\}$  una base para  $T_p\mathcal{M}$  si  $[\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}] = 0 \forall a, b$  de todos los puntos  $p \in \mathcal{M}$  entonces  $\{\hat{e}_a\} = \{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$  es una base coordenada.

En una base coordenada  $R(X, Y)Z$  se reduce a  $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$ .

Ahora, consideremos  $R(\cdot, \cdot)X = \nabla \nabla X$ . Sean  $Y, Z$  campos vectoriales con componentes  $Y^a, Z^b \{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$  entonces  $R(Y, Z)X = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X [\nabla_Z X]_b^a = [X^a;_b + \Gamma_{bc}^a X^c] Z^b = X^a;_c Z^c$

$[\nabla]_Y [\nabla_Z X]^a = [X^a;_c Z^c;_b Y^b] = X^a;_{cb} Z^c Y^b + Z^c;_b X^a;_c Y^b$  Ahora,  $[\nabla_Y X]^a = X^a;_c Y^c$

$[\nabla_Z \nabla_Y X]^a = [X^a;_c Y^c;_b Z^b] = X^a;_{cb} Y^c Z^b + Y^c;_b X^a;_c Z^b$

$X^a;_{cb} [Z^c Y^b - Y^c Z^b] + Z^c;_b Y^b X^a;_c - Y^c;_b Z^b X^a;_c = Z^c Y^b [X^a;_{cb} - X^a;_{bc}] + X^a;_c \{[Y, Z]\}$  entonces tenemos que  $X^a;_{cb} - X^a;_{bc} = R_{dcb}^a X^d$

**Definición B.2.4** (Vector conector). Sea  $X$  un vector tangente a una congruencia. A cualquier campo vectorial tal que  $[X, Z] = 0$  se le llama vector conector.

**Teorema B.2.1.** Sea  $X$  un vector tangente a una congruencia y  $Z$  un vector conector. Suponemos que  $T = 0$ . La aceleración de  $Z \nabla_X \nabla_Y Z$  satisface la ecuación de derivación geodésica  $\nabla_X \nabla_X Z = -R(X, Z)X$

*Demostración.*  $[X, Z] = 0 = T(X, Z)$  entonces  $\nabla_X Z = \nabla_Z X$ , así tenemos que  $\nabla_X \nabla_X Z = \nabla_X \nabla_Z X = \nabla_Z \nabla_X X + R(Z, X)X$  i.e.  $R(Z, X)X = -R(X, Z)X$ . La forma de la componente es  $\frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} = -R_{bcd}^a X^b X^c Z^d$   $\square$

**Definición B.2.5** (Tensor de curvatura de Ricci). Al tensor de curvatura obtenido por la traza del tensor de Riemman  $Ric = Tr[Riemman]$  se le llama tensor de curvatura de Ricci. El cual en componentes se ve como  $R_{bd} = R_{bad}^a$ .

**Teorema B.2.2.** (Teorema fundamental de la geometría Riemanniana) Si una variedad está equipada con una conexión y una métrica tal que la torsión asociada se anula y la compatibilidad métrica existe i.e.  $\nabla g = 0$ , entonces  $\nabla$  es única y está dada por

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} [g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}] \quad (B.7)$$

en una base coordenada. A  $\Gamma_{bc}^a$  se les conoce como símbolos de Christoffel.

Una variedad con una conexión tal que  $T(\nabla) = 0$  tiene una curvatura que satisface  $R_{bcd}^a = 0$  y las identidades de Bianchi  $R_b^a[cd; c] = 0$

**Definición B.2.6** (Escalar de Ricci). *El escalar de Ricci se define como*

$$R = g^{ab}R_{ab} = \text{Tr}(\text{Ric}) \quad (\text{B.8})$$

*el cual es la traza del tensor de Ricci.*

**Definición B.2.7** (Tensor de Einstein). *El tensor de Einstein se define como*

$$\mathcal{G}_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \quad (\text{B.9})$$

*En este caso las identidades de Bianchi contraídas son  $0 = \mathcal{G}^a_{b;a}$*



# Bibliografía

- [1] R. Penrose. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1972.
- [2] Hawking SW Ellis GFR. The large scale structure of space-time, 1973.
- [3] John Earman and John D Norton. Forever is a day: Supertasks in pitowsky and malament-hogarth spacetimes. *Philosophy of Science*, 60(1):22–42, 1993.
- [4] Mark Hogarth. *Predictability, computability, and spacetime*. PhD thesis, University of Cambridge, 1996.
- [5] John Earman. *Bangs, crunches, whimpers, and shrieks: Singularities and acausalities in relativistic spacetimes*. Oxford University Press, 1995.
- [6] Michael Atiyah. Special article mathematics in the 20th century. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 34(1):1–15, 2002.
- [7] Wilfried Sieg. On computability. *Philosophy of Mathematics*, 4:549–630, 2009.
- [8] Alan Mathison Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London mathematical society*, 2(1):230–265, 1937.
- [9] Roger. Penrose. *The emperor's new mind: concerning computers, minds, and the laws of physics*. Oxford University Press, 1990.
- [10] Oron Shagrir. Supertasks do not increase computational power. *Natural Computing*, 11(1):51–58, 2012.



- 
- [11] B Jack Copeland and Oron Shagrir. Do accelerating turing machines compute the uncomputable? *Minds and Machines*, 21(2):221–239, 2011.
- [12] Aran Nayebi. Practical intractability: A critique of the hypercomputation movement. *Minds and Machines*, 24(3):275–305, 2014.
- [13] Roger Penrose. *El camino a la realidad: una guía completa de las leyes del universo*. Debate, 2016.
- [14] Merrilee H Salmon. *Introduction to the Philosophy of Science*. Hackett Publishing, 1999.
- [15] Carlo Rovelli. *Quantum gravity*. Cambridge university press, 2007.
- [16] Albert Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. 1905.
- [17] István Németi and Hajnal Andréka. Can general relativistic computers break the turing barrier? In *Conference on Computability in Europe*, pages 398–412. Springer, 2006.
- [18] Robert Irving Soare. Why turing’s thesis is not a thesis. In *Turing’s Revolution*, pages 297–310. Springer, 2015.
- [19] Eduardo Piza Volio. Una solución moderna para el “entscheidungsproblem”. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica*, 2005.
- [20] Giovanni Sommaruga and Thomas Strahm. *Turing’s Revolution: The Impact of His Ideas about Computability*. Birkhäuser, 2016.
- [21] Gualtiero Piccinini. *Physical computation: A mechanistic account*. OUP Oxford, 2015.
- [22] Robert Fraser and Selim G Akl. Accelerating machines: a review. *The International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 23(1):81–104, 2008.
- [23] Itamar Pitowsky. The physical church thesis and physical computational complexity. *Iyyun: The Jerusalem Philosophical Quarterly*, pages 81–99, 1990.

- 
- [24] Gábor Etesi. Note on a reformulation of the strong cosmic censor conjecture based on computability. *Physics Letters B*, 550(1):1–7, 2002.
- [25] Hans Reichenbach. *The philosophy of space and time*. Courier Corporation, 2012.
- [26] Karl Raimund Popper and Víctor Sánchez de Zavala. *La lógica de la investigación científica*. 2008.
- [27] Martín Lopez Corredoira. Determinismo en la física clásica: Laplace vs. popper o prigogine. 2001.
- [28] Pierre Simon de Laplace. *Théorie analytique des probabilités*, volume 7. Courcier, 1820.
- [29] Karl Raimund Popper. *El universo abierto: Un argumento en favor del indeterminismo*, volume 2. Tecnos, 1986.