



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS FUERTES  
K-TRANSITIVAS, CON K MENOR A 5 O CON UN CICLO DE  
LONGITUD MAYOR A K.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**PABLO ALBERTO LARA MARTÍNEZ**

**TUTORA:**

**DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2017**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

### 1. Datos del Alumno

Lara  
Martínez  
Pablo Alberto  
9161171024  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
413005539

### 2. Datos de la tutora

Dra.  
María del Rocío  
Sánchez  
López

### 3. Datos del sinodal 1

Dra.  
Hortensia  
Galeana  
Sánchez

### 4. Datos del sinodal 2

Mat.  
Laura  
Pastrana  
Ramírez

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Juan José  
Montellano  
Ballesteros

### 6. Datos del sinodal 4

Dra.  
Ingrid Chantal  
Torres  
Ramos

### 7. Datos del trabajo escrito

Una caracterización de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas,  
con  $k$  menor a 5 o con un ciclo de longitud mayor a  $k$   
1191 p  
2017

# Agradecimientos

Les agradezco infinitamente a mi mamá Jaqueline y a mi hermana Andrea por su apoyo incondicional en todo el trayecto de mi formación académica y personal, en especial en esta etapa universitaria que concluye con el presente trabajo. Muchas gracias por darme la fuerza para seguir adelante y estar conmigo aún estando en la distancia.

A mis abuelitos Toño y Carlotita por su guía a través de su ejemplo y por estar presentes apoyándome en cada momento de mi vida.

A Helena por apoyarme en esta etapa universitaria, por su comprensión y por motivarme a seguir mejorando en cada aspecto de mi vida, tanto personal como académica, muchas gracias por todo.

A Genaro por ser un enorme apoyo para mi y mi familia a lo largo de este camino universitario y por ser estar presente en todos esos momentos.

A mis tíos Oscar y Laura por abrirme las puertas de su casa, les agradezco por todo su apoyo en esta etapa de mi vida.

A mi papá Alberto por enseñarme a aprender de mis errores y por recordarme lo que es importante en mi vida.

A toda mi familia por ayudarme en todos esos momentos que lo necesite y por todos esos momentos que me han inspirado a seguir mis sueños.

A todos mis amigos quienes me han acompañado en todo este tiempo apoyándome y con quienes compartí esta experiencia universitaria, han sido como una segunda familia.

A mi tutora Rocío Sánchez por todo el tiempo y dedicación invertido en la realización de este proyecto y además de toda la ayuda en mi formación como matemático, muchas gracias por toda la paciencia e interés en mi trabajo.

A mis sinodales Hortensia Galeana, Laura Pastrana, Juan José Montellano e Ingrid Torres, por su interés y su tiempo dedicado a mi trabajo y a la corrección del mismo, sin ellos este proyecto no habría sido posible.

A todos mis profesores de la carrera de matemáticas por ayudarme a lo largo de la carrera a formarme como matemático y además como una persona con valores.

Por último le agradezco, a mi casa de estudios, la UNAM por darnos un lugar excepcional donde podemos obtener nuestros estudios universitarios y además formar lazos interpersonales que no tienen comparación, en especial a la Facultad de Ciencias por ser mi segunda casa, una casa que me abrió sus puertas y me dio la oportunidad de seguir mis sueños.

¡Muchas gracias a todos!

Por mi raza hablará el espíritu.



# Índice general

Índice general	v
Introducción	1
<b>1. Conceptos generales</b>	<b>3</b>
1.1. Gráficas . . . . .	3
1.1.1. Algunos tipos de gráficas . . . . .	11
1.2. Digráficas . . . . .	13
1.2.1. Algunos tipos de digráficas . . . . .	22
<b>2. Resultados preliminares de digráficas</b>	<b>25</b>
2.1. Ciclos en digráficas . . . . .	25
2.2. Distancias en digráficas fuertes $k$ -cuasitransitivas . . . . .	29
2.3. Ciclos en digráficas $k$ -cuasitransitivas . . . . .	35
<b>3. Caracterización estructural</b>	<b>45</b>
3.1. Digráficas fuertes 3-cuasitransitivas . . . . .	45
3.2. Digráficas fuertes 3-transitivas . . . . .	54
3.3. Digráficas fuertes 4-transitivas. . . . .	57
<b>4. Digráficas fuertes <math>k</math>-transitivas con un <math>n</math>-ciclo, <math>n \geq k + 1</math></b>	<b>71</b>
<b>5. <math>n</math>-núcleos en digráficas fuertes <math>k</math>-transitivas, con <math>n \geq k - 1</math></b>	<b>101</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>109</b>
<b>A. Teoría de números</b>	<b>111</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>



# Introducción

En el área de la teoría de gráficas las relaciones que se pueden dar sobre un conjunto en ocasiones proveen de una estructura particular cuando se les pide que dichas relaciones sean transitivas, es decir, si tenemos una relación  $R$  sobre un conjunto  $X$ , esta relación es transitiva si siempre que  $(x, y) \in R$  y  $(y, z) \in R$  entonces esto implica que  $(x, z) \in R$ . En otras palabras, una digráfica (una gráfica dirigida) es transitiva si su relación que genera es transitiva. Como es usual una digráfica es una pareja ordenada  $(X, R)$  donde  $X$  es el conjunto de vértices y  $R$  (la relación sobre  $X$ ) es el conjunto de flechas.

En [2], Bang Jensen introduce las digráficas 3-cuasitransitivas y afirmó que las únicas digráficas fuertes 3-cuasitransitivas son las digráficas fuertes semicompletas y las digráficas fuertes bipartitas semicompletas. En [6], Hortensia Galeana Sánchez, I.A. Goldfeder e I. Urrutia, exhiben una familia de digráficas fuertes 3-cuasitransitivas distintas de las digráficas fuertes semicompletas y digráficas fuertes bipartitas semicompletas y se da una caracterización completa de las digráficas fuertes 3-cuasitransitivas.

Se han realizado muchos avances en cuanto a digráficas transitivas pero en tiempos recientes gracias a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez y al Dr. César Hernández Cruz, esta rama de la teoría de gráficas se expandió al estudiar las digráficas  $k$ -transitivas, que son una generalización de las digráficas transitivas en las que se plantea que si existe una trayectoria de longitud  $k$  de  $u$  hacia  $v$ , dos vértices distintos, en una digráfica  $D$  entonces debe existir la flecha de  $u$  hacia  $v$ , es decir, la pareja  $(u, v)$  existe en la relación de la digráfica. Inclusive una generalización mayor de las digráficas transitivas se estudia al debilitar la condición de tal manera que siempre que exista una trayectoria de longitud  $k$  entre una pareja de vértices entonces dichos vértices son adyacentes, dicho de otra manera, están unidos mediante una flecha en la digráfica. Si una digráfica cumple esto último se dice que es  $k$ -cuasitransitiva.

Al estudiar a las digráficas y sus propiedades, además de la transitividad y sus generalizaciones, surge naturalmente las subestructuras. Los núcleos en las digráficas son un ejemplo de subestructuras en las digráficas que además ya se han abordado en otros trabajos, tanto en tesis como en artículos, un buen trabajo sobre el tema se puede encontrar en [5]. De igual manera Chvátal probó en [4] que reconocer digráficas que tienen un núcleo es un problema  $NP$ -completo, por lo tanto encontrar condiciones para que una digráfica tenga un núcleo o encontrar familias grandes de digráficas con núcleo ha sido una muy próspera línea de investigación explorada por muchos autores.

En [11], Borowiecki y Kwaśnik introdujeron el concepto de  $(k, l)$ -núcleos generalizando la noción de núcleo. De igual manera en [13] Iwona Włoch trabajó con los  $(k, l)$ -núcleos.

En una digráfica  $D$ , un  $(m, l)$ -núcleo es un subconjunto de vértices  $N$  que es  $m$ -independiente, a saber, que entre cualquier par de vértices no exista una trayectoria de longitud menor a  $m$ , y  $l$ -absorbente, es decir, que de cualquier vértice en  $V(D)$  que no este en  $N$ , existe una trayectoria de longitud menor o igual a  $l$  hacia algún elemento de  $N$ . Los  $(m, m-1)$ -núcleos, usualmente llamados



$m$ -núcleos, son estructuras que surgen como una generalización de los núcleos (los núcleos son precisamente los 2-núcleos).

La tesis presente surge con la motivación de dar solución a la siguiente conjetura presentada en [12] por Ruixia Wang: *Sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Entonces  $D$  tiene un  $(k - 1)$ -núcleo si y sólo si ésta no tiene componente fuerte terminal isomorfa a un  $k$ -ciclo.* De hecho la conjetura es válida para  $k = 3$ , y en [7], C. Hernández Cruz expone la prueba, además se podría decir que este resultado unido al trabajo realizado en [12] dio origen a dicha conjetura.

Al analizar la prueba realizada en el caso base ( $k = 3$ ) de la conjetura se observa que es necesario conocer la estructura de las digráficas fuertes 3-transitivas. Así, es natural abordar la conjetura en general analizando la estructura de las digráficas  $k$ -transitivas para una  $k$  fija, en consecuencia el presente trabajo centra su atención en reconocer la estructura de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas. A continuación se presenta un esquema del contenido de esta tesis.

En el capítulo 1 se da una pequeña introducción histórica sobre la teoría de gráficas además de dar definiciones básicas de gráficas y digráficas. De igual manera se dan equivalencias y resultados inmediatos de las definiciones.

En el capítulo 2 se exponen resultados importantes, no tan básicos, de digráficas  $k$ -cuasitransitivas y  $k$ -transitivas, así como digráficas que contienen un ciclo. Estos resultados en su mayoría centran su atención en garantizar la existencia de más adyacencias entre estructuras presentes en las digráficas, que son de utilidad en los capítulos 3, 4 y 5.

En el capítulo 3 damos una recopilación y análisis de los trabajos realizados en [6], [7], [8] los que exponen la estructura de las digráficas fuertes 3-cuasitransitivas, 3-transitivas y 4-transitivas, respectivamente.

En el capítulo 4 exponemos el trabajo realizado por C. Hernández Cruz y Juan José Montellano Ballesteros enfocado en la estructura de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas con un ciclo de longitud  $n$  con  $n \geq k + 1$ .

En el capítulo 5 presentamos una aplicación de estos resultados al analizar la existencia de  $n$ -núcleos en las digráficas fuertes  $k$ -transitivas, con  $n \geq (k - 1)$ , al analizar el trabajo realizado en [9], [7] y [12], para luego presentar la conjetura antes mencionada.

En algunas partes del trabajo se utilizan resultados básicos de teoría de números, por este motivo añadimos un apéndice de teoría de números que servirá de apoyo.

# Capítulo 1

## Conceptos generales

Este capítulo nos será de mucha ayuda para sentar las bases necesarias de la tesis entera, remarcarán los conceptos importantes con la intención de facilitar su búsqueda para futuras referencias en los demás capítulos.

En la primera sección comenzaremos con una pequeña introducción histórica del área de las gráficas. Después expondremos los objetos con los que estaremos trabajando, al dar las definiciones básicas sobre gráficas; además se abordarán todas las estructuras asociadas a las gráficas, que serán necesarias para estudiar a las digráficas.

La segunda sección estará completamente dedicada a digráficas, de manera similar al trabajo que se realizará en la primera sección. Además de dar definiciones básicas, presentaremos algunas equivalencias o resultados inmediatos de las definiciones.

### 1.1. Gráficas

La noción de “gráfica” como elemento de estudio matemático nació con la idea de “geometría de la posición”. Este concepto matemático tiene como meta responder a problemas en los cuales una serie de “elementos” estaban relacionados por alguna cierta propiedad que nos interesa y donde la demás información es despreciable. Con el propósito de entender mejor este elemento matemático veamos ahora el problema que se considera dio origen a la rama de la teoría de gráficas.

**El problema de los puentes de Königsberg:** Leonhard Euler (1707-1783) es considerado como el personaje que abrió el camino de la teoría de gráficas al resolver en 1736 el famoso problema de los puentes de Königsberg. El nombre del problema se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado. El Río Pregel atraviesa esta ciudad y en un punto se bifurca dividiendo esta ciudad en cuatro regiones, las cuales estaban conectadas entre sí y las orillas del río Pregel como se muestra en la figura 1.1a por siete puentes.

El problema consiste en empezar en cualquiera de estas cuatro regiones, caminar a través de cada uno de estos siete puentes una y sólo una vez y regresar al punto de inicio. Euler no solamente tradujo el problema a un lenguaje matemático, sino que probó que no era posible realizar tal recorrido al generalizar el problema. En la prueba, Euler reemplazó cada región de tierra por un punto y cada puente por una línea que une los correspondientes puntos y al hacer esto dio origen a una “gráfica” tal como se muestra en la figura 1.1b, traduciendo así el problema de poder hacer el recorrido en encontrar una forma de recorrer la gráfica de cierta manera. Al generalizar el problema él encontró un criterio para decidir si una gráfica dada puede ser recorrida; este criterio dice que para poder ser recorrida de esa forma la gráfica debe ser “conexa” (intuitivamente que se puedan

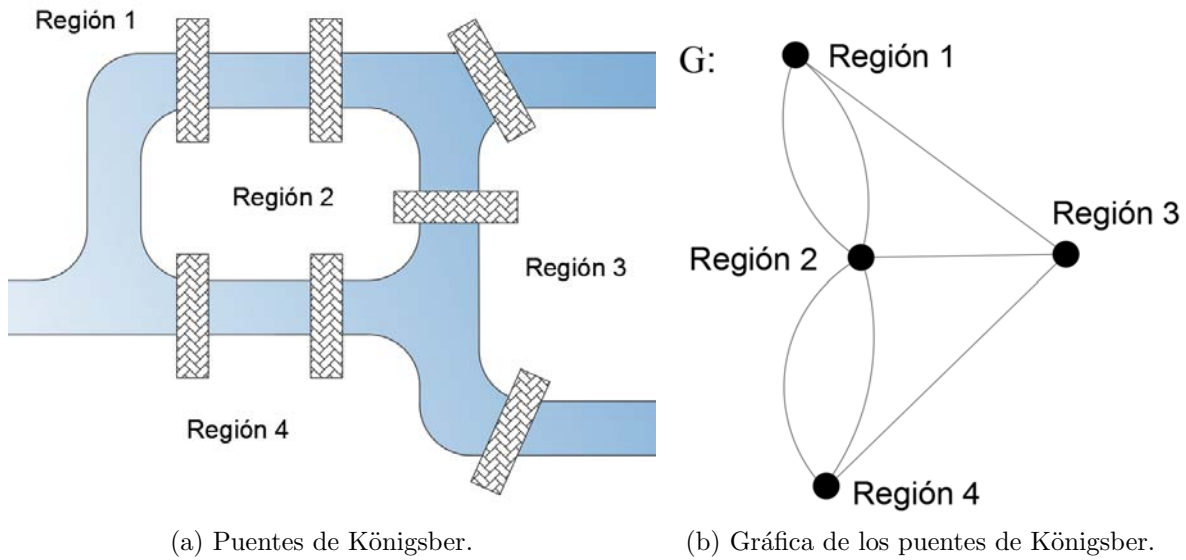


Figura 1.1

alcanzar cualquier par de puntos por medio de las líneas) y en cualquier punto incidían una cantidad par de líneas. De esta forma vio que la gráfica del problema de los puentes de Königsberg, en la figura 1.1b, si bien es conexa, no en todo punto incidían una cantidad par de líneas, probando que el problema no se podía realizar.

En el problema anterior observamos que la información respecto al tamaño de los puentes, la forma de las regiones o la forma del río es despreciable, sólo nos importa como están conectadas las regiones por medio de estos puentes. La cualidad anterior es binaria, ya que entre cada par de regiones puede o no existir un puente que los conecte (en este caso pueden haber incluso dos puentes), de hecho son los únicos datos que necesitamos para poder resolver el problema.

Con lo anterior en mente se da la siguiente definición:

**Definición 1.1.** Una **gráfica**  $G$ , es una pareja ordenada  $(V(G), A(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto no vacío, en el cual sus elementos serán llamados **vértices** y  $A(G)$  es el conjunto de parejas no ordenadas  $\{u, v\}$  de  $V(G)$ , estos elementos serán denominados **aristas**.

De igual manera si  $\{u, v\} \in A(G)$ , entonces se dirá que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**.

En esta tesis sólo se trabajará con gráficas finitas, es decir, gráficas tales que  $V(G)$  sea finito y con a lo más una arista entre cada par de vértices distintos. Se dirá que  $G$  es de **orden**  $n$  si  $|V(G)| = n$ .

Cabe hacer la aclaración que esta gráfica podría tener **nudos** o **lazos** que son los elementos en  $A(G)$  de la forma  $\{u, u\}$ , pero como no estamos buscando ese tipo de información, no la tomaremos en cuenta en este trabajo, es decir, a partir de ahora sólo trabajaremos con gráficas sin lazos, las que se denominan **gráficas simples**.

Considerando la representación geométrica del problema de Euler representamos a las gráficas en este trabajo de manera análoga, como ejemplo tenemos la gráfica  $H$ , donde  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $A(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$ , dada en la figura 1.2b.

En el problema de los puentes de Königsberg le asociamos la gráfica  $G$  de la figura 1.1b, donde  $V(G) = \{\text{Región 1}, \text{Región 2}, \text{Región 3}, \text{Región 4}\}$  es el conjunto de las regiones de tierra y  $\{\text{Región } i, \text{Región } j\} \in A(G)$  si hay un puente entre la Región  $i$  y la Región  $j$ , y si hay más de un puente entonces estas aristas se etiquetan. Cabe señalar que en la gráfica  $G$  hay aristas múltiples

entre algunos vértices, este tipo de gráficas son comúnmente llamadas **multigráficas**, pero no trabajaremos con ellas en esta tesis.

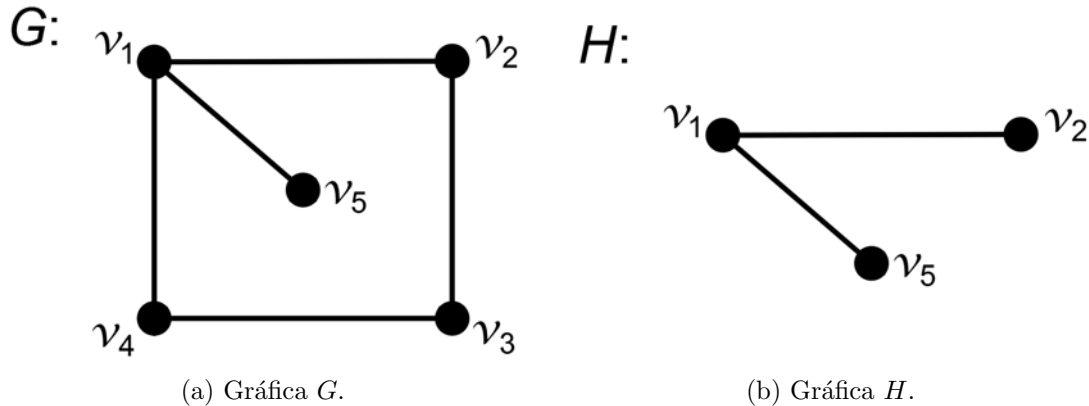


Figura 1.2

En una gráfica, al analizar la información local en cada vértice emerge de manera natural la siguiente pregunta, ¿a qué vértices está unido cada vértice?, nosotros responderemos a esta incógnita con la siguiente definición:

**Definición 1.2.** Dada una gráfica  $G$  y un vértice  $v \in V(G)$  se define la **vecindad** de  $v$  en  $G$  por  $N_G(v) := \{u \in V(G) | \{v, u\} \in A(G)\}$  (cuando sea claro en que gráfica se está trabajando se denotará solamente por  $N(v)$ ).

En la figura 1.2a tenemos que  $N(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$ .

Análogamente dado un subconjunto de vértices podemos analizar sus vecinos.

**Definición 1.3.** Dada una gráfica  $G$  y un subconjunto de sus vértices  $X$  tal que  $X \neq \emptyset$ , definimos la **vecindad** de  $X$  en  $G$  como  $N_G(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$  (cuando sea claro en que gráfica se está trabajando será simplemente denotada por  $N(X)$ ).

En la figura 1.2a observamos que  $N(\{v_2, v_3\}) = N(v_2) \cup N(v_3) = \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

Al conocer cuáles vértices comparten una arista con un vértice  $v$  en específico nos podemos preguntar ¿cuántos de estos vértices hay?, esto se responde al definir su **grado** en  $G$ :

**Definición 1.4.** Dada una gráfica  $G$  y un vértice  $v \in V(G)$  se define el **grado** de  $v$  en  $G$  como  $\delta_G(v) = |N(v)|$  (cuando sea claro en que gráfica se está trabajando se denotará sólo por  $\delta(v)$ ).

En la figura 1.2a vemos que  $\delta(v_1) = |N(v_1)| = 3$ .

Ahora podemos pensar en gráficas asociadas a una gráfica  $G$ , en especial en una que contenga la información faltante de alguna gráfica, su gráfica **complemento**, la cual tiene los mismos vértices que  $G$  pero con la peculiaridad de tener todas las parejas no ordenadas faltantes en  $G$ , así surge la siguiente definición:

**Definición 1.5.** Dada una gráfica  $G$ , se define la gráfica **complemento** de  $G$  denotada por  $G^c$ , donde  $V(G^c) = V(G)$  y  $A(G^c) = \{\{u, v\} | \{u, v\} \notin A(G)\}$ .

En la figura 1.3a observamos la gráfica complemento de la gráfica  $G$  dada en la figura 1.2a.

También damos herramientas para trabajar en subestructuras de una gráfica mediante las siguientes definiciones.

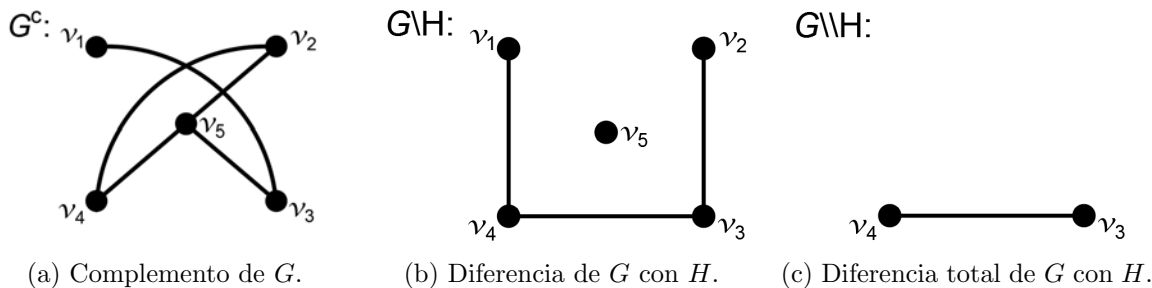


Figura 1.3

**Definición 1.6.** Dada una gráfica  $G$ , diremos que una gráfica  $H$  es **subgráfica** de  $G$ , si  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $A(H) \subseteq A(G)$  y se denotará como  $H \subseteq G$ .

Como ejemplo, observamos que la gráfica  $H$  en la figura 1.2b es subgráfica de la gráfica  $G$  dada en la figura 1.2a.

**Definición 1.7.** Dada una gráfica  $G$  y un subconjunto de sus vértices  $X$ , definimos la **subgráfica inducida** por los vértices  $X$  en  $G$ , denotada por  $G[X]$ , como la gráfica tal que  $V(G[X]) = X$  y  $A(G[X]) = \{\{u, v\} \in A(G) \mid \{u, v\} \subseteq X\}$ .

Notemos que  $G[X]$  es la subgráfica de  $G$  tal que sus vértices son exactamente los elementos de  $X$  y cuyas aristas son aquellas aristas en  $G$  que tengan ambos extremos en  $X$ .

Como ejemplo, si consideramos a  $G$  la gráfica en la figura 1.2a y el conjunto de vértices como  $X = \{v_1, v_2, v_5\}$ , entonces  $G[X] = H$ , dada en la figura 1.2b.

De igual forma es natural pensar en definir operaciones con gráficas.

**Definición 1.8.** Dadas las gráficas  $G$  y  $H$  definimos las siguientes operaciones entre gráficas:

- La **diferencia** de  $G$  con  $H$ , la cual se denotará como  $G \setminus H$ , es la gráfica tal que  $V(G \setminus H) = V(G)$  y  $A(G \setminus H) = A(G) \setminus A(H)$ .
- La **diferencia total** de  $G$  con  $H$ , la cual se denotará como  $G \setminus \setminus H$ , es la gráfica tal que  $V(G \setminus \setminus H) = V(G) \setminus V(H)$  y  $A(G \setminus \setminus H) = \{\{u, v\} \in A(G) \mid \{u, v\} \subseteq (V(G) \setminus V(H))\}$ .
- Si  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $G_1, G_2, \dots, G_n$  son gráficas ajenas por vértices dos a dos entonces la **composición** de  $G$  con  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , denotada por  $G[G_1, G_2, \dots, G_n]$  es tal que  $V(G[G_1, G_2, \dots, G_n]) = \bigcup_{i=1}^n V(G_i)$  y  $A(G[G_1, G_2, \dots, G_n]) = (\bigcup_{i=1}^n A(G_i)) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(G_i), v \in V(G_j) \text{ y } \{x_i, x_j\} \in A(G)\}$ .

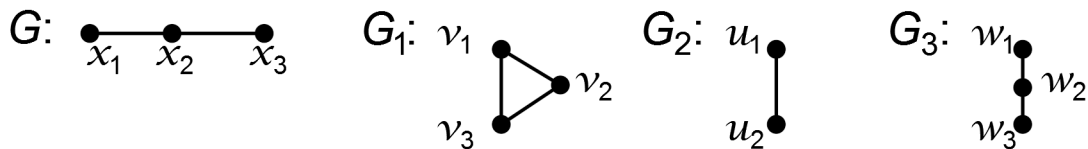
En la figura 1.3b vemos un ejemplo de la diferencia de  $G$  con  $H$  y en la figura 1.3c un ejemplo de la diferencia total de  $G$  con  $H$ .

Si consideramos  $G, G_1, G_2$  y  $G_3$  como en la figura 1.4a, entonces  $G[G_1, G_2, G_3]$  está dada como en la figura 1.4b.

Después de analizar los vecinos de un vértice  $v \in V(G)$  la siguiente cualidad que nos interesa es a cuales vértices puede “alcanzar” a través de la gráfica, para darle sentido a esta palabra introducimos las siguientes estructuras.

**Definición 1.9.** Dada una gráfica  $G$ , un **camino** en  $G$  es una sucesión finita de vértices de  $G$  representado por  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que  $\{x_i, x_{i+1}\} \in A(G)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Un camino es **cerrado** si  $x_n = x_0$ , en otro caso es **abierto**. Se distinguen casos especiales de caminos enlistados a continuación:



(a) Gráficas ajenas.

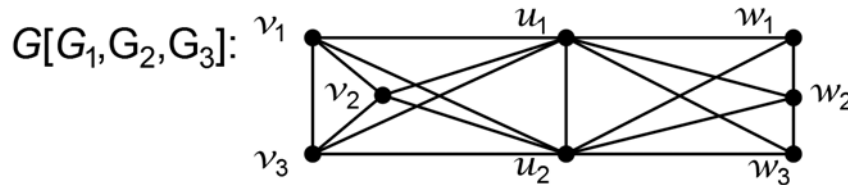
(b) Composición de  $G$  con  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ .

Figura 1.4

- Si  $P$  es tal que  $\{x_i, x_{i+1}\} \neq \{x_j, x_{j+1}\}$  para cada  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$  con  $j \neq i$ , entonces a  $P$  se le llamará **paseo**, es decir, un camino que no repite aristas.
- Si  $P$  es tal que  $x_i \neq x_j$  para cada  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ , entonces a  $P$  se le llamará **trayectoria**, en otras palabras, un camino que no repite vértices.
- Si  $P$  es cerrado y  $x_i \neq x_j$  para cada  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$  con  $i \neq j$  y  $n \geq 3$ , entonces a  $P$  se le llamará **ciclo**, dicho de otra manera, un camino cerrado que no repite vértices más que el primero y el último.

Se dice aparte que el camino  $P$  **inicia** en  $x_0$  y **termina** en  $x_n$ , de esta manera  $P$  será denominado un  **$x_0x_n$ -camino**. Análogamente una  **$x_0x_n$ -trayectoria**.

Como ejemplo podemos considerar los siguientes caminos de la gráfica  $G_1$  dada en la figura 1.4a:

- $P = (v_1, v_2, v_3, v_2)$ ;
- $T = (v_2, v_3, v_1)$ , el cual es una trayectoria;
- $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ , el cual es un ciclo.

**Definición 1.10.** Dada una gráfica  $G$ , se define  **$\text{Cam}_G$**  como el conjunto de todos los caminos en  $G$ , es decir, todos los  $uv$ -caminos en  $G$  tal que  $\{u, v\} \subseteq V(G)$ .

De igual manera se define  **$\text{Tray}_G$**  como el conjunto de todas las trayectorias en  $G$  y  **$\text{Cic}_G$**  como el conjunto de todos los ciclos en  $G$ .

Como observación notamos que  $\text{Tray}_G$  y  $\text{Cic}_G$  son subconjuntos de  $\text{Cam}_G$ .

Con base en las definiciones anteriores, se definen los siguientes conjuntos:

**Definición 1.11.** Dada una gráfica  $G$  y dos subconjuntos de sus vértices  $X$  y  $Y$  se define:

- **$\text{Cam}_G\{X, Y\}$**  como el conjunto de todos los  $uv$ -caminos en  $G$  tal que  $u \in X$  y  $v \in Y$ , a tales caminos se les llamará  **$XY$ -caminos**.

- $\mathbf{Tray}_G\{X, Y\} = \{P \in \text{Cam}_G\{X, Y\} : P \text{ es una trayectoria}\}$ , a tales trayectorias se les llamará  **$XY$ -trayectorias**.

Cuando  $X = \{x\}$  escribiremos  $\text{Cam}_G\{x, Y\}$ ,  $\text{Tray}_G\{x, Y\}$ ,  $xY$ -camino y  $xY$ -trayectoria en lugar de  $\text{Cam}_G\{\{x\}, Y\}$ ,  $\text{Tray}_G\{\{x\}, Y\}$ ,  $\{x\}Y$ -camino y  $\{x\}Y$ -trayectoria, respectivamente. De manera análoga para  $Y = \{y\}$ .

Por simplificación de notación, si  $H_1$  y  $H_2$  son subgráficas de una gráfica  $G$ :

1. un  **$H_1H_2$ -camino** (trayectoria) se entenderá como un elemento de  $\text{Cam}_G\{V(H_1), V(H_2)\}$  ( $\text{Tray}_G\{V(H_1), V(H_2)\}$ );
2. una  **$H_1H_2$ -arista** se entenderá como una arista  $\{u, v\}$  donde  $u \in V(H_1)$  y  $v \in V(H_2)$ .

Como ejemplo consideramos la gráfica  $G[G_1, G_2, G_3]$ , en la figura 1.4b, entonces:

- $(v_1, v_2, u_1, w_3)$  es un  $G_1G_3$ -camino al igual que una  $G_1G_3$ -trayectoria;
- $\{u_1, w_1\}$  es una  $G_2G_3$ -arista.

**Definición 1.12.** *Dados una gráfica  $G$  y  $\{u, v\} \subseteq V(G)$ , si  $\text{Cam}_G\{u, v\} \neq \emptyset$  entonces se dirá que  $u$  **alcanza** a  $v$  en  $G$  y se denotará como  $u \sim_G v$ . Cuando no haya ambigüedad sobre que gráfica se trabaja se denotará sólo por  $u \sim v$ .*

Después de definir los caminos, ya sean paseos, trayectorias ó ciclos podemos analizar una propiedad importante de todas estas estructuras, su “longitud”, con este propósito definiremos lo siguiente:

**Definición 1.13.** *Dados una gráfica  $G$  y un camino  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  en  $G$ , se define la **longitud** de  $P$  como  $n$ , se denotará por  $\ell(P)$  y se dirá que  $P$  es un  **$n$ -camino**.*

El camino **inverso** de  $P$  será  $P^{-1} = (x_n, \dots, x_1, x_0)$ .

También dado  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  un camino en  $G$ , se denotará  $(x_i, P, x_j) = (x_i, \dots, x_j)$  con  $0 \leq i \leq j \leq n$ , como el **subcamino** en  $P$  de  $x_i$  a  $x_j$ .

De igual forma si para toda  $i \in \{1, \dots, s\}$  se tiene que  $P_i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)$  es un camino y además para toda  $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  se cumple que  $x_{n_i}^i = x_0^{i+1}$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  entonces

$$P = (x_0^1, P_1, x_0^2, P_2, x_0^3, \dots, x_0^i, P_i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^s, P_s, x_{n_s}^s) = \bigcup_{i=1}^s (x_0^i, P_i, x_{n_i}^i) = \bigcup_{i=1}^s P_i$$

representará seguir los subcaminos en orden creciente respecto a su índice y uniéndose en  $x_{n_i}^i = x_0^{i+1}$  para todas las  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ .

Si consideramos los caminos  $P_1 = (v_1, v_2, v_3, v_2)$ ,  $P_2 = (v_2, v_3, v_1)$  y  $P_3 = (v_1, v_2, v_3)$  de la gráfica  $G_1$  dada en la figura 1.4a, entonces

$$P = \bigcup_{i=1}^3 P_i = (v_1, P_1, v_2, P_2, v_1, P_3, v_3) = (v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_1, v_2, v_3)$$

Ahora daremos una equivalencia en cuanto a alcanzabilidad entre vértices de una gráfica.

**Lema 1.1.** *Dados una gráfica  $G$  y  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  con  $u \neq v$  se cumple lo siguiente:  
Existe una  $uv$ -trayectoria en  $G$  si y sólo si  $u \sim v$ .*

*Demostración.* Primeramente probemos la necesidad. Si  $u \sim v$  con  $u \neq v$  entonces sea  $P = (u = x_0, \dots, x_m = v) \in \text{Cam}\{u, v\}$  tal que  $\ell(P) = \min\{\ell(T) | T \in \text{Cam}\{u, v\}\}$ , el cual existe por el Principio del buen orden de los números naturales. Veamos que  $P$  es una trayectoria. Procedamos por contradicción suponiendo que  $P$  no es una trayectoria.

Como  $u \neq v$  entonces  $\ell(P) \geq 1$ . Si  $\ell(P) = 1$ , entonces  $P$  es una trayectoria, de hecho es la arista  $\{u, v\}$  lo que contradice que  $P$  no es una trayectoria.

Si  $\ell(P) \geq 2$  y  $P$  no es una trayectoria entonces repite un vértice, es decir,  $P$  pasa primero por  $x_i$  y luego por  $x_j$  y es tal que  $x_i = x_j$ , además como no consideramos lazos, entonces  $(i+1) < j$ . De esta forma  $P' = (u, P, x_i = x_j, P, v)$  es un camino de longitud menor, contradiciendo la minimalidad de  $P$ . Por lo tanto,  $P \in \text{Tray}\{u, v\}$ .

Ahora probemos la suficiencia. Si existe  $P \in \text{Tray}\{u, v\}$  entonces, como  $\text{Tray}\{u, v\} \subseteq \text{Cam}\{u, v\}$ , vemos que  $P$  es un  $uv$ -camino, en otras palabras,  $u \sim v$ .  $\square$

**Definición 1.14.** *Una gráfica  $G$  se dice **conexa**, si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$ ,  $u \sim v$ . Se dirá que  $G$  es **inconexa** si  $G$  no es conexa.*

La gráfica  $G$  en la figura 1.2a es una gráfica conexa, sin embargo su complemento  $G^c$  en la figura 1.3a es inconexa.

**Corolario 1.1.** *Una gráfica  $G$  es conexa si y sólo si para cada  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  se tiene que  $\text{Tray}\{u, v\} \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* El resultado se sigue del lema 1.1.  $\square$

**Teorema 1.1.** *Una gráfica  $G$  es conexa si y sólo si existe un camino cerrado que pase por todos los vértices.*

*Demostración.* Para probar la suficiencia supongamos que  $G$  es conexa, entonces para cada  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  se cumple que  $u \sim v$ , etiquetemos entonces a los vértices de  $G$  como  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y como para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  se tiene que  $v_i \sim v_{i+1}$  (con los índices módulo  $n$ ), entonces podemos considerar  $P_i$  los  $v_i v_{i+1}$ -caminos existentes. Finalmente, sea  $C = \bigcup_{i=1}^n P_i$ , que cumple con ser un camino cerrado que además pasa por cada uno de los vértices.

Ahora probemos la necesidad. Si  $C$  es un camino cerrado que pasa por todos los vértices entonces para cada  $\{u, v\} \subseteq V(C)$  existe el subcamino  $(u, C, v)$  por lo tanto  $G$  es conexa.  $\square$

Las gráficas conexas nos garantizan que podemos movernos por las aristas desde cualquier vértice a cualquier otro, pero al trabajar con una gráfica inconexa podemos cuestionarnos acerca de las subgráficas en ella tal que si son conexas, con este propósito definimos lo siguiente.

**Definición 1.15.** *Dada una gráfica  $G$ , una **componente conexa** de  $G$  es una subgráfica tal que es conexa y máxima por contención con esta propiedad en  $G$ .*

En otras palabras, una subgráfica  $S$  de  $G$  es componente conexa de  $G$  si y sólo si  $S$  es conexa y para todo vértice  $v \in V(G) \setminus V(S)$  se cumple que  $G[V(S) \cup \{v\}]$  no es conexa.

Si nos fijamos en la gráfica  $G \setminus H$  de la figura 1.3b, vemos que tiene dos componentes conexas  $S_1$  y  $S_2$ , con  $S_1 = (G \setminus H)[\{v_5\}]$  y  $S_2 = (G \setminus H)[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ .



**Observación 1.1.** Si  $S_1, S_2$  son dos componentes conexas distintas de  $G$ , entonces  $S_1$  y  $S_2$  no comparten vértices.

*Demostración.* Procedamos por contradicción. Si existe un vértice  $u \in V(S_1) \cap V(S_2)$  entonces, por ser componentes distintas, existe un vértice en una que no está en la otra, sin pérdida de generalidad supongamos que existe  $v \in V(S_2) \setminus V(S_1)$ . Para todo vértice  $w \in V(S_1)$ , se tiene que  $w \sim u$  porque  $S_1$  es conexas, por lo tanto podemos considerar  $P = (w = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$  un  $wu$ -camino. Como  $S_2$  es conexas, entonces  $u \sim v$ , de esta manera tenemos que existe  $Q = (u = y_0, \dots, y_m = v)$  un  $uv$ -camino. Por lo tanto  $(w, P, u, Q, v)$  es un  $wv$ -camino, en otras palabras, se tiene que  $w \sim v$  contradiciendo la maximalidad de  $S_1$ . Por lo tanto  $V(S_1) \cap V(S_2) = \emptyset$ .  $\square$

**Definición 1.16.** Dada una gráfica  $G$  y  $S_1, S_2, \dots, S_n$  todas sus componentes conexas, se define  $\omega(G) = n$  como el número de componentes conexas de  $G$ .

Ahora definimos el grado de la conexidad por aristas.

**Definición 1.17.** Dada una gráfica  $G$  conexas, distinta de la trivial, diremos que es  **$k$ -conexas por aristas**, si para todo subconjunto  $B$  de  $A(G)$  tal que  $|B| < k$  se cumple que  $G \setminus B$  es conexas.

En particular como convención se dice que la gráfica trivial es 0-conexas por aristas.

En otras palabras la definición anterior nos dice que una gráfica conexas  $G$  es  $k$ -conexas por aristas si la gráfica obtenida, de  $G$ , al quitar a lo más  $k - 1$  aristas es conexas.

Los ciclos son ejemplos de gráficas 2-conexas por aristas, ya que hace falta quitar al menos dos aristas para hacer inconexas a dicha gráfica.

**Teorema 1.2.** Si  $G$  es conexas y  $a \in A(G)$  es tal que  $a$  pertenece a un ciclo de  $G$ , entonces  $G \setminus a$  es conexas.

*Demostración.* Sea  $a = \{x, y\}$ , por comodidad de notación llamemos  $G' = G \setminus a$ . Sea  $\{u, v\} \subseteq V(G')$ . Por definición  $V(G) = V(G')$ , además sabemos que  $G$  es conexas por lo tanto  $u \sim_G v$ . Si existe un  $uv$ -camino tal que no pase por  $a$ , entonces  $u \sim_{G'} v$ . Analicemos la existencia de este camino. Sea  $P$  una  $uv$ -trayectoria, que existe por el corolario 1.1, y supongamos que pasa primero por  $x$  (esto es posible ya que podemos considerar  $P^{-1}$ ), por otra parte sea  $C$  el ciclo en  $G$  al que pertenece  $a$ , ahora sea  $P' = (u, P, x, C^{-1}, y, P, v)$ . Notamos que  $a \notin A((u, P, x))$  ya que eso implica que  $P$  pasó primero por  $y$ , una contradicción a la elección de  $P$ . De igual manera  $a \notin A((y, P, v))$  y  $a \notin A((x, C^{-1}, y))$ , por lo tanto  $a \notin A(P')$  y así  $u \sim_{G'} v$ . Concluyendo así que  $G'$  es conexas.  $\square$

**Lema 1.2.** Dada una gráfica conexas  $G$  se cumple que  $G$  es 2-conexas por aristas si y sólo si para cada arista  $a \in A(G)$  existe un ciclo  $C$  en  $G$  tal que  $a \in A(C)$ .

*Demostración.* Primero probemos la suficiencia. Sea la arista  $a \in A(G)$ , con  $a = \{u, v\}$ , como  $G$  es 2-conexas por aristas entonces es conexas, por lo tanto existe una  $vu$ -trayectoria, digamos  $P$ , en  $G \setminus a$ , así  $a \notin A(P)$ , de esta manera  $C = (u, v, P, u)$  es un ciclo en  $G$  tal que  $a \in A(C)$ .

Ahora para la necesidad, si toda arista de  $G$  pertenece a un ciclo de  $G$ , entonces por el teorema 1.2 se tiene que  $G \setminus a$  es conexas para cualquier arista  $a \in A(G)$ , es decir,  $G$  es 2-conexas por aristas.  $\square$

Después de conocer los conceptos relacionados con alcanzabilidad podemos ver una propiedad más acerca de cualquier pareja de vértices  $u$  y  $v$  de  $V(G)$ , la *distancia* entre ellos.

**Definición 1.18.** Dada una gráfica  $G$  se define la **distancia** entre un par de vértices en  $G$  como:

$$d_G\{u, v\} = \begin{cases} \min\{\ell(T) | T \in \text{Tray}\{u, v\}\} & \text{si } \text{Tray}\{u, v\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{si } \text{Tray}\{u, v\} = \emptyset \end{cases}$$

Cuando sea claro sobre que gráfica se esté trabajando la distancia se denotará simplemente como  $d\{u, v\}$ .

**Definición 1.19.** Dada una gráfica  $G$  conexa se define el **diámetro** de  $G$  como  $\text{diám}(G) = \text{máx}\{d\{u, v\} | \{u, v\} \subseteq V(G)\}$

En otras palabras, el diámetro de una gráfica conexa es la máxima de las distancias entre cualquier par de vértices en la gráfica. Si consideramos la gráfica  $H$  en la figura 1.2b, entonces  $d\{v_5, v_2\} = 2$  ya que no es posible llegar entre estos vértices por una trayectoria de longitud menor a 2 y como entre cualquier otro par de vértices en  $H$  existe una arista, entonces  $\text{diám}(H) = 2$ .

Igualmente estaremos trabajando con ciclos y sus longitudes para desglosar casos en las pruebas de algunos teoremas y proposiciones, con esta intención se define a continuación la circunferencia de una gráfica.

**Definición 1.20.** Dada una gráfica  $G$  se define la **circunferencia** de  $G$  como:

$$\text{circ}(G) = \begin{cases} \text{máx}\{\ell(C) | C \in \text{Cic}_G\} & \text{si } \text{Cic}_G \neq \emptyset \\ 2 & \text{si } \text{Cic}_G = \emptyset, A(G) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \text{Cic}_G = \emptyset, A(G) = \emptyset \end{cases}$$

La definición anterior nos dice la longitud del ciclo más largo en  $G$  y cuando no haya ciclos se distingue si hay aristas o no en la gráfica, al asignarle el valor 2 ó 0 respectivamente, lo anterior como un intento de reflejar que una arista podría ser vista como un “ciclo” de longitud dos y un vértice como un ciclo de longitud cero. Ya que no estamos considerando lazos, los ciclos de longitud uno no tienen lugar en este trabajo.

Como en la gráfica  $G$  de la figura 1.2a es tal que existe un ciclo y no existe un ciclo de longitud mayor a 4, entonces  $\text{circ}(G) = 4$ .

### 1.1.1. Algunos tipos de gráficas

**Definición 1.21.** La gráfica  $K_n$  es la gráfica **completa** de  $n$  vértices, tal que  $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $A(K_n) = \{\{v_i, v_j\} : \{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ .

La gráfica  $G_1$  de la figura 1.4a es la gráfica completa de orden 3, es decir,  $G_1 = K_3$ .

**Definición 1.22.** Dada una gráfica  $G$  y un subconjunto de sus vértices  $X$ , se dice que  $X$  es un conjunto **independiente** en  $G$  si para cualquier  $\{u, v\} \subseteq V(G)$  se cumple que  $\{u, v\} \notin A(G)$ .

El conjunto de vértices  $\{v_2, v_4, v_5\}$  es un conjunto independiente en la gráfica  $G$  de la figura 1.2a.

**Definición 1.23.** Una gráfica  $G$  se dice que es **bipartita** si existe una partición  $\{X, Y\}$  de  $V(G)$  tal que  $X$  y  $Y$  son conjuntos independientes.

$G$  se dirá  **$n$ -partita** si existe una partición  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de  $V(G)$  tal que  $X_i$  es un conjunto independiente para toda  $1 \leq i \leq n$ .

De igual forma  $G$  se dirá **cíclicamente  $n$ -partita** si existe una partición  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de  $V(G)$  tal que  $X_i$  es un conjunto independiente para toda  $1 \leq i \leq n$  y  $G \subseteq C_n[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $C_n$  es el ciclo de longitud  $n$ .

**Definición 1.24.** La gráfica  $K_{n,m}$  es la gráfica **bipartita completa**, con partición  $\{X, Y\}$  de  $V(G)$  en conjuntos independientes, tal que  $|X| = n$  y  $|Y| = m$ , tal que  $A(K_{n,m}) = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}$ .

La gráfica  $G$  de la figura 1.2a es bipartita con partición en conjuntos independientes, dada como sigue,  $\{\{v_2, v_4, v_5\}, \{v_1, v_3\}\}$ .

En la figura 1.5a se exhibe una gráfica 4-partita y en la figura 1.5b una gráfica cíclicamente 4-partita.

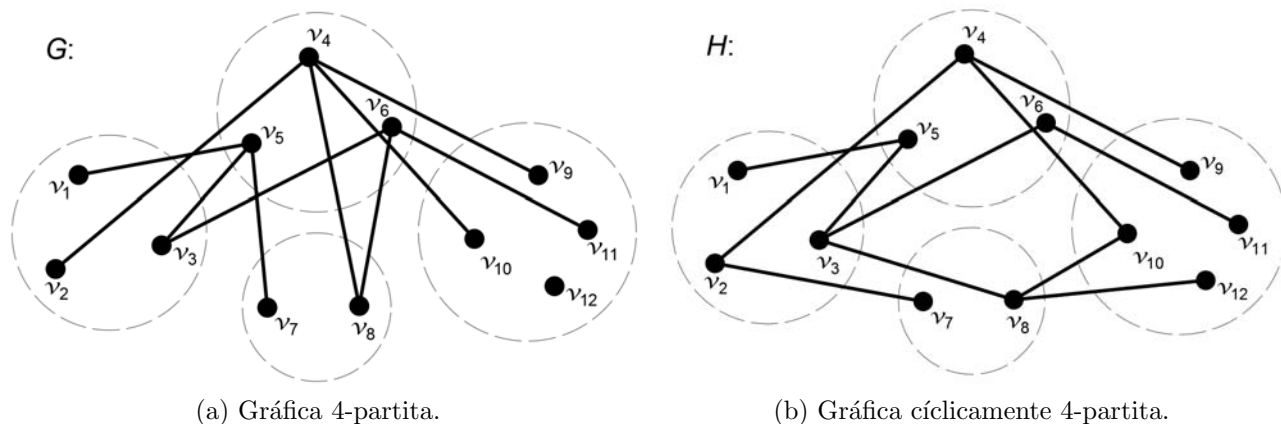


Figura 1.5

**Definición 1.25.** Si  $G$  es una gráfica tal que no tiene ciclos entonces a  $G$  se le llama **bosque**. Si  $G$  es una gráfica conexa tal que no tiene ciclos entonces a  $G$  se le da el nombre de **árbol**.

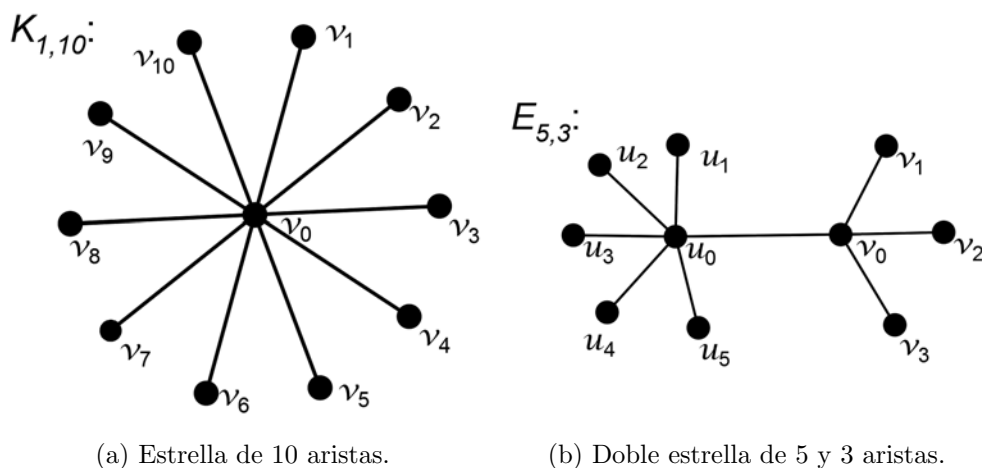


Figura 1.6

**Definición 1.26.** Una **estrella** es un árbol de diámetro dos, de hecho estas gráficas son precisamente las gráficas  $K_{1,n}$ .

En la figura 1.6a se exhibe como ejemplo a la estrella de 10 picos  $K_{1,10}$ .

**Definición 1.27.** Una **doble estrella** es un árbol de diámetro tres.

De la definición anterior vemos que si  $G$  es una doble estrella con  $(n + m + 2)$  vértices donde  $n \geq 1$  y  $m \geq 1$ , entonces  $G$  está dada de la siguiente manera:

$$V(G) = \{u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_m\}, A(G) = \{\{u_0, v_0\}\} \cup \{\{u_0, u_i\} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\{v_0, v_j\} : 1 \leq j \leq m\}.$$

A la estrella de  $(n + m + 2)$  vértices se le denota por  $E_{n,m}$ . Como ejemplo tenemos a  $E_{5,3}$  dada en la figura 1.6b.

## 1.2. Digráficas

Luego de analizar a las gráficas, abordamos un tipo de estructura más general que una gráfica, las *digráficas*.

**Definición 1.28.** Una **digráfica**  $D$ , es una pareja ordenada  $(V(D), F(D))$  donde  $V(D)$  es un conjunto finito no vacío de **vértices** y  $F(D)$  es el conjunto de **flechas** donde  $F(D) \subseteq V(D) \times V(D)$ .

Se dirá que  $D$  es de **orden**  $n$  si  $|V(D)| = n$ .

En pocas palabras las digráficas son “gráficas” en las que la relación sobre el conjunto de vértices no necesariamente es simétrica, por lo que siguiendo la representación geométrica de Euler, nos importa la dirección de las flechas.

Por esta razón dada una flecha  $(u, v) \in F(D)$  se dirá que  $u$  es el vértice inicial,  $v$  es el vértice final de la flecha y que  $u$  **domina** a  $v$ .

Se denotará por  $u$  **ady** $_D$   $v$ , si  $u$  y  $v$  son vértices de una digráfica  $D$  tales que  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$ , en otras palabras se dirá que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**. Cuando se entienda en que digráfica se está trabajando se denotará simplemente por  $u$  **ady**  $v$ .

En la digráfica  $D$  de la figura 1.7a observamos que los vértices  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, además  $v_2$  domina a  $v_1$ .

De igual forma al caso de las gráficas en este trabajo sólo trabajaremos con digráficas finitas, sin lazos y sin multiflechas, las que son denominadas digráficas finitas simples. De manera análoga al caso de gráficas daremos las siguientes definiciones.

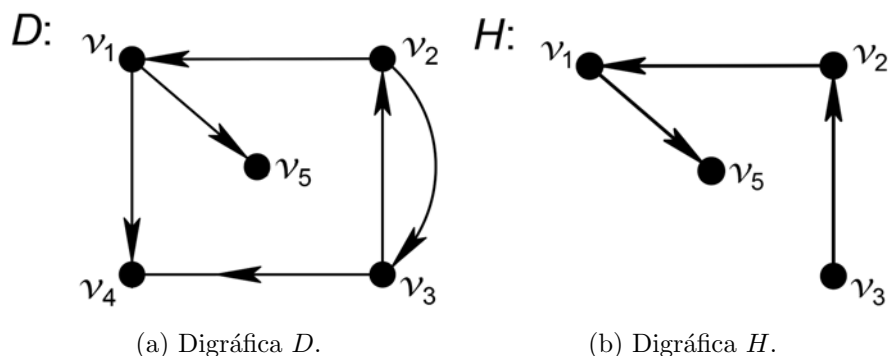


Figura 1.7

**Definición 1.29.** Sean  $D$  una digráfica y  $v \in V(D)$ .

1. Se define la **ex-vecindad** e **in-vecindad** de  $v$  en  $D$ , respectivamente, por  $N_D^+(v) = \{u \in V(D) | (v, u) \in F(D)\}$  y  $N_D^-(v) = \{u \in V(D) | (u, v) \in F(D)\}$ . La **vecindad** de  $v$ , denotada por  $N_D(v)$ , es  $N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$ . Cuando no haya riesgo de confusión se denotará simplemente por  $N^+(v)$ ,  $N^-(v)$  y  $N(v)$ .
2. Se define el **ex-grado** e **in-grado** de  $v$  en  $D$  respectivamente por  $\delta_D^+(v) = |N_D^+(v)|$  y  $\delta_D^-(v) = |N_D^-(v)|$ . El **grado** de  $v$  en  $D$ , denotado por  $\delta_D(v)$ , es  $|N_D(v)|$ . De igual manera cuando sea claro en que digráfica estamos trabajando se denotará por  $\delta^+(v)$ ,  $\delta^-(v)$  y  $\delta(v)$ .
3. Si  $X \subseteq V(D)$ , se definen:
  - a) la **in-vecindad** y **ex-vecindad** de  $X$  en  $D$ , como  $N_D^-(X) = \bigcup_{v \in X} N^-(v)$  y  $N^+(X) = \bigcup_{v \in X} N^+(v)$  respectivamente. Si no hay ambigüedad se denotarán por  $N^-(X)$  y  $N^+(X)$ .

En la digráfica  $D$  que aparece en la figura 1.7a, observamos que  $N^+(v_1) = \{v_4, v_5\}$  y  $N^-(v_1) = \{v_2\}$ , por lo tanto  $\delta^+(v_1) = 2$  y  $\delta^-(v_1) = 1$ .

Con lo anterior en mente damos la siguiente definición para los casos críticos.

**Definición 1.30.** Sean  $D$  una digráfica y  $X \subseteq V(D)$ .

- Si  $N^-(X) = V(D) \setminus X$ , entonces  $X$  será denominado un conjunto **absorbente** en  $D$ .
- Si  $N^+(X) = V(D) \setminus X$ , entonces  $X$  será denominado un conjunto **dominante** en  $D$ .

Cuando  $X = \{u\}$  y  $X$  sea absorbente o dominante, el vértice  $u$  será llamado **pozo** o **fuentes**, respectivamente.

**Definición 1.31.** Dada una digráfica  $D$ , diremos que una digráfica  $H$  es **subdigráfica** de  $D$  si  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ , denotado como  $H \subseteq D$ .

La digráfica  $H$  de la figura 1.7b es una subdigráfica de la digráfica  $D$  en la figura 1.7a.

**Definición 1.32.** Sean  $D$  y  $H$  dos digráficas, decimos que  $D$  y  $H$  son **isomorfas** si existe una función biyectiva  $f$  de  $V(D)$  en  $V(H)$ , tal que  $(u, v) \in F(D)$  si y sólo si  $(f(u), f(v)) \in F(H)$ .

En pocas palabras  $D$  y  $H$  son isomorfas si sus adyacencias se dan de igual forma. Por simplicidad de notación, cuando  $D$  y  $H$  sean isomorfas lo denotaremos por  $D = H$  (aquí al escribir “ $D = H$ ” abusamos de notación ya que en principio pueden ser digráficas distintas).

**Definición 1.33.** Dada una digráfica  $D$  y un subconjunto de sus vértices  $X$ , definimos la **subdigráfica inducida** por los vértices de  $X$  en  $D$ , denotada por  $D[X]$ , como la digráfica tal que  $V(D[X]) = X$  y  $F(D[X]) = \{(u, v) \in F(D) | u \in X \text{ y } v \in X\}$ .

Observamos que  $D[X]$  es la subdigráfica de  $D$  tal que sus vértices son exactamente los elementos de  $X$  y todas las flechas en  $D$  que tengan ambos extremos en  $X$ .

En la figura 1.8a, tenemos la subdigráfica inducida por el conjunto de vértices  $\{v_2, v_3, v_4\}$  de la digráfica  $D$  de la figura 1.7a.

Después de analizar los vecinos (exteriores e interiores) de un subconjunto  $X$  de  $V(D)$  podríamos preguntarnos si en el mismo conjunto  $X$  hay o no flechas entre sí, destacando el siguiente caso.

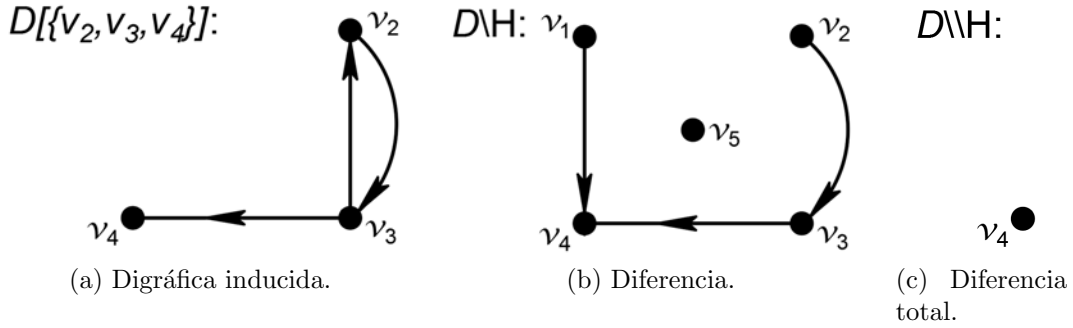


Figura 1.8

**Definición 1.34.** Dada una digráfica  $D$  y un conjunto  $X \subseteq V(D)$ .

- Si  $F(D[X]) = \emptyset$  entonces diremos que  $X$  es un conjunto **independiente** en  $D$ .

Si  $X$  es independiente y además es absorbente, entonces se dirá que  $X$  es un **núcleo** de  $D$ .

Notamos que en la digráfica  $D$  de la figura 1.7a, el subconjunto de vértices  $X = \{v_2, v_4, v_5\}$  es un conjunto absorbente, ya que  $N^-(X) = N^-(v_2) \cup N^-(v_4) \cup N^-(v_5) = \{v_3\} \cup \{v_1, v_3\} \cup \{v_1\} = \{v_1, v_3\} = V(D) \setminus X$ . De igual manera  $X$  es un conjunto independiente. Por lo tanto  $X$  es un núcleo de  $D$ .

Al igual que en el caso de gráficas, daremos algunas operaciones entre digráficas útiles en este trabajo.

**Definición 1.35.** Dadas las digráficas  $D$  y  $H$  definimos las siguientes operaciones entre digráficas:

- La **diferencia** de  $D$  con  $H$ , la cual se denotará como  $D \setminus H$ , donde  $V(D \setminus H) = V(D)$  y  $F(D \setminus H) = F(D) \setminus F(H)$ .
- La **diferencia total** de  $D$  con  $H$ , la cual se denotará como  $D \setminus \setminus H$ , donde  $V(D \setminus \setminus H) = V(D) \setminus V(H)$  y  $F(D \setminus \setminus H) = \{(u, v) \in F(D) : \{u, v\} \subseteq V(D) \setminus V(H)\}$ .
- Si  $V(D) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $D_1, D_2, \dots, D_n$  son digráficas ajenas por vértices dos a dos entonces la **composición** de  $D$  con  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , denotada por  $D[D_1, D_2, \dots, D_n]$  es tal que  $V(D[D_1, D_2, \dots, D_n]) = \bigcup_{i=1}^n V(D_i)$  y  $F(D[D_1, D_2, \dots, D_n]) = (\bigcup_{i=1}^n F(D_i)) \cup \{(u, v) | u \in V(D_i), v \in V(D_j) \text{ y } (x_i, x_j) \in F(D)\}$ .

Si además para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  se tiene  $F(D_i) = \emptyset$ , entonces se dirá que  $D$  es una **extensión** o bien una **digráfica extendida**.

Las Figuras 1.8b y 1.8c nos muestran un ejemplo de diferencia y diferencia total con  $D$  y  $H$  las que aparecen en la figura 1.7. En la figura 1.9b observamos la composición de  $D$  con  $D_1, D_2$  y  $D_3$  dadas en la figura 1.9a.

**Definición 1.36.** Dada una digráfica  $D$  se define:

- la digráfica **reverso**, denotada por  $\overleftarrow{D}$ , donde  $V(\overleftarrow{D}) = V(D)$  y  $F(\overleftarrow{D}) = \{(v, u) | (u, v) \in F(D)\}$ .
- la **gráfica subyacente**  $UG(D) = (V(D), A(D))$  donde  $A(D) = \{\{u, v\} | (u, v) \in F(D) \text{ ó } (v, u) \in F(D)\}$  (se considera  $\{u, v\} = \{v, u\}$ , es decir, la pareja no ordenada).

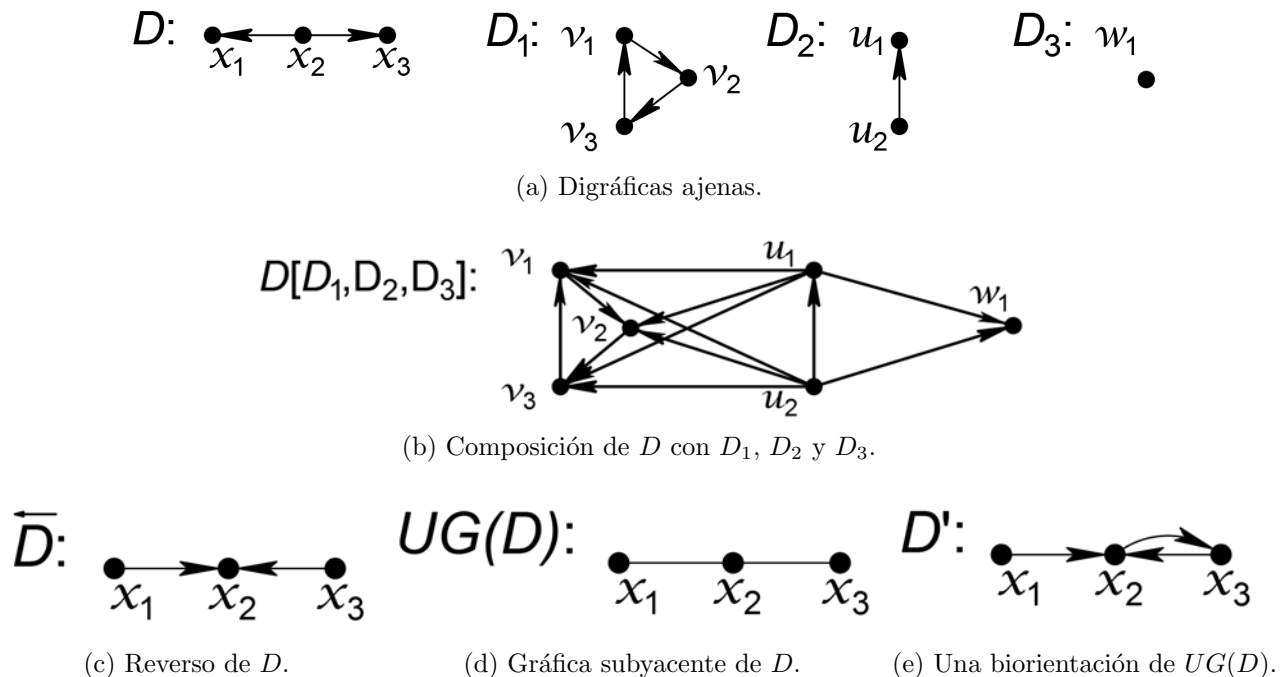


Figura 1.9

En la figura 1.9c observamos la digráfica reverso de  $D$  dada en la figura 1.9a. De igual manera podemos observar la gráfica subyacente de  $D$  en la figura 1.9d.

La gráfica  $UG(D)$  preserva todas las adyacencias entre vértices en  $D$  sin importar la dirección.

Ahora daremos unas cuantas definiciones que interrelacionan los conceptos de gráfica y digráfica, estos nos servirán para trabajar con elementos más simples o más complicados según necesitemos y de tal manera que se pierda la menor cantidad de información relevante.

**Definición 1.37.** Una digráfica  $D$  es **simétrica** si  $(u, v) \in F(D)$  implica que  $(v, u) \in F(D)$ . Análogamente se dirá que  $D$  es **asimétrica** si  $(u, v) \in F(D)$  implica que  $(v, u) \notin F(D)$ .

-Una **biorientación** de una gráfica  $G$  es una digráfica  $D$  obtenida de  $G$  al reemplazar cada arista  $\{x, y\} \in A(G)$  por la flecha  $(x, y)$  o la flecha  $(y, x)$  o la pareja de flechas  $(x, y)$  y  $(y, x)$ . La digráfica  $D'$  en la figura 1.9e, es una biorientación de la gráfica  $UG(D)$  en la figura 1.9d.

-Una digráfica **semicompleta** es una biorientación de una gráfica completa. La digráfica  $D_1$  en la figura 1.9a es un ejemplo de una digráfica semicompleta.

-Una **orientación** de una gráfica  $G$  es una biorientación asimétrica de  $G$ , dicho de otro modo, una gráfica **orientada** es una digráfica asimétrica, tal que su gráfica subyacente es  $G$ . La digráfica  $D$  en la figura 1.9a es una orientación de su gráfica subyacente  $UG(D)$  (cabe destacar que esta propiedad no necesariamente se cumple para toda digráfica).

-Una **orientación** de una digráfica  $D$  es una subdigráfica asimétrica maximal, con la propiedad de ser asimétrica, de  $D$ . La digráfica  $D$  en la figura 1.9a es una orientación de la digráfica  $D'$  en la figura 1.9e.

-Una **biorientación completa** es una biorientación de una gráfica completa obtenida por reemplazar cada arista  $\{x, y\}$  por las flechas  $(x, y)$  y  $(y, x)$ ; la biorientación completa de una gráfica  $G$  será denotada por  $\overleftrightarrow{G}$ .

**Definición 1.38.** Dada una digráfica  $D$ , un **camino dirigido** en  $D$  es una sucesión finita de vértices de  $D$ , denotada por  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que se cumple que  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Un camino dirigido es **cerrado** si  $x_n = x_0$ , en otro caso es abierto. Se distinguen casos especiales de caminos dirigidos enlistados a continuación:

- Si  $P$  es tal que  $(x_i, x_{i+1}) \neq (x_j, x_{j+1})$  para cada  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$  con  $j \neq i$ , entonces a  $P$  se le llama **paseo dirigido**, dicho de otra manera, un camino dirigido que no repite flechas.
- Si  $P$  es tal que  $x_i \neq x_j$  para cada  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ , entonces a  $P$  se le llamará **trayectoria dirigida**, es decir, un camino dirigido que no repite vértices.
- Si  $P$  es cerrado y  $x_i \neq x_j$  para cada  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$  con  $i \neq j$ , entonces a  $P$  se le llamará **ciclo dirigido**, en otras palabras, un camino dirigido cerrado que no repite vértices más que el primero y el último.

Se dirá aparte que el camino dirigido  $P$  **inicia** en  $x_0$  y **termina** en  $x_n$ , de esta manera  $P$  será denominado un  **$x_0x_n$ -camino dirigido**. Análogamente una  **$x_0x_n$ -trayectoria dirigida**.

A partir de ahora estaremos trabajando con digráficas y con el propósito de facilitar la lectura, los caminos, paseos, trayectorias y ciclos dirigidos serán simplemente nombrados caminos, paseos, trayectorias y ciclos. Se entenderá cuando sean dirigidos (en digráficas) o sin dirigir (en gráficas) dependiendo el contexto.

Dado  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  un camino en  $D$ , se denotará  $(x_i, P, x_j) = (x_i, \dots, x_j)$  con  $0 \leq i \leq j \leq n$ , como el **subcamino** en  $P$  de  $x_i$  a  $x_j$ . El camino **reverso** de  $P$  será  $\overleftarrow{P} = (x_n, \dots, x_1, x_0)$ .

De igual forma si para toda  $i \in \{1, \dots, s\}$  se tiene que  $P_i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)$  es un camino y además para toda  $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  se cumple que  $x_{n_i}^i = x_0^{i+1}$ , entonces

$$P = (x_0^1, P_1, x_0^2, P_2, x_0^3, \dots, x_0^i, P_i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^s, P_s, x_{n_s}^s) = \bigcup_{i=1}^s (x_0^i, P_i, x_{n_i}^i) = \bigcup_{i=1}^s P_i$$

representará seguir los subcaminos en orden creciente respecto a su índice y uniéndose en  $x_{n_i}^i = x_0^{i+1}$  para todas las  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ .

Consideremos los siguientes caminos en la digráfica  $D$  que aparece en la figura 1.11:

1.  $P_1 = (v_2, v_3, v_4, v_2)$ , que además es un ciclo,
2.  $P_2 = (v_2, v_7, v_5, v_6)$ , que además es una trayectoria,
3.  $P_3 = (v_6, v_8, v_9, v_8)$ , que además es un paseo,
4.  $P = \bigcup_{i=1}^3 P_i = (v_2, v_3, v_4, v_2, v_7, v_5, v_6, v_8, v_9, v_8)$ , la unión de los tres caminos anteriores.

**Definición 1.39.** Dada una digráfica  $D$ , se define  **$\mathbf{Cam}_D$**  como el conjunto de todas los caminos en  $D$ , es decir, todos los  $uv$ -caminos en  $D$  tales que  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ .

De igual manera se define  **$\mathbf{Tray}_D$**  como el conjunto de todas las trayectorias en  $D$  y  **$\mathbf{Cic}_D$**  como el conjunto de todos los ciclos en  $D$ .

Con base en las definiciones anteriores, se da la siguiente definición:



**Definición 1.40.** Dada una digráfica  $D$  y dos subconjuntos de sus vértices  $X$  y  $Y$  se define:

- $\mathbf{Cam}_D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  como el conjunto de todos los  $uv$ -caminos en  $D$  tal que  $u \in X$  y  $v \in Y$ , a tales caminos se les llamará  **$\mathbf{XY}$ -caminos**.
- $\mathbf{Tray}_D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \{P \in \mathbf{Cam}_D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : P \text{ es una trayectoria}\}$ , a tales trayectorias se les llamará  **$\mathbf{XY}$ -trayectorias**.

Si  $X = \{x\}$  escribiremos  $\mathbf{Cam}_D(x, Y)$ ,  $\mathbf{Tray}_D(x, Y)$ ,  $xY$ -camino y  $xY$ -trayectoria en lugar de  $\mathbf{Cam}_D(\{x\}, Y)$ ,  $\mathbf{Tray}_D(\{x\}, Y)$   $xY$ -camino y  $xY$ -trayectoria, respectivamente. De manera análoga para  $Y = \{y\}$ . Cuando sea claro sobre que digráfica se trabaja se denotará simplemente  $\mathbf{Cam}(X, Y)$  o  $\mathbf{Tray}(X, Y)$ , omitiendo el subíndice  $D$ .

Aquí abusamos de notación al nombrar de igual forma a los conjuntos de caminos y trayectorias para gráficas y digráficas, pero se entenderá a cual nos estamos refiriendo dependiendo el contexto y cuando pueda haber confusión se especificará.

Para simplificar notación, si  $H_1$  y  $H_2$  son subdigráficas de una digráfica  $D$ :

- un  **$H_1H_2$ -camino** (trayectoria) se entenderá como un elemento de  $\mathbf{Cam}_D(V(H_1), V(H_2))$  ( $\mathbf{Tray}_D(V(H_1), V(H_2))$ );
- una  **$H_1H_2$ -flecha** se entenderá como una flecha  $(u, v)$  donde  $u \in V(H_1)$  y  $v \in V(H_2)$ .

En la digráfica  $D$  de la figura 1.11, notamos que el camino  $(v_1, v_2, v_7, v_9)$  es una  $S_1S_3$ -trayectoria y la flecha  $(v_2, v_7) \in F(D)$  es una  $S_1S_2$ -flecha.

**Definición 1.41.** Si  $D$  es una digráfica donde  $X$  y  $Y$  son subconjuntos de  $V(D)$ ,  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  denota al conjunto de todas las  $\mathbf{XY}$ -flechas, es decir, flechas con vértice inicial en  $X$  y vértice terminal en  $Y$ .

Si  $X \cap Y = \emptyset$  entonces:

- a)  $X \rightarrow Y$  denota que  $(x, y) \in F(D)$  para cualquier  $x \in X$  y  $y \in Y$ .
- b)  $X \Rightarrow Y$  denota que no existe  $YX$ -flecha en  $D$ .
- c) Cuando  $X \rightarrow Y$  y  $X \Rightarrow Y$  simplemente escribiremos  $X \mapsto Y$ .
- d) Cuando  $X \rightarrow Y$  y  $Y \rightarrow X$  simplemente escribiremos  $X \leftrightarrow Y$ .

Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos subdigráficas de  $D$ , escribiremos  $D_1 \rightarrow D_2$  o  $D_1D_2$ -flecha, en vez de  $V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  o  $V(D_1)V(D_2)$ -flecha, respectivamente. También si  $X = \{v\}$ , escribiremos  $v \rightarrow Y$  o  $vY$ -flecha en vez de  $\{v\} \rightarrow Y$  o  $\{v\}Y$ -flecha, respectivamente. Análogamente si  $Y = \{v\}$ .

**Definición 1.42.** Dada una digráfica  $D$  y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ , si  $\mathbf{Cam}(u, v) \neq \emptyset$  entonces se dirá que  $u$  alcanza a  $v$  y se denotará como  $u \rightsquigarrow_D v$ . Cuando no haya ambigüedad se denotará sólo por  $u \rightsquigarrow v$ .

Después de definir los caminos ya sean paseos, trayectorias ó ciclos podemos analizar una propiedad importante de todas estas estructuras, su *longitud*.

**Definición 1.43.** Dada una digráfica  $D$  y un camino  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , se define la **longitud** de  $P$ , como  $n$  y será denotada por  $\ell(P)$ . De igual forma se dirá que  $P$  es un  **$n$ -camino** (analogamente  **$n$ -trayectoria**).

**Lema 1.3.** *Dadas una digráfica  $D$  y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  se cumple lo siguiente:  
Existe una  $uv$ -trayectoria en  $D$  si y sólo si  $u \rightsquigarrow v$ .*

*Demostración.* La prueba es completamente análoga a la dada en lema 1.1. □

Alternativamente, el siguiente lema prueba de manera inmediata el lema anterior.

**Lema 1.4.** *Dada una digráfica  $D$  si existe un  $uv$ -camino  $P$  en  $D$  entonces existe una  $uv$ -trayectoria  $T$  contenida en  $P$ .*

*Demostración.* La prueba será dada por inducción sobre la longitud de  $P$ .

**Base:** Dado que el camino trivial (que consiste de un único vértice) es inmediato ver que cumple con ser una trayectoria, comenzaremos nuestra inducción con  $\ell(P) = 1$ . Sea  $P = (u = x_0, x_1 = v)$ , si  $u = v$  entonces  $P$  es un lazo, una contradicción ya que no estamos trabajando con digráficas con lazos. Por lo tanto  $u \neq v$  y así  $P$  es una trayectoria, probando la base de inducción.

**Hipótesis inductiva:** *Si  $P'$  es un  $uv$ -camino en  $D$  tal que  $\ell(P') < n$  entonces existe una  $uv$ -trayectoria  $T$  contenida en  $P'$ .*

Supongamos que  $\ell(P) = n$ , si  $P$  no repite vértices entonces  $P = T$  es una  $uv$ -trayectoria. Supongamos entonces que  $P$  repite un vértice, es decir, si  $P = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ , entonces existe  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  con  $i < j$  tal que  $v_i = v_j$ . Vemos que el camino  $P' = (u, P, v_i = v_j, v_{j+1}, P, v)$  es un camino tal que  $\ell(P') < n$ , ya que en  $D$  no hay lazos y así  $i + 1 \neq j$ . Ahora por hipótesis de inducción existe una  $uv$ -trayectoria, digamos  $T$ , tal que está contenida en  $P'$  y como  $P'$  está contenida en  $P$ , se sigue que  $P$  contiene a  $T$ , concluyendo la inducción y así probando el lema. □

**Definición 1.44.** *Dada una gráfica  $D$  se define la **distancia** entre un par de vértices en  $D$  como:*

$$d_D(u, v) = \begin{cases} \min\{\ell(T) | T \in \text{Tray}(u, v)\} & \text{si } \text{Tray}(u, v) \neq \emptyset \\ \infty & \text{si } \text{Tray}(u, v) = \emptyset \end{cases}$$

Cuando sea claro sobre que digráfica se esté trabajando la distancia se usará simplemente  $d(u, v)$ , en lugar de  $d_D(u, v)$ .

**Definición 1.45.** *Dados dos subconjuntos de vértices  $X$  y  $Y$  de una digráfica  $D$  la distancia de  $X$  a  $Y$  denotada por  $d(X, Y)$  esta dada por  $d(X, Y) = \min\{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ .*

*Si  $H_1$  y  $H_2$  son dos subdigráficas de  $D$ ,  $d(H_1, H_2)$  se entenderá como  $d(V(H_1), V(H_2))$ .*

Habiendo definido los conceptos de trayectoria y distancia en una digráfica es natural pensar en una generalización del concepto de núcleo, dada en función de la longitud de las trayectorias. A continuación es presentada dicha generalización.

**Definición 1.46.** *Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica,  $k \in \mathbb{Z}$  y  $N \subseteq V(D)$ .*

- $N$  es  **$k$ -independiente** si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  en  $N$ , tenemos que  $d(u, v) \geq k$ ;
- $N$  es  **$l$ -absorbente** si para cualquier  $u \in V(D) \setminus N$ , existe  $v \in N$  tal que  $d(u, v) \leq l$ .

Un  **$(k, l)$ -núcleo** de  $D$  es un subconjunto de  $V(D)$  que es  $k$ -independiente y  $l$ -absorbente. Un  **$k$ -núcleo** es un  $(k, k - 1)$ -núcleo.

**Definición 1.47.** Una digráfica  $D$  se dice **fuertemente conexa** o sólo **fuerte**, si para cualquier par de vértices  $x, y$  de  $D$ ,  $x \rightsquigarrow y$  y  $y \rightsquigarrow x$  (esta propiedad es equivalente a pedir que  $x \rightsquigarrow y$  ya que  $x$  y  $y$  son arbitrarios, se da esta definición para que sea más fácil entender el concepto de fuerte conexa, el cual en pocas palabras nos dice que es posible llegar desde cualquier vértice a cualquier otro, pero estaremos usando ambas definiciones alternadamente, según se necesite).

De igual forma una digráfica  $D$  se dice **débilmente conexa** o **unilateralmente conexa**, si para cualquier par de vértices  $x, y$  de  $D$ ,  $x \rightsquigarrow y$  ó  $y \rightsquigarrow x$ .

El ciclo en la figura 1.10a es un ejemplo de digráfica fuerte, de hecho cualquier ciclo es una digráfica fuerte. De igual manera en la figura 1.10b se muestra una digráfica unilateralmente conexa.

**Definición 1.48.** El **diámetro** de una digráfica fuerte  $D$  denotado por  $\text{diám}(D)$  está dado por  $\text{diám}(D) = \max\{d(x, y) : \{x, y\} \subseteq V(D)\}$ , si  $D$  no es fuerte entonces su diámetro es  $\infty$ .

**Definición 1.49.** Dada una digráfica  $D$  se define la **circunferencia** de  $D$  como:

$$\text{circ}(D) = \begin{cases} \max\{\ell(C) | C \in \text{Cic}_G\} & \text{si } \text{Cic}_G \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \text{Cic}_G = \emptyset \end{cases}$$

Notamos que la digráfica  $D$  en la figura 1.10a cumple con que  $\text{diam}(D) = 5$  y  $\text{circ}(D) = 6$ .

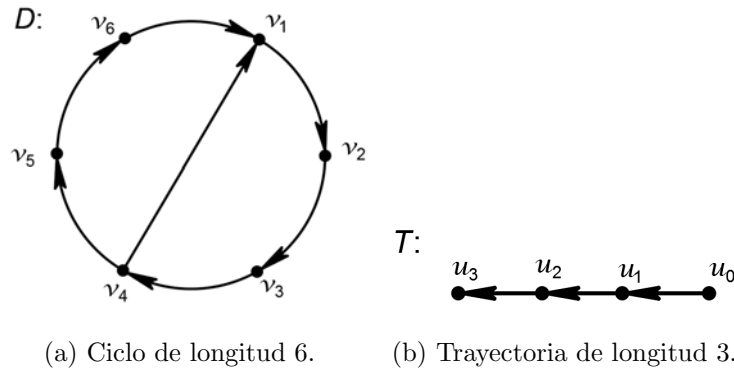


Figura 1.10

**Definición 1.50.** Dada una digráfica  $D$  y una subdigráfica  $S$  de  $D$ . Si  $S$  es fuerte y máxima por contención con dicha propiedad, entonces a  $S$  se le llamará **componente fuerte** de  $D$ .

**Observación 1.2.** Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos componentes fuertes distintas de  $G$ , entonces  $S_1$  y  $S_2$  no comparten vértices.

*Demostración.* El resultado es análogo a la observación 1.1 para componentes conexas en gráficas.  $\square$

**Definición 1.51.** Sean  $D$  una digráfica y  $S_1, \dots, S_n$  sus componentes fuertes. La digráfica de **condensación** de  $D$ ,  $D^*$ , es la digráfica con  $V(D^*) = \{S_1, \dots, S_n\}$ , tal que  $(S, T) \in F(D^*)$  si y sólo si existe una  $ST$ -flecha en  $D$ .

En la figura 1.11 observamos una digráfica  $D$ , sus componentes fuertes y su digráfica de condensación.

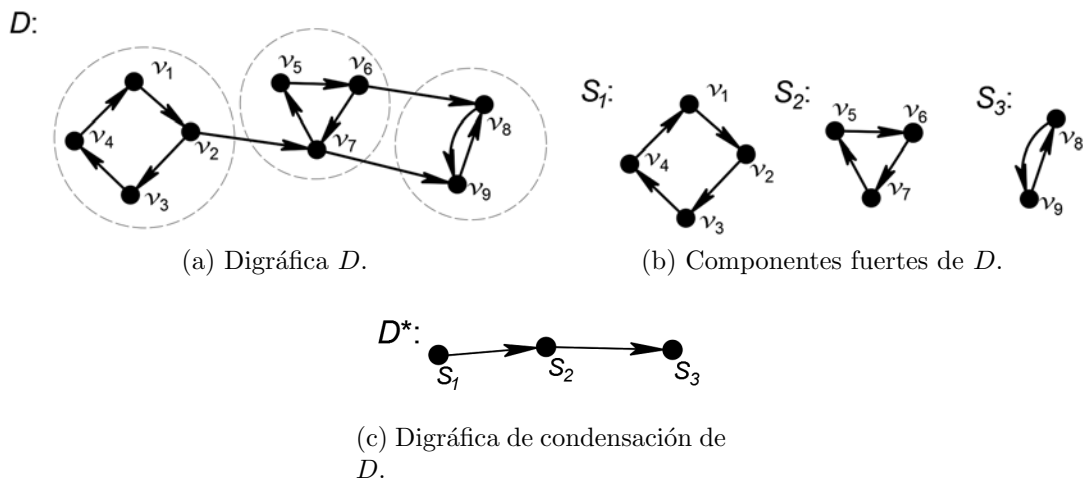


Figura 1.11

**Teorema 1.3.** *Una digráfica  $D$  es fuerte si y sólo si existe un camino cerrado que pase por todos los vértices.*

*Demostración.* La prueba es completamente análoga a la dada en el teorema 1.1 □

**Teorema 1.4.** *La digráfica de condensación de una digráfica  $D$  es acíclica.*

*Demostración.* Sean  $S_1, \dots, S_n$  las componentes fuertes de  $D$ , vértices de la digráfica de condensación  $D^*$ . Procedamos por contradicción, supongamos que  $D^*$  contiene un ciclo  $C$  y como podemos tomar este ciclo etiquetando los vértices a conveniencia, suponemos que  $C = (S_1, S_2, \dots, S_m, S_1)$ , con  $n \geq m \geq 2$ . Sean  $u \in V(S_1)$  y  $v \in V(S_2)$  dos vértices cualquiera. Como existen las flechas  $(S_j, S_{j+1}) \in F(D^*)$  para cualquier  $j \in \{1, \dots, m\}$  (con los índices módulo  $m$ ) entonces de la definición se cumple que existe una  $S_j S_{j+1}$ -flecha en  $D$ , sin pérdida de generalidad sea la flecha  $(x_j, y_{j+1})$ , para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$  (con los índices módulo  $m$ ). Sabemos que existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de  $S_j$ , llamemos a este camino  $T_j$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Ahora sean los caminos  $P_1 = (y_1, T_1, u, T_1, x_1, y_2)$ ,  $P_2 = (y_2, T_2, v, T_2, x_2, y_3)$  y  $P_j = (y_j, T_j, x_j, y_{j+1})$  para cada  $j \in \{3, \dots, m\}$  (con los índices módulo  $m$ ). Sea ahora  $C' = \bigcup_{j=1}^m P_j$ , el cual es un camino cerrado en  $D$  que pasa por los vértices  $u$  y  $v$ , por lo tanto  $u \rightsquigarrow v$  y  $v \rightsquigarrow u$  lo que contradice la maximalidad de  $S_1$  y  $S_2$  con la propiedad de ser fuerte, por lo tanto lo que supusimos es falso y  $D^*$  es acíclica. □

**Teorema 1.5.** *Si  $D$  es una digráfica acíclica entonces existe un vértice de ingrado cero y un vértice de exgrado cero.*

*Demostración.* Como  $\overleftarrow{D}$  también es una digráfica acíclica, sólo necesitamos probar que existe un vértice de exgrado cero para completar la prueba, procedamos entonces a probar ésto. Procediendo por contradicción, supongamos que  $\delta^+(v) \geq 1$  para cualquier vértice  $v \in V(D)$ , como la digráfica es finita existe una trayectoria de longitud máxima en  $D$ , sea  $P = (x_1, \dots, x_m)$  tal trayectoria. Como  $\delta^+(x_m) \geq 1$  entonces existe un vértice  $y \in N^+(x_m)$  el cual cumple con que  $N^+(x_m) \subseteq \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$  de lo contrario sería una contradicción a la maximalidad de  $P$ . Por lo tanto  $(y, P, x_m, y)$  es un ciclo en  $D$ , lo que contradice que  $D$  es acíclica. Por lo tanto lo que supusimos es falso y existe un vértice de exgrado cero, concluyendo la prueba. □

De lo anterior se sigue que  $D^*$  es una digráfica acíclica, y por lo tanto ésta tiene vértices de exgrado igual a cero y vértices de ingrado igual a cero, vértices a los cuales les daremos nombres específicos a continuación.

**Definición 1.52.** Una **componente fuerte terminal** de  $D$  es una componente fuerte  $T$  de  $D$  tal que  $\delta_{D^*}^+(T) = 0$ . Una **componente fuerte inicial** de  $D$  es una componente fuerte  $S$  de  $D$  tal que  $\delta_{D^*}^-(S) = 0$ .

En la figura 1.11  $S_1$  es una componente fuerte inicial y  $S_3$  es una componente fuerte terminal.

### 1.2.1. Algunos tipos de digráficas

**Definición 1.53.** Si  $C_n$  es un ciclo de longitud  $n$  y  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son conjuntos de vértices ajenos dos a dos, tal que  $X_i$  es un conjunto independiente para toda  $1 \leq i \leq n$ , entonces  $C_n[X_1, \dots, X_n]$  es llamado un  **$n$ -ciclo extendido**.

**Definición 1.54.** Una digráfica  $D$  se dice que es **bipartita** si existe una partición  $\{X, Y\}$  de  $V(D)$  tal que  $X$  y  $Y$  son conjuntos independientes.

$D$  se dirá  **$n$ -partita** si existe una partición  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de  $V(D)$  tal que  $X_i$  es independiente para toda  $1 \leq i \leq n$ .

De igual forma  $D$  se dirá **cíclicamente  $n$ -partita** si existe una partición  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de  $V(D)$  tal que  $X_i$  es un conjunto independiente para toda  $1 \leq i \leq n$  y  $D \subseteq C_n[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $C_n$  es un ciclo de longitud  $n$ .

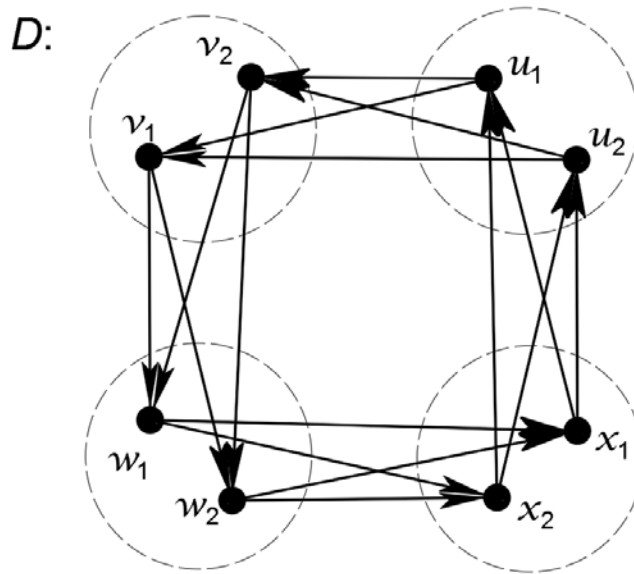


Figura 1.12

La digráfica  $D$  mostrada en la figura 1.12 es una digráfica bipartita con partición

$$\{\{v_1, v_2, x_1, x_2\}, \{u_1, u_2, w_1, w_2\}\}.$$

De igual manera  $D$  es una digráfica 4-partita, de hecho es una digráfica cíclicamente 4-partita, con partición ciclica  $\{\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}, \{w_1, w_2\}, \{x_1, x_2\}\}$ . Más aún  $D$  es un 4-ciclo extendido.

El siguiente es un resultado particular del teorema 2.1 (que veremos más adelante), por lo tanto sólo se enuncia sin prueba.

**Teorema 1.6.** *Una digráfica fuerte  $D$  es bipartita si y sólo si  $D$  no tiene ciclos de longitud impar.*

Como resultado inmediato obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.** *Una digráfica fuerte  $D$  contiene un ciclo de longitud impar si y sólo si  $D$  no es bipartita.*

La digráfica  $\overleftrightarrow{K}_{n,m}$  es la **digráfica bipartita completa**, es decir, la digráfica con bipartición  $\{X, Y\}$ , con  $X$  y  $Y$  conjuntos independientes tal que  $X \rightarrow Y$  y  $Y \rightarrow X$ .

**Definición 1.55.** *Una digráfica  $D$  se llamará **transitiva** si siempre que  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$  implica que  $(u, w) \in F(D)$ .*

Otra forma de ver la transitividad en una digráfica es la siguiente: si existe una 2-trayectoria entre  $u$  y  $w$  entonces  $(u, w) \in F(D)$ . Así una generalización para la transitividad sería la  **$k$ -transitividad**, que como es de imaginarse, se define de la siguiente forma.

**Definición 1.56.** *Una digráfica  $D$  es  **$k$ -transitiva** si siempre que exista una  $uv$ -trayectoria de longitud  $k$  entonces  $(u, v) \in F(D)$ .*

Un tipo de digráfica parecida a las  $k$ -transitivas, pero un poco más generales son las siguientes.

**Definición 1.57.** *Una digráfica  $D$  es  **$k$ -cuasitransitiva** si siempre que exista una  $uv$ -trayectoria de longitud  $k$  entonces  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ .*

Ahora con el propósito de facilitar las pruebas se introduce una familia de digráficas la cual se encuentra en [9] dada por C. Hernández Cruz y H. Galeana Sánchez.

**Definición 1.58.** *Una digráfica  $D$  es llamada  **$k$ -trayectoria-transitiva** si siempre que exista una  $uv$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $k$  y una  $vw$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $k$ , entonces existe una  $uw$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $k$ .*

A continuación damos la definición de otra generalización del concepto de núcleo.

**Definición 1.59.** *Si  $D$  es una digráfica, un subconjunto  $S \subseteq V(D)$ ;*

1. es **independiente por trayectorias** siempre que  $\{u, v\} \subseteq S$  implica que no existe  $uv$ -trayectoria ni  $vu$ -trayectoria en  $D$ ;
2. es **absorbente por trayectorias** siempre que  $u \in V(D) \setminus S$ , implica que existe un vértice  $v \in S$  tal que existe una  $uv$ -trayectoria en  $D$ ;
3. es un **núcleo por trayectorias** si es tanto independiente como absorbente por trayectorias.

Berge probó que cualquier digráfica tiene un núcleo por trayectorias, una prueba de este hecho puede ser consultada en [3].



# Capítulo 2

## Resultados preliminares de digráficas

Este capítulo nos servirá para tener más herramientas a la hora de analizar las digráficas  $k$ -cuasitransitivas y las digráficas  $k$ -transitivas.

En la primera sección daremos resultados para digráficas en general, dicho de otro modo, que no sólo se aplican a las digráficas  $k$ -transitivas, centrando nuestra atención en el comportamiento de los ciclos.

En la segunda sección de este capítulo analizaremos el comportamiento de las distancias entre parejas de vértices, en especial para las digráficas  $k$ -cuasitransitivas.

En la última sección se abordarán resultados que nos ayudarán a entender el comportamiento de las digráficas  $k$ -transitivas, la mayoría de estos basándose en la existencia de algún ciclo en dichas digráficas y analizando las adyacencias que se generan.

### 2.1. Ciclos en digráficas

El siguiente resultado nos será de ayuda al estudiar las digráficas 3-cuasitransitivas.

**Lema 2.1.** *Sea  $D$  una digráfica tal que contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq 2$ , digamos  $T = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ . Entonces para todo  $v \in V(D)$ :*

- *Si existe una  $vT$ -trayectoria en  $D$  entonces existe una  $vT$ -trayectoria en  $D$  de longitud impar.*
- *Si existe una  $Tv$ -trayectoria en  $D$  entonces existe una  $Tv$ -trayectoria en  $D$  de longitud impar.*

*Demostración.* A lo largo de la prueba consideraremos los subíndices de los vértices del ciclo  $T$  módulo  $n$ .

- Si  $v \in V(T)$  entonces,  $v = v_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$  entonces  $(v, v_{i+1}) \in F(D)$  es una  $vT$ -trayectoria en  $D$ , más aún es una  $vT$ -trayectoria en  $D$  de longitud impar. De igual forma  $(v_{i-1}, v) \in F(D)$  es una  $Tv$ -trayectoria, más aún es una  $Tv$ -trayectoria de longitud impar.
- Si  $V(D) \setminus V(T) = \emptyset$ , entonces no hay nada que probar porque estaríamos en el caso anterior. Asumamos que existe  $v \in V(D) \setminus V(T)$  (la figura 2.1 sirve como apoyo visual de la prueba).

1. Si existe una  $vT$ -trayectoria en  $D$ , sea  $Q = (v = y_0, y_1, \dots, y_m = v_i)$ , una trayectoria de longitud mínima de  $v$  a  $T$ , dicho de otra manera,  $\ell(Q) = d(v, T)$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $|V(Q) \cap V(T)| = 1$ . Así hay dos subcasos:
  - a) Si  $m = 2k + 1$  para alguna  $k \in \mathbb{N}$  entonces  $Q$  un  $vT$ -trayectoria de longitud impar.



- b) Si  $m = 2k$  para alguna  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $y_m \in V(T)$  entonces  $y_m = v_j$  para alguna  $j \in \{1, \dots, n\}$  entonces  $(v_j, v_{j+1}) \in F(D)$  donde  $j+1$  es tomado módulo  $n$ . Como  $Q$  es una trayectoria, además  $y_m$  es el primer vértice de  $T$  en  $Q$ , por lo tanto  $y_m \neq v_{j+1}$  por ser vértices distintos del  $n$ -ciclo  $T$  con  $n \geq 2$ , entonces  $Q' = (v, Q, y_m, v_{j+1})$  es una  $vT$ -trayectoria. Observemos que  $\ell(Q') = m + 1 = 2k + 1$  por lo tanto existe una  $vT$ -trayectoria de longitud impar.

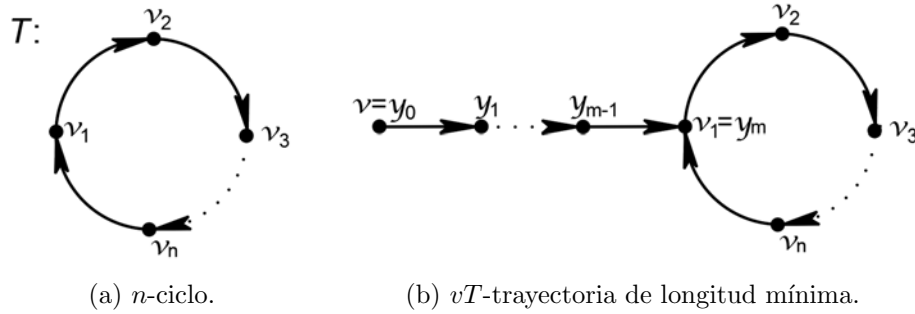


Figura 2.1

2. Ahora si existe  $P$  una  $Tv$ -trayectoria en  $D$ , como  $\overleftarrow{C}$  igual es un  $n$ -ciclo en  $\overleftarrow{D}$  y además  $\overleftarrow{P}$  es una  $vT$  trayectoria en  $\overleftarrow{D}$  entonces por el caso anterior tenemos que existe una  $vT$ -trayectoria de longitud impar en  $\overleftarrow{D}$  digamos  $P'$  así  $\overleftarrow{P'}$  es una  $Tv$ -trayectoria de longitud impar probando el resultado. □

Los siguientes son resultados útiles para la caracterización de las digráficas 4-transitivas.

**Lema 2.2.** Si  $D$  es una digráfica y  $P = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  un camino cerrado no trivial en  $D$ , entonces existe  $\{i, m\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , con  $i < m$ , tal que  $C = (v_i, P, v_m = v_i)$  es un ciclo en  $D$ . En específico es tal que  $2 \leq \ell(C) \leq n$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica y  $P = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  un camino cerrado no trivial. Como estamos trabajando con digráficas simples y  $P$  es no trivial entonces  $n \geq 2$ .

Sabemos que  $P$  repite por lo menos un vértice ya que  $v_n = v_0$  así sea  $m = \min\{j \in \{1, \dots, n\} : v_j \in \{v_0, \dots, v_{j-1}\}\}$ , es decir, el primer momento en que el camino  $P$  repite un vértice. Vemos de la definición de  $m$  que existe  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  tal que  $v_i = v_m$  y como es la primera vez que  $P$  repite un vértice entonces  $C = (v_i, P, v_m)$  es un ciclo. Como  $i < m$  (por no considerar lazos) y además  $C$  es un subcamino de  $P$ , entonces  $2 \leq \ell(C) \leq n$  (ver figura 2.2). □

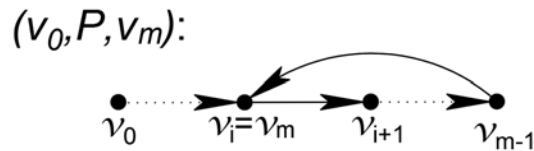


Figura 2.2

Como consecuencia del lema anterior damos el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.** *Si  $D$  es una digráfica fuerte, entonces contiene un ciclo.*

*Demostración.* Como  $D$  es fuerte, entonces por el teorema 1.3  $D$  contiene un camino cerrado que pasa por todos sus vértices. Del lema 2.2 concluimos que  $D$  contiene un ciclo.  $\square$

**Lema 2.3.** *Sea  $D$  una digráfica y  $k \in \mathbb{N}$ . Si cualquier ciclo  $C$  de  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_k 0$ , entonces cualquier camino cerrado  $P$  de  $D$  es tal que  $\ell(P) \equiv_k 0$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica y  $P = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  un camino cerrado no trivial (cuando es trivial se cumple que  $\ell(P) = 0$ ). Vemos que por ser  $P$  no trivial y no considerar lazos en  $D$  se tiene que  $n \geq 2$ . Ahora observemos que  $n \geq k$ . De lo contrario supongamos que  $n < k$  (de la aclaración anterior  $k > 2$ ), entonces por el lema 2.2 tenemos que existe un ciclo  $C$  en  $D$  tal que  $2 \leq \ell(C) \leq k - 1$  y además  $\ell(C) \equiv_k 0$ , pero eso es una contradicción.

Ahora procedamos a probar el lema por inducción sobre  $\ell(P)$ .

**Base:** Si  $P = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  es un camino cerrado y  $n = k$  por el lema 2.2 existe un ciclo  $C$  contenido en  $P$  tal que  $2 \leq \ell(C) \leq n$ . Si  $C \subsetneq P$ , es decir, esta contenido propiamente, entonces  $2 \leq \ell(C) < k$  y  $\ell(C) \equiv_k 0$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $P$  es un ciclo y es tal que  $\ell(P) \equiv_k 0$ .

**Hipótesis inductiva:** *Si  $P'$  es un camino cerrado y  $\ell(P') < n$ , entonces  $\ell(P') \equiv_k 0$ .*

Sea  $P = (v_0, \dots, v_n = v_0)$  un  $n$ -camino cerrado, entonces por el lema 2.2 existe  $\{i, m\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , con  $i < m$ , tal que el subcamino  $C = (v_i, P, v_m)$  es un ciclo, así se tienen dos casos

- Si  $i = 0$  y  $m = n$  entonces  $C = P$  y por lo tanto  $\ell(P) \equiv_k 0$  por hipótesis del problema.
- Si  $0 < i$  ó  $m < n$  entonces sea  $P' = (v_0, P, v_i = v_m, v_{m+1}, P, v_n)$  es un camino cerrado tal que  $\ell(P') < n$  y por hipótesis de inducción se sigue que  $\ell(P') \equiv_k 0$ . Como  $\ell(P) = \ell(C) + \ell(P')$  y  $\ell(C) \equiv_k 0$ , entonces  $\ell(P) \equiv_k 0$ , terminando la inducción.

$\square$

El siguiente teorema es una extensión de la caracterización de las digráficas bipartitas, que dice que una digráfica fuerte es bipartita si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

**Teorema 2.1.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte.  $D$  es cíclicamente  $k$ -partita si y sólo si cualquier ciclo  $C$  de  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_k 0$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica fuerte cíclicamente  $k$ -partita y  $C$  un ciclo en  $-D$ , que existe por el corolario 2.1. Notamos que las flechas del ciclo  $C$  deben moverse siguiendo la  $k$ -partición cíclica de  $D$ , además  $C$  debe empezar y terminar en la misma clase de la partición, de esta manera se tiene que la longitud del ciclo debe ser un múltiplo de  $k$ , es decir,  $\ell(C) \equiv_k 0$ .

Ahora probemos la necesidad. Si cualquier ciclo  $C$  de  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_k 0$ . Como  $D$  es fuerte entonces para todo par de vértices  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  se tiene que  $d(u, v)$  está definida. Sea  $v_0 \in V(D)$  un vértice fijo y para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  sea  $V_i = \{u \in V(D) : d(v_0, u) \equiv_k i\}$ . Primeramente probaremos que  $\{V_1, \dots, V_k\}$  es una  $k$ -partición de los vértices de  $D$ .

De la definición de cada conjunto  $V_i$  observamos que  $\bigcup_{i=1}^k V_i = V(D)$  porque  $D$  es fuerte y se puede llegar desde  $v_0$  a cualquier vértice de  $D$ .

Por definición, para cada  $u \in V(D)$ , se tiene que  $d(v_0, u)$  está únicamente determinada, por lo tanto,  $i \neq j$  si y sólo si  $V_i \cap V_j = \emptyset$ . Ahora sólo falta ver que para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$  se tiene que  $V_i \neq \emptyset$ .

Como  $D$  es fuerte entonces, en particular, para todo vértice  $v \in V(D)$  se tiene que  $\delta^-(v) \geq 1$  (salvo en la digráfica trivial pero este teorema también es válido para la digráfica trivial) de lo contrario existiría un vértice al cual no se puede llegar desde los demás vértices (esto es suponiendo que  $D$  no es la digráfica trivial). Así,  $\delta^-(v_0) \geq 1$ , es decir, existe  $u^* \in N^-(v_0)$  y supongamos que  $d(v_0, u^*) = n$ . Por ser  $D$  fuerte existe una  $v_0 u^*$ -trayectoria y podemos elegir una de longitud mínima, en otras palabras, existe la trayectoria  $T = (v_0, v_1, \dots, v_n = u^*)$  donde  $d(v_0, u^*) = n$ . Como  $T$  es de longitud mínima entonces para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  se cumple que  $d(v_0, v_i) = i$ , de lo contrario existiría una  $i' \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $d(v_0, v_{i'}) < i'$  y por lo tanto existiría una trayectoria  $P = (v_0, \dots, v_{i'})$  tal que  $\ell(P) < i'$ . De esta forma  $T' = (v_0, P, v_{i'}, T, v_n)$  sería un  $v_0 v_n$ -camino del cual podríamos extraer una  $v_0 v_n$ -trayectoria, digamos  $T''$  tal que  $\ell(T'') < \ell(T)$  contradiciendo la minimalidad de  $T$ .

Así  $T$  es una  $v_0 u^*$ -trayectoria y  $C = (v_0, T, u^*, v_0)$  es un ciclo en  $D$ , tal que  $\ell(C) = n$  y por hipótesis  $n \equiv_k 0$ , en particular para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $v_i \in V_i$  por definición de cada  $V_i$ , en otras palabras,  $V_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

De esta forma vemos que  $\{V_1, \dots, V_k\}$  es una  $k$ -partición de los vértices de  $V(D)$ , probemos ahora que es una  $k$ -partición cíclica.

Sea  $(x, y) \in F(D)$ , como  $D$  es fuerte se sigue que existen  $T_1 \in \text{Tray}(v_0, x)$ ,  $T_2 \in \text{Tray}(v_0, y)$  y  $T_3 \in \text{Tray}(y, v_0)$  tal que  $d(v_0, x) = \ell(T_1)$ ,  $d(v_0, y) = \ell(T_2)$  y  $d(y, v_0) = \ell(T_3)$ .

Ahora sea  $P_1 = (v_0, T_1, x, y, T_3, v_0)$  y  $P_2 = (v_0, T_2, y, T_3, v_0)$  entonces por el lema 2.3 tenemos que  $\ell(P_1) \equiv_k 0 \equiv_k \ell(P_2)$ .

Aparte  $\ell(P_1) = d(v_0, x) + 1 + d(y, v_0)$  y  $\ell(P_2) = d(v_0, y) + d(y, v_0)$  por lo tanto  $d(v_0, x) + 1 + d(y, v_0) \equiv_k d(v_0, y) + d(y, v_0)$ .

De esta forma  $d(v_0, x) + 1 \equiv_k d(v_0, y)$ , dicho de otra forma, si  $d(v_0, x) \equiv_k i$ , para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ , entonces  $d(v_0, y) \equiv_k i + 1$ . Por lo tanto  $x \in V_i$ ,  $y \in V_{i+1}$ , para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Así todas las flechas en  $D$  son  $V_i V_{i+1}$ -flechas (con los índices tomados módulo  $k$ ), por lo tanto  $\{V_1, \dots, V_k\}$  es una  $k$ -partición cíclica.  $\square$

Recordemos que una orientación de una digráfica  $D$  es una subdigráfica asimétrica maximal de  $D$ .

**Teorema 2.2.** *Una digráfica  $D$  admite una orientación fuerte si y sólo si  $D$  es fuerte y su gráfica subyacente  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas.*

*Demostración.* Comencemos con la suficiencia. Sea  $D$  una digráfica  $D$  tal que admite una orientación fuerte, digamos  $D_1$ . Como  $D_1 \subseteq D$  y  $D_1$  es fuerte entonces  $D$  es fuerte. Sea  $(u, v) \in F(D)$  entonces  $\{u, v\} \in A(UG(D))$  y como  $D_1$  es fuerte existe  $P \in \text{Tray}_{D_1}(v, u)$ , como  $D_1$  es asimétrica, dicho de otra manera, no hay flechas simétricas entonces  $(v, u) \notin F(D_1)$ , por lo tanto  $\ell(P) \geq 2$ . Así  $P$  es una  $vu$ -trayectoria en  $D_1$  que no pasa por la flecha  $(u, v)$ . Así  $P$  es un  $vu$ -camino que no pasa por la arista  $\{u, v\}$  en  $UG(D)$ . Por lo tanto  $P \cup \{v, u\}$  es un ciclo en  $UG(D)$ . Como la arista fue arbitraria concluimos que toda arista de  $UG(D)$  está en un ciclo, por lo tanto del teorema 1.2 y de la definición de conexidad por aristas, concluimos que  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas.

Ahora probemos la necesidad. Supongamos que  $D$  es una digráfica fuerte tal que  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas. Para probar que  $D$  tiene una orientación fuerte veremos que dada cualquier flecha simétrica en  $D$  podemos hacer asimétrica esa flecha de tal manera que la digráfica resultante siga siendo fuerte. Sea  $(u, v) \in F(D)$  tal que  $(v, u) \in F(D)$ , es decir, una flecha simétrica en  $D$ .

Como  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas entonces se sigue de la definición que  $UG(D) \setminus \{u, v\}$  es conexa por lo tanto existe una  $uv$ -trayectoria, digamos  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  en  $UG(D) \setminus \{u, v\}$ . Observamos que  $T$  no pasa por la arista  $\{u, v\}$ , por lo tanto  $n \geq 2$ .

Como  $D$  es fuerte, para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  existe una  $x_i x_{i+1}$ -trayectoria en  $D$ , consideremos  $P_i$  una  $x_i x_{i+1}$ -trayectoria de longitud mínima. Analicemos los casos para cada  $P_i$ :

1. Si  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , entonces  $T$  es una  $uv$ -trayectoria en  $D$  tal que no pasa por  $(u, v)$  y por lo tanto  $D \setminus (u, v)$  es fuerte.
2. Si existe  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \notin F(D)$ , entonces notemos que  $\{x_i, x_{i+1}\} \in A(T)$ , con  $T \subseteq UG(D)$ . De esta forma si  $(x_i, x_{i+1}) \notin F(D)$ , entonces  $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$ , analicemos los casos para cada  $i$ :

- a) Si  $(u, v) \in F(P_i)$  y  $(x_i, x_{i+1}) \notin F(D)$  para alguna  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , entonces  $(v, P_i, x_{i+1}, x_i, P_i, u)$  es una  $vu$ -trayectoria en  $D$  tal que no pasa por  $(v, u)$ , como se muestra en la figura 2.3, por lo tanto  $D \setminus (v, u)$  es fuerte.

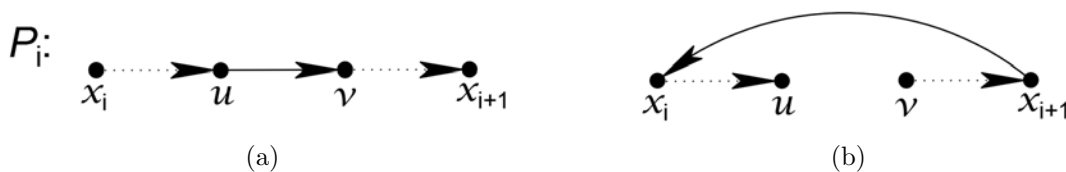


Figura 2.3

- b) Si  $(u, v) \notin F(P_i)$  ó  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , entonces  $P = \bigcup_{i=0}^{n-1} P_i$ , como en la figura 2.4, es un  $uv$ -camino tal que  $(u, v) \notin F(P)$ , ya que si  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para alguna  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  entonces por elección  $P_i = (x_i, x_{i+1})$ , implicando que en cualquier caso  $(u, v) \notin F(P_i)$ , de esta forma  $D \setminus (u, v)$  es fuerte.

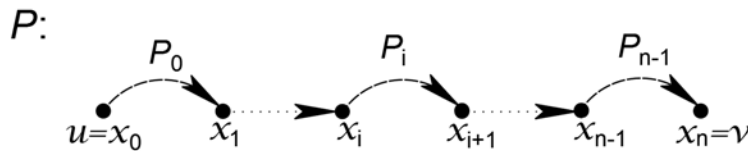


Figura 2.4

De todos los casos anteriores concluimos que dada  $(u, v)$  una flecha simétrica en  $D$ , la digráfica obtenida de convertir esta flecha en asimétrica al eliminar  $(u, v)$  ó  $(v, u)$  de  $D$  según convenga, sigue siendo fuerte, dicho de otro modo,  $D \setminus (u, v)$  es fuerte ó  $D \setminus (v, u)$  es fuerte. Por lo tanto  $D$  admite una orientación fuerte.  $\square$

## 2.2. Distancias en digráficas fuertes $k$ -cuasitransitivas

A continuación veremos algunos resultados que involucran la distancia entre cada pareja de vértices en digráficas  $k$ -transitivas y  $k$ -cuasitransitivas, que fueron dados por H. Galeana Sánchez y C. HernándezCruz en [9]. Estos nos serán de ayuda para probar algunos de los resultados del presente trabajo.

Comenzamos con una observación muy simple.

**Observación 2.1.** Si  $D$  es  $k$ -cuasitransitiva ( $k$ -transitiva) entonces  $\overleftarrow{D}$  es  $k$ -cuasitransitiva ( $k$ -transitiva).

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva,  $\{u, v\} \subseteq V(\overleftarrow{D})$  y  $P \in \text{Tray}_{\overleftarrow{D}}(u, v)$  tal que  $\ell(P) = k$  por lo tanto  $\overleftarrow{P}$  es una  $vu$ -trayectoria en  $D$  tal que  $\ell(\overleftarrow{P}) = k$ . Como  $D$  es una digráfica  $k$ -cuasitransitiva se tiene que  $(v, u) \in F(D)$  ó  $(u, v) \in F(D)$ , es decir,  $(u, v) \in F(\overleftarrow{D})$  ó  $(v, u) \in F(\overleftarrow{D})$ . Por lo tanto  $\overleftarrow{D}$  es una digráfica  $k$ -cuasitransitiva.  $\square$

La prueba para el caso  $k$ -transitiva se omite ya que es completamente análoga. Ahora con el propósito de conocer el comportamiento de las digráficas  $k$ -transitivas, analizaremos las digráficas  $k$ -cuasitransitivas. Estas últimas son una suprafamilia de las primeras, ya que toda digráfica  $k$ -transitiva es también  $k$ -cuasitransitiva.

Empezaremos dando condiciones para conocer la distancia entre un par de vértices.

**Proposición 2.1.** Sea  $k \geq 2$  un entero par. Si  $D$  es una digráfica  $k$ -cuasitransitiva y si  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  es tal que  $u \rightsquigarrow v$ , entonces:

1. Si  $d(u, v) = k$ , entonces  $d(v, u) = 1$ .
2. Si  $d(u, v) = k + 1$ , entonces  $d(v, u) \leq k + 1$ .
3. Si  $d(u, v) \geq k + 2$ , entonces  $d(v, u) = 1$ .

*Demostración.* Sean  $k \geq 2$  un entero par y  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva, supongamos que existe  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  tal que  $u \rightsquigarrow v$ . Como de todo  $uv$ -camino podemos extraer una  $uv$ -trayectoria sea  $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una trayectoria tal que  $d(u, v) = n$ , dicho de otro modo,  $P$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud mínima.

**Observación.** De la minimalidad de  $P$  es inmediato notar que  $d(x_i, x_j) = j - i$  para cualquier  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $i \leq j$ .

1. Supongamos que  $n = k$ . Como  $D$  es  $k$ -cuasitransitiva se sigue de la existencia de esta  $uv$ -trayectoria que  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$  pero  $(u, v) \notin F(D)$  ya que de existir dicha flecha sería ella misma una  $uv$ -trayectoria de longitud uno, que es menor a  $k$  lo cual es una contradicción. De esta forma  $(v, u) \in F(D)$ . De esta forma,  $d(v, u) \leq 1$  y no puede ser cero porque eso implicaría que  $u = v$  y por lo tanto  $d(u, v) = 0 < k$  de nuevo una contradicción. En consecuencia  $d(v, u) = 1$  (ver figura 2.5).

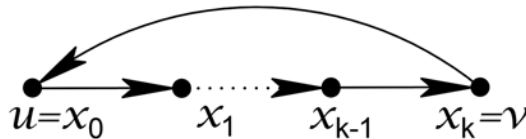


Figura 2.5

2. Supongamos que  $n = k + 1$ . Sabemos que  $d(x_0, x_k) = k$ , al igual que  $d(x_1, x_{k+1}) = k$  y del inciso anterior se sigue que  $d(x_k, u) = 1 = d(v, x_1)$  ya que  $x_0 = u$  y  $x_{k+1} = v$ , entonces  $Q = (v, x_1, P, x_k, u)$  es una  $vu$ -trayectoria tal que  $\ell(Q) = k + 1$ . De esta forma se tiene que  $d(v, u) \leq k + 1$  (ver figura 2.6).

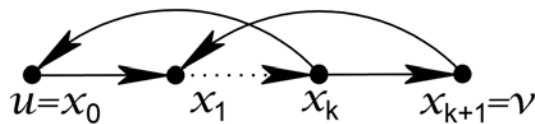


Figura 2.6

3. Probemos por inducción sobre  $n$  que si  $n \geq k + 2$ , entonces  $d(v, u) = 1$ .

**Base:** Supongamos que  $n = k + 2$ .

Por la observación,  $d(x_0, x_k) = d(x_2, x_{k+2}) = k$ , entonces se sigue del primer inciso que  $d(x_k, u) = d(v, x_2) = 1$  ya que  $x_0 = u$  y  $x_{k+2} = v$ , de esta forma  $Q_1 = (v, x_2, P, x_k, u)$  es tal que  $\ell(Q_1) = k$  y por la  $k$ -cuasitransitividad de  $D$  se sigue que  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$ . Sabemos que  $(u, v) \notin F(D)$ , de lo contrario  $d(u, v) \leq 1$ , que es una contradicción. Así  $(v, u) \in F(D)$  y en consecuencia  $d(v, u) \leq 1$  además por ser  $d(u, v) \neq 0$  se sigue que  $d(v, u) > 0$ . Por lo tanto  $d(v, u) = 1$  (ver figura 2.7).

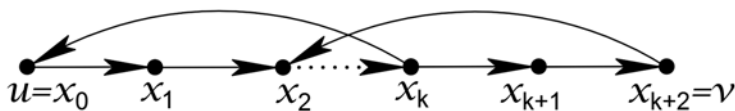


Figura 2.7

**Hipótesis inductiva:** Si  $k + 2 \leq d(u', v') < n$  entonces  $d(v', u') = 1$ , para cualquiera  $\{u', v'\} \subseteq V(D)$ . El caso  $n = k + 3$  no se comporta de igual manera que cuando  $n > k + 3$ , por lo tanto los analizaremos por separado. Procedamos por casos para  $n$ :

a)  $n = k + 3$ .

Por la observación,  $d(x_1, v) = k + 2$ , se sigue de la base de inducción que  $d(v, x_1) = 1$ . Entonces  $Q_3 = (v, x_1, P, x_k)$  es una  $vx_k$ -trayectoria tal que  $\ell(Q_3) = k$  y de la  $k$ -cuasitransitividad de  $D$  se sigue que  $(v, x_k) \in F(D)$  ó  $(x_k, v) \in F(D)$ , pero  $(x_k, v) \notin F(D)$  ya que de lo contrario  $P$  no sería mínima. Por lo tanto  $d(v, x_k) = 1$ .

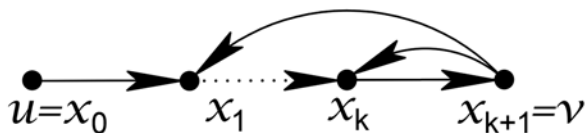


Figura 2.8

Ahora probaremos que si  $d(v, x_{k-j}) = 1$  con  $0 \leq j \leq k - 2$  entonces  $d(v, x_{k-j-2}) = 1$ .

Supongamos que  $d(v, x_{k-j}) = 1$  y  $0 \leq j \leq k - 2$  por lo tanto  $0 \leq k - j - 2$ .

Por la observación  $d(u, x_k) = k$  y del inciso (1) se sigue que  $(x_k, x_0) \in F(D)$ . Notamos que  $T = (v, x_{k-j}, P, x_k, x_0, P, x_{k-j-2})$  es una  $vu$ -trayectoria tal que  $\ell(T) = 1 + k - (k - j) + 1 + (k - j - 2) = k$  y de la  $k$ -cuasitransitividad se sigue que  $(v, x_{k-j-2}) \in F(D)$  ó  $(x_{k-j-2}, v) \in F(D)$ . De la minimalidad de  $P$  se sigue que  $(x_{k-j-2}, v) \notin F(D)$ , así  $d(v, x_{k-j-2}) = 1$  (ver figura 2.8).

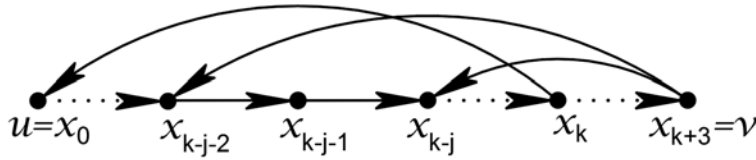


Figura 2.9

Sabemos que  $d(v, x_k) = 1$  y por otro lado probamos que  $d(v, x_{k-j}) = 1$  implica que  $d(v, x_{k-j-2}) = 1$  para toda  $j \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ ; así **como  $k$  es par**, se sigue recursivamente que  $d(v, x_k) = d(v, x_{k-2}) = \dots = d(v, x_0) = 1$ , es decir,  $d(v, u) = 1$ .

b)  $n > k + 3$

Por la observación se tiene que  $d(u, x_k) = k$ , por lo tanto del inciso (1) se tiene que  $d(x_k, u) = 1$ . Por otro lado  $k+2 \leq d(x_2, v) < n$ , entonces de la hipótesis de inducción se sigue que  $d(v, x_2) = 1$ . Así  $Q_3 = (v, x_2, P, x_k, u)$  es una  $vu$ -trayectoria tal que  $\ell(Q_2) = 1 + (k-2) + 1$ , dicho de otra manera,  $\ell(Q_2) = k$ . De la  $k$ -cuasitransitividad y de la minimalidad de  $P$  se deduce que  $(v, u) \in F(D)$  por lo tanto  $d(v, u) = 1$ , concluyendo la inducción (ver figura 2.10).

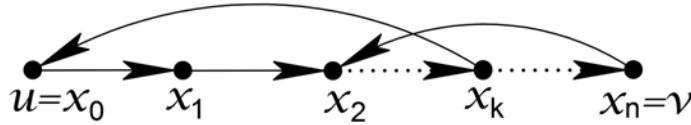


Figura 2.10

□

**Proposición 2.2.** Sean  $k \geq 3$  impar,  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva y  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ . Si existe una  $uv$ -trayectoria, entonces:

1. Si  $d(u, v) = k$ , entonces  $d(v, u) = 1$ .
2. Si  $d(u, v) = k + 1$ , entonces  $d(v, u) \leq k + 1$ .
3. Si  $d(u, v) \geq k + 2$  es impar, entonces  $d(v, u) = 1$ .
4. Si  $d(u, v) \geq k + 3$  es par, entonces  $d(v, u) \leq 2$ .

*Demostración.* Sean  $k \geq 3$  un entero impar,  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva y supongamos que existe  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  tal que  $u \rightsquigarrow v$ . Como de todo  $uv$ -camino podemos extraer una  $uv$ -trayectoria sea  $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una trayectoria tal que  $d(u, v) = n$ , dicho de otra manera,  $P$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud mínima.

**Observación.** De la minimalidad de  $P$  es inmediato notar que  $d(x_i, x_j) = j - i$  para cualquier  $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $i \leq j$ .

Si nos fijamos en la proposición 2.1 vemos que en las pruebas realizadas en los incisos (1) y (2) nunca se necesita de la paridad de  $k$ , por lo tanto estas mismas pruebas funcionan para los primeros dos incisos de esta proposición.

3. Probemos por inducción sobre  $n$  que si  $n \geq k + 2$  y  $n$  es impar, entonces  $d(v, u) = 1$ .

**Base:** Supongamos que  $n = k + 2$  (como  $k$  es impar entonces  $k + 2$  es impar, por esta razón se elige esta base). La prueba dada en la base de inducción del inciso (3) de la proposición anterior funciona aquí ya que nunca se utilizó la paridad de  $k$  en dicha prueba.

**Hipótesis de inducción:** Si  $k + 2 \leq d(u', v') < n$ , con  $d(u', v')$  impar entonces  $d(v', u') = 1$ , para cualquiera  $\{u', v'\} \subseteq V(D)$ .

Por la observación se tiene que  $d(u, x_k) = k$ , por lo tanto del inciso (1) se tiene que  $d(x_k, u) = 1$ . Sabemos que  $(k + 2)$  y  $n$  son impares y además  $k + 2 < n$ , por lo tanto  $k + 4 \leq n$  y así  $k + 2 \leq n - 2$ . De igual manera, por la observación se tiene que  $d(x_2, v) = n - 2$ , así  $k + 2 \leq d(x_2, v) < n$  y de la hipótesis de inducción se sigue que  $d(v, x_2) = 1$ , ya que  $n - 2$  es impar. De esta forma  $Q_3 = (v, x_2, P, x_k, u)$  es una  $vu$ -trayectoria, como se muestra en la figura 2.10, tal que  $\ell(Q_3) = 1 + (k - 2) + 1$ , es decir,  $\ell(Q) = k$ . De la  $k$ -cuasitransitividad y de la minimalidad de  $P$  se deduce que  $(v, u) \in F(D)$  por lo tanto  $d(v, u) = 1$ , lo cual concluye la inducción.

4. Supongamos que  $n \geq k + 3$  tal que  $n$  es par.

Por la observación tenemos que  $d(x_1, v) = n - 1$ , donde  $n - 1$  es impar y  $n - 1 \geq k + 2$ , por lo tanto se sigue del inciso anterior que  $d(v, x_1) = 1$ , dicho de otra manera,  $(v, x_1) \in F(D)$  y podemos dar la siguiente trayectoria  $T = (v, x_1, P, x_k)$ , donde  $\ell(T) = k$ . De la  $k$ -cuasitransitividad de  $D$ , la existencia de  $T$  y la minimalidad de  $P$  concluimos que  $(v, x_k) \in F(D)$ . De la observación tenemos que  $d(u, x_k) = k$  por lo tanto del inciso (1) de la presente proposición concluimos que  $d(x_k, u) = 1$ , es decir,  $(x_k, u) \in F(D)$ . De lo anterior sabemos que  $(v, x_k) \in F(D)$  y  $(x_k, u) \in F(D)$  por lo tanto  $T_1 = (v, x_k, u)$  es una  $vu$ -trayectoria tal que  $\ell(T_1) = 2$ , dicho de otra manera,  $d(v, u) \leq 2$  (ver figura 2.11).

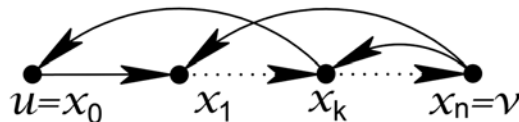


Figura 2.11

□

**Lema 2.4.** Una digráfica  $D$  es  $k$ -trayectoria-transitiva si y sólo si siempre que  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  y exista una  $uv$ -trayectoria en  $D$ , entonces  $d(u, v) \leq k$ .

*Demostración.* Comencemos probando la suficiencia. Sean  $D$  una digráfica  $k$ -trayectoria-transitiva,  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  dos vértices distintos arbitrarios y  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria en  $D$  de longitud mínima, en otras palabras,  $n = d(u, v)$ . Si  $n \leq k$  entonces hemos acabado.

Supongamos que  $n \geq k + 1$ . Notamos que  $T_1 = (x_0, x_1)$  es una  $x_0x_1$ -trayectoria tal que  $\ell(T_1) \leq k$  y  $T_2 = (x_1, \dots, x_{k+1})$  es una  $x_1x_{k+1}$ -trayectoria tal que  $\ell(T_2) \leq k$ , entonces por la  $k$ -trayectoria-transitividad de  $D$  debe existir una  $x_0x_{k+1}$ -trayectoria, digamos  $T_3$ , tal que  $\ell(T_3) \leq k$ . Entonces  $T' = (u = x_0, T_3, x_{k+1}, T, x_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria tal que  $\ell(T') < n$  lo cual es una contradicción a la minimalidad de  $T$ . Por lo tanto no puede ocurrir que  $n \geq k + 1$ , de esta forma,  $d(u, v) \leq k$ .



Procedamos a probar la necesidad. Sea  $D$  una digráfica tal que siempre que  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  y exista una  $uv$ -trayectoria en  $D$ , entonces  $d(u, v) \leq k$ . Ahora probaremos que  $D$  es  $k$ -trayectoria-transitiva, en otras palabras, probaremos que si existe una  $uv$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $k$  y una  $vw$ -trayectoria menor o igual a  $k$ , entonces existe una  $uw$ -trayectoria de longitud menor o igual a  $k$ . Sean  $u, v$  y  $w$  tres vértices distintos de  $D$  tales que existe una  $uv$ -trayectoria digamos  $P_1$  y una  $vw$ -trayectoria digamos  $P_2$ . Por hipótesis  $\ell(P_1) \leq k$  y  $\ell(P_2) \leq k$ . Como  $P = (u, P_1, v, P_2, w)$  es un  $uw$ -camino, entonces por el lema 1.3 existe una  $uw$ -trayectoria digamos  $P_3$  y por hipótesis  $\ell(P_3) \leq k$ , por lo tanto  $D$  es una digráfica  $k$ -trayectoria-transitiva.  $\square$

**Lema 2.5.** *Sea  $k \geq 2$  un entero. Si  $D$  es una digráfica  $k$ -transitiva, entonces  $D$  es  $(k - 1)$ -trayectoria-transitiva.*

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  vértices distintos arbitrarios de  $D$  tales que existe una  $uv$ -trayectoria. Ahora sea  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria de longitud mínima, en otras palabras,  $n = d(u, v)$ .

Si  $n \leq k - 1$  hemos acabado.

Supongamos que  $n \geq k$ , como  $T_1 = (x_0, T, x_k)$  es una trayectoria en  $D$  tal que  $\ell(T_1) = k$ , entonces, por la  $k$ -transitividad de  $D$ ,  $(x_0, x_k) \in A(D)$ , así  $T' = (x_0, x_k, T, x_n)$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud estrictamente menor que  $n$ , que es una contradicción a la minimalidad de  $T$ . Por lo tanto no puede ocurrir que  $n \geq k$ , es decir,  $d(u, v) \leq k - 1$ . Del lema 2.4 se sigue que  $D$  es  $(k - 1)$ -trayectoria-transitiva.  $\square$

**Lema 2.6.** *Si  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva fuerte con  $k \geq 2$ , entonces  $\text{diam}(D) \leq k - 1$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva fuerte. Como  $D$  es fuerte entonces para cualquier par de vértices distintos  $u$  y  $v$  de  $D$  existe una  $uv$ -trayectoria. Por otra parte como  $D$  es  $k$ -transitiva entonces por el lema 2.5 se sigue que  $D$  es  $(k - 1)$ -trayectoria-transitiva. De esta forma se sigue del lema 2.4 que la  $d(u, v) \leq k - 1$  para cualquier  $\{u, v\} \subseteq V(D)$ . Por lo tanto el  $\text{diam}(D) \leq k - 1$ .  $\square$

**Proposición 2.3.** *Si  $D$  es una digráfica  $k$ -transitiva con  $k \geq 2$ , entonces  $D$  es  $[k + n(k - 1)]$ -transitiva para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Procederemos por inducción sobre  $n$ .

**Base:** Si  $n = 0$ , por ser  $k$ -transitiva entonces es  $[k + 0(k - 1)] = k$ -transitiva, en otras palabras, se cumple la base de inducción.

**Hipótesis de inducción:** *Supongamos que  $D$  es  $[k + n(k - 1)]$ -transitiva.*

Demostraremos que  $D$  es  $[k + (n + 1)(k - 1)]$ -transitiva, es decir, que si existe una  $uv$ -trayectoria de longitud  $[k + (n + 1)(k - 1)]$  entonces  $(u, v) \in F(D)$ .

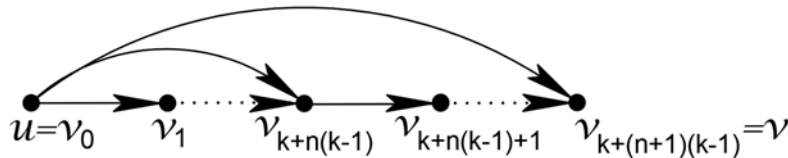


Figura 2.12

Sea  $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_{k+(n+1)(k-1)} = v)$  una  $uv$ -trayectoria tal que  $\ell(T) = [k + (n + 1)(k - 1)]$ . Por la hipótesis de inducción  $(v_0, v_{k+n(k-1)}) \in F(D)$  y entonces  $T' = (v_0, v_{k+n(k-1)}, T, v_{k+(n+1)(k-1)})$

es una trayectoria de longitud  $\ell(T) = 1 + [k + (n + 1)(k - 1) - (k + n(k - 1))] = k$  y por ser  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva, se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  (ver figura 2.12). Esto termina el proceso de inducción.  $\square$

## 2.3. Ciclos en digráficas $k$ -cuasitransitivas

Las proposiciones 2.4 y 2.5, los lemas 2.7 y 2.8 y los corolarios 2.2 y 2.3 son enunciados para digráficas  $k$ -transitivas, sin embargo se darán condiciones extras necesarias entre paréntesis para digráficas  $k$ -cuasitransitivas, además como las pruebas son similares en ambos casos, sólo se expondrán las pruebas para digráficas  $k$ -cuasitransitivas.

**Proposición 2.4.** Sean  $k \geq 2$  un entero,  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva ( $k$ -cuasitransitiva) y  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$  un ciclo dirigido en  $D$  con  $n \geq k$ . Si  $v \in V(D) \setminus V(C)$  es tal que  $v \rightsquigarrow C$ , (y  $C \not\rightsquigarrow v$ ), entonces existe un entero  $m$  tal que  $1 \leq m < k$  y  $v \rightarrow S = \{v_i : i \in (k - 1)\mathbb{Z}_n + (k - m)\}$ .

En particular si  $T'$  es una  $vv_0$ -trayectoria tal que  $\ell(T') = m'$ ,  $V(T) \cap V(C) = \{v_0\}$  y  $1 \leq m' < k$ , entonces  $v \rightarrow S = \{v_i : i \in (k - 1)\mathbb{Z}_n + (k - m')\}$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $T = (v = x_0, x_1, \dots, x_m = v_0)$  es una  $vC$ -trayectoria tal que  $m = d(v, C)$  (de no llegar de forma mínima al ciclo en  $v_0$  podríamos renombrar los vértices de  $C$  al trasladar los vértices (módulo  $n$ )). Queremos que  $\ell(T)$  sea mínima para garantizar que  $V(T) \cap V(C) = \{v_0\}$ . Como  $C \not\rightsquigarrow v$  entonces  $v_0 \not\rightsquigarrow v$  y por las proposiciones 2.1 y 2.2 se tiene que  $d(v, v_0) \leq k - 1$  (ver figura 2.13a).

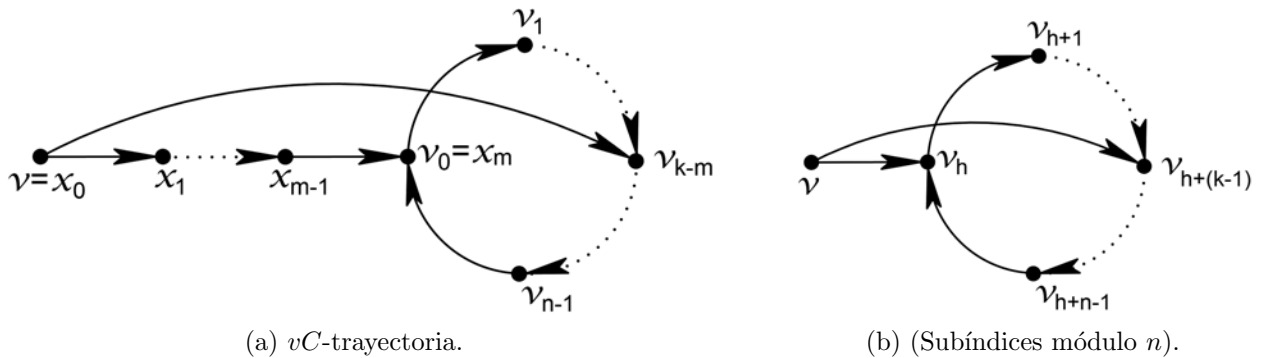


Figura 2.13

Como  $m \leq k - 1$  entonces  $1 \leq k - m$ . Por lo tanto se garantiza que  $P = (v, T, v_0, C, v_{k-m})$  es una trayectoria (ver figura 2.13b), tal que  $\ell(P) = m + (k - m) = k$ , de esta forma por la  $k$ -cuasitransitividad se tiene que  $(v, v_{k-m}) \in F(D)$  ó  $(v_{k-m}, v) \in F(D)$ , pero  $C \not\rightsquigarrow v$  y en especial no hay  $Cv$ -flechas en  $D$ , por lo tanto  $(v, v_{k-m}) \in F(D)$  (si  $T'$  es una  $vv_0$ -trayectoria tal que  $\ell(T') = m'$ ,  $V(T) \cap V(C) = \{v_0\}$  y  $1 \leq m' < k$ , la prueba podría continuar desde aquí).

Ahora probemos que para toda  $j \in \mathbb{Z}_n$  se tiene que  $(v, v_h) \in F(D)$  con  $h \equiv_n (k - 1)j + k - m$  (donde  $\equiv_n$  es la congruencia módulo  $n$ ). Procedamos por inducción sobre  $j \geq 0$ .

**Base:** Si  $j = 0$ , entonces la proposición es verdadera porque  $(v, v_{k-m}) \in F(D)$ .

**Hipótesis de inducción:**  $(v, v_h) \in F(D)$  con  $h \equiv_n (k - 1)j + k - m$ .

Sea ahora la trayectoria  $P' = (v, v_h, C, v_{h+k-1})$  (es una trayectoria ya que  $n \geq k$ ), llamaremos  $h' = h + k - 1$ . Como  $\ell(P') = 1 + k - 1 = k$  entonces por la  $k$ -cuasitransitividad  $(v, v_{h'}) \in F(D)$  ó  $(v_{h'}, v) \in F(D)$ , pero además  $C \not\rightsquigarrow v$ , por lo tanto  $(v, v_{h'}) \in F(D)$ . También veamos que  $h' \equiv_n h + k - 1 \equiv_n ((k-1)j + k - m) + (k-1)$  ya que por hipótesis de inducción  $h \equiv_n (k-1)j + k - m$ , además  $((k-1)j + k - m) + (k-1) \equiv_n (k-1)(j+1) + k - m$  por lo tanto  $h' \equiv_n (k-1)(j+1) + k - m$  y  $(v, v_{h'}) \in F(D)$ , con esto terminamos el proceso de inducción.

Así  $v \rightarrow S = \{v_i : i \in (k-1)\mathbb{Z}_n + (k-m)\}$ .  $\square$

**Proposición 2.5.** *Sea  $k \geq 2$  un entero,  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva ( $k$ -cuasitransitiva) y  $C$  un  $n$ -ciclo con  $n \geq k$  y  $(n, k-1) = 1$ . Si  $v \in V(D) \setminus V(C)$  es tal que existe una  $vC$ -trayectoria en  $D$  (y  $C \not\rightsquigarrow v$ ), entonces  $v \rightarrow C$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva y supongamos que la  $vC$ -trayectoria tiene longitud mínima  $m$ , entonces aplicando la proposición 2.4 vemos que  $v \rightarrow S = \{v_i : i \in (k-1)\mathbb{Z}_n + (k-m)\}$  y, además,  $(n, k-1) = 1$  entonces  $k-1$  es una unidad en  $\mathbb{Z}_n$ , es decir, existe  $q \in \mathbb{Z}_n$  tal que  $(k-1)q \equiv_n 1$  (su inverso en  $\mathbb{Z}_n$ ).

De esta forma para toda  $j \in \mathbb{Z}_n$ , si tomamos  $r = qj \in \mathbb{Z}_n$  entonces  $(k-1)r \in (k-1)\mathbb{Z}_n$  pero  $(k-1)r \equiv_n (k-1)qj \equiv_n j$ , en otras palabras,  $j \in (k-1)\mathbb{Z}_n$ . Por lo tanto  $\mathbb{Z}_n \subseteq (k-1)\mathbb{Z}_n$ . Por otra parte sabemos que  $(k-1)\mathbb{Z}_n \subseteq \mathbb{Z}_n$ , entonces  $(k-1)\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$ , además el conjunto  $\mathbb{Z}_n + (k-m)$  es el mismo que el conjunto  $\mathbb{Z}_n$  ya que sólo es “trasladar” (módulo  $n$ ) a cada elemento en  $\mathbb{Z}_n$  por  $(k-m)$ . Por lo tanto  $v \rightarrow S = \{v_i : i \in \mathbb{Z}_n\}$ , es decir,  $v \rightarrow C$ .  $\square$

**Lema 2.7.** *Sean  $k \geq 2$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva ( $k$ -cuasitransitiva). Si  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{k-2}, y_0)$  son dos ciclos disjuntos (y  $C_1 \Rightarrow C_2$ ) en  $D$  tal que  $n \leq k-2$  y  $(x_0, y_0) \in F(D)$ , entonces  $x_0 \rightarrow \{y_i : i \in (k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1}\}$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva. Procederemos por inducción sobre  $i$  para probar que  $(x_0, y_i) \in F(D)$  para toda  $i \in (k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1}$ . Con el propósito de realizar la prueba sin cargar con subíndices, asumiremos sin pérdida de generalidad que  $V(C_2) = \mathbb{Z}_{k-1}$ .

**Base:** Si  $i = 0$ , entonces la proposición es verdadera ya que  $(x_0, 0) \in F(D)$  por hipótesis del lema.

**Hipótesis de inducción:**  $(x_0, i) \in F(D)$ , con  $i = (k-1-n)r$ , para alguna  $r \in \mathbb{Z}_{k-1}$ .

Ahora demostraremos que  $(x_0, (k-1-n)(r+1)) \in F(D)$ .

Sea  $T = (x_1, C_1, x_0, i, C_2, i + k - n)$ , veamos que  $T$  es una trayectoria en  $D$  analizando las siguientes desigualdades (la figura 2.14 sirve de apoyo visual):

- 1)  $n \leq k - 2$  por hipótesis,
- 2)  $2 \leq k - n$  por (1),
- 3)  $1 < k - n$  por (2),
- 4)  $1 - n < 0$  ya que  $n \geq 2$  por ser  $C_1$  un ciclo,
- 5)  $k - 1 + 1 - n < k - 1$  por (4),
- 6)  $1 < k - n < k - 1$  por (3) y (5),

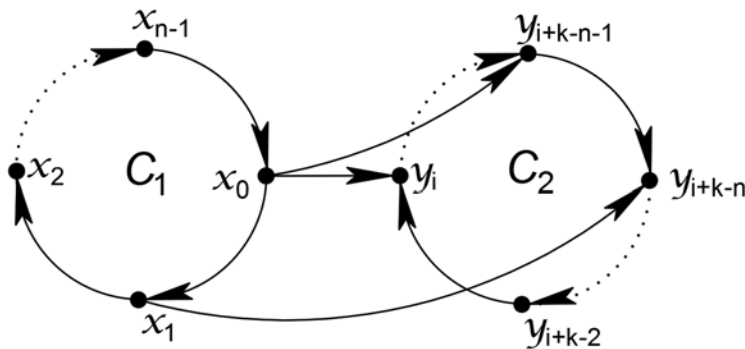


Figura 2.14

como  $i - (i + k - n) = k - n$  entonces  $T$  no repite vértices de  $C_2$ , por lo tanto  $T$  es una trayectoria.

Observamos que  $\ell(T) = \ell((x_1, C_1, x_0)) + 1 + \ell((i, C_2, i+k-n)) = (n-1) + 1 + (k-n) = k$ , entonces por la  $k$ -cuasitransitividad  $(x_1, i+k-n) \in F(D)$  ó  $(i+k-n, x_1) \in F(D)$ , pero  $C_1 \Rightarrow C_2$ , por lo tanto  $(x_1, i+k-n) \in F(D)$ . Ahora consideremos la trayectoria  $T' = (x_0, x_1, i+k-n, C_2, i+k-n-1)$  es una trayectoria tal que  $\ell(T') = 2 + (k-2) = k$  ya que  $V(T') = \{x_0, x_1\} \cup V(C_2)$ . Por ser  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva y tal que  $C_1 \Rightarrow C_2$  podemos concluir entonces que  $(x_0, i+k-n-1) \in F(D)$ . Por lo tanto  $(x_0, (k-n-1)(r+1)) \in F(D)$ , ya que  $i+k-n-1 = (k-n-1)r + (k-n-1) = (k-n-1)(r+1)$ . Con esto terminamos el proceso de inducción.  $\square$

De forma inmediata al lema anterior se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.** *Sea  $k \geq 2$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva ( $k$ -cuasitransitiva). Si  $C_1 = (x_0, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_{k-2}, \dots, y_1, y_0)$  son ciclos disjuntos (y  $C_2 \Rightarrow C_1$ ) en  $D$  tal que  $n \leq k-2$  y  $(y_0, x_0) \in F(D)$ , entonces  $\{y_i : i \in (k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1}\} \rightarrow x_0$ .*

*Demostración.* Vemos que  $\overleftarrow{C}_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $\overleftarrow{C}_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{k-2}, y_0)$  son ciclos en  $\overleftarrow{D}$  y  $(x_0, y_0) \in F(\overleftarrow{D})$ . Las anteriores condiciones cumplen con las propiedades del lema 2.7, así  $x_0 \xrightarrow{\overleftarrow{D}} \{y_i : i \in (k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1}\}$ . Por lo tanto  $\{y_i : i \in (k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1}\} \xrightarrow{D} x_0$   $\square$

El siguiente lema se apoya en los resultados anteriores de esta sección para analizar el comportamiento entre dos ciclos en una digráfica  $k$ -transitiva, en el caso específico cuando  $k-1$  es primo.

**Lema 2.8.** *Sean  $k-1$  un número primo y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva ( $k$ -cuasitransitiva). Si  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{k-2}, y_0)$  son dos ciclos disjuntos en  $D$  (y  $C_1 \Rightarrow C_2$ ), tal que  $n \leq k-1$  y  $(x_0, y_0) \in F(D)$ , entonces:*

1. Si  $2 \leq n \leq k-2$ , entonces  $C_1 \rightarrow C_2$ .
2. Si  $n = k-1$ , entonces  $(x_i, y_i) \in F(D)$  para cualquier  $0 \leq i \leq k-2$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva. Por simplicidad de notación supondremos sin pérdida de generalidad que  $C_2 = \mathbb{Z}_{k-1}$ . Como  $k-1$  es primo entonces cualquier elemento  $q \in \mathbb{Z}_{k-1} \setminus \{0\}$  es una unidad, de esta forma  $q\mathbb{Z}_{k-1} = \mathbb{Z}_{k-1}$ . Por lo tanto  $(k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1} = \mathbb{Z}_{k-1}$  para toda  $k-1-n \not\equiv_{k-1} 0$ , es decir, para toda  $n \not\equiv_{k-1} 0$ .

Con lo anterior en mente y aplicando el lema 2.7 vemos que para  $2 \leq n \leq k-2$  se tiene que  $x_0 \rightarrow (k-1-n)\mathbb{Z}_{k-1}$  :

- Si  $2 \leq n \leq k - 2$ , entonces  $x_0 \rightarrow C_2$ .

Ahora para cada  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,  $(x_i, C_1, x_0, n - i, C_2, 0 = y_0)$  es una  $x_i y_0$ -trayectoria de longitud  $(n - i) + 1 + (k - 1 - (n - i)) = k$ . Entonces  $C_1 \rightarrow y_0$  y de nuevo aplicando el lema 2.7 a cada vértice de  $C_1$  vemos que  $C_1 \rightarrow C_2$ .

- Si  $n = k - 1$ , entonces  $(x_i, C_1, x_0, y_0, C_2, y_i)$  es una trayectoria de longitud  $k$  y como  $D$  es una digráfica  $k$ -cuasitransitiva  $(x_i, y_i) \in F(D)$  ó  $(y_i, x_i) \in F(D)$ , además,  $C_1 \Rightarrow C_2$ , por lo tanto  $(x_i, y_i) \in F(D)$  para toda  $0 \leq i \leq k - 2$ .

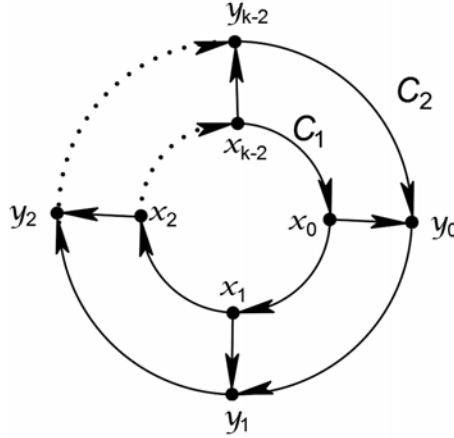


Figura 2.15

□

Podemos generalizar más el resultado anterior al aplicar la proposición 2.4.

**Corolario 2.3.** Sean  $k - 1$  un número primo y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva ( $k$ -cuasitransitiva). Si  $C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  y  $C_2 = (y_0, y_1, \dots, y_{k-2}, y_0)$  son dos ciclos disjuntos en  $D$  ( $C_2 \not\rightarrow C_1$ ), tal que  $n \leq k - 1$  y  $x_0 \rightsquigarrow C_2$ , entonces:

1. Si  $2 \leq n \leq k - 2$ , entonces  $C_1 \rightarrow C_2$ .
2. Si  $n = k - 1$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $(x_i, y_{i+(k-m)}) \in F(D)$  (módulo  $(k - 1)$ ) para cualquier  $0 \leq i \leq k - 2$  (en particular si  $T'$  es una  $x_0 y_0$ -trayectoria tal que  $\ell(T') = m'$ ,  $V(T') \cap V(C_1) = \{x_0\}$ ,  $V(T') \cap V(C_2) = \{y_0\}$  y  $1 \leq m' < k$ , entonces  $(x_i, y_{i+(k-m')}) \in F(D)$ ).

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -cuasitransitiva. Como  $x_0 \rightsquigarrow C_2$  entonces podemos considerar  $T$  una  $x_0 C_2$ -trayectoria de longitud mínima, con la intención de que esta trayectoria no toque a los ciclos más que en sus extremos. De igual forma sin pérdida de generalidad supongamos  $T$  es una  $x_0 y_0$ -trayectoria. Como  $C_2 \not\rightarrow C_1$  entonces de las proposiciones 2.1 y 2.2 tenemos que  $m = \ell(T) \leq k - 1$  (si  $T'$  es una  $x_0 y_0$ -trayectoria tal que  $\ell(T') = m'$ ,  $V(T') \cap V(C_1) = \{x_0\}$ ,  $V(T') \cap V(C_2) = \{y_0\}$  y  $1 \leq m' < k$ , entonces la prueba podría continuar desde aquí con  $T = T'$ ). Observamos que  $(x_0, T, y_0, C_2, y_{k-m})$  es una trayectoria de longitud  $k$ , como  $D$  es  $k$ -cuasitransitiva y  $C_2 \not\rightarrow C_1$ , entonces  $(x_0, y_{k-m}) \in F(D)$ . Podemos hacer una reordenación de los vértices de  $C_2$  tal que  $y'_i = y_{i+(k-m)}$  (subíndices módulo  $k - 1$ ), ahora sabemos que  $(x_0, y'_0) \in F(D)$ , además como  $C_2 \not\rightarrow C_1$  en particular tenemos que  $C_1 \Rightarrow C_2$  por lo tanto tenemos lo siguiente:

1. Si  $2 \leq n \leq k - 2$ , como  $(x_0, y'_0) \in F(D)$  por el inciso (1) del lema 2.8 se tiene que  $C_1 \rightarrow C_2$ .

2. Si  $n = k - 1$ , por el inciso (2) del lema 2.8 se sigue que para toda  $0 \leq i \leq k - 2$ ,  $(x_i, y'_i) \in F(D)$ , es decir,  $(x_i, y_{i+(k-m)}) \in F(D)$  (subíndices módulo  $(k - 1)$ ), probando el segundo inciso (ver figura 2.16a).

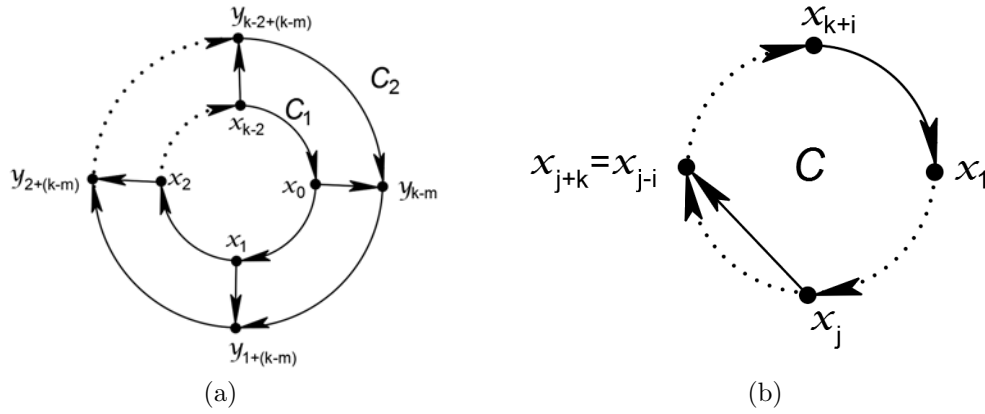


Figura 2.16

□

A partir de este momento y lo que resta de esta sección trabajaremos únicamente con digráficas  $k$ -transitivas.

**Observación 2.2.** Sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva y  $C = (x_0, \dots, x_n = x_0)$  un ciclo dirigido en  $D$  de longitud  $n = k + i$  (con  $i > 0$  para alguna  $i$ ), entonces para toda  $1 \leq j \leq n$ , se tiene que  $(x_j, x_{j+k}) \in F(D)$  y  $(x_j, x_{j-i}) \in F(D)$  con los índices tomados módulo  $n$ .

*Demostración.* Tenemos que para toda  $j \in \{1, \dots, n - 1, n\}$ ,  $T_j = (x_j, C, x_{j+k})$  es una trayectoria tal que  $\ell(T_j) = k$  y por la  $k$ -transitividad de  $D$ , se tiene que  $(x_j, x_{j+k}) \in F(D)$  (módulo  $n$ ). Además  $j + k \equiv_n j + k - n \equiv_n j + k - (k + i) \equiv_n j - i$ . Por lo tanto, para cualquier  $j \in \mathbb{Z}_n$  se tiene que  $(x_j, x_{j-i}) \in F(D)$ , tal y como se muestra en la figura 2.16b. □

**Lema 2.9.** Sean  $k, i, j, r$  enteros tales que  $0 \leq j < i, k = r(i + 1) + i - j$  y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Se define  $x_0 = 2j + 1$  y, para  $s \geq 0$ ,  $x_{s+1} = 2x_s + 3$ . Si  $C = (0, 1, \dots, n - 1, 0)$  es un  $n$ -ciclo en  $D$  tal que  $n = k + i$ , entonces  $(0, 2i - x_0) \in F(D)$ . Además, si  $x_s + 1 < i$ , entonces  $(0, 2i - x_{s+1}) \in F(D)$ .

*Demostración.* Sean  $V(C) = \mathbb{Z}_n$  y  $F(C) = \{(0, 1), (1, 2), \dots, (n - 1, 0)\}$ . Por la observación 2.2, se tiene que  $\{(j, j + k), (j, j - i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  (a lo largo del presente lema estaremos construyendo diferentes caminos y toda flecha utilizada que no esté en el ciclo  $C$  será justificada por la observación anterior).

Hagamos primero algunas observaciones acerca de como deben de ser los enteros  $k, i, j$  y  $r$ .

Primeramente veamos que  $r \geq 0$ , procedamos por contradicción. Supongamos que  $r \leq -1$  entonces  $r(i + 1) \leq -(i + 1)$  y por lo tanto  $k = r(i + 1) + i - j \leq -(i + 1) + (i - j) \leq -(i + 1) + i = -1$ , una contradicción ya que  $k$  no puede ser negativo porque no estamos trabajando con trayectorias negativas. Por lo tanto,  $r \geq 0$ , ahora analicemos los casos para  $i$ :

1. Si  $k \leq i$ , entonces,  $r = 0$ , ya que si  $r \geq 1$  tendríamos que  $i \geq k = r(i+1) + i - j \geq i+1 + i - j \geq i+2 > i$ , entonces  $i > i$ , una contradicción. Así,  $r = 0$  y  $k = i - j$ , en particular  $j = i - k$ . Por consiguiente  $x_0 = 2j + 1 = 2(i - k) + 1$  y en consecuencia  $2i - x_0 = 2i - 2(i - k) - 1 = 2k - 1$ . Además de la observación 2.2 sabemos que  $(0, k) \in F(D)$ . Notamos que el camino  $T = (0, k, C, 2k - 1)$  es una trayectoria en  $D$  ya que  $2k - 1 = k + (k - 1) \leq k + (i - 1) < k + i = n$ , de manera que  $2k - 1 < n$  y además  $\ell(T) = 1 + ((2k - 1) - k) = k$ , entonces por la  $k$ -transitividad se tiene que  $(0, 2k - 1) \in F(D)$ , es decir,  $(0, 2i - x_0) \in F(D)$  (ver figura 2.17).

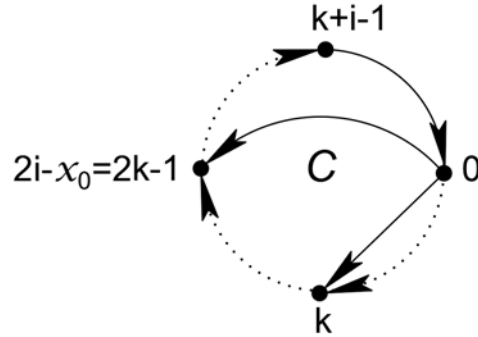


Figura 2.17

2. Si  $i < k$  entonces,  $r \geq 1$ , ya que si  $r = 0$  tenemos que  $k > i \geq i - j = 0(i + 1) + i - j = k$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $r \geq 1$ .

**Afirmación 1.** Si  $0 \leq m \leq r - 1$  entonces  $P_m = (k - (m - 1)i - m, k - mi - m, C, k - (m - 1)i - (m + 1), k - mi - (m + 1))$  es una trayectoria tal que  $V(P_m) = \{v \in V(C_n) : k - m - (m + 1) \leq v \leq k - (m - 1)i - m\}$ .

Si  $0 \leq m \leq r - 1$  entonces  $P_m$  es un camino ya que  $(k - (m - 1)i - m, k - mi - m) \in F(D)$  y

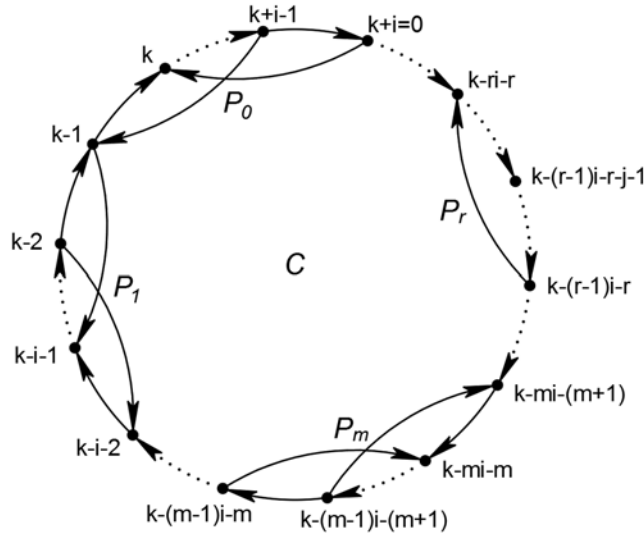


Figura 2.18: Ejemplo con  $r \geq 3$ .

$(k - (m - 1)i - (m + 1), k - mi - (m + 1)) \in F(D)$  (por la observación 2.2). Con el propósito de probar que cada  $P_m$  es una trayectoria analicemos las siguientes desigualdades:

- 1)  $k - mi - (m + 1) < k - mi - m$  ya que  $-1 < 0$ ,
- 2)  $k - mi - m \leq k - (m - 1)i - (m + 1)$  ya que  $0 \leq i - 1$ ,
- 3)  $k - (m - 1)i - (m + 1) < k - (m - 1)i - m$  ya que  $-1 < 0$ ;

de (1), (2) y (3) concluimos que

$$k - mi - (m + 1) < k - mi - m \leq k - (m - 1)i - (m + 1) < k - (m - 1)i - m;$$

implicando que  $P_m$  no repite vértices y además pasa por los vértices del ciclo  $C$  desde  $k - m - (m + 1)$  hasta  $k - (m - 1)i - m$ , probando la afirmación. En particular  $\ell(P_m) = k - (m - 1)i - m - (k - m - (m + 1)) = i + 1$ .

Análogamente podemos ver que  $P_r = (k - (r - 1)i - r, k - ri - r, C, k - (r - 1)i - r - j - 1)$  es una trayectoria tal que  $\ell(P_r) = 1 + [(k - (r - 1)i - r - j - 1) - (k - ri - r)] = i - j$ .

De las definiciones de cada trayectoria  $P_m$  obtenemos que  $P = \bigcup_{m=0}^r P_m$  es una trayectoria en  $D$  desde 0 hasta  $k - (r - 1)i - r - j - 1$  tal que  $\ell(P) = r(i + 1) + (i - j) = k$  (ver figura 2.18)

Así por la  $k$ -transitividad de  $D$  se tiene que  $(0, k - (r - 1)i - r - j - 1) \in F(D)$ . Pero  $k - (r - 1)i - r - j - 1 = (r(i + 1) + i - j) - (r - 1)i - r - j - 1 = 2i - (2j + 1) = 2i - x_0$ . Por lo tanto,  $(0, 2i - x_0) \in F(D)$ .

Ahora veamos por inducción sobre  $s$  que si  $x_s + 1 < i$ , entonces  $(0, 2i - x_{s+1}) \in F(D)$ .

**Base:** Supongamos  $x_0 + 1 < i$ . Por lo demostrado se tiene que  $(0, 2i - x_0) \in F(D)$ , además podemos dar una reordenación de los vértices mediante una traslación módulo  $n$ , dando como resultado que  $(h, h + 2i - x_0) \in F(D)$  (módulo  $n$ ) para toda  $h \in \{0, \dots, n - 1\}$ . En particular como  $k + i - 1 \equiv_n -1$ , entonces  $(k + i - 1, 2i - x_0 - 1) \in F(D)$  (ver figura 2.19).

Por la observación 2.2  $(2i - x_0 - 1, i - x_0 - 1) \in F(D)$  (ya que  $(j, j - i) \in F(D)$  con  $j = 2i - x_0 - 1$ ), consideremos ahora el camino

$$P' = (0, 2i - x_0, C, k + i - 1, 2i - x_0 - 1, i - x_0 - 1, C, 2i - x_1).$$

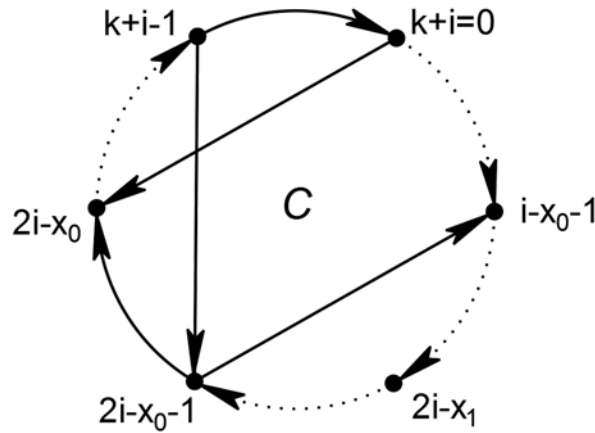


Figura 2.19

Con el propósito de probar que el camino anterior es una trayectoria analicemos las siguientes desigualdades:



- 1)  $0 < i - x_0 - 1$  por hipótesis,
- 2)  $i - x_0 - 1 < 2i - 2x_0 - 2$  por el inciso (1),
- 3)  $2i - 2x_0 - 3 = 2i - x_1$  por definición de  $x_1$ ,
- 4)  $i - x_0 - 1 \leq 2i - x_1$  por los incisos (2) y (3),
- 5)  $0 < x_0 + 2$  ya que  $x_0 = 2j + 1$ , con  $j \geq 0$ ,
- 6)  $2i - 2x_0 - 3 < 2i - x_0 - 1$  por (5),
- 7)  $2i - x_1 < 2i - x_0 - 1$  por (3) y (6),
- 8)  $2i - x_0 < 2i - 2$  por (5),
- 9)  $2i - x_0 \leq 2i - 1$  por 8,
- 10)  $2i - 1 < k + i - 1$  ya que  $i < k$ ,
- 11)  $2i - x_0 < k + i - 1$  por los incisos (9) y (10).

De los incisos (1), (4), (7) y (11), vemos que

$$0 < i - x_0 - 1 \leq 2i - x_1 < 2i - x_0 - 1 < 2i - x_0 < k + i - 1$$

probando que  $P'$  es una trayectoria y además tenemos que

$$\ell(P') = 3 + [(k+i-1) - (2i-x_0)] + [(2i-x_1) - (i-x_0-1)] = 3 + (k-i+x_0-1) + (i-x_0-2) = k.$$

Por la  $k$ -transitividad de  $D$ , se tiene que  $(0, 2i - x_{0+1}) \in F(D)$ , probando la base de inducción.

**Hipótesis de inducción:** Si  $x_s + 1 < i$ , entonces  $(0, 2i - x_{s+1}) \in F(D)$ .

Supongamos que  $x_{s+1} + 1 < i$ , entonces como  $0 \leq x_s + 1 < 2x_s + 4 = x_{s+1} + 1 < i$  por la hipótesis de inducción tenemos que  $(0, 2i - x_{s+1}) \in F(D)$ .

Por simetría de  $C$ ,  $(h, h + 2i - x_s) \in F(D)$ , (módulo  $n$ ) para toda  $h \in \{0, \dots, n-1\}$ . En particular como  $k + i - 1 \equiv_n -1$ ,  $(k + i - 1, 2i - x_s - 1) \in F(D)$  (ver figura 2.20).

Análogamente al caso base consideremos la trayectoria dirigida

$$P'' = (0, 2i - x_s, C, k + i - 1, 2i - x_s - 1, i - x_s - 1, C, 2i - x_{s+1}).$$

Con el propósito de probar que en efecto  $P''$  es una trayectoria analicemos las siguientes desigualdades:

- 1)  $0 < i - x_s - 1$  por hipótesis,
- 2)  $i - x_s - 1 < 2i - 2x_s - 2$  por el inciso (1),
- 3)  $2i - 2x_s - 3 = 2i - x_{s+1}$  por definición de  $x_{s+1}$ ,
- 4)  $i - x_s - 1 \leq 2i - x_{s+1}$  por los incisos (2) y (3),
- 5)  $0 < x_s + 2$  ya que  $x_s = 2j + 1$ , con  $j \geq 0$ ,
- 6)  $2i - 2x_s - 3 < 2i - x_s - 1$  por (5),
- 7)  $2i - x_{s+1} < 2i - x_s - 1$  por (3) y (6),
- 8)  $2i - x_s < 2i - 2$  por (5),

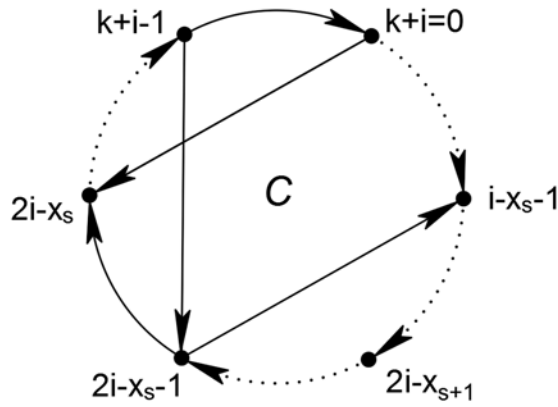


Figura 2.20

- 9)  $2i - x_s \leq 2i - 1$  por (8),
- 10)  $2i - 1 < k + i - 1$  ya que  $i < k$ ,
- 11)  $2i - x_s < k + i - 1$  por los incisos (9) y (10).

De los incisos (1), (4), (7) y (11), vemos que

$$0 < i - x_s - 1 \leq 2i - x_{s+1} < 2i - x_s - 1 < 2i - x_s < k + i - 1,$$

probando que  $P'$  es una trayectoria y además tenemos que

$$\ell(P'') = 3 + [(k+i-1) - (2i-x_s)] + [(2i-x_{s+1}) - (i-x_s-1)] = 3 + (k-i+x_s-1) + (i-x_s-2) = k.$$

Por la  $k$ -transitividad de  $D$ , se tiene que  $(0, 2i - x_{s+1}) \in F(D)$ , concluyendo la inducción. □

**Lema 2.10.** Si  $D$  es una digráfica  $k$ -transitiva fuerte con  $k \geq 4$  y  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$  un ciclo de longitud  $n$ , con  $n \geq k - 1$ , entonces para cualquier  $x \in V(D) \setminus V(C)$ ,  $(x, V(C)) \neq \emptyset$  y  $(V(C), x) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Ya que el reverso de una digráfica  $k$ -transitiva sigue siendo una digráfica  $k$ -transitiva, sólo tenemos que probar que  $(x, V(C)) \neq \emptyset$ . De nuevo, ya que  $D$  es fuerte, existe una trayectoria de  $x$  hacia  $C$ . Sea  $P = (y_0, y_1, \dots, y_s)$  la trayectoria de longitud mínima de  $x$  hacia  $C$ , es decir,  $s = d(x, V(C))$ , donde  $s \geq 1$ ,  $y_0 = x$  y  $y_s \in V(C)$ . Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $y_s = x_0$ . Veamos que  $y_0$  domina algún vértice de  $V(C)$ . En primer lugar del lema 2.6 sabemos que  $s \leq k - 1$ .

Si  $s = 1$  entonces  $(x, y_1) \in F(D)$  con  $y_1 \in V(C)$ , por lo tanto  $(x, V(C)) \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $s \geq 2$ . Notemos que  $T = (x = y_0, P, y_s = x_0, C, x_{k-s})$  es una trayectoria de longitud  $k$  y de la  $k$ -transitividad de  $D$  se tiene que  $(x, x_{k-s}) \in F(D)$  y así  $d(x, V(C)) \leq 1$ , que es una contradicción a la minimalidad de  $P$ . Por lo tanto no puede pasar que  $s \geq 2$ , en consecuencia  $s = 1$ , dicho de otro modo,  $d(x, V(C)) = 1$  y  $(x, V(C)) \neq \emptyset$ . □



# Capítulo 3

## Caracterización estructural

En este capítulo centraremos nuestra atención en casos específicos de transitividad. Empezaremos exponiendo un análisis acerca de la caracterización estructural de las digráficas 3-cuasitransitivas.

Inmediatamente después utilizaremos la caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas para dar una caracterización de las digráficas 3-transitivas.

Por último daremos una caracterización de las digráficas 4-transitivas. Las caracterizaciones de las digráficas 3-transitivas y 4-transitivas presentadas en este capítulo fueron dadas por C. Hernández en [7] y [8].

### 3.1. Digráficas fuertes 3-cuasitransitivas

En [2], se introdujeron las digráficas 3-cuasitransitivas y se afirmó que las únicas digráficas fuertes 3-cuasitransitivas son las digráficas fuertes semicompletas y las digráficas fuertes bipartitas semicompletas. En el artículo [6], se exhibe una familia de digráficas fuertes 3-cuasitransitivas distintas de las digráficas fuertes semicompletas y digráficas fuertes bipartitas semicompletas y se da una caracterización completa de las digráficas fuertes 3-cuasitransitivas.

En esta sección se expondrá el análisis hecho en [6] sobre la estructura de las digráficas 3-cuasitransitivas, el cual será de ayuda para caracterizar a las digráficas 3-transitivas en la sección siguiente. De hecho se probará que cualquier digráfica 3-cuasitransitiva es una digráfica semicompleta, una digráfica bipartita semicompleta, o pertenece a la familia de la figura 3.1.

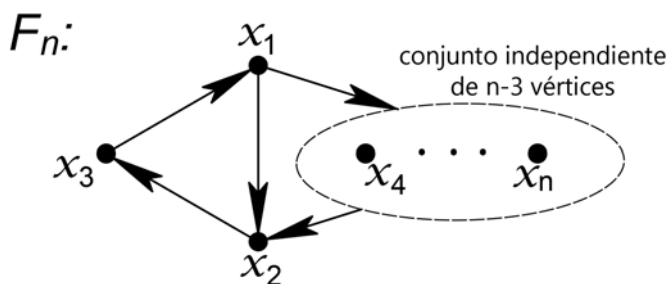


Figura 3.1

Comenzaremos con un pequeño lema acerca del comportamiento de las digráficas 3-cuasitransitivas cuando existe una trayectoria impar entre un par de vértices.

**Lema 3.1.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva y  $\{x, y\} \subseteq V(D)$ , si existe una  $xy$ -trayectoria de longitud impar, entonces  $(x, y) \in F(D)$  ó  $(y, x) \in F(D)$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva y  $\{x, y\} \subseteq V(D)$  tal que  $P = (x = x_0, x_1, \dots, x_{2k+1} = y)$  es una  $xy$ -trayectoria de longitud impar en  $D$ . Si  $k = 0$  entonces  $(x_0, x_1) \in F(D)$ , es decir  $(x, y) \in F(D)$ . Procedamos entonces por inducción sobre  $k$ , con  $k \geq 1$ , que si  $P$  es una  $(2k + 1)$ -trayectoria de  $x$  a  $y$ , entonces  $(x, y) \in F(D)$  ó  $(y, x) \in F(D)$ .

**Base:** Si  $k = 1$  entonces  $(x = x_0, x_1, x_2, x_3 = y)$  es una 3-trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$  y como  $D$  es una digráfica 3-cuasitransitiva,  $(x_0, x_3) \in F(D)$  o  $(x_3, x_0) \in F(D)$ , en otras palabras,  $(x, y) \in F(D)$  o  $(y, x) \in F(D)$ . Lo cual prueba la base de inducción.

**Hipótesis de inducción:** *Si  $T = (x = x_0, x_1, \dots, x_{2s+1} = y)$  es una trayectoria de longitud  $2s + 1$ , entonces  $(x, y) \in F(D)$  ó  $(y, x) \in F(D)$*

Sea ahora  $k = s + 1$  entonces  $P = (x = x_0, x_1, \dots, x_{2(s+1)+1} = y)$  una  $xy$ -trayectoria de longitud impar. Por lo tanto  $P' = (x = x_0, P, x_{2s+1})$  es una trayectoria de longitud  $2s + 1$  entonces por hipótesis de inducción  $(x, x_{2s+1}) \in F(D)$  ó  $(x_{2s+1}, x) \in F(D)$  (ver figura 3.2).

- Si  $(x, x_{2s+1}) \in F(D)$  entonces  $(x = x_0, x_{2s+1}, x_{2(s+1)}, x_{2(s+1)+1} = y)$  es una trayectoria de longitud 3 y por ser  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva tenemos que  $(x, y) \in F(D)$  ó  $(y, x) \in F(D)$ .
- Si  $(x_{2s+1}, x) \in F(D)$ , notemos que  $(x_{2s}, x_{2s+1}, x_{2(s+1)}, x_{2(s+1)+1})$  es una 3-trayectoria de  $x_{2s}$  a  $x_{2(s+1)+1} = y$  entonces por ser  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva  $(x_{2s}, y) \in F(D)$  ó  $(y, x_{2s}) \in F(D)$ . De esa manera tenemos dos subcasos:
  1. Si  $(x_{2s}, y) \in F(D)$ , entonces  $P_1 = (x, x_1, \dots, x_{2s}, y)$  es una trayectoria tal que  $\ell(P_1) = 2s + 1$  y por hipótesis de inducción  $(x, y) \in F(D)$  ó  $(y, x) \in F(D)$ .
  2. Si  $(y, x_{2s}) \in F(D)$ , entonces  $P_2 = (y, x_{2s}, x_{2s+1}, x)$  es una 3-trayectoria y por ser  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva se sigue que  $(y, x) \in F(D)$  ó  $(x, y) \in F(D)$ . Con lo cual agotamos los casos y terminamos el proceso de inducción.

□

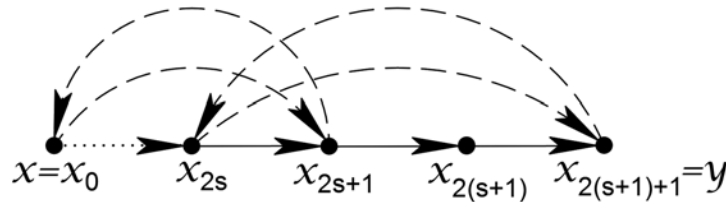


Figura 3.2

En esta sección referente a digráficas 3-cuasitransitivas haremos uso en gran medida del lema 3.1, por esta razón es conveniente tenerlo en mente al leer los siguientes lemas.

Los lemas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 nos servirán para analizar las estructuras de las digráficas 3-cuasitransitivas estudiando por separado cada uno de los posibles casos, luego serán agrupados en el teorema 3.1.

**Lema 3.2.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva fuerte con al menos tres vértices. Si  $D$  no es una digráfica bipartita, entonces  $D$  contiene un 3-ciclo  $T$ . Además, cualquier vértice de  $V(D)$  es adyacente al menos a dos vértices de  $V(T)$ . Finalmente si  $|V(D)| \geq 4$  y  $T = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ , se tiene que para cualquier  $s \in V(D) \setminus V(T)$ :*

- si  $(s, x_i) \in F(D)$ , entonces  $(s, x_{i+2}) \in F(D)$  ó  $(x_{i+2}, s) \in F(D)$ ;
- si  $(x_i, s) \in F(D)$ , entonces  $(s, x_{i-2}) \in F(D)$  ó  $(x_{i-2}, s) \in F(D)$ .

Donde los índices son tomados módulo 3.

*Demostración.* Sea  $D$  es una digráfica fuerte no bipartita 3-cuasitransitiva con al menos tres vértices. Como  $D$  es una digráfica fuerte, entonces contiene un ciclo por el corolario 2.1, y al no ser  $D$  bipartita, entonces existe un ciclo en  $D$  cuya longitud es impar por el corolario 1.2.1. Sea  $C = (v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}, v_1)$  un ciclo de longitud impar en  $D$ , entonces  $k \geq 1$ .

Procedamos a probar por inducción sobre  $k$  que si  $D$  es una digráfica 3-cuasitransitiva fuerte no bipartita y  $D$  contiene un ciclo de longitud impar, entonces contiene un 3-ciclo  $T$ , para  $k \geq 1$ .

**Base:** Si  $k = 1$  el resultado es inmediato ya que el mismo ciclo  $C$  sería un 3-ciclo en  $D$ . Lo cual prueba la base de inducción.

**Hipótesis de inducción:** *Si  $D$  contiene un ciclo de longitud  $2m + 1$  entonces  $D$  contiene un 3-ciclo  $T$ .*

Supongamos  $k = m + 1$ , entonces  $C = (v_1, \dots, v_{2(m+1)+1}, v_1)$  es tal que  $\ell(C) = 2(m+1) + 1$ . Notemos que  $P = (v_2, v_3, \dots, v_{2(m+1)+1})$  es una  $v_2 v_{2(m+1)+1}$ -trayectoria de longitud impar. Por el lema 3.1 se sigue que  $(v_2, v_{2(m+1)+1}) \in F(D)$  ó  $(v_{2(m+1)+1}, v_2) \in F(D)$  (ver figura 3.3a). Por consiguiente se tienen dos casos:

- Si  $(v_2, v_{2(m+1)+1}) \in F(D)$ , entonces  $T = (v_1, v_2, v_{2(m+1)+1}, v_1)$  es un 3-ciclo en  $D$ .
- Si  $(v_{2(m+1)+1}, v_2) \in F(D)$ . Como  $P_1 = (v_{2(m+1)+1}, v_1, v_2, v_3)$  es una  $v_{2(m+1)+1} v_3$ -trayectoria tal que  $\ell(P_1) = 3$  y por ser  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva se sigue que  $(v_3, v_{2(m+1)+1}) \in F(D)$  ó  $(v_{2(m+1)+1}, v_3) \in F(D)$ . De manera que tenemos dos subcasos:
  - I) Si  $(v_3, v_{2(m+1)+1}) \in F(D)$ , entonces  $T' = (v_2, v_3, v_{2(m+1)+1}, v_2)$  es un 3-ciclo en  $D$ .
  - II) Si  $(v_{2(m+1)+1}, v_3) \in F(D)$ , entonces  $C' = (v_3, v_4, \dots, v_{2(k+1)+1}, v_3)$  es un ciclo de longitud  $\ell(C') = 2(m+1) + 1 - 3 + 1 = 2m + 2 + 1 - 3 + 1 = 2m + 1$  y por hipótesis de inducción  $D$  contiene un 3-ciclo. Con lo anterior agotamos los casos y terminamos el proceso de inducción.

Sea  $T = (x_1, x_2, x_3, x_1)$  el 3-ciclo que sabemos que existe en  $D$ . Ahora probaremos que cualquier vértice  $s \in V(D)$  es adyacente a por lo menos dos vértices de  $T$ . Tenemos dos casos:

- i)  $s \in V(T)$ .  
Sin pérdida de generalidad supongamos que  $s = x_1$ . Así,  $x_1$  es adyacente a  $x_2$  y a  $x_3$ , por ser vértices del ciclo.
- ii)  $s \in V(D) \setminus V(T)$ .  
Primeramente probaremos que  $(s, x_i) \in F(D)$  ó  $(x_i, s) \in F(D)$  para alguna  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

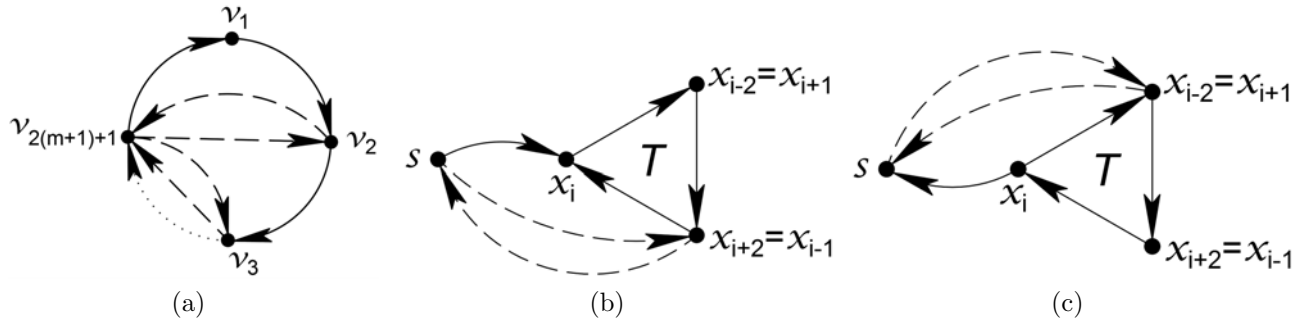


Figura 3.3

Como  $D$  es una digráfica fuerte, existe una  $sT$ -trayectoria y por el lema 2.1 existe una  $sT$ -trayectoria de longitud impar, que termina en  $x_i$  para alguna  $i \in \{1, 2, 3\}$  y por el lema 3.1 se tiene que  $(s, x_i) \in F(D)$  ó  $(x_i, s) \in F(D)$ . Analicemos los siguientes casos sobre la dirección de la adyacencia entre  $s$  y  $x_i$ :

- a) Si  $(s, x_i) \in F(D)$ , entonces  $(s, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  es una 3-trayectoria, con los subíndices tomados módulo 3, además por ser  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva se sigue que  $(s, x_{i+2}) \in F(D)$  ó  $(x_{i+2}, s) \in F(D)$  (ver figura 3.3b).
- b) Si  $(x_i, s) \in F(D)$ , entonces  $(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, s)$  es una 3-trayectoria, con los subíndices tomados módulo 3, además por ser  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva se sigue que  $(s, x_{i-2}) \in F(D)$  ó  $(x_{i-2}, s) \in F(D)$  (ver figura 3.3c).

De esta manera todo vértice  $s \in V(D)$  es adyacente a al menos dos vértices de  $T$ . Y por la construcción de tal pareja de vértices se sigue el último resultado.  $\square$

**Lema 3.3.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte 3-cuasitransitiva de orden  $n \geq 4$  tal que  $D$  contiene un 3-ciclo  $C$  como una subdigráfica. Si  $v \in V(D) \setminus V(C)$  es tal que  $2 \leq d(v, C)$ , entonces  $C \rightarrow v$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica como en las hipótesis y  $C = (x_1, x_2, x_3)$  un 3-ciclo en  $D$ . De ahora en adelante, todos los subíndices serán tomados módulo 3. Como  $|V(D)| \geq 4$  se sigue que  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$ . Sea entonces  $v \in V(D) \setminus V(C)$  un vértice cualquiera.

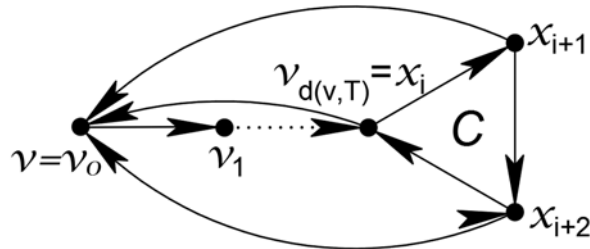


Figura 3.4

Como  $D$  tiene un 3-ciclo entonces no es bipartita, aparte es una digráfica fuerte tal que  $|V(D)| \geq 4$ , por lo tanto cumple con las hipótesis del lema 3.2, se sigue que  $v$  es adyacente a dos vértices (por ser tres vértices en  $C$  estos dos vértices adyacentes a  $v$  deben ser consecutivos) de  $C$  digamos  $x_i$  y  $x_{i+1}$ , además como  $1 < d(v, C)$  estas adyacencias se dan desde  $C$  hacia  $v$ . Por lo tanto  $(x_i, v) \in F(D)$  y  $(x_{i+1}, v) \in F(D)$  (ver figura 3.4).

Como  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, v)$  es una 3-trayectoria, entonces se sigue de la 3-cuasitranstividad de  $D$  que  $(x_{i-1}, v) \in F(D)$  ó  $(v, x_{i-1}) \in F(D)$ . De nuevo, por ser  $1 < d(v, C)$  se sigue que  $(v, x_{i-2}) \notin F(D)$  y por lo tanto  $(x_{i-2}, v) \in F(D)$ . Probando con esto que  $C \rightarrow v$  y terminando la prueba.  $\square$

**Lema 3.4.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte 3-cuasitranstiva de orden  $n \geq 4$ . Si  $D$  contiene un 3-ciclo  $C$  como una subdigráfica y existe un vértice  $u \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $u$  y cualquier vértice de  $C$  son adyacentes, entonces  $D$  es una digráfica semicompleta.*

*Demostración.* Sean  $D$  como en las hipótesis del lema y  $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$  el 3-ciclo en  $D$ . Como  $D$  tiene un ciclo impar, entonces no es bipartita, por lo tanto  $D$  cumple las hipótesis del lema 3.2, del cual haremos uso a lo largo de esta prueba. De ahora en adelante, en la demostración, todos los subíndices del ciclo serán tomados módulo 3.

**Afirmación 1.** *Para cualquier  $w \in V(D) \setminus V(C)$ , si  $w$  y cualquier vértice de  $V(C)$  son adyacentes, entonces  $w$  y cualquier vértice de  $V(D) \setminus (V(C) \cup \{w\})$  son adyacentes.*

Supongamos que  $w$  y cualquier vértice de  $V(C)$  son adyacentes, como  $|V(C)| = 3$ , por el principio de casillas existen dos flechas en la misma dirección entre  $w$  y  $C$ . Ya que el reverso de una digráfica 3-cuasitranstiva es también una digráfica 3-cuasitranstiva, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\{(w, x_1), (w, x_2)\} \subseteq F(D)$ .

Si  $V(D) \setminus (V(C) \cup \{w\}) = \emptyset$ , entonces no hay nada que probar.

De esta manera asumamos que  $V(D) \setminus (V(C) \cup \{w\}) \neq \emptyset$ . Sea  $v \in V(D) \setminus (V(C) \cup \{w\})$  un vértice arbitrario. Ahora veremos que  $(w, v) \in F(D)$  ó  $(v, w) \in F(D)$ , esto lo probaremos encontrando una trayectoria de longitud impar entre  $v$  y  $w$ , ya que al existir tal trayectoria podemos aplicar el lema 3.1.

Como  $D$  es fuerte existe una  $vC$ -trayectoria y una  $Cv$ -trayectoria en  $D$ . Sea  $P = (v = y_0, y_1, \dots, y_m)$  una  $vC$ -trayectoria de longitud mínima donde  $y_m = x_i$  para alguna  $i \in \{1, 2, 3\}$  y sea  $Q = (z_0, z_1, \dots, z_k = v)$  una  $Cv$ -trayectoria de longitud mínima donde  $z_0 = x_j$  para alguna  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

1. Si  $2 \leq m$  entonces se sigue del lema 3.3 que  $C \rightarrow v$ . Por consiguiente  $(w, x_1, x_2, v)$  es una  $wv$ -trayectoria de longitud impar.
2. Si  $m < 2$ , es decir, si  $m = 1$ , entonces  $(v, x_i) \in F(D)$  es una  $vC$ -flecha para alguna  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Por otra parte si  $(x_2, v) \in F(D)$  ó  $(x_3, v) \in F(D)$  entonces  $(w, x_1, x_2, v)$  ó  $(w, x_2, x_3, v)$  es una  $wv$ -trayectoria de longitud impar respectivamente.

Supongamos que  $(x_2, v) \notin F(D)$  y  $(x_3, v) \notin F(D)$ . Tenemos los siguientes casos para  $x_i$ :

- a) Si  $(v, x_1) \in F(D)$  entonces por el lema 3.2 se tiene que  $(v, x_3) \in F(D)$  ó  $(x_3, v) \in F(D)$ . Como  $(x_3, v) \notin F(D)$  entonces  $(v, x_3) \in F(D)$ , por lo tanto del lema 3.2, se tiene que  $(v, x_2) \in F(D)$  ó  $(x_2, v) \in F(D)$ . Como  $(x_2, v) \notin F(D)$  entonces  $(v, x_2) \in F(D)$ . Así  $v \rightarrow C$ , dicho de otra manera, hay flechas desde  $v$  hacia cualquier vértice del ciclo  $C$ , ahora sólo falta analizar los casos sobre la adyacencia de  $w$  con  $x_3$ , ya que  $w$  es adyacente a todos los vértices de  $C$ .
  - 1) Si  $(x_3, w) \in F(D)$ , entonces  $(v, x_2, x_3, w)$  es una trayectoria de longitud impar.
  - 2) Si  $(w, x_3) \in F(D)$ , entonces  $w \rightarrow C$ .



- Si  $w \notin V(Q)$  entonces alguna de estas dos  $wv$ -trayectorias  $(w, x_{j-1}, x_j, Q, v)$  ó  $(w, x_j, Q, v)$  es de longitud impar, como en la figura 3.5a.
- Si  $w \in V(Q)$  entonces alguna de estas dos  $vw$ -trayectorias  $(v, x_{j-1}, x_j, Q, w)$  ó  $(v, x_j, Q, w)$  es de longitud impar, como en la figura 3.5b.

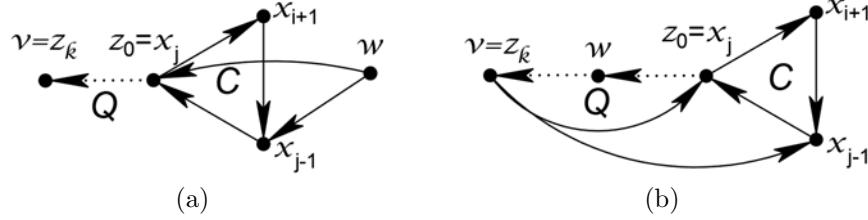


Figura 3.5

- b) Supongamos que  $(v, x_1) \notin F(D)$ . Si  $(v, x_2) \in F(D)$  entonces por el lema 3.2, se tiene que  $(v, x_1) \in F(D)$  ó  $(x_1, v) \in F(D)$ . Como  $(v, x_1) \notin F(D)$  entonces  $(x_1, v) \in F(D)$ . Debido a que  $w$  es adyacente a cualquier vértice en  $V(C)$  tenemos los siguientes dos casos:
- 1) Si  $(x_3, w) \in F(D)$ , entonces  $(v, x_2, x_3, w)$  es una trayectoria de longitud impar.
  - 2) Si  $(w, x_3) \in F(D)$ , entonces  $(w, x_3, x_1, v)$  es una trayectoria de longitud impar.
- c) Supongamos que  $(v, x_1) \notin F(D)$  y  $(v, x_2) \notin F(D)$ . Como  $d(v, C) = 1$  y por las hipótesis de este caso se tiene que  $(v, x_3) \in F(D)$ . Del lema 3.2 se sigue que  $(v, x_2) \in F(D)$  ó  $(x_2, v) \in F(D)$  pero esto no puede pasar ya que como hipótesis tenemos que  $(x_2, v) \notin F(D)$  y en este subcaso tenemos que  $(v, x_2) \notin F(D)$ . Por lo tanto este subcaso no se puede dar.

Como hemos agotado los casos concluimos que existe una trayectoria de longitud impar entre  $w$  y  $v$ , entonces por el lema 3.1, tenemos que  $(w, v) \in F(D)$  ó  $(v, w) \in F(D)$ . Por lo tanto la afirmación es cierta.

**Afirmación 2.** *Cualquier vértice de  $V(D) \setminus V(C)$  es adyacente a cualquier vértice de  $V(C)$ .*

Si  $V(D) \setminus (V(C) \cup \{u\}) = \emptyset$  (con  $u$  el vértice de la hipótesis), entonces no hay nada que probar. Ahora asumamos que  $V(D) \setminus (V(C) \cup \{u\}) \neq \emptyset$ .

Sea  $v \in V(D) \setminus (V(C) \cup \{u\})$  un vértice arbitrario. Por la afirmación 1 del presente lema,  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$ .

Como  $\overline{D}$  cumple todas las hipótesis de este lema, sin pérdida de generalidad, asumamos que  $(v, u) \in F(D)$ . Por el lema 3.2,  $v$  y al menos dos vértices de  $V(C)$  son adyacentes, digamos  $x_1$ , y  $x_2$ . A continuación probaremos que  $v$  y  $x_3$  son también adyacentes.

- A) Si  $(v, x_1) \in F(D)$  ó  $(x_2, v) \in F(D)$ , entonces, por el lema 3.2  $(v, x_3) \in F(D)$  ó  $(x_3, v) \in F(D)$ , en otras palabras,  $v$  y  $x_3$  son adyacentes.
- B) Si  $(v, x_1) \notin F(D)$  y  $(x_2, v) \notin F(D)$ , entonces  $(x_1, v) \in F(D)$  y  $(v, x_2) \in F(D)$ , ya que  $v$  es adyacente a  $x_1$  y a  $x_2$ . Ahora mostraremos que existe una trayectoria de longitud impar entre  $v$  y  $x_3$ , para luego utilizar el lema 3.1 y obtener que  $(v, x_3) \in F(D)$  ó  $(x_3, v) \in F(D)$ . Tenemos los siguientes dos casos:

- I) Existe una flecha de  $u$  a  $C$ , en otras palabras,  $(u, x_i) \in F(D)$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- Si  $(u, x_2) \in F(D)$ , entonces  $(v, u, x_2, x_3)$  es una  $vx_3$ -trayectoria de longitud impar.
  - Si  $(u, x_2) \notin F(D)$  y  $(u, x_3) \in F(D)$ , entonces como  $u$  es adyacente a cualquier vértice de  $C$ , se sigue que  $(x_2, u) \in F(D)$  y por lo tanto  $(v, x_2, u, x_3)$  es una  $vx_3$ -trayectoria de longitud impar.
  - Si  $(u, x_2) \notin F(D)$  y  $(u, x_3) \notin F(D)$ . Como existe una flecha de  $u$  a  $C$  se tiene que  $(u, x_1) \in F(D)$ , además  $(x_3, u) \in F(D)$  ya que  $u$  es adyacente a cualquier vértice de  $C$ , entonces  $(x_3, u, x_1, v)$  es una  $x_3v$ -trayectoria de longitud impar.
- II) Si no existe una flecha de  $u$  a  $C$ , entonces como  $u$  es adyacente a cualquier vértice de  $C$  se sigue que  $C \mapsto u$ . Sea  $W = \{x \in V(D) : C \mapsto x\}$ , es decir, el conjunto de todos los vértices  $x$  de  $D$  tales que no existe flecha de ellos hacia el ciclo  $C$  y además  $C \rightarrow x$ . Notamos que  $u \in W$ , por lo tanto  $W \neq \emptyset$ .
- Si existe  $w \in W$  tal que  $(w, v) \in F(D)$  entonces  $(x_3, x_1, w, v)$  es una  $x_3v$ -trayectoria de longitud impar (se tiene que  $(x_1, w) \in F(D)$  porque  $C \mapsto w$  para cualquier  $w \in W$ ).
  - Si no existe  $w \in W$  tal que  $(w, v) \in F(D)$ , en otras palabras,  $v \Rightarrow W$ , entonces por definición de  $W$  se tiene que  $W \cap V(C) = \emptyset$  y por la afirmación 1 del presente lema se tiene que  $v$  es adyacente a cualquier vértice  $w$  en  $W$ . En consecuencia  $v \rightarrow W$  y así  $v \mapsto W$ .  
Como  $\{(x_1, v), (v, x_2)\} \subseteq F(D)$  entonces  $v \notin W$ , además  $v \notin V(C)$ , así  $v \in V(D) \setminus (V(C) \cup W)$  y en consecuencia  $V(D) \setminus (V(C) \cup W) \neq \emptyset$ .  
Como  $D$  es fuerte se sigue que  $N^+(W) \setminus W \neq \emptyset$ , de lo contrario desde  $W$  no sería posible salir hacia otros vértices de  $D$ .  
Sea  $z \in N^+(W) \setminus W$  un vértice arbitrario (como  $v \Rightarrow W$  se sigue que  $z \neq v$ ), entonces existe  $w' \in W$  tal que  $(w', z) \in F(D)$ . Por definición de  $W$  se tiene que  $C \mapsto w'$  y  $(w', z) \in F(D)$ . Si  $x_i \in V(C)$ , entonces  $(x_i, x_{i+1}, w', z)$  es una  $x_i z$ -trayectoria de longitud 3 para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$  (tomando los índices módulo 3). Por lo tanto  $z$  es adyacente a cualquier vértice de  $C$ . Entonces, por la afirmación 1,  $z$  y  $v$  son adyacentes.
- Si  $(z, v) \in F(D)$ , entonces  $(x_3, w', z, v)$  es una  $x_3v$ -trayectoria de longitud impar.
  - Si  $(z, v) \notin F(D)$ , entonces  $(v, z) \in F(D)$ . Como  $z \notin W$ , debe existir una flecha de  $z$  hacia  $C$ . Análogamente como en el caso (I),  $z$  es un vértice adyacente a cada vértice de  $C$  y existe una flecha de  $z$  a  $C$ , y tal caso ya lo analizamos, por lo tanto tenemos que existe una trayectoria de longitud impar entre  $v$  y  $x_3$ .

En consecuencia siempre existe una trayectoria de longitud impar entre  $v$  y  $x_3$ , por lo tanto del lema 3.1 concluimos que  $(v, x_3) \in F(D)$  ó  $(x_3, v) \in F(D)$ . Esto prueba la afirmación 2.

De las afirmaciones 1 y 2 se sigue que  $D$  es semicompleta. □

Consideremos la digráfica  $F_n$  con vértices  $V(F_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y conjunto de flechas  $F(F_n) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\} \cup \{(x_1, x_{i+3}), (x_{i+3}, x_2) : i = 1, 2, \dots, n-3\}$ , donde  $n \geq 4$ .

En la figura 3.6 se muestran ejemplos de las digráficas  $F_n$ . Es importante señalar que en la figura 3.6a el vértice  $x_1$  domina a todos los vértices del conjunto independiente de  $n-3$  vértices  $\{x_4, \dots, x_n\}$  y a su vez este conjunto domina al vértice  $x_2$ .

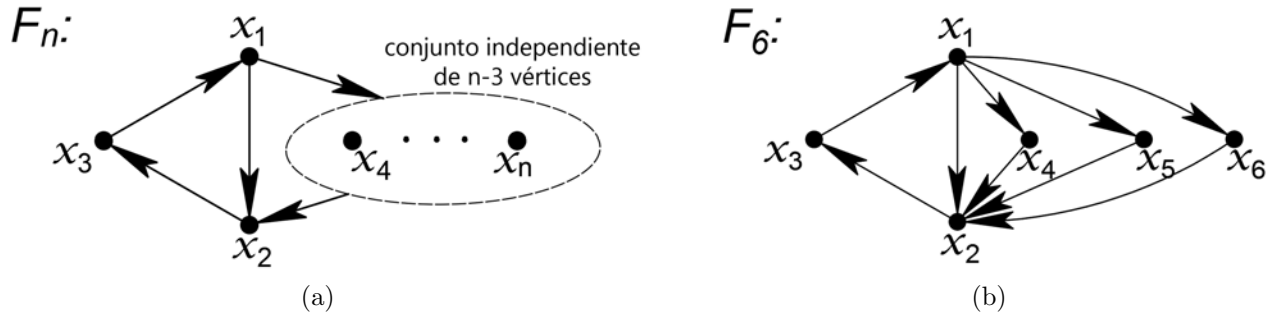


Figura 3.6

**Lema 3.5.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva fuerte de orden  $n \geq 4$ . Si  $D$  contiene un 3-ciclo  $C$  como una subdigráfica y no existe vértice en  $V(D) \setminus V(C)$  adyacente a cualquier vértice de  $C$ , entonces  $D$  es isomorfa a  $F_n$ .*

*Demostración.* Sea  $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$  un 3-ciclo de  $D$ . De ahora en adelante, en este lema, todos los subíndices del ciclo son considerados módulo 3. Como  $D$  contiene un ciclo de longitud impar, entonces  $D$  no es bipartita y como  $n \geq 4$ , entonces  $D$  cumple las hipótesis del lema 3.2. Como  $n \geq 4$  entonces  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$ , por comodidad de notación sea  $U = V(D) \setminus V(C)$ .

Sea  $x \in U$  un vértice arbitrario, por el lema 3.2,  $x$  y al menos dos vértices de  $V(C)$  son adyacentes, diremos  $x_1$  y  $x_2$ .

- Si  $(x, x_1) \in F(D)$  ó  $(x_2, x) \in F(D)$ , por el lema 3.2 tenemos que  $x$  y  $x_3$  son adyacentes, lo cual es una contradicción, ya que no existe vértice en  $U$  tal que sea adyacente a cada vértice de  $C$ .
- Si  $(x, x_1) \notin F(D)$  y  $(x_2, x) \notin F(D)$  entonces  $(x_1, x) \in F(D)$  y  $(x, x_2) \in F(D)$ . En este caso consideremos la siguiente afirmación.

**Afirmación 1.** *Para cualquier  $x' \in U \setminus \{x\}$ , se tiene que  $(x_1, x') \in F(D)$  y  $(x', x_2) \in F(D)$ .*

Sea  $x' \in U \setminus \{x\}$  por el lema 3.2,  $x'$  es adyacente a al menos dos vértices de  $V(C)$  y como no existe vértice en  $U$  adyacente a cualquier vértice de  $V(C)$  entonces el vértice  $x'$  y exactamente dos vértices de  $V(C)$  son adyacentes.

- Si las flechas entre  $x'$  y  $C$  están en la misma dirección, sin pérdida de generalidad, asumamos que las flechas entre  $x'$  y  $\{x_i, x_{i+1}\}$  están en la misma dirección.
  1. Si  $x' \rightarrow \{x_i, x_{i+1}\}$ , entonces  $(x', x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  es una  $x'x_{i+2}$ -trayectoria de longitud 3 y por lo tanto  $x'$  y  $x_{i+2}$  son adyacentes, lo cual es una contradicción ya que no existe vértice en  $D$  adyacente a todos los vértices de  $V(C)$ .
  2. Si  $\{x_i, x_{i+1}\} \rightarrow x'$ , entonces  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x')$  es una  $x_{i-1}x'$ -trayectoria de longitud 3 y por lo tanto  $x'$  y  $x_{i-1}$  son adyacentes lo cual nos lleva a la misma contradicción que el caso anterior.

Por lo tanto de (1) y (2) concluimos que sólo se puede dar el siguiente caso.

- Las flechas entre  $x'$  y  $C$  están en distinta dirección.

Ahora analicemos los casos sobre la flecha que entra de  $x'$  hacia el ciclo  $C$ :

- a. Supongamos que  $(x', x_1) \in F(D)$ . Como  $(x', x_1, x_2, x_3)$  y  $(x', x_1, x, x_2)$  son trayectorias de longitud 3, entonces  $x'$  es adyacente a  $x_2$  y  $x_3$ , lo cual contradice que no existe vértice alguno adyacente a todos los vértices de  $C$ . Por lo tanto,  $(x', x_1) \notin F(D)$ .
- b. Supongamos que  $(x', x_3) \in F(D)$ , entonces, por el lema 3.2,  $x'$  es adyacente a  $x_2$  y como las flechas entre  $x'$  y  $C$  están en distinta dirección, se sigue que  $(x_2, x') \in F(D)$ . De esta forma  $(x, x_2, x', x_3)$  es una  $xx_3$ -trayectoria de longitud impar y así por el lema 3.1  $x$  es adyacente a  $x_3$ , lo que nos lleva a una contradicción, con el hecho de que no existe vértice fuera de  $C$  que sea adyacente a  $C$ . Por lo tanto,  $(x', x_3) \notin F(D)$ .

Como  $x'$  es adyacente a dos vértices de  $C$  y las flechas a estos vértices están en distinta dirección, entonces al menos hay una flecha de  $x'$  a  $C$ , por lo tanto de (a) y (b) concluimos que  $(x', x_2) \in F(D)$ . Por el lema 3.2 se tiene que  $(x', x_1) \in F(D)$  ó  $(x_1, x') \in F(D)$  y como las flechas entre  $x'$  y  $C$  están en distinta dirección se tiene que  $(x_1, x') \in F(D)$ . Lo que prueba la afirmación 1.

**Afirmación 2.**  $U$  es un conjunto independiente.

Si  $|U| = 1$ , la afirmación es trivial.

Asumamos que  $|U| \geq 2$ . Si suponemos que  $U$  no es independiente, entonces existe una pareja de vértices  $u$  y  $v$  de  $U$  tal que  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$ . Sin pérdida de generalidad, asumamos que  $(u, v) \in F(D)$ . Como  $(u, v, x_2, x_3)$  es una  $ux_3$ -trayectoria de longitud 3 y  $D$  es 3-cuasitransitiva, entonces  $u$  es adyacente a  $x_3$ , además la afirmación 1 del presente lema nos dice que  $u$  es adyacente a  $x_1$  y a  $x_2$ , pero esto contradice el hecho de que no exista vértice en  $V(D) \setminus V(C)$  adyacente a cualquier vértice de  $C$ . Por lo tanto la afirmación 2 es cierta.

Por las afirmaciones 1 y 2 concluimos que  $D$  es isomorfa a  $F_n$ . □

**Teorema 3.1.** Si  $D$  es una digráfica fuerte 3-cuasitransitiva de orden  $n$ , entonces  $D$  es una digráfica semicompleta, una digráfica bipartita semicompleta o isomorfa a  $F_n$ .

*Demostración.* Si  $n \leq 2$  entonces las únicas digráficas fuertes son las completas, por lo tanto supongamos que  $n \geq 3$ .

- Si  $D$  es una digráfica fuerte bipartita con bipartición  $\{X, Y\}$ . Como  $D$  es fuerte, para cualquier pareja de vértices  $x \in X$ ,  $y \in Y$  existe una  $xy$ -trayectoria, digamos  $P$ . Como  $x$  y  $y$ , están en clases distintas de la bipartición, entonces  $P$  es de longitud impar. Por el lema 3.1,  $x$  y  $y$  son adyacentes.

Por lo tanto  $D$  es una digráfica bipartita semicompleta.

- Si  $D$  es una digráfica fuerte no bipartita. Por el lema 3.2,  $D$  contiene un 3-ciclo  $C$  como una subdigráfica.

1. Si  $n = 3$ , entonces  $D$  es una digráfica semicompleta.

2. Si  $n \geq 4$ . Entonces:

- a) Si existe un vértice el cual es adyacente a cualquier vértice de  $C$ , entonces por el lema 3.4  $D$  es una digráfica semicompleta.
- b) Si no existe un vértice el cual sea adyacente a cualquier vértice de  $C$ , entonces, por el lema 3.5,  $D$  es isomorfa a  $F_n$ . Con lo cual terminamos la prueba del teorema.

□

### 3.2. Digráficas fuertes 3-transitivas

Como resultado de la proposición 2.3 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.** *Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva y  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  una trayectoria dirigida en  $D$ . Si  $n$  es impar entonces  $(v_0, v_n) \in F(D)$ , en otras palabras,  $D$  es  $(2m+1)$ -transitiva para toda  $m \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* De la proposición 2.3 se tiene que  $D$  es  $(3+2n)$ -transitiva para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 0$ . Como  $3+2n = 1+2+2n = 1+2(n+1)$ , entonces si llamamos  $m = n+1$  tenemos que  $D$  es  $(2m+1)$ -transitiva para  $m \geq 1$ . Sabemos que cualquier digráfica es 1-transitiva y además  $D$  es 3-transitiva, por lo tanto  $D$  es  $(2m+1)$ -transitiva para cualquier entero  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

El corolario 3.1 nos dice que si existe una  $uv$ -trayectoria de longitud impar en una digráfica  $D$ , que es 3-transitiva, entonces  $(u, v) \in F(D)$ .

**Proposición 3.1.** *Sean  $D$  una digráfica 3-transitiva y  $v \in V(D)$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si  $C_3$  es un ciclo de longitud 3 en  $D$  tal que existe una  $C_3v$ -flecha en  $D$ , con  $v \notin V(C_3)$ , entonces  $C_3 \rightarrow v$ .*
2. *Si  $C_3$  es un ciclo de longitud 3 en  $D$  tal que existe una  $vC_3$ -flecha en  $D$ , con  $v \notin V(C_3)$ , entonces  $v \rightarrow C_3$ .*
3. *Para cualquier  $\overleftrightarrow{K}_n$  en  $D$ ,  $n \geq 3$ , tal que existe una  $\overleftrightarrow{K}_nv$ -flecha en  $D$ , entonces  $\overleftrightarrow{K}_n \rightarrow v$ .*
4. *Para cualquier  $\overleftrightarrow{K}_n$  en  $D$ ,  $n \geq 3$ , tal que existe una  $v\overleftrightarrow{K}_n$ -flecha en  $D$ , entonces  $v \rightarrow \overleftrightarrow{K}_n$ .*
5. *Para cualquier  $\overleftarrow{K}_{n,m}$  en  $D$ , con bipartición  $\{X, Y\}$ , tal que existe una  $Xv$ -flecha en  $D$ , con  $v \notin X$ , entonces  $X \rightarrow v$ .*
6. *Para cualquier  $\overleftarrow{K}_{n,m}$  en  $D$ , con bipartición  $\{X, Y\}$ , tal que existe una  $vX$ -flecha en  $D$ , con  $v \notin X$ , entonces  $v \rightarrow X$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica 3-transitiva y  $v \in V(D)$ .

1. Sean  $C_3 = (x, y, z, x)$  un ciclo en  $D$  de longitud 3 y  $v \notin V(C_3)$  como en las hipótesis de (1) y  $(x, v) \in F(D)$ . La existencia de la trayectoria  $(y, z, x, v)$  en  $D$ , implica que  $(y, v) \in F(D)$ , ya que  $D$  es 3-transitiva. Finalmente, ya que  $(z, x, y, v)$  es una 3-trayectoria de longitud 3 en  $D$ ,  $(z, v) \in F(D)$ . Entonces  $C_3 \rightarrow v$ .
2. Sean  $C_3$  en  $D$  y  $v \in V(D) \setminus V(C_3)$ , que satisfacen las hipótesis de (2). Como  $\overleftarrow{C}_3$  es un ciclo de longitud 3 en la digráfica 3-transitiva  $\overleftarrow{D}$  (recordemos que  $\overleftarrow{D}$  es 3-transitiva por la observación 2.1) tal que existe una  $\overleftarrow{C}_3v$ -flecha en  $\overleftarrow{D}$ , con  $v \notin V(C_3)$ , entonces por (1) se tiene que  $\overleftarrow{C}_3 \xrightarrow{\overleftarrow{D}} v$  y en consecuencia  $v \rightarrow C_3$ .
3. Supongamos que  $D$  contiene a  $\overleftrightarrow{K}_n$  y  $V(\overleftrightarrow{K}_n) = \{1, \dots, n\}$ , con  $n \geq 3$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $(1, v) \in F(D)$ , por otra parte sean  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1\}$  un vértice arbitrario y  $j \in (\{1, \dots, n\} \setminus \{1, i\})$ . La trayectoria  $(i, j, 1, v)$  tiene longitud 3 y como  $D$  es una digráfica 3-transitiva, entonces  $(i, v) \in F(D)$ . Como  $i$  es un vértice arbitrario de  $\overleftrightarrow{K}_n$ , entonces  $\overleftrightarrow{K}_n \rightarrow v$ .

4. Como  $\overleftarrow{D}$  cumple las hipótesis de (3), entonces análogamente concluimos que  $v \rightarrow \overleftarrow{K}_n$ .

5. Sean  $\overleftarrow{K}_{n,m}$  una subdigráfica de  $D$  y  $x \in X$  tal que  $x \rightarrow v$ , como en las hipótesis de (5).

Si  $|X| = 1$ , entonces el resultado es inmediato. Supongamos que  $|X| \geq 2$ , entonces sea  $z \in X \setminus \{x\}$ . Como  $Y \neq \emptyset$ , existe un vértice  $y \in Y$ . Como  $\overleftarrow{K}_{n,m}$  es una digráfica bipartita completa, entonces  $\{(z, y), (y, x)\} \subseteq F(D)$ . Ya que  $(z, y, x, v)$  es una 3-trayectoria en  $D$ , se sigue que  $(z, v) \in F(D)$ , así  $X \rightarrow v$ , porque  $z$  fue arbitrario.

6. Como  $\overleftarrow{D}$  cumple las hipótesis de (5), entonces análogamente concluimos que  $v \rightarrow X$

□

**Proposición 3.2.** *Si  $D'$  una subdigráfica fuerte no trivial de una digráfica 3-transitiva  $D$  y  $s \in V(D) \setminus V(D')$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si existe una  $sD'$ -trayectoria en  $D$ , entonces existe una  $sD'$ -flecha en  $D$ .*

2. *Si existe una  $D's$ -trayectoria en  $D$ , entonces existe una  $D's$ -flecha en  $D$ .*

*Demostración.* Sean  $D'$  una subdigráfica fuerte no trivial de una digráfica 3-transitiva  $D$  y  $s \in V(D) \setminus V(D')$ .

1. Si existe una  $sD'$ -trayectoria en  $D$ , en particular sea  $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_n)$  una  $sD'$ -trayectoria de longitud mínima, es decir,  $n = \min\{\ell(T) : T \in \text{Tray}_D(s, D')\}$ .

Si  $n = 1$  entonces ya acabamos. Ahora supongamos que  $n \geq 2$ . Por la minimalidad de  $P$  se sigue que  $V(P) \cap V(D') = \{x_n\}$ . Como  $D'$  no es trivial y es fuerte se sigue que  $\delta_{D'}^+(x_n) > 0$ , dicho de otra manera, existe  $y \in V(D') \setminus \{x_n\}$  tal que  $(x_n, y) \in F(D')$ . Por lo tanto,  $P$  y  $P' = (s = x_0, P, x_n, y)$  son  $sD'$ -trayectorias en  $D$ . Analicemos los casos sobre la paridad de  $n$ :

a) Si  $n$  es impar, entonces  $P$  es una  $sx_n$ -trayectoria de longitud impar y por el corolario 3.1 se tiene que  $(s, x_n) \in F(D)$ .

b) Si  $n$  es par, entonces  $P'$  es una  $sy$ -trayectoria de longitud impar y por el corolario 3.1 se tiene que  $(s, y) \in F(D)$ .

2. Como  $\overleftarrow{D'}$  es una subdigráfica fuerte no trivial de la digráfica 3-transitiva  $\overleftarrow{D}$  (recordemos que  $\overleftarrow{D}$  es 3-transitiva por la observación 2.1) y  $s \in V(D) \setminus V(D')$ , donde  $V(D) \setminus V(D') = V(\overleftarrow{D}) \setminus V(\overleftarrow{D'})$ , si existe una  $D's$ -trayectoria en  $D$ , entonces existe una  $s\overleftarrow{D'}$ -trayectoria en  $\overleftarrow{D}$  y por el inciso (1) vemos que existe una  $s\overleftarrow{D'}$ -flecha en  $\overleftarrow{D}$ . Por lo tanto existe una  $D's$ -flecha en  $D$ .

□

**Proposición 3.3.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte 3-transitiva de orden  $n \geq 4$ . Si  $D$  es semicompleta, entonces  $D$  es completa.*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica fuerte 3-transitiva de orden  $n \geq 4$  y  $(x, y) \in F(D)$  una flecha cualquiera. Sea  $P = (y = y_0, y_1, \dots, y_s = x)$  la  $yx$ -trayectoria de longitud mínima, que existe porque  $D$  es fuerte. Como  $D$  es 3-transitiva entonces por el lema 2.6  $\ell(P) \leq 2$ .

- Si  $s = 2$ , entonces  $(x, y = y_0, y_1, y_2 = x)$  es un 3-ciclo en  $D$ . Sea  $D' = D[\{x, y, y_1\}]$ , como  $n \geq 4$ , entonces existe  $v \in V(D) \setminus V(D')$ . También como  $D$  es fuerte existen una  $D'v$ -trayectoria y una  $vD'$ -trayectoria en  $D$ . Se sigue de la proposición 3.2 que existen una  $D'v$ -flecha y una  $vD'$ -flecha en  $D$  y por la proposición 3.1 (1 y 2) se sigue que  $D' \rightarrow v$  y  $v \rightarrow D'$ , en consecuencia se tiene que  $\{(y_1, v), (v, x)\} \subseteq F(D)$ . Entonces  $(y, y_1, v, x)$  es una 3-trayectoria en  $D$  y por lo tanto  $(y, x) \in F(D)$  lo cual contradice la minimalidad de  $s$ .

De esta manera  $s = 1$  y así  $(y, x) \in F(D)$ . Por lo tanto, si  $(x, y) \in F(D)$ , entonces  $(y, x) \in F(D)$ , dicho de otra manera, toda flecha es simétrica y como  $D$  es semicompleta, entonces  $D$  es completa.  $\square$

**Proposición 3.4.** *Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva fuerte. Si  $D$  es bipartita semicompleta, entonces  $D$  es bipartita completa.*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica 3-transitiva que es bipartita semicompleta,  $\{X, Y\}$  la bipartición de  $D$ .

Basta probar que si  $(u, v) \in F(D)$  entonces se tiene que  $(v, u) \in F(D)$ .

Supongamos que  $(u, v) \in F(D)$ . Como  $D$  es fuerte, existe una  $vu$ -trayectoria digamos  $P = (v = x_0, \dots, x_n = u)$ . Como sabemos que  $D$  es bipartita se tiene que  $u$  y  $v$  pertenecen a distintas clases de la bipartición. Como las flechas de las trayectorias en  $D$  alternan entre  $X$  y  $Y$  por ser bipartita  $D$ , entonces  $n$  es impar, así por el corolario 3.1 tenemos que  $(v, u) \in F(D)$ . Por lo tanto  $D$  es bipartita completa ya que es bipartita semicompleta y toda flecha es simétrica.  $\square$

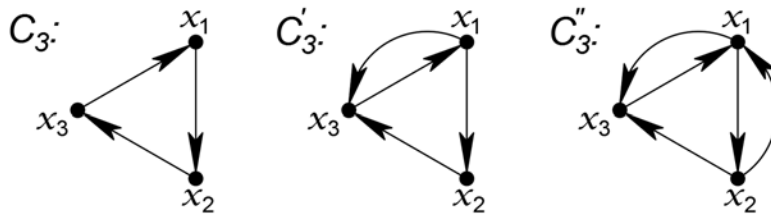


Figura 3.7

Sean  $C_3$ ,  $C'_3$  y  $C''_3$ , las digráficas resultantes de un 3-ciclo al que se le cambia ninguna, una y dos flechas, respectivamente, por flechas simétricas, como se muestra en la figura 3.7.

**Proposición 3.5.** *Una digráfica fuerte  $D$  de orden  $n$  es 3-transitiva si y sólo si es una de las siguientes digráficas:*

1. Una digráfica completa,
2. Una digráfica bipartita completa,
3.  $C_3$ ,  $C'_3$  ó  $C''_3$ .

*Demostración.* Ya que cualquier digráfica 3-transitiva es 3-cuasitransitiva, por el teorema 3.1, una digráfica 3-transitiva es semicompleta, bipartita semicompleta o isomorfa a  $F_n$ . Pero  $F_n$  no es 3-transitiva, ya que  $(x_1, x_4, x_2, x_3)$  es una trayectoria en  $F_n$  de longitud 3 tal que  $(x_1, x_3) \notin F(F_n)$ . Por lo tanto una digráfica 3-transitiva es semicompleta o bipartita semicompleta.

Podemos ver que cualquier digráfica fuerte de orden menor o igual a 3 es completa, bipartita completa o una de las digráficas  $C_3$ ,  $C'_3$  ó  $C''_3$ .

Si  $D$  tiene orden mayor o igual a 4 tenemos los siguientes casos:

- Si  $D$  es una digráfica semicompleta se sigue de la proposición 3.3 que  $D$  es completa.
- Si  $D$  es una digráfica bipartita semicompleta, se sigue de la proposición 3.4 que  $D$  es bipartita completa. Con lo cual completamos la prueba.

□

Ahora que ya conocemos a todas las digráficas fuertes 3-transitivas, quisieramos conocer como se da la interacción entre componentes fuertes no triviales de una digráfica 3-transitiva. Recordemos que la proposición 3.1 describe la interacción de un vértice con algunas subdigráficas de una digráfica 3-transitiva  $D$ . Esto cubre el caso cuando una componente fuerte de  $D$  consiste de un sólo vértice.

Para analizar de manera más explícita la interacción entre componentes fuertes no triviales de una digráfica 3-transitiva, se da la siguiente proposición. La prueba es muy similar a la dada en la proposición 3.1. Esta se omite por razones prácticas.

**Proposición 3.6.** *Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva y  $S_1, S_2$  componentes fuertes distintas de  $D$  tal que existe una  $S_1S_2$ -flecha. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. Si  $S_i$  contiene una subdigráfica isomorfa a  $C_3$ , para alguna  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $S_1 \rightarrow S_2$ .
2. Si  $S_i$  es una digráfica bipartita completa con bipartición  $(X_i, Y_i)$  para  $i \in \{1, 2\}$  y si la  $S_1S_2$ -flecha es una  $X_1X_2$ -flecha, entonces  $X_1 \rightarrow X_2$ .
3. Si  $S_i$  es una digráfica bipartita completa con bipartición  $(X_i, Y_i)$  para  $i \in \{1, 2\}$  y existe una  $X_1X_2$ -flecha y una  $Y_1X_2$ -flecha, entonces  $S_1 \rightarrow S_2$ .
4. Si  $S_i$  es una digráfica bipartita completa con bipartición  $(X_i, Y_i)$  para  $i \in \{1, 2\}$  y existe una  $X_1X_2$ -flecha y una  $X_1Y_2$ -flecha, entonces  $S_1 \rightarrow S_2$ .

Como una consecuencia directa de las proposiciones 3.2 y 3.6 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.** *Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva y  $S_1$  una componente fuerte de  $D$  que contiene una subdigráfica isomorfa a  $C_3$ . Si  $S_1 \rightarrow v$  para algún vértice  $v \in V(D)$ , entonces  $S_1 \rightarrow u$  para cualquier vértice  $u \in V(D)$  tal que  $v \rightsquigarrow u$ .*

*Duálmente, si  $v \rightarrow S_1$  para algún  $v \in V(D)$ , entonces  $u \rightarrow S_1$  para cualquier vértice  $u \in V(D)$  tal que  $u \rightsquigarrow v$ .*

### 3.3. Digráficas fuertes 4-transitivas.

En esta sección se darán una serie de resultados con el propósito de caracterizar a las digráficas 4-transitivas fuertes, que pueden ser encontrados en el artículo [8] de C. Hernández Cruz.

**Proposición 3.7.** *Si  $D$  es una digráfica 4-transitiva y  $C$  un  $n$ -ciclo en  $D$  tal que  $n \geq 7$  y  $(n, 3) = 1$ , entonces  $D[V(C)] \cong \overrightarrow{K}_n$ .*

*Demostración.* Con el propósito de no cargar subíndices y así hacer más práctica la prueba, asumiremos sin pérdida de generalidad que  $V(C) = \mathbb{Z}_n$ , donde  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$ . Sea  $j \in V(C)$  un vértice arbitrario, demostraremos que  $j \rightarrow V(C) \setminus \{j\}$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $j = 0$  (lo anterior ya que podemos reordenar los vértices mediante una traslación de sus



vértices módulo  $n$ ). Notemos que  $(n-1, 0, 1, 2, 3)$  es una 4-trayectoria en  $D$ , por la 4-transitividad de  $D$  se sigue que  $(n-1, 3) \in F(D)$ . Como  $n \geq 7$ ,  $C' = (3, C, n-1, 3)$  es un  $(n-3)$ -ciclo con  $n-3 \geq 4$ .

Observemos que si  $(n-3, 3) \neq 1$ , entonces  $(n-3, 3) = 3$  y así  $(n-3) = 3q$  para algún  $q \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $n = 3(q+1)$ , es decir, 3 divide a  $n$ , lo cual es una contradicción ya que  $(n, 3) = 1$ .

Por lo tanto  $(n-3, 3) = 1$  y de la proposición 2.5 y la observación 2.1 podemos concluir que  $i \leftrightarrow C'$  para cualquier  $i \in \{0, 1, 2\}$ , ya que para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$  se tiene que  $T_i = (i, C, 3)$  es una  $iC'$ -trayectoria. Como  $\mathbf{0} \rightarrow C'$  y  $C' \rightarrow 1$ , se tiene que  $(0, 3, 4, 1, 2)$  es una 4-trayectoria en  $D$ , entonces por la 4-transitividad de  $D$  implica que  $(\mathbf{0}, 2) \in F(D)$ . Como  $(\mathbf{0}, 1) \in F(C)$ , tenemos que  $(0, i) \in F(D)$  para cualquier  $i \in V(C) \setminus \{0\}$ .

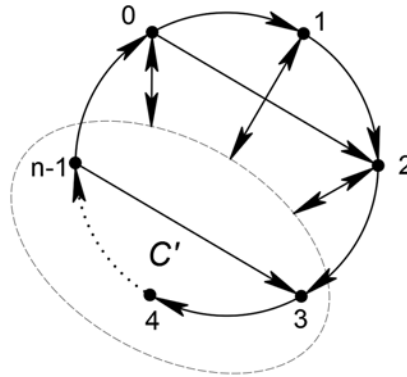


Figura 3.8

Por lo tanto podemos concluir que para cualquier  $j \in V(C)$  se tiene que  $(j, i) \in F(D)$  para toda  $i \in V(C) \setminus \{j\}$ , en otras palabras,  $D[V(C)] \cong \overrightarrow{K}_n$ .  $\square$

**Proposición 3.8.** *Si  $D$  es una digráfica 4-transitiva y  $S$  es una componente fuerte de  $D$  que contiene un  $n$ -ciclo tal que  $n \geq 7$  y  $(n, 3) = 1$ , entonces  $S$  es una digráfica completa.*

*Demostración.* Sea  $C$  un  $n$ -ciclo, con  $n \geq 7$  y  $(n, 3) = 1$ , contenido en una componente fuerte  $S$  de  $D$ . Por la maximalidad de  $S$  (de la definición), se tiene que  $D[V(S)] = S$ .

Por la proposición 3.7,  $\mathbf{S}[V(C)]$  es una digráfica completa. Ahora, por la proposición 2.5, la observación 2.1 y el hecho de que  $S$  es fuerte, observamos que para cualquier  $v \in V(S) \setminus V(C)$ , se tiene que  $v \leftrightarrow V(C)$ .

Si  $|V(S) \setminus V(C)| = 1$ , entonces  $S$  es completa. Por lo tanto supongamos que  $|V(S) \setminus V(C)| \geq 2$ .

Sea  $\{x, y, z\} \subseteq V(C)$  un conjunto de vértices distintos arbitrarios, entonces para cualquier  $\{v_1, v_2\} \subseteq (V(S) \setminus V(C))$ , con  $v_1 \neq v_2$ , tenemos que  $(v_1, x, y, z, v_2)$  y  $(v_2, z, y, x, v_1)$  son 4-trayectorias en  $D$ . Ya que  $D$  es 4-transitiva, podemos concluir que  $(v_1, v_2) \in F(D)$  y  $(v_2, v_1) \in F(D)$ . Por la maximalidad de la componente fuerte  $S$ , se tiene que  $(v_1, v_2) \in F(S)$  y  $(v_2, v_1) \in F(S)$ . En consecuencia,  $S$  es completa.  $\square$

**Proposición 3.9.** *Si  $D$  es una digráfica 4-transitiva y  $S$  es una componente fuerte de  $D$  con  $|V(S)| \geq 6$  tal que contiene un 5-ciclo, entonces  $S$  es una digráfica completa.*

*Demostración.* Sean  $D$  y  $S$  como en las hipótesis de esta proposición. Por la maximalidad de  $S$  (de la definición), se tiene que  $D[V(S)] = S$ .

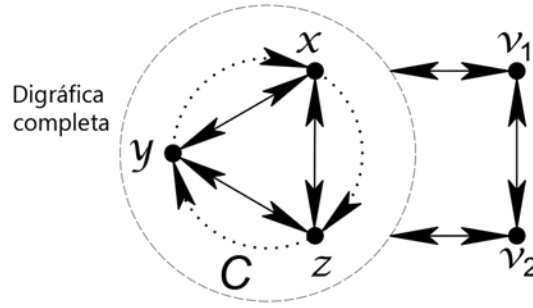


Figura 3.9

Sea  $C = (0, 1, 2, 3, 4, 0)$  un 5-ciclo en  $S$ . Como  $(5, 3) = 1$ , por la proposición 2.5, la observación 2.1 y el hecho de que  $S$  es fuerte, observamos que para cualquier  $v \in V(S) \setminus V(C)$ , se tiene que  $v \leftrightarrow V(C)$ . Entonces tenemos los siguientes dos casos sobre la cardinalidad de  $V(S)$ :

- Si  $|V(S)| \geq 7$ , entonces podemos considerar  $\{v_1, v_2\} \subseteq V(S) \setminus V(C)$ ,  $v_1 \neq v_2$ , al igual que la 4-trayectoria  $(v_1, 0, 1, 2, v_2)$  en  $D$ . Así,  $(v_1, v_2) \in F(D)$  y de la maximalidad de  $S$  (por definición) se tiene que  $(v_1, v_2) \in F(S)$ , lo que implica que  $(0, v_1, v_2, 1, 2, 3, 4, 0)$  es un 7-ciclo en  $S$ , entonces por la proposición 3.8,  $S$  es una digráfica completa (porque  $(7, 3) = 1$ ).
- Si  $|V(S)| = 6$ , entonces para cada  $i \in \mathbb{Z}_5$  consideramos el 5-ciclo  $C_i = (v, i + 1, i + 2, i + 3, i + 4, v)$  (los índices tomados módulo 5). Notemos que  $i \notin V(C_i)$  y  $\{(v, i), (i, v)\} \subseteq F(D)$ , entonces por la proposición 2.5 y la observación 2.1, ya que  $(5, 3) = 1$ , tenemos que  $i \leftrightarrow C_i$  para cualquier  $i \in \mathbb{Z}_5$ . Como  $V(C_i) = V(S) \setminus \{i\}$  entonces  $S$  es una digráfica completa.

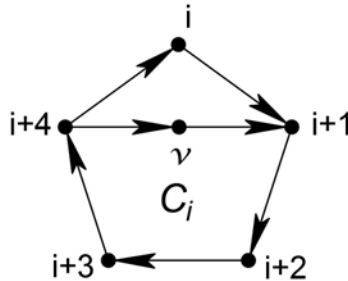


Figura 3.10

□

**Proposición 3.10.** Si  $D$  es una digráfica 4-transitiva y  $S$  es una componente fuerte de  $D$  con  $|V(S)| \geq 5$  la cual contiene un 4-ciclo, entonces  $S$  es una digráfica completa.

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica 4-transitiva,  $S$  como en las hipótesis de esta proposición y  $C = (0, 1, 2, 3, 0)$  un 4-ciclo de  $S$ . Por la maximalidad de  $S$  (de la definición), se tiene que  $D[V(S)] = S$ . Sabemos que  $(4, 3) = 1$ , además por la proposición 2.5, la observación 2.1 y el hecho de que  $S$  es fuerte, observamos que para cualquier  $v \in V(S) \setminus V(C)$ , se tiene que  $v \leftrightarrow V(C)$ .

Como  $|V(S)| \geq 5$ , existe al menos un vértice  $v \in V(S) \setminus V(C)$ , por lo tanto  $(0, v, 1, 2, 3, 0)$  es un 5-ciclo en  $S$ . Así tenemos los siguientes dos casos:

- Si  $|V(S)| \geq 6$ , entonces por la proposición 3.9,  $S$  es completa.
- Si  $|V(S)| = 5$ , entonces para cualquier  $i \in \mathbb{Z}_4$ ,  $C_i = (v, i+1, i+2, i+3, v)$  es un 4-ciclo (índices módulo 4). Como  $\{(i, v)(v, i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $i \in \mathbb{Z}_4$ , por la proposición 2.5 y la observación 2.1 podemos concluir que  $i \leftrightarrow C_i$ . Como  $V(C_i) = V(S) \setminus \{i\}$  entonces  $S$  es una digráfica completa, terminando así los casos y probando el resultado.

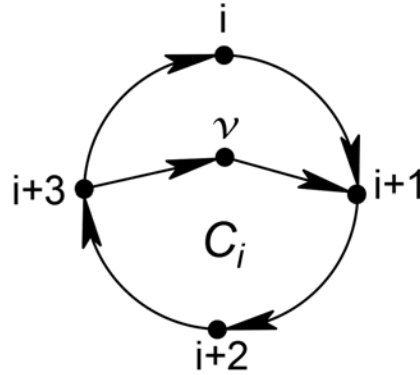


Figura 3.11

□

Ahora, podemos condensar las proposiciones anteriores de esta sección en el siguiente lema.

**Lema 3.6.** Sean  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva con  $|V(D)| \geq 5$  y  $C$  un  $n$ -ciclo de  $D$  tal que  $(n, 3) = 1$ . Si  $n \neq 2$  y  $D$  no es un 5-ciclo simétrico entonces  $D$  es una digráfica completa.

*Demostración.* Como  $n \neq 2$  y  $(n, 3) = 1$ , entonces  $n \geq 4$ . Procedamos ahora analizando los distintos casos para  $n$ :

- Si  $n \neq 5$ , entonces  $n \geq 7$  ó  $n = 4$  (ya que  $(n, 3) = 1$ ), así de la proposición 3.8 y la proposición 3.10 se sigue que  $D$  es una digráfica completa.
- Si  $n = 5$  tenemos dos subcasos:
  1. Si  $|V(D)| \geq 6$ , entonces se sigue de la proposición 3.9 que  $D$  es una digráfica completa.
  2. Si  $|V(D)| = 5$ , entonces como cualquier 5-ciclo en una digráfica 4-transitiva es simétrico y  $D$  no es un 5-ciclo simétrico,  $C$  debe tener una diagonal. Como para cualquier diagonal del 5-ciclo simétrico  $C$  existe un 4-ciclo en  $D$ , por la proposición 3.10 se tiene que  $D$  es una digráfica completa.

Como los casos son exhaustivos, entonces, el resultado se cumple. □

**Lema 3.7.** Si  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva tal que cualquier ciclo  $C$  en  $D$  cumple que  $\ell(C) \equiv_3 0$ , entonces  $D$  es un 3-ciclo extendido.

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva tal que cualquier ciclo  $C$  en  $D$  tiene longitud  $\ell(C) \equiv_3 0$ . Como cualquier ciclo  $C$  en  $D$  tiene longitud  $\ell(C) \equiv_3 0$ , entonces  $D$  es una digráfica cíclicamente 3-partita por el teorema 2.1.

Supongamos que  $\{V_0, V_1, V_2\}$  es la partición cíclica de  $D$ . Como  $D$  es fuerte, entonces para cualquier

par de vértices distintos  $v_i \in V_i$ ,  $v_{i+1} \in V_{i+1}$  (índices módulo 3) con  $i \in \mathbb{Z}_3$ , tenemos que existe una  $v_i v_{i+1}$ -trayectoria en  $D$ .

Por otra parte, como  $D$  es 4-transitiva por el lema 2.6 se tiene que  $d(v_i, v_{i+1}) \leq 3$ . Como  $D$  es cíclicamente 3-partita, entonces  $d(v_i, v_{i+1}) \equiv_3 1$ , ya que las flechas se mueven cíclicamente por la 3-partición, de esta forma  $d(v_i, v_{i+1}) = 1$ , en otras palabras,  $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ . Como los vértices fueron escogidos arbitrariamente, entonces  $V_i \mapsto V_{i+1}$  para toda  $i \in \mathbb{Z}_3$  (índices módulo 3). Por lo tanto  $D$  es un 3-ciclo extendido (ver figura 3.12).  $\square$

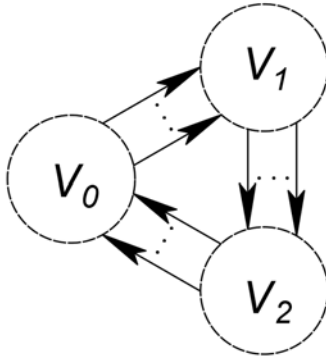


Figura 3.12

**Lema 3.8.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva tal que cualquier ciclo  $C$  en  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_3 0$ , excepto por las flechas simétricas.*

*Si  $D$  tiene circunferencia  $\text{circ}(D) \geq 3$ , tiene flechas simétricas y  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas entonces  $D$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$ . Más aún,  $\text{circ}(D) = 3$  y para cualquier flecha simétrica  $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ , con  $v_i \in V_i$  y  $v_{i+1} \in V_{i+1}$  (los subíndices tomados módulo 3), se tiene que  $|V_i| = 1$  ó  $|V_{i+1}| = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva tal que cualquier ciclo  $C$  en  $D$  tiene longitud  $\ell(C) \equiv_3 0$ , excepto por las flechas simétricas.

Supongamos que  $D$  tiene circunferencia  $\text{circ}(D) \geq 3$ , tiene flechas simétricas y  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas. Como  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas, por el teorema 2.2 podemos encontrar una orientación fuerte de  $D$ , digamos  $H$ . Como  $D$  tiene flechas simétricas, entonces  $H$  es una subdigráfica propia de  $D$  ya que  $H$  es asimétrica. Como cualquier ciclo  $C$  en  $H$  es tal que  $\ell(C) \equiv_3 0$  (ya que  $H$  es subdigráfica de  $D$ ), se sigue del teorema 2.1 que  $H$  es una subdigráfica generadora de  $D$  la cual es cíclicamente 3-partita.

**Afirmación.**  *$H$  es 4-transitiva.*

Sea  $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots)$  una 4-trayectoria en  $H$ . Como  $D$  es 4-transitiva entonces  $(u_0, u_4) \in F(D)$ . Recordemos que cualquier flecha asimétrica de  $D$  también está en  $H$  y cualquier flecha simétrica  $(x, y) \in F(D)$ , se tiene que  $(x, y) \in F(H)$  ó  $(y, x) \in F(H)$ . Como  $H$  es cíclicamente 3-partita, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $u_0 \in V_0$ , por lo tanto  $u_i \in V_i$  para cada  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  (índices módulo 3) así,  $u_4 \in V_1$ . Entonces  $(u_4, u_0) \notin F(H)$  lo que implica que  $(u_0, u_4) \in F(H)$ . Por lo tanto, la afirmación es cierta.

Como  $H$  es 4-transitiva y es cíclicamente 3-partita, se sigue entonces del lema 3.7 que  $H$  es un 3-ciclo extendido.

Por otro lado, supongamos sin pérdida de generalidad que  $(v_2, v_0) \in F(D)$  es una flecha simétrica, con  $v_i \in V_i$  para  $i \in \{0, 2\}$  y supongamos que  $|V_i| \geq 2$ , para cada  $i \in \{0, 2\}$ . Consideremos  $v_0 \neq v'_0$  con  $v'_0 \in V_0$  y los vértices arbitrarios  $v_1 \in V_1$ ,  $v'_2 \in V_2$  con  $v_2 \neq v'_2$ . De esta manera,  $(v_2, v'_0, v_1, v'_2, v_0, v_2)$  es un 5-ciclo en  $D$ , contrario a nuestra suposición de que todo ciclo  $C$  en  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_3 0$ . Así,  $|V_i| = 1$ , para alguna  $i \in \{0, 2\}$ . Por último recordemos que  $H$  es una orientación de  $D$  y  $H$  es un 3-ciclo extendido, por lo tanto  $D$  es un 3-ciclo extendido, salvo flechas simétricas, que sabemos que si existen en  $D$ , de hecho probamos que alguna de las clases de la partición consiste de un único vértice, por lo tanto el ciclo más grande que puede existir en  $D$  es de longitud 3 (de lo contrario pasaría dos veces por el conjunto unitario de la partición cíclica). Como  $V_i \neq \emptyset$  para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ , por ser  $\{V_0, V_1, V_2\}$  una partición, entonces  $(v_0, v_1, v_2, v_0)$  es un 3-ciclo en  $D$ , con  $v_i \in V_i$  para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ , por lo tanto  $\text{circ}(D) = 3$  (ver figura 3.13).  $\square$

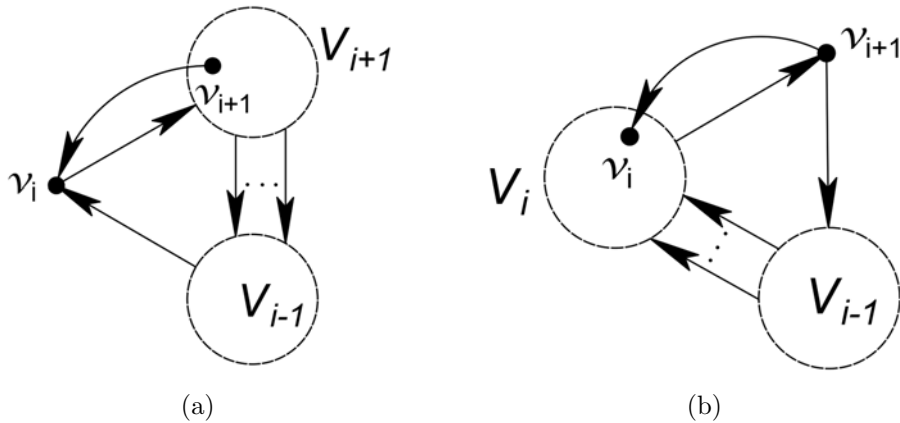


Figura 3.13

**Lema 3.9.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva tal que cualquier ciclo  $C$  en  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_3 0$ , excepto por las flechas simétricas.*

*Si  $D$  tiene circunferencia  $\text{circ}(D) \geq 3$ , tiene flechas simétricas,  $UG(D)$  no es 2-conexa por aristas y  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  una partición de  $V(D)$  tal que para cualquier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $UG(D)[S_i]$  es una subgráfica maximal por contención con la propiedad de ser 2-conexa por aristas en  $UG(D)$ , entonces  $S_i = \{u_i\}$  para cualquier  $2 \leq i \leq n$ ,  $D[S_1]$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$  y hay un vértice (sin pérdida de generalidad)  $v_0 \in V_0$  tal que  $\{(v_0, u_j), (u_j, v_0)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $2 \leq j \leq n$ .*

*Más aún,  $\text{circ}(D) = 3$ ,  $|V_0| = 1$  y  $D[S_1]$  tiene la estructura descrita en los lemas 3.7 ó 3.8.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica fuerte 4-transitiva tal que cualquier ciclo dirigido  $C$  en  $D$  tiene longitud  $\ell(C) \equiv_3 0$ , excepto por las flechas simétricas.

Supongamos que  $D$  tiene circunferencia  $\text{circ}(D) \geq 3$ , tiene flechas simétricas,  $UG(D)$  no es 2-conexa por aristas y  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  como en las hipótesis. Por comodidad de notación llamaremos  $G = UG(D)$ .

**Afirmación 1.**  $\text{circ}(D) = 3$ .

Para probar esta afirmación supongamos que existe un ciclo  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, x_0)$  tal que  $q > 3$  en  $D$ . Como  $G$  no es 2-conexa por aristas, entonces  $V(C) \neq V(D)$ , así  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$ .

Veamos ahora que toda arista  $\{u, v\} \in A(G)$  está en un ciclo de  $G$  analizando los siguientes casos:

1. Si ambos vértices de la arista están en el ciclo  $C$ , es decir, si  $u \in V(C)$  y  $v \in V(C)$ , entonces  $(v, C, u, v)$  es un ciclo en  $UG(D)$  tal que pasa por la arista  $\{u, v\}$ .
2. Si un vértice de la arista está en el ciclo  $C$  y el otro no, dicho de otra forma, si  $u \in V(C)$  y  $v \in V(D) \setminus V(C)$ , entonces  $u = x_i$  para alguna  $i \in \{0, \dots, q-1\}$  y  $(u, v) \in F(D)$  ó  $(v, u) \in F(D)$ , analicemos que pasa en cada caso:
  - a) Si  $(u, v) \in F(D)$ , entonces como  $(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i = u, v)$  es una 4-trayectoria en  $D$  (módulo  $q$ ), ya que  $q > 3$  y  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ . Como  $D$  es 4-transitiva, entonces  $(x_{i-3}, v) \in F(D)$  y  $x_{i-3} \neq x_i$ . De igual manera  $\{v, x_{i-3}\} \in A(G)$  ya que  $(x_{i-3}, v) \in F(D)$ . Por lo tanto  $(v, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i = u, v)$  es un ciclo en  $UG(D)$  tal que pasa por la arista  $\{u, v\}$ .
  - b) Si  $(v, u) \in F(D)$ , entonces como  $(v, u = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$  es una 4-trayectoria en  $D$  (módulo  $q$ ), ya que  $q > 3$  y  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ . Como  $D$  es 4-transitiva, entonces  $(v, x_{i+3}) \in F(D)$  y  $x_{i+3} \neq x_i$ . De igual manera  $\{x_{i+3}, v\} \in A(G)$  ya que  $(v, x_{i+3}) \in F(D)$ . Por lo tanto  $(v, u = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, v)$  es un ciclo en  $UG(D)$  tal que pasa por la arista  $\{u, v\}$ .
3. Si ambos vértices de la arista no están en el ciclo, es decir,  $u \in V(D) \setminus V(C)$  y  $v \in V(D) \setminus V(C)$ . Recordando que  $D$  es fuerte, por el lema 2.10 existe al menos una  $vC$ -flecha, digamos  $(v, x_i) \in F(D)$ , para alguna  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ . Análogamente existe una  $Cu$ -flecha, digamos  $(x_j, u) \in F(D)$ , para alguna  $j \in \{0, \dots, q-1\}$ . Por lo tanto,  $(v, x_i, C, x_j, u, v)$  es un ciclo en  $G$  tal que pasa por la arista  $\{u, v\}$ .

De los anteriores casos concluimos que todas las aristas de  $G$  están contenidas en algún ciclo de  $G$ , por el teorema 1.1  $G$  es 2-conexa por aristas, lo cual contradice el hecho de que  $G$  no es 2-conexa por aristas. Por lo tanto  $\text{circ}(D) \leq 3$ , lo que implica que  $\text{circ}(D) = 3$ , probando la afirmación.

**Afirmación 2.**  $D[S_1]$  es fuerte.

Sea  $\{u, v\} \subseteq S_1$  con  $u \neq v$ , como  $D$  es fuerte, existe una  $uv$ -trayectoria digamos  $P = (u = x_0, \dots, x_m = v)$  en  $D$ .

Ahora probaremos que  $P$  es una  $uv$ -trayectoria en  $D[S_1]$ . Consideremos  $H$  la gráfica tal que  $V(H) = V(P) \cup S_1$  y  $A(H) = A(UG(P)) \cup A(G[S_1])$  (ver figura 3.14).

Procedamos a probar que  $H \subseteq G[S_1]$ . Sea  $\{x, y\} \in A(H)$ , primeramente veremos que  $\{x, y\}$  pertenece a un ciclo de  $H$ , analicemos los casos para esta arista:

- Si  $\{x, y\} \in A(G[S_1])$ , como  $G[S_1]$  es 2-conexa por aristas, entonces  $\{x, y\}$  pertenece a un ciclo de  $G[S_1]$  y además  $G[S_1] \subseteq H$ , por lo tanto  $\{x, y\}$  pertenece a un ciclo de  $H$ .
- Si  $\{x, y\} \in A(UG(P)) \setminus A(G[S_1])$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $(x, y) = (x_l, x_{l+1})$  para alguna  $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ; así sean  $j_1 = \max \{s \in \{0, 1, \dots, l\} | x_s \in S_1\}$  y  $j_2 = \min \{s \in \{l+1, \dots, m\} | x_s \in S_1\}$  los cuales existen ya que  $\{x_0, x_m\} \subseteq S_1$ . Como  $\{x_{j_1}, x_{j_2}\} \subseteq S_1$  y  $G[S_1]$  es 2-conexa por aristas, se tiene que existe una  $x_{j_2}x_{j_1}$ -trayectoria digamos  $T$  en  $G[S_1]$  la cual no pasa por  $\{x, y\}$ , por lo tanto la trayectoria  $Q = (y = x_{l+1}, P, x_{j_2}, T, x_{j_1}, P, x_l = x)$  en  $G[S_1]$  es una  $xy$ -trayectoria que no pasa por la arista  $\{x, y\}$  en  $H$  (por elección de  $x_{j_1}$  y de  $x_{j_2}$ ). Por lo tanto, la arista  $\{x, y\}$  pertenece al ciclo  $(x, y, Q, x)$  en  $H$ .

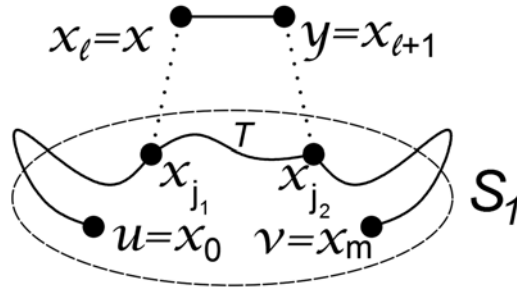


Figura 3.14

De los anteriores casos concluimos que toda arista de  $H$  pertenece a un ciclo, además  $H$  es conexa ya que la digráfica  $H$  es el resultado de pegarle una  $uv$ -trayectoria a la gráfica conexa  $D[S_1]$ , donde  $\{u, v\} \subseteq S_1$ , entonces por el lema 1.2  $H$  es 2-conexa por aristas. Se sigue de la maximalidad de  $G[S_1]$  que  $H \subseteq G[S_1]$ . Entonces  $V(P) \subseteq S_1$  y  $P \subseteq D[S_1]$ , por lo tanto  $D[S_1]$  es fuerte.

De manera análoga para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  se puede probar que  $S_i$  es fuerte.

Como  $\text{circ}(D) = 3$ , podemos considerar un 3-ciclo  $\mathcal{C}$  en  $D$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $V(\mathcal{C}) \subseteq S_1$ , con  $S_1$  como en las hipótesis del lema presente.

**Afirmación 3.**  $D[S_1]$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$ , más aún  $|V_0| = 1$  y  $D[S_1]$  tiene la estructura descrita en los lemas 3.8 ó 3.9.

Como  $D[S_1]$  es fuerte, 4-transitiva, cualquier ciclo  $C'$  en  $D[S_1]$  es tal que  $\ell(C') \equiv_3 0$  (porque  $D[S_1] \subseteq D$ ) salvo las flechas simétricas y  $G[S_1]$  es 2-conexa por aristas, dependiendo de la existencia de flechas simétricas en  $D[S_1]$ , podemos aplicar el lema 3.7 ó el lema 3.8 a  $D[S_1]$ . De cualquier forma  $D[S_1]$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$  y la estructura descrita en el lema 3.7 ó el lema 3.8, si hay flechas simétricas o no respectivamente.

Si  $|V_i| \geq 2$ , para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ , entonces existe  $\{v_i, v'_i\} \subseteq V_i$  con  $v_i \neq v'_i$  para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ , de esta forma  $(v_0, v_1, v_2, v'_0, v'_1, v'_2, v_0)$  es un ciclo de longitud estrictamente mayor que 3, que contradice el hecho de que  $\text{circ}(D) = 3$ . Por lo tanto  $|V_i| = 1$  para alguna  $i \in \{0, 1, 2\}$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $V_0 = \{v_0\}$  y con esto termina la prueba de la afirmación 3.

**Afirmación 4.**  $|S_i| = 1$  para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

Sean  $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_2, v_0)$  un 3-ciclo en  $S_1$ , con  $v_i \in V_i$  para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$  y  $\{S_1, \dots, S_n\}$  como en las hipótesis. Notemos que  $S_i \cap S_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , de lo contrario podemos considerar la gráfica  $G_{i,j}$  tal que  $V(G_{i,j}) = S_i \cup S_j$  y  $A(G_{i,j}) = A(G[S_i]) \cup A(G[S_j])$ , la cual sería una gráfica conexa y además todas sus aristas están en un ciclo, así del lema 1.2 se sigue que  $G_{i,j}$  es 2-conexa por aristas y aparte  $G_{i,j}$  es subgráfica generadora de  $G[S_i \cup S_j]$ , por lo tanto  $G[S_i \cup S_j]$  sería una gráfica 2-conexa por aristas, contradiciendo la maximalidad de  $S_i$  y  $S_j$ .

Si  $|S_i| > 1$  para alguna  $2 \leq i \leq n$ , entonces  $D[S_i]$  debe contener un ciclo de longitud 2 ó 3, digamos  $C_i$ .

Como  $D$  es fuerte para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$  existe una  $C_i\mathcal{C}$ -trayectoria, de igual manera si  $k = 4$ ,

entonces  $(k - 1) = 3$  es primo y  $\mathcal{C}$  es un  $(k - 1)$ -ciclo.

- Si  $\ell(C_i) = 2$  para alguna  $i \in \{2, \dots, n\}$ , entonces se sigue del corolario 2.3 que  $C_i \rightarrow \mathcal{C}$ .
- Si  $\ell(C_i) = 3$  para alguna  $i \in \{2, \dots, n\}$ , entonces se sigue del corolario 2.3 que existen dos  $C_i\mathcal{C}$ -flechas tal que no comparten ninguno de sus vértices.

De lo anterior vemos que existen al menos dos  $S_iS_1$ -flechas en  $D$ , tal que son ajenas por vértices, dicho de otra manera, existe  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$  dos  $S_iS_1$ -flechas en  $D$  tal que  $u_1 \neq u_2$  y  $v_1 \neq v_2$ , como se muestra en la figura 3.15a. Para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  podemos considerar la gráfica  $G'_i$  tal que  $V(G'_i) = S_i \cup S_1$  y  $A(G'_i) = A(G_{i,1}) \cup \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ . Notamos que  $G'_i$  es conexa y aparte cada una de sus flechas pertenece a algún ciclo, pero esto contradice la maximalidad de  $G[S_1]$  y  $G[S_i]$  ya que  $G[S_1 \cup S_i]$  sería 2-conexa por aristas.

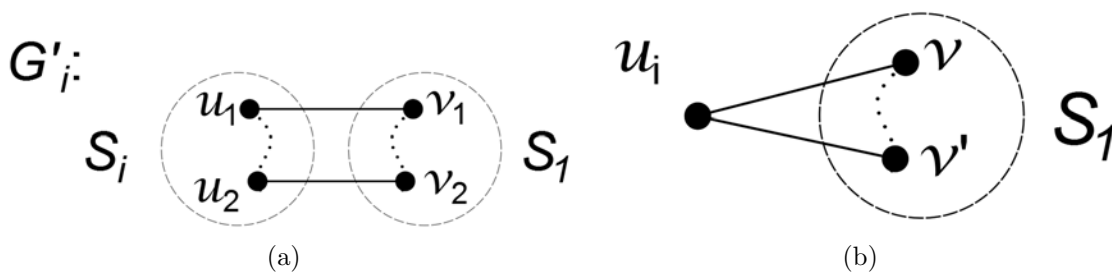


Figura 3.15

Por lo tanto  $|S_i| = 1$  para cualquier  $2 \leq i \leq n$ , es decir,  $S_i = \{u_i\}$  para cualquier  $2 \leq i \leq n$ , probando la afirmación 4.

**Afirmación 5.** Existe un único vértice  $v \in S_1$  tal que  $\{(u_i, v), (v, u_i)\} \subseteq F(D)$  para toda  $i \in \{2, \dots, n\}$ , más aún  $v = v_0$  para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

Ahora, sea  $P'$  una  $u_iS_1$ -trayectoria de longitud mínima en  $D$  para  $2 \leq i \leq n$ . Si  $\ell(P') > 1$ , entonces  $\ell(P') = 2$  ó  $\ell(P') = 3$ , ya que el  $diam(D) \leq 3$  por el lema 2.6.

1. Si  $\ell(P') = 2$ , entonces existe  $u_j$  tal que  $1 < i \neq j \leq n$  y  $P' = (u_i, u_j, v)$  para algún  $v \in S_1$ . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $v \in V_1$ ; como  $\{(v, v_2), (v_2, v_0)\} \subseteq F(D)$  (porque  $\{V_0, V_1, V_2\}$  es una partición cíclica de  $S_1$ ) para algunos  $v_2 \in V_2$  y  $v_0 \in V_0$ . Entonces  $(u_i, u_j, v, v_2, v_0)$  es una trayectoria de longitud 4 en  $D$ , y la 4-transitividad de  $D$  implica que  $(u_i, v_0) \in F(D)$ , contradiciendo la minimalidad de  $P'$ .
2. Si  $\ell(P') = 3$ , entonces procediendo de manera análoga al caso anterior llegamos a la contradicción de la minimalidad de  $P'$ .

Por lo tanto  $d(u_i, S_1) = 1$ . Dualizando el resultado obtenemos por la observación 2.1 que  $d(S_1, u_i) = 1$  para cualquier  $2 \leq i \leq n$ , por lo tanto existe una  $S_1u_i$ -flecha y una  $u_iS_1$ -flecha para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

Sea  $i \in \{2, \dots, n\}$  y supongamos que  $(u_i, v) \in F(D)$  para algún  $v \in S_1$ . Como existe una  $S_1S_i$ -flecha, entonces existe  $v' \in S_1$  tal que  $(v', u_i) \in F(D)$ .

Si  $v' \neq v$  entonces notamos que  $G[S_1 \cup S_i]$  es 2-conexa por aristas, como se muestra en la figura 3.15b ya que todas sus aristas pertenecen a un ciclo, lo que contradice la maximalidad de las



digráficas  $G[S_i]$  con la propiedad de ser 2-conexa por aristas, para cualquier  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces  $(v, u_i) \in F(D)$ . De lo anterior concluimos que **si  $(u_i, v) \in F(D)$  para algún vértice  $v \in S_1$ , entonces  $(v, u_i) \in F(D)$  y no existe  $v' \in S_1 \setminus \{v\}$  tal que  $(v', u_i) \in F(D)$ .**

Recordemos que hemos supuesto, sin pérdida de generalidad que  $|V_0| = 1$ , ahora analicemos como deben de ser las flechas entre  $S_1$  y  $u_i$  para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

Si  $|V_j| \geq 2$  y  $\{(v_j, u_i), (u_i, v_j)\} \subseteq F(D)$  para algún  $i \in \{2, \dots, n\}$  y algún  $j \in \{0, 1, 2\}$ , con  $v_j \in V_j$ . Podemos considerar  $v'_j \in V_j \setminus \{v_j\}$  y  $v_l \in V_l$ , con  $l \in \{j, j+1, j+2\}$  (índices módulo 3), implicando que  $(v'_j, v_{j+1}, v_{j+2}, v_j, u_i)$  es una 4-trayectoria en  $D$ . Por lo tanto  $(v'_j, u_i) \in F(D)$  y además  $(u_i, v_j) \in F(D)$ , con  $v_j \neq v'_j$  lo que contradice que  $v_j = v'_j$ .

De esta forma, **si existe una  $S_i V_j$ -flecha en  $D$ , debe ser el caso que  $|V_j| = 1$ .**

Supongamos que existe una  $S_{i_1} V_{j_1}$ -flecha y una  $S_{i_2} V_{j_2}$ -flecha, donde  $\{i_1, i_2\} \subseteq \{2, \dots, n\}$ , con  $i_1 \neq i_2$ , y  $\{j_1, j_2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$  con  $j_1 \neq j_2$ .

Como  $\{j_1, j_2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$ , con  $j_1 \neq j_2$ , entonces  $j_1$  y  $j_2$  son consecutivos. Como  $\overleftarrow{D}$  cumple todas las hipótesis supongamos sin pérdida de generalidad que  $j_1 = 0$  y  $j_2 = 1$ .

Por lo anterior sabemos que  $V_0 = \{v_0\}$ ,  $V_1 = \{v_1\}$  y  $\{(v_0, u_{i_1}), (u_{i_1}, v_0), (v_1, u_{i_2}), (u_{i_2}, v_1)\} \subseteq F(D)$ . Consideremos  $v_2 \in V_2$  y la 4-trayectoria  $(u_{i_2}, v_1, v_2, v_0, u_{i_1})$  en  $D$ . Por la 4-transitividad de  $D$  implica que  $(u_{i_2}, u_{i_1}) \in F(D)$ . Entonces  $(u_{i_2}, v_1, v_2, v_0, u_{i_1}, u_{i_2})$  es un ciclo en  $G$ , lo que contradice la maximalidad de  $G[S_{i_1}]$  y  $G[S_{i_2}]$  con la propiedad de ser 2-conexa por aristas.

Sabemos que existe una  $S_i S_1$ -flecha para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ , entonces si existe  $S_{i_1} V_{j_1}$ -flecha y una  $S_{i_2} V_{j_2}$ -flecha debe ser el caso que  $j_1 = j_2$ , para cualquier pareja  $\{i_1, i_2\} \subseteq \{2, \dots, n\}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $j_1 = 0 = j_2$ . Probando la afirmación 5.

De las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 5 se concluye el presente lema. En la figura 3.16 se muestra un ejemplo de la digráfica descrita en este lema.  $\square$

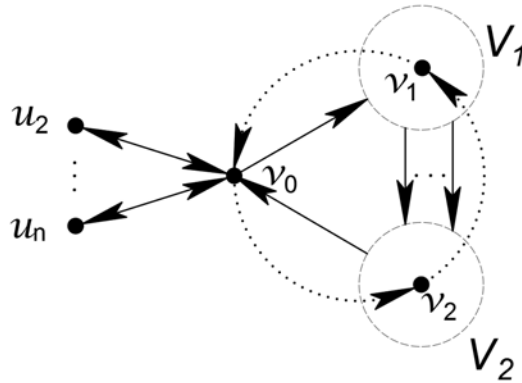


Figura 3.16

Como podemos darnos cuenta, para poder caracterizar a las digráficas fuertes 4-transitivas hemos desglosado nuestros casos en lemas dependiendo de la longitud del ciclo mas grande contenido en  $D$ .

El lema final, antes de la caracterización trabaja con digráficas fuertes 4-transitivas con circunferencia 2. Como veremos sólo hay dos posibilidades de tales digráficas.

**Lema 3.10.** Si  $D$  es una digráfica fuerte 4-transitiva con circunferencia 2, entonces  $D$  es una biorientación completa de la estrella  $K_{1,n}$ , con  $n \geq 1$  ó una biorientación completa de la doble estrella  $E_{n,m}$ .

*Demostración.* Si  $D$  es una digráfica fuerte con circunferencia 2, entonces  $D$  es bipartita (porque no tiene ciclos de longitud impar). Veamos que cualquier flecha de  $D$  es simétrica.

Si suponemos que existe  $(u, v) \in F(D)$  tal que  $(v, u) \notin F(D)$ . Como  $D$  es fuerte existe una  $vu$ -trayectoria, digamos  $P$ . Notamos que  $(u, v, P, u)$  es un ciclo dirigido de longitud mayor o igual a 3, ya que  $\ell(P) > 1$ , lo cual contradice que  $\text{circ}(D) = 2$ . Por lo tanto cualquier flecha de  $D$  es simétrica y  $D = \overleftrightarrow{UG}(D)$ .

Como  $\text{circ}(D) = 2$  entonces  $UG(D)$  no tiene ciclos y como  $D$  es fuerte entonces  $UG(D)$  es conexa, por lo tanto  $UG(D)$  es un árbol.

Ya que  $D$  es fuerte y 4-transitiva, entonces por el lema 2.6 se tiene que el  $\text{diam}(D) \leq 3$  y por lo tanto  $UG(D)$  tiene diámetro menor o igual a 3. Analicemos los casos sobre el diámetro de  $UG(D)$ :

1. Si  $\text{diam}(UG(D)) = 0$ , entonces sólo hay un árbol de diámetro 0 el cual es  $K_1$ , pero  $\overleftrightarrow{K_1}$  no tiene circunferencia 2.
2. Si  $\text{diam}(UG(D)) = 1$ , entonces sólo existe un árbol de diámetro 1 el cual es  $K_2 \cong K_{1,1}$ .
3. Si  $\text{diam}(UG(D)) = 2$ , entonces los únicos árboles de diámetro 2 son las estrellas  $E_n$  con  $n \geq 2$ . En la figura 3.17a se muestra como ejemplo  $\overleftrightarrow{K_{1,10}}$ , la biorientación completa de la estrella  $K_{1,10}$ .
4. Si  $\text{diam}(UG(D)) = 3$ , entonces los únicos árboles de diámetro 3 son las doble estrellas  $E_{n,m}$ . En la figura 3.17b se muestra como ejemplo  $\overleftrightarrow{E_{5,3}}$ , la biorientación completa de la doble estrella  $E_{5,3}$ .

De esta forma  $D$  es la biorientación completa de una estrella  $E_n$  o la biorientación completa de una doble estrella  $E_{n,m}$ .

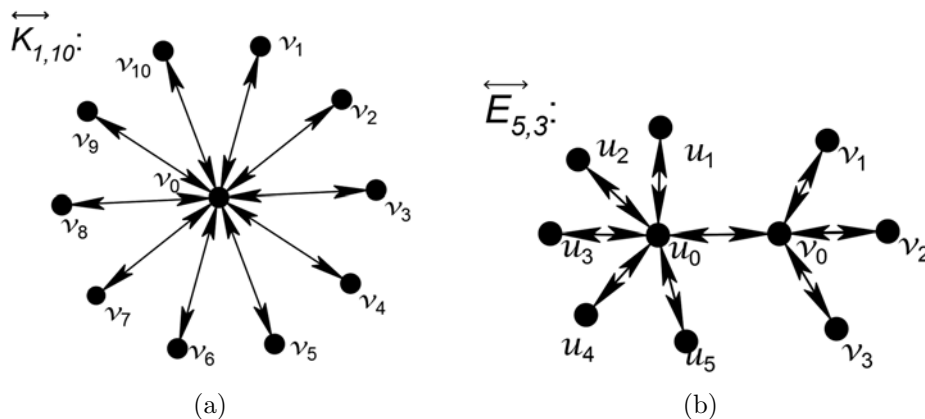


Figura 3.17

□

Ahora daremos, el teorema de caracterización de las digráficas 4-transitivas fuertes.

**Teorema 3.2.** *Sea  $D$  una digráfica 4-transitiva fuerte. Entonces se cumple exactamente una de las siguientes posibilidades:*

1.  $D$  es una digráfica completa.
2.  $D$  es un 3-ciclo extendido.
3.  $\text{circ}(D) = 3$ ,  $UG(D)$  es 2-conexa por aristas,  $D$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$ , existe al menos una flecha simétrica en  $D$  y para cualquier flecha simétrica  $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ , con  $v_i \in V_i$  y  $v_{i+1} \in V_{i+1}$  (los índices tomados módulo 3), se tiene que  $|V_i| = 1$  ó  $|V_{i+1}| = 1$ .
4.  $\text{circ}(D) = 3$ ,  $D$  tiene flechas simétricas,  $UG(D)$  no es 2-conexa por aristas y si  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  es una partición de  $V(D)$  tal que para cualquier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $UG(D)[S_i]$  es una subgráfica maximal por contención con la propiedad de ser 2-conexa por aristas en  $UG(D)$ , entonces  $S_i = \{u_i\}$  para cualquier  $2 \leq i \leq n$ .  $D[S_1]$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$  y hay un vértice (sin pérdida de generalidad)  $v_0 \in V_0$  tal que  $\{(v_0, u_j), (u_j, v_0)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $2 \leq j \leq n$ . Más aún,  $|V_0| = 1$  y  $D[S_1]$  tiene la estructura descrita en (2) ó (3), dependiendo de la existencia de flechas simétricas.
5.  $D$  es un 5-ciclo simétrico.
6.  $D$  es una completa biorientación de la estrella  $K_{1,n}$ , con  $n \geq 3$ .
7.  $D$  es una completa biorientación de la doble estrella  $E_{n,m}$ .
8.  $D$  es una digráfica fuerte tal que  $|V(D)| \leq 4$  y no esta incluida en las anteriores familias.

*Demostración.* Asumamos que  $D$  no es un 5-ciclo simétrico. Procedamos por casos:

- A) Si  $|V(D)| \geq 5$ ,  $D$  contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq 4$  y  $(n, 3) = 1$ .
  1.  $D$  es un 5-ciclo simétrico.
  2. Si  $D$  no es un 5-ciclo simétrico, entonces por lema 3.6  $D$  es completa.
- B) Si cualquier ciclo  $C$  de  $D$  tiene longitud  $\ell(C) \equiv_3 0$  (salvo los de longitud 2), tenemos los siguientes subcasos:
  1. Si no existe una flecha simétrica, entonces podemos concluir por el lema 3.7 que  $D$  es un 3-ciclo extendido.
  2. Si  $D$  contiene ciclos de longitud 2 y 3 entonces, de acuerdo a los lemas 3.8 y 3.9,  $D$  tiene la estructura descrita en (3) ó (4) de este teorema, dependiendo de la conexidad por aristas de  $UG(D)$ .
  3. Si  $D$  tiene circunferencia 2, podemos concluir del lema 3.10 que  $D$  es una biorientación completa de la estrella  $E_n$  con  $n \geq 3$  ó una biorientación completa de la doble estrella  $E_{n,m}$ .

Ya hemos cubierto los casos:

- $D$  es un 5-ciclo simétrico,

- $|V(D)| \geq 5$ ,  $D$  contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq 4$ ,  $D$  no es un 5-ciclo simétrico y además  $(n, 3) = 1$ ,
- cualquier ciclo  $C$  de  $D$  es tal que  $\ell(C) \equiv_3 0$ ,
- existen ciclos de longitud 2 y 3,
- $\text{circ}(D) = 2$ .

En especial los casos cuando  $|V(D)| \geq 5$  y  $D$  contiene algún  $n$ -ciclo con  $n \geq 2$ , analizando todos los posibles casos de la longitud de un ciclo en  $D$ . El único caso que falta es cuando  $D$  es una digráfica fuerte tal que  $|V(D)| \leq 4$  y que no este incluido en las familias antes descritas.

Por lo tanto  $D$  está descrita por uno de los ocho incisos del presente lema.  $\square$



# Capítulo 4

## Digráficas fuertes $k$ -transitivas con un $n$ -ciclo, $n \geq k + 1$

Cuando una digráfica  $D$  fuerte  $k$ -transitiva contiene un ciclo de longitud al menos  $k$ , C. Hernández Cruz y Juan José Montellano Ballesteros caracterizaron la estructura de  $D$  en [10], en este capítulo analizaremos dicho trabajo, para esto utilizaremos resultados de capítulos anteriores, principalmente los relacionados con la existencia de un ciclo.

Los primeros resultados de este capítulo tienen como finalidad estudiar las digráficas con un  $n$ -ciclo, donde  $n \geq k + 2$  y exponer un ciclo de longitud menor a  $n$  y mayor a  $k - 1$ . Esto nos ayudará a caracterizar la estructura de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas que tienen un ciclo de longitud mayor a  $k + 1$ .

Los lemas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 tienen una estructura similar. Consideraremos un ciclo  $C$  de longitud  $k + i$ , con  $2 \leq i \leq k - 1$  (excepto en el lema 4.4), y exhibiremos un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k - 1 \leq \ell(C') < \ell(C)$ . Para hacer esto, consideraremos los distintos casos sobre los posibles valores de  $i$ .

**Lema 4.1.** *Sean  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C$  es un  $n$ -ciclo en  $D$  tal que  $n = k + i$ ,  $k \neq r(i + 1) + i + 2$  para cualquier  $r \in \mathbb{N}$  y  $2 \leq i < \frac{k}{2}$ , entonces existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ . Si  $k = r(i + 1) + i + 2$ , para algún  $r \in \mathbb{N}$ , entonces existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $\ell(C') = k - 1$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $C = (0, 1, 2, \dots, n - 1, 0)$ , con  $n = k + i$  y  $2 \leq i < \frac{k}{2}$ , cabe señalar que aquí 0 representa a la clase del 0 módulo  $n$ , al igual que los demás vértices de  $C$  representan la clase de ese número módulo  $n$  (se escoge  $\mathbb{Z}_n$  por comodidad de notación, para no ir cargando subíndices).

Sea  $r = \max\{s \in \mathbb{Z} : (k - si - s) > i\}$ , observemos que  $\{s \in \mathbb{Z} : (k - si - s) > i\} \neq \emptyset$  ya que  $0 \in \{s \in \mathbb{Z} : (k - si - s) > i\}$  por ser  $k > i$  y  $k = k - 0i - 0$ , además este conjunto está acotado ya que para toda  $s' \in \mathbb{Z}$  tal que  $k \leq s'$  se cumple que  $s' \notin \{s \in \mathbb{Z} : (k - si - s) > i\}$ , por lo que  $r$  está bien definido y además  $r \geq 0$ .

Si  $i \neq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

- (a)  $0 < i < i + 1 \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  por hipótesis,
- (b)  $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq k$ ,
- (c)  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  por (b),

- (d)  $-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq -(i + 1)$  por (a),
- (e)  $k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq k - (i + 1)$  por (d),
- (f)  $i < k - (i + 1)$  por (a),(c) y (e).

De (f) se tiene que  $i < k - (1)i - (1)$ , de esta forma  $1 \in \{s \in \mathbb{Z} : (k - si - s) > i\}$ , concluyendo que **si  $i \neq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  entonces  $r \geq 1$ .**

Recordemos que por la observación 2.2, se tiene que  $\{(j, j+k), (j, j-i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  módulo  $n$  (esta observación la estaremos usando para construir las trayectorias en toda la demostración de este lema, de hecho toda flecha que no esté en el ciclo  $C$  y que sea usada para construir un camino en  $D$  será justificada por esta observación).

A continuación construiremos una serie de caminos en  $D$  moviéndonos por vértices del ciclo  $C$ , la figura 4.1 sirve como apoyo para analizar su construcción.

Definamos para cada  $s$  con  $0 \leq s \leq r - 1$  el camino

$$P_s = (k - si - s + i, k - si - s, C, k - si - s + i - 2, k - si - s - 2, k - si - s - 1),$$

el cual es una trayectoria para cada  $s \in \{0, \dots, r - 1\}$  ya que se tienen las siguientes desigualdades

$$k - si - s - 2 < k - si - s - 1 < k - si - s \leq k - si - s + i - 2 < k - si - s + i,$$

y además si  $0 \leq s \leq r - 1$  se tiene que

$$V(P_s) = \{q \in V(C) : k - si - s - 2 \leq q \leq k - si - s + i\} \setminus \{k - si - s + i - 1\}$$

por lo tanto  $\ell(P_s) = 3 + (i - 2)$  ya que se mueve por  $(i - 2)$  flechas del ciclo y 3 flechas fuera del ciclo.

Definamos también el camino

$$P_r = (k - ri - r + i, k - ri - r, C, k - ri - r + i - 2),$$

el cual es una trayectoria ya que

$$k - ri - r \leq k - ri - r + i - 2 < k - ri - r + i$$

y además

$$V(P_r) = \{q \in V(C) : k - ri - r \leq q \leq k - ri - r + i\} \setminus \{k - ri - r + i - 1\}$$

entonces  $\ell(P_r) = 1 + (i - 2)$  ya que  $P_r$  se mueve por  $(i - 2)$  flechas del ciclo y una flecha fuera del ciclo.

Cabe señalar que cuando  $i = 2$ ,  $(k - si - s, C, k - si - s + i - 2)$  consiste de un sólo vértice para toda  $0 \leq s \leq r$ . Por otro lado vemos que

$$k - si - s - 1 = k - (s + 1)i - (s + 1) + i,$$

así las trayectorias  $P_s$  y  $P_r$  cumplen que  $V(P_{s_1}) \cap V(P_{s_2}) = \begin{cases} \{k - s_1 i - s_1 - 1\} & \text{si } s_2 = s_1 + 1 \\ \emptyset & \text{si } s_2 \neq s_1 + 1 \\ V(P_{s_2}) & \text{si } s_2 = s_1 \end{cases}$

siempre que  $\{s_1, s_2\} \subseteq \{0, 1, \dots, r\}$ .

Por lo tanto,  $P = \bigcup_0^r P_s$  es la trayectoria que empieza en 0 y luego empieza a moverse siguiendo el siguiente patrón:

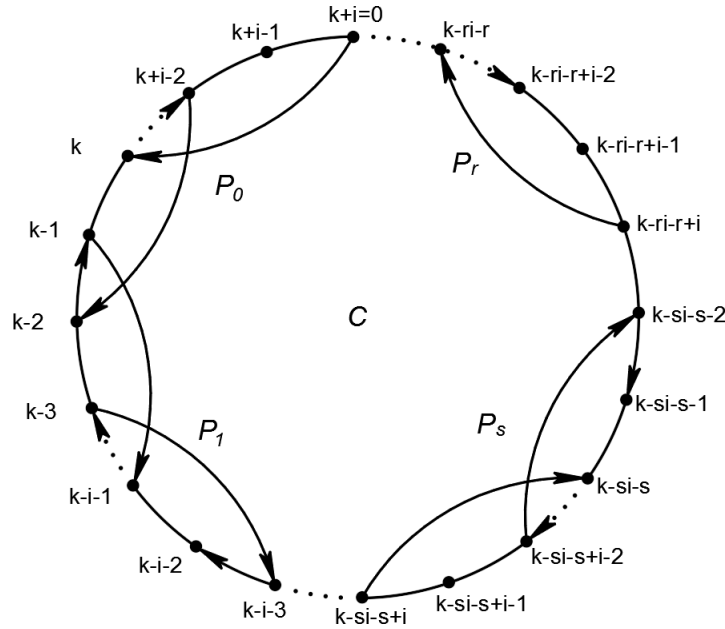


Figura 4.1

1. Retrocede  $i$  lugares por sólo una flecha (retroceder en dirección del ciclo);
2. Avanza  $(i - 2)$  flechas sobre el ciclo;
3. Retrocede  $i$  lugares por sólo una flecha;
4. Avanza una casilla por una flecha y comienza de nuevo.

Por construcción  $P$  es una trayectoria desde 0 hasta  $k - ri - r + i - 2$ , tal que  $V(P) = \{q \in V(C) : k - ri - i \leq q \leq k + i\} \setminus \{k - i - 1, k - ri - r + i - 1\}$ .

Como  $\ell(P_s) = (i + 1)$ , para cada  $s \in \{0, \dots, r - 1\}$  y  $\ell(P_r) = i - 1$  entonces

$$\ell(P) = \sum_{s=0}^r \ell(P_s) = \sum_{s=0}^{r-1} \ell(P_s) + \ell(P_r) = r(i + 1) + i - 1.$$

Observemos que se tienen las siguientes desigualdades:

- A)  $k - (r + 1)i - (r + 1) \leq i < k - ri - r$  por definición de  $r$ ,
- B)  $0 < k - ri - r - i = k - (r + 1)i - r$  por (A),
- C)  $0 \leq k - (r + 1)i - r - 1$  por (B).

Por lo tanto,  $0 \leq k - (r + 1)i - (r + 1) \leq i < k - ri - r$  por A) y C). A continuación analizaremos los posibles casos para  $i$  dada la anterior desigualdad.

1. Si  $i = k - ri - r - 2$ , entonces  $k = r(i + 1) + i + 2$  y

$$C' = (0, P, k - ri - r + i - 2, k - ri - r - 2, 0)$$

es un ciclo dirigido en  $D$  tal que  $\ell(C') = \ell(P') + 2 = [r(i + 1) + i - 1] + 2 = [r(i + 1) + i + 2] - 1 = k - 1$ , como se muestra en la figura 4.2a.



**Observación:** La construcción del ciclo anterior depende de que  $1 \leq r$ . No obstante si  $r = 0$  y  $k = r(i + 1) + i + 2$  entonces  $k = i + 2$  y así  $i = k - 2$ , de esta manera el ciclo

$$C' = (0, k, C, k + i = 0)$$

es tal que  $\ell(C') = 1 + i = k - 1$ .

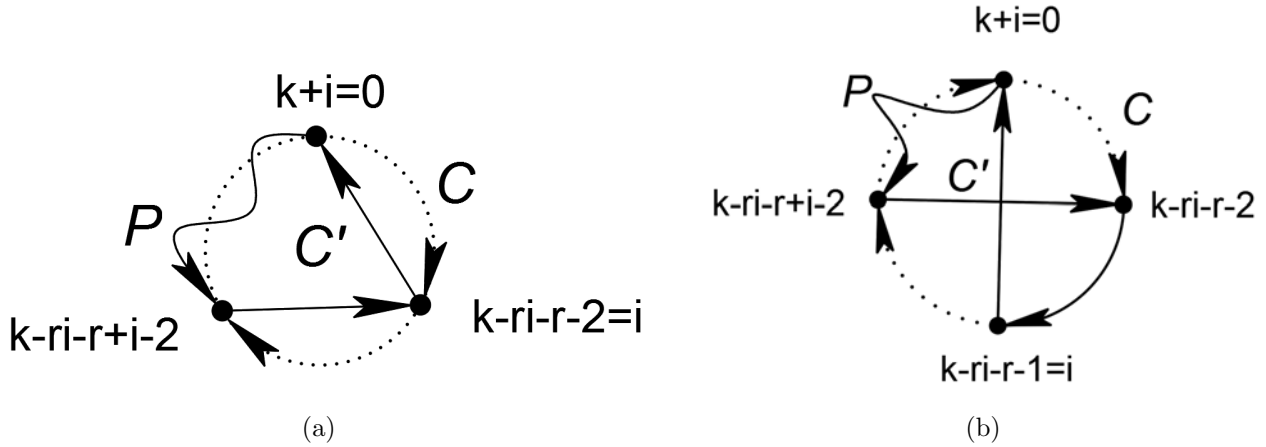


Figura 4.2

2. Si  $i = k - ri - r - 1$ , entonces  $k = r(i + 1) + i + 1$  y

$$C' = (0, P, k - ri - r + i - 2, k - ri - r - 2, k - ri - r - 1, 0)$$

es un ciclo dirigido en  $D$  tal que  $\ell(C') = [r(i + 1) + i - 1] + 3 = [r(i + 1) + i + 1] + 1 = k + 1$ , como se muestra en la figura 4.2b.

Entonces, asumiremos que  $k - (r + 1)i - (r + 1) \leq i \leq k - ri - r - 3$ .

Ahora veremos que existe un ciclo  $C'$  en  $D$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .

Como  $i = k - (r + 1)i - (r + 1) + j$  para alguna  $j$  tal que  $0 \leq j \leq i - 2$ , entonces  $k = (r + 1)(i + 1) + i - j$  para alguna  $j$  tal que  $0 \leq j \leq i - 2$ .

Notemos que  $k = (r + 1)(i + 1) + i - j$  si  $i \neq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ . Sin embargo si  $i = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  tenemos que  $k - s\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - s \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = i$  para toda  $1 \leq s$ , de esta manera si  $s' \geq 1$  entonces  $s' \notin \{s \in \mathbb{N} : k - s\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - s > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = i\}$ , es decir,  $r = 0$ . Además como  $i < \frac{k}{2}$ , se tiene que  $k$  no puede ser par, así  $k = 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 = (0 + 1)(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1) + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 0$ , implicando que  $r = 0$  y  $j = 0$ . Por lo tanto incluiremos el caso cuando  $i = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  en el siguiente argumento.

Aplicamos el lema 2.9 y consideraremos la mayor  $s$  tal que  $x_s + 1 < i$  (las  $x_s$  como se definieron en el lema 2.9). Entonces  $x_{s+1} + 1 \geq i$  y  $(0, 2i - x_{s+1}) \in F(D)$ .

Si  $1 < 2i - x_{s+1}$ , entonces consideramos el ciclo

$$C' = (0, 2i - x_{s+1}, C, k + i = 0) \quad (\text{índices módulo } n)$$

donde  $\ell(C') < n$  ya que  $V(C') \subseteq V(C)$  y  $1 \notin V(C')$  además  $\ell(C') = 1 + [k + i - (2i - x_{s+1})] = k - i + x_{s+1} + 1$ , pero  $k - i + x_{s+1} + 1 \geq k$  si y sólo si  $x_{s+1} + 1 \geq i$ , que tenemos por hipótesis, así  $n > \ell(C') \geq k$ .

Si  $2i - x_{s+1} = 1$ , entonces  $\frac{x_{s+1}+1}{2} = i$  y por definición  $x_{s+1} = 2x_s + 3$ , así  $\frac{2x_s+4}{2} = i$ , de esta forma  $x_s = i - 2$ . Pero  $(0, 2i - x_s) \in F(D)$ , por el lema 2.9, además  $(0, 2i - x_s) = (0, i + 2)$ , entonces podemos considerar los ciclos dirigidos

$$C_1 = (i + 1, 1, C, i + 1), \quad C_2 = (0, i + 2, C, 0)$$

de longitudes  $i + 1$  y  $k - 1$  respectivamente, como en la figura 4.3a.

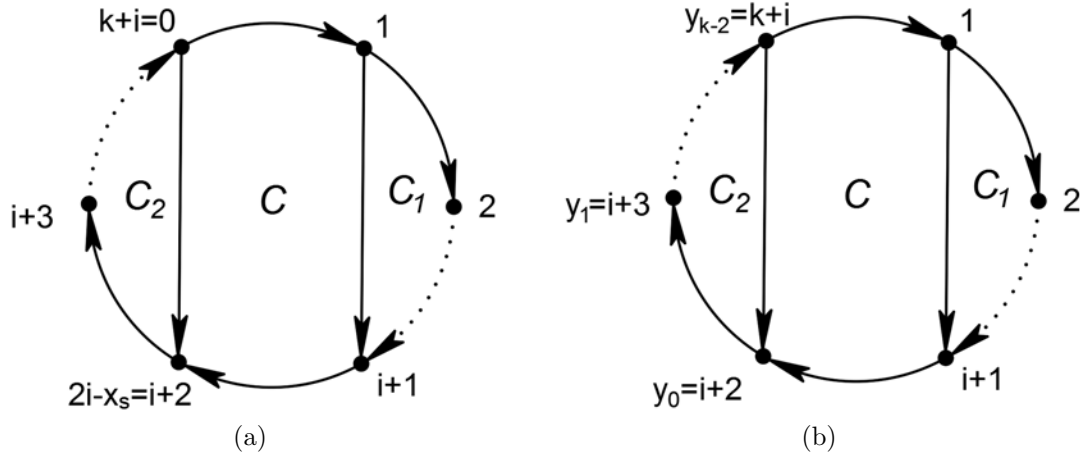


Figura 4.3

Como  $i \leq k - 2$  entonces  $i + 1 \leq k - 1$  además  $(i + 1, i + 2) \in F(D)$ , si renombramos los vértices de  $C_2$  de tal manera que  $i + 2 + l = y_l$  para cada  $l \in \{0, \dots, k - 2\}$  ( $0 \equiv_n n = y_{k-2}$ ), como en la figura 4.3b, entonces podemos concluir por el lema 2.7 que  $i + 1 \rightarrow \{y_j : j \in (k - i - 2)\mathbb{Z}_{k-1}\}$ .

Si llamamos  $t = r + 1$ , entonces  $k = t(i + 1) + i - j$ , así  $i + 1 \rightarrow \{y_j : j \in (t(i + 1) - j - 2)\mathbb{Z}_{k-1}\}$ .

En particular,  $(i + 1, y_{(t(i+1)-j-2)t}) \in F(D)$  ( $t$  módulo  $k - 1$ ). Pero

$$\begin{aligned} t(t(i + 1) - j - 2) &= t(t(i + 1) - j - 2) + t(i + 1) - t(i + 1) = t(t(i + 1) - j - 2 + i + 1) - t(i + 1) \\ &= t(t(i + 1) + i - j - 1) - t(i + 1) \end{aligned}$$

y

$$t(t(i + 1) + i - j - 1) - t(i + 1) \equiv_{k-1} -t(i + 1) = -(t(i + 1) + i - j - 1) + (i - j - 1) \equiv_{k-1} i - j - 1$$

lo anterior ya que  $k - 1 = t(i + 1) + i - j - 1$ .

Por lo tanto  $(i + 1, y_{i-j-1}) \in F(D)$  y como  $y_{i-j-1} = i + 2 + (i - j - 1) = i + 1 + (i - j)$ , entonces  $(i + 1, i + 1 + (i - j)) \in F(D)$  y además

$$C' = (0, C, i + 1, i + 1 + (i - j), C, k + i)$$

es un ciclo en  $D$ , ya que  $0 \leq j \leq i - 2$  (la figura 4.4 sirve como referencia), con  $\ell(C') = (i + 1) + 1 + [(k + i) - (2i + 1 - j)] = k + j + 1 > k$ . Además como  $2 \leq i$  tenemos que  $i + 2 \notin V(C')$  y aparte  $V(C') \subseteq V(C)$  por lo tanto  $k < \ell(C') < n$ , concluyendo el resultado.  $\square$

Prosigamos a analizar el siguiente caso respecto a  $i$ .

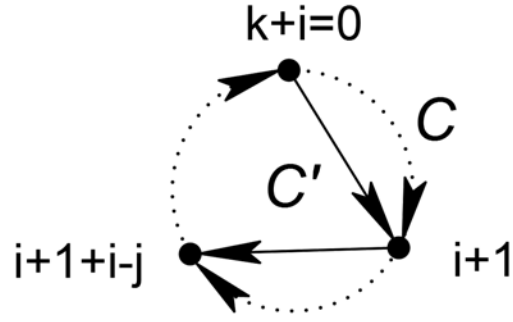


Figura 4.4

**Lema 4.2.** Sea  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C$  es un  $n$ -ciclo en  $D$  tal que  $n = k + i$  y  $\frac{k}{2} \leq i < \frac{2k-5}{3}$ , entonces existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .

*Demostración.* Supondremos que  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$ , con  $n = k + i$  y  $\frac{k}{2} \leq i < \frac{2k-5}{3}$ . Por la observación 2.2,  $\{(j, j+k), (j, j-i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  módulo  $n$  (esta observación la estaremos usando para construir las trayectorias en toda la demostración de este lema, de hecho toda flecha que no esté en el ciclo  $C$  y que sea usada para construir un camino en  $D$  será justificada por esta observación).

Sea entonces el camino

$$C' = (0, k, C, 2i+2, i+2, C, k-1, k-1-i, C, i+1, 1, C, k-i-2, 2k-i-2, C, 0)$$

en  $D[V(C)]$ , la figura 4.5 sirve como referencia. Veamos que  $C'$  es un ciclo analizando las siguientes desigualdades:

- a)  $\frac{k}{2} \leq i$  por hipótesis,
- b)  $k < 2i + 1$  por el inciso anterior,
- c)  $k - i - 1 < i$  por (b),
- d)  $2k - i - 2 < k + i - 1 = n - 1$  por (c),
- e)  $5 \leq k$  por hipótesis,
- f)  $2k + 5 \leq 3k$  por (e),
- g)  $2k - 5 \leq 3k - 10$  por (f),
- h)  $\frac{2k-5}{3} \leq k - \frac{10}{3}$  por (g),
- i)  $i < \frac{2k-5}{3}$  por hipótesis,
- j)  $i < k - \frac{10}{3}$  por (i) y (h),
- k)  $i < k - 3$  por (j),
- l)  $i + 2 < k - 1$  por (k),
- m)  $1 < k - 2 - i$  por (l),

n)  $3i < 2k - 5$  por (j),

$\tilde{n}$ )  $2i + 2 = 3i - i + 2 < 2k - 5 - i + 2 = 2k - i - 3$  por (n).

De las desigualdades (m), (c), (l), (b), ( $\tilde{n}$ ) y (d) obtenemos que

$$0 < 1 < k - i - 2 < k - i - 1 < i + 1 < i + 2 < k - 1 < k < 2i + 1 < 2k - i - 2 < n.$$

Así que,  $C'$  es un ciclo de longitud  $\ell(C') = 5 + [(2i + 2) - k] + [(k - 1) - (i + 2)] + [(i + 1) - (k -$

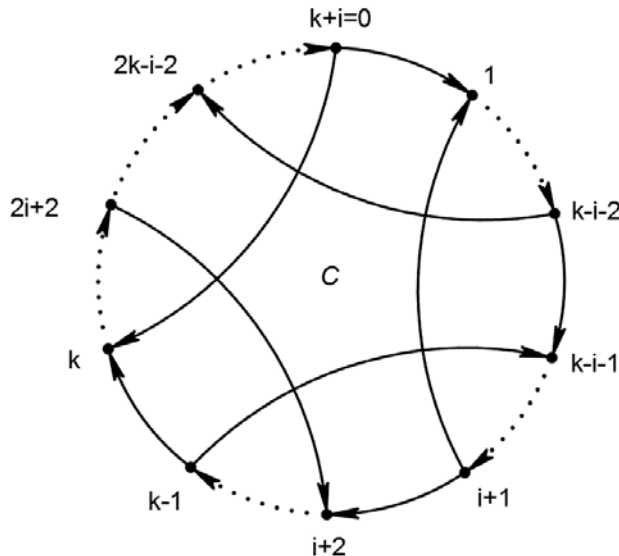


Figura 4.5

$1 - i)] + [(k - i - 2) - 1] + [(k + i) - (2k - i - 2)] = 4i - k + 5$  (se suma un 5 al principio ya que este es el número de diagonales en  $C$  que se utilizan en  $C'$ ).

Como  $2k - i - 3 \notin V(C')$  por ( $\tilde{n}$ ) y  $V(C') \subseteq V(C)$ , entonces  $\ell(C') < n$ . Como  $i \geq \frac{k}{2}$  se tiene que  $\ell(C') = 4i - k + 5 \geq 4(\frac{k}{2}) - k + 5 = k + 5 > k$ .

Para que  $\frac{k}{2} < \frac{2k-5}{3}$  se debe cumplir que  $3k < 4k - 10$ , es decir,  $10 < k$ , entonces esta construcción funciona para  $k \geq 11$ . Por lo tanto, los únicos casos que no hemos cubierto por el lema 4.1 y lo anterior es cuando  $k \leq 10$  y  $i = \frac{k}{2}$ . Como  $i = \frac{k}{2}$ , entonces  $k$  debe ser par, además por hipótesis  $k \geq 5$ , por lo tanto sólo necesitamos considerar los casos  $k \in \{6, 8, 10\}$ .

- Para  $k = 6$  y  $n = 9$ ,  $(0, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 0)$  es el ciclo que buscamos.
- Para  $k = 8$  y  $n = 12$ ,  $(0, 8, 9, 10, 6, 7, 3, 4, 0)$  es el ciclo que buscamos.
- Para  $k = 10$  y  $n = 15$ ,  $(0, 10, 11, 6, 7, 2, 3, 13, 8, 9, 4, 14, 0)$  es el ciclo que buscamos.

□

El siguiente lema utiliza algunos resultados básicos de teoría de números, si se requiere se puede consultar el apéndice A.

**Lema 4.3.** Sean  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C$  es un  $n$ -ciclo dirigido en  $D$  tal que  $n = k + i$  y  $\frac{k}{2} < i = \frac{2k-5}{3}$ , entonces existe un ciclo dirigido  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .

*Demostración.* Sea  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  un ciclo en  $D$  tal que  $n = k + i$  y  $\frac{k}{2} < i = \frac{2k-5}{3}$ .

Si  $i = \frac{2k-5}{3}$ , entonces  $2k - 5 \equiv_3 0$ . Luego  $2k \equiv_3 5$  lo que implica que  $2(2k) \equiv_3 2(5) \equiv_3 10 \equiv_3 1$ , de esta manera  $k \equiv_3 1$ , es decir,  $k = 3d + 1$  para algún  $d \in \mathbb{N}$ . Así,  $i = 2d - 1$  además  $n = k + i = 5d$  y como  $k - 1 = 3d$  y los números 5 y 3 son primos entonces  $(n, k - 1) = d$ .

Por la observación 2.2  $\{(j, j + k), (j, j - i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  módulo  $n$ , en especial como  $i = 2d - 1$  y  $k = 3d + 1$ , entonces  $\{(j, j + 3d + 1), (j, j - 2d + 1)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  módulo  $n$  (esta observación la estaremos usando para construir las trayectorias en toda la demostración de este lema, de hecho toda flecha que no esté en el ciclo  $C$  y que sea usada para construir un camino en  $D$  será justificada por esta observación).

Ahora tenemos dos casos:

- Si  $d$  es par, entonces

$$C' = (0, 3d + 1, C, 3d + \frac{d}{2} + 1, d + \frac{d}{2} + 2, C, 2d + 2, 3, C, \frac{d}{2} + 3, 3d + \frac{d}{2} + 4, C, 4d + 4, 2d + 5, C, 2d + \frac{d}{2} + 5, \frac{d}{2} + 6, C, d + 6, 4d + 7, C, 5d).$$

Es un camino cerrado y si no repitiera vértices salvo el primero y el último sería un ciclo de longitud  $\ell(C') = 7 + 6(\frac{d}{2}) + [5d - (4d + 7)] = 4d > 3d + 1 = k$  (se suma 7 al principio porque son el número de diagonales de  $C$  que utiliza  $C'$ ). Para que  $C'$  sea un ciclo, necesitamos que

$$3 < \frac{d}{2} + 3 < \frac{d}{2} + 6 < d + 6 < d + \frac{d}{2} + 2 < 2d + 2 < 2d + 5 < 2d + \frac{d}{2} + 5 < 3d + 1 < 3d + \frac{d}{2} + 1 < 3d + \frac{d}{2} + 4 < 4d + 4 < 4d + 7 \leq 5d$$

de otra manera  $C'$  repetiría vértices, pero todas las desigualdades se cumplen si  $d \geq 10$  (la figura 4.6a sirve como referencia).

- Si  $d$  es impar, entonces

$$C' = (0, 3d + 1, C, 3d + \frac{d-1}{2} + 1, d + \frac{d-1}{2} + 2, C, 2d + 1, 2, C, \frac{d-1}{2} + 2, 3d + \frac{d-1}{2} + 3, C, 4d + 2, 2d + 3, C, 2d + \frac{d-1}{2} + 3, \frac{d-1}{2} + 4, C, d + 3, 4d + 4, C, 5d)$$

es un camino cerrado y si no repitiera vértices salvo el primero y el último sería un ciclo de longitud  $\ell(C') = 7 + 6(\frac{d-1}{2}) + [5d - (4d + 4)] = 4d > 3d + 1 = k$  (análogamente al caso anterior se suma 7 al principio porque son el número de diagonales de  $C$  que utiliza  $C'$ ). Para que  $C'$  sea un ciclo, necesitamos que

$$2 < \frac{d-1}{2} + 2 < \frac{d-1}{2} + 4 < d + 3 < d + \frac{d-1}{2} + 2 < 2d + 1 < 2d + 3 < 2d + \frac{d-1}{2} + 3 < 3d + 1 < 3d + \frac{d-1}{2} + 1 < 3d + \frac{d-1}{2} + 3 < 4d + 2 < 4d + 4 \leq 5d$$

de otra manera  $C'$  repetiría vértices, pero todas las desigualdades se cumplen si  $d \geq 5$  (la figura 4.6b sirve como referencia).

Necesitamos que  $k > 10$  para que  $\frac{k}{2} < \frac{2k-5}{3}$ , en ambos casos  $d \geq 4$ . Por lo tanto la construcción para el caso  $d$  impar funciona siempre, pero en el caso  $d$  par necesitamos proponer los ciclos para  $d \in \{4, 6, 8\}$ :

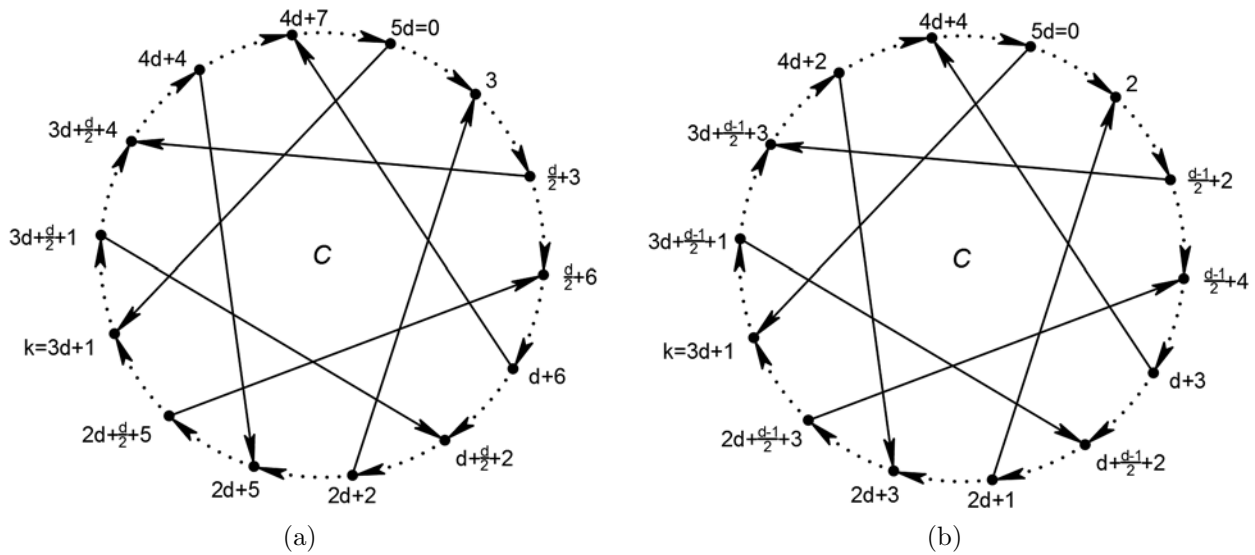


Figura 4.6

- Si  $d = 4$ , entonces  $n = 20$ ,  $k = 15$  y consideramos el ciclo

$$C' = (0, 13, 14, 7, 8, 1, 2, 15, 16, 9, 10, 3, 4, 17, C, 0).$$

- Si  $d = 6$ , entonces  $n = 30$ ,  $k = 19$  y consideramos el ciclo

$$C' = (0, 19, C, 21, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 22, 23, 24, 13, 14, 15, 4, 5, 6, 25, C, 0).$$

- Si  $d = 8$ , entonces  $n = 40$ ,  $k = 25$  y consideramos el ciclo

$$C' = (0, 25, C, 28, 13, C, 16, 1, C, 4, 29, C, 32, 17, C, 20, 5, C, 8, 33, C, 0).$$

Todos los ciclos anteriores cumplen con que  $k = 3d + 1 \leq \ell(C') = 4d < 5d$  y cabe señalar que aunque no se pueden considerar en el caso general, su estructura es similar al ciclo  $C'$  de la prueba para el caso  $d$  par.  $\square$

**Lema 4.4.** Sean  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C$  es un  $n$ -ciclo en  $D$  tal que  $n = k + i$  y  $\frac{2k-2}{3} \leq i$ , entonces existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .

*Demostración.* Sea  $C = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  un  $n$ -ciclo en  $D$  tal que  $n = k + i$  y  $\frac{2k-2}{3} \leq i$ . Por la observación 2.2  $\{(j, j+k), (j, j-i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  módulo  $n$  (esta observación la estaremos usando para construir las trayectorias en toda la demostración de este lema, de hecho toda flecha que no esté en el ciclo  $C$  y que sea usada para construir un camino en  $D$  será justificada por esta observación).

Consideraremos tres casos:

- Si  $k - 1 \leq i$ , entonces  $C' = (0, k, C, k + i = 0)$  es un ciclo tal que  $k \leq i + 1 = \ell(C') < n$ .
- Si  $k - 2 = i$ , entonces  $k = r(i + 1) + i + 2$  con  $r = 0$ , este caso ya lo analizamos en el lema 4.1.

- Si  $\frac{2k-2}{3} \leq i \leq k - 3$ , entonces el camino cerrado

$$C' = (0, k, C, 2i + 1, i + 1, C, k - 1, k - i - 1, C, i, 0)$$

es un ciclo en  $D[V(C)]$  (la figura 4.7 sirve de referencia para la demostración).

Para demostrar esto veamos las siguientes desigualdades:

- $\frac{2k-2}{3} \leq i$  por hipótesis,
- $1 < k$  por hipótesis,
- $\frac{1}{3} < \frac{k}{3}$  por (b),
- $k - 1 = k + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} < k + \frac{k}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4k-4}{3}$  por el inciso (c),
- $\frac{4k-4}{3} \leq 2i$  por el inciso (a),
- $k - 1 < 2i$  por los incisos (e) y (d),
- $k < 2i + 1$  y  $k - i - 1 < i$  por el inciso (f),
- $i \leq k - 3$  por hipótesis de este caso,
- $2i + 1 \leq k - 3 + i + 1 = k + i - 2$  por el inciso (h),
- $2i + 1 < k + i - 1 = n - 1$  por el inciso (i),
- $i + 1 < k - 1$  y  $1 < k - i - 1$  por el inciso (j).

Por los incisos (g), (j), (k) se cumple lo siguiente

$$0 < 1 < k - i - 1 < i < i + 1 < k - 1 < k < 2i + 1 < n - 1$$

y además como  $5 \leq k$ , todas las desigualdades estrictas anteriores tienen sentido, es decir,  $C'$  es un ciclo en  $D[V(C)]$ .

Veamos que  $\ell(C') = 4 + [(2i + 1) - k] + [(k - 1) - (i + 1)] + [i - (k - 1 - i)] = 3i - k + 4$ . Por el inciso (a) tenemos que  $2k - 2 \leq 3i$ , entonces  $k \leq 3i - k + 2 < 3i - k + 4$ , así  $k \leq \ell(C')$ . Por el inciso (j) se tiene que  $2i + 1 \leq k + i - 2$ , implicando que,  $(k + i - 1) \notin V(C')$  y de esa manera  $\ell(C') < n$ . Por lo tanto  $k \leq \ell(C') < n$ .

□

**Teorema 4.1.** Sean  $i \geq 2$  y  $k \geq 5$  enteros y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $n = k + i$  con  $k \neq r(i + 1) + i + 2$  para cualquier  $r \in \mathbb{N}$  y  $C$  es un  $n$ -ciclo en  $D$ , entonces existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ . Si  $k = r(i + 1) + i + 2$  para algún  $r \in \mathbb{N}$ , entonces existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $\ell(C') = k - 1$ .

*Demostración.* Sean  $D$  y  $C$  como en las hipótesis del teorema.

- Si  $k = r(i + 1) + i + 2$  para algún  $r \in \mathbb{N}$ , entonces  $k = i + 2$  (cuando  $r = 0$ ) ó  $i < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  (cuando  $r \geq 1$ ) y por el lema 4.1, se tiene que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $\ell(C') = k - 1$ .
- Si  $k \neq r(i + 1) + i + 2$  para cualquier  $r \in \mathbb{N}$ , tenemos varios subcasos:
  1. Si  $2 \leq i < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  entonces por el lema 4.1, se tiene que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .

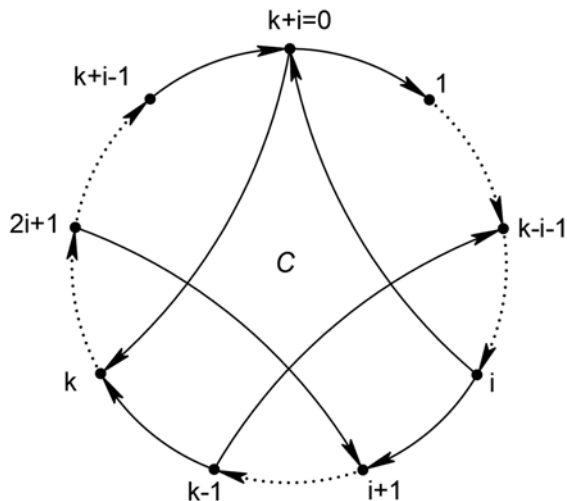


Figura 4.7

2. Si  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq i < \frac{2k-5}{3}$  entonces por el lema 4.2, se tiene que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .
3. Si  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor < i = \frac{2k-5}{3}$  entonces por el lema 4.3, se tiene que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .
4. Si  $\frac{2k-2}{3} \leq i$  entonces por el lema 4.4, se tiene que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ .

De los incisos anteriores concluimos que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $k \leq \ell(C') < n$ , lo cual completa la prueba.

□

**Corolario 4.1.** Sean  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C$  es un  $n$ -ciclo en  $D$  con  $n \geq k + 2$ , entonces  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo, un  $k$ -ciclo o un  $(k + 1)$ -ciclo.

*Demostración.* Procedamos por inducción fuerte sobre  $\ell(C) = n$ .

**Base:** Empezaremos la base en  $n = k + 2$ . Por el teorema 4.1 tenemos que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $\ell(C') = k - 1$  ó  $k \leq \ell(C') < n$ , en otras palabras,  $k - 1 \leq \ell(C') \leq k + 1$ , lo cual prueba la base de inducción.

**Hipótesis de inducción:** Si  $\mathcal{C}$  es un  $m$ -ciclo en  $D$  con  $k + 2 \leq m < n$  entonces  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo, un  $k$ -ciclo o un  $(k + 1)$ -ciclo.

Sea  $C$  un  $n$ -ciclo en  $D$  con  $n \geq k + 3$  entonces por el teorema 4.1 tenemos que existe un ciclo  $C'$  en  $D[V(C)]$  tal que  $\ell(C') = k - 1$  ó  $k \leq \ell(C') < n$ . Tenemos dos casos:

1. Si  $k - 1 \leq \ell(C') \leq k + 1$ , entonces  $\ell(C') \in \{k - 1, k, k + 1\}$ .
2. Si  $k + 2 \leq \ell(C') < n$ , entonces por la hipótesis de inducción  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo, un  $k$ -ciclo o un  $(k + 1)$ -ciclo.



Como en cualquiera de los dos casos  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo, un  $k$ -ciclo o un  $(k + 1)$ -ciclo, concluimos el proceso de inducción.  $\square$

**Lema 4.5.** *Sea  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva fuerte. Si  $D$  contiene un  $k$ -ciclo  $C$ , y  $|V(D)| \geq k + 1$ , entonces  $D$  es una digráfica completa.*

*Demostración.* Al igual que en los anteriores resultados supondremos que  $V(C) = \mathbb{Z}_k$  y  $F(C) = \{(0, 1), (1, 2), \dots, (k - 1, 0)\}$ .

Sabemos que dos números consecutivos siempre son primos relativos, ya que si existiera  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $d$  divide a  $k$  y  $k - 1$ , entonces  $d$  divide a la diferencia  $k - (k - 1) = 1$  y por lo tanto  $d = 1$ , entonces  $(k, k - 1) = 1$ .

Como  $D$  es fuerte y  $(k, k - 1) = 1$ , entonces por la proposición 2.5 y la observación 2.1 se tiene que  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{C}$  y  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{v}$  para toda  $\mathbf{v} \in V(D) \setminus V(C)$ .

Como  $|V(D)| \geq k + 1$ , entonces  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$  y existe  $v \in V(D) \setminus V(C)$ .

- Si  $V(D) \setminus V(C) = \{v\}$  entonces  $v \rightarrow (V(D) \setminus \{v\})$ , ya que  $v \rightarrow V(C)$  y  $V(C) = (V(D) \setminus \{v\})$ .
- Si existe  $u \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $u \neq v$ , entonces  $T = (v, 0, C, k - 2, u)$  es una  $vu$ -trayectoria en  $D$ , tal como se muestra en la figura 4.8a, tal que  $\ell(T) = 1 + k - 2 + 1 = k$  y por la  $k$ -transitividad de  $D$  se tiene que  $(v, u) \in F(D)$ . Así  $\mathbf{v} \rightarrow (V(D) \setminus (V(C) \cup \{v\}))$  para cualquier vértice  $\mathbf{v} \in (V(D) \setminus V(C))$  y como  $v \rightarrow V(C)$ , entonces  $v \rightarrow V(D) \setminus \{v\}$ , para todo vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$ .

De los casos anteriores concluimos que  $\mathbf{v} \rightarrow (V(D) \setminus \{v\})$  para cualquier vértice  $\mathbf{v} \in (V(D) \setminus V(C))$ .

Notamos que para cada  $i \in V(C)$  se tiene que  $C_i = (v, i + 1, C, i - 1, v)$  (índices módulo  $k$ ) es un ciclo en  $D$  tal que  $\ell(C_i) = k$ , con  $i \notin V(C_i)$ , tal como se muestra en la figura 4.8b, y de manera análoga se tiene que  $i \rightarrow (V(D) \setminus \{i\})$  para cualquier vértice  $i \in V(C)$ .

Por lo tanto  $w \rightarrow (V(D) \setminus \{w\})$  para cada  $w \in V(D)$ , en consecuencia  $D$  es una digráfica completa.

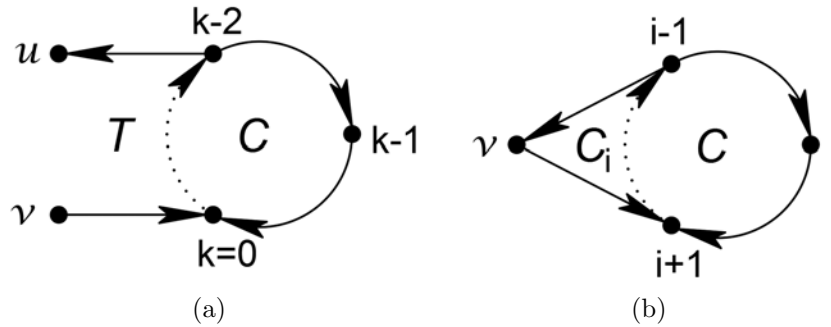


Figura 4.8

$\square$

**Lema 4.6.** *Sea  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica fuerte  $k$ -transitiva. Si  $D$  contiene un  $(k + 1)$ -ciclo y  $|V(D)| \geq k + 2$ , entonces:*

1. Si  $k \equiv_2 0$ , entonces  $D$  es una digráfica completa.
2. Si  $k \equiv_2 1$ , entonces  $D$  es una digráfica completa o una digráfica bipartita completa

*Demostración.* Supondremos que  $V(C) = \mathbb{Z}_{k+1}$  y  $C = (0, 1, 2, \dots, k, 0)$  y por la  $k$ -transitividad de  $D$  se sigue que  $\overleftarrow{C} \subseteq D$ . Supongamos que  $d = (k-1, k+1)$ . Como  $d|k-1$  y  $d|k+1$ , entonces  $d|(k+1) - (k-1) = 2$ , es decir,  $d \in \{1, 2\}$ .

1. Si  $k \equiv_2 0$ , entonces  $k-1 \equiv_2 1 \equiv_2 k+1$  y por ser impares  $(k-1)$  y  $(k+1)$  se tiene que 2 no divide a  $k-1$  ni a  $k+1$ , en otras palabras,  $1 = (k-1, k+1)$ . Por la proposición 2.5 y la observación 2.1, se sigue que  $v \rightarrow C$  y  $C \rightarrow v$  para cualquier  $v \in V(D) \setminus V(C)$ . Notemos que un argumento análogo al usado en el lema 4.5 puede ser usado para probar que  $D$  es una digráfica completa (construyendo una trayectoria de longitud  $k$ , pasando por el ciclo  $C$ , entre cualquier par de vértices de  $V(D) \setminus V(C)$  y viendo que existe un  $(k+1)$ -ciclo en  $D$  tal que no pasa por  $i$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k+1\}$ ).
2. Si  $k \equiv_2 1$ , entonces  $(k-1, k+1) = 2$  ya que  $(k-1) \equiv_2 0 \equiv_2 k+1$ , dicho de otra manera,  $k-1$  y  $k+1$  son pares. Se tiene que  $k-1 = 2q$ , para alguna  $q \in \mathbb{N}$ , donde  $(q, k+1) = 1$ , es decir,  $q$  es una unidad en  $\mathbb{Z}_{k+1}$  y por lo tanto  $q\mathbb{Z}_{k+1} = \mathbb{Z}_{k+1}$  así  $(k-1)\mathbb{Z}_{k+1} = 2q\mathbb{Z}_{k+1} = 2\mathbb{Z}_{k+1}$ . Notemos que  $(X = 2\mathbb{Z}_{k+1}, Y = 1 + 2\mathbb{Z}_{k+1})$  es una bipartición de  $V(C)$ .

Como  $|V(D)| \geq k+2$  sabemos que existe  $v \in V(D) \setminus V(C)$ , por ser fuerte, existen  $T = (v, x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$  una  $vC$ -trayectoria de longitud mínima. Sin pérdida de generalidad, suponemos que llega al vértice  $0 \in V(C)$ , entonces por la proposición 2.4 se tiene que  $v \rightarrow \{v_i : i \in (k-1)\mathbb{Z}_{k+1} + (k-m)\}$ , además  $(k-1)\mathbb{Z}_{k+1} + (k-m) = 2\mathbb{Z}_{k+1} + (k-m)$ , analicemos los casos para la paridad de  $m$ :

- i) Si  $m \equiv_2 1$ , entonces  $k-m \equiv_2 0$  y  $2\mathbb{Z}_{k+1} + (k-m) = 2\mathbb{Z}_{k+1}$ , por lo tanto  $v \rightarrow X$ .
- ii) Si  $m \equiv_2 0$ , entonces  $k-m \equiv_2 1$  y  $2\mathbb{Z}_{k+1} + (k-m) = 2\mathbb{Z}_{k+1} + 1$ , por lo tanto  $v \rightarrow Y$ .

Análogamente por la observación 2.1 y la proposición 2.4 se tiene que  $X \rightarrow v$  ó  $Y \rightarrow v$ .

- I) Supongamos que  $D$  es bipartita con partición  $\{V_1, V_2\}$  en conjuntos independientes. Como  $(0, 1) \in F(D)$  entonces 0 y 1 están en distintas partes de la bipartición, ya que tanto  $V_1$  como  $V_2$  son conjuntos independientes, de hecho este argumento funciona para todas las flechas de  $C$ , por lo tanto sin pérdida de generalidad  $X \subseteq V_1$  y  $Y \subseteq V_2$ . Notemos que no puede pasar que  $X \rightarrow v$  y  $v \rightarrow Y$  simultáneamente, de lo contrario existiría  $v \in V(D)$  tal que  $(0, v) \in F(D)$  y  $(v, 1) \in F(D)$ , por lo tanto  $v \notin V_1$  y  $v \notin V_2$ , es decir,  $\{V_1, V_2\}$  no es una partición de  $D$ , lo cual sería una contradicción (análogamente no puede pasar que  $Y \rightarrow v$  y  $v \rightarrow X$  simultáneamente), así las únicas opciones son las siguientes:  $[v \leftrightarrow X]$  ó  $[v \leftrightarrow Y]$  pero no al mismo tiempo. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $v \leftrightarrow X$ .

Sean  $A = \{v \in V(D) \setminus V(C) : [v \leftrightarrow X]\}$  y  $B = \{v \in V(D) \setminus V(C) : [v \leftrightarrow Y]\}$ . Como  $V_1$  es independiente y  $X \subseteq V_1$ , entonces  $B \subseteq V_1$ . Análogamente  $A \subseteq V_2$ , por lo tanto  $(B \cup X) = V_1$  y  $(A \cup Y) = V_2$ , ya que  $(A \cup B) = V(D) \setminus V(C)$ ,  $(X \cup Y) = V(C)$  y porque  $\{V_1, V_2\}$  es la partición en conjuntos independientes de  $V(D)$ , además sabemos que  $A \leftrightarrow X$  y  $B \leftrightarrow Y$ .

Primero probaremos que  $X \leftrightarrow Y$ . Sea  $y \in Y$  y  $x \in X$ , vértices arbitrarios, si  $y+1 \equiv_{k+1} x$  ó  $y-1 \equiv_{k+1} x$  entonces  $(x, y) \in F(C)$  ó  $(x, y) \in F(\overleftarrow{C})$ , por lo tanto excluirémos este caso.

Como  $y \equiv_2 1$  entonces  $y-1 \equiv_2 0$ , así  $(y-1) \in X$  y como  $x \equiv_2 0$  entonces  $x-2 \equiv_2 0$ , por lo tanto  $(x-2) \in X$ . Tenemos que  $v \leftrightarrow X$ ,  $(x-2) \in X$  y  $(y-1) \in X$ , además

como  $y + 1 \not\equiv_{k+1} x$  y  $y - 1 \not\equiv_{k+1} x$ , entonces  $Q = (x, C, y - 1, v, x - 2, \overleftarrow{C}, y)$  es una trayectoria tal que  $V(Q) = (\{v\} \cup (V(C) \setminus \{x - 1\}))$  (figura 4.9b), entonces es tal que  $|V(Q)| = 1 + ((k + 1) - 1) = k + 1$ , por lo tanto  $\ell(Q) = k$  y por ser  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva se tiene que  $(x, y) \in F(D)$ , de igual manera  $\overleftarrow{Q}$  es una  $yx$ -trayectoria de longitud  $k$ , implicando que  $(y, x) \in F(D)$ . En consecuencia  $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}$ .

Ahora probaremos que  $A \leftrightarrow B$ . Sean  $a \in A$  y  $b \in B$ . Como  $0 \in X$ ,  $a \in A$  y  $A \leftrightarrow X$ , entonces  $\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{a}$ . Como  $k \equiv_2 1$ , entonces  $k - 2 \equiv_2 1$  y de esta forma  $(k - 2) \in Y$ , además  $b \in B$  y  $B \leftrightarrow Y$ , por lo tanto  $(\mathbf{k} - \mathbf{2}) \leftrightarrow \mathbf{b}$ . Podemos considerar la trayectoria  $T = (a, 0, C, k - 2, b)$ , tal que  $\ell(T) = 1 + (k - 2) + 1 = k$  y de la  $k$ -transitividad de  $D$  se tiene que  $(a, b) \in F(D)$ . De igual manera  $\overleftarrow{T}$  es una trayectoria desde  $b$  hacia  $a$  tal que  $\ell(\overleftarrow{T}) = k$ , entonces  $(b, a) \in F(D)$ . Por lo tanto  $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ .

De lo anterior concluimos que  $(A \cup Y) \leftrightarrow (B \cup X)$ , es decir,  $V_1 \leftrightarrow V_2$  y así  $D$  es una digráfica bipartita completa (figura 4.9a).

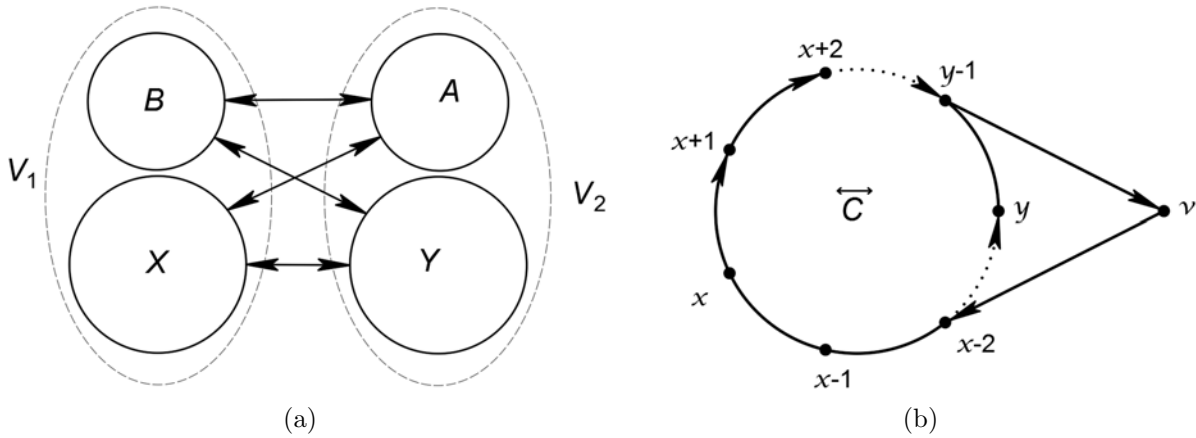


Figura 4.9

II) Si  $D$  no es bipartita probemos que existe un vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $[X \rightarrow v$  y  $v \rightarrow Y]$  ó  $[Y \rightarrow v$  y  $v \rightarrow X]$ .

Procediendo por contradicción supongamos que para todo vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  se cumple que  $[v \leftrightarrow X]$  ó  $[v \leftrightarrow Y]$  pero no al mismo tiempo.

Sean los conjuntos  $A = \{v \in V(D) \setminus V(C) : [v \leftrightarrow X]\}$  y  $B = \{v \in V(D) \setminus V(C) : [v \leftrightarrow Y]\}$ , entonces por la suposición  $A \cap B = \emptyset$  y aparte  $A \cup B = V(D) \setminus V(C)$ . Como existe al menos un vértice en  $v \in V(D) \setminus V(C)$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe  $v \in A$ . A partir de ahora en este lema tomaremos los elementos en el ciclo módulo  $k + 1$ . Tenemos los siguientes casos:

1) Si  $F(D[X]) \neq \emptyset$  entonces existen  $\{x_1, x_2\} \subseteq X$  tal que  $(x_1, x_2) \in F(D)$ , así tenemos dos casos:

a') Si  $x_2 \equiv_{k+1} x_1 + 2$  ó  $x_1 \equiv_{k+1} x_2 + 2$ , entonces  $(x_1, x_2, C, x_1)$  ó  $(x_1, x_2, \overleftarrow{C}, x_1)$  es un ciclo de longitud  $k$  en  $D$ , respectivamente (la figura 4.10a sirve de referencia), y por el lema 4.5  $D$  es completa, por lo tanto existiría un vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $X \rightarrow v \rightarrow Y$ , el cual supusimos que no existe.

b') Si  $x_2 \not\equiv_{k+1} x_1 + 2$  y  $x_1 \not\equiv_{k+1} x_2 + 2$ , como  $x_2 + 2 \equiv_2 x_2$  entonces  $x_2 + 2 \in X$  y por lo tanto  $P = (v, x_2 + 2, C, x_1, x_2, \overleftarrow{C}, x_1 + 1)$  es una  $v(x_1 + 1)$ -trayectoria

tal que  $V(P) = \{v\} \cup (V(C) \setminus \{x_2 + 1\})$  (la figura 4.10b sirve de referencia), así  $|V(P)| = 1 + k$ , es decir,  $\ell(P) = k$  y por la  $k$ -transitividad se sigue que  $(v, x_1 + 1) \in F(D)$ , en otras palabras, existe una  $vY$ -flecha, y por la proposición 2.4 tenemos que  $v \rightarrow Y$ , lo cual es una contradicción, ya que existiría un vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $X \rightarrow v \rightarrow Y$ , el cual supusimos que no existe.

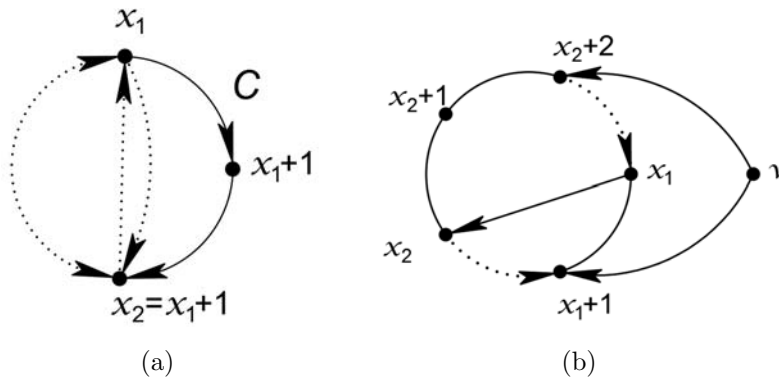


Figura 4.10

- 2) Si  $F(D[Y]) \neq \emptyset$  y  $F(D[X]) = \emptyset$ , entonces existen  $\{y_1, y_2\} \subseteq Y$  tal que  $(y_1, y_2) \in F(D)$ , así  $(y_2 + 1, C, y_1, y_2, \overline{C}, y_1 + 1)$  es una trayectoria de longitud  $k$  ya que pasa por todos los vértices de  $C$  y sólo esos, entonces de la  $k$ -transitividad se sigue que  $(y_2 + 1, y_1 + 1) \in F(D)$  lo cual es una contradicción ya que  $\{y_2 + 1, y_1 + 1\} \subseteq X$  y  $F(D[X]) = \emptyset$  (la figura 4.11a sirve de referencia).
- 3) Si  $F(D[X]) = \emptyset$  y  $F(D[Y]) = \emptyset$ , entonces  $D[V(C)]$  es una digráfica bipartita con bipartición  $\{X, Y\}$ .

Afirmamos que  $F(D[A]) \neq \emptyset$  o  $F(D[B]) \neq \emptyset$  ya que si no existen tales flechas entonces  $\{V_1 = B \cup X, V_2 = A \cup Y\}$  sería una bipartición de  $V(D)$  en conjuntos independientes (esta bipartición incluye el caso cuando  $|A| < 2$  ó  $|B| < 2$ ), esto contradice el hecho de que  $D$  no es bipartita.

Si  $F(D[B]) \neq \emptyset$ , entonces existen  $\{u_1, u_2\} \subseteq B$  tal que  $(u_1, u_2) \in F(D)$ . Así  $(u_1, u_2, 1, C, k - 2, u_1)$  es un ciclo de longitud  $k$  en  $D$  (la figura 4.11b sirve de referencia), y por el lema 4.5,  $D$  es completa, por lo tanto existiría un vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $X \rightarrow v \rightarrow Y$ , el cual supusimos que no existe.

De igual manera si  $F(D[A]) \neq \emptyset$ , entonces existen  $\{v_1, v_2\} \subseteq A$  tal que  $(v_1, v_2) \in F(D)$ . Así  $(v_1, v_2, 0, C, k - 3, v_1)$  es un ciclo de longitud  $k$  en  $D$  (la figura 4.11c sirve de referencia), y por el lema 4.5,  $D$  es completa, así existe un vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $X \rightarrow v \rightarrow Y$ , el cual supusimos que no existe.

Por lo tanto, de los casos anteriores concluimos que existe un vértice  $v \in V(D) \setminus V(C)$  tal que  $[X \rightarrow v \text{ y } v \rightarrow Y]$  ó  $[Y \rightarrow v \text{ y } v \rightarrow X]$ . De esta manera  $(v, 1, C, k - 1, v)$  ó  $(v, 2, C, k, v)$ , respectivamente, es un  $k$ -ciclos en  $D$ , y el lema 4.5 implica que  $D$  es una digráfica completa.

Como los casos fueron exhaustivos se concluye el lema. □

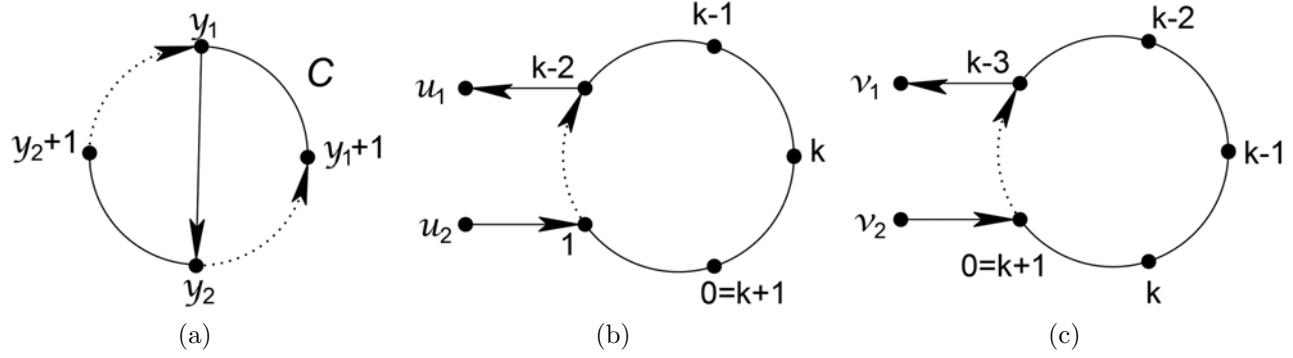


Figura 4.11

El lema 4.6 describe la situación de una digráfica  $k$ -transitiva conteniendo un  $(k + 1)$ -ciclo y al menos un vértice fuera del ciclo. Es fácil observar que un  $(k + 1)$ -ciclo con todas sus flechas simétricas es una digráfica  $k$ -transitiva, y la existencia de diagonales del ciclo no puede ser derivada. Pero, como el siguiente lema afirma, si una diagonal existe, es fácil mostrar la existencia de muchas más de ellas.

**Lema 4.7.** *Sea  $k \geq 2$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_0)$  es un  $(k + 1)$ -ciclo en  $D$  y  $(v_i, v_j)$  es una diagonal de  $C$ , entonces*

i) *Si  $k \equiv_2 0$ , entonces  $D[V(C)]$  es una digráfica completa.*

ii) *Si  $k \equiv_2 1$ , tenemos dos casos:*

a) *Si  $i \equiv_2 j$ , entonces  $D[V(C)]$  es una digráfica completa.*

b) *Si  $i \not\equiv_2 j$ , entonces  $D[V(C)]$  es una digráfica bipartita completa con bipartición  $(V_{2i}, V_{2i+1})$ , donde  $V_{2i} = \{x_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k+1}\}$  y  $V_{2i+1} = \{x_p : p \in (2\mathbb{Z}_{k+1} + 1)\}$ .*

*Demostración.* Empezamos observando que cualquier flecha de  $C$  es simétrica en  $D$ , ya que  $D$  es  $k$ -transitiva y el ciclo  $C$  es de longitud  $k + 1$ , por lo tanto el ciclo  $\overleftarrow{C}$  es un ciclo en  $D$ .

Como podemos renombrar los vértices del ciclo rotando los índices, asumiremos sin pérdida de generalidad que la diagonal  $(v_i, v_j)$  es de la forma  $(v_0, v_j)$ , con  $2 \leq j \leq k - 1$ . Antes de proceder a demostrar el lema hacemos una observación:

- Si  $j > 2$ , entonces consideramos las trayectorias  $(v_{j-1}, \overleftarrow{C}, v_0, v_j, C, v_k)$  y  $(v_{j+1}, C, v_0, v_j, \overleftarrow{C}, v_1)$  de longitud  $k$ , como se muestra en las figuras 4.12a y 4.12b. De la  $k$ -transitividad de  $D$  se sigue que  $\{(v_{j-1}, v_k), (v_{j+1}, v_1)\} \subseteq F(D)$ . También, la trayectoria  $(v_0, v_j, v_{j-1}, v_k, \overleftarrow{C}, v_{j+1}, v_1, C, v_{j-2})$  es una  $k$ -trayectoria en  $D$  (la figura 4.12c sirve de referencia), por lo tanto  $(v_0, v_{j-2}) \in F(D)$ .

Hagamos un pequeño paréntesis para probar por inducción sobre  $j$  que, si  $(v_0, v_j) \in F(D)$ , se cumple lo siguiente

1. Si  $j \equiv_2 0$ , entonces  $(v_0, v_2) \in F(D)$ ;
2. Si  $j \equiv_2 1$ , entonces  $(v_0, v_3) \in F(D)$ .

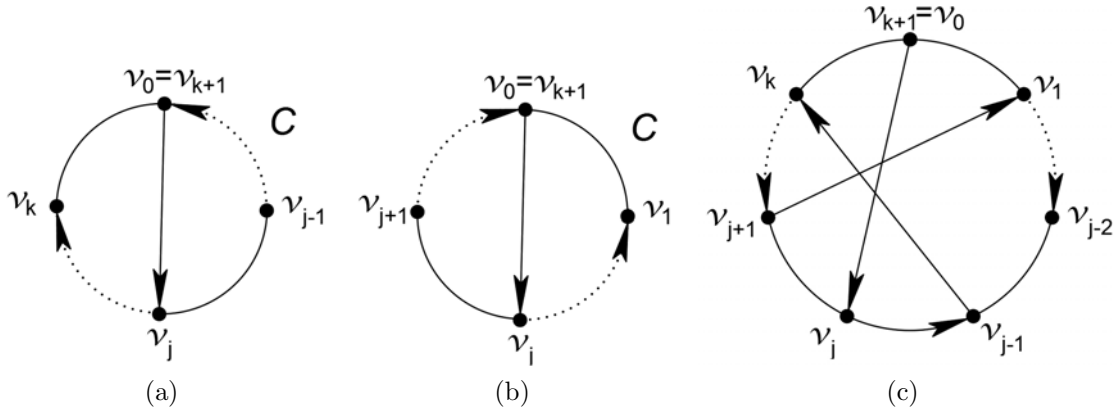


Figura 4.12

Comencemos la prueba de esta afirmación.

**Base:** Si  $(v_0, v_j) \in F(D)$  con  $j = 2$ , entonces  $(v_0, v_2) \in F(D)$  y el resultado es trivial.

**Hipótesis inductiva:** Si  $(v_0, v_{j'}) \in F(D)$  con  $2 \leq j' < j$ , se cumple que:

1. Si  $j' \equiv_2 0$ , entonces  $(v_0, v_2) \in F(D)$ ;
2. Si  $j' \equiv_2 1$ , entonces  $(v_0, v_3) \in F(D)$ .

Si  $(v_0, v_j) \in F(D)$  con  $j = 3$ , entonces  $(v_0, v_3) \in F(D)$  y el resultado es trivial.

Consideremos  $(v_0, v_j) \in F(D)$  con  $3 < j$ .

Si  $j \equiv_2 0$  entonces  $j = 2s$  para alguna  $s \in \mathbb{N}$  y además por la observación anterior se tiene que  $(v_0, v_{2s}) \in F(D)$  implica que  $(v_0, v_{2s-2}) \in F(D)$ . Como  $4 \leq 2s$  entonces  $2 \leq 2(s-1)$  con  $2(s-1) = 2s-2$ , así podemos usar la hipótesis de inducción con  $j' = 2(s-1)$ , además  $j' \equiv_2 0$ , por lo tanto  $(v_0, v_2) \in F(D)$ .

Si  $j \equiv_2 1$  entonces  $j = 2s+1$  para alguna  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y además por la observación anterior sabemos que  $(v_0, v_{2s+1}) \in F(D)$  implica que  $(v_0, v_{2s+1-2}) \in F(D)$ . Como  $2s+1-2 = 2(s-1)+1$  y  $3 < 2s+1$  entonces  $3 \leq 2(s-1)+1$ , así podemos usar la hipótesis de inducción con  $j' = 2(s-1)+1$ , además  $j' \equiv_2 1$ , por lo tanto  $(v_0, v_3) \in F(D)$ , concluyendo el proceso inductivo.

Ahora prosigamos con la prueba del lema:

-Si  $j \equiv_2 0$ , entonces por lo anterior  $(v_0, v_2) \in F(D)$  y  $(v_0, v_2, C, v_0)$  es un  $k$ -ciclo en  $D$ , además  $D[V(C)]$  es fuerte por contener al ciclo  $C$  que pasa por todos los vértices, así por el lema 4.5  $D[V(C)]$  es completa.

-Si  $j \equiv_2 1$ , entonces por lo anterior  $(v_0, v_3) \in F(D)$  lo que implica que  $C' = (v_0, v_3, C, v_0)$  es un  $(k-1)$ -ciclo en  $D[V(C)]$  de igual forma  $(v_1, v_2, v_1)$  es un ciclo de longitud dos en  $D$  (ver figura 4.13).

Con el propósito de probar que  $D[V(C)]$  es completa o bipartita completa, analicemos las flechas entre el  $(k-1)$ -ciclo  $C'$  y el ciclo  $(v_1, v_2, v_1)$ , cabe mencionar que en los siguientes incisos se considerará  $v_{k+1} = v_0$ :

- a)  $(v_2, v_3) \in F(D)$  por pertenecer a  $C$  y si renombramos a los vértices en  $V(C')$  de tal forma que  $y_p = v_{p+3}$  para  $0 \leq p \leq k-2$ , entonces por el lema 2.7 se tiene que  $v_2 \rightarrow \{y_p : p \in (k-1-2)\mathbb{Z}_{k-1}\}$ ;

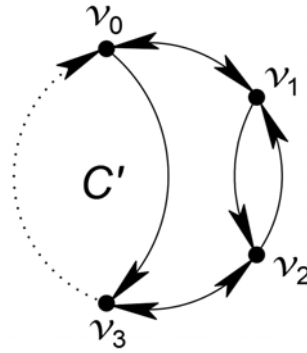


Figura 4.13

- b)  $(v_3, v_2) \in F(D)$  por pertenecer a  $\overleftarrow{C}$  y si renombramos a los vértices en  $V(C')$  de tal forma que  $y'_0 = v_3$  y  $y'_p = v_{k+2-p}$  para  $1 \leq p \leq k-2$ , entonces por corolario 2.2 se tiene que  $\{y'_p : p \in (k-1-2)\mathbb{Z}_{k-1}\} \rightarrow v_2$ ;
- c)  $(v_1, v_0) \in F(D)$  por pertenecer a  $\overleftarrow{C}$  y si renombramos a los vértices en  $V(C')$  de tal forma que  $x_0 = v_0$  y  $x_p = v_{p+2}$  para  $1 \leq p \leq k-2$ , entonces por el lema 2.7 se tiene que  $v_1 \rightarrow \{x_p : p \in (k-1-2)\mathbb{Z}_{k-1}\}$ ;
- d)  $(v_0, v_1) \in F(D)$  por pertenecer a  $C$  y si renombramos a los vértices en  $V(C')$  de tal forma que  $x'_p = v_{k+1-p}$  para  $0 \leq p \leq k-2$ , entonces por el corolario 2.2 se tiene que  $\{x'_p : p \in (k-1-2)\mathbb{Z}_{k-1}\} \rightarrow v_1$ .

Después de analizar las flechas entre los ciclos  $C'$  y  $(v_1, v_2, v_1)$  analicemos los casos sobre la paridad de  $k$ :

1.  $k \equiv_2 0$ .

Notemos que  $(k-3, k-1) = 1$  por ser dos impares consecutivos y así  $(k-1-2)\mathbb{Z}_{k-1} = (k-3)\mathbb{Z}_{k-1} = \mathbb{Z}_{k-1}$ . Por lo tanto para toda  $q \in \{1, 2\}$  se tiene que  $v_q \rightarrow V(C') \rightarrow v_q$  y como  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq F(D)$  entonces  $v_q \rightarrow V(C) \setminus \{v_q\} \rightarrow v_q$  para toda  $q \in \{1, 2\}$ .

Ahora sabemos que  $(v_1, v_3) \in F(D)$ , entonces  $(v_0, v_1, v_3, C, v_k, v_0)$  es un  $k$ -ciclo en la digráfica fuerte  $k$ -transitiva  $D[V(C)]$ , entonces por el lema 4.5  $D[V(C)]$  es una digráfica completa.

2.  $k \equiv_2 1$ .

Notemos que  $(k-3, k-1) = 2$ , por ser dos pares consecutivos, de esta manera  $(k-1-2)\mathbb{Z}_{k-1} = (k-3)\mathbb{Z}_{k-1} = 2\mathbb{Z}_{k-1}$ .

Por lo tanto

$$\{x'_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\} \rightarrow v_1 \rightarrow \{x_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\} \quad \text{y} \quad \{y'_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\} \rightarrow v_2 \rightarrow \{y_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\}$$

además por construcción se tiene que  $x_0 = v_0$ ,  $x_p = v_{p+2}$  y  $x'_p = v_{k+1-p}$ , es decir, todas las  $x$  y  $x'$  con índice par coinciden con las  $v$  con índice par distintas de  $v_2$ , ya que si  $p \equiv_2 0$  entonces  $p+2 \equiv_2 0$  y  $k+1-p \equiv_2 0$  (la última congruencia debido a que estamos en el caso de que  $k \equiv_2 1$ ), así

$$\{x_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\} = \{v_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k+1}\} \setminus \{v_2\} = \{x'_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\}$$

de igual manera por construcción se tiene que  $y_p = v_{p+3}$ ,  $y'_0 = v_3$  y  $y'_p = v_{k+2-p}$ , dicho de otra forma, todas las  $y$  y  $y'$  con índice par coinciden con las  $v$  con índice impar distintas de  $v_1$ , ya que si  $p \equiv_2 0$  entonces  $p+3 \equiv_2 1$  y  $k+2-p \equiv_2 1$ , así

$$\{y_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\} = \{v_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k+1} + 1\} \setminus \{v_1\} = \{y'_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1}\}.$$

De lo anterior y el hecho de que  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq F(D)$  concluimos que

$$v_1 \rightarrow \{v_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k+1}\} \rightarrow v_1 \quad \text{y} \quad v_2 \rightarrow \{v_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k-1} + 1\} \rightarrow v_2.$$

Recordemos que  $\{v_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k+1}\} = V_{2i}$  y  $\{v_p : p \in 2\mathbb{Z}_{k+1} + 1\} = V_{2i+1}$ . Con el propósito de probar que  $V_{2i} \rightarrow V_{2i+1} \rightarrow V_{2i}$  probemos que si  $v_n \in V_{2i}$  y  $v_m \in V_{2i+1}$  entonces  $\{(v_n, v_m), (v_m, v_n)\} \subseteq F(D)$ .

Sea  $\{n, m\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$  con  $n$  par y  $m$  impar ( $3 \leq k$  ya que  $k$  es impar) con  $2 \neq n \neq m \pm 1$  y  $m \neq 1$  (el caso cuando  $n = 2$  se omite pues sabemos que  $v_2 \rightarrow V_{2i+1} \rightarrow v_2$ , al igual que cuando  $m = 1$  pues  $v_1 \rightarrow V_{2i} \rightarrow v_1$  y además se tiene que  $\{(m, m+1), (m-1, m)\} \subseteq F(D)$  por ser flechas en los ciclos  $C$  y  $\overleftarrow{C}$  respectivamente).

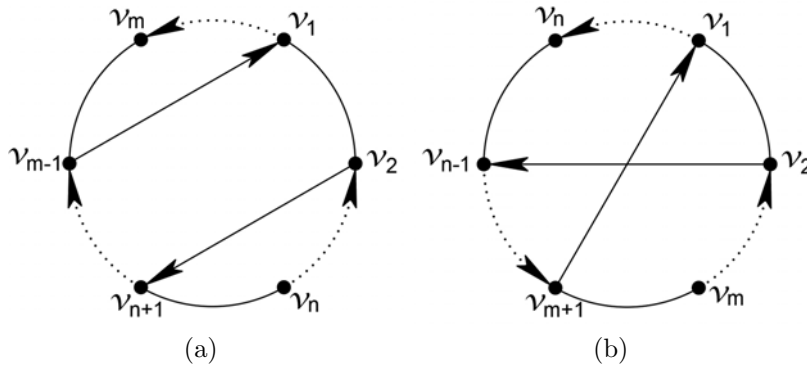


Figura 4.14

-Si  $n < m$ , entonces  $P = (v_n, \overleftarrow{C}, v_2, v_{n+1}, C, v_{m-1}, v_1, \overleftarrow{C}, v_m)$  al igual que  $\overleftarrow{P}$  son  $k$ -trayectorias en  $D$ . Por lo tanto  $\{(v_n, v_m), (v_m, v_n)\} \subseteq F(D)$ , como en la figura 4.14a.

-Si  $m < n$ , entonces  $P = (v_m, \overleftarrow{C}, v_2, v_{n-1}, \overleftarrow{C}, v_{m+1}, v_1, \overleftarrow{C}, v_n)$  al igual que  $\overleftarrow{P}$  son  $k$ -trayectorias. Por lo tanto  $\{(v_n, v_m), (v_m, v_n)\} \subseteq F(D)$ , como en la figura 4.14b.

Se sigue que  $V_{2i} \rightarrow V_{2i+1}$  y  $V_{2i+1} \rightarrow V_{2i}$ . Por lo tanto,  $D[V(C)]$  es una digráfica bipartita completa, completando la prueba. □

**Lema 4.8.** Sean  $d \geq 2$ ,  $p \geq 2$  y  $k \geq 5$  enteros tales que  $k-1 = d(p-1)$  y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C$  es un  $dp$ -ciclo en  $D$  entonces  $D[V(C)]$  tiene un  $d$ -ciclo-extendido como una subdigráfica generadora. Más aún, si  $V(C) = (v_0, v_1, \dots, v_{dp-1})$ ,  $\{V_i\}_{i=0}^{d-1}$  es la partición cíclica de  $V(C)$ , donde  $V_i = \{v_j : j \equiv_d i\}$ .

*Demostración.* Recordemos por la observación 2.2, que  $\{(j, j+k), (j, j-i)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $j \in V(C)$  módulo  $n$  (esta observación la estaremos usando para construir los caminos en toda la



demostración de este lema, de hecho toda flecha que no esté en el ciclo  $C$  y que sea usada para construir un camino en  $D$  será justificada por esta observación).

Si nombramos  $i = d - 1$  y  $r = p - 2$ , entonces  $k = (i + 1)(r + 1) + 1 = r(i + 1) + i + 2$ , y existe un  $n$ -ciclo con  $n = k + i = d(p - 1) + 1 + d - 1 = dp$  entonces vemos que se cumplen las hipótesis del lema 4.1 y entonces podemos considerar el ciclo  $C'$  que tiene longitud  $k - 1$  dado en el lema 4.1 (en la figura 4.15 recordamos la construcción de los siguientes caminos).

Tal ciclo es

$$C' = (v_0, P, v_{k-ri-r+i-2}, v_{k-ri-r-2} = v_i, v_0),$$

con

$$P = \bigcup_{s=0}^r P_s$$

donde para cada  $0 \leq s \leq r - 1$

$$P_s = (v_{k-si-s+i}, v_{k-si-s}, C, v_{k-si-s+i-2}, v_{k-si-s-2}, v_{k-si-s-1}),$$

y

$$P_r = (v_{k-ri-r+i}, v_{k-ri-r}, C, v_{k-ri-r+i-2}),$$

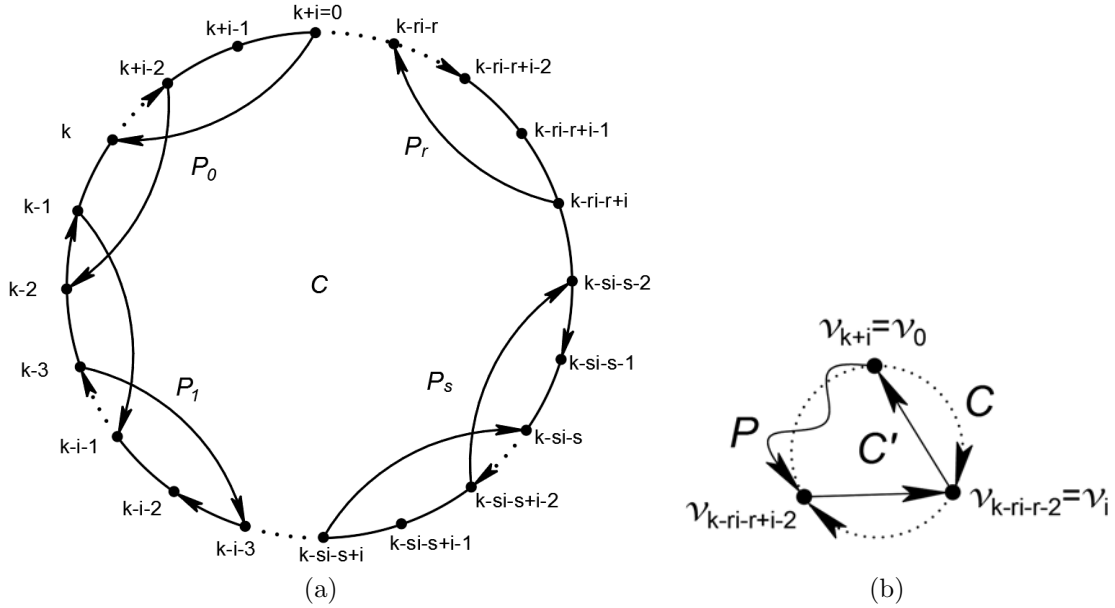


Figura 4.15

Observemos que  $v_{k+i-1} \notin V(C')$ , es decir, el vértice anterior (en dirección del ciclo) al vértice 0 y de igual manera  $v_{i+1} \notin V(C')$  ya que  $P$  no pasa por dicho vértice y es distinto al vértice  $v_{k-si-s-2} = v_i$ , esto último se da porque  $k - ri - r - 2 = [r(i + 1) + i + 2] - r(i + 1) - 2 = i$ . Entonces  $C'$  pasa por  $v_i$  y es el último vértice por el que pasa  $C'$  antes de regresar al vértice  $0 \equiv_n k + i$ .

Consideremos ahora la trayectoria  $T = (v_{k+i-1}, v_0, C', v_i, v_{i+1})$  tal que  $\ell(T) = 1 + \ell((v_0, C', v_i)) + 1 = 1 + (k - 2) + 1 = k$ , de lo anterior concluimos que,  $(v_{k+i-1}, v_{i+1}) \in F(D)$ , por ser  $D$   $k$ -transitiva (la figura 4.16a sirve de referencia). Podemos reetiquetar los vértices de  $V(C)$  de tal manera que  $v'_i = v_{i-1}$  (índices módulo  $k + i$ ) y así  $(v'_0, v'_{i+2}) \in F(D)$ . De manera que asumiremos que  $(v_0, v_{i+2}) \in F(D)$ .

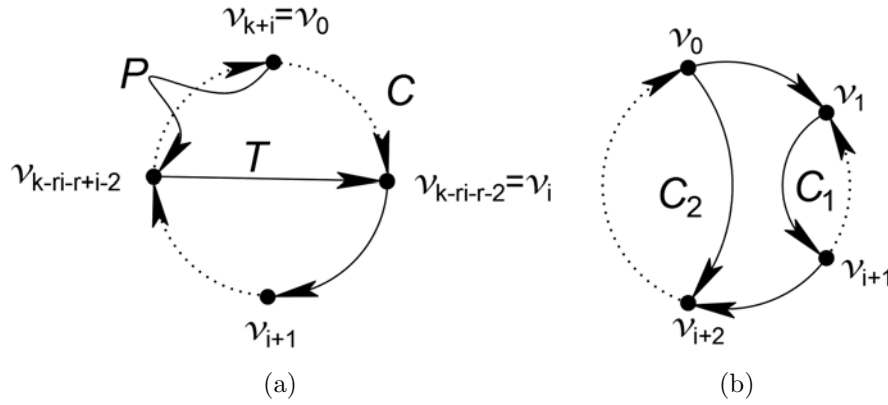


Figura 4.16

Consideraremos los siguientes ciclos  $C_1 = (v_{i+1}, v_1, C, v_{i+1})$  y  $C_2 = (v_0, v_{i+2}, C, v_0)$  de longitudes  $i + 1$  y  $k - 1$ , respectivamente, los cuales son ajenos en  $D$ , como se muestra en la figura 4.16b.

Como  $i + 1 = d \leq d(p - 1) = k - 1$  y además  $(v_{i+1}, v_{i+2}) \in F(D)$ , si renombramos los vértices de  $C_2$  de tal manera que  $v_{i+m} = y_{m-2}$  para toda  $m \in \{2, 3, \dots, k\}$ , entonces tenemos por el lema 2.7 que  $v_{i+1} \rightarrow \{y_q : q \in (k - 1 - (i + 1))\mathbb{Z}_{k-1}\}$ .

Recordemos que  $k = r(i + 1) + i + 2$ , por lo tanto  $k - 1 - (i + 1) = k - i - 2 = r(i + 1) = (p - 2)d$  y además  $k - 1 = d(p - 1)$ . Por lo tanto  $v_{i+1} \rightarrow \{y_q : q \in d(p - 2)\mathbb{Z}_{d(p-1)}\}$ .

Por el lema A.1 se tiene que  $d(p - 2)\mathbb{Z}_{d(p-1)} = \{0, d, 2d, \dots, d(p - 2)\}$  (residuos módulo  $d(p - 1)$ ).

De esta forma  $v_{i+1} = v_d \rightarrow \{y_{sd}\}_{s=0}^{p-2}$ . Como  $y_{ds} = y_{m-2}$  para alguna  $m \in \{2, 3, \dots, k\}$ , entonces  $ds = m - 2$  y así  $m = ds + 2$ , además tenemos que  $y_{m-2} = v_{i+m}$  (por definición de las  $y_\alpha$ ), por lo tanto  $v_{i+m} = v_{i+ds+2} = v_{d-1+ds+2} = v_{d(s+1)+1}$  (recordemos que  $i = d - 1$ ), con  $s \in \{0, 1, \dots, p - 2\}$ . Por lo tanto  $v_d \rightarrow \{v_{d+1}, v_{2d+1}, \dots, v_{d(p-1)+1}\}$ , es decir,  $v_d \rightarrow (V_1 \setminus \{v_1\})$ , además sabemos que  $(v_{i+1}, v_1) \in F(D)$  (por la observación inicial) y como  $i + 1 = d$  entonces  $(v_d, v_1) \in F(D)$ . Por lo tanto  $v_d \rightarrow V_1 = \{v_j : j \equiv_d 1\}$  (figura 4.17a).

Como podemos reetiquetar los vértices  $C$  de tal manera que  $v'_{i-d} = v_i$  (índices módulo  $n$ ), se tiene que  $v'_d \rightarrow V_1$ , en otras palabras,  $v_{2d} \rightarrow V_1$  (ya que  $v'_d = v'_{2d-d} = v_{2d}$ ), análogamente se prueba que  $v_{jd} \rightarrow V_1$  para cada  $j \in \{2, \dots, p\}$ . Entonces  $V_d \rightarrow V_1$ .

De igual forma podemos reetiquetar los vértices de  $V(C)$  con una traslación de sus vértices, dada por  $v'_{i-j} = v_i$  para cada  $j \in \{1, \dots, d - 1\}$ , probando que  $V'_d \rightarrow V'_1$  (los conjuntos  $V'_i$  dados análogamente a los  $V_i$ ), además  $V'_d = V_j$  y  $V'_1 = V_{j+1}$ , por lo tanto  $V_j \rightarrow V_{j+1}$  para toda  $j \in \{1, \dots, d - 1\}$  (figura 4.17b).

Así  $C_d[V_1, \dots, V_d]$  es una subdigráfica generadora de  $D[V(C)]$ .  $\square$

**Lema 4.9.** Sean  $k \geq 5$  un entero,  $D$  una digráfica fuerte  $k$ -transitiva,  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$  un  $n$ -ciclo en  $D$  con  $n \geq k + 2$  y  $n' = \min\{s \in \mathbb{N} : \text{existe un ciclo de longitud } s \text{ en } D, \text{ con } s \geq k + 2\}$ , donde  $(n', k - 1) = d'$ . Si  $D$  no contiene  $k$ -ciclos ni  $(k + 1)$ -ciclos, entonces  $D$  es un  $d'$ -ciclo extendido, con  $d' \geq 3$ .

Más aun  $d' = \min\{\ell(C), k - 1\} : C \text{ es un ciclo en } D \text{ con } \ell(C) \geq k + 2\}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $D$  no contiene  $k$ -ciclos ni  $(k + 1)$ -ciclos, como  $D$  es fuerte,  $k$ -transitiva y contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq k + 2$ , entonces por el corolario 4.1 obtenemos que  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo.

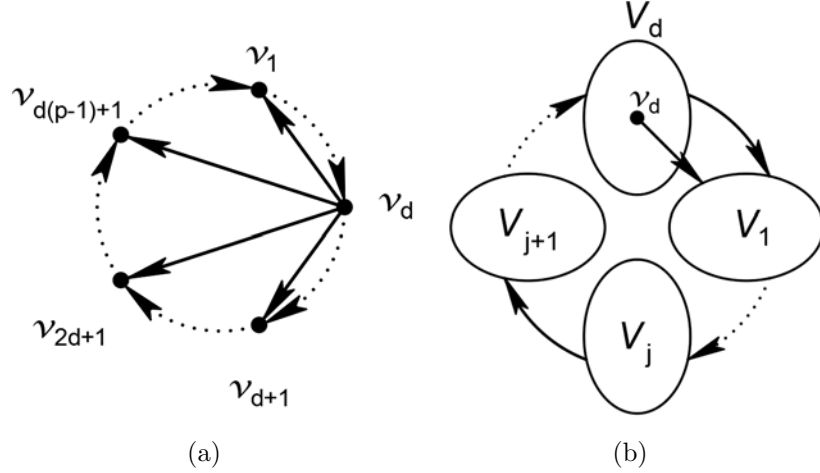


Figura 4.17

Sea  $n = k + i$  para algún entero  $i \in \mathbb{N}$ , como  $n \geq k + 2$  entonces  $i \geq 2$ . Sea  $n' = \min\{s \in \mathbb{N} : \text{existe un ciclo de longitud } s \text{ en } D, \text{ con } s \geq k + 2\}$ , este mínimo existe porque en particular  $n$  pertenece a este conjunto, por lo tanto  $n \geq n' \geq k + 2$ . Sea  $C'$  un ciclo de longitud  $n'$  en  $D$ , donde  $n' = k + i'$  para algún entero  $i' \in \mathbb{N}$ , con  $i' \geq 2$ , analicemos los siguientes 4 casos posibles para  $i'$ :

1. Si  $i' \geq \frac{2k-2}{3}$ , entonces el lema 4.4 nos dice que existe un ciclo  $C''$  en  $D$  tal que  $k \leq \ell(C'') < n'$ .
2. Si  $\frac{k}{2} < i' = \frac{2k-5}{3}$ , entonces el lema 4.3 nos dice que existe un ciclo  $C''$  en  $D$  tal que  $k \leq \ell(C'') < n'$ .
3. Si  $\frac{k}{2} \leq i' < \frac{2k-5}{3}$  entonces el lema 4.2 nos dice que existe un ciclo  $C''$  en  $D$  tal que  $k \leq \ell(C'') < n'$ .
4. Si  $2 \leq i' < \frac{k}{2}$  y  $k \neq r(i' + 1) + i' + 2$  para cualquier  $r' \in \mathbb{N}$ , entonces el lema 4.1 nos dice que existe un ciclo  $C''$  en  $D$  tal que  $k \leq \ell(C'') < n'$ .
5. Si  $k = r'(i' + 1) + i' + 2$ , para algún  $r' \in \mathbb{N}$  entonces el lema 4.1 nos dice que existe un ciclo  $C''$  en  $D$  tal que  $\ell(C'') = k - 1$ .

Si suponemos que  $k \neq r'(i' + 1) + i' + 2$  para cualquier  $r' \in \mathbb{N}$ , entonces por los casos anteriores tenemos que existe un ciclo  $C''$  en  $D$  tal que  $\ell(C'') = n''$ , con  $n' > n'' \geq k$ . Como  $D$  no tiene  $k$ -ciclos ni  $(k + 1)$ -ciclos entonces  $n'' \geq k + 2$ . Así que existe un ciclo  $C''$  de longitud  $n''$  en  $D$  tal que  $n' > n'' \geq k + 2$ , que contradice la minimalidad de  $n'$ . Concluyendo que  $k = r'(i' + 1) + i' + 2$

Notamos que  $(n', k - 1) = i' + 1$  ya que  $k - 1 = r'(i' + 1) + i' + 1 = (r' + 1)(i' + 1)$  y  $n' = k + i' = (r' + 1)(i' + 1) + 1 + i' = (r' + 2)(i' + 1)$  y  $(r' + 2, r' + 1) = 1$ . Por lo tanto  $d' = (i' + 1)$ , con  $d' \geq 3$  (ya que  $i' \geq 2$ ) y si llamamos  $(p' - 1) = (r' + 1)$ , entonces  $D$  contiene un  $d'p'$ -ciclo con  $(k - 1) = d'(p' - 1)$ . Así, por el lema 4.8  $D[V(C'')]$  contiene un  $d'$ -ciclo extendido, digamos  $E_{d'}$ , como subdigráfica generadora.

Ahora probemos que  $D[V(C'')]$  es un  $d'$ -ciclo extendido, para esto probaremos que  $E_{d'} = D[V(C'')]$ , es decir,  $V(E_{d'}) = V(D[V(C'')])$  y  $F(E_{d'}) = F(D[V(C'')])$ . Por comodidad de notación sea  $D' = D[V(C'')]$ .

Sea  $\{W_0, \dots, W_{d'-1}\}$  la partición cíclica de  $E_{d'}$ . Antes de proseguir con el análisis definamos una familia de trayectorias que nos serán de utilidad. Para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$ , si nombramos  $W_\alpha = \{w_1^\alpha, w_2^\alpha, \dots, w_{p'}^\alpha\}$  para cada  $l \in \{1, 2, \dots, p' - 1\}$  (por como se da la prueba en el lema 4.8 se tiene que  $|W_\alpha| = p'$  para cada  $\alpha \in \{0, \dots, d' - 1\}$ ).

Consideremos la trayectoria

$$T_l^\alpha = (w_l^\alpha, w_l^{\alpha+1}, w_l^{\alpha+2}, \dots, w_l^{\alpha+d'-1}, w_{l+1}^\alpha)$$

con los índices superiores tomados módulo  $d'$ , en particular vemos que  $\ell(T_l^\alpha) = d'$  para cada  $l \in \{1, \dots, p'-1\}$  y cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d'-1\}$ . Sea  $T^\alpha = \bigcup_{l=1}^{p'-1} T_l^\alpha$ , notamos que  $\ell(T^\alpha) = \sum_{l=1}^{p'-1} \ell(T_l^\alpha) = \sum_{l=1}^{p'-1} d' = (p' - 1)d' = k - 1$ , para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$ .

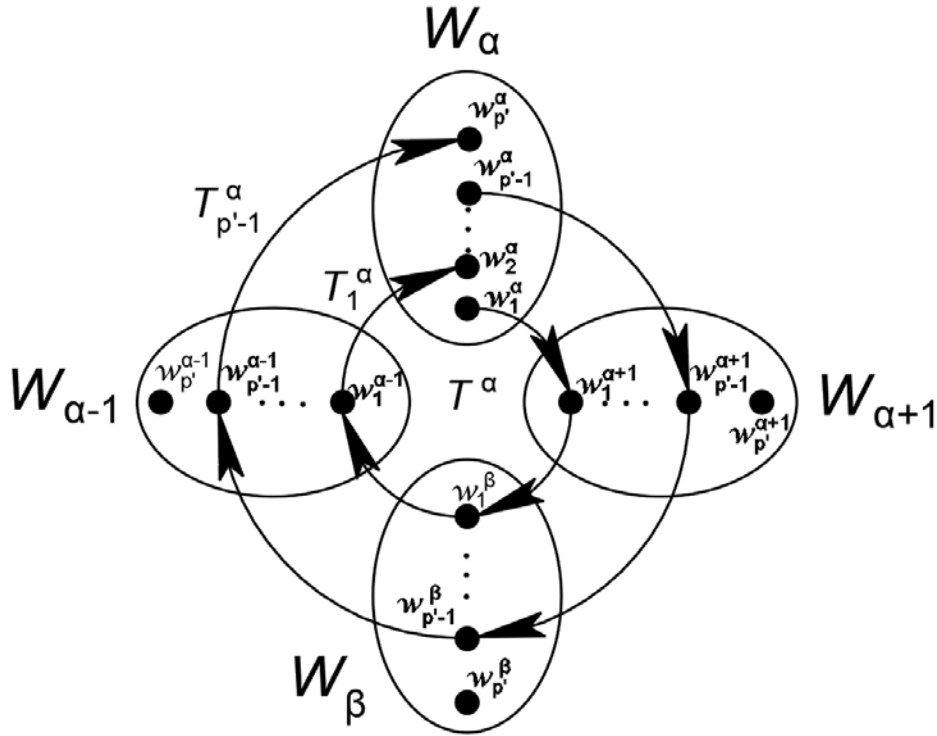


Figura 4.18

Veamos que no pueden haber otras flechas en  $D'$  aparte de las flechas del  $d'$ -ciclo extendido contenido en  $D'$ , dicho de otra manera, que  $F(D') \subseteq F(E_{d'})$ . Sea  $(u, v) \in F(D')$ , entonces  $u \in W_{\alpha_1}$  y  $v \in W_{\alpha_2}$ , para algunos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en  $\{0, 1, \dots, d' - 1\}$ .

Procedamos a analizar los casos posibles para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ :

1. Si  $d' | (\alpha_1 + 1 - \alpha_2)$ , entonces  $\alpha_2 \equiv_{d'} \alpha_1 + 1$ . Por lo tanto  $(u, v)$  es una  $W_{\alpha_1} W_{\alpha_1+1}$ -flecha y así  $(u, v) \in F(E_{d'})$ .
2. Si  $d'$  no divide a  $(\alpha_1 + 1 - \alpha_2)$ , entonces  $\alpha_2 \not\equiv_{d'} \alpha_1 + 1$ .

a)  $\alpha_2 \equiv_{d'} \alpha_1$ .

Entonces  $\{u, v\} \subseteq W_{\alpha_1}$  con  $u \neq v$ , y si elegimos  $v = w_1^{\alpha_1}$  y  $u = w_{p'}^{\alpha_1}$  y consideremos el ciclo

$$C_1 = (v = w_1^{\alpha_1}, T^{\alpha_1}, w_{p'}^{\alpha_1} = u, v)$$

este ciclo es tal que  $\ell(C_1) = \ell(T^{\alpha_1}) + 1 = (k - 1) + 1 = k$ , pero esto es una contradicción ya que no hay  $k$ -ciclos en  $D[V(C)]$ .

b)  $\alpha_2 \in (\{0, 1, \dots, d' - 1\} \setminus \{\alpha_1, \alpha_1 + 1\})$  (con los elementos tomados módulo  $d'$ ).

Si elegimos  $u = w_{p'}^{\alpha_1}$  y  $v = w_{p'}^{\alpha_2}$ , como sabemos que  $W_\beta \rightarrow W_{\beta+1}$ , para cada  $\beta \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  (subíndices módulo  $d'$ ), entonces podemos considerar la trayectoria  $T_{p'} = (v = w_{p'}^{\alpha_2}, w_{p'}^{\alpha_2+1}, \dots, w_{p'}^{\alpha_1-1}, w_1^{\alpha_1})$  (con los índices superiores módulo  $d'$ ) que es tal que  $1 \leq \ell(T_{p'}) < d' - 1$ . Ahora consideremos el ciclo

$$C_2 = (w_1^{\alpha_1}, T^{\alpha_1}, w_{p'}^{\alpha_1} = u, v = w_{p'}^{\alpha_2}, T_{p'}, w_1^{\alpha_1})$$

este ciclo es tal que  $\ell(C_2) = \ell(T^{\alpha_1}) + 1 + \ell(T_{p'}) = (k - 1) + 1 + \ell(T_{p'})$ , por lo tanto  $k < \ell(C_2) < k + (d' - 1) = k + i'$ , es decir,  $k < \ell(C_2) < d'p' = n'$ , como no hay  $k + 1$ -ciclos en  $D$  entonces  $k + 2 \leq \ell(C_2) < n'$ , pero esto contradice la minimalidad de  $n'$ .

De los casos anteriores concluimos que  $d' | (\alpha_1 + 1 - \alpha_2)$ . Así  $(u, v) \in F(E_{d'})$ .

Por lo tanto  $D' = E_{d'}$ , es decir,  **$D'$  es un  $d'$ -ciclo extendido.**

Lo que sigue es ver como se comportan los vértices en  $D$  afuera de  $D'$ . Analicemos casos sobre  $V(D) \setminus V(D')$ .

1.  $V(D) \setminus V(D') = \emptyset$ .

Entonces  $D = D'$ , así  $D$  es un  $d'$ -ciclo extendido.

2.  $V(D) \setminus V(D') \neq \emptyset$ .

Sea  $z \in V(D) \setminus V(D')$ . Note que  $D$  es fuerte y es  $k$ -transitiva. Por lo tanto existe una trayectoria de  $z$  hacia  $C'$ , y como  $\ell(C') \geq k + 2$  entonces existe una  $zC'$ -flecha, por la proposición 2.4. Sea  $w \in V(D')$  tal que  $(z, w) \in F(D)$  con  $w \in W_{\alpha+1}$  para algún  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  (módulo  $d'$ ). Probaremos que  $z \rightarrow W_{\alpha+1}$ .

Sea  $w' \in W_{\alpha+1} \setminus \{w\}$ , un vértice cualquiera el cual debe existir ya que  $|W_\beta| = p' = r' + 2$  y  $r' \geq 0$ , para cualquier  $\beta \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$ . Si elegimos  $w = w_1^{\alpha+1}$  y  $w' = w_{p'}^{\alpha+1}$ , entonces podemos considerar la trayectoria  $P = (z, w = w_1^{\alpha+1}, T^{\alpha+1}, w_{p'}^{\alpha+1} = w')$ , donde  $\ell(P) = 1 + \ell(T^{\alpha+1}) = 1 + d'(p' - 1) = 1 + k - 1 = k$  y por la  $k$ -transitividad de  $D$  se tiene que  $(z, w') \in F(D)$ . Como  $w'$  fue arbitrario se concluye que  $z \rightarrow W_{\alpha+1}$ .

Por la observación 2.1 se tiene análogamente que existe  $\alpha' \in \{1, 2, \dots, d'\}$  tal que  $W_{\alpha'} \rightarrow z$ .

Ahora probaremos que forzosamente  $\alpha' = \alpha - 1$  analizando los siguientes casos:

■ Si  $\alpha' = \alpha + 1$ .

Como  $z \rightarrow W_{\alpha+1}$  y  $W_{\alpha+1} \rightarrow z$ , entonces podemos considerar el ciclo

$$(z, w_1^{\alpha+1}, T^{\alpha+1}, w_{p'}^{\alpha+1}, z)$$

que es un ciclo de longitud  $\ell(T^{\alpha+1}) + 2 = (k - 1) + 2 = k + 1$  que contradice que no hay  $k + 1$  ciclos en  $D$ .

- Si  $\alpha' = \alpha$ .

Como  $z \rightarrow W_{\alpha+1}$  y  $W_\alpha \rightarrow z$ , entonces podemos considerar el ciclo

$$C_3 = (z, w_1^{\alpha+1}, T^{\alpha+1}, w_{p'-1}^\alpha, z)$$

que es un ciclo tal que  $\ell(C_3) = 1 + (\ell(T^{\alpha+1}) - 1) + 1$  (ya que  $C_3$  pasa por todos los vértices de  $T^{\alpha+1}$  a excepción de  $w_{p'}^{\alpha+1}$ ), por lo tanto  $\ell(C_3) = 1 + ((k-1) - 1) + 1 = k$  que contradice que no hay  $k$  ciclos en  $D$ .

- Si  $\alpha' \in (\{0, \dots, d' - 1\} \setminus \{\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1\})$  (módulo  $d'$ ).

Como  $W_\beta \rightarrow W_{\beta+1}$  y  $w_l^\beta \in W_\beta$  para cualquier  $\beta \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  y cualquier  $l \in \{1, 2, \dots, p'\}$ , entonces podemos considerar la trayectoria  $T_{p'}' = (w_{p'}^{\alpha+1}, w_{p'}^{\alpha+2}, \dots, w_{p'}^{\alpha'})$ , además  $z \rightarrow W_{\alpha+1}$  y  $W_{\alpha'} \rightarrow z$ , por lo tanto consideremos el ciclo

$$C_4 = (z, w_1^{\alpha+1}, T^{\alpha+1}, w_{p'}^{\alpha+1}, T_{p'}', w_{p'}^{\alpha'}, z),$$

donde

$$\ell(C_4) = 1 + \ell(T^{\alpha+1}) + \ell(T_{p'}') + 1 = 1 + (k-1) + \ell(T_{p'}') + 1 = k + 1 + \ell(T_{p'}'),$$

de esta forma  $k + 1 < \ell(C_4) < n'$  y entonces  $k + 2 \leq \ell(C_4) < n'$ , pero esto contradice la minimalidad de  $n'$ .

Por lo tanto forzosamente debe pasar que  $\alpha' = \alpha - 1$ . De manera análoga y usando el hecho de que  $\overleftarrow{D}$  cumple todas las hipótesis notamos que si  $W_{\alpha-1} \rightarrow z$  y  $z \rightarrow W_\beta$  entonces forzosamente  $\beta = \alpha + 1$ . Concluimos entonces que  $W_{\alpha-1} \rightarrow z \rightarrow W_{\alpha+1}$  y de hecho son las únicas flechas entre  $z$  y  $D'$ , además como  $z$  fue un vértice arbitrario podemos concluir lo siguiente:

**Para cada  $z \in V(D) \setminus V(D')$  existe  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  tal que  $W_{\alpha-1} \rightarrow z \rightarrow W_{\alpha+1}$  (subíndices módulo  $d'$ ) y de hecho no existe  $\alpha_1 \in \{1, 2, \dots, d' - 1\} \setminus \{\alpha + 1\}$  tal que  $z \rightarrow W_{\alpha_1}$  ni  $\alpha_2 \in \{1, 2, \dots, d' - 1\} \setminus \{i - 1\}$  tal que  $W_{\alpha_2} \rightarrow z$ .**

Para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  llamemos  $V'_\alpha = \{v \in V(D) \setminus V(D') : W_{\alpha-1} \rightarrow z \rightarrow W_{\alpha+1}\}$ , ahora veremos que para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  se tiene que  $V'_\alpha$  es un conjunto independiente. Procedamos a probar esto por contradicción, sea  $\{z_1, z_2\} \in V'_\alpha$  tal que  $(z_1, z_2) \in F(D)$ , para alguna  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$ .

Sabemos que  $z_1 \rightarrow W_{\alpha+1}$ ,  $W_{\alpha-1} \rightarrow z_2$ , por lo tanto

$$\gamma = (z_1, z_2, w_1^{\alpha+1}, T^{\alpha+1}, w_{p'-1}^{\alpha-1}, z_1)$$

es un ciclo tal que

$$\ell(\gamma) = 2 + (\ell(T^{\alpha+1}) - 2) + 1 = 2 + ((k-1) - 2) + 1 = k,$$

pero esto es una contradicción ya que no hay  $k$ -ciclos en  $D$ . **Por lo tanto para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  se tiene que  $V'_\alpha$  es un conjunto independiente en  $D$ .**

De igual forma veamos que si para algunas  $\beta$  y  $\alpha$  en  $\{1, 2, \dots, d' - 1\}$  existe una  $V'_\alpha V'_\beta$ -flecha en  $D$  entonces  $\beta \equiv_{d'} \alpha + 1$ . Probemos esto por contradicción. Sea  $(z_1, z_2) \in F(D)$  una  $V'_\alpha V'_\beta$ -flecha tal que  $\beta \not\equiv_{d'} \alpha + 1$ . Como  $V'_\alpha$  es un conjunto independiente en  $D$  para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  y  $\beta \not\equiv_{d'} \alpha + 1$  entonces  $\beta \in (\{0, 1, \dots, d' - 1\} \setminus \{\alpha, \alpha + 1\})$ .

- Si  $\beta \equiv_{d'} \alpha - 1$  entonces consideramos el ciclo

$$\gamma_1 = (z_2, w_1^{\beta+1}, T^{\beta+1}, w_{p'-1}^\beta = w_{p'-1}^{\alpha-1}, z_1, z_2),$$

el cual es un ciclo tal que

$$\ell(\gamma_1) = 1 + (\ell(T^{\beta+1}) - 1) + 2 = 1 + ((k - 1) - 1) + 2 = k + 1,$$

lo cual contradice que  $D$  no tiene  $(k + 1)$ -ciclos.

- Si  $\beta \in (\{0, 1, \dots, d' - 1\} \setminus \{\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1\})$ , entonces podemos considerar la trayectoria  $T_{p'}'' = (w_{p'}^{\beta+1}, w_{p'}^{\beta+2}, \dots, w_{p'}^{\alpha-1})$ , y por elección de  $\beta$  sabemos que  $0 \leq \ell(T_{p'}'') < d' - 3$ , además de considerar el ciclo

$$\gamma_2 = (z_2, w_1^{\beta+1}, T^{\beta+1}, w_{p'}^{\beta+1}, T_{p'}'', w_{p'}^{\alpha-1}, z_1, z_2),$$

el cual sería un ciclo tal que  $\ell(\gamma_2) = 1 + (k - 1) + \ell(T_{p'}'') + 2 = k + 2 + \ell(T_{p'}'')$ , además  $k + 2 + \ell(T_{p'}'') < k + 2 + d' - 3 = (k - 1) + d' = k + d' - 1 = k + i' = n'$ , por lo tanto  $k + 2 \leq \ell(\gamma_2) < n'$  lo cual contradice la minimalidad de  $n'$ .

Por lo tanto **si existe una  $V'_\alpha V'_\beta$ -flecha en  $D$ , entonces  $\beta \equiv_{d'} \alpha + 1$ , es decir, es una  $V'_\alpha V'_{\alpha+1}$ -flecha.**

Ahora veamos que para cada  $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, d' - 1\}$  se tiene que  $V'_\alpha \rightarrow V'_{\alpha+1}$  (con los subíndices tomados módulo  $d'$ ). Sean  $z_1 \in V'_\alpha$  y  $z_2 \in V'_{\alpha+1}$  vértices arbitrarios para alguna  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  arbitraria. Consideremos la trayectoria  $R = (z_1, w_1^{\alpha+1}, T^{\alpha+1}, w_{p'-1}^\alpha, z_2)$  la cual es tal que  $\ell(R) = 1 + (\ell(T^{\alpha+1}) - 1) + 1$  ya que sólo no pasa por el último vértice de  $T^{\alpha+1}$ , por lo tanto  $\ell(R) = 1 + [(k - 1) - 1] + 1 = k$ , y de la  $k$ -transitividad de  $D$  se sigue que  $(z_1, z_2) \in F(D)$ . Entonces **para cada  $\alpha \in \{0, 1, \dots, d' - 1\}$  se tiene que  $V'_\alpha \rightarrow V'_{\alpha+1}$**  (índices módulo  $d'$ ). Para cada  $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, d' - 1\}$  denotemos por  $W'_\alpha = W_\alpha \cup V'_\alpha$ .

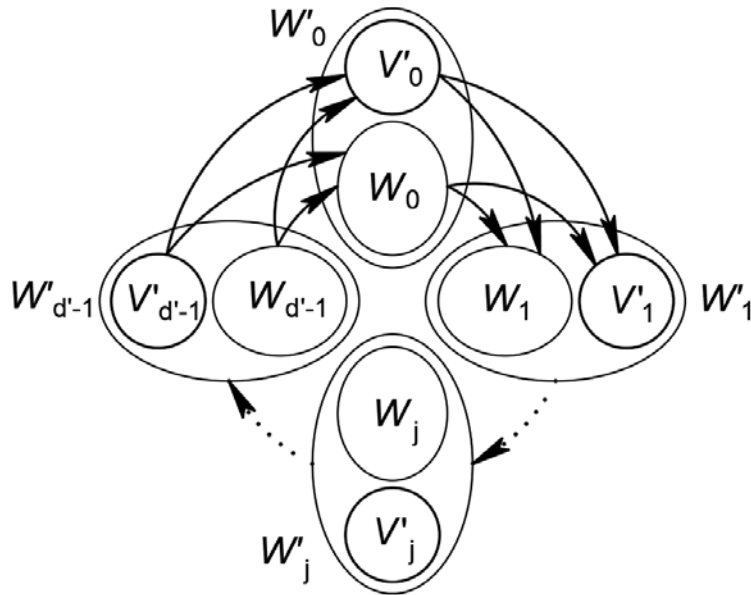


Figura 4.19

De lo anterior observamos que  $W'_0, W'_1, \dots, W'_{d'-1}$  es una  $d'$ -partición-cíclica de  $D$ , más aún  $D$  es un  $d'$ -ciclo extendido.

Como  $D$  es un  $d'$ -ciclo extendido, entonces cualquier ciclo  $C$  en  $D$  con  $\ell(C) \geq k + 2$ , cumple que  $d'$  divide a  $\ell(C)$ , ya que el ciclo sólo se mueve por un  $d'$ -ciclo extendido. Por otro lado, sabemos que  $d'$  divide a  $(k - 1)$ , entonces  $d'$  divide a  $(\ell(C), k - 1)$  para cualquier ciclo  $C$  con  $\ell(C) \geq k + 2$ . De lo anterior concluimos que  $d'$  divide a  $\min\{(\ell(C), k - 1) : C \text{ es un ciclo en } D \text{ con } \ell(C) \geq k + 2\}$  y como existe un  $n'$ -ciclo en  $D$  tal que  $(n', k - 1) = d'$  entonces  $\min\{(\ell(C), k - 1) : C \text{ es un ciclo en } D \text{ con } \ell(C) \geq k + 2\} \leq d'$ . Entonces  $d' = \min\{(\ell(C), k - 1) : C \text{ es un ciclo en } D \text{ con } \ell(C) \geq k + 2\}$ . Concluyendo la prueba del lema y  $D$  esta dada como en la figura 4.19.  $\square$

**Lema 4.10.** Sean  $k \geq 5$  un entero y  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Si  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$  es un  $n$ -ciclo en  $D$  con  $n \geq k + 2$ , si  $(n, k - 1) = 1$ , entonces  $D[V(C)]$  es una digráfica completa.

*Demostración.* Recordemos que  $C$  es un ciclo que pasa por todos los vértices de  $D[V(C)]$ , por lo tanto  $D[V(C)]$  es una digráfica fuerte y además  $|V(C)| \geq k + 2$ . Supongamos que  $(n, k - 1) = 1$ .

Como  $k \geq 5$ , se sigue del corolario 4.1 que existe un  $(k - 1)$ ,  $k$  ó  $(k + 1)$ -ciclo en  $D[V(C)]$ .

- Si existe un  $k$ -ciclo en  $D[V(C)]$ , entonces el lema 4.5 implica que  $D[V(C)]$  es completa.

- Si existe un  $(k + 1)$ -ciclo digamos  $C'$  en  $D[V(C)]$ , entonces consideramos dos casos:

1. Si  $k \equiv_2 0$ , entonces  $D[V(C)]$  es una digráfica completa por el lema 4.7.

2. Si  $k \equiv_2 1$ , entonces por el lema 4.6,  $D[V(C)]$  contiene una subdigráfica generadora bipartita completa  $D' = (X, Y)$  (donde  $X$  son todos los vértices con índice par en  $C$  y  $Y$  son todos los vértices con índice impar en  $C$ ).

-Si además  $(n, k - 1) = 1$ , es decir,  $n$  es impar (de ser  $n$  par se tendría que  $(n, k - 1) \geq 2$  ya que  $k - 1$  también es par), entonces  $D[V(C)]$  no puede ser bipartita ya que  $D[V(C)]$  contiene un ciclo de longitud impar. Por lo tanto podemos asumir sin pérdida de generalidad que existe una  $XX$ -flecha en  $D$ , dicho de otra manera, existe una diagonal en el ciclo  $C$  de la forma  $(v_h, v_{h'})$  con  $h \equiv_2 h'$ , por lo tanto podemos aplicar el lema 4.7 implicando que  $D[V(C)]$  es completa.

- Supongamos que no existe  $k$ -ciclo o  $(k + 1)$ -ciclo alguno en  $D[V(C)]$ . Entonces  $D[V(C)]$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo.

Sea  $n = k + i$  para algún entero  $i \in \mathbb{N}$ , como  $n \geq k + 2$  entonces  $i \geq 2$ . Sea  $n' = \min\{s \in \mathbb{N} : \text{existe un ciclo de longitud } s \text{ en } D[V(C)], \text{ con } s \geq k + 2\}$ , este mínimo existe porque en particular  $n$  pertenece a este conjunto, por lo tanto  $n \geq n' \geq k + 2$ . Sea  $d' = (n', k - 1)$ , por el lema 4.9 se tiene que  $D[V(C)]$  es un  $d'$ -ciclo extendido. Por lo tanto el  $n$ -ciclo  $C$  esta contenido en una digráfica cíclicamente  $d'$ -partita, en otras palabras,  $d' | n$  y además sabemos que  $d' | (k - 1)$  así  $d'$  es un común divisor de  $n$  y  $(k - 1)$ , con  $d' \geq 2$ , una contradicción ya que  $1 = (n, k - 1)$ .

Por lo tanto,  $D[V(C)]$  contiene un  $k$ -ciclo o un  $(k + 1)$ -ciclo, ya que el último caso no puede ocurrir. En cualquier caso ya hemos probado que  $D[V(C)]$  es una digráfica completa.  $\square$

**Teorema 4.2.** Dado un entero  $k$  con  $k \geq 2$ , sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva fuerte tal que  $D$  contiene un ciclo de longitud  $n$  con  $(n, k - 1) = d$  y  $n \geq k + 1$ . Entonces si  $D$  no es un  $(k + 1)$ -ciclo simétrico, se cumplen las siguientes condiciones:

- Si  $d = 1$ , entonces  $D$  es una digráfica completa.



- Si  $d \geq 2$ , entonces  $D$  es una digráfica completa, una digráfica bipartita completa o un  $d'$ -ciclo extendido, con  $d' = \min\{\ell(C_i), k - 1\}$  donde  $\{C_i\}_{i \in I}$  es la familia de todos los ciclos en  $D$  tal que  $\ell(C_i) \geq k + 2$  para  $i \in I$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva tal que contiene un ciclo  $C$  de longitud  $n$  con  $(n, k - 1) = d$  y  $n \geq k + 1$ . Supongamos que  $D$  no es un  $(k + 1)$ -ciclo simétrico.

Si  $k = 2$ , entonces es un resultado conocido que todas las digráficas transitivas fuertes, es decir, 2-transitivas fuertes, son completas.

Si  $k = 3$ , entonces de la proposición 3.5 vemos que  $D$  es completa ó bipartita completa, ya que no puede ser  $C_3$ ,  $C_3^*$  ni  $C_3^{**}$  (el 3-ciclo con cero, una y dos flechas simétricas, respectivamente) porque dichas digráficas sólo tienen 3 vértices y  $D$  contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq k + 1$ .

Si  $k = 4$ , entonces se sigue de la proposición 3.2 y del hecho de que existe un  $n$ -ciclo en  $D$  con  $n \geq k + 1$ , que sólo puede ocurrir que  $D$  sea una digráfica completa, un 3-ciclo extendido o un 5-ciclo simétrico, pero esto último no puede ocurrir ya que  $D$  no es un  $(k + 1)$ -ciclo simétrico. Por lo tanto  $D$  es completa o un 3-ciclo extendido (recordemos que si  $d' \in \mathbb{N}$  tal que  $d'$  divide a 3 y  $d' \neq 1$  entonces  $d' = 3$ ). Por lo tanto se cumple el teorema.

Si  $k \geq 5$ , entonces procedemos a analizar los casos:

- Si  $d = 1$ , entonces del lema 4.10 se sigue que  $D[V(C)]$  es una digráfica completa. Como  $|V(C)| \geq k + 1$  y  $D[V(C)]$  es completa, entonces  $D[V(C)]$  contiene un  $k$ -ciclo. Por lo tanto  $D$  es una digráfica fuerte  $k$ -transitiva, tal que contiene un  $k$ -ciclo y  $|V(D)| \geq k + 1$ , entonces del lema 4.5 se tiene que  $D$  es una digráfica completa.
- Si  $d \geq 2$ , como  $n \geq k + 1$  entonces  $n \geq k + 2$  ó  $n = k + 1$ . Recordemos que si  $n \geq k + 2$  entonces del corolario 4.1 se tiene que  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo, un  $k$ -ciclo ó un  $(k + 1)$ -ciclo. Por lo tanto  $D$  contiene un  $(k - 1)$ -ciclo, un  $k$ -ciclo ó un  $(k + 1)$ -ciclo.
  1. Si  $D$  contiene un  $k$ -ciclo, entonces  $D$  es una digráfica fuerte  $k$ -transitiva, tal que contiene un  $k$ -ciclo y además como contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq k + 1$ , entonces  $|V(D)| \geq k + 1$ . Por lo tanto del lema 4.5 se tiene que  $D$  es una digráfica completa.
  2. Si  $D$  contiene un  $(k + 1)$ -ciclo, entonces analicemos los casos para  $V(D) \setminus V(C)$ :
    - a)  $V(D) = V(C)$ .  
Supongamos que  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_0)$  es el  $(k + 1)$ -ciclo simétrico en  $D$ . Como  $D$  no es un  $(k + 1)$ -ciclo simétrico, entonces  $C$  tiene una diagonal  $(v_i, v_j)$ . Por lo tanto del lema 4.7 se tiene que  $D[V(C)]$  es una digráfica completa o bipartita completa. Como  $V(D) = V(C)$  entonces  $D$  es una digráfica completa o bipartita completa.
    - b)  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$ .  
Entonces  $D$  es una digráfica fuerte  $k$ -transitiva tal que  $|V(D)| \geq k + 2$  y tal que contiene un  $(k + 1)$ -ciclo. Por lo tanto del lema 4.6 se tiene que  $D$  es una digráfica completa o una digráfica bipartita completa.
  3. Si  $D$  no contiene  $k$ -ciclos ni  $(k + 1)$ -ciclos, entonces contiene un  $(k - 1)$ -ciclo.  
Entonces se sigue del lema 4.9 que  $D$  es un  $d'$ -ciclo extendido, con  $d' = \min\{\ell(C_i), k - 1\}$  donde  $\{C_i\}_{i \in I}$  es la familia de todos los ciclos en  $D$  tal que  $\ell(C_i) \geq k + 2$  para  $i \in I$ .

□

**Teorema 4.3.** *Dado un entero  $k$  con  $k \geq 2$ , sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva fuerte de orden al menos  $k + 1$ . Si  $D$  contiene un ciclo de longitud  $k$ , entonces  $D$  es una digráfica completa.*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva fuerte de orden al menos  $k + 1$  y  $C$  un ciclo de longitud  $k$  en  $D$ .

- Si  $k = 2$ , entonces sabemos que  $D$  es una digráfica completa ya que es fuerte y transitiva (2-transitiva).
- Si  $k = 3$ , entonces de la proposición 3.5 vemos que  $D$  es completa ó bipartita completa, ya que no puede ser  $C_3$ ,  $C_3^*$  ni  $C_3^{**}$  (el 3-ciclo con cero, una y dos flechas simétricas, respectivamente) porque dichas digráficas sólo tienen 3 vértices y  $D$  contiene un  $n$ -ciclo con  $n \geq k + 1$ . Además  $D$  contiene un  $k$ -ciclo y  $k = 3$ , es decir,  $D$  contiene un ciclo de longitud impar, por lo tanto  $D$  no es bipartita, en consecuencia  $D$  es completa.
- Si  $k = 4$ , entonces se sigue de la proposición 3.2 y del hecho de que existe un  $n$ -ciclo en  $D$  con  $n \geq k + 1$ , que sólo puede ocurrir que  $D$  sea una digráfica completa, un 3-ciclo extendido o un 5-ciclo simétrico, pero esto último no puede ocurrir ya que  $D$  no es un  $(k + 1)$ -ciclo simétrico. Por lo tanto  $D$  es completa o un 3-ciclo extendido (recordemos que si  $d' \in \mathbb{N}$  tal que  $d'$  divide a 3 y  $d' \neq 1$  entonces  $d' = 3$ ). Por otra parte vemos que  $D$  contiene un  $k$ -ciclo con  $k = 4$ , por lo tanto  $D$  no es un 3-ciclo extendido, de lo contrario pasaría que 3 divide a 4, ya que el 4-ciclo esta en un 3-ciclo extendido, lo cual es una contradicción. Entonces  $D$  es completa.
- Si  $k \geq 5$ , como  $D$  es una digráfica  $k$ -transitiva fuerte y tal que  $|V(D)| \geq k + 1$ , entonces del lema 4.5 concluimos que  $D$  es una digráfica completa.

□



# Capítulo 5

## $n$ -núcleos en digráficas fuertes $k$ -transitivas, con $n \geq k - 1$

En este último capítulo aplicaremos los resultados anteriores para encontrar  $n$ -núcleos en digráficas con  $n \geq k$  los cuales pueden ser encontrados en [7] y [9]. En especial nos serán de gran ayuda los dos capítulos anteriores ya que nos proveen de una caracterización de las digráficas fuertes que son 3-transitivas, 4-transitivas y las  $k$ -transitivas con un ciclo de longitud al menos  $k + 1$ .

Por otro lado, se dará una propiedad suficiente y necesaria para que una digráfica fuerte  $k$ -transitiva tenga un  $(k - 1)$ -núcleo dada en [12].

**Teorema 5.1.** *Si  $D$  es una digráfica  $k$ -trayectoria-transitiva entonces tiene un  $n$ -núcleo para cualquier  $n \geq k + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $N$  un núcleo por trayectorias de  $D$ , afirmamos que  $N$  es también un  $n$ -núcleo. Notamos que es  $n$ -independiente para toda  $n \geq k$  ya que  $N$  es independiente por trayectorias (en particular no hay trayectorias de longitud  $n$  para  $n \geq k$ ). Ahora, sea  $u \in V(D) \setminus N$  un vértice arbitrario en el complemento de  $N$ , entonces existe una  $uv$ -trayectoria para algún  $v \in N$ , por ser  $N$  absorbente por trayectorias, además  $D$  es  $k$ -trayectoria-transitiva, entonces por el lema 2.4, sabemos que existe también una  $uv$ -trayectoria de longitud menor o igual que  $k$ , entonces  $N$  es  $(n - 1)$ -absorbente para cualquier  $n \geq k + 1$ . Por lo tanto,  $N$  es un  $n$ -núcleo para  $D$ .  $\square$

**Teorema 5.2.** *Sea  $k \geq 2$  un entero, si  $D$  es una digráfica  $k$ -transitiva, entonces  $D$  tiene un  $n$ -núcleo para cualquier  $n \geq k$ .*

*Demostración.* Si  $D$  es una digráfica  $k$ -transitiva entonces por el lema 2.5  $D$  es  $(k - 1)$ -trayectoria-transitiva y del teorema 5.1, sabemos que  $D$  tiene un  $n$ -núcleo para cualquier  $n \geq (k - 1) + 1$ , es decir,  $D$  tiene un  $n$ -núcleo para cualquier  $n \geq k$ .  $\square$

**Teorema 5.3.** *Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva. Entonces  $D$  tiene un núcleo si y sólo si  $D$  no tiene ninguna componente fuerte terminal isomorfa a  $C_3$ , un ciclo de longitud 3.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva.

Procedamos por contradicción para probar la suficiencia. Si  $D$  es tal que alguna componente terminal  $S$  de  $D$  es isomorfa a  $C_3$ . Sea  $V(S) = \{v_0, v_1, v_2\}$  y  $F(S) = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0)\}$  (mód 3). Ya que  $S$  es terminal, tenemos que  $\delta^+(v) = 1$  para cualquier  $v \in V(S)$ , en otras palabras, el único ex-vecino (vecino exterior) de  $v_i$  es  $v_{i+1} \pmod{3}$  para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Notamos

que  $S$  no tiene núcleo, además los vértices en  $S$  no pueden ser absorbidos por vértices en  $D$  que no estén en  $S$ , por lo tanto,  $D$  no tiene núcleo.

Para probar la necesidad probemos por inducción sobre el número de componentes fuertes de  $D$ , que si  $D$  no tiene componente fuerte terminal isomorfa a  $C_3$  entonces  $D$  tiene un núcleo.

**Base:** Si  $n = 1$  entonces  $D$  es fuerte. Por la proposición 3.5, se tiene que  $D$  es completa, bipartita completa ó un ciclo de longitud 3, con ninguna, una o dos flechas simétricas, denotados por  $C_3$ ,  $C'_3$  y  $C''_3$  respectivamente. Como  $D$  no tiene ninguna componente fuerte terminal isomorfa a  $C_3$  entonces  $D \neq C_3$  (ya que  $D$  es la única componente fuerte de  $D$ ).

Si  $D$  es completa entonces para toda  $v \in V(D)$ , se tiene que  $\{v\}$  es un núcleo de  $D$ .

Si  $D$  es bipartita completa, con partición  $\{X, Y\}$ , se tiene que  $X$  es un núcleo de  $D$ .

Si  $D = C'_3$ , sin pérdida de generalidad  $V(D) = \{0, 1, 2\}$  y  $F(D) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (0, 2)\}$ , entonces  $\{2\}$  es un núcleo de  $D$ .

Si  $D = C''_3$ , entonces en particular  $C'_3$  es una subdigráfica generadora de  $D$  que tiene un núcleo comprendido por sólo un vértice y si  $\{v\}$  es un núcleo de  $C'_3$ , con  $v \in V(D)$ , entonces  $\{v\}$  es un núcleo de  $D$ .

Por lo tanto  $D$  tiene núcleo, completando así la base de inducción.

**Hipótesis inductiva:** Supongamos que cualquier digráfica 3-transitiva tal que ninguna de sus componentes fuertes terminales es isomorfa a  $C_3$ , con  $n$  componentes fuertes tiene un núcleo.

Sea  $D$  una digráfica 3-transitiva tal que ninguna de sus componentes fuertes terminales es isomorfa a  $C_3$  y tal que tiene  $(n + 1)$  componentes fuertes. Recordemos que la digráfica de condensación de  $D$ , denotada por  $D^*$ , es una digráfica acíclica, por lo tanto consideremos una componentes fuerte inicial  $S$  de  $D$ , por la proposición 3.5 sabemos que  $S$  es completa, bipartita completa ó un 3-ciclo simétrico con una, dos ó ninguna flecha simétrica (denotados por  $C'$ ,  $C''$  y  $C_3$ , respectivamente). Por hipótesis de inducción,  $D \setminus S$  tiene un núcleo  $N$ .

- Si  $S$  no es una digráfica bipartita completa, entonces  $S$  consiste de un sólo vértice o contiene una subdigráfica isomorfa a  $C_3$  (ya que  $S$  es completa,  $C_3$ ,  $C'_3$  ó  $C''_3$ ):

1. Si  $S$  consiste de un sólo vértice  $v$ , entonces:

a) si  $v$  es absorbido por  $N$ , acabamos ya que  $N$  es núcleo de  $D$ ,

b) si  $v$  no es absorbido por  $N$ , como  $S$  es inicial,  $N \cup \{v\}$  es independiente y entonces un núcleo de  $D$ .

2. Si  $S$  contiene una subdigráfica isomorfa a  $C_3$ , podemos tomar una trayectoria de longitud máxima en la digráfica de condensación  $D^*$  empezando en el vértice  $S$ , digamos  $P = (S = S_0, \dots, S_t)$  (esta trayectoria existe porque  $D$  es finita), como  $P$  es máxima entonces  $S_t$  es una componente terminal  $S_t$  de  $D$ , de lo contrario existiría una  $S' \in V(D^*)$  tal que  $(S_t, S') \in F(D^*)$ , pero  $D^*$  es acíclica, por lo tanto  $S' \notin V(P)$ , implicando que  $P' = (S, P, S_t, S')$  es una trayectoria de longitud estrictamente mayor que  $P$ , lo cual contradice la maximalidad de  $P$ . Por lo tanto  $S_t$  es una componente terminal.

Por lo anterior notamos que existe una  $SS_t$ -trayectoria en  $D$ , por lo tanto de la proposición 3.2 se tiene que existe una  $SS_t$ -flecha en  $D$ , por lo tanto del corolario 3.2 se sigue que  $S \rightarrow S_t$ .

Como  $S_t$  es terminal, al menos un vértice de  $S_t$  debe pertenecer a  $N$  (de lo contrario  $N$  no absorbería a los vértices de  $S_t$ ), y por lo tanto  $S$  es absorbido por  $N$ . Por lo tanto,  $N$  es un núcleo de  $D$ .

- Si  $S$  es una digráfica bipartita completa, debemos considerar tres casos. Sea  $\{X, Y\}$  la bipartición de  $S$ .
  1. Si tanto  $X$  como  $Y$  no son absorbidos por  $N$ , entonces consideramos  $N \cup X$ . Ya que  $S$  es una componente inicial, cualquier flecha entre  $X$  y  $N$  debe ser una  $XN$ -flecha. Pero si existe tal flecha, tendríamos por la proposición 3.1 inciso (5), que  $X \rightarrow N$ , contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto  $N \cup X$  es un conjunto independiente, y  $Y \rightarrow X$  porque  $S$  es una digráfica bipartita completa. Por lo tanto,  $N \cup X$  es un núcleo de  $D$ .
  2. Si algún vértice de  $X$  es absorbido por  $N$ , entonces por la proposición 3.1 inciso (5), que  $X$  es absorbido por  $N$ . Si suponemos que  $Y$  no es absorbido por  $N$ . De nuevo, ya que  $S$  es componente fuerte inicial, cualquier flecha entre  $N$  y  $Y$  debe ser una  $YN$ -flecha, pero no existe tal flecha. Por lo tanto,  $N \cup Y$  es un conjunto independiente absorbente de  $D$ , es decir, un núcleo de  $D$ .
  3. Cuando  $Y$  es absorbido pero  $X$  no lo es es análogo.
  4. Si tanto  $X$  como  $Y$  son absorbidos por  $N$ , tenemos que  $N$  es el núcleo deseado de  $D$ .

Ya que en cualquier caso  $D$  tiene un núcleo, entonces esto termina el proceso de inducción. Probando que el resultado se cumple.  $\square$

El siguiente teorema es una generalización al teorema 5.3.

**Teorema 5.4.** *Sea  $D$  una digráfica fuerte  $k$ -transitiva con  $k \geq 4$ . Entonces  $D$  tiene un  $(k - 1)$ -núcleo si y sólo si ésta no es isomorfa a un  $k$ -ciclo.*

*Demostración.* Procedamos por contradicción para probar la suficiencia. Si  $D$  es un  $k$ -ciclo. Sea  $V(D) = \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\}$  y  $F(D) = \{(v_i, v_{i+1})\}_{i=0}^{k-1}$  (mód  $k$ ). Notamos que  $D$  no tiene  $k - 1$ -núcleo, ya que si  $d(u, v) \geq k - 1$  para algún par de vértices en  $D$ , entonces  $d(v, u) = 1$ , además un sólo vértice no es  $(k - 2)$ -absorbente en  $D$ . Por lo tanto,  $D$  no tiene núcleo.

Ahora mostraremos la suficiencia. Ya que cualquier digráfica fuerte contiene un ciclo, consideramos los siguientes casos.

*Caso 1.*  $D$  contiene un ciclo de longitud al menos  $k + 1$ .

Por el teorema 4.2,  $D$  es una digráfica completa, una digráfica bipartita completa o un  $d'$ -ciclo extendido donde  $d' \geq 3$  y  $d'$  divide a  $k - 1$ .

**Observación:** Por la definición de  $(k - 1)$ -núcleos, un  $t$ -núcleo consistente de un único vértice es un  $(k - 1)$ -núcleo para  $(k - 1) \geq t$ , ya que es  $(k - 1)$ -independiente por ser un conjunto de un único vértice y es  $(k - 2)$ -absorbente porque en particular es  $(t - 1)$ -absorbente con  $(k - 2) \geq (t - 1)$ .

Notamos que si  $D$  es una digráfica completa o una digráfica bipartita completa, entonces cualquier vértice en  $V(D)$  es un 3-núcleo. Entonces,  $D$  tiene un  $(k - 1)$ -núcleo.

Ahora asumamos que  $D$  es un  $d'$ -ciclo extendido, denotado por  $D = C[X_1, \dots, X_{d'}]$ , donde  $C$  es un ciclo de longitud  $d'$  y cualquier  $X_i$  es un conjunto independiente. Note que  $2 \leq d' \leq k - 1$  y además para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  de  $D$  se cumple que  $d(u, v) \leq d'$ , por ser  $D$  un  $d'$ -ciclo extendido.

- Si  $d' = k - 1$ , entonces cualquier  $X_i$  es un  $(k - 1)$ -núcleo de  $D$ .

- Si  $2 \leq d' < k-1$ , entonces cualquier vértice en  $V(D)$  es un  $(k-1)$ -núcleo, ya que para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  en  $D$  se tiene que  $d(u, v) \leq d'$ .

*Caso 2.*  $D$  contiene un ciclo  $C$  de longitud  $k$ . Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0)$ .

- Si  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$ , entonces el teorema 4.3 implica que  $D$  es una digráfica completa. Recordemos que cualquier digráfica completa tiene un 2-núcleo consistente de sólo un vértice. Entonces,  $D$  tiene un  $(k-1)$ -núcleo.
- Si  $V(D) \setminus V(C) = \emptyset$ , como  $D$  es no isomorfa a un  $k$ -ciclo, entonces  $C$  contiene una flecha  $(x_i, x_j) \in F(D)$ , con  $j \in \{0, 1, \dots, k-1\} \setminus \{i+1\}$  (índices módulo  $k$ ). Observamos que la trayectoria  $P = (x_i, C, x_j)$ , es tal que  $\ell(P) \geq 2$ , ya que  $j \not\equiv_k i+1$  y además  $i \neq j$  porque no hay lazos en  $D$ .

Notamos que para cualquier  $x_l \in V(C)$ , si  $l \neq j+1$ , entonces  $(x_l, C, x_j)$  es una trayectoria de longitud a lo más  $k-2$ . Si  $l = j+1$ , entonces  $P' = (x_l = x_{j+1}, C, x_i, x_j)$  es una trayectoria de longitud a lo más  $k-2$ , ya que  $k = \ell(P) + \ell(P')$  y  $\ell(P) \geq 2$ . Por lo tanto  $d(x_l, x_j) \leq k-2$ , para cada  $x_l \in V(C) \setminus \{x_j\}$ , así  $x_j$  es un  $(k-1)$ -núcleo.

*Caso 3.*  $D$  contiene un ciclo  $C$  de longitud  $k-1$ . Sea  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_0)$ . En este caso, los índices son tomados módulo  $k-1$ .

Si  $V(D) \setminus V(C) = \emptyset$ , entonces cualquier vértice de  $D$  es un  $(k-1)$ -núcleo. Supongamos que  $V(D) \setminus V(C) \neq \emptyset$ .

Por el lema 2.10, para cualquier vértice  $x \in V(D) \setminus V(C)$ ,  $(x, V(C)) \neq \emptyset$  y  $(V(C), x) \neq \emptyset$ . Por lo anterior podemos definir los siguientes conjuntos:  $S_i = \{y \in V(D) \setminus V(C) : y \rightarrow x_i\}$ , para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ . Notamos que  $\bigcup_{i=0}^{k-2} S_i = V(D) \setminus V(C)$ .

- Si  $C$  es un ciclo inducido, es decir,  $D[V(C)] = C$ , entonces analicemos los casos sobre las adyacencias de los vértices de  $V(D) \setminus V(C)$  con  $V(C)$ .

1. Si existe  $x \in V(D) \setminus V(C)$  y  $\{x_i, x_j\} \subseteq V(C)$  tal que  $x_i \rightarrow x \rightarrow x_j$ , con  $j \in \{0, 1, \dots, k-2\} \setminus \{i+2\}$  (módulo  $k-1$ ).

Supongamos sin pérdida de generalidad, que  $i = 0$ , es decir,  $x_0 \rightarrow x \rightarrow x_j$  con  $j \in \{0, \dots, k-2\} \setminus \{2\}$ . Entonces  $0 \leq j \leq k-2$ , con  $j \neq 2$ . Notamos que para cualquier  $y \in V(D) \setminus S_{j+1}$ , se cumple que  $d(y, x_j) \leq k-2$ . Ahora analicemos el comportamiento de los vértices en  $S_{j+1}$ . Si  $V(D) \setminus V(C) = \{x\}$ , entonces  $x_j$  es un  $(k-1)$ -núcleo de  $D$ . Por lo tanto supongamos que existe un vértice en  $V(D) \setminus V(C)$  distinto de  $x$ .

Sea  $z \in S_{j+1}$  un vértice diferente de  $x$  (ya que no necesariamente  $S_{j+1} \cap S_j = \emptyset$ ).

- a) Si  $j = 0$ , entonces  $z \in S_1$  y  $(z, x_1, C, x_0 = x_j, x)$  es una trayectoria de longitud  $k$ , además  $D$  es  $k$ -transitiva, por lo tanto  $z \rightarrow x$  y así  $(z, x, x_j)$  es una  $zx_j$ -trayectoria, así  $d(z, x_j) = 2 \leq k-2$ , ya que  $k \geq 4$ . De esta forma,  $x_j$  es un  $(k-1)$ -núcleo.
- b) Si  $j = 1$ , entonces  $(x_0, x, x_j = x_1, C, x_0)$  es un ciclo de longitud  $k$ , entonces por el Caso 2,  $D$  tiene un  $(k-1)$ -núcleo.
- c) Si  $3 \leq j \leq k-2$ , entonces cuando  $k = 4$ , por la caracterización de las digráficas 4-transitivas dada en la proposición 3.2 y el hecho de que  $|V(D)| \geq 5$ , notamos que sólo pueden darse alguno de los primeros cuatro casos dados en la proposición 3.2.
  - I) Si  $D$  es una digráfica completa, entonces cualquier conjunto de un vértice es un  $(k-1)$ -núcleo.

- II) Si  $D$  es un 3-ciclo extendido, con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$  entonces  $V_0$  es un  $(k-1)$ -núcleo;
- III) Si  $D$  tiene circunferencia 3, un 3-ciclo extendido como subdigráfica generadora con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$ , existe al menos una flecha simétrica en  $D$  y para cualquier flecha simétrica  $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ , con  $v_j \in V_j$  para  $j \in \{i, i+1\}$  (los índices tomados módulo 3), se tiene que  $|V_i| = 1$  ó  $|V_{i+1}| = 1$ , entonces  $V_i$  ó  $V_{i+1}$  es un  $(k-1)$ -núcleo.
- IV) Si  $D$  tiene circunferencia 3,  $UG(D)$  no es 2-conexa por aristas y  $S_1, S_2, \dots, S_n$  son los conjuntos de vértices de las subgráficas 2-conexas por aristas maximales por contención de  $UG(D)$ , con  $S_i = \{u_i\}$  para cualquier  $2 \leq i \leq n$  y tal que  $D[S_1]$  tiene un 3-ciclo extendido como subdigráfica con partición cíclica  $\{V_0, V_1, V_2\}$ , entonces existe un vértice (sin pérdida de generalidad)  $v_0 \in V_0$  tal que  $\{(v_0, u_j), (u_j, v_0)\} \subseteq F(D)$  para cualquier  $2 \leq j \leq n$ . También  $|V_0| = 1$  y  $D[S_1]$  tiene la estructura descrita en (II) ó (III), dependiendo de la existencia de flechas simétricas. Entonces  $V_0$  es un  $(k-1)$ -núcleo.

Consideremos entonces  $k \geq 5$ .

- Si  $j = k-2$ , entonces la trayectoria  $(z, x_{j+1} = x_0, x, x_j)$  tiene longitud 3, por lo tanto  $d(z, x_j) \leq 3 \leq k-2$ .
  - Si  $j \neq k-2$ , entonces  $3 \leq j < k-2$  y podemos considerar la siguiente trayectoria  $T = (z, x_{j+1}, C, x_0, x, x_j)$ . Como  $\ell((x_{j+1}, C, x_0)) = k-1 - \ell((x_0, C, x_{j+1}))$  y  $4 \leq \ell((x_0, C, x_{j+1})) \leq k-2$ , entonces  $1 \leq \ell((x_{j+1}, C, x_0)) \leq k-5$ . Así  $4 \leq \ell(T) \leq k-2$ , por lo tanto  $x_j$  es un  $(k-1)$ -núcleo.
2. Si para cualquier  $z \in V(D) \setminus V(C)$ , existe  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$  tal que  $x_{i-1} \rightarrow z \rightarrow x_{i+1}$  y  $z$  no tiene otro vecino en  $C$ .

Ahora mostraremos que  $D$  es un  $(k-1)$ -ciclo extendido. Sea  $E_i = \{x \in V(D) \setminus V(C) : x_{i-1} \rightarrow z \rightarrow x_{i+1}\}$ , para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ . Notamos que  $\bigcup_{i=0}^{k-2} E_i = V(D) \setminus V(C)$ .

Primero probaremos que cualquier vértice de  $E_i \rightarrow E_{i+1}$ , para cualquier  $x \in E_i$  y  $y \in E_{i+1}$ , tenemos que  $(x, x_{i+1}, C, x_i, y)$  es una trayectoria de longitud  $k$ . Entonces  $x \rightarrow y$ . Sea  $\{x, x'\} \subseteq V(D) \setminus V(C)$  tal que  $x' \rightarrow x$ . Entonces existe  $\{i, j\} \in \{0, 1, \dots, k-2\}$  tal que  $x_{j-1} \rightarrow x \rightarrow x_{j+1}$  y  $x_{i-1} \rightarrow x' \rightarrow x_{i+1}$ . De esta forma  $(x', x, x_{j+1}, C, x_j)$  es una trayectoria de longitud  $k$ , lo cual implica que  $x' \rightarrow x_j$ . Por lo tanto, tenemos que  $j \equiv_{k-1} i+1$ . Se sigue que  $D = C[E'_0, E'_1, \dots, E'_{k-2}]$ , donde  $E'_i = E_i \cup \{x_i\}$  con  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$ . Observamos que cualquier  $E'_i$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$  es un  $(k-1)$ -núcleo ya que  $d(E'_j, E'_i) \leq k-2$  para cada  $j \in \{0, 1, \dots, k-2\} \setminus \{i\}$ .

- Si  $C$  no es un ciclo inducido.

Entonces existe una cuerda  $(x_j, x_i)$  en  $C$ , con  $i \not\equiv_{k-1} j+1$ . Ahora probaremos que  $x_i$  es un  $(k-1)$ -núcleo. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $j = 0$ , por lo tanto  $2 \leq i \leq k-2$ . Notamos que para cualquier  $y \in V(D) \setminus S_{i+1}$ ,  $d(y, x_i) \leq k-2$ . Sea  $z \in S_{i+1}$ . Observemos que  $T' = (z, x_{i+1}, C, x_0, x_i)$  es una trayectoria tal que  $\ell(T') = 1 + (k-1 - (i+1)) + 1 = k-i$ , por lo tanto  $2 \leq \ell(T') \leq k-2$ . Lo cual implica que  $d(z, x_i) \leq k-2$  y  $x_i$  es un  $(k-1)$ -núcleo.

*Caso 4.* No existe ciclo de longitud mayor o igual a  $k-1$  en  $D$ . Sea  $x$  un vértice de máximo ex-grado en  $D$ .

Si  $\delta^+(x) = 1$ , entonces el ex-grado de cualquier vértice en  $D$  es uno, ya que  $D$  es fuerte (si  $\delta^+(x) = 0$  para algún  $x \in V(D)$  entonces de ese vértice no podría ser posible llegar a los demás



vértices, salvo la gráfica trivial, que al ser completa tiene  $(k-1)$ -núcleo para cualquier  $k \geq 4$ ). Como  $D$  es fuerte y no existe ciclo de longitud mayor o igual a  $k-1$ , entonces  $D$  es un ciclo de longitud a lo más  $k-2$ , así cualquier vértice de  $D$  es un  $(k-1)$ -núcleo.

Supongamos que  $\delta^+(x) \geq 2$ , es decir,  $|N^+(x)| \geq 2$ . Si  $x$  es un  $(k-1)$ -núcleo, entonces acabamos; si no es, entonces existe  $z \in V(D) \setminus \{x\}$  tal que  $d(z, x) \geq k-1$ . Combinando esto con el lema 2.6, tenemos que  $d(z, x) = k-1$ . Denotemos  $W_s = \{y \in V(D) : d(y, x) = s\}$ , para cada  $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Observamos que  $\bigcup_{s=0}^{k-1} W_s = V(D)$  y aparte  $W_{s_1} \cap W_{s_2} = \emptyset$  si y sólo si  $s_1 \neq s_2$ .

Si suponemos que existe  $(y_j, y_i) \in F(D)$  con  $y_j \in W_j$  y  $y_i \in W_i$  con  $1 \leq i \leq j-2$ , entonces  $d(y_j, x) \leq j-1$  ya que  $d(y_i, x) \leq j-2$  y  $(y_j, y_i) \in F(D)$ , lo cual contradice la definición de  $W_j$ . Por lo tanto  $(W_1 \cup \dots \cup W_i) \Rightarrow W_j$  cuando  $j \geq i+2$ . A continuación se prueban tres afirmaciones importantes, la figura 5.1 sirve como apoyo visual.

**Afirmación 1.**  $N^+(x) \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_{k-3}$ .

Como  $D$  no tiene lazos,  $N^+(x) \cap W_0 = \emptyset$ . Por definición de  $W_s$  todo vértice de  $W_s$  puede alcanzar a  $x$  por medio de una trayectoria de longitud  $s$ , de hecho esta longitud es la mínima. Si  $N^+(x) \cap (W_{k-1} \cup W_{k-2}) \neq \emptyset$ , sea  $v \in N^+(x) \cap (W_{k-1} \cup W_{k-2})$ , y sea  $P$  la trayectoria más corta de  $v$  a  $x$ . Entonces  $(v, P, x, v)$  es un ciclo de longitud  $k$  si  $v \in W_{k-1}$  ó un ciclo de longitud  $(k-1)$  si  $v \in W_{k-2}$ , una contradicción a las hipótesis del Caso 4. Por lo tanto,  $N^+(x) \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_{k-3}$ .

**Afirmación 2.** *Todo vértice de  $N^+(x)$  está contenido en cada trayectoria de longitud mínima de cualquier vértice de  $W_{k-1}$  a  $x$ .*

Sea  $z' \in W_{k-1}$  y  $P'$  una trayectoria de longitud mínima de  $z'$  a  $x$ , es decir,  $\ell(P') = k-1$ . Si existe  $v \in N^+(x)$  tal que  $v \notin V(P')$ , entonces  $(z', P', x, v)$  es una trayectoria de longitud  $k$ , lo cual implica que  $z' \rightarrow v$ , una contradicción ya que  $v \in (W_1 \cup \dots \cup W_{k-3})$  y  $(W_1 \cup \dots \cup W_{k-3}) \Rightarrow W_{k-1}$ . Entonces  $v \in V(P')$  y más aún  $N^+ \subseteq V(P')$ . La prueba de la afirmación esta completa.

**Afirmación 3.** *Para cualquier  $s \in \{1, \dots, k-1\}$ , si  $P = (y_s, y_{s-1}, \dots, y_0 = x)$  es una  $y_s x$ -trayectoria de longitud mínima, entonces  $y_j \in W_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ .*

Sea  $P = (y_s, y_{s-1}, \dots, y_0 = x)$  una  $y_s x$ -trayectoria de longitud mínima, por la minimalidad de  $P$  se sigue que  $(y_j, P, y_0 = x)$  es una  $y_j x$ -trayectoria de longitud mínima para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$  y de la definición de  $W_j$  se tiene que  $y_j \in W_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ , concluyendo la prueba de la afirmación 3.

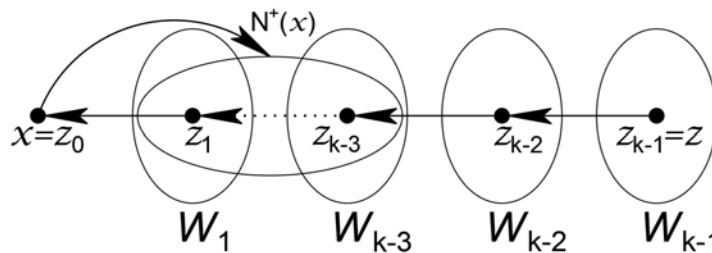


Figura 5.1

Si  $|N^+ \cap W_s| \geq 2$ , para alguna  $s \in \{1, \dots, k-3\}$ , entonces sean  $w_s$  y  $w'_s$  dos vértices distintos en  $N^+ \cap W_s$ . Sea  $z \in W_{k-1}$  y  $P_z = (z = z_{k-1}, z_k, \dots, z_1, x)$  una trayectoria de longitud mínima de

$z$  hacia  $x$ , por la afirmación 2 se tiene que  $\{w_s, w'_s\} \subseteq V(P_z)$ . Por la afirmación 3, se tiene que  $u_s = w_s$  y también  $z_s = w'_s$  de lo contrario  $P_z$  no es mínima, así  $w_s = w'_s$ , pero esto contradice el hecho de que  $w'_s \neq w_s$ . Por lo tanto  $|N^+ \cap W_s| \leq 1$ , para cualquier  $s \in \{1, 2, \dots, k-3\}$ .

Sea  $r = \min\{j \in \{1, \dots, k-3\} : W_j \cap N^+ \neq \emptyset\}$ . Denotemos  $N^+(x) \cap W_r = \{w\}$ . Ahora mostraremos que  $w$  es un  $(k-1)$ -núcleo.

- Sea  $u \in W_{k-1}$ .

Sabemos que para cualquier  $u \in W_{k-1}$  podemos considerar  $P_u = (u = u_{k-1}, u_k, \dots, u_1, x)$  una trayectoria de longitud mínima de  $u$  a  $x$ , por la afirmación 2, se tiene que  $w \in V(P_u)$  y por la afirmación 3,  $w = u_r$ , con  $r \geq 1$ , por lo tanto  $P'_u = (u, P_u, u_r = w)$  es tal que  $\ell(P'_u) \leq k-2$ , por lo tanto  $d(u, w) \leq k-2$ .

- Sea  $u \in W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{k-3}$ .

Notamos que para cualquier  $u \in W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{k-3}$ , como  $d(u, x) \leq k-3$  y  $(x, w) \in F(D)$ , se tiene que  $d(u, w) \leq k-2$ .

- Sea  $u \in W_{k-2}$ .

1. Si  $d(u, w) \leq k-2$  para cualquier  $u \in W_{k-2}$ , entonces  $\{w\}$  es un  $(k-1)$ -núcleo.
2. Si  $d(u, w) \geq k-1$  para alguna  $u \in W_{k-2}$ . Por el lema 2.6 el  $\text{diam}(D) \leq k-1$ , así  $d(u, w) = k-1$ . Sea  $R = (u = u_{k-2}, u_{k-3}, \dots, u_1, u_0 = x)$  una trayectoria de longitud mínima de  $u$  a  $x$  y por la afirmación 3, tenemos que  $u_j \in W_j$  para  $j \in \{1, 2, \dots, k-3\}$  y sea  $Q = (z = z_{k-1}, z_{k-2}, \dots, z_0 = x)$  una trayectoria de longitud mínima de  $z$  a  $x$ , donde  $z_j \in W_j$  para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k-2\}$  por la afirmación 3.

Por la afirmación 2 y la elección de  $r$ , tenemos que  $N^+(x) \subseteq \{z_r, \dots, z_{k-3}\}$ , con  $w = z_r$ .

-Si  $u \in V(Q)$  entonces por la afirmación 3 tenemos que  $u = z_{k-2}$  y  $(u = z_{k-2}, Q, z_r = w)$  es una  $uw$ -trayectoria de longitud menor a  $(k-2)$ , una contradicción al hecho de que  $d(u, w) = k-1$ .

-Si  $w \in V(R)$  entonces por la afirmación 3 tenemos que  $w = u_r$  y  $(u = u_{k-2}, R, u_r = w)$  es una  $uw$ -trayectoria de longitud menor a  $(k-2)$ , una contradicción al hecho de que  $d(u, w) = k-1$ .

De lo anterior concluimos que  $u \notin V(Q)$  y  $w \notin V(R)$ , así  $z_{k-2} \neq u$  y  $w \neq u_r$ .

- Si existe un vértice  $v' \in \{z_{r+1}, \dots, z_{k-3}\} \cap V(R)$ , entonces por la afirmación 3 se tiene que  $z_i = v' = u_i$ , para alguna  $i \in \{r+1, \dots, k-3\}$  y  $\gamma = (u_{k-2}, R, u_i = z_i, z_{i-1}, P, z_r = w)$  es una trayectoria de longitud  $k-2-r$ . Recordando que  $1 \leq r \leq k-3$ , tenemos que  $1 \leq k-2-r \leq k-3$ . Entonces,  $\ell(\gamma) \leq k-3$ , una contradicción al hecho de que  $d(u, w) = k-1$  (figura 5.2a).
- Si  $\{z_{r+1}, \dots, z_{k-3}\} \cap V(R) = \emptyset$ . Como  $\delta^+(x) \geq 2$ , entonces existe  $p \in \{r+1, \dots, k-3\}$  tal que  $z_p \in N^+(x)$ , así  $(u, R, x, z_p, z_{p-1})$  es una trayectoria de longitud  $k$  (figura 5.2b). Por lo tanto,  $u \rightarrow z_{p-1}$ , una contradicción al hecho de que  $(W_1 \cup \dots \cup W_{k-4}) \Rightarrow W_{k-2}$ , ya que  $1 \leq r \leq p-1 \leq k-4$ .

Concluyendo que el caso (2) no puede pasar, en otras palabras,  $d(u, w) \leq k-2$ .

Así hemos mostrado que  $w$  es un  $(k-1)$ -núcleo.

Por lo tanto de los anteriores casos tenemos que  $D$  tiene un  $(k-1)$ -núcleo. □

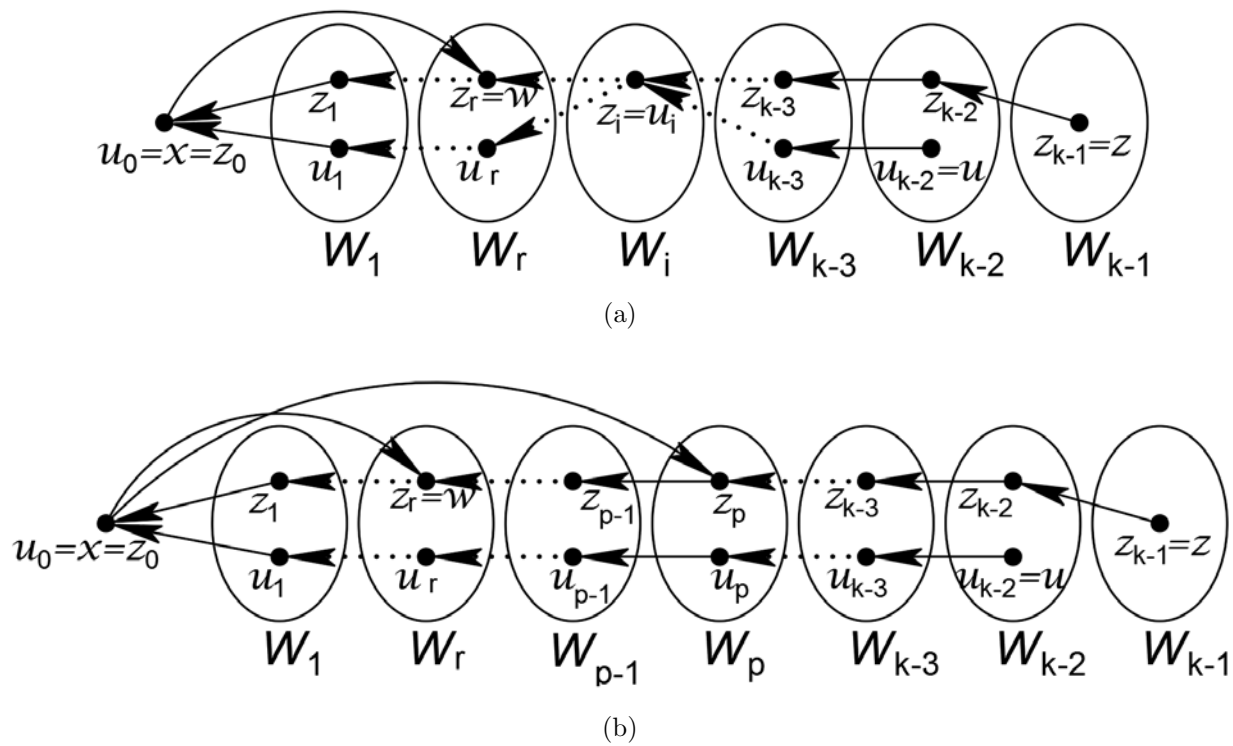


Figura 5.2

En vista del teorema 5.4 y del teorema 5.4, se propuso la siguiente conjetura en [7].

**Conjetura** Sea  $D$  una digráfica  $k$ -transitiva. Entonces  $D$  tiene un  $(k-1)$ -núcleo si y sólo si ésta no tiene componente terminal isomorfa a un  $k$ -ciclo.

La prueba de la suficiencia de la conjetura es inmediata por contrapositiva, sin embargo cabe mencionar que con el propósito de dar respuesta a esta conjetura, se realizó el estudio de las estructuras de las digráficas  $k$ -transitivas, ya que en las pruebas de los teoremas 5.3 y 5.4, es indispensable conocer la estructura de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas para desglosar los casos. Como se puede ver en el capítulo 4, para poder garantizar la existencia de más flechas entre las subestructuras de una digráfica  $k$ -transitiva, es necesario que en principio exista una trayectoria de longitud mayor o igual a  $k$ , de otra forma no se puede utilizar la propiedad de  $k$ -transitividad. De igual forma la propiedad de contener un ciclo de longitud al menos  $k$  en una digráfica es muy restrictiva ya que las familias de digráficas fuertes con a lo más  $k-1$ , vértices son un ejemplo de familias de digráficas que no tienen un ciclo de longitud al menos  $k$ . De igual manera se quisiera realizar una prueba por inducción de la necesidad de la conjetura, sin embargo vuelve a aparecer el problema de necesitar la estructura de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas que no contengan algún ciclo de longitud mayor a  $k$ . Por tal motivo, la prueba de la conjetura resultó infructuosa, por lo tanto solamente se expone dicha conjetura.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Al analizar a las familias de digráficas  $k$ -cuasitransitivas y  $k$ -transitivas nos damos cuenta que añadirles la hipótesis de que sean fuertes, es suficiente para poder caracterizarlas; salvo para  $k \geq 5$  donde además tenemos que pedir la existencia de un  $n$ -ciclo en  $D$ , con  $n \geq k + 1$ . Es natural que debamos agregar esta hipótesis para poder deducir las estructuras de las digráficas fuertes  $k$ -transitivas con  $k \geq 5$ , ya que si no contáramos con al menos  $k + 1$  vértices en  $D$ , no existirían trayectorias de longitud  $k$  y por lo tanto serían  $k$ -transitivas por vacuidad. Se hace una excepción cuando la digráfica tiene un ciclo de longitud  $k$  y al menos un vértice afuera del ciclo, sin embargo la existencia de un ciclo de longitud menor a  $k - 1$  no nos ayuda para poder caracterizar a dichas digráficas; esto se debe en gran medida a que no podemos movernos por los ciclos para utilizar la  $k$ -transitividad, tal y como hicimos el trabajo en esta tesis al valernos de la existencia de ciclos lo suficientemente grandes.

Resulta interesante ver que podemos garantizar la existencia de  $n$ -núcleos para  $n \geq k - 1$  al trabajar en digráficas fuertes  $k$ -transitivas las cuales no sean un  $(k + 1)$ -ciclo simétrico, porque nos ayuda a entender el comportamiento de interrelación por trayectorias en dichas digráficas. No fue posible dar una prueba de la conjetura abordándola desde la caracterización de la estructura de las digráficas  $k$ -transitivas, ya que una propiedad necesaria para garantizar la existencia de más flechas en la digráfica es la de tener un ciclo de longitud al menos  $k$  y es muy restrictiva, además de que todas las digráficas con a lo mas  $k - 1$  vértices no cumplen esto, sin embargo el trabajo presente expone lo necesario para abordar a las digráficas fuertes  $k$ -transitivas y si alguien desea dar solución a dicha conjetura, este material supone un buen apoyo.



# Apéndice A

## Teoría de números

Denotaremos por  $\mathbb{Z}$  al conjunto de los números enteros y por  $\mathbb{N}$  al conjunto de los números naturales y consideraremos  $\mathbb{N} = \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

Dados dos números enteros  $m$  y  $n$  se dice que  $m$  divide a  $n$  si y sólo si existe un entero  $p$  tal que  $n = pm$  y lo denotaremos por  $m|n$ . Se define  $(m, n)$  como  $(m, n) = \max\{d \in \mathbb{Z} : d|m \text{ y } d|n\}$ . Un número primo es un entero  $p > 1$  tal que sus únicos divisores son 1 y  $p$ .

**Teorema A.1. (Algoritmo de la división)** Sean  $a$  y  $d$  enteros con  $d \geq 1$ . Existe una única pareja de enteros  $q$  y  $r$  tal que

$$a = dq + r$$

donde

$$0 \leq r < d.$$

**Teorema A.2.** Sean  $m$  y  $n$  enteros no ambos cero. Entonces  $(m, n) = 1$  si y sólo si existen  $x$  y  $y$  enteros tal que  $mx + ny = 1$ .

**Teorema A.3.** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  son enteros. Si  $a|bc$  y  $(a, b) = 1$  entonces  $a|c$ .

Dado un entero  $n$  distinto del 0 se define una relación sobre  $\mathbb{Z}$  llamada la **congruencia módulo  $n$** , denotada por  $\equiv_n$ , dada de la siguiente manera:

Dados dos enteros  $a$  y  $b$  se dice que  $a$  es congruente módulo  $n$  con  $b$  si y sólo si  $n|(a - b)$ , y se denota por  $a \equiv_n b$ . Sea  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , entonces para cualquier  $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{Z}$  se tiene que:

1.  $a \equiv_n a$  (reflexividad),
2. Si  $a \equiv_n b$  entonces  $b \equiv_n a$  (simetría),
3. Si  $a \equiv_n b$  y  $b \equiv_n c$  entonces  $a \equiv_n c$  (transitividad),
4. Si  $a \equiv_n b$  y  $c \equiv_n d$  entonces  $a + b \equiv_n c + d$ .
5. Si  $a \equiv_n b$ , entonces para cualquier  $c \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $ac \equiv_n bc$ .
6. Si  $n|a$  y  $n|b$  entonces  $n|(a - b)$ .

La clase de equivalencia de un entero  $a$  con la relación  $\equiv_n$  es llamada clase de congruencia y es denotada por  $a + n\mathbb{Z}$ , donde  $a + n\mathbb{Z}$  es el conjunto de todos los enteros  $b$  tal que  $b \equiv_n a$ .

Denotaremos por  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$  al conjunto de todas las clases de congruencia módulo  $n$ , tomando como representante a los residuos positivos menores que  $n$ , dados por el algoritmo de la división.

Si  $n$  es un entero no cero y además  $q$  y  $m$  son enteros entonces:

1.  $m\mathbb{Z}_n$  es el subconjunto de  $\mathbb{Z}_n$  de todas las clases de congruencia  $\{m(0), m(1), \dots, m(n-1)\}$ ,
2.  $q+m\mathbb{Z}_n$  es el subconjunto de  $\mathbb{Z}_n$  de todas las clases de congruencia  $\{q+m(0), q+m(1), \dots, q+m(n-1)\}$ . Más aún  $q+m\mathbb{Z}_n = m\mathbb{Z}_n$ ,
3. si  $m \equiv_n q$  y  $(m, n) = 1$  entonces existe un entero  $x$  tal que  $1 \equiv_n xq$  y se dice que  $m$  es una unidad en  $\mathbb{Z}_n$

Si  $p$  es un número primo entonces todas sus clases de congruencia son unidades.

**Lema A.1.** *Para cualquier pareja de enteros positivos  $d$  y  $p$  se cumple que*

$$d(p-1)\mathbb{Z}_{dp} = \{0, d, 2d, \dots, (p-1)d\}$$

(residuos módulo  $dp$ ).

*Demostración.* Si  $p = 1$  el resultado es inmediato ya que  $d(p-1)\mathbb{Z}_{dp} = \{0\}$ , por lo tanto suponemos que  $p \geq 2$ .

Primero probemos que  $d(p-1)\mathbb{Z}_{dp} \subseteq \{0, d, 2d, \dots, (p-1)d\}$ . Sea  $m' \in d(p-1)\mathbb{Z}_{dp}$ , por lo tanto  $m' = d(p-1)m$  para alguna  $m \in \mathbb{Z}_{dp}$ , consideraremos  $\mathbb{Z}_{dp} = \{0, 1, 2, \dots, dp-2, dp-1\}$ , es decir, elegimos los representantes como los residuos módulo  $dp$ . Por el algoritmo de la división existe una única pareja de enteros  $q_m$  y  $r_m$  tal que  $m = pq_m + r_m$ , con  $0 \leq r_m < p$ . Entonces

$$d(p-1)m = d(p-1)(pq_m + r_m) = d(p-1)pq_m + d(p-1)r_m = dp[(p-1)q_m + r_m] - dr_m$$

y por lo tanto

$$d(p-1)m \equiv_{dp} -dr_m \equiv_{dp} dp - dr_m \equiv_{dp} d(p-r_m) \equiv_{dp} dr'_m,$$

con  $0 \leq r_m < p$  y por lo tanto  $0 \leq r'_m < p$ ; así  $m' \equiv_{dp} dr'_m$  con  $0 \leq r'_m < p$  lo que implica que  $m' \in \{0, d, 2d, \dots, (p-1)d\}$ .

Notamos que los pasos anteriores son reversibles, por lo tanto  $\{0, d, 2d, \dots, (p-1)d\} \subseteq d(p-1)\mathbb{Z}_{dp}$ . Concluyendo que  $d(p-1)\mathbb{Z}_{dp} = \{0, d, 2d, \dots, (p-1)d\}$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] J. BANG-JENSEN y G. GUTIN, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications* (Springer, London, 2000).
- [2] J. BANG-JENSEN, *The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs*, Discrete Math. 283(2004)1-6
- [3] C. BERGE, *Graphs*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [4] V. CHVÁTAL, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report No. CRM-300, Center de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal (1973)
- [5] A. S. FRAENKEL, *Combinatorial games: Selected bibliography with a succinct gourmet introduction*, Electron. J. Combin. 14 (Dynamic Survey DS2)(2009)
- [6] H. GALEANA-SÁNCHEZ, I.A. GOLDFEDER y I. URRUTIA, *On the structure of 3-quasi-transitive digraphs*, Discrete Math. 310 (2010) 2495–2498. doi:10.1016/j.disc.2010.06.008
- [7] C. HERNÁNDEZ-CRUZ, *3-transitive digraphs*, Discuss. Math. Graph Theory 32 (2012) 205–219. doi:10.7151/dmgt.1613
- [8] C. HERNÁNDEZ-CRUZ, *4-transitive digraphs I: the structure of strong transitive digraphs*, Discuss. Math. Graph Theory 33 (2013) 247–260. doi:10.7151/dmgt.1645
- [9] C. HERNÁNDEZ-CRUZ y H. GALEANA-SÁNCHEZ, *k-kernels in k-transitive and k-quasi-transitive digraphs*, Discrete Math. 312 (2012) 2522–2530. doi:10.1016/j.disc.2012.05.005
- [10] C. HERNÁNDEZ-CRUZ y J.J. MONTELLANO-BALLESTEROS, *Some remarks on the structure of strong k-transitive digraphs*, Discuss. Math. Graph Theory 34 (2014) 651–671. doi:10.7151/dmgt.1765
- [11] M. KWAŚNIK, *On  $(k, l)$ -kernels on graphs and their products*, Doctoral Dissertation, Technical University of Wrocław, 1980.
- [12] RUIXIA WANG,  *$(k-1)$ -kernels in strong k-transitive digraphs*, Discuss. Mathematicae Graph Theory 35 (2015) 229–235 doi:10.7151/dmgt.1787
- [13] A. WŁOCH y I. WŁOCH, *On  $(k, l)$ -kernels in generalized products*, Discrete Math. 164(1997)295-301.