UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conjuntos finitos a la Tarski. Modelos de permutación.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Alejandra Osiris Romero Juárez

TUTOR

M. en C. Rafael Rojas Barbachano

Ciudad Universitaria, CDMX 2017

1. Datos del alumno.
   Romero Juárez Alejandra Osiris
   alejuarez@ciencias.unam.mx
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   309271572
2. Datos del tutor.
   M. en C.
   Rafael
   Rojas
   Barbachano
3. Datos del sinodal 1.
   Dr.
   David
   Meza
   Alcántara
4. Datos del sinodal 2.
   Dr.
   Osvaldo Alfonso
   Téllez
   Nieto
5. Datos del sinodal 3.
   M. en C.
   Osvaldo
   Guzmán
   González
6. Datos del sinodal 4.
   Dr.
   Alejandro
   Alvarado
   García
7. Datos del trabajo escrito.
   Conjuntos finitos a la Tarski. Modelos de Permutación.
   44 pp
   2017

Gracias a mi familia y amigos: A mamá, Cuca, a los abuelos, Moi, Rafa y Rodrigo. Por apoyarme y acompañarme en la carrera. A Mau, por estar ahí siempre.

Y gracias a mis profesores y sinodales, sin quiénes este trabajo no hubiera sido posible: Alejandro Alvarado, Rafael Rojas, Mariana Martínez, Naim Núñez Fernando Nuñez, Osvaldo Guzmán, David Meza y Osvaldo Téllez.

Índice

Capítulo 1

Antecedentes históricos e introducción

La definición habitual de conjunto finito que usamos hoy en día (un conjunto es finito si es equipotente a algún natural) apareció mucho después de que la idea de infinito actual fuera aceptada y fue de las últimas en aparecer. Bernard Bolzano, quien fue de los primeros matemáticos en apoyar la idea de infinito actual, dio varias propiedades que los conjuntos infinitos y finitos debían cumplir en *Paradoxien des Unendlichen (Paradojas del infinito)* [1], publicado en 1851. Dos de esas propiedades son las que, tiempo después, Georg Cantor y Richard Dedekind utilizarían como definiciones.

Cantor no enunció como tal una definición, pero en 1895, en *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, (Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers)* [2], describió a los conjuntos finitos como aquellos que se pueden obetener de agregar elementos de uno en uno a un conjunto inicial con un sólo elemento. Por otra parte, Dedekind sí publicó una definición formal en *Was sind und was sollen die Zahlen?, (The Nature and Meaning of Numbers, 1888)* [3] en la que dice que un conjunto es infinito si hay una parte propia de él a la que es similar (equipotente). En este mismo escrito, Dedekind da una demostración de que estas dos definiciones son equivalentes, usando implicitamente el axioma de elección numerable. Poco tiempo después, en 1896, Rodolfo Bettazzi criticó la prueba de Dedekind al darse cuenta de las elecciones arbitrarias y Bertrand Russell, en su *Principia Mathematica* de 1912 [21] consideró la posibilidad de que existieran conjuntos que fueran infinitos con la definición de Cantor, pero finitos con la de Dedekind (los conjuntos que son finitos con la definición de Cantor siempre lo son con la de Dedekind, anulando la otra posibilidad). A los cardinales de estos conjuntos los llamó *mediate cardinals* y más tarde también se les llamaría *cardinales de Dedekind*. Éstos fueron estudiados y generalizados[1]. Una prueba importante de Russell que también debe ser mencionada, es la que establece la equivalencia entre los siguientes enunciados:

- Todos los conjuntos infinitos (con la definición de Cantor) también son Dedekind-infinitos.
- El conjunto potencia de un conjunto Dedekind-finito es Dedekind-finito.
- La unión de un conjunto Dedekind-finito cuyos elementos son Dedekind-finitos es Dedekind-finita.

[1] Hay un articulo completo sobre ellos de Dorothy Wrinch, alumna de Russell (*On Mediate Cardinals* de 1923 [22])

La equivalencia de éstos marca que se necesita aún menos que el axioma de elección numerable para evitar que existan conjuntos cuyos cardinales sean de Dedekind (en el primer modelo de Sageev para ZF, que se puede consultar en [8], no hay conjuntos infinitos Dedekind-finitos, pero el axioma de elección numerable es falso.)

En otro artículo de Whitehead, fechado en 1902,[20] Russell y Whitehead usan un debilitamiento del axioma de elección (todo conjunto infinito es la unión de alguna familia de conjuntos numerables ajenos) para probar que para todo cardinal m se tiene que $m + m = m$ y dejan como problema abierto el probar que si $n \leq m$ entonces $m = n \cdot m$.

En 1924, cuando Wacław Sierpiński ya había agrupado algunas definiciones de conjuntos finitos como equivalentes a la definición de Cantor o a la de Dedekind sin el axioma de elección, Alfred Tarski publicó en *Fundamenta Mathematicae* su artículo *Sur les ensembles finis* [18], en el que introduce 4 nuevas definiciones de finitud (en este trabajo, las definiciones I, II y III de finitud, y otra que especifica a un conjunto finito como aquél que no puede ser visto como la unión de dos conjuntos ajenos equipotentes al conjunto original), demuestra algunas implicaciones sin el axioma de elección y conjetura que para el resto de las implicaciones el axioma es necesario. En otro de 1938 [16], da 3 definiciones más (una de ellas es la definición de VI-finito) cuya equivalencia de cada una con la definición de Cantor implica al axioma de elección y otra, cuya equivalencia con la definición de Cantor implica la hipótesis generalizada del continuo.

Los modelos de permutación, los cuales son construídos usando átomos (también llamados urelementos, que son parte de la teoría que dio Ernest Zermelo en 1908 [23]) fueron introducidos por Abraham Fraenkel en su artículo *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre* de 1922 [5]. En este artículo demostró la independencia del axioma de elección, contruyendo un universo a partir del conjunto vacío y el conjunto de los naturales aplicando a éstos el axioma del par, unión, potencia y una variación del axioma de separación. Fraenkel afirmaba que en este universo existía un conjunto A de conjuntos $M_1, M_2, \ldots$ ajenos no vacíos que cumplian una propiedad especial. Este conjunto era un conjunto cuyos elementos sólo tenían átomos y no tenía una función de elección. En el mismo año, Fraenkel refinó su metodo en *Über den Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahl axioms, The Notion "Definite" and the Independence of the Axiom of Choice* [6] y da una prueba de la independencia del axioma de elección numerable para pares no ordenados[2]. En esta prueba los elementos del conjunto A sólo tenían dos átomos (idea que le atribuye a Zermelo).

Poco después, en 1938, Mostowski y Adolf Lindenbaum publican un artículo en el que critican la confusión de Fraenkel entre teoría y metateoría en sus demostraciones, por lo cual, Lindenbaum sugiere a Mostowski formalizar las pruebas de Fraenkel [4]. Los primeros trabajos sobre esta formalización se pueden encontrar en su tesis doctoral, publicada en 1938 [17]; y en 1939 introduce en su artículo *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip* [13] el uso de grupos para construir los modelos de permutación, construye su modelo ordenado (presentado en este trabajo) y demuestra que el principio de ordenación es más débil que el axioma de elección.

Estos modelos fueron utilizados por Azriel Lévy en *The Independence of Various Definitions of finiteness* [11] para demostrar que las conjeturas que Tarski había hecho años atrás acerca de las definiciones de finitud eran ciertas. En este artículo, Lévy demostró la independencia de las definiciones de Tarski, la de Dedekind y de otras dos más que él da.

El objetivo de este trabajo es demostrar las implicaciones que se dan entre las definiciones de finitud dadas por Lévy y construir los modelos de permutación necesarios, con un método que utiliza grupos y filtros (atribuído a Ernst Specker publicado en el artículo *Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom)* [15]) para demostrar la independencia de éstas.

[2]Los calcetines de Russell

Capítulo 2

El infinito de Cantor y de Dedekind

Antes de empezar a trabajar con diferentes definiciones de finitud, obtendremos propiedades importantes de los conjuntos finitos en el sentido de Cantor y de Dedekind, que serán de gran utilidad en capítulos posteriores.

2.1. Cantor-finitud

Definición 2.1. *Sea a un conjunto. Decimos que a es finito en el sentido de Cantor (C-finito o finito en el sentido usual) si y sólo si hay $n \in \omega$ tal que $a \sim n$*[1].

Las siguientes propiedades de los conjuntos C-finitos y C-infinitos son ampliamente conocidas, por lo que se presentarán sin demostración.

Teorema 2.2. *Sea a un conjunto C-finito*

- *Todo $b \subseteq a$ es C-finito.*
- *La unión finita de conjuntos finitos es finita.*
- *Si F es una funcional tal que $a \subseteq Dom(F)$ entonces $F[a]$ es C-finito.*
- *a es bien ordenable.*
- *Si todos los elementos de a son C-finitos, entonces $\cup a$ es C-finito.*
- *$\mathcal{P}(a)$ es C-finito.*
- *Sea $x \in a$, entonces $n+1 \sim a$ si y sólo si $n \sim a \backslash \{x\}$.*

Teorema 2.3. *Sean a, b conjuntos tales que $a \subseteq b$ y $b \sim \omega$. Si a es C-infinito, entonces $a \sim \omega$.*

[1]Dos conjuntos a y b son equipotentes, $a \sim b$, si y sólo si hay una función biyectiva entre ellos. ω es el conjunto de los naturales.

Teorema 2.4. *Si para algún conjunto a se tiene que $a \prec \omega$* [2] *entonces a es C-finito.*

También presentaremos algunas equivalencias que utilizaremos en los capítulos siguientes.

Teorema 2.5. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *a es C-finito.*
- *Hay $\trianglelefteq \subseteq a \times a$ orden total y todo $\leq \subseteq a \times a$ orden total, bien ordena a a.*
- *Hay $\leq \subseteq a \times a$ tal que $\leq$ y $\leq^{-1}$ bien ordenan a a.*

Demostración. Sea a un C-finito. Todos los C-finitos tienen un buen orden (inducido por la biyección con el natural correspondiente), que en particular es un orden total. Por inducción sobre la cardinalidad, demostremos que todo $\leq \subseteq a \times a$ orden total es buen orden. Por vacuidad todo $\leq \subseteq \emptyset$ orden total es buen orden. Ahora, supongamos que para todo conjunto con n elementos se da la propiedad, y sean a un conjunto con $n+1$ elementos, $\leq \subseteq a \times a$ que ordena totalmente a a y $b \subseteq a$ no vacío. Como b es no vacío, existe $x \in b$ y si $b \neq \{x\}$ entonces $b \backslash \{x\} \subseteq a \backslash \{x\}$ y como $a \backslash \{x\}$ tiene n elementos, entonces $b \backslash \{x\}$ tiene $\leq$-mínimo con la restricción de $\leq$ a $a \backslash \{x\}$, digamos y.Si $b = \{x\}$, es claro que x es el mínimo de b y si $x \leq y$ entonces x es el mínimo de b, por la transitividad de $\leq$, y en otro caso, y es el mínimo de b. Después, si hay $\leq \subseteq a \times a$ orden total y todo $\leq \subseteq a \times a$ orden total, éste bien ordena a a, entonces al ser $\leq$ y $\leq^{-1}$ ordenes totales, bien ordenan a a. Ahora, si hay $\leq \subseteq a \times a$ tal que $\leq$ y $\leq^{-1}$ bien ordenan a a, entonces hay un único $\alpha \in OR$[3] tal que es isomorfo a ordenado con $\leq$. Llamemos a este isomorfismo f. Notemos que $\omega \not\prec a$ y $\omega \nsim a$, pues de lo contrario $f[\omega]$ no tendría mínimo con $\leq^{-1}$. Con esto, $a \prec \omega$ con lo que a es C-finito. $\square$

Teorema 2.6. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *a es C-infinito.*
- *Para todo natural n, $n \prec a$.*

Demostración. Sea a C-infinito. Demostraremos por inducción sobre naturales que $n \prec a$. Por vacuidad $0 \precsim a$ y $0 \nsim a$ pues $a \neq \emptyset$, y supongamos que $n \prec a$. Como $n \prec a$, existe una función $f : n \longrightarrow a$ inyectiva que no es suprayectiva, ya que $n \nsim a$. Con esto, entonces hay $x \in a \backslash f[n]$ y definimos:

$$g(m) = \begin{cases} f(m) & \text{si } m < n \\ x & \text{si } m = n \end{cases}$$

que es inyectiva ya que f lo es, con lo que $n+1 \prec a$. Ahora, si para todo natural n, $n \prec a$ entonces $n \nsim a$, pues si hubiera m natural tal que $m \sim a$, como $m+1 \prec a$ tendríamos que $m+1 \prec m$. $\square$

2.2. Dedekind-finitud

Definición 2.7. *Sea a un conjunto. Diremos que a es infinito en el sentido de Dedekind (D-infinito) si y sólo si hay $b \subsetneq a$ tal que $a \sim b$. Diremos que un conjunto es D-finito si y sólo si no es D-infinito.*

Con esto, obtenemos las siguientes equivalencias.

[2] $a \precsim b$ si y sólo si hay una función inyectiva de a en b y $a \prec b$ si y sólo si $a \precsim b$ pero $a \nsim b$.
[3] OR es la clase de los ordinales.

Teorema 2.8. *Un conjunto a es D-infinito si y sólo si $\omega \precsim a$.*

Demostración. Sea a un conjunto y supongamos que hay $f\colon a \longrightarrow a$ inyectiva con $\mathrm{Im}(f) \subsetneq a$, con lo que hay $c \in a \backslash f[a]$ y definimos usando el esquema de recursión para naturales la siguiente función:

$$g(0) = c$$

$$g(n+1) = f(g(n))$$

que es inyectiva ya que f lo es y $c \notin f[a]$.

Ahora sea $g\colon \omega \longrightarrow a$ inyectiva y definimos:[4]

$$f(x) = \begin{cases} g((g^{-1}(x))^{+}) & \text{si } x \in g[\omega] \\ x & \text{si } x \notin g[\omega]. \end{cases}$$

Es claro que $dom(f) = a$ y que $f[a] \subsetneq a$ pues $g(0) \notin f[a]$. Además es inyectiva, pues si $f(a) = f(b)$ y $a, b \in g[\omega]$, entonces, como g es inyectiva, tendremos que $(g^{-1}(a))^{+} = (g^{-1}(b))^{+}$, con lo que $(g^{-1}(a)) = (g^{-1}(b))$ y al ser g función $a = b$. Si $a, b \notin g[\omega]$ el resultado es claro y otro caso no es posible. □

Teorema 2.9. *Un conjunto a es D-infinito si y sólo si $a \sim a \cup \{x\}$ donde $x \notin a$.*

Demostración. Sea a un conjunto D-infinito y supongamos que hay $f\colon a \longrightarrow a$ tal que $f[a] \subsetneq a$, entonces hay $c \in a \backslash f[a]$. Con esto definimos:

$$h(b) \begin{cases} f(b) & \text{si } b \in f[a] \\ c & \text{si } b = x \\ b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que es biyectiva. □

Teorema 2.10. *Un conjunto a es D-infinito si y sólo si $\omega \dot\cup a \sim a$[5].*

Demostración. Sea a un conjunto D-infinito, entonces sabemos que hay $f\colon \omega \longrightarrow a$ inyectiva, y definimos $g\colon \omega \dot\cup a \longrightarrow a$ como:

$$g(x) = \begin{cases} a_{2x} & \text{si } x \in \omega \\ a_{2(g^{-1}(x))+1} & \text{si } x \in Im(f) \\ x & \text{si } x \notin Im(f) \end{cases}$$

que es biyectiva. □

Teorema 2.11. *Si a es C-infinito entonces $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ es D-infinito.*

Demostración. Supongamos que a es C-infinito, entonces sabemos que $n \precsim a$ para todo natural n. Con esto, $B_n = \{b \subseteq a \mid b \sim n\} \subseteq \mathcal{P}(a)$ es no vacío para cada n. Entonces podemos dar la función inyectiva $g\colon \omega \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ tal que $g(n) = B_n$, con lo que $\omega \precsim \mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ es D-infinito. □

[4] a^{+}, el sucesor de un conjunto a, se define como $a \cup \{a\}$.

[5] $a \dot\cup b$ es la unión ajena de a con b.

Capítulo 3

Otras definiciones de finitud y relaciones entre ellas, en ZF

En este capítulo se presentarán algunas definiciones de finitud y las implicaciones que podemos obtener entre estas sin AE en ZF. Es importante notar que en este capítulo no se usa el concepto de cardinalidad, dado que con la definición usual de ésta, sin AE, no podemos asegurar que todos los conjuntos tengan un cardinal.

Veamos las definiciones de finitud con las que trabajaremos.

Definición 3.1. *Sea a un conjunto. Decimos que a es:*

- *I-finito si y sólo si toda familia no vacía de subconjuntos de a tiene un $\subseteq -maximal$.*
- *Ia-finito o partible si y sólo si para todo $b \subseteq a$ tenemos que b o $a \backslash b$ es I-finito.*
- *II-finito si y sólo si toda familia no vacía de subconjuntos de a ordenada linealmente por $\subseteq$ tiene un $\subseteq -maximal$.*
- *III-finito si y sólo si no hay $b \subsetneq \mathcal{P}(a)$ con $b \sim \mathcal{P}(a)$.*
- *IV-finito o D-finito si y sólo si no hay $b \subsetneq a$ tal que $b \sim a$.*
- *V-finito si y sólo si $a = \emptyset$ o $a \nsim 2 \times a$.*
- *VI-finito si y sólo si $a = \emptyset$ o a es unitario o $a \nsim a \times a$.*
- *VII-finito si y sólo si a es I-finito o no es bien ordenable.*

Las definiciones Ia y la VII se le atribuyen a Lévy, la IV a Dedekind y el resto a Tarski [12].

Definición 3.2. *Si un conjunto no es finito con alguna de las nociones anteriores, entonces diremos que es infinito con esa misma noción.*

Por ejemplo, si tenemos un conjunto que no es II-finito, éste será II-infinito.

Antes que nada, notaremos que la definición usual de conjunto finito (C-finitud) coincide con la de I-finitud.

Teorema 3.3. *Sea a conjunto, a es C-finito si y sólo si a es I-finito.*

Demostración. Demostremos por inducción para naturales que si un conjunto es C-finito entonces es I-finito. Primero notemos que por vacuidad, $\emptyset$ es I-finito. Ahora supongamos que para todo conjunto con n elementos se vale el teorema y sea a un conjunto C-finito con $n+1$ elementos. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(a)$, tomemos $c \in a$ arbitrario y consideramos:

$$\mathcal{F}' = \{x \in \mathcal{P}(a) \mid \exists y \in \mathcal{F} \text{ tal que } x = y \backslash \{c\}\}$$

Notemos que $\mathcal{F}'$ es una familia de subconjuntos de $a\backslash\{c\}$ (que tiene n elementos), con lo que debe tener un $\subseteq -maximal$, digamos f'. Ahora, si $f := f' \cup \{c\} \notin \mathcal{F}$ entonces f' es $\subseteq -maximal$ de $\mathcal{F}$, pues si no fuera así habría $h \in \mathcal{F}$ tal que $f' \subsetneq h$, y entonces $f' \subsetneq h\backslash\{c\}$ pues debe haber $x \neq c$ tal que $x \in h$ y $x \notin f'$ ya que $f \notin \mathcal{F}$. En caso contrario, f lo es, pues si no lo fuera, habría h tal que $f \subsetneq h$ con $h \in \mathcal{F}$ y entonces $f' \subsetneq h\backslash\{c\}$.

Ahora, sea a un conjunto y supongamos que a es I-finito. Consideremos:

$$b = \{y \in \mathcal{P}(a) \mid y \text{ es finito}\}$$

que es no vacío ya que $\emptyset \in b$, con lo que debe tener un $\subseteq -maximal$, digamos y_0. Notemos que $y_0 \subseteq a$. No puede suceder que $y_0 \subsetneq a$ ya que en caso contrario, habría $c \in a\backslash y_0$. Pero entonces $y_0 \cup \{c\} \in b$ y $y_0 \subsetneq y_0 \cup \{c\}$ contradiciendo la maximalidad de y_0. Con esto $y_0 = a$ y por lo tanto a es C-finito. □

Ahora, procedamos a demostrar las implicaciones que tenemos entre las definiciones dadas.

Lema 3.4. *Sea a un conjunto. Hay una función $f : a \longrightarrow a$ inyectiva con $\operatorname{Im}(f) \subsetneq a$ si y sólo si hay una función $g : \omega \longrightarrow a$ inyectiva.*

Demostración. Se obtiene directo del teorema 2.8. □

Lema 3.5. *Sea a un conjunto, tenemos que $\omega \precsim^* a$*[1] *si y sólo si $\omega \precsim \mathcal{P}(a)$*

Demostración. Si hay $\omega \precsim^*_h a$ entonces $f : \omega \longrightarrow \mathcal{P}(a)$ definida como $f(n) = h^{-1}[n]$ es una función inyectiva. Ahora, sea $f : \omega \longrightarrow \mathcal{P}(a)$ inyectiva y definamos por recursión para ω una función $g : \omega \longrightarrow \mathcal{P}(a)$. Supongamos que para $m < n$ toda $g(m)$ está definida con la propiedad de que $\{f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m) \mid k \geq n\}$ es C-infinito. Ahora definamos:

$$W := \{k \mid k \geq n,\ f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m) \neq \emptyset \ \&\ (a\backslash f(k))\backslash \cup_{m<n} g(m) \neq \emptyset\}$$

Y sea n^* el mínimo de W. Notemos que está bien definido pues como hay $f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m) \neq f(j)\backslash \cup_{m<n} g(m)$ no vacíos, entonces hay un x tal que $x \in f(k)$ y $x \notin f(j)$ o viceversa y entonces $j \in W$ o $k \in W$.

Si $B := \{f(k)\backslash[\cup_{m<n} g(m) \cup f(n^*)] \mid k > n^*\}$ es C-infinito, entonces definimos a $g(n)$ como $f(n^*)\backslash \cup_{m<n} g(m)$ con lo que $\{f(k)\backslash \cup_{m<n+1} g(m) \mid k > n^* \geq n\}$ es C-infinito. Si B es C-finito notemos que $C := \{f(k)\backslash[\cup_{m<n} g(m) \cup ((a\backslash f(n^*))\backslash \cup_{m<n} g(m))]\}$ es C-infinito, pues si no fuera así, como hay una función $e : \{f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m) \mid k > n^*\} \longrightarrow B \times C$ definida como $e(f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m)) = (f(k)\backslash[\cup_{m<n} g(m) \cup f(n^*)], f(k)\backslash[\cup_{m<n} g(m) \cup (a\backslash f(^*))])$[2] que es inyectiva

[1] Decimos que $a \precsim^* b$ si y sólo si hay $f : b \longrightarrow a$ suprayectiva.

[2] $\cup_{m<n} g(m) \cup (a\backslash f(n^*)) = \cup_{m<n} g(m) \cup ((a\backslash f(n^*))\backslash \cup_{m<n} g(m))$

ya que si $f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m) \neq f(j)\backslash \cup_{m<n} g(m)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay x tal que $x \in f(k)$, $x \notin f(j)$ y $x \notin \cup_{m<n} g(m)$. Si $x \in f(n^*)$ entonces las segundas entradas de las imágenes son distintas, pues x es elemento de la segunda entrada de $e(f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m))$ y no es elemento de la segunda entrada de $e(f(j)\backslash \cup_{m<n} g(m))$ y si $x \notin f(n^*)$ entonces las primeras entradas de las imágenes serán distintas por un argumento similar y $B \times C$ es C-finito, entonces $\{f(k)\backslash \cup_{m<n} g(m) \mid k > n^*\}$ sería C-finito contradiciendo la hipótesis. Con esto, podemos definir a $g(n)$ como $(a\backslash f(n^*))\backslash \cup_{m<n} g(m)$ y $\{f(k)\backslash \cup_{m<n+1} g(m) \mid k \geq n+1\}$ seguiría siendo C-infinito.

Con esta función hemos creado ω subconjuntos no vacíos ajenos de a, con lo que ya podemos definir a $h\colon a \longrightarrow \omega$ como:

$$h(x) = \begin{cases} n & \text{si existe } n \in \omega \text{ tal que } x \in g(n) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que es una función suprayectiva. □

Teorema 3.6. *Si un conjunto a es finito con alguna de las definiciones dadas, entonces es finito con las definiciones que le siguen.*

Demostración. Demostraremos que cada definición implica la siguiente.

- **I-finito $\longrightarrow$ Ia-finito.**
  Si a es I-finito, sabemos que es C-finito, y un conjunto C-finito no puede tener como subconjunto a un conjunto C-infinito (I-infinito), con lo que todo $b \subseteq a$ debe ser I-finito.

- **Ia-finito $\longrightarrow$ II-finito.**
  Supongamos que a es II-infinito, entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(a)$ ordenada linealmente por $\subseteq$ que no tiene maximal. Primero supongamos que hay al menos un conjunto C-infinito en $\mathcal{F}$, digamos b. Sea $c = a\backslash b$. Notemos que c es C-infinito, ya que si no lo fuera, a tendría sólo un número C-finito de subconjuntos con b contenido en ellos, con lo que $\mathcal{F}$ tendría un maximal, entonces a es la unión ajena de dos conjuntos C-infinitos. Ahora supongamos que todo elemento de $\mathcal{F}$ es C-finito, entonces $\subseteq$ bien ordena a $\mathcal{F}$, pues si tomamos $f \subseteq \mathcal{F}$ no vacío, podemos considerar el conjunto $b = \{n \in \omega \mid \exists x \in \mathcal{F}(x \sim n)\}$ que también es no vacío. Si n_0 es el mínimo de b entonces hay $x_0 \in f$ tal que $x_0 \sim n_0$ y si hubiera $y \in f$ tal que $y \subsetneq x_0$ entonces, como y también es finito, habría $y \sim m < n_0$ con $m \in b$. Con esto, x_0 es el mínimo de f. Ahora, en este caso el tipo de orden de $\mathcal{F}$ es ω o algún natural, pero no puede ser un natural ya que todo natural tiene un máximo (maximal) con $\in$, con lo que el tipo de orden de $\mathcal{F}$ debe ser ω, entonces

  $$\mathcal{F} = \{a_0, a_1, \dots\} \text{ con } a_i \subseteq a_{i+1}.$$

  y sea:

  $$b = \bigcup_{i=1}^{\omega} (a_{2i+2}\backslash a_{2i+1}) \;\text{ y }\; c = a\backslash b$$

  y notemos también que

  $$\bigcup_{i=1}^{\omega} (a_{2i+1}\backslash a_{2i}) \subseteq c$$

  Notemos que b es I-infinito ya que si hubiera $n \in \omega$ tal que $b \sim n$, como $\mathcal{F}$ tiene ω elementos debe haber $a_k \in \mathcal{F}$ tal que $n \prec a_k$ y entonces:

  $$n \prec a_k \subsetneq a_{2k+1} \subsetneq b$$

lo cual no es posible, entonces $b \not\approx n$. Por un argumento similar, c también es C-infinito, con lo que a es la unión ajena de dos conjuntos I-infinitos. En ambos casos podemos ver a a como la unión ajena de dos conjuntos I-infinitos, entonces a es II-finito.

- **II-finito $\longrightarrow$ III-finito.**
  Supongamos que a un conjunto es III-infinito. Entonces hay $f\colon \mathcal{P}(a) \longrightarrow \mathcal{P}(a)$ inyectiva tal que $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathcal{P}(a)$ con lo que, por el lema 2.8, hay $g\colon \omega \longrightarrow \mathcal{P}(a)$ inyectiva y por el lema 3.5 hay $h\colon a \longrightarrow \omega$ suprayectiva. Consideremos entonces:

  $$\{h^{-1}[n] \mid n \in \omega\}$$

  que es una familia ordenada linealmente por $\subseteq$ que no tiene un elemento maximal, ya que $h^{-1}[n] \subsetneq h^{-1}[n+1]$, pues si $x \in h^{-1}[n]$, entonces $h(x) \in n \subseteq n+1$ con lo que $h(x) \in h^{-1}[n+1]$ y además, como h es suprayectiva hay $x \in a$ tal que $h(x) = n$ y $x \in h^{-1}[n+1] - h^{-1}[n]$.

- **III-finito $\longrightarrow$ IV-finito.**
  Supongamos que a es IV-infinito, entonces $\omega \precsim a$ y sabemos que $a \precsim \mathcal{P}(a)$ con lo que $\omega \precsim \mathcal{P}(a)$ y a es III-infinito.

- **IV-finito $\longrightarrow$ V-finito.**
  Supongamos que a es V-infinito, entonces hay f función tal que $a \sim_f 2 \times a$. consideremos entonces la función $g\colon a \longrightarrow a$ definida como $g(x) = f^{-1}(0, x)$. Notemos que g es inyectiva ya que f es biyectiva y $Im(g) \subsetneq a$, ya que como hay $x_0 \in a$ entonces $f^{-1}(1, x_0) \notin Im(g)$. Con esto a es IV-infinito.

- **V-finito $\longrightarrow$ VI-finito.**
  Supongamos que a es VI-infinito, es decir, existe f función tal que $a \sim_f a \times a$ y a no es vacío ni unitario, así que tiene al menos dos elementos, digamos a_0 y a_1. Consideremos entonces $g\colon 2 \times a \longrightarrow a$ dada por:

  $$g(a, x) = \begin{cases} f^{-1}((a_0, x)) & \text{si } a = 0 \\ f^{-1}((a_1, x)) & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

  que es inyectiva ya que f es biyectiva, con lo que $2 \times a \precsim a$ y es claro que $a \precsim 2 \times a$, así $a \sim 2 \times a$ y a es V-infinito.

- **VI-finito $\longrightarrow$ VII-finito.**
  La demostración de que $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ se puede encontrar en [10]. Si suponemos que a es bien ordenable, entonces hay $\aleph_\alpha \sim a$, con lo que $a \times a \sim \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \sim a$.

$\square$

Es claro que con AE todas las definiciones son equivalentes, pues si un conjunto es VII-finito es I-finito, y aún mas, la equivalencia de las definiciones implica AE, pues si a es un conjunto infinito, por la definición VII sabemos que es bien ordenable, y si a es finito, por la definición I es equipotente a un natural, con lo que también es bien ordenable, con lo que tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Si las definiciones de finitud son equivalentes, entonces cualquier conjunto es bien ordenable*

Con esto tenemos la equivalencia entre la equivalencia de las definiciones dadas y AE desde ZF, con lo que no podemos ni garantizar ni refutar la existencia de un conjunto que sea I-infinito pero VII-finito en ZF (si tal conjunto existiera, no sería bien ordenable y si no existiera, nuestras definiciones serían equivalentes.) Más adelante, veremos que ninguna definición implica a alguna anterior. Otros teoremas que se pueden obtener con debilitamientos del axioma de elección son los siguientes. Se puede consultar una tabla con debilitamientos y equivalencias del axioma de elección en [7].

Teorema 3.8. *Si todo conjunto es totalmente ordenable, entonces todo conjunto II-finito es I-finito.*

Demostración. Supongamos que todo conjunto es totalmente ordenable y sea a un conjunto II-finito ordenado totalmente con $\leq$. Veamos que $\leq$ es un buen orden. Sea $b \subseteq a$ no vacío y consideremos $\mathcal{F} = \{x \subseteq a \mid x \text{ es segmento final de } b\}$. Notemos que $\mathcal{F}$ está ordenado totalmente por $\subseteq$ ya que si $x, y \in \mathcal{F}$ entonces hay $d, e \in b$ tales que $x = \{v \in b \mid d \leq v \ \&\ d \neq v\}$ y $y = \{v \in b \mid e \leq v \ \&\ d \neq v\}$. Como $\leq$ es un orden total entonces debe suceder que $e \leq d$ o $d \leq e$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $e \leq d$, entonces $x \subseteq y$ pues si $v \in x$ entonces $d \leq v$ y por la transitividad de $\leq$, tenemos que $e \leq v$ con lo que $v \in y$. Como a es II-finito, entonces $\mathcal{F}$ debe tener un $\subseteq\!-maximal$, digamos $z = \{v \in b \mid h \leq v\}$ con $h \in b$. Notemos que h es el mínimo de b, pues si no fuera así, habría $h_0 \in b$ tal que $h \nleq h_0$, entonces $h_0 < h$ pero entonces $x \subsetneq x_0 = \{v \in b \mid h_0 \leq v\}$ contradiciendo la maximalidad de x. □

Teorema 3.9. *Si AEN[3] entonces todo conjunto IV-finito es I-finito.*

Demostración. Sea a un conjunto I-infinito, por lo tanto $n \prec_{f_n} a$ para todo n natural ya que es C-infinito. Definimos:

$$g(n) = f_{n+1}(m_0) \text{ tal que } m_0 = min\{m \in \omega \mid f_{n+1}(m) \notin g[n]\}$$

Cabe notar que g está bien definida ya que $\mathrm{Im}(f_{n+1})$ tiene $n+1$ elementos y $g[n]$ tiene n, con lo que $\{m \in \omega \mid f_{n+1}(m) \notin g[n]\}$ nunca es vacío. Además si $l < n$ entonces $g(l) \in g[n]$ con lo que $l \notin \{m \in \omega \mid f_{n+1}(m) \notin g[n]\}$. Entonces $g \colon \omega \longrightarrow a$ es inyectiva, con lo que a es D-infinito. □

[3]El axioma de elección numerable: Toda familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección

Capítulo 4

Algunos modelos para la teoría de conjuntos con átomos (ZFA)

En este capítulo presentaremos a una axiomática para la teoría de conjuntos con átomos, ZFA y a los modelos de permutación para ésta. Estos modelos serán útiles para probar la consistencia de $ZFA + \neg AC$ y que las definiciones de finitud dadas no son equivalentes sin el axioma de elección.

Esta axiomatización se caracteriza por aceptar objetos que no son conjuntos, a los que llamaremos átomos, los cuales no tienen elementos. El lenguaje en el que están escritos estos axiomas consta de dos símbolos relacionales, $\in$ y A, el primero binario y el segundo unitario. $A(x)$ se cumplirá cuando x sea un átomo.

Axioma 4.1 (de Extensionalidad)**.** *Dos* ***conjuntos*** *son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.*

$$\forall x \forall y[\neg A(x) \& \neg A(y) \longrightarrow (\forall u(u \in x \longleftrightarrow u \in y) \longrightarrow x = y)]$$

Es importante notar que no es conveniente aplicar este axioma a átomos también, pues todos serían el conjunto vacío.

Axioma 4.2 (de existencia)**.** *Existe el* ***conjunto*** *vacío.*

$$\exists x(\neg A(x) \& \neg \exists u(u \in x))$$

A este conjunto lo denotaremos con $\emptyset$ ya que es único.

Axioma 4.3 (de los átomos)**.** *Los átomos no son el conjunto vacío y no tienen elementos.*

$$\forall u(A(u) \longleftrightarrow u \neq \emptyset \& \neg \exists x(x \in u))$$

Axioma 4.4. *La colección de los átomos es un conjunto.*

$$\exists x \forall u(u \in x \longleftrightarrow A(u))$$

Axioma 4.5 (del par)**.** *Dados dos* ***objetos*** *hay un* ***conjunto*** *cuyos elementos son exactamente estos dos objetos.*

$$\forall u \forall v \exists x \forall w[w \in x \longleftrightarrow (w = u) \vee (w = v)]$$

Axioma 4.6 (de la unión). *Para cada **objeto** hay un **objeto** cuyos elementos son exactamente los elementos de los elementos del objeto dado.*

$$\forall u \exists x \forall w[(w \in x \longleftrightarrow \exists v(v \in u \& w \in v))]$$

Podemos notar que la unión de cualquier átomo es el conjunto vacío o un átomo.

Axioma 4.7 (de potencia). *Dado un **objeto** hay un **conjunto** cuyos elementos son todos sus subconjuntos.*

$$\forall u \exists x \forall y[y \in x \longleftrightarrow \neg A(y) \& (y \subseteq x)]$$

Notemos que el conjunto potencia de cualquier átomo es el vacío y que los conjuntos potencia no tienen átomos. Cabe señalar que los átomos son subconjuntos de cualquier objeto.

Axioma 4.8 (Esquema de comprensión). *Dados un **objeto** y una propiedad, hay un **objeto** cuyos elementos son aquellos de este objeto que cumplen la propiedad.*

$$\forall u \exists x \forall w[(w \in x \longleftrightarrow (w \in u \& \phi(w)))]$$

donde ϕ es una fórmula en la cual x no ocurre libre.

Axioma 4.9 (de infinito). *Existe un conjunto inductivo*

$$\exists x(\emptyset \in x \& \forall u(u \in x \longrightarrow u^+ \in x))$$

Axioma 4.10 (Esquema de reemplazo). *La imagen de un **objeto** a través de una funcional es un **conjunto**.*

$$\begin{gathered} \forall t \forall u \forall v(\phi(t,u) \& \phi(t,v) \longrightarrow u = v) \longrightarrow \\ \forall w \exists x \forall u[(u \in x \longleftrightarrow \exists v(v \in w \& \phi(v,u))) \& \neg A(x)] \end{gathered}$$

donde ϕ es una fórmula en la cual x no ocurre.

Axioma 4.11 (de regularidad). *Todo **conjunto** no vacío tiene un elemento $\in$-minimal.*

$$\forall x[(\neg A(x) \& x \neq \emptyset) \longrightarrow \exists u(u \in x \& \forall v(v \in u \longrightarrow v \notin x))]$$

La teoría ZFA se desarrolla de la misma manera que ZF, sólo hay que agregar a la definición de ordinal que no tenga átomos. Notemos, que el minimal del que asegura la existencia el axioma de regularidad podría ser un átomo, y que un conjunto transitivo podría no tener al vacío. Por último, enunciemos al axioma de elección para ZFA, que no consideraremos parte de ésta axiomática.

Axioma 4.12 (de elección). *Todo **conjunto** no vacío que no tenga como elemento al vacío ni a algún átomo y cuyos elementos sean ajenos dos a dos tiene un selector.*

$$\begin{aligned} \forall x[(\neg A(x) \& x \neq \emptyset \& \emptyset \notin x \& \forall w(w \in x \longrightarrow \neg A(w)) \& \\ \forall w \forall v(w \in x \& v \in x \longrightarrow \forall u(u \in w \longrightarrow u \notin v))) \longrightarrow \\ \exists y \forall z(z \in x \longrightarrow \exists! u(u \in z \& u \in y))] \end{aligned}$$

De ahora en adelante abusaremos de la notación y denotaremos al conjunto de átomos como A.

4.1. El universo de ZFA

Así como en ZF, el universo de ZFA es una jerarquía acumulativa. Para ver esto, primero introduciremos la siguiente definición:

Definición 4.13. *Sea s un conjunto, definimos la funcional $\mathscr{P}$ como:*[1]

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^0(s) &= s\\ \mathscr{P}^{\alpha+1}(s) &= \mathscr{P}^{\alpha}(s) \cup \mathcal{P}(\mathscr{P}^{\alpha}(s)) \ \textit{si}\ \alpha \in OR\\ \mathscr{P}^{\beta}(s) &= \bigcup_{\alpha<\beta} \mathscr{P}^{\alpha}(s) \ \textit{si}\ \beta \in LIM\end{aligned}$$

y definimos:

$$\mathscr{P}^{\infty}(s) = \bigcup_{\alpha \in OR} \mathscr{P}^{\alpha}(s)$$

Renombraremos a $\mathscr{P}^{\infty}(\emptyset)$ como $\mathbb{K}$.

Teorema 4.14. $\mathbb{K} \models ZF$.

Demostración. Es claro pues $\mathbb{K} = BF$. □

Teorema 4.15. $ZFA \vdash \mathscr{P}^{\infty}(A) = \mathbb{V}$.

Demostración. Sea x un conjunto, supongamos que $x \notin \mathscr{P}^{\infty}(A)$ y consideremos el conjunto:

$$C = \{y \in ct(\{x\}) \mid y \notin \mathscr{P}^{\infty}(A)\}$$

que al ser no vacío, ya que $x \in C$, debe tener un $\in$-minimal, digamos y_0. Entonces, para todo $z \in y_0$ tenemos que $z \in \mathscr{P}^{\infty}(A)$. Consideremos a α como el supremo de $\mathcal{F} := \{\beta \mid \exists z \in y_0$ tal que $z \in \mathscr{P}^{\beta}(A)$ y β es mínimo$\}$. Notemos que tal supremo existe, pues si no lo hiciera, entonces $\mathcal{F}$ no es un conjunto, pero $\mathcal{F}$ es la imagen de y_0 bajo la funcional que manda a $x \in \mathscr{P}^{\infty}(A)$ a $min\{\beta \mid z \in \mathscr{P}^{\beta}(A)\}$. Con esto, $z \in \mathscr{P}^{\alpha}(A)$ para todo $z \in y_0$ y entonces $y_0 \in \mathscr{P}^{\alpha+1}(A)$, lo cual es una contradicción. Entonces $\mathbb{V} = \mathscr{P}^{\infty}(A)$. □

Con esto podemos definir el rango de un conjunto como usualmente se hace. Si x es un conjunto, entonces $rank(x) = \cap\{\alpha \in OR \mid x \in \mathscr{P}^{\alpha+1}(A)\}$. Hay que notar que con esta definición, los átomos tendrían rango cero, por lo que no aplicaremos la definición de rango a átomos, sólo a conjuntos.

Teorema 4.16. $CON(ZFC) \longrightarrow CON(ZFA + \textit{Axioma de elección} + A \textit{ es C-infinito})$.

Demostración. Consideremos el conjunto $B = \{\omega\backslash\{n\} \mid n \in \omega\}$ y notemos que todos sus elementos tienen rango ω y es numerable. Ahora construyamos la siguiente funcional:

$$\begin{aligned}S(0) &= B\\ S(\alpha+1) &= \mathcal{P}(S(\alpha))\backslash\{\emptyset\} \cup S(\alpha)\\ S(\beta) &= \bigcup_{\alpha<\beta} S(\alpha)\\ \mathbb{S} &= \bigcup_{\alpha\in OR} S(\alpha)\end{aligned}$$

[1] LIM es la clase de los ordinales límite.

Veamos que $\mathbb{S} \models CON(ZFA + AC + A$ es C-infinito) si interpretamos a los átomos y al vacío como a los elementos de B. Decimos $A(x)$ es verdadero si y sólo si $(x \in B \;\&\; x \neq \omega\backslash\{0\})$. Primero veamos que $\mathbb{S}$ satisface los axiomas de ZFA:

- **Axioma de extensionalidad (4.1).** Relativizando el axioma obtenemos:

$$\forall x \in \mathbb{S} \forall y \in \mathbb{S}[\neg A(x) \& \neg A(y) \longrightarrow$$
$$(\forall u \in \mathbb{S}(u \in x \longleftrightarrow u \in y) \longrightarrow x = y)]$$

  Sean $x \in \mathbb{S}, y \in \mathbb{S}$ tales que $\neg A(x)$ y $\neg A(y)$ y sean $z \in x$ y $w \in y$. Supongamos que $\forall u \in \mathbb{S}(u \in x \longleftrightarrow u \in y)$. Si $x, y \in B$, entonces $x = \omega\backslash\{0\} = y$. En otro caso hay α y β tales que $x \in S(\alpha+1)$ y $y \in S(\beta+1)$ con lo que $x \subseteq S(\alpha)$ y $y \subseteq S(\beta)$, con lo que $z \in S(\alpha)$ y $w \in S(\beta)$ y por hipótesis entonces $z \in y$ y $w \in x$ con lo que $x = y$.

- **Axioma de existencia (4.2).** Relativizando el axioma tenemos:

$$\exists x \in \mathbb{S}(\neg A(x) \& \neg \exists u \in \mathbb{S}(u \in x))$$

  Notemos que $\omega\backslash\{0\}$ será la relativización del vacío, pues $\neg A(\omega\backslash\{0\})$ por como definimos $A(x)$ y para todo $x \in \omega\backslash\{0\}$ tenemos que $x \notin \mathbb{S}$.

- **Axioma de los átomos (4.3).** Este se obtiene directamente de cómo interpretamos a A.

- **Axioma 4.4 (la colección de los átomos es un conjunto).** Relativizando el axioma tenemos:

$$\exists x \in \mathbb{S} \forall u \in \mathbb{S}(u \in x \longleftrightarrow A(u))$$

  Y como $B\backslash\{\omega\backslash\{0\}\} \in S(1)$, entonces $B\backslash\{\omega\backslash\{0\}\} \in \mathbb{S}$ y $B\backslash\{\omega\backslash\{0\}\}$ es la colección de los átomos.

- **Axioma del par (4.5).** Relativizando el axioma obtenemos:

$$\forall u \in \mathbb{S} \forall v \in \mathbb{S} \exists x \in \mathbb{S} \forall w \in \mathbb{S}[w \in x \longleftrightarrow (w = u) \vee (w = v)]$$

  Sean $u, v \in \mathbb{S}$ y veamos que $\{u, v\} \in \mathbb{S}$. Como $u, v \in \mathbb{S}$, entonces $u \in S(\alpha)$ y $v \in S(\beta)$. Si $\beta < \alpha$, por como está definido $\mathbb{S}$, entonces $u, v \in S(\alpha)$ y $\{u, v\} \in \mathcal{P}(S(\alpha))\backslash\{\emptyset\} \subseteq S(\alpha+1)$ y entonces $\{u, v\} \in \mathbb{S}$.

- **Axioma de potencia (4.7).** Al relativizar el axioma obtenemos:

$$\forall u \in \mathbb{S} \exists x \in \mathbb{S} \forall y \in \mathbb{S}[y \in x \longleftrightarrow \neg A(y) \& (y \subseteq^{\mathbb{S}} u)]$$

  Sea $u \in \mathbb{S}$ y consideremos dos casos. Si $u \in B$, entonces u es un átomo o es la interpretación del vacío, en cuyo caso $\{\omega\backslash\{0\}\} \in S(1)$ es su conjunto potencia en $\mathbb{S}$, ya que los átomos y $\omega\backslash\{0\}$ sólo tienen como subconjuntos en $\mathbb{S}$ a ellos mismos. Si $u \notin B$, entonces $u \in S(\alpha+1)$ para algún $\alpha \in OR$. En este caso notemos que si $y \neq \emptyset$ y y no es átomo entonces $y \subseteq u$ si y sólo si $(y \subseteq u)^{\mathbb{S}}$. Con esta observación, en este caso, el axioma relativizado queda:

$$\forall u \in \mathbb{S} \exists x \in \mathbb{S} \forall y \in \mathbb{S}[y \in x \longleftrightarrow \neg A(y) \& (y \subseteq u)]$$

  Con lo que $(\mathcal{P}(u)\backslash\{\emptyset\}) \cup \{\omega\backslash\{0\}\}$ cumple el axioma para u, pues $(\mathcal{P}(u)\backslash\{\emptyset\}) \cup \{\omega\backslash\{0\}\} \in S(\alpha+2)$.

- **Axioma esquema de comprensión (4.8).** Relativizando el axioma obtenemos:

$$\forall u \in \mathbb{S} \exists x \in \mathbb{S} \forall w \in \mathbb{S}[(w \in x \longleftrightarrow (w \in u \& \phi^{\mathbb{S}}(w)))]$$

Sea $u \in \mathbb{S}$ y consideremos el conjunto $a = \{w \in u \mid \phi^{\mathbb{S}}(w) \& w \in \mathbb{S}\}$. Si $a = \emptyset$ entonces es claro que $\omega \backslash \{0\}$ satisface el axioma. Si $a \neq \emptyset$, entonces a es el buscado, pues $a \in \mathbb{S}$ ya que, al ser conjunto, existe $\gamma = \max\{\alpha \in OR \mid \exists x \in a \text{ con } x \in S(\alpha) \text{ y } \alpha \text{ mínimo}\}$, con lo que $a \subseteq S(\gamma)$ y $a \in S(\gamma + 1)$.

- **Axioma de infinito (4.9).** Al relativizar obtenemos:

$$\exists x \in \mathbb{S}(\omega \backslash \{0\} \in x \& \forall u \in \mathbb{S}(u \in x \longrightarrow (u^+)^{\mathbb{S}} \in x))$$

Primero notemos que si $u \in B$ entonces $(u^+)^{\mathbb{S}} = \{u\}$, pues sus elementos no son elementos de $\mathbb{S}$ y si $u \notin B$, entonces $(u^+)^{\mathbb{S}} = u^+ = u \cup \{u\}$. Con esto, consideremos:

$$\begin{aligned} F \colon \omega &\longrightarrow \mathbb{V} \\ F(0) =& \{\omega \backslash \{0\}\} = 1^{\mathbb{S}} \\ F(n+1) =& (F(n))^+ = (n+1)^{\mathbb{S}} \end{aligned}$$

Afirmamos que $F[\omega] \cup \{\omega \backslash \{0\}\} \in \mathbb{S}$. Como cada $F(n) \in S(n+1)$, entonces $F[\omega] \cup \{\omega \backslash \{0\}\} \subseteq S(\omega)$, con lo que $F[\omega] \cup \{\omega \backslash \{0\}\} \in S(\omega + 1)$. Además, es claro que es inductivo en $\mathbb{S}$ por cómo está definido; y aún mas $F[\omega] \cup \{\omega \backslash \{0\}\} = (\omega)^{\mathbb{S}}$.

- **Axioma esquema de reemplazo (4.10).** Si relativizamos el axioma tenemos:

$$\forall t \in \mathbb{S} \forall u \in \mathbb{S} \forall v \in \mathbb{S}(\phi^{\mathbb{S}}(t,u) \& \phi^{\mathbb{S}}(t,v) \longrightarrow u = v) \longrightarrow \forall w \in \mathbb{S}$$
$$\exists x \in \mathbb{S} \forall u \in \mathbb{S}[(u \in x \longleftrightarrow \exists v \in \mathbb{S}(v \in w \& \phi^{\mathbb{S}}(v,u))) \& \neg A(x)]$$

Sea $w \in \mathbb{S}$. Sabemos que $\phi^{\mathbb{S}}$ es funcional en $\mathbb{S}$, así que definamos $\phi' = \phi^{\mathbb{S}} \cup \{(x, \emptyset) \mid x \notin \mathbb{S}\}$. Notemos que ϕ' es entonces una funcional en el universo, con lo que $\phi'[w]$ es un conjunto. Si $\phi'[w] = \emptyset$, entonces es claro que el conjunto que satisface el axioma es $\omega \backslash \{0\}$. Ahora, si $\phi'[w] \neq \emptyset$, entonces afirmamos que es el conjunto que buscamos. Si $u \in \mathbb{S}$, entonces $u \in \phi'[w]$ si y sólo si hay v tal que $\phi'(v,u)$ y como $u \neq \emptyset$ entonces $v \in \mathbb{S}$, con lo que $\phi^{\mathbb{S}}(v,u)$. El regreso es claro. Para ver que $\phi'[w] \in \mathbb{S}$ notemos que $\phi'[w] \subseteq \mathbb{S}$ y como este es conjunto, debe haber α tal que $\phi'[w] \in S(\alpha)$. Además, como $\phi'[w] \neq \emptyset$, entonces hay $u \in \mathbb{S}$ tal que $u \in \phi'[w]$, es decir, $\neg A(\phi'[w])$.

- **Axioma de regularidad (4.11).** Relativizando tenemos:

$$\forall x \in \mathbb{S}[(\neg A(x) \& x \neq \omega \backslash \{0\}) \longrightarrow$$
$$\exists u \in \mathbb{S}(u \in x \& \forall v \in \mathbb{S}(v \in u \longrightarrow v \notin x))]$$

Sea $x \in \mathbb{S}$ tal que $\neg A(x)$ y $x \neq \omega \backslash \{0\}$, entonces $x \in S(\alpha + 1)$ para alguna $\alpha \in OR$, con lo que $x \subseteq S(\alpha)$. Como $x \neq \emptyset$, x tiene $\in$-minimal. Sea v el $\in$-minimal de x. Notemos que v es el conjunto que satisface el axioma ya que $v \in x \subseteq S(\alpha)$.

Ahora sólo falta ver que el axioma de elección 4.12 y que el conjunto de átomos es numerable son verdaderos en $\mathbb{S}$.

- **Axioma de elección (4.12).** Relativizando el axioma tenemos:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{S}[(\neg A(x) \& x \neq \omega \backslash \{0\} \& \omega \backslash \{0\} \notin x \& \forall w \in \mathbb{S}(w \in x \longrightarrow \\ \neg A(w)) \& \forall w \in \mathbb{S} \forall v \in \mathbb{S}(w \in x \& v \in x \longrightarrow \\ \forall u \in \mathbb{S}(u \in w \longrightarrow u \notin v))) \longrightarrow \\ \exists y \in \mathbb{S} \forall z \in \mathbb{S}(z \in x \longrightarrow \exists! u \in \mathbb{S}(u \in z \& u \in y))]\end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{S}$ tal que no es un átomo ni el vacío de $\mathbb{S}$ ni tiene átomos o al vacío de $\mathbb{S}$. En este caso, $x \notin S(0)$ y $x \in S(1)$, con lo que $x \in S(\alpha)$ con $2 \leq \alpha 2$. Ahora, sea y' un selector para x y consideremos $y = y' \cap \mathbb{S}$. Sea $z \in \mathbb{S}$ tal que $z \in x$. Como y' es un selector de x hay un u tal que $u \in z \in x$, con lo que $u \in \mathbb{S}$ y $u \in y$. Además, $y \subseteq \mathbb{S}$ y es un conjunto, con lo que $y \in \mathbb{S}$, con lo que y satisface el axioma.

- **El conjunto de átomos es C-infinito** Consideremos la función biyectiva:

$$\begin{aligned} f\colon \omega^{\mathbb{S}} &\longrightarrow B \backslash \{\omega \backslash \{0\}\} \\ n^{\mathbb{S}} &\longrightarrow \omega \backslash \{n+1\}\end{aligned}$$

Y probemos que es una función biyectiva en $\mathbb{S}$. Primero, notemos que $(a,b)^{\mathbb{S}} = (a,b)$ pues los pares no ordenados de $\mathbb{S}$ coinciden con los pares no ordenados. Por esto, y por las observaciones hechas anteriormente en esta prueba, tenemos que $(f \subseteq \omega \times A)^{\mathbb{S}}$. Es claro que f es una función inyectiva en $\mathbb{S}$ y por como está definida, f es suprayectiva en $\mathbb{S}$.

□

4.2. Modelos de permutación

Ahora, construiremos los modelos de permutación para ZFA desde $ZFA+AC$. Estos submodelos de $\mathbb{V}$ serán construídos con ayuda de isomorfismos no triviales del universo (que existen, ya que se puede extender naturalmente una permutación no trivial de A al universo), y harán que algunos conjuntos que involucran átomos no sean bien ordenables.

Diremos que una permutación de A es una función biyectiva de A en sí mismo. Llamemos $Aut(A)$ al conjunto de permutaciones de A y extendamos a cada $\pi\colon A \longrightarrow A \in Aut(A)$ usando recursión sobre $\in$ (que podemos usar, ya que los modelos modelan el axioma de regularidad) a $\widehat{\pi}\colon \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ donde $\widehat{\pi}(x) = \{\widehat{\pi}(y) \mid y \in x\}$.

Lema 4.17. *Si $\pi \in Aut(A)$, entonces $\widehat{\pi}$ es un $\in -$automorfismo de $\mathbb{V}$.*

Demostración. Primero, demostremos por inducción sobre OR que $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)}$ es inyectiva para todo $\alpha \in OR$. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ tenemos que $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\beta}(A)}$ es inyectiva y sean x y y tales que $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (x) = \widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (y)$. Sea $z \in x$ entonces $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (z) \in \widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (x)$ con lo que $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (z) \in \widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (y)$, es decir, hay $w \in y$ tal que $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (z) = \widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha}(A)} (w)$. Ahora, notemos que como $z \in x$ y $w \in y$ entonces, z y w deben tener rango estrictamente menor a α, pues x y y tienen a lo más rango α. Sea β el mayor de esos rangos, y entonces $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\beta+1}(A)} (z) = \widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\beta+1}(A)} (w)$ y por hipótesis, $z = w$, es decir $z \in y$. De manera similar, $y \subseteq x$, con lo que $x = y$. Con este resultado es muy fácil ver que $\widehat{\pi}$ es inyectiva, pues si $\widehat{\pi}(x) = \widehat{\pi}(y)$ para algunos x y y, entonces tomamos el mayor rango entre x y y, digamos α y entonces $\widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha+1}(A)} (x) = \widehat{\pi} \restriction_{\mathscr{P}^{\alpha+1}(A)} (y)$ y con la afirmación que acabamos de demostrar, sabemos que $x = y$. Ahora, demostremos por inducción sobre $\in$ que $\widehat{\pi}$ es suprayectiva. Sea x un conjunto de rango α y supongamos que para todo $y \in x$ hay z tal que $\widehat{\pi}(z) = y$ y consideremos $\widehat{\pi}^{-1}[x]$. Notemos que $\widehat{\pi}(\widehat{\pi}^{-1}[x]) = \{\widehat{\pi}(z) \mid z \in \widehat{\pi}^{-1}[x]\} = \{y \mid y \in x\} = x$. Por último, notemos que por definición si $y \in x$ entonces $\widehat{\pi}(y) \in \widehat{\pi}(x)$ y si $\widehat{\pi}(y) \in \widehat{\pi}(x)$ entonces $y \in x$ pues $\widehat{\pi}$ es inyectiva. □

Notemos que si A tiene más de un elemento, entonces habrá al menos un $\in$-automorfismo del universo que no es la identidad.

Lema 4.18. *Si x es un conjunto, entonces $rank(x) = \cup\{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\}$.*

Demostración. Sea $\gamma \in rank(x)$, entonces $x \notin \mathscr{P}^{\gamma+1}(A)$, con lo que $x \nsubseteq \mathscr{P}^{\gamma}(A)$, es decir, hay $y \in x$ tal que $y \notin \mathscr{P}^{\gamma}(A)$. Si $y \notin \mathscr{P}^{\gamma+1}(A)$ entonces $rank(y) \geq \gamma + 1$ y entonces $\gamma \in rank(y) + 1 \in \{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\}$, con lo que $\gamma \in \cup\{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\}$, y si $y \in \mathscr{P}^{\gamma+1}(A)$ entonces $rank(y) = \gamma$, con lo que $\gamma + 1 \in \{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\}$ y $\gamma \in \cup\{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\}$. Ahora, si $\gamma \in \cup\{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\}$ entonces hay $y \in x$ tal que $\gamma \leq rank(y)$, con lo que $x \notin \mathscr{P}^{\gamma+1}(A)$ y $\gamma \in \alpha$ para todo α tal que $x \in \mathscr{P}^{\alpha+1}(A)$. □

Lema 4.19. *Sea π una permutación de A, entonces:*

- $rank(x) = rank(\widehat{\pi}(x))$.
- $\widehat{\pi}(\{x, y\}) = \{\widehat{\pi}(x), \widehat{\pi}(y)\}$.
- $\widehat{\pi}((x, y)) = (\widehat{\pi}(x), \widehat{\pi}(y))$.
- *Si r es una relación, entonces $\widehat{\pi}(r)$ también es una relación y $(a, b) \in r$ si y sólo si $(\widehat{\pi}(a), \widehat{\pi}(b)) \in \widehat{\pi}(r)$.*
- *Si f es una función con dominio X, entonces $\widehat{\pi}(f)$ es una función con dominio $\widehat{\pi}(X)$ y $\widehat{\pi}(f)(\widehat{\pi}(x)) = \widehat{\pi}(f(x))$.*
- $\widehat{\pi}(x) = x$ *para todo* $x \in \mathbb{K}$.

Demostración.

- Demostrémoslo por $\in$-inducción. Sea x un conjunto y supongamos que para todo $y \in x$ se tiene que $rank(y) = rank(\widehat{\pi}(y))$, entonces:

$$\begin{aligned} rank(x) &= \cup\{\alpha^+ \in OR \mid \exists y \in x \text{ con } rank(y) = \alpha\} \\ &= \cup\{\alpha^+ \in OR \mid \exists \widehat{\pi}(y) \in \widehat{\pi}(x) \text{ con } rank(\widehat{\pi}(y)) = \alpha\} \\ &= rank(\widehat{\pi}(x)) \end{aligned}$$

  ya que $y \in x$ si y sólo si $\widehat{\pi}(y) \in \widehat{\pi}(x)$.

- Sean x, y conjuntos, entonces $\widehat{\pi}(\{x, y\}) = \{\widehat{\pi}(z) \mid z \in \{x, y\}\} = \{\widehat{\pi}(x), \widehat{\pi}(y)\}$.
- Sean x, y conjuntos, entonces:
  $\widehat{\pi}((x, y)) = \{\widehat{\pi}(z) \mid z \in \{\{x\}, \{x, y\}\}\} = \{\widehat{\pi}(\{x\}), \widehat{\pi}(\{x, y\})\} = \{\{\widehat{\pi}(x)\}, \{\widehat{\pi}(x), \widehat{\pi}(y)\}\} = (\widehat{\pi}(x), \widehat{\pi}(y))$.

- Sea r una relación, notemos que si $x \in \widehat{\pi}(r)$, entonces $x = \widehat{\pi}(z)$ para alguna $z \in r$, entonces x también es un par ordenado. Ahora sea $(a, b) \in r$, esto pasa si y sólo si $\widehat{\pi}(a, b) \in \widehat{\pi}(r)$, y $\widehat{\pi}(a, b) = (\widehat{\pi}(a), \widehat{\pi}(b))$.

- Sea f una función en X, y sean $(\widehat{\pi}(a), \widehat{\pi}(b)), (\widehat{\pi}(a), \widehat{\pi}(c)) \in \widehat{\pi}(f)$, pero entonces $(a, b), (a, c) \in f$ con lo que $b = c$ y entonces $\widehat{\pi}(b) = \widehat{\pi}(c)$. Además si $\widehat{\pi}(x) \in \widehat{\pi}(X)$, entonces $x \in X$ con lo que $f(x)$ existe y $(\widehat{\pi}(x), \widehat{\pi}(f(x))) \in \widehat{\pi}(f)$.

- Sea $x \in \mathbb{K}$ y supongamos por $\in$-inducción que para todo $y \in x$, $\widehat{\pi}(y) = y$, entonces: $\widehat{\pi}(x) = \{\widehat{\pi}(y) \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$.

$\square$

También notemos que el conjunto de permutaciones de A, $Aut(A)$, con la composición y Id_A es un grupo, con lo que podemos dar las siguientes definiciones:

Definición 4.20. *Sea x un conjunto y $G \leq Aut(A)$. El estabilizador de x por G es:*

$$stab_G(x) = \{\pi \in G \mid \widehat{\pi}(x) = x\}$$

y el fijador de x por G es:

$$fix_G(x) = \{\pi \in G \mid \forall y \in x(\widehat{\pi}(y) = y)\}$$

Observación 4.21. $fix_G(x) = \bigcap_{y \in x} stab_G(y)$ *y* $fix_G(x) \trianglelefteq stab_G(x) \leq G$.

Demostración. Sea $\pi \in fix_G(x)$, por definición $\pi \in stab_G(y)$ para todo $y \in x$, con lo que $\pi \in \bigcap_{y \in x} stab_G(y)$, y sea $\pi \in \bigcap_{y \in x} stab_G(y)$, entonces para todo $y \in x$, $\widehat{\pi}(y) = y$ y $\pi \in fix_G(x)$. Por otro lado, sea x un conjunto y $G \leq Aut(A)$. Es claro que $Id_A \in fix_G(x) \leq stab_G(x)$. Ahora sea $\pi \in fix_G(x)$, $\rho \in stab_G(x)$ y $y \in x$, entonces

$$\widehat{\rho^{-1}\pi\rho}(y) = \widehat{\rho^{-1}\pi}(x_0) = \widehat{\rho^{-1}}(x_0) = y$$

para algún $x_0 \in x$ donde $\widehat{\rho}(y) = x_0$, ya que $\widehat{\rho}[x] = x$. $\square$

Definición 4.22. *Sea $G \leq Aut(A)$. Un conjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es un ideal en los subconjuntos de A si y sólo si para todo $a, b \subseteq A$:*

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ *y* $A \notin \mathcal{I}$.
- *Si $a, b \in \mathcal{I}$, entonces $a \cup b \in \mathcal{I}$.*
- *Si $a \in \mathcal{I}$ y $b \subseteq a$, entonces $b \in \mathcal{I}$.*

Y diremos que un ideal $\mathcal{I}$ en los subconjuntos de A es normal si y sólo si es cerrado bajo la acción de G, es decir, si $i \in \mathcal{I}$ y $\pi \in G$, entonces $\pi[i] \in \mathcal{I}$ y $\{a\} \in \mathcal{I}$ para todo $a \in A$.

Definición 4.23. *Sea $G \leq Aut(A)$. Un conjunto $\mathcal{F}$ de subgrupos de G es un filtro en los subgrupos de G si y sólo si, para todo $H, K \leq G$:*

- $G \in \mathcal{F}$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- *Si $H, K \in \mathcal{F}$, entonces $H \cap K \in \mathcal{F}$.*

- *Si $H \in \mathcal{F}$ y $H \subseteq K$, entonces $K \in \mathcal{F}$.*

Y diremos que un filtro $\mathcal{F}$ en los subgrupos de G es normal si y sólo si es cerrado bajo conjugaciones, es decir, si $H \in \mathcal{F}$ y $\pi \in G$, entonces $\pi^{-1}H\pi \in \mathcal{F}$ y $stab_G(a) \in \mathcal{F}$ para todo $a \in A$.

Definición 4.24. *Si fijamos $G \leq Aut(A)$, diremos que x es $\mathcal{F}$-simétrico si y sólo si $stab_G(x) \in \mathcal{F}$.*

Lema 4.25. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal. Entonces $fix_G(\pi[S]) \leq \pi fix_G(S)\pi^{-1}$ para todo $S \in \mathcal{I}$.*

Demostración. Sea $\rho \in fix_G(\pi[S])$, entonces si tomamos a σ como $\pi^{-1}\rho\pi$, tenemos que $\rho = \pi\sigma\pi^{-1}$ y si $a \in S$ entonces $\sigma(a) = \pi^{-1}\rho\pi(a) = \pi^{-1}(\pi(a)) = a$ ya que $\rho\pi(a) = \pi(a)$, con lo que $\sigma \in fix_G(S)$ y $\rho \in \pi fix_G(S)\pi^{-1}$. □

Lema 4.26. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal normal en los subgrupos de A, entonces:*

$$\mathcal{I}^* = \{H \leq G \mid \exists S \in \mathcal{I}(fix_G(S) \leq H)\}$$

es un filtro normal en los subgrupos de G.

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ un ideal normal. Para empezar, notemos que $G \in \mathcal{I}^*$ ya que $fix_G(\emptyset) \leq G$ y $\emptyset \in \mathcal{I}$, y además, $\emptyset \notin \mathcal{I}^*$ pues $Id_A \in fix_G(S)$ para todo $S \in \mathcal{I}$. Sean $H, K \in \mathcal{I}^*$, entonces hay $S_H, S_K \in \mathcal{I}$ tales que $fix_G(S_H) \leq H$ y $fix_G(S_K) \leq K$, y notemos que $fix_G(S_H \cup S_K) \subseteq fix_G(S_H) \cap fix_G(S_K) \leq H \cap K$ y $S_H \cup S_K \in \mathcal{I}$. Es claro que si $H \in \mathcal{I}^*$ y $H \leq K$ entonces $K \in \mathcal{I}^*$. Para ver que $\mathcal{I}^*$ es normal sea $H \in \mathcal{I}^*$ y $\pi \in G$, entonces hay $S \in \mathcal{I}$ tal que $fix_G(S) \leq H$ y como $\pi^{-1}[S] \in \mathcal{I}$ y $fix_G(\pi^{-1}[S]) \leq \pi^{-1}fix_G(S)\pi \leq \pi^{-1}H\pi$ por el lema anterior, entonces $\pi^{-1}H\pi \in \mathcal{I}^*$. Por último, sea $a \in A$, y como $\{a\} \in \mathcal{I}$ y $fix_G(\{a\}) \leq stab_G(a)$, entonces $stab_G(a) \in \mathcal{I}^*$. □

Definición 4.27. *Llamaremos a la clase de los hereditariamente $\mathcal{F}$-simétricos:*

$$\mathbb{M}(G, \mathcal{F}) = \{x \mid x \text{ es } \mathcal{F}\text{-simétrico y } x \subseteq \mathbb{M}(G, \mathcal{F})\}$$

un modelo de permutación.

La última proposición nos dice que podemos trabajar con un ideal normal para definir un modelo de permutación. Notemos que x es $\mathcal{I}^*$-simétrico si y sólo si hay $S \in \mathcal{I}$ tal que $fix_G(S) \subseteq stab_G(x)$. Llamaremos a tal S un *soporte* para x.

Lema 4.28. *Sea x un conjunto y $\pi \in G$, entonces $\widehat{\pi} stab_G(x)\widehat{\pi}^{-1} \leq stab_G(\widehat{\pi}(x))$.*

Demostración. Sea $\widehat{\pi}\rho\widehat{\pi}^{-1}$ con $\rho \in stab_G(x)$, entonces $\widehat{\pi}\rho\widehat{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(x)) = \widehat{\pi}(\rho(x)) = \widehat{\pi}(x)$. □

Teorema 4.29. *Un modelo de permutación $\mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ es un modelo transitivo de ZFA, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ y $A \in \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$.*

Demostración. Demostremos que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ por $\in$-inducción, sea $x \in \mathbb{K}$ y supongamos que todo $y \in x$ es elemento de $\mathbb{M}(G, \mathcal{F})$. Directamente de la hipótesis tenemos que $x \subseteq \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ y por la proposición 4.19 sabemos que si $x \in \mathbb{K}$, entonces $stab_G(x) = G$, con lo que x es $\mathcal{F}$-simétrico. $A \in \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ ya que $stab_G(A) = G$ y todos los átomos son simétricos y subconjuntos de cualquier clase.

Es claro que $\mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ es una clase transitiva, además, según [9] una clase transitiva que es casi universal, es decir, si para todo subconjunto B de $\mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ hay $C \in \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ tal que $B \subseteq C$ y es cerrada bajo las operaciones que se presentan a continuación es un modelo de ZFA. A estas operaciones se les conoce como operaciones de Gödel:

$$\begin{aligned}
G_1(x,y) &= \{x,y\}\\
G_2(x,y) &= x\backslash y\\
G_3(x,y) &= x\times y\\
G_4(x) &= \mathrm{Dom}(x)\\
G_5(x) &= \in \cap x^2\\
G_6(x) &= \{(a,b,c) \mid (b,c,a)\in x\}\\
G_7(x) &= \{(a,b,c) \mid (c,b,a)\in x\}\\
G_8(x) &= \{(a,b,c) \mid (a,c,b)\in x\}
\end{aligned}$$

Primero veamos que es casi universal. Sea $x\subseteq \mathbb{M}(G,\mathcal{F})$. Como x es un conjunto, entonces hay un $\alpha\in OR$ tal que $x\subseteq \mathscr{P}^\alpha(A)$ entonces $x\subseteq \mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)$, con lo que si demostramos que $\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ para toda $\alpha\in OR$, habremos terminado. Es claro que $\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$, por lo que sólo hay que demostrar que $\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)$ es $\mathcal{F}$-simétrico. Veamos que $stab_G(\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A))=G$. Sea $\pi\in G$ y $x\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)$, demostremos que $\widehat{\pi}(x)\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)$ por $\in$-inducción. Supongamos que para todo $y\in x$ si $y\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)$ entonces $\widehat{\pi}(y)\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})\cap\mathscr{P}^\alpha(A)$. Como $rank(x)=rank(\widehat{\pi}(x))$, entonces $\widehat{\pi}(x)\in\mathscr{P}^\alpha(A)$. Además, $\widehat{\pi}(x)\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ pues si $\widehat{\pi}(y)\in\widehat{\pi}(x)$, entonces $y\in x\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$, con lo que $y\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ y como también $y\in\mathscr{P}^\alpha(A)$, entonces por hipótesis de inducción $\widehat{\pi}(y)\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$. Y como x es $\mathcal{F}$-simétrico, entonces $stab_G(x)\in\mathcal{F}$ con lo que $\widehat{\pi}stab_G(x)\widehat{\pi}^{-1}\in\mathcal{F}$ y por el lema anterior $stab_G(\widehat{\pi}(x))\in\mathcal{F}$.

Solo falta ver que $\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ es cerrado bajo las operaciones de Gödel.

Sean $x,y\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ y primero veamos que $G_i(x,y)$ y $G_j(x)$ son simétricos para todo $1\leq i\leq 3$ y $4\leq j\leq 8$. Si $\pi\in G$ notemos que por la proposición 4.19 es claro que $G_i(\widehat{\pi}(x),\widehat{\pi}(y))=\widehat{\pi}(G_i(x,y))$ y $G_j(\widehat{\pi}(x))=\widehat{\pi}(G_j(x))$, entonces notemos que $stab_G(x)\cap stab_G(y)\subseteq stab_G(G_i(x,y))$ ya que si $\pi\in stab_G(x)\cap stab_G(y)$, tenemos que $\widehat{\pi}(G_i(x,y))=G_i(\widehat{\pi}(x),\widehat{\pi}(y))=G_i(x,y)$ con lo que $\pi\in stab_G(G_i(x,y))$ y de manera similar $stab_G(x)\subseteq stab_G(G_j(x))$. Entonces $G_i(x,y)$ y $G_j(x)$ son simétricos ya que $stab_G(x)\cap stab_G(y)\in\mathcal{F}$.

Por último, $G_1(x,y)=\{x,y\}\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$, con lo que $G_1(x,y)\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$, $G_2(x,y)=x\backslash y\subseteq x\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ y si $a\in G_4(x)$, entonces hay b tal que $(a,b)\in x\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$, entonces $(a,b)\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ con lo que $(a,b)\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ y $\{a\}\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ con lo que $\{a\}\subseteq\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ y $a\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$. Es consecuencia directa de que $\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ es cerrado bajo G_1 que el resto de las operaciones también lo sean. $\square$

A continuación, demostraremos un teorema que es de gran utilidad y es verdadero en cualquier modelo de permutación.

Teorema 4.30. *(AE) Sea $\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$ un modelo de permutación y $x\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$. (x es bien ordenable)$^{(\mathbb{M}(G,\mathcal{F}),\in)}$ si y sólo si $fix_G(x)\in\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $x\in\mathbb{M}(G,\mathcal{F})$. Sabemos que ($x$ es bien ordenable)$^{(\mathbb{M}(G,\mathcal{F}),\in)}$ si y sólo si hay un ordinal α tal que $(x\sim_f\alpha)^{(\mathbb{M}(G,\mathcal{F}),\in)}$. Notemos que como $\alpha\in\mathbb{K}$, entonces para todo $y\in x$, $f(y)\in\mathbb{K}$, y entonces para todo $\pi\in G$ tenemos que $\widehat{\pi}(f(y))=f(y)$. Entonces, $\pi\in stab_G(f)$ si y sólo si $\widehat{\pi}(f)=f$ y $\widehat{\pi}(f)=\{\widehat{\pi}(y,f(y))\mid y\in x\}=\{(\widehat{\pi}(y),f(y))\mid y\in x\}$, entonces $\widehat{\pi}(f)=f$ si y sólo si $\widehat{\pi}(y)=y$ para todo $y\in x$. Con esto podemos concluir que si (x es bien ordenable)$^{(\mathbb{M}(G,\mathcal{F}),\in)}$ entonces $fix_G(x)=stab_G(f)\in\mathcal{F}$. Ahora supongamos que $fix_G(x)\in\mathcal{F}$ y tomemos una función f que sea una biyección entre un ordinal α y x. Es claro que $f \subseteq \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$, sólo tenemos que ver que f es $\mathcal{F}$-simétrica, pero por la argumentación anterior $fix_G(x) = stab_G(f)$ con lo que $stab_G(f) \in \mathcal{F}$ y $f \in \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$. □

Ahora pasaremos a fijar a G y a $\mathcal{I}$ para obtener los modelos que usaremos en los próximos capítulos. En todos los casos supondremos que $A \sim \omega$ en la metateoría.

4.2.1. El modelo básico de Fraenkel.

Para construir el modelo básico de Fraenkel fijamos $G = Aut(A)$ y a $\mathcal{I}^*$ como el filtro generado por el ideal normal $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{P}(A) \mid x \text{ es C-finito}\}$. Denotemos a éste modelo como $\mathbb{F}_1$. Notemos que en este modelo x es $\mathcal{I}^*$-simétrico si y sólo si hay $E \subseteq A$ C-finito tal que si para todo $e \in E$, $\pi(e) = e$, entonces $\widehat{\pi}(x) = x$.

Lema 4.31. *$fix_G(A) \notin \mathcal{I}^*$.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{I}$, veamos que $fix_G(E) \nsubseteq fix_G(A)$. Sean $a, b \in A \backslash E$, que existen ya que A es C-infinito y E C-finito, y definamos π permutación de A como:

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq a, b \\ a & \text{si } x = b \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

Es claro que $\pi \in fix_G(E)$, pero $\pi \notin fix_G(A)$. □

Con este lema, y por el teorema anterior podemos concluir los siguientes teoremas.

Teorema 4.32. *A no es bien ordenable en $\mathbb{F}_1$.*

Teorema 4.33. *$\mathbb{F}_1 \nvDash AC$.*

Teorema 4.34. *$ZFA \nvdash AC$.*

Aún más, en $\mathbb{F}_1$ el principio de ordenación (PO)[2] es falso.

Teorema 4.35. *$B = \{\{u, v\} \in \mathcal{P}(A) \mid u, v \in A\}$ no tiene una función de elección en $\mathbb{F}_1$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que B sí tiene una función de elección, digamos, f y sea E un soporte para f. Como A es C-infinito y E es C-finito, entonces debe haber $u_0, v_0 \in A \backslash E$. Con esto, definimos la permutación de A:

$$\pi(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \neq u_0, v_0 \\ u_0 & \text{si } a = v_0 \\ v_0 & \text{si } a = u_0 \end{cases}$$

Es claro que $\pi \in fix_G(E)$, entonces $\widehat{\pi}(f) = f$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $f(\{u_0, v_0\}) = u_0$, con lo que $\widehat{\pi}(f(\{u_0, v_0\})) = f(\{u_0, v_0\}) = u_0$, pero por otro lado $\widehat{\pi}(f(\{u_0, v_0\})) = \widehat{\pi}(u_0) = v_0$, lo cual es una contradicción. Entonces tal f no puede existir. □

[2]El principio de ordenación afirma que todo conjunto puede ser totalmente ordenado

Consecuencia directa de este teorema es que A no pueda tener un orden total, pues si lo tuviera podríamos definir una función de elección f en B, donde f eligiera al menor de cada par. Con esta observación, obtenemos los teoremas siguientes.

Teorema 4.36. $\mathbb{F}_1 \nvDash PO$.

Teorema 4.37. $ZFA \nvdash PO$.

4.2.2. El segundo modelo de Fraenkel.

Para empezar, tomemos una numeración de A (en la metateoría) y consideremos $P_n = \{a_{2n}, a_{2n+1}\}$ para todo $n \in \omega$. Es claro que si $n \neq m$ entonces $P_n \cap P_m = \emptyset$ y que $A = \cup_{n\in\omega} P_n$. Con A partido de esta manera, tomaremos $G = \{\pi \in Aut(A) \mid \forall n \in \omega(\widehat{\pi}(P_n) = P_n)\}$, y a $\mathcal{I}^*$ como el filtro generado por el ideal normal $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{P}(A) \mid x \text{ es C-finito}\}$. Denotemos a éste modelo como $\mathbb{F}_2$.

Lema 4.38. *$\{P_n \mid n \in \omega\} \in \mathbb{F}_2$ y es numerable en $\mathbb{F}_2$, pero no tiene una función de elección en el modelo.*

Demostración. Primero, veamos que cada $P_n \in \mathbb{F}_2$, pues $stab_G(P_n) = G$ para todo $n \in \omega$, con lo que $\{P_n \mid n \in \omega\} \in \mathbb{F}_2$. Ahora, notemos que $f\colon \omega \longrightarrow \{P_n \mid n \in \omega\}$ tal que $f(n) = P_n$ está en $\mathbb{F}_2$, pues si $\pi \in G$, entonces $\widehat{\pi}(f) = \{\widehat{\pi}(n, P_n) \mid n \in \omega\} = \{(n, P_n) \mid n \in \omega\} = f$, con lo que $\{P_n \mid n \in \omega\}$ es contable en el modelo. Ahora, por contradicción, supongamos que $\{P_n \mid n \in \omega\}$ tiene una función f de elección y sea $E \in \mathcal{I}$ uno de sus soportes. Como E es C-finito, debe haber $n \in \omega$ tal que $a_{2n}, a_{2n+1} \notin E$ y definamos π permutación de A como:

$$\pi(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \neq a_{2n}, a_{2n+1} \\ a_{2n} & \text{si } a = a_{2n+1} \\ a_{2n+1} & \text{si } a = a_{2n} \end{cases}$$

Es claro que $\pi \in G$ y que $\pi \in fix_G(E)$, con lo que $\widehat{\pi}(f) = f$ pues E es soporte de f, pero $\widehat{\pi}(f(2n)) = a_{2n+1}$ y $f(2n) = a_{2n}$ y ya que $\widehat{\pi}(2n) = 2n$, entonces $\widehat{\pi}(f(2n)) = f(2n)$, lo cual es una contradicción. Entonces tal f no existe. ☐

Con esto, podemos concluir los siguientes teoremas:

Teorema 4.39. $\mathbb{F}_2 \nvDash C(\aleph_0, 2)$[3].

Teorema 4.40. $ZFA \nvdash C(\aleph_0, 2)$.

Y como sabemos que $ZFA \vdash PO \longrightarrow C(\aleph_0, 2)$, también podemos concluir:

Teorema 4.41. $\mathbb{F}_2 \nvDash PO$.

Teorema 4.42. $ZFA \nvdash PO$.

A continuación, veremos que A es un tipo de conjunto muy especial en este modelo. Esto servirá más adelante para obtener otros resultados.

[3] En la notación de [8], elección para familias numerables de pares. Se pueden recordar los calcetines de Russell.

Definición 4.43. *Diremos que a es un conjunto de Russell si y sólo existe una partición numerable* $\{P_n \mid n \in \omega\}$ *de a tal que* $P_n \sim 2$ *para todo* $n \in \omega$ *pero para todo* $I \subseteq \omega$ *C-infinito, el producto* $\prod_{i \in I} P_i$ *es vacío.*

Considerando que si $I \subseteq \omega$ es C-infinito, entonces $I \sim \omega$ y la prueba del lema anterior, podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 4.44. *A es un conjunto de Russell en $\mathbb{F}_2$.*

4.2.3. El modelo ordenado de Mostowski.

Ahora construyamos el último modelo que usaremos. Primero, ordenemos a A como $\mathbb{Q}$, es decir, sea $<\subseteq A \times A$ tal que $(A, <) \cong$
$(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ y tomemos a $G = \{\pi \in Aut(A) \mid (u, v \in A \;\&\; u < v) \longrightarrow \pi(u) < \pi(v)\}$ y $\mathcal{I}^*$ como el filtro generado por el ideal normal $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{P}(A) \mid x \text{ es C-finito}\}$. Denotemos al modelo generado con este filtro y este grupo con $\mathbb{M}$.

Teorema 4.45. *A no es bien ordenable en $\mathbb{M}$*

Demostración. Veamos que $fix_G(A) \notin \mathcal{I}^*$. Sea $E \in \mathcal{I}$ y sea e el máximo de E. Si $e \leq 0$ podemos podemos definir la función $h\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que:

$$h(q) = \begin{cases} q & \text{si } q \leq 0 \\ 2q & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Y si $e > 0$ podemos definir la función h como:

$$h(q) = \begin{cases} q & \text{si } q \leq g(e) \\ 2q - g(e) & \text{si } q > g(e) \end{cases}$$

Si tomamos $g\colon A \longrightarrow \mathbb{Q}$ un isomorfismo, entonces $g^{-1} \circ h \circ g$ es un permutación no trivial de A, que mantiene fijos a los elementos de E. Entonces no hay $E \in \mathcal{I}$ que sea soporte de $fix_G(A)$. □

Con esto, tenemos que el axioma de elección también es falso en $\mathbb{M}$, pero, a diferencia de los demás modelos, $\mathbb{M}$ hace verdadero a PO, como veremos con los siguientes teoremas.

Definición 4.46. *Sea $C \subseteq \mathbb{M}(G, \mathcal{F})$ una subclase de un modelo de permutación. Diremos que C es simétrica si y sólo si*

$$stab_G(C) := \{\pi \in G \mid \pi[C] = C\} \in \mathcal{F}$$

Lema 4.47. *Sea $\pi \in G$, $E \in \mathcal{I}$ y $x \in \mathbb{M}$, E es soporte de x si y sólo si $\widehat{\pi}(E)$ es soporte de $\widehat{\pi}(x)$.*

Demostración. Si E es soporte de x, por los lemas 4.25 y 4.28 tenemos que:

$$\begin{aligned} fix_G(\widehat{\pi}(E)) &\leq \pi fix_G(E)\pi^{-1} \\ &\leq \pi stab_G(x)\pi^{-1} \\ &\leq stab_G(\widehat{\pi}(x)) \end{aligned}$$

con lo que $\widehat{\pi}(E)$ es soporte de $\widehat{\pi}(x)$. Después, si $\widehat{\pi}(E)$ es soporte de $\widehat{\pi}(x)$ y si $\sigma \in fix_G(E)$, entonces $\pi\sigma\pi^{-1} \in fix_G(\widehat{\pi}(E))$ con lo que también es elemento de $stab_G(\widehat{\pi}(x))$, es decir $\widehat{\pi\sigma\pi^{-1}}(\widehat{\pi}(x)) = \widehat{\pi}(x)$, con lo que $\widehat{\pi\sigma}(x) = \widehat{\pi}(x)$ y $\widehat{\sigma}(x) = x$. □

Lema 4.48. *Si $(a, b) \subseteq A$ es un intervalo y $e_1, e_2 \in (a, b)$ entonces hay una $\pi \in G$ tal que $\pi(a, b) = (a, b)$, $\pi(e_1) = e_2$ y en el resto de A es la identidad.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $e_1 < e_2$ consideremos:

$$\pi(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \notin (a, b) \\ g(h(g^{-1}(z))) & \text{si } z \in (a, b) \text{ y } z \leq e_1 \\ g(j(g^{-1}(z))) & \text{si } z \in (a, b) \text{ y } z > e_1 \end{cases}$$

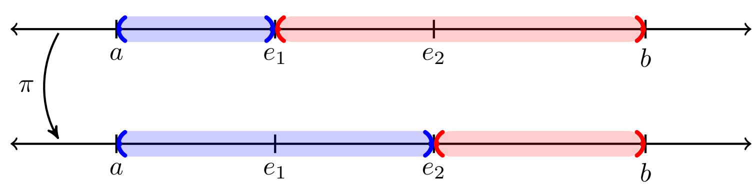
de donde g es el isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y A, $h\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es:

$$h(q) = \frac{g^{-1}(e_2)(q - g^{-1}(a)) + g^{-1}(a)(g^{-1}(e_1) - q)}{g^{-1}(e_1) - g^{-1}(a)}$$

y $j\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es:

$$j(q) = \frac{g^{-1}(e_2)(g^{-1}(b) - q) + g^{-1}(b)(q - g^{-1}(e_1))}{g^{-1}(b) - g^{-1}(e_1)}$$

Podemos imaginar que la función π hace esto:



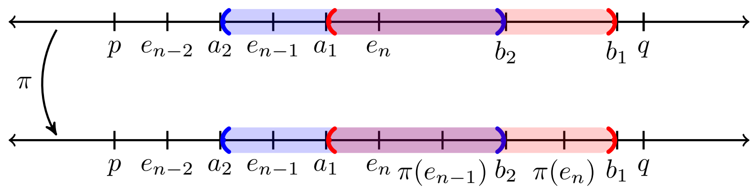
Notemos que $\pi \in G$ y que $\pi(e_1) = e_2$. □

Lema 4.49. *En el modelo de Mostowski:*

- *Si E_1 y E_2 son soportes de un conjunto simétrico x, entonces $E_1 \cap E_2$ también es soporte de x.*
- *Todo conjunto simétrico tiene un soporte mínimo (respecto a $\subseteq$).*
- *La clase de todos los pares (x, E) donde x es un conjunto simétrico y E su soporte mínimo es simétrica.*

Demostración. Para demostrar el primer punto, basta notar que si E_1 y E_2 son soportes de x y $\pi \in fix_G(E_1 \cap E_2)$, entonces $\pi = \rho_1\sigma_1 \ldots \rho_n\sigma_n$ para algunas $\rho_i \in fix_G(E_1)$ y $\sigma_i \in fix_G(E_2)$ con lo que tendremos que $\pi(x) = \rho_k\sigma_k \ldots \rho_1\sigma_1(x) = x$. Para ver esto, primero notemos que los elementos de $E_1 \cap E_2$, al ser un número finito, generan una cantidad finita de intervalos en A, y además, cada intervalo de éstos tiene como imagen bajo π a sí mismo. Con esta observación, podemos construir la composición intervalo a intervalo. Sean $p < q \in E_1 \cap E_2$ y sean $e_1 < e_2 < \ldots < e_n \in E_1 \cup E_2$ los átomos del intervalo definido por p y q que no están en la intersección de los soportes. Como e_n es el máximo de estos átomos, su imagen también es la máxima de las imágenes, con lo que podemos elegir a a_1 y b_1 tales que $e_{n-1} < a_1 < e_n < \pi(e_n) < b_1 < q$ y tomar una permutación γ_1 que lleve el intervalo (a_1, b_1) a sí mismo, e_n a $\pi(e_n)$ y en el resto de A actúe como la identidad. Con esto, si $e_n \in E_1$ entonces $\gamma_1 \in fix(E_2)$ o viceversa.

Ahora, como $e_{n-1} < e_n$ entonces $\pi(e_{n-1}) < \pi(e_n)$, con lo que podemos elegir a a_2 y b_2 tales que $e_{n-1}, \pi(e_{n-1}) \in (a_2, b_2)$ pero $e_{n-2}, \pi(e_n) \notin (a_2, b_2)$ y tomar una permutación γ_2 tal que la imagen del intervalo (a_2, b_2) sea él mismo, $\gamma_2(e_{n-1}) = \pi(e_{n-1})$ y en el resto de A sea la identidad. De igual manera, si $e_{n-1} \in E_1$, entonces $\gamma \in fix_G(E_2)$ o viceversa. Después de aplicar esto a todos los e_i del intervalo y a todos los intervalos, tendremos que $\pi = \gamma_k \gamma_{k-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$. En el dibujo siguiente podemos pensar que el sombreado rojo corresponde a γ_1 y el azul a γ_2.



Para demostrar el siguiente punto tomemos x un conjunto simétrico y denotemos con $\mathcal{S}$ al conjunto de sus soportes. Sea $T \in \mathcal{S}$ y veamos que $\cap\mathcal{S} = \cap(\mathcal{P}(T) \cap \mathcal{S})$. Es claro que $\cap\mathcal{S} \subseteq \cap(\mathcal{P}(T) \cap \mathcal{S})$ y si $s \in \cap(\mathcal{P}(T) \cap \mathcal{S})$ y $S \in \mathcal{S}$, entonces, como $S \cap T$ es elemento de $\mathcal{S}$ por el punto anterior y $S \cap T \in \mathcal{P}(T)$ entonces $s \in S \cap T$, ya que $S \cap T \in \mathcal{P}(T) \cap \mathcal{S}$, con lo que $s \in S$ y $s \in \cap S$, y como T es C-finito, $\mathcal{P}(T)$ lo es y entonces $\cap\mathcal{S}$ es el soporte mínimo de x. Para ver el último punto, basta ver que E es el mínimo soporte de x si y sólo si $\widehat{\pi}(E)$ es el mínimo soporte de $\widehat{\pi}(x)$. Por el lema 4.47, sólo falta demostrar la minimalidad, así que, si $D \in \mathcal{I}$ es soporte de $\widehat{\pi}(x)$, y $D \subsetneq \widehat{\pi}(E)$ al ser π biyectiva, hay E' tal que $\widehat{\pi}(E') = D$, con esto E' es soporte de x y $E' \subsetneq E$. De manera similar se obtiene la otra implicación. □

Lema 4.50. *Si E es un soporte de x entonces $stab_G(E) \subseteq stab_G(x)$.*

Demostración. Sea $\pi \in G$ y supongamos que $\widehat{\pi}(E) = E$ con E soporte de x. Como E es finito y π preserva el orden de A, entonces $\pi(e) = e$ para todo $e \in E$, con lo que $\pi \in fix_G(E)$ y $\widehat{\pi}(x) = x$. □

Definición 4.51. *Sea $x \in \mathbb{M}$. Definimos la órbita de x como el conjunto:*

$$orb(x) = \{\widehat{\pi}(x) \mid \pi \in G\}$$

Observación 4.52. *Las órbitas son ajenas y simétricas.*

Demostración. Si $\widehat{\pi}(x) \in orb(y)$ para alguna $\pi \in G$, entonces $\widehat{\pi}(x) = \widehat{\rho}(y)$ para alguna $\rho \in G$ y si tomamos $\widehat{\sigma}(x) \in orb(x)$, entonces, como $\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma\pi^{-1}}\pi(x) = \widehat{\sigma\pi^{-1}}\rho(y)$ y $\sigma\pi^{-1}\rho \in G$, tenemos que $\sigma(x) \in orb(y)$. De manera similar $orb(y) \subseteq orb(x)$, con lo que $orb(y) = orb(x)$. Además, si $\pi \in G$, entonces $\widehat{\pi}(orb(x)) = orb(\widehat{\pi}(x)) = orb(x)$, ya que si $\widehat{\pi\sigma}(x) \in \widehat{\pi}(orb(x))$, como $\widehat{\pi\sigma}(x) = \widehat{\pi\sigma\pi^{-1}}\pi(x)$ y $\pi\sigma\pi^{-1} \in G$, entonces $\widehat{\pi\sigma}(x) \in orb(\widehat{\pi}(x))$. De igual manera $orb(\widehat{\pi}(x)) \subseteq \widehat{\pi}(orb(x))$ y es claro que $orb(\widehat{\pi}(x)) \subseteq orb(x)$. Ahora sea $\widehat{\sigma}(x) \in orb(x)$, y al notar que $\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma\pi^{-1}}\pi(x)$ obtenemos la contención que hace falta. □

Con la observación anterior podemos concluir que cualquier conjunto de órbitas es un conjunto de $\mathbb{M}$ y por el teorema 4.30 es bien ordenable en $\mathbb{M}$.

Lema 4.53. *Sean $x, y \in \mathbb{M}$. Si $orb(y) = orb(x)$ y tienen el mismo soporte mínimo, entonces $x = y$.*

Demostración. Como $y \in orb(x)$, entonces hay $\pi \in G$ tal que $\widehat{\pi}(x) = y$. Con esto, $\widehat{\pi}(E)$ es el soporte mínimo de y, con lo que $\widehat{\pi}(E) = E$ y $x = \widehat{\pi}(x) = y$. □

Teorema 4.54. *Todo $x \in \mathbb{M}$ es totalmente ordenable en $\mathbb{M}$.*

Demostración. Para empezar la demostración, definamos, con $\gamma \in OR$ el conjunto $C_\gamma = \{orb(x) \mid rank(x) = \gamma\}$. Sea $x \in \mathbb{M}$, $\alpha \in OR$ tal que $rank(x) \leq \alpha$ y consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Definimos la función $f\colon x \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{I}$, tal que:

$$f(x) = (orb(x), E)$$

donde E es el soporte mínimo de x. Por el lema anterior, tenemos que f es inyectiva, con lo que si ordenamos linealmente el rango de f, habremos acabado. Como $\mathcal{C}$ es un conjunto de órbitas, tiene un buen orden en $\mathbb{M}$ y $\mathcal{I}$ se puede ordenar lexicograficamente en $\mathbb{M}$, con lo que $\mathcal{C} \times \mathcal{I}$ se puede ordenar lexicograficamente. □

Entonces, como corolario obtenemos los siguientes teoremas:

Teorema 4.55. *Todo conjunto es totalmente ordenable en $\mathbb{M}$.*

Teorema 4.56. $ZFA \nvdash PO \longrightarrow AC$

Capítulo 5

Independencia de las definiciones de finitud en ZFA

En este capítulo demostraremos la independencia de las definiciones en una teoría con átomos con los modelos construídos. Para demostrar la independencia de I, Ia y II usaremos el modelo básico de Fraenkel ($\mathbb{F}_1$) y la independencia de el resto de las definiciones será probada en el modelo ordenado de Mostowski ($\mathbb{M}$). Empezaremos con la independencia de I, Ia y II.

Teorema 5.1. *En $\mathbb{F}_1$, A es I-infinito y Ia-finito.*

Demostración. Del teorema 4.32 se obtiene directamente que A es I-infinito, pues la equivalencia de esta definición con la de C-infinitud en el modelo implica que cualquier I-finito es bien ordenable en el modelo. Solo resta ver que A es Ia-finito. Sea $B \subseteq A$ en el modelo y demostremos que B es C-finito o $A \backslash B$ lo es. Como $B \in \mathbb{F}_1$, entonces tiene un soporte, digamos E. Si $B \subseteq E$ en el modelo, como E es C-finito en el modelo, entonces B también lo será; pero si $B \nsubseteq E$ en el modelo, entonces hay $b \in B$ tal que $b \notin E$. Ahora, sea $c \in A \backslash E$ y definimos $\pi \in G$ como:

$$\pi(a) = \begin{cases} b & \text{si } a = c \\ c & \text{si } a = b \\ a & \text{si } a \neq c, a \neq b \end{cases}$$

Como b y c no son elementos de E, tenemos que $\pi \in fix_G(E)$, con lo que $\pi \in stab_G(B)$ y $c = \pi(b) \in B$. Entonces $A \backslash E \subseteq B$ por lo que $A \backslash B \subseteq E$ y $A \backslash B$ es C-finito en $\mathbb{F}_1$. $\square$

Teorema 5.2. *La equivalencia de las definiciones II y Ia implica la equivalencia de las definiciones Ia y I.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que Ia no implica I, entonces hay un conjunto B tal que B es Ia-finito, pero I-infinito. Consideremos entonces el conjunto $2 \times B = \{0\} \times B \cup \{1\} \times B$ y notemos que es Ia-infinito ya que, como B es I-infinito, $\{0\} \times B$ y $\{1\} \times B$ también lo son. Por otro lado, como B es Ia-finito, entonces B también es II-finito. Veamos que $2 \times B$ es también II-finito. Primero, demostremos que $\{0\} \times B$ y $\{1\} \times B$ son II-finitos. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\{0\} \times B)$ una familia ordenada totalmente por $\subseteq$ y definimos:

$$\mathcal{G} = \{C \subseteq B \mid \{0\} \times C \in \mathcal{F}\}$$

Notemos que $\mathcal{G}$ está ordenado totalmente, pues si $C_0, C_1 \in \mathcal{G}$ entonces $\{0\} \times C_0, \{0\} \times C_1 \in \mathcal{F}$ y $\{0\} \times C_0 \subseteq \{0\} \times C_1$ o $\{0\} \times C_1 \subseteq \{0\} \times C_0$, pues $\mathcal{F}$ está ordenada totalmente, con lo que $C_0 \subseteq C_1$ o $C_1 \subseteq C_0$. Con esto $\mathcal{G}$ tiene un maximal, digamos C_0 y es claro que $\{0\} \times C_0$ es maximal de $\mathcal{F}$. De manera similar $\{1\} \times B$ es II-finito. Por último, veamos que $\{0\} \times B \cup \{1\} \times B$ es II-finito. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\{0\} \times B \cup \{1\} \times B)$ una familia ordenada totalmente por $\subseteq$ y definimos:

$$\mathcal{F}_0 = \{\{0\} \times C \mid C \in \mathcal{F}_0'\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \{\{1\} \times D \mid D \in \mathcal{F}_1'\}$$

de donde

$$\mathcal{F}_0' = \{C \subseteq B \mid \exists D \subseteq B \;\&\; \{0\} \times C \cup \{1\} \times D \in \mathcal{F}\}$$
$$\mathcal{F}_1' = \{D \subseteq B \mid \exists C \subseteq B \;\&\; \{0\} \times C \cup \{1\} \times D \in \mathcal{F}\}$$

Veamos que $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ están totalmente ordenadas. Sean $\{0\} \times C_0$ y $\{0\} \times C_1 \in \mathcal{F}_0$, entonces hay D_0 y $D_1 \in \mathcal{F}_1'$ tal que $\{0\} \times C_0 \cup \{1\} \times D_0$ y $\{0\} \times C_1 \cup \{1\} \times D_1 \in \mathcal{F}$ con lo que $\{0\} \times C_0 \cup \{1\} \times D_0 \subseteq \{0\} \times C_1 \cup \{1\} \times D_1$ o $\{0\} \times C_1 \cup \{1\} \times D_1 \subseteq \{0\} \times C_0 \cup \{1\} \times D_0$ y como $\{0\} \times C_0$ es ajeno con $\{1\} \times D_1$ y $\{0\} \times C_1$ es ajeno con $\{1\} \times D_0$ entonces $\{0\} \times C_0 \subseteq \{0\} \times C_1$ o $\{0\} \times C_1 \subseteq \{0\} \times C_0$. De manera similar se demuestra para $\mathcal{F}_1$. Entonces $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ tienen maximales, digamos $\{0\} \times C_0$ y $\{1\} \times D_0$ respectivamente y $\{0\} \times C_0 \cup \{1\} \times D_0$ es maximal de $\mathcal{F}$, con lo que $2 \times B$ es II-finito. $\square$

De estos teoremas, entonces podemos concluir que en $\mathbb{F}_1$ hay un conjunto que es Ia-finito pero I-finito y un conjunto tal que es II-finito pero Ia-infinito.

Teorema 5.3. *$ZFA \nvdash$ Ia-finito $\longrightarrow$ I-finito.*

Teorema 5.4. *$ZFA \nvdash$ II-finito $\longrightarrow$ Ia-finito.*

Procedamos con las demás pruebas de independencia. Recordemos, que en $\mathbb{M}$ teníamos que A no es bien ordenable, con lo que es I-infinito en el modelo. Ahora, probemos que A es III-finito en $\mathbb{M}$. Para esto, necesitamos probar antes los siguientes lemas.

Lema 5.5. *Sea $B \subseteq A$ no vacío. $B \in \mathbb{M}$ si y sólo si $B = \cup\{(a_n, b_n) \mid n \in m\} \cup A'$ donde A' es C-finito y m es un natural.*

Demostración. Primero supongamos que $B \in \mathbb{M}$, entonces hay $E \subseteq A$ finito tal que $fix_G(E) \subseteq stab_G(B)$. Sean $a, b \in E$ tales que $a < b$ y no hay átomos de E entre ellos. Notemos que si hay $c \in (a, b)$ tal que $c \in B$ entonces $(a, b) \subseteq B$. Sea $x \in (a, b)$ y sabemos que hay una permutación π tal que $\widehat{\pi}(a, b) = (a, b)$, $\pi(c) = x$ y en el resto de A actúa como la identidad. Con esto, como $\pi \in fix_G(E)$, tenemos que $x \in B$, es decir, si hay un elemento de un intervalo definido por dos átomos en B, entonces todo el intervalo está contenido en B, con lo que B tiene la forma que buscamos.

Ahora supongamos que $B = \cup\{(a_n, b_n) \mid n \in m\} \cup A'$ con A' C-finito y m un natural y sólo hay que demostrar que B es simétrico pues $B \subseteq A$. Consideremos al conjunto $E = \{a \in A \mid \exists b \in A$ con $(a, b) \subseteq B\} \cup A$ y notemos que es finito pues A' lo es y B sólo tiene contenido una cantidad finita de intervalos. Demostremos que E es soporte de B. Sea $\pi \in fix_G(E)$ y $c \in B$. Si $c \in (a, b)$ para algún intervalo de B, entonces $a < c < b$ y $\pi(a) < \pi(c) < \pi(b)$ y como $a, b \in E$, entonces $a < \pi(c) < b$, con lo que $\pi(c) \in B$ y $\pi \in stab_G(B)$. Si $c \in A'$, es inmediato que $\pi(c) \in B$. $\square$

Lema 5.6. *Sea $B \subseteq A$ con $B \in \mathbb{M}$. Si B es C-infinito, entonces $(B$ no es bien ordenable$)^{\mathbb{M}}$.*

Demostración. Primero, notemos que como B es C-infinito y está en el modelo, entonces debe contener un intervalo (a, b) de A, por lo demostrado en el lema anterior. Demostremos entonces que este intervalo no es bien ordenable en el modelo. Sean $s_1 < s_2 < \ldots < s_n \in A$. Como son un número finito de átomos, entonces $(a, b)\backslash\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ contiene intervalos; sea (a', b') uno de ellos y consideremos:

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin (a', b') \text{ o } x \leq g(\frac{g^{-1}(a')+g^{-1}(b')}{2}) \\ g(2g^{-1}(x)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde de nuevo, g es el isomorfismo entre A y $\mathbb{Q}$. Veamos que $\pi \in fix_G(\{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$ pero $\pi \notin fix_G(a, b)$, con lo que el $fix_G(a, b)$ no puede ser C-finito. □

Lema 5.7. *Sea $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ y $P \in \mathbb{M}$. Si P es C-infinita, entonces (P no es bien ordenable)$^{\mathbb{M}}$.*

Demostración. Demostraremos que P tiene un subconjunto que cubre suprayectivamente a un intervalo, con lo que P no podrá ser bien ordenable en el modelo, pues su orden induciría un buen orden en el intervalo. Sea E un soporte para P. Como E es C-finito, entonces debe existir un conjunto $B \in P$ tal que alguno de los extremos de alguno de sus intervalos o alguno de sus puntos que no está en un intervalo es un átomo que no es elemento de E y llamémosle a (recordemos la forma un subconjunto de A por el lema 5.5). Consideremos el conjunto $Q = \{\widehat{\pi}(B) \mid \pi \in fix_G(E)\}$. Este es el conjunto que cubrirá al intervalo. Demostremos que $Q \in \mathbb{M}$. Es claro que $Q \subseteq P \subseteq \mathbb{M}$, pues E es soporte de P. Veamos que Q es simétrico. Sea $\widehat{\pi}(B) \in Q$ y sea $\rho \in fix_G(E)$, y como $\rho\pi \in fix_G(E)$, entonces $\widehat{\rho\pi}(B) \in Q$.

Ahora daremos la suprayección de Q a un intervalo de A. Sea $\widehat{\pi}(B) \in Q$ y notemos que $\pi(a) = \rho(a)$ para toda $\rho \in fix_G(E)$ tal que $\widehat{\rho}(B) = \widehat{\pi}(B)$, es decir, la imagen de a sólo dependerá de $\widehat{\pi}(B)$, pues los intervalos de $\widehat{\pi}(B)$ provienen de intervalos de B, así como los puntos aislados de $\widehat{\pi}(B)$, provienen de puntos aislados de B (pues π mantiene el orden), y entonces, a al ser el extremo de un intervalo o un punto aislado, y por que ρ mantiene el orden, $\rho(a)$ debe ser extremo de un intervalo o un punto aislado siempre que $\widehat{\rho}(B) = \widehat{\pi}(B)$, y además, debe ser el mismo pues B y $\widehat{\pi}(B)$ tienen sólo un número finito de intervalos. Con esto, entonces podemos definir la función $f\colon Q \longrightarrow (b, c)$ donde $f(q) = \pi(a)$ con $\widehat{\pi}(B) = q$ y (b, c) es el intervalo tal que $a \in (b, c)$, no tiene átomos de E y $b, c \in E$. Notemos que en efecto $Im(f) \subseteq (b, c)$, pues si $\widehat{\pi}(B) \in Q$ y como $b < a < c$, entonces $\pi(b) < \pi(a) < \pi(c)$, es decir, $b < f(B) < c$.

Veamos que f es la función que buscamos. Primero, como $Q \in \mathbb{M}$ y $f(q) \in \mathbb{M}$ para toda $q \in Q$, tenemos que $f \subseteq \mathbb{M}$. Veamos que E también es soporte de f. Sea $(\widehat{\pi}(B), \pi(a)) \in f$ y $\rho \in fix_G(E)$. Entonces $\rho(\widehat{\pi}(B), \pi(a)) = (\widehat{\rho\pi}(B), \rho\pi(a))$ y como $\widehat{\rho\pi}(B)$ también es elemento de Q, pues E es soporte de éste, $(\widehat{\rho\pi}(B), \rho\pi(a)) \in f$. Por último veamos que es sobre. Si $c, d \in (e, b)$, entonces ya sabemos que hay $\sigma \in G$ tal que σ es la identidad para los átomos que no son elementos de (e, b) y $\sigma(c) = d$. Usando esto, si $d \in (b, c)$, entonces hay σ tal que $\sigma(a) = d$ y fuera de (b, c) es la identidad. Entonces $\sigma \in fix_G(E)$, con lo que $\sigma(B) \in Q$ y $f(\sigma(B)) = d$. □

Con estos lemas, podemos demostrar que las siguientes dos definiciones son independientes.

Teorema 5.8. *A es II-infinito y III-finito en $\mathbb{M}$.*

Demostración. Ya habíamos notado que A es I-infinito en $\mathbb{M}$, y como las primeras tres definiciones son equivalentes en $\mathbb{M}$, A también es II-infinito. Solo falta ver que es III-finito. Por contradicción, supongamos que $\mathcal{P}(A)$ es D-infinito en el modelo, entonces debe tener un subconjunto numerable en el modelo, pero si tuviera un subconjunto numerable, éste sería bien ordenable en el modelo, lo cual es una contradicción. Entonces A es III-finito. □

Teorema 5.9. *En $\mathbb{M}$, $\mathcal{P}(A)$ es III-infinito y D-finito.*

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos que $\mathcal{P}(A)$ es D-finito, y por el teorema 2.11, al ser A C-infinito, entonces $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ debe ser D-infinita. □

Entonces obtenemos las pruebas:

Teorema 5.10. *$ZFA + AE \nvdash$ III-finito $\longrightarrow$ II-finito.*

Teorema 5.11. *$ZFA + AE \nvdash$ IV-finito $\longrightarrow$ III-finito.*

Por último, probemos los siguientes lemas para pasar a probar los últimos tres teoremas.

Lema 5.12. *Sean $B, C \in \mathbb{M}$ conjuntos de átomos. $(B \sim C)^{\mathbb{M}}$ si y sólo si $B \backslash C$ y $C \backslash B$ son C-finitos y $(B \backslash C \sim C \backslash B)^{\mathbb{M}}$.*

Demostración. Supongamos que $B \sim_f C$ en el modelo. Probemos primero que $B \backslash C$ y $C \backslash B$ son C-finitos. Como B y $C \in \mathbb{M}$, entonces $B \backslash C$ y $C \backslash B \in \mathbb{M}$. Por contradicción, supongamos que $B \backslash C$ es C-infinito, entonces debe tener un intervalo de A contenido en él. Tomemos E un soporte para f y consideremos entonces (a, b) contenido en el intervalo de $B \backslash C$, tal que no tiene elementos de E. Sean $c, d \in (a, b)$ y de nuevo, consideremos $\pi \in G$ tal que $\pi(c) = d$ y π es la identidad fuera de (a, b). Notemos que $\pi \in fix_G(E)$, con lo que $\widehat{\pi}[f] = f$, pero entonces, como $(a, b) \subseteq B \backslash C$, entonces $c \in Dom(f)$ y:

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}(c, f(c)) &= (\pi(c), \pi(f(c))) \\ &= (d, f(c)) \text{ pues } f(c) \in B \backslash C \end{aligned}$$

pero f es biyectiva y eso no puede suceder. Análogamente, no puede suceder que $C \backslash B$ sea C-infinito.

Ahora sólo falta ver que $B \backslash C \sim C \backslash B$ en el modelo. Como $B \backslash C$ y $C \backslash B$ son finitos, también son finitos en el modelo y entonces son comparables en el modelo. Si suponemos que $B \backslash C \nsim C \backslash B$ entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B \backslash C \prec C \backslash B$, es decir, hay $D \subsetneq C \backslash B$ tal que $B \backslash C \sim D$. Por otro lado tenemos que $C \sim B = B \backslash C \cup (B \cap C)$ y entonces $C \sim D \cup (B \cap C)$ y como $D \subsetneq C \backslash B$, entonces $D \cup (B \cap C) \subsetneq C$ con lo que C es D-infinito, pero eso no puede suceder, pues por el lema 5.6 tal subconjunto de A no existe.

Por otro lado, si $B \backslash C \sim_f C \backslash B$ en el modelo, entonces podemos definir la función $h \colon B \longrightarrow C$ tal que:

$$h(b) = \begin{cases} f(b) & \text{si } b \notin C \\ b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que es una biyección entre B y C y está en el modelo pues se puede construir con los axiomas. □

Lema 5.13. *Sea B bien ordenable en $\mathbb{M}$ tal que $A \cap B = \emptyset$ y $C \in \mathbb{M}$. Entonces $A \cup B \nsim 2 \times C$.*

Demostración. Sea B bien ordenable en el modelo y C un conjunto del modelo; y supongamos que $A \cup B \sim_f 2 \times C$. Consideremos los conjuntos:

$$\begin{aligned} A_0 = A \cap f[\{0\} \times C],\ B_0 = B \cap f[\{0\} \times C] \\ A_1 = A \cap f[\{1\} \times C],\ B_1 = B \cap f[\{1\} \times C] \end{aligned}$$

y notemos que son ajenos dos a dos. Como $f[\{0\} \times C] \sim f[\{1\} \times C]$ en el modelo pues f es biyectiva y como $f[\{0\} \times C] = B_0 \cup A_0$ y $f[\{1\} \times C] = B_1 \cup A_1$, entonces $B_0 \cup A_0 \sim_h B_1 \cup A_1$ en $\mathbb{M}$.

Ahora, como $B_0 \subseteq B$, entonces también es bien ordenable, con lo que $h[B_0]$ es bien ordenable y $A_1 \cap h[B_0]$ lo es. También $B_1 \cap h[A_0]$ es bien ordenable. Llamemos N_0 a $A_1 \cap h[B_0]$ y N_1 a $B_1 \cap h[A_0]$. Veamos que $h[A_0] \cup N_0 = A_1 \cup N_1$, y como $h[A_0]$, N_0 y A_0 son ajenos, entonces $A_0 \cup N_0 \sim A_1 \cup N_1$. Como N_0 es subconjunto de A y es bien ordenable, debe ser C-finito en el modelo, y $N_1 \subseteq h[A_0] \sim A_0$ con lo que $N_1 \precsim A_0$. Entonces N_1 es biyectable a un subconjunto bien ordenado de A, con lo que debe ser C-finito. Por lo tanto N_0 y N_1 son comparables. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $N_1 \precsim N_0$ y sea $n = |N_0| \backslash |N_1|$. Como $A_0 \cup N_0 \sim A_1 \cup N_1$ entonces hay un subconjunto A_1' de A_1 con n elementos tal que $A_0 \sim A_1 \backslash A_1'$ y consideremos $A_1'' \subseteq A_1$ tal que $A_1'' \sim A_0$. Por el lema anterior, al ser A_1'' y A_0 equipotentes, $A_1'' \backslash A_0$ y $A_0 \backslash A_1''$ son C-finitos y equipotentes. Pero $A_0 = A_0 \backslash A_1''$, pues son ajenos, es decir, A_0 es C-finito con lo que A_1 también lo es y esto haría que A fuera C-finito. □

Teorema 5.14. *$A \cup \omega$ es D-infinito y V-finito en $\mathbb{M}$.*

Demostración. Veamos que como $\omega \precsim A \cup \omega$ entonces es D-infinito, y por el lema anterior, tenemos que $A \cup \omega \nsim 2 \times A \cup \omega$, con lo que $A \cup \omega$ es V-finito. □

Veamos que si $\alpha \in OR$, entonces, por el lema anterior $\aleph_\alpha \cup A \nsim 2 \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$, es decir, $\aleph_\alpha \prec \aleph_\alpha \cup A$ y $\aleph_\alpha \cup A$ es V-finito, pues, por el mismo lema, $2 \times (\aleph_\alpha \cup A) \nsim \aleph_\alpha \cup A$. Con esto, probamos que para cualquier aleph, existe un conjunto V-finito que es mayor con $\prec$ en $\mathbb{M}$.

Teorema 5.15. *$A \times \omega$ es V-infinito y VI-finito en $\mathbb{M}$.*

Demostración. Primero, notemos que como $2 \times \omega \sim \omega$, entonces tenemos que $2 \times (\omega \times A) \sim (2 \times \omega) \times A \sim \omega \times A$ en el modelo, con lo que $A \times \omega$ es V-infinito. Ahora, por contradicción supongamos que $A \times \omega \sim (A \times \omega) \times (A \times \omega)$, y como de los axiomas sí sabemos que $(A \times \omega) \times (A \times \omega) \sim A \times A \times \omega$ entonces tenemos que $A \times A \precsim A \times \omega$ en el modelo con una función f. Tomemos E un soporte de f y sean a, b átomos tales que no son elementos de E y consideremos $n \in \omega$ y $c \in A$ tales que $f(a,b) = (n,c)$. Supongamos que $a \neq c$, con lo que existe un intervalo (d,e) que tiene como elemento a a pero es ajeno con $E \cup \{c\}$. Sea $u \in (d,e)$ tal que $u \neq a$ y de nuevo, podemos decir que existe una permutación $\pi \in G$ tal que es la identidad fuera de (d,e) y $\pi(a) = u$.

Como $\pi \in fix_G(E)$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}((a,b),(n,c)) &= ((\pi(a),\pi(b)),(\pi(n),\pi(c))) \\ &= ((u,\pi(b)),(n,c)) \in f\end{aligned}$$

pero f es inyectiva y $(a,b) \neq (u,\pi(b))$, lo cual es una contradicción. Con esto, tenemos que $A \times \omega$ es VI-finito. □

Teorema 5.16. *${}^{\omega}A$ es VI-infinito y VII-finito en $\mathbb{M}$.*

Demostración. Primero veamos que ${}^{\omega}A$ no puede ser bien ordenable en $\mathbb{M}$, pues esto induciría un buen orden en A, con lo que es VII-finito. Además sabemos, por los axiomas, que ${}^{\omega}A \times {}^{\omega}A \sim {}^{2}({}^{\omega}A) \sim {}^{2\times\omega}A$ y como $2 \times \omega \sim \omega$, entonces ${}^{\omega}A \times {}^{\omega}A \sim {}^{\omega}A$. □

Y tenemos las últimas pruebas de independencia:

Teorema 5.17. *$ZFA + AE \nvdash$ V-finito $\longrightarrow$ IV-finito.*

Teorema 5.18. *$ZFA + AE \nvdash$ VI-finito $\longrightarrow$ V-finito.*

Teorema 5.19. *$ZFA + AE \nvdash$ VII-finito $\longrightarrow$ VI-finito.*

Referencias

[1] Bernard Bolzano. *Las paradojas del infinito*. UNAM, 1991, págs. 14-16.

[2] Georg Cantor. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. 1. Open Court Publishing Company, 1915, págs. 97-99.

[3] Richard Dedekind. *Essays on the Theory of Numbers*. Dover Publications, 1997, pág. 63.

[4] Adolf Fraenkel. “Review: Über Die Unabhangigkeit des Auswahlaxioms Und Einiger Seiner Folgerungen by Adolf Lindenbaum and Andrzej Mostowski”. En: *Journal of Symbolic Logic* 4.1 (1939), págs. 30-31.

[5] Adolf Fraenkel. “Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre”. En: *Mathematische Annalen* 86.3 (1922), págs. 230-237.

[6] Adolf Fraenkel. “Über den Begriff ’definit’ und die Unabhängigkeit des Auswahl Axioms”. En: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse* (), págs. 253-257.

[7] Horst Herrlich. *Axiom of Choice*. Springer, 2006, págs. 43-51, 163.

[8] Paul Howard y Jean Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. Vol. 1. American Mathematical Soc., 1998, págs. 86-88, 92, 152, 176-178, 278-280.

[9] Thomas Jech. *The Axiom of Choice*. Courier Corporation, 2008, págs. 35, 44-54.

[10] Azriel Lévy. *Basic Set Theory*. Courier Corporation, 2012, pág. 98.

[11] Azriel Lévy. “The Independence of Various Definitions of Finiteness”. En: *Fundamenta Mathematicae* 46.1 (1958), págs. 1-13.

[12] Gregory H Moore. *Zermelo’s Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*. Courier Corporation, 2012, págs. 22-30, 196-213.

[13] Andrzej Mostowski. “Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip mostowski”. En: *Fundamenta Mathematicae* 32.1 (1939), págs. 201-256.

[14] Clive Newstead. *Permutation Models for Set Theory*. http://math.cmu.edu/ cnewstea/cambridge/essay.pdf, págs. 16-27.

[15] Ernst Specker. “Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs-und Auswahlaxiom)”. En: *Mathematical Logic Quarterly* 3.13-20 (1957), págs. 173-210.

[16] Alfred Tarski. “Ein Überdeckungssatz für endliche Mengen”. En: *Fundamenta Mathematicae* 30.1 (1938), págs. 156-163.

[17] Alfred Tarski. "Review: On the Independence of the Definitions of Finiteness in a System of Logic by Andrzej Mostowski". En: *The Journal of Symbolic Logic* 3.3 (1938), págs. 115-116.

[18] Alfred Tarski. "Sur les ensembles finis". En: *Fundamenta Mathematicae* 6.1 (1924), págs. 45-95.

[19] Jean Van Heijenoort. *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Vol. 9. Harvard University Press, 1967, págs. 284-290.

[20] Alfred North Whitehead. "On Cardinal Numbers". En: *American Journal of Mathematics* 24.4 (1902), págs. 367-394.

[21] Alfred North Whitehead y Bertrand Russell. *Principia Mathematica*. Vol. 2. University Press, 1912, pág. 280.

[22] Dorothy Wrinch. "On Mediate Cardinals". En: *American Journal of Mathematics* 45.2 (1923), págs. 87-92.

[23] Ernst Zermelo. "Untersuchungen Über die Grundlagen der Mengenlehre. I". En: *Mathematische Annalen* 65.2 (1908), págs. 261-281.