



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Coloraciones en el hipercubo

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:

DENAE VENTURA ARREDONDO

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. AMANDA MONTEJANO CANTORAL
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

JUNIO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Teorías de Ramsey y anti-Ramsey	4
1.1. El teorema de Ramsey	4
1.2. Tres teoremas clásicos	9
1.3. La teoría anti-Ramsey	11
2. Teoría de suma-cero	14
2.1. El teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv	14
2.2. El teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv extendido	17
2.3. La conexión entre la teoría de Ramsey y la teoría de suma-cero	20
3. El hipercubo	24
3.1. Definiciones y propiedades básicas	24
3.2. Subhipercubos	28
4. Coloraciones libres en el hipercubo	31
4.1. Coloraciones de aristas	31
4.2. Coloraciones de vértices	40
5. Otras coloraciones en el hipercubo	52
5.1. Coloraciones domáticas	52
5.2. Coloración totalmente multicolorada	53
5.3. Coloraciones y distancia de Hamming	54
5.4. El número heterocromático de vecindad	54
5.5. Etiquetas en el hipercubo y trayectorias monocromáticas antipodales	55
6. Trabajo futuro	57
6.1. Coloraciones de suma-cero en el hipercubo	57
6.2. Coloraciones balanceadas en el hipercubo	58
6.3. Conclusiones	61

Introducción

La *teoría de Ramsey* tiene su origen en 1930 con el teorema de Ramsey, el cual estudia la existencia de estructuras monocromáticas (es decir, estructuras con todos sus elementos del mismo color) en universos coloreados. Sin embargo, problemas de tipo-Ramsey fueron resueltos previamente por grandes matemáticos cuyas aportaciones han sido parte importante de la teoría: los teoremas de Schur (1916), van der Waerden (1927) y Rado (1933) han contribuido a fortalecer el lazo que hay entre la teoría de Ramsey y la teoría de números.

Dado un conjunto X , una *coloración* de X es simplemente una asignación de un color a cada elemento del conjunto. Dicho de otra manera, una coloración es una función $f : X \rightarrow Y$ donde Y es el conjunto de colores. Si Y es de cardinalidad k , decimos que f es una k -coloración. También podemos ver a una coloración como una partición del conjunto X en clases cromáticas. Veremos una definición más formal en el Capítulo 1.

La teoría de Ramsey es una rama de las matemáticas discretas que, desde sus inicios, ha cautivado a muchos matemáticos, manteniéndose muy activa en todo el mundo, con una gran cantidad de vertientes y problemas abiertos. Una de las más importantes variantes de la teoría de Ramsey es la llamada *teoría anti-Ramsey*, que estudia, en contraste con la teoría de Ramsey, la existencia de estructuras heterocromáticas (es decir, estructuras con todos sus elementos de distinto color) en universos coloreados. De esta filosofía han nacido muchas ideas que han dado una gran abundancia de resultados en los últimos años.

También dentro de las matemáticas discretas, más específicamente dentro de la *teoría de números combinatoria*, en los últimos tiempos se ha desarrollado la *teoría de suma-cero*. Esta teoría tiene su origen en 1961 con un resultado, ahora conocido como el teorema EGZ, publicado por Erdős, Ginzburg y Ziv. La teoría de suma-cero se puede plantear en términos de coloraciones y, de alguna manera, se puede equiparar a las teorías de Ramsey o anti-Ramsey, como el estudio de la existencia de estructuras de suma-cero en universos coloreados.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar un objeto particular en combinatoria desde estas tres perspectivas: la teoría de Ramsey, la teoría anti-Ramsey, y la teoría de suma-cero. El objeto combinatorio que hemos elegido para desarrollar el presente trabajo es el hipercubo. El *hipercubo de dimensión n* , denotado por Q_n , es una gráfica simple cuyo conjunto de vértices son todas las n -tuplas binarias, y dos vértices son adyacentes si difieren en sólo una de sus coordenadas. Estudiaremos pues diferentes tipos de coloraciones en el hipercubo.

La tesis está estructurada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 presentaremos los conceptos básicos y teoremas representativos de las teorías de Ramsey y anti-Ramsey, incluyendo el teorema general de Ramsey, y su

demostración para el caso de gráficas completas con r colores; así como los teoremas de Schur, van der Waerden y Rado.

- En el capítulo 2 veremos una introducción a la teoría de suma-cero; definiremos lo que es un conjunto de suma-cero, y presentaremos el teorema de Erdős, Ginzburg y Ziv (EGZ), cuya bella demostración daremos con detalle. También veremos algunos resultados que relacionan el teorema de EGZ con la teoría de gráficas y la teoría de Ramsey, publicados en *On the Erdős-Ginzburg-Ziv theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings* de A. Bialostocki y P. Dierker, en 1992 [1].
- En el capítulo 3 estudiaremos la definición y propiedades básicas del hipercubo de dimensión n , así como todos los lemas importantes que requeriremos para el desarrollo del resto de la tesis.
- El capítulo 4 es el más importante de la tesis. En él, hablaremos de coloraciones de aristas y de vértices, del hipercubo, desde el punto de vista de la teoría anti-Ramsey. Presentaremos los resultados del artículo *Rainbows in the hypercube* de M. Axenovich, H. Harborth, A. Kemnitz, M. Möller e I. Schiermeyer [2], correspondientes a la existencia de sub-hipercubos, Q_k , heterocromáticos en toda coloración de las aristas de un hipercubo Q_n . Posteriormente, presentaremos los resultados análogos, con respecto a coloraciones de vértices, siendo esta la parte original de la tesis. En particular, atacamos la siguiente pregunta:

Dados n y k enteros positivos con $k < n$ ¿Cuál será el máximo entero $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ tal que existe una coloración de los vértices de Q_n con $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ colores, donde no hay una subgráfica isomorfa a Q_k que sea heterocromática?

Este problema es la versión en vértices del problema estudiado en el artículo [2]; al igual que los autores de dicho artículo, en el presente trabajo logramos encontrar cotas inferiores y superiores generales para $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$, así como el valor exacto en el caso $k = n - 1$.

- En el Capítulo 5, presentamos un estado del arte acerca de otro tipo de coloraciones en el hipercubo que se han estudiado y se encuentran en la literatura.
- Finalmente, en el Capítulo 6, presentamos varias observaciones acerca de coloraciones de suma-cero en el hipercubo y proponemos diferentes problemas que se dejan como un proyecto de investigación a futuro.

Capítulo 1

Teorías de Ramsey y anti-Ramsey

La teoría de Ramsey obtiene su nombre gracias a Frank Plumpton Ramsey quien aportó el teorema más representativo en esta área, en su artículo titulado “On a Problem of Formal Logic”, publicado en 1930. Existen, sin embargo, resultados previos a los trabajos de Ramsey, que se consideran dentro de la teoría de Ramsey, tales como los teoremas de Schur (1916) y van der Warden (1927). Es importante mencionar también las aportaciones de Paul Erdős, quien sin duda fue el mayor promotor en el área, comenzando con su publicación “A Combinatorial Problem in Geometry”, en coautoría con George Szekeres, en 1935. Desde entonces, los problemas tipo-Ramsey han sido de gran interés para muchos matemáticos que han aportado resultados interesantes, así como variaciones del teorema clásico de Ramsey. La abundancia de resultados en el área ha dado importantes aportaciones a diferentes ramas de las matemáticas.

En este Capítulo enunciaremos el teorema general de Ramsey, y demostraremos una versión particular, correspondiente a r -coloraciones del conjunto de aristas de la gráfica completa. También presentaremos, con el objetivo de familiarizar al lector con la filosofía de la teoría de Ramsey, algunos teoremas importantes representativos de la parte aritmética de la teoría. Finalmente, expondremos los conceptos y resultados básicos de la teoría anti-Ramsey para contrastar con la filosofía de la teoría de Ramsey.

1.1. El teorema de Ramsey

Para empezar a hablar del teorema de Ramsey debemos hablar primero de lo que es una coloración. Dado un conjunto no vacío X , una k -coloración (o simplemente, coloración) de X es una asignación de colores a cada uno de sus elementos, en otras palabras, una k -coloración de X es una función, $f : X \rightarrow Y$, donde Y representa un conjunto de k colores. Si $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, podemos observar que una k -coloración es también una partición de X con $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, donde cada $X_i = f^{-1}(y_i)$ es una *clase cromática*. Un conjunto *monocromático* es un conjunto tal que todos sus elementos tienen el mismo color; es decir, un subconjunto $X_1 \subset X$ es monocromático, si existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $X_1 \subset X_i$. La teoría de Ramsey resulta ser una extensión natural del principio de las casillas (el cual

estudiaremos más adelante), y su filosofía se puede resumir en una corta definición:

La teoría de Ramsey estudia la existencia de estructuras monocromáticas en universos coloreados.

Es decir, en un universo suficientemente grande coloreado, inevitablemente encontraremos una estructura con cierto orden (monocromática). En otras palabras, el desorden absoluto es imposible. Para ilustrar mejor esta idea, daremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.1. *El ejemplo más conocido y más sencillo es pensar en personas en una fiesta. El teorema de Ramsey garantiza que basta organizar una fiesta de al menos 6 personas para garantizar que existan o bien tres personas que se conocen entre sí o bien tres personas que no se conocen entre sí. Más adelante veremos que esto se denota de la siguiente manera: $R(3, 3) = 6$.*

Si tomamos la gráfica K_6 e imaginamos que cada persona es representada por un vértice, podemos dar una 2-coloración de las aristas dependiendo si dos personas se conocen o no. Asignamos a una arista el color rojo, si las personas representadas por los extremos de la arista se conocen, y asignamos el color azul si no se conocen. De esta manera, la afirmación del ejemplo 1.1 se traduce a la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Toda 2-coloración del conjunto de aristas de la gráfica completa de orden 6, $f : E(K_6) \rightarrow \{0, 1\}$, produce un triángulo, K_3 , monocromático.*

Demostración. Supongamos que los vértices son $V(K_6) = \{A, B, C, D, E, F\}$, y consideramos a uno de ellos, digamos A . Notemos que en el conjunto de aristas $\{AB, AC, AD, AE, AF\}$, al menos tres de ellas están coloreadas con un mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que estas tres aristas son AB, AC y AD , y supongamos que son de color rojo. Si alguna de las aristas BC, CD, DB es de color rojo, terminamos pues hemos encontrado un triángulo monocromático, a saber ABC, ACD o ADB . De otra manera, si ninguna de las tres aristas BC, CD, DB es roja como en la figura 1.1, entonces todas son azules y tendríamos un triángulo azul BCD . \square

Para que el lector no adopte la idea de que esto siempre es posible, daremos un ejemplo sencillo en el cual observaremos que hay coloraciones con las cuales no funciona la filosofía de Ramsey.

Ejemplo 1.2. *¿Será verdad que toda coloración del conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$ con dos colores, rojo y azul, produce un par de enteros del mismo color con diferencia exactamente dos?*

La respuesta a la pregunta planteada en el ejemplo anterior es claramente negativa. Consideremos, por ejemplo, la siguiente coloración del conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$:

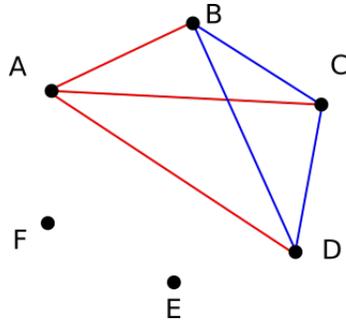


Figura 1.1: Ejemplo para proposición 1.1.

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } x \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ B & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos observar que toda pareja de enteros del mismo color no tiene diferencia de dos. Tenemos pues un conjunto, el conjunto S , que claramente tiene la propiedad de contener dos enteros cuya diferencia es dos, y sin embargo existen particiones de él que no tienen esa propiedad.

Antes de enunciar el teorema de Ramsey, requerimos presentar un principio elemental que, como dijimos anteriormente, está altamente relacionado con la teoría de Ramsey. Nos referimos al principio de las casillas, comúnmente conocido como el principio del palomar. Las versiones de este principio abundan en la literatura; presentamos a continuación la versión más básica que es la que mejor ilustra la idea del principio.

Si $n + 1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces alguna casilla deberá contener al menos dos objetos.

Esta idea, tan elemental e intuitiva, es una herramienta fundamental en el área de la combinatoria. A continuación veremos un ejemplo aplicado a la teoría de gráficas.

Ejemplo 1.3. *En una gráfica con un número finito de vértices, hay dos vértices con el mismo grado. Para ver esto, supongamos que G es una gráfica con n vértices. Entonces, cada vértice de G tiene grado igual a algún elemento del conjunto $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Sin embargo, es imposible que una gráfica tenga un vértice de grado 0 y otro de grado $n - 1$, ya que el vértice de grado 0 es un vértice aislado y el vértice de grado $n - 1$ es un vértice que es vecino de todos los demás. De este modo, los n vértices de la gráfica G sólo pueden tomar $n - 1$ valores, y por el principio de las casillas, debe existir una pareja de vértices con el mismo grado.*

Otra versión más general del principio de las casillas (y muy sencilla de demostrar usando inducción matemática) es la siguiente.

Si $nk + 1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces alguna casilla deberá contener más de k objetos.

Ahora podemos enunciar el teorema de Ramsey para r colores y notar que el principio de las casillas es un caso particular de este. Esta versión, que trata de coloraciones de aristas en gráficas, ilustra de manera intuitiva la filosofía de la teoría de Ramsey. Por esta razón, presentaremos la demostración con detalle. Más adelante, enunciaremos la versión más general del teorema de Ramsey que trata de coloraciones de hiperaristas en hipergráficas.

Teorema 1.1 (Ramsey, para gráficas). *Sean $r \geq 2$ y $n_1, \dots, n_r \geq 2$ enteros. Entonces, existe un mínimo entero positivo $R := R(n_1, \dots, n_r)$ tal que toda r -coloración $c : E(K_R) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ produce una gráfica completa K_{n_i} monocromática de color i para algún i con $1 \leq i \leq r$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre el número de colores, r . Empezaremos, entonces, por demostrar el teorema para $r = 2$ colores, y lo haremos también por inducción, en este caso, sobre $n_1 + n_2$. Demostraremos que $R(n_1, n_2)$ existe, acotándolo superiormente. Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n_1, n_2 \geq 2$. En primer lugar, observemos que podemos descartar los casos en que $\min\{n_1, n_2\} = 2$; esto es claro pues para todo n , la igualdad $R(n, 2) = R(2, n) = n$ es verdadera, ya que la gráfica completa de n vértices es suficiente para obtener, en toda 2-coloración de las aristas, o bien un K_2 monocromático del primer color, o bien un K_n monocromático del segundo color. Así pues, comenzaremos la inducción sobre $n_1 + n_2$, con $n_1, n_2 \geq 3$, siendo el caso base $n_1 + n_2 = 6$, esto se puede ver en la proposición 1.1.

Para demostrar que $R(n_1, n_2)$ existe (donde n_1 le corresponde al color azul y n_2 le corresponde al color rojo), demostraremos que $R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1)$, de donde sabemos, por la hipótesis de inducción, que $R(n_1 - 1, n_2)$ y $R(n_1, n_2 - 1)$ existen. Consideremos una gráfica completa con $n = R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1)$ vértices cuyas aristas son coloreadas con dos colores. Escogemos un vértice v de la gráfica, y partimos al resto de los vértices en dos conjuntos M y N , tales que para cada vértice w , w está en M si la arista vw es azul, y w está en N si la arista vw es roja. Como la gráfica tiene $n = R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1) = |M| + |N| + 1$ vértices, entonces se da una de las dos opciones siguientes:

1. o bien $|M| \geq R(n_1 - 1, n_2)$
2. o bien $|N| \geq R(n_1, n_2 - 1)$.

Ya que, de otra manera, si $|M| < R(n_1 - 1, n_2)$ y $|N| < R(n_1, n_2 - 1)$ entonces $|M| + |N| \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1) - 2 = n - 2$, y esto sería una contradicción al hecho de que $n = |M| + |N| + 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $|M| \geq R(n_1 - 1, n_2)$. Por hipótesis de inducción, esta coloración debe producir o bien una K_{n_1-1} azul o una K_{n_2} roja. Si M tiene una K_{n_2} roja entonces también está en la gráfica original y hemos terminado. De otra manera M tiene un K_{n_1-1} azul y entonces $M \cup \{v\}$ tiene un K_{n_1} azul por definición de M . Y el otro caso es análogo. Así que $R(n_1, n_2) \leq R(n_1 - 1, n_2) + R(n_1, n_2 - 1)$, y tenemos la base de nuestra inducción original sobre el número de colores r .

Sea $r > 2$. Probaremos que $R(n_1, n_2, \dots, n_r) \leq R(n_1, \dots, n_{r-2}, R(n_{r-1}, n_r))$. Cabe mencionar que la parte derecha de la desigualdad anterior es finita ya que utiliza los números de Ramsey para $r-1$ colores y 2 colores que sabemos que existen por hipótesis de inducción. Sea $t = R(n_1, \dots, n_{r-2}, R(n_{r-1}, n_r))$. Consideremos la gráfica completa de orden t , K_t , con sus aristas coloreadas con r colores. Ahora tomemos las aristas de color $r-1$ y las de color r y las pensaremos del mismo color, para así tener una $(r-1)$ -coloración de las aristas de la gráfica K_t . Por hipótesis de inducción, K_t contiene una K_{n_i} monocromática de color i para algún i en el conjunto $\{1, \dots, r-2\}$ o una $K_{R(n_{r-1}, n_r)}$ de los dos colores que imaginamos como uno solo. Si se da el primer caso, hemos terminado. Si se da el segundo caso, entonces tenemos una 2-coloración de una $K_{R(n_{r-1}, n_r)}$ y por lo tanto tenemos una $K_{n_{r-1}}$ monocromática de color $r-1$ o una K_{n_r} monocromática de color r , con lo cual se concluye la demostración. \square

El teorema de Ramsey también se puede extender a una versión que se puede interpretar como la versión para hipergráficas. A continuación enunciamos la forma más general del teorema de Ramsey. Como es usual, dado un conjunto X denotaremos al conjunto de subconjuntos de X de cardinalidad m como $\binom{X}{m}$.

Teorema 1.2 (Teorema de Ramsey general, 1930). *Sean $m \geq 1$, $r \geq 2$ y $n_1, \dots, n_r \geq 2$ enteros. Entonces, existe $R = R(m; n_1, \dots, n_r)$ tal que, si $|X| \geq R$, para toda r -coloración, $c : \binom{X}{m} \rightarrow \{1, \dots, r\}$, existe un subconjunto $Y \subset X$, con $|Y| = n_i$, tal que $\binom{Y}{m}$ es monocromático de color i para algún i con $1 \leq i \leq r$.*

El teorema de Ramsey para gráficas (Teorema 1.1) corresponde al caso en que $m = 2$ en el teorema de Ramsey general (Teorema 1.2) pues $\binom{X}{2}$ es precisamente el conjunto de aristas de una gráfica completa K_X . De esta manera, los números de Ramsey, $R(n_1, \dots, n_r)$, definidos en el Teorema 1.1 también se pueden escribir como $R(2; n_1, \dots, n_r)$. En general, el teorema de Ramsey garantiza que el entero más pequeño $R(m; n_1, \dots, n_r)$ existe dados los enteros n_1, n_2, \dots, n_r , pero no nos ayuda a encontrarlo. Recordemos que $R(n_1, n_2)$ es el mínimo entero tal que toda 2-coloración de las aristas de la gráfica completa con $R(n_1, n_2)$ vértices produce una gráfica completa de orden n_1 monocromática con el primer color o una gráfica completa de orden n_2 monocromática con el segundo color. El problema de determinar estos números es un problema muy difícil, aún en el caso de gráficas, $m = 2$, para dos colores, $r = 2$, los enteros $R(n_1, n_2)$, conocidos como los *números clásicos de Ramsey*, son casi imposibles de determinar (excepto los casos triviales y algunos otros que ya se conocen).

Al respecto de la dificultad para determinar los números de Ramsey, el famoso matemático húngaro Paul Erdős, cuyas contribuciones en el área de la combinatoria y la teoría de gráficas han sido fundamentales para la evolución de dichas áreas, dijo:

“Supongamos que un extraterrestre malvado le dice a la humanidad –Tienen dos opciones: o me dicen el valor de $R(5, 5)$ en un año o exterminaré a la raza humana...– Lo mejor será intentar encontrarlo, usando matemáticas y computadoras. Pero si el alien exige el valor de $R(6, 6)$, lo mejor será intentar destruirlo antes de que él nos destruya a nosotros.”

Así podemos tener una idea de lo difícil que es obtener un número de Ramsey, incluso para valores tan pequeños como el 6. Hasta la fecha, muy pocos valores de $R(n_1, n_2)$ se conocen. De hecho, los únicos números de Ramsey conocidos hasta ahora son [3]: $R(2, k) = k$ para todo $k \geq 2$, $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$ y $R(4, 5) = 25$. Hay sólo un número de Ramsey no trivial conocido para la versión generalizada del teorema que permite más de dos colores, y este es $R(3, 3, 3) = 17$.

Existe otra variante de los número de Ramsey clásicos para gráficas que usaremos más adelante y se define a continuación.

Definición 1.1. *Dada una gráfica H y $r \geq 2$ un entero, el número de Ramsey para H es el mínimo entero $R = R(H, r)$ tal que toda r -coloración $c : E(K_R) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ produce una copia de H monocromática.*

Concluimos esta sección recordando que los teoremas de tipo-Ramsey nos garantizan la existencia de los números de Ramsey en diferentes contextos, sin embargo determinar estos números es un problema muy difícil. La investigación que existe actualmente se centra principalmente en obtener cotas inferiores y superiores.

1.2. Tres teoremas clásicos

A pesar de que la teoría de Ramsey recibe su nombre gracias al teorema de Frank P. Ramsey, este no fue la primera aportación en el área. Hay resultados previos al teorema de Ramsey que son considerados de tipo-Ramsey, a saber, el Lema de Hilbert, el teorema de Schur y el teorema de van der Waerden. En esta sección veremos tres teoremas clásicos importantes relacionados que tratan con coloraciones de los números enteros.

Empezamos recordando que una *progresión aritmética de k términos* es una sucesión de la forma $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $d \in \mathbb{Z}^+$.

Ahora enunciaremos el teorema de van der Waerden que fue demostrado en 1927 y es considerado uno de los teoremas más importantes dentro de la teoría de Ramsey.

Teorema 1.3 (Teorema de van der Waerden, 1927). *Para todo entero positivo k y r , existe un mínimo entero positivo $w(k; r)$ tal que toda r -coloración de los enteros en el intervalo $[1, w(k; r)]$ produce una progresión aritmética de k términos monocromática.*

Veamos un caso muy sencillo del teorema. Sea $k = 2$. Queremos encontrar el mínimo entero $w = w(2; r)$ tal que toda partición de $\{1, 2, \dots, w\}$ en r subconjuntos produzca una progresión aritmética monocromática de 2 términos.

Consideremos la coloración de $\{1, 2, \dots, r\}$ donde todos los elementos tienen colores distintos. Obviamente bajo esta coloración, $\{1, 2, \dots, r\}$ no contiene una progresión aritmética monocromática de 2 términos y por lo tanto, $w(2; r)$ es mayor que r . Si nos fijamos en $\{1, 2, \dots, r, r + 1\}$, es fácil ver que todo subconjunto de 2 elementos es una progresión

aritmética de 2 términos, y entonces toda 2-coloración de $\{1, 2, \dots, r, r + 1\}$ produce una progresión aritmética monocromática de 2 términos y así, $w(2; r) = r + 1$.

Los números $w(k; r)$, definidos en el enunciado del Teorema 1.3, son conocidos como los *números de van der Waerden*. Tal como sucede con los números de Ramsey, determinar los números de van der Waerden, en general, de manera exacta es un problema muy complejo. Además de los casos triviales, $w(2; r) = r + 1$, que son sencillos de hacer, los únicos números que se conocen son $w(3; 2) = 9$, $w(3; 3) = 27$, $w(3; 4) = 76$, $w(4; 2) = 35$, $w(5; 2) = 178$ y $w(6; 2) = 1132$.

El teorema de van der Waerden ha generado muchos resultados importantes en la teoría de Ramsey, y por este motivo se ha trabajado mucho en variantes, refinamientos, extensiones y generalizaciones de este teorema [3].

Los siguientes dos resultados que presentamos tratan con las soluciones de una ecuación dada o un sistema de ecuaciones dado. Sea \mathcal{E} una ecuación o sistema de ecuaciones. Dada una coloración $c : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$, llamaremos a (x_1, x_2, \dots, x_k) una *solución monocromática* de \mathcal{E} si $c(x_1) = c(x_2) = \dots = c(x_k)$ y x_1, x_2, \dots, x_k satisface \mathcal{E} . El siguiente teorema importante es el teorema de Schur, demostrado por Issai Schur en 1916. Es uno de los primeros resultados en teoría de Ramsey.

Teorema 1.4 (Teorema de Schur, 1916). *Para todo entero $r \geq 1$, existe un mínimo entero positivo $s = s(r)$ tal que toda r -coloración del intervalo $[1, s]$ produce una solución monocromática de la ecuación $x + y = z$.*

Demostración. Sea $n = R(3; r)$ el número de Ramsey para $r \geq 1$ y recordemos que toda r -coloración de las aristas de K_n produce un triángulo monocromático. Usaremos una coloración particular de la siguiente manera. Sea K_n la gráfica completa en n vértices y etiquetamos sus vértices como $1, 2, \dots, n$.

Por otro lado, damos una partición arbitraria de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ en r conjuntos. En otras palabras, arbitrariamente colocamos cada $x \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ en uno de r conjuntos. Estos r conjuntos corresponden a los r colores. Sea ij una arista de K_n y le asignaremos el color correspondiente al número $|j - i|$. Por el teorema de Ramsey, debe existir un triángulo monocromático. Sean $a < b < c$ los vértices de este triángulo. Entonces los colores asignados a $b - a, c - b, c - a$ son el mismo. Por lo tanto, $x = b - a$, $y = c - b$ y $z = c - a$ son soluciones de la ecuación $x + y = z$. \square

Los números $s(r)$, definidos en el enunciado del teorema 1.4, son los *números de Schur*. Determinar estos números, al igual que los números de van der Waerden y los números de Ramsey, es un problema difícil. Tanto así, que los únicos números de Schur que se conocen son $s(1) = 2$, $s(2) = 5$, $s(3) = 14$ y $s(4) = 45$.

El tercer y último teorema clásico que veremos en este capítulo es el teorema de Rado, el cual es una generalización tanto del teorema de Schur como del teorema de van der Waerden. Richard Rado fue estudiante de Schur, y su resultado nació de la curiosidad de generalizar y extender el teorema de Schur, pensado como un resultado sobre la ecuación lineal homogénea $x + y = z$. Principalmente, la pregunta que se hizo Rado fue:

¿Qué sistemas \mathcal{L} de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes enteros cumplen la siguiente propiedad: para todo $r \geq 1$ existe un mínimo entero positivo $n = n(\mathcal{L}; r)$ tal que toda r -coloración del intervalo $[1, n]$ produce una solución monocromática de \mathcal{L} ?

La respuesta de Rado a esta pregunta aparece en una serie de artículos publicados en los años 1930. La versión más general del teorema de Rado es complicada de enunciar y describir, ya que necesitamos una serie de definiciones y teoría que no es relevante para este trabajo de tesis, así que sólo enunciaremos su versión para una sola ecuación lineal homogénea. Para esto requerimos una simple definición.

Sea $r \geq 1$, decimos que una ecuación lineal \mathcal{E} es r -regular si existe $n = n(\mathcal{E}; r)$ tal que toda r -coloración de $[1, n]$ produce una solución monocromática de \mathcal{E} . La ecuación se dice regular si es r -regular para toda $r \geq 1$. Por ejemplo, el teorema de Schur establece que la ecuación $x + y = z$ es regular.

Ahora enunciaremos el teorema de Rado para una sola ecuación.

Teorema 1.5 (Teorema de Rado, una ecuación). *Sea \mathcal{E} la ecuación lineal $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$, donde $c_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces \mathcal{E} es regular si y sólo si existe un subconjunto no vacío de los c_i 's con suma 0.*

Tomemos de nuevo como ejemplo la ecuación del teorema de Schur $x+y = z$ o $x+y-z = 0$ y notemos que el segundo y último coeficiente forman un conjunto de enteros que suma 0. Entonces, ahora por el teorema de Rado, concluimos que esta ecuación es regular. También la ecuación $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$ es regular, ya que la suma del primero y dos últimos coeficientes de la ecuación es 0; mientras que la ecuación $x + y - 3z = 0$ no es regular pues ningún subconjunto de sus coeficientes suma cero.

Los tres teoremas clásicos mencionados en esta sección tienen una estructura similar, que es: Existe un entero positivo $n(r)$ tal que toda r -coloración del intervalo $[1, n(r)]$ produce un conjunto monocromático que pertenece a una familia particular de conjuntos. Vimos casos en donde la familia era el conjunto de progresiones aritméticas, otro caso donde era el conjunto de ecuaciones lineales homogéneas y el último donde fue el conjunto de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.

1.3. La teoría anti-Ramsey

A lo largo de este capítulo hemos discutido problemas que garantizan la existencia de estructuras monocromáticas de algún tipo bajo toda r -coloración de un conjunto suficientemente grande. En esta sección buscaremos exactamente lo opuesto, es decir, ahora buscaremos garantizar la existencia de estructuras multi-coloreadas en un conjunto suficientemente grande dado que hay suficientes elementos de cada color en el universo donde trabajamos. El estudio de este tipo de problemas es conocido como *teoría anti-Ramsey* o *teoría de Ramsey multi-color*.

El estudio de la teoría anti-Ramsey empezó cuando Erdős, Simonovits y Sós publicaron el trabajo [4] en 1975. Sin embargo, ellos emplearon estas ideas desde mucho antes en [5]. Desde

entonces, esta área ha crecido y dado una amplia variedad de resultados, algunos de ellos los enunciaremos en esta sección. En el *survey* [6] se puede encontrar mayor información.

Comenzaremos definiendo lo que es un conjunto heterocromático. Dado X un conjunto cualquiera, y dada una k -coloración de X , $c : X \rightarrow \{1, \dots, k\}$, decimos que un subconjunto, $Y \subset X$, es *heterocromático* si no hay dos elementos de Y con el mismo color, es decir, $|Y \cap X_i| \leq 1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ donde $X_i = f^{-1}(i)$. El problema de encontrar el número anti-Ramsey se enuncia usando la siguiente definición.

Definición 1.2. *Dadas dos gráficas G y H , el número anti-Ramsey $ar(G, H)$ es el máximo número k de colores tal que existe una coloración de las aristas de G con exactamente k colores en donde toda copia de H en G tiene al menos dos aristas con el mismo color, o bien, la coloración es libre de H heterocromático.*

Otro concepto interesante es el de *número heterocromático o rainbow*, $nh(G, H)$, definido como el mínimo número de colores, r , tal que toda coloración de las aristas de G , con exactamente r colores, produce una copia de H heterocromática en G . Notemos que $nh(G, H) = ar(G, H) + 1$. Hay una abundante cantidad de trabajos con resultados de tipo anti-Ramsey que manejan el número heterocromático, sin embargo la mayoría usa el número anti-Ramsey, y por lo tanto manejaremos este concepto en esta sección para ser consistentes con los resultados que presentaremos.

En la teoría clásica de Ramsey, la gráfica G es una gráfica completa de orden grande y la gráfica H es alguna gráfica conocida (una completa, un ciclo, una estrella, etc). Lo mismo sucede en los trabajos de *número heterocromático o rainbow*. En esta breve sección hablaremos de algunos resultados, que se pueden revisar en el *survey* [6], importantes y relevantes para este trabajo de tesis.

En el trabajo de Erdős, Simonovits y Sós [4] en 1975, los autores enunciaron una conjetura que fue atacada por muchos matemáticos que dieron algunos resultados, pero no fue hasta 30 años después que fue completamente demostrada por Montellano-Ballesteros y Neumann-Lara [7].

Teorema 1.6 (Montellano-Ballesteros, Neumann-Lara. 2005 [7]). *Para todo $n \geq k \geq 3$,*

$$ar(K_n, C_k) = \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right) n + O(1).$$

Jiang y Montellano-Ballesteros encontraron de forma independiente el número anti-Ramsey para estrellas.

Teorema 1.7 (Jiang, 2002 [8]. Montellano-Ballesteros, 2006 [9]). *Sea $n-5 \geq q \geq 2$. Entonces*

$$\left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor + 1 \leq ar(K_n, K_{1,q}) \leq \frac{n(q-2)}{2} + \frac{n}{n-q+2} + 1.$$

Esto es equivalente a decir (informalmente) que

$$ar(K_n, K_{1,q}) = \left\lfloor \frac{n(q-2)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{n-q+2} \right\rfloor$$

o el mismo valor más una unidad si se satisfacen ciertas condiciones que se pueden consultar en el artículo [8].

Los autores Jiang y West [10] dieron los números anti-Ramsey para algunas familias de árboles. Sea \mathcal{T}_k la familia de todos los árboles con k aristas y sea $l(n, k)$ el máximo tamaño de una gráfica con n vértices donde cualesquiera dos componentes juntas tienen a lo más k vértices.

Teorema 1.8 (Jiang, West. 2004. [10]). *Si $n > k$, entonces*

$$ar(K_n, T_k) - 1 = l(n, k) = \begin{cases} \binom{k-1}{2} & \text{si } k < n \leq 2k - 1, \\ \binom{\lceil \frac{k}{2} \rceil}{2} + r \binom{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{2} + \binom{s}{2} & \text{si } n \geq 2k. \end{cases}$$

donde $r = \left\lfloor \frac{n - \lceil \frac{k}{2} \rceil}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right\rfloor$ y $s = n - \lceil \frac{k}{2} \rceil - r \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ para todo $T_k \in \mathcal{T}_k$.

Con esto damos por terminado el Capítulo 2 de este trabajo de tesis, donde estudiamos el teorema de Ramsey y los resultados más importantes que han dado estructura a esta teoría. Pudimos observar que el teorema de Ramsey ha inspirado a muchos matemáticos a resolver problemas tipo-Ramsey y a dar variantes de este teorema. Finalmente la teoría anti-Ramsey, que se caracteriza por buscar estructuras heterocromáticas, ha tenido su auge hasta hace relativamente poco. Sin embargo, ya hay trabajos con resultados importantes que estudiamos en la última sección del capítulo y los problemas siguen surgiendo.

Capítulo 2

Teoría de suma-cero

El teorema de Ramsey ha despertado la curiosidad e interés de muchos matemáticos, y como ya vimos en el Capítulo 1, hay muchas variaciones y problemas que nacen de este bonito resultado. En el presente capítulo daremos una breve introducción a la teoría de suma-cero. Enunciaremos y demostraremos el teorema prototipo en esta área, que es el teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv. En la segunda sección veremos como la teoría de suma cero y la teoría de Ramsey están íntimamente relacionadas, y estudiaremos algunos resultados del artículo de Bialostocki y Dierker [1] que ejemplifican esta relación.

2.1. El teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv

La teoría de suma-cero es un área relativamente nueva en combinatoria que aporta un toque algebraico interesante a la teoría de Ramsey. Los problemas de suma-cero se pueden formular de la siguiente manera. Supongamos que los elementos de una estructura combinatoria son coloreados con los elementos de un grupo finito K ; entonces, decimos que una subestructura es de *suma-cero* si al sumar las imágenes de todos sus elementos obtenemos cero (el cero del grupo K).

¿Serán las estructuras de suma-cero inevitables así como las estructuras monocromáticas?

En esta tesis trabajaremos únicamente con el conjunto $\mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, con la operación suma módulo r , que es el grupo de clases de congruencia módulo r . Para facilitar el estudio de algunos teoremas importantes en esta tesis, identificaremos a \mathbb{Z}_r con el conjunto de enteros $\{0, 1, \dots, r-1\}$ adoptando el orden natural de \mathbb{Z} gracias a la identificación. Veamos la definición más importante de esta sección.

Definición 2.1. *Dada, $\chi : X \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$, una r -coloración de un conjunto finito X , decimos que $Y \subseteq X$ es de suma-cero si $\sum_{y \in Y} \chi(y) \equiv 0 \pmod{r}$.*

Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.1. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y χ una coloración de X con los colores $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\chi(a) &= \chi(b) = 0 \\ \chi(c) &= \chi(d) = 1 \\ \chi(e) &= 2\end{aligned}$$

Observemos que el conjunto $\{a, c, e\}$ es de suma-cero, mientras que el conjunto $\{a, c, d\}$ no lo es.

La teoría de suma-cero tiene su inicio en 1960 con un teorema de Erdős, Ginzburg y Ziv. Tal resultado es el teorema fundamental de esta teoría y dio pie, en particular, a varios trabajos relacionados con la teoría de Ramsey. Su demostración es ingeniosa y creativa, ya que usa un famoso y útil teorema de teoría aditiva que enunciaremos a continuación. Antes de hacerlo, requerimos una sencilla definición.

Definición 2.2. Sean A_1, A_2, \dots, A_k subconjuntos no vacíos de un grupo abeliano K . Definimos al conjunto suma $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ como

$$A_1 + A_2 + \dots + A_k = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Teorema 2.1 (Cauchy-Davenport generalizado, 1935, [11]). Sean $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \mathbb{Z}_p$ donde p es primo, entonces $|A_1 + A_2 + \dots + A_k| \geq \min\{p, |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - k + 1\}$.

Ahora enunciaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2 (Erdős-Ginzburg-Ziv, 1961 [12]). Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, existe un mínimo entero $EGZ(k)$ tal que si $|X| \geq EGZ(k)$ entonces toda $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$ produce un $Y \subset X$ con $|Y| = k$ donde Y es de suma-cero. Más aún $EGZ(k) = 2k - 1$.

Demostración. Para demostrar que $EGZ(k) \leq 2k - 1$, usaremos inducción sobre el número de factores primos de k . Así, la base de inducción corresponde al caso $k = p$, donde p es un número primo. Sea X un conjunto con $|X| = 2p - 1$, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_p$. Sean $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2p-1}$ las $2p - 1$ imágenes de X bajo f . Observemos que, como hemos ordenado las imágenes de menor a mayor, tenemos que si $a_i = a_{i+p-1}$ para algún $i \in \{1, \dots, p-1\}$, entonces

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+p-1} = pa_i \equiv 0 \pmod{k},$$

lo cual es exactamente lo que buscamos. Entonces, supongamos que $A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$ es un conjunto de 2 elementos para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Usando el teorema de Cauchy-Davenport generalizado, demostraremos que $A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1} = \mathbb{Z}_p$, pues tenemos:

$$|A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}| \geq \min\{p, |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{p-1}| - (p-1) + 1\} = p$$

De esta manera, todo elemento de \mathbb{Z}_p es la suma de $p - 1$ enteros de los primeros $2p - 2$ elementos de la secuencia de los a_i 's. Particularmente, para $-a_{2p-1} \in \mathbb{Z}_p$ hay $p - 1$ enteros en

la secuencia que suman precisamente $-a_{2p-1}$ es decir, existen elementos $a_{j_1}, \dots, a_{j_{p-1}}$ tales que:

$$a_{j_1} + \dots + a_{j_{p-1}} = -a_{2p-1},$$

y por lo tanto,

$$a_{j_1} + \dots + a_{j_{p-1}} + a_{2p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Y así encontramos p elementos cuya suma es $0 \pmod{p}$, lo cual concluye la base de la inducción.

Ahora, demostraremos que el teorema es cierto para $k = pm$ donde p es primo y $m \geq 2$. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$, donde X es un conjunto con $|X| = 2k - 1 = 2pm - 1$. Sean $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2k-1}$ las imágenes de X bajo f . Por el resultado para p primo (base de inducción), podemos encontrar un subconjunto de p elementos, cuya suma es cero módulo p , determinado por el subconjunto de subíndices $I_1 \subset \{1, \dots, 2k - 1\}$; es decir, $X_{I_1} = \{a_i \in X | i \in I_1\}$, $|I_1| = p$ y $\sum_{i \in I_1} a_i \equiv 0 \pmod{p}$. Luego, como $|X \setminus X_{I_1}| = 2pm - 1 - p \geq 2p - 1$, en $X \setminus X_{I_1}$ encontramos otro conjunto X_{I_2} con p elementos cuya suma es cero módulo p , y este procedimiento lo podemos seguir haciendo hasta encontrar $2m - 1$ subconjuntos disjuntos $I_1, I_2, \dots, I_{2m-1} \subset \{1, \dots, 2k - 1\}$ pues al hacer el procedimiento sólo $2m - 2$ veces obtenemos que aún nos sobran $2p - 1$ elementos, ya que $2mp - 1 - (2m - 2)p = 2p - 1$, y a estos elementos les podemos aplicar de nuevo la hipótesis de inducción. En conclusión tenemos que, para cada $i \in \{1, \dots, 2m - 1\}$, existe $r_i \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{j \in I_i} a_j = r_i p$. Ahora observemos la secuencia $r_1, r_2, \dots, r_{2m-1}$ donde

$$r_i = \sum_{j \in I_i} \frac{a_j}{p}.$$

Por hipótesis de inducción, esta secuencia tiene un subconjunto $\{r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_m}\}$ cuya suma es cero \pmod{m} . De tal manera que la unión de los correspondientes conjuntos $X_{I_{i_1}}, X_{I_{i_2}}, \dots, X_{I_{i_m}}$ nos da el subconjunto de $pm = k$ elementos cuya suma es cero \pmod{k} que buscábamos.

Ahora veremos que $EGZ(k) \geq 2k - 1$, es decir, que no toda coloración de X con \mathbb{Z}_k , donde $|X| = 2k - 2$, garantiza la existencia de un subconjunto Y con k elementos que sumen cero. Para demostrar este hecho, daremos una coloración χ explícita, donde para todo $k \geq 2$, $\chi : [1, 2k - 2] \rightarrow \mathbb{Z}_k$, donde $[1, 2k - 2]$ son los enteros $1, \dots, 2k - 2$, es tal que ningún subconjunto $Y = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset [1, 2k - 2]$ es de suma-cero. Sea $\chi(i) = 0$ para $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ y $\chi(i) = 1$ para $i \in \{k, k + 1, \dots, 2k - 2\}$. En este caso χ utiliza sólo dos de los posibles k colores. Como $\sum_{i=1}^k \chi(t_i) \leq k - 1$ y es positivo para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_k \in [1, 2k - 2]$, entonces χ es una coloración tal que ningún subconjunto de cardinalidad k es de suma-cero. \square

En el ejemplo descrito en la prueba del Teorema 2.2, para probar el hecho de que $EGZ(k) \geq 2k - 1$, sólo se ocupan dos colores. De hecho, en el artículo [1] se presenta una caracterización de las coloraciones libres de k -conjuntos de suma-cero cuando el conjunto X es de cardinalidad $2k - 2$.

Teorema 2.3 (Bialostocki, Dierker, 1992. [1]). *Sea X un conjunto multivaluado con $2k - 2$ elementos y $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$ una coloración donde $A := f(X)$ y A es libre de k -subconjuntos*

de suma-cero $(\text{mod } k)$, entonces A tiene exactamente 2 clases residuales de \mathbb{Z}_k y cada una tiene $-1 \pmod{k}$ elementos de A , es decir cada una tiene $k - 1$ elementos de A .

Podemos observar entonces que si χ es una k -coloración que ocupa al menos tres colores, entonces el Teorema 2.2 es cierto para $|X| = 2k - 2$.

2.2. El teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv extendido

Existen diversas extensiones y variantes alrededor del teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv que se han trabajado en los últimos años. Entre ellas, una de las más importantes es la llamada versión extendida del teorema de EGZ que veremos en esta sección. Aunque dicho resultado es más fuerte que la versión original, su demostración no es en absoluto difícil, sin embargo, vale la pena presentarla. A continuación, enunciaremos el teorema de EGZ en su versión extendida y daremos su demostración. Posteriormente haremos algunas observaciones interesantes. Dados dos enteros k y m , usamos la notación $k|m$ para indicar que k divide a m .

Teorema 2.4 (EGZ, extendido). *Para cualesquiera $m, k \in \mathbb{Z}^+$ donde $m \geq k \geq 2$ y $k|m$, existe un mínimo entero $EGZ(k, m)$ tal que si $|X| \geq EGZ(k, m)$, entonces, toda $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$ produce un subconjunto $Y \subset X$ tal que $|Y| = m$ y Y es de suma-cero. Más aún, $EGZ(k, m) = m + k - 1$.*

Demostración. Demostraremos primero que $EGZ(k, m) \leq m + k - 1$. Procederemos por inducción sobre m , siendo la base el caso $m = k$ resuelto en el Teorema 2.2. Ahora supongamos que la desigualdad es cierta para $m' = ak$ donde a es un entero tal que $a \geq 1$, y demostraremos que la desigualdad se verifica para $m = (a + 1)k$. Sea X un conjunto con $m + k - 1 = (a + 1)k + k - 1$ elementos y $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$. En los primeros $2k - 1$ elementos, usamos el teorema de EGZ para concluir que existe $Y_1 \subset X$ con $|Y_1| = k$ donde Y_1 es de suma-cero. Ahora quedan $ak + k - 1 = (a + 1)k - 1$ elementos, y por hipótesis de inducción existe $Y_2 \subset X \setminus Y_1$ con $|Y_2| = ak$ tal que Y_2 es de suma-cero. Como $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, entonces $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset X$ es un conjunto de suma-cero tal que $|Y| = (a + 1)k$.

Ahora veremos que $EGZ(k, m) \geq m + k - 1$, es decir, que no toda coloración de X con \mathbb{Z}_k , donde $|X| = m + k - 2$ garantiza la existencia de un subconjunto Y con m elementos que sume cero. Para demostrar este hecho, daremos una coloración χ explícita, donde para todo $k \geq 2$, $\chi : [1, m + k - 2] \rightarrow [0, k - 1]$ sea tal que ningún subconjunto $Y = \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subset [1, m + k - 2]$ es de suma-cero. Como $k|m$, supongamos que $m = ak$ para algún $a \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\chi(i) = 0$ para $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$, y $\chi(i) = 1$ para $i \in \{k, k + 1, \dots, ak + k - 2\}$. En este caso (y similar a la demostración del teorema 2.2) χ utiliza sólo dos de los posibles k colores. Como $\sum_{i=1}^{ak} \chi(t_i) \leq k - 1$ y es positivo para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_{ak} \in [1, ak + k - 2]$, entonces no cumple el teorema. \square

Notemos que cuando $m = k$, el Teorema 2.4 es exactamente el teorema 2.2, mejor conocido como teorema de EGZ.

Una pregunta natural que surge después de leer el Teorema 2.4 es ¿qué pasa cuando k no divide a m ? La respuesta es que en este caso $EGZ(k, m)$ no existe. Para justificarlo, veamos la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *$EGZ(k, m)$ no existe si k no divide a m .*

Demostración. Supongamos que k no divide a m . Sea X arbitrariamente grande y sea $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$ donde $f(x) = 1$ para todo $x \in X$, entonces todo $Y \subset X$ de cardinalidad m no es de suma-cero (mod k) ya que $\sum_{y \in Y} f(y) = m$ no es cero módulo k . \square

El siguiente teorema da una caracterización de las coloraciones libres de subconjuntos de cardinalidad $m = ak$ de suma-cero, $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$, donde X es de cardinalidad $(a + 1)k - 2$ (es decir, una unidad menos de lo que dice el Teorema 2.4). Notemos que esto caracteriza particularmente las coloraciones que hacen que el teorema 2.2 no funcione para $|X| = 2k - 2$. Aunque la demostración es bastante extensa, vale la pena incluirla en este trabajo de tesis ya que es un resultado fuerte y útil para trabajos de teoría de suma-cero.

Teorema 2.5 (Caro, 1992. [13]). *Sean X un conjunto multivaluado con $(a + 1)k - 2$ elementos, $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$ una coloración donde $A := f(X)$ y A es libre de ak -subconjuntos de suma-cero (mod k). Entonces*

1. *A tiene exactamente 2 clases residuales de \mathbb{Z}_k y cada una tiene $-1 \pmod{k}$ miembros de A .*
2. *Si k es par, entonces las clases residuales tienen distinta paridad.*

Demostración. Demostraremos ambos incisos por inducción sobre a . Empezamos por demostrar el primer inciso. Para la base de inducción sea $a = 1$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_k$ tal que $A = \{a_1, \dots, a_{2k-2}\}$ libre de k -subconjuntos de suma-cero (mod k), entonces por teorema 2.3 existen 2 clases cromáticas, cada una con cardinalidad $k - 1 \equiv -1 \pmod{k}$.

Ahora demostraremos el primer inciso para $a \geq 2$. Es sencillo ver que el resultado se cumple para $k = 2$, ya que sólo puede haber dos clases residuales, y para que se cumpla la hipótesis cada clase debe tener cardinalidad impar, lo que implica que cada clase tiene cardinalidad $1 \pmod{k} \equiv -1 \pmod{k}$. Supongamos entonces que $k \geq 3$ y que $A = \{a_1, \dots, a_{(a+1)k-2}\}$ contiene miembros de 3 clases residuales (mod k). Sin pérdida de generalidad estos 3 miembros son $a_{(a+1)k-4}, a_{(a+1)k-3}, a_{(a+1)k-2}$. Y quitando estos 3 elementos, quedan solamente $(a+1)k - 5$ elementos. Ahora exploraremos el caso cuando $k \geq 4$ y posteriormente cuando $k = 3$.

Caso 1 Como $k \geq 4$, entonces $ak + k - 5 \geq ak + 4 - 5 = ak - 1$. De tal manera que podemos usar el teorema de EGZ $a - 1$ veces para obtener un subconjunto Y con $(a - 1)k$ elementos de suma cero (mod k). Quitando el conjunto Y de A , nos quedamos con $(a+1)k - 2 - (a - 1)k = 2k - 2$ elementos de A , y entre ellos están los 3 miembros de distintas clases cromáticas mencionados previamente. Entonces por el teorema 2.3, existen k elementos de suma-cero (mod k). Llamaremos a este conjunto Y_1 . De esta manera obtenemos el conjunto $Y \cup Y_1$ tal que $|Y \cup Y_1| = ak$ y es de suma-cero (mod k), lo cual es una contradicción.

Caso 2 Ahora veremos el caso donde $k = 3$, y notemos que en este caso $a_{(a+1)k-4} + a_{(a+1)k-3} + a_{(a+1)k-2} \equiv 0 \pmod{3}$. Quitando estos 3 elementos, sólo quedan $(a+1)k - 2 - 3 = 3(a+1) - 2 - 3 = 3a - 2$ elementos de A y debe haber solamente dos clases residuales entre ellos, ya que de otra manera por hipótesis de inducción habría un subconjunto Y de cardinalidad $(m-1)k$ y junto con los elementos $a_{(a+1)k-4}, a_{(a+1)k-3}, a_{(a+1)k-2}$, se formaría un conjunto de cardinalidad ak de suma-cero \pmod{k} . Si $a = 2$ en este caso, sabemos que hay 3 elementos distintos, y por lo tanto no puede haber otros 3 elementos distintos y tampoco 3 elementos iguales, ya que formarían un conjunto de 6 elementos de suma-cero que es lo que queremos evitar, entonces todo se reduce a 3 posibilidades:

$$\{0, 0, 1, 1, 1, 2, 0\} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\{0, 0, 2, 2, 1, 2, 0\} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 2 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\{1, 1, 2, 2, 1, 2, 0\} \Rightarrow 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Sin embargo, en cada caso hay 6 elementos que suman cero $\pmod{3}$, como se ve en el esquema anterior. Supongamos entonces que $a \geq 3$. Entonces al quitar los elementos $a_{(a+1)k-4}, a_{(a+1)k-3}, a_{(a+1)k-2}$, obtenemos solamente $ak - 2$ elementos. Luego, $ak - 2 \geq 7$. Por principio de las casillas, hay una clase residual que está en al menos 3 de estos elementos. Por lo tanto, esos 3 elementos (digamos a_1, a_2, a_3) tienen suma cero $\pmod{3}$. Sea $B = A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ donde $|B| = ak - 2$. Observemos que B tiene 3 clases residuales ya que contiene a $a_{(a+1)k-4}, a_{(a+1)k-3}, a_{(a+1)k-2}$, entonces por hipótesis de inducción B contiene $(a-1)k$ elementos que suman cero $\pmod{3}$. Al unir estos elementos con a_1, a_2, a_3 , obtenemos un conjunto de ak elementos que suman cero $\pmod{3}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe haber exactamente 2 clases residuales.

Ahora demostraremos que cada clase tiene $-1 \pmod{k}$ elementos usando inducción sobre a . Para la base, cuando $a = 1$, tenemos que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k-2}\}$ es libre de k -conjuntos de suma-cero \pmod{k} y por el teorema 2.3 cada clase residual tiene $-1 \pmod{k}$ elementos, como mencionamos al principio de la demostración. Supongamos que $a \geq 2$. Claramente cada clase residual contiene al menos $k - 1$ elementos, ya que de otra manera, una clase tendría $k - 2$ o menos elementos y entonces la otra clase tendría al menos ak elementos, de donde claramente podríamos tomar un conjunto de ak elementos de suma-cero \pmod{k} . Ahora, como $a \geq 2$, se implica que $(a+1)k - 2 \geq 3k - 2$. Observemos que entonces una de las clases tiene al menos k elementos de suma-cero. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_{ak-1}, a_{ak}, \dots, a_{(a+1)k-2}$ son tales elementos y suman cero \pmod{k} . Los elementos restantes, digamos $C = \{a_1, \dots, a_{ak-2}\}$, cumplen por hipótesis de inducción que cada clase residual tiene $-1 \pmod{k}$ elementos en C . Ya que de otra manera tendríamos ak elementos con suma cero \pmod{k} . Por lo tanto, cada clase de A contiene $-1 \pmod{k}$ elementos.

Por último veamos que si k es par, entonces las clases son de distinta paridad. Sean A_1 y A_2 las clases residuales y supongamos que ambas son de cardinalidad par. Entonces todo miembro de A es par. Definimos $A' = \{a'_1, \dots, a'_{(a+1)k-2}\}$ donde $a'_i = \frac{1}{2}a_i$. Observemos que $|A'| = (a+1)k - 2 \geq (2a+1)\frac{k}{2} - 1$. Esto se da ya que

$$k \geq 2$$

si y sólo si

$$(a + 1)k - 2 \geq (2a + 1)\frac{k}{2} - 1.$$

Entonces por el teorema de *EGZ* extendido, existe $Y \subset A'$ con $|Y| = 2a\frac{k}{2} = ak$ tal que $\sum_{a'_i \in Y} a'_i \equiv 0 \pmod{\frac{k}{2}}$ y por lo tanto $\sum_{\frac{a_i}{2} = a'_i \in Y} a_i \equiv 0 \pmod{k}$, lo cual es una contradicción. Ahora supongamos que ambas clases tienen cardinalidad impar. Sea $A' = \{a'_1, \dots, a'_{(a+1)k-2}\}$ donde $a'_i = a_i - 1$. Entonces los elementos de A' están en 2 clases residuales pares \pmod{k} y por el caso anterior, existe $Y \subset A'$ con $|Y| = ak$ donde $\sum_{a'_i \in Y} a'_i = \sum_{a_i-1=a'_i \in Y} (a_i - 1) = \sum_{a_i-1=a'_i \in Y} a_i - ak \equiv 0 \pmod{k}$ y esto es una contradicción. \square

2.3. La conexión entre la teoría de Ramsey y la teoría de suma-cero

El análogo a los números de Ramsey para coloraciones del conjunto de aristas de gráficas completas, en la teoría de suma-cero, ha sido estudiado relativamente poco y es un concepto que marca un fuerte lazo entre la teoría de Ramsey y la teoría de suma-cero.

Definición 2.3. *Dada una gráfica H , el número de Ramsey de suma-cero es el mínimo entero $R = R(H, \mathbb{Z}_k)$, tal que toda \mathbb{Z}_k -coloración de las aristas de la gráfica completa de orden R produce una copia de H de suma-cero, donde una \mathbb{Z}_k coloración es una coloración que usa los elementos del grupo \mathbb{Z}_k en el codominio.*

Bialostocki y Dierker fueron los primeros en introducir el concepto de número de Ramsey de suma-cero, $R(H, \mathbb{Z}_k)$. Primero se estudió el caso en que H es una gráfica con k aristas, y posteriormente el concepto fue extendido al caso en donde k divide al número de aristas de H . Los trabajos de la teoría de suma-cero tienen un sabor algebraico que se lleva muy bien con las técnicas de teoría de Ramsey, como veremos en algunas de las demostraciones que expondremos en esta sección.

Recordando la definición 1.1, el número de Ramsey para H es el mínimo entero $R = R(H, r)$ tal que toda r -coloración $c: E(K_R) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ produce una copia de H monocromática. Un resultado muy intuitivo y útil que marca fuertemente la conexión entre ambas teorías se dará a continuación.

Teorema 2.6 (Bialostocki, Dierker [1] y Caro [13] [14]). *Sean k y m enteros positivos, y sea H una gráfica con $|E(H)| = m$.*

1. *Si k divide a m , entonces $R(H, \mathbb{Z}_k) \leq R(H, k)$.*
2. *Si $k = m$, entonces $R(H, 2) \leq R(H, \mathbb{Z}_k)$.*

Demostración.

1. Sea $R(H, k) = R$. Como toda $c : E(K_R) \rightarrow \{0, \dots, k-1\} = \mathbb{Z}_k$ produce una copia de H monocromática y $|E(H)| = qk$ para algún $q \in \mathbb{Z}^+$, entonces la suma de los colores de las aristas de la copia de H es cero y por lo tanto, la coloración produce a H de suma-cero, obteniendo la desigualdad buscada.
2. Sea $R(H, \mathbb{Z}_k) = m$. Sea $c : E(K_m) \rightarrow \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}_k$ con $k \geq 2$. Por hipótesis, esta coloración produce una copia de H de suma-cero. Y como $|E(H)| = k$ entonces o bien todas las aristas de H tienen color 0 o bien todas tienen el color 1, y por lo tanto H es monocromática, obteniendo la desigualdad buscada. \square

El siguiente resultado muestra una fuerte relación entre la teoría de suma-cero, la teoría de gráficas y la teoría de Ramsey en su versión de suma-cero. La demostración se le atribuye a Bialostocki y Dierker quienes han tenido una gran influencia en esta área.

Teorema 2.7 (Bialostocki, Dierker, 1992. [1]). *Sea m un entero positivo par. Toda coloración de las aristas $c : E(K_{2m-1}) \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$ produce una copia de la estrella $K_{1,m}$ con m aristas e_1, e_2, \dots, e_m tales que*

$$c(e_1) + c(e_2) + \dots + c(e_m) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Demostración. Sea c una coloración de $E(K_{2m-1})$ con los colores de $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ que sea contraejemplo al teorema, es decir, que sea libre de estrellas, $K_{1,m}$, cuyos colores en las aristas sumen $0 \pmod{m}$. Observemos que debe haber al menos tres colores en la imagen de c , de lo contrario, habría sólo dos colores en la imagen, y entonces, necesariamente, todo vértice sería adyacente a $m-1$ aristas de cada color; por lo cual, existiría una subgráfica $(m-1)$ -regular de orden $2m-1$; lo cual es imposible por paridad, ya que $(2m-1)(m-1)$ debe ser par, y comenzamos suponiendo que m es par. Por lo tanto, c usa al menos tres colores. Más aún, por el Teorema 2.3, sólo puede haber dos clases cromáticas en las $2m-2$ aristas incidentes a cada vértice, y cada uno de estos dos colores debe usarse en exactamente $m-1$ aristas. Afirmamos que estas dos clases cromáticas deben ser de distinta paridad. Si las dos clases incidentes al vértice v fueran pares, digamos $2a_1$ y $2a_2$, entonces podemos tomar $\frac{m}{2}$ aristas de color $2a_1$ y $\frac{m}{2}$ aristas de color $2a_2$. Al sumar sus valores obtendríamos que $\frac{m}{2}(2a_1) + \frac{m}{2}(2a_2) = m(a_1 + a_2) \equiv 0 \pmod{m}$. Si las dos clases incidentes al vértice v fueran impares, digamos $2a_1 + 1$ y $2a_2 + 1$, entonces podemos tomar $\frac{m}{2}$ aristas de color $2a_1 + 1$ y $\frac{m}{2}$ aristas de color $2a_2 + 1$. Al sumar sus valores obtendríamos que $\frac{m}{2}(2a_1 + 1) + \frac{m}{2}(2a_2 + 1) = m(a_1 + a_2 + 1) \equiv 0 \pmod{m}$, y en ambos casos tendríamos una estrella $K_{1,m}$ de suma-cero lo cual sería una contradicción.

Usando la paridad de las aristas, podemos inducir una 2-coloración de $E(K_{2m-1})$, en donde a las aristas de color par se les asigna el primer color, y a las aristas de color impar se les asigna el segundo color. Pero entonces por el primer argumento de la demostración debe existir un vértice u incidente a m aristas de la misma paridad, y esto es una contradicción a que cada vértice es incidente a exactamente dos clases cromáticas con $m-1$ aristas cada una. \square

Lo que se demostró en el teorema anterior es que para m par tenemos:

$$R(K_{1,m}, \mathbb{Z}_m) \leq 2m - 1.$$

Antes de dar la demostración del último teorema de esta sección, requerimos revisar otro resultado; este es un teorema clásico sobre descomposición de gráficas completas y se puede consultar en el libro de Harary [15]. Recordemos que un *ciclo hamiltoniano* de K_n es una subgráfica que consta de un ciclo que ocupa todos los vértices de K_n y un *matching perfecto* de K_n es una subgráfica de K_n que consta de $\frac{n}{2}$ aristas disjuntas y ocupa todos los vértices de K_n .

Teorema 2.8. *Sea K_n la gráfica completa de orden n .*

1. *Si $n \equiv 1 \pmod{2}$ entonces K_n es la unión arista-disjunta de $\frac{n-1}{2}$ ciclos hamiltonianos.*
2. *Si $n \equiv 0 \pmod{2}$ entonces K_n es la unión arista-disjunta de $\frac{n-2}{2}$ ciclos hamiltonianos y un matching perfecto.*

El último resultado que expondremos en esta sección es una generalización del Teorema 2.7 que se le atribuye a Yair Caro. Su demostración es muy interesante y creativa, por lo que decidimos exponerla a detalle en este trabajo.

Teorema 2.9 (Caro, 1992, [13]). *Sea $K_{1,n}$ la estrella con n aristas y supongamos que $k|n$, entonces*

$$R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k) = \begin{cases} n + k - 1 & \text{si } n \equiv k \equiv 0 \pmod{2}, \\ n + k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Empezamos por demostrar que

$$n + k - 1 \leq R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k).$$

Para ello, exhibiremos una coloración, libre de copias de $K_{1,n}$ que sumen cero, de las aristas de K_{n+k-2} . Consideremos copias ajenas de K_{k-1} y de K_{n-1} . Asignamos el color 0 a las aristas de K_{k-1} y a las aristas de K_{n-1} ; y asignamos el color 1 a todas las aristas entre K_{k-1} y K_{n-1} . De manera que todo vértice tiene o bien tiene $k-2$ aristas de color 0 y $n-1$ aristas de color 1 incidentes, o bien $n-2$ aristas de color 0 y $k-1$ aristas de color 1 incidentes. Notemos que en cualquiera de estos casos, no hay un subconjunto de n aristas que sumen cero módulo k y así $R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k) \geq n + k - 1$.

Ahora demostraremos que

$$R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k) \leq n + k.$$

Sea $n = mk$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ y c una \mathbb{Z}_k -coloración de las aristas de $K_{mk+k} = K_{(m+1)k}$. El grado de cada vértice es $(m+1)k-1$ y por el Teorema 2.4 existe un subconjunto de $n = mk$ aristas incidentes al vértice v cuya suma es cero módulo k . Por lo tanto, $R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k) \leq n + k$. Ahora consideremos los siguientes tres casos:

Caso 1: $n \equiv k \equiv 1 \pmod{2}$. Queremos demostrar que $n+k \leq R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k)$. Consideremos a K_{n+k-1} y notemos que $n+k-1 \equiv 1 \pmod{2}$; por el teorema 2.8, K_{n+k-1} es la unión de $\frac{n+k-2}{2}$ ciclos hamiltonianos. Daremos el color 1 a $\frac{n-1}{2}$ de ellos y el color 0 a los $\frac{k-1}{2}$ ciclos restantes. Entonces cada vértice tiene $n-1$ aristas de color 1 y $k-1$ aristas de color 0 incidentes. Observemos que ningún subconjunto de n de estas aristas es de suma-cero módulo k . Entonces $n+k \leq R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k)$.

Caso 2: $n \equiv 0 \pmod{2}$, $k \equiv 1 \pmod{2}$. Para este caso queremos demostrar también que $n+k \leq R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k)$. Sea K_{n+k-1} y notemos que $n+k-1 \equiv 0 \pmod{2}$. Por el teorema 2.8, K_{n+k-1} es unión de ciclos hamiltonianos y un matching perfecto. Entonces asignamos el color 1 a $\frac{n-2}{2}$ ciclos y al matching perfecto. Asignamos el color 0 a los $\frac{k-1}{2}$ ciclos restantes. Entonces todo vértice tiene $n-1$ aristas de color 1 y $k-1$ aristas de color 0 incidentes. Ningún subconjunto de n de estas aristas suma cero módulo k . Entonces $n+k \leq R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k)$.

Caso 3: $n \equiv k \equiv 0 \pmod{2}$. Sea K_{n+k-1} , con $n = mk$ y notemos que $n+k-1 \equiv 1 \pmod{2}$. Sea c una \mathbb{Z}_k -coloración de las aristas de K_{n+k-1} . Todo vértice tiene grado $n+k-2 = (m+1)k-2$. Entonces por el Teorema 2.3, la única manera de evitar un $K_{1,n}$ de suma-cero es cuando las aristas incidentes a cada vértice v tienen dos clases cromáticas cada una con $-1 \pmod{k}$ aristas y de distinta paridad. Entonces volvemos a colorear, dando ahora una \mathbb{Z}_2 -coloración de las aristas de K_{n+k-1} de acuerdo con la paridad de la coloración previa. Es decir, a las aristas con color par bajo c , ahora le asignamos el color 0, y a las demás les asignamos el color 1. Como k es par, entonces cada clase tiene cardinalidad impar. En la nueva coloración cada vértice tiene un número impar de aristas de color 0 y un número impar de aristas de color 1 incidentes. La gráfica inducida por el color 0 en la nueva coloración tiene un número impar de vértices $(n+k-1)$ todos con grados impares, y por el lema del saludo que dice que la suma de los grados de una gráfica es igual al doble de la cardinalidad de sus aristas, esto es imposible. Por lo tanto, $R(K_{1,n}, \mathbb{Z}_k) \leq n+k-1$. \square

Con esta bonita demostración concluimos la sección. Esto es, con el mensaje de que la teoría de suma-cero es un área donde aún hay todavía mucho trabajo por hacer y donde se puede usar la teoría de Gráficas como una herramienta fuerte. Un proyecto a futuro es seguir trabajando con coloraciones de suma-cero usando los resultados fuertes que ya se tienen y dar algunas variantes con coloraciones del hipercubo.

Capítulo 3

El hipercubo

En este capítulo presentamos las definiciones y los resultados básicos, con respecto al hipercubo, requeridos para el desarrollo del resto de la tesis. Usaremos la notación y la nomenclatura típica que se usa en teoría de gráficas, y que se puede consultar en cualquier libro de teoría de gráficas como [16] y [17]. También manejaremos algunos resultados básicos de álgebra moderna que se pueden consultar en el libro [16].

3.1. Definiciones y propiedades básicas

Comenzaremos, como es natural, con la definición de nuestro principal objeto de estudio.

Definición 3.1. *Sea n un entero positivo. El hipercubo de dimensión n , denotado por Q_n , es la gráfica cuyos vértices corresponden al conjunto de n -tuplas (ordenadas) binarias; en la cual, dos vértices son adyacentes si las correspondientes n -tuplas difieren en exactamente una posición. Es decir,*

$$V(Q_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \text{ para } 1 \leq i \leq n\}, \text{ y}$$
$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) \in E(Q_n) \text{ si y sólo si } \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = 1.$$

Por convención, el hipercubo de dimensión 0, Q_0 , es la gráfica trivial que consta de un sólo vértice. Los hipercubos de dimensión 1, 2 y 3 se muestran en la figura 3.1. Para facilitar la lectura de este trabajo, denotaremos las n -tuplas (los vértices de Q_n) omitiendo los paréntesis y las comas cuando esto no cause confusión; por ejemplo, el vértice $(0, 1)$ se denotará simplemente como 01.

A continuación veremos dos proposiciones básicas acerca del hipercubo.

Proposición 3.1. *Sea Q_n el hipercubo de dimensión n . Entonces,*

(a) Q_n tiene 2^n vértices.

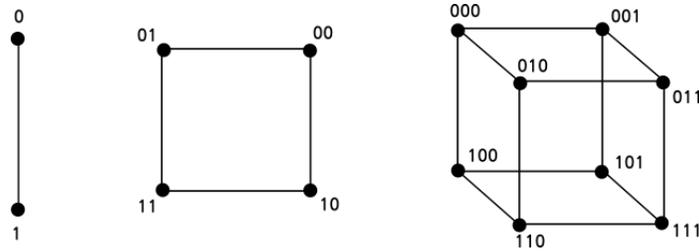


Figura 3.1: Representación gráfica de Q_1 , Q_2 y Q_3 .

(b) Q_n es regular de grado n .

(c) Q_n tiene $n2^{n-1}$ aristas.

Demostración.

(a) Como hay n entradas en cada n -tupla, y en cada entrada hay dos posibilidades, ya sea 0 o 1, tenemos un total de 2^n n -tuplas binarias ordenadas distintas, y por lo tanto $|V(Q_n)| = 2^n$.

(b) Sea $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V(Q_n)$. Como hay un total de n vértices que difieren de (x_1, x_2, \dots, x_n) en exactamente una posición, tenemos que $\deg(v) = n$. Como este vértice es arbitrario, Q_n es una gráfica n -regular.

(c) Por un argumento simple de doble conteo, es bien sabido que, en toda gráfica, la suma de los grados sobre todos los vértices es igual al doble del número de aristas. Usando este hecho y la regularidad de la gráfica Q_n (demostrada en el inciso anterior) calculamos el número de aristas de Q_n :

$$\sum_{v \in V(Q_n)} \deg(v) = 2|E(Q_n)|,$$

luego

$$\frac{n2^n}{2} = n2^{n-1} = |E(Q_n)|. \quad \square$$

Una gráfica G es *vértice-transitiva* (resp. *arista-transitiva*) si su grupo de automorfismos actúa transitivamente sobre $V(G)$ (resp. $E(G)$). De tal manera que para cualesquiera dos vértices (resp. aristas) distintos de $V(G)$ (resp. $E(G)$) existe un automorfismo que mapea uno al otro. Una familia de gráficas vértice-transitivas y arista-transitivas es la familia de todos los hipercubos Q_n de dimensión n . A continuación demostramos que Q_n es vértice-transitiva. La demostración de que Q_n es arista-transitiva es análoga y por lo tanto se omite en este trabajo.

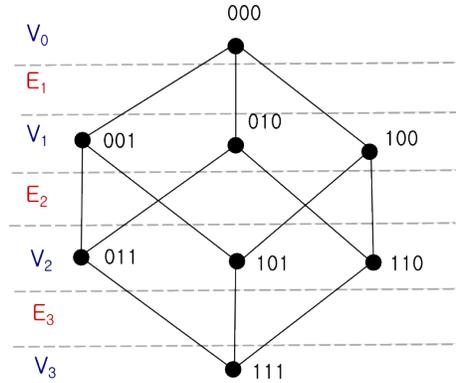


Figura 3.2: Diagrama de Hasse de Q_3

Proposición 3.2. *El hipercubo Q_n de dimensión n es vértice transitivo.*

Demostración. Para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q_n$, sea $\tau(x) := \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} 2^{n-i}$, luego $\tau : Q_n \rightarrow [0, 2^n - 1]$ es una biyección.

Si v es un vértice de Q_n fijo (es decir, v es una n -tupla binaria fija). Sea x' el número congruente con $\tau(x + v)$ módulo 2^n en $[0, 2^n - 1]$, donde la suma es binaria. Definimos $\rho_v(x) = \tau^{-1}(x')$ que es una permutación de los vértices de Q_n .

Este mapeo es un automorfismo ya que las n -tuplas x y y difieren en exactamente una coordenada si y sólo si $x + v$ y $y + v$ difieren en exactamente una coordenada. Hay 2^n permutaciones de este tipo ya que v puede ser 2^n n -tuplas distintas, y éstas forman un subgrupo H del grupo de automorfismos de Q_n . Este subgrupo actúa transitivamente sobre $V(Q_n)$ porque para cualesquiera dos vértices x y y , el automorfismo ρ_{y-x} mapea a x en y . \square

El hecho de que Q_n sea vértice y arista-transitiva será de gran utilidad en las demostraciones expuestas en este trabajo. Lo que quiere decir es que todo vértice arbitrario se puede tomar sin pérdida de generalidad como el vértice con 0's en todas sus entradas. De igual manera, cualquier arista arbitraria de Q_n se puede tomar como una arista cuyo extremo es el vértice con 0's en todas sus entradas.

Consideremos un dibujo de Q_n en donde todos los vértices con el mismo número de 1's son dibujados en un mismo nivel. Este tipo de dibujo se llama *modelo de niveles* o *diagrama de Hasse* y resulta muy útil en el estudio del hipercubo. En la figura 3.2 podemos ver el diagrama de Hasse de Q_3 . Observemos que el diagrama de Hasse de Q_n tiene $n + 1$ niveles de vértices, denotados por V_0, V_1, \dots, V_n , donde

$$V_j = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i = j \right\},$$

para cada $j \in \{0, \dots, n\}$, de modo que $V(Q_n) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$. Notemos que cada nivel de vértices en el diagrama de Hasse es un conjunto independiente de vértices. En otras palabras, no hay aristas de Q_n con ambos extremos en un mismo nivel. Más aún, todas las

aristas de Q_n tienen sus extremos en niveles consecutivos, de modo que existen n niveles de aristas, denotados por E_1, E_2, \dots, E_n , donde $E(Q_n) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, y cada arista de E_i tiene un extremo en V_{i-1} y otro en V_i , para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. A continuación se establecen las cardinalidades de cada V_i y E_i en el diagrama de Hasse de Q_n .

Proposición 3.3. *Sea Q_n el hipercubo de dimensión n . Sean V_0, V_1, \dots, V_n , y E_1, E_2, \dots, E_n los niveles de vértices y aristas en el diagrama de Hasse de Q_n . Entonces,*

- (a) $|V_i| = \binom{n}{i}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.
- (b) $|E_i| = (n - i + 1)\binom{n}{i-1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración.

- (a) Sea $i \in \{0, \dots, n\}$. Recordemos que los elementos de V_i son todas las n -tuplas binarias con i 1's y $n - i$ 0's. Por lo tanto, calcular la cardinalidad de V_i es equivalente a contar los subconjuntos de i elementos de un conjunto de n elementos, y esto es $\binom{n}{i}$.
- (b) Por el inciso (c) de la Proposición 3.1, sabemos que Q_n es una gráfica regular de grado n . Entonces, $|E_1| = n|V_0| = n\binom{n}{0} = n$. Por esta misma razón, cada vértice de V_1 está en $(n - 1)$ aristas de E_2 , y así $|E_2| = (n - 1)|V_1| = (n - 1)\binom{n}{1}$. Siguiendo este mismo razonamiento, obtenemos que $|E_i| = (n - i + 1)|V_{i-1}| = (n - i + 1)\binom{n}{i-1}$. \square

Notemos que, al hacer la suma de las cardinalidades de los V_i 's, podemos recuperar el número de vértices de Q_n (previamente calculado en el inciso (c) de la Proposición 3.1):

$$|V(Q_n)| = \sum_{i=0}^n |V_i| = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n. \quad (3.1)$$

De la misma manera, la suma de las cardinalidades de los E_i 's recupera el número de aristas que tiene Q_n :

$$|E(Q_n)| = \sum_{i=1}^n |E_i| = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) \binom{n}{i-1} = n \binom{n}{0} + (n - 1) \binom{n}{1} + \dots + (1) \binom{n}{n-1} = n2^{n-1}.$$

Introduciremos ahora una métrica sobre Q_n que nos será de gran utilidad en la ejecución de algunas demostraciones. La *distancia de Hamming* entre dos vértices $x = x_1x_2 \dots x_n$ y $y = y_1y_2 \dots y_n$ es

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

En otras palabras la distancia de Hamming entre dos vértices de un hipercubo Q_n es el número de coordenadas en las cuales ambos difieren. Por ejemplo, $d_H(0000, 1010) = 2$ y $d_H(101010011, 001110010) = 3$. Para una longitud fija n , la distancia de Hamming es una métrica sobre los vértices de Q_n ya que cumple con la no-negatividad, la simetría y la desigualdad triangular.

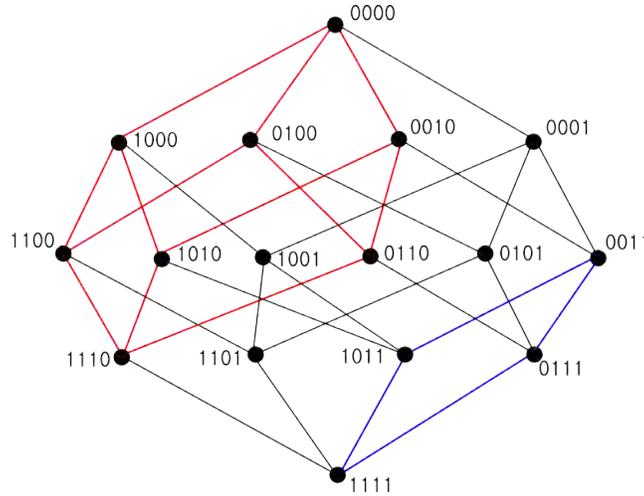


Figura 3.3: El hipercubo Q_4 con subhipercubos Q_3 en rojo y Q_2 en azul.

3.2. Subhipercubos

Recordemos que Q_0 y Q_1 son isomorfos, respectivamente, a un vértice y a una arista. De modo que, al contar el número de vértices y el número de aristas de Q_n , hemos contado cuántos Q_0 's y cuántos Q_1 's contiene un hipercubo Q_n . Resulta natural preguntarnos, entonces, cuántos Q_i 's contiene Q_n , en general, para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Pero para poder responder esta pregunta primero definiremos el concepto de subhipercubo.

Definición 3.2. Sean k y n enteros positivos, con $k \leq n$. Un subhipercubo de dimensión k de un hipercubo de dimensión n , Q_n , es simplemente una subgráfica de Q_n isomorfa a Q_k .

Ejemplo 3.1. En la figura 3.3 se muestran dos subhipercubos de dimensiones 3 y 2 respectivamente, del hipercubo Q_4 .

Naturalmente, dados k y n enteros positivos con $k \leq n$, el hipercubo Q_n contiene muchos subhipercubos de dimensión k . En la siguiente proposición determinamos de manera exacta tal número.

Proposición 3.4. Sea Q_n el hipercubo de dimensión n , y sea $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Entonces, Q_n contiene $2^{n-i} \binom{n}{i}$ subhipercubos de dimensión i .

Demostración. Empezamos por observar que un $Q_i \subseteq Q_n$ es generado por las n -tuplas con las mismas entradas en exactamente $n - i$ posiciones fijas, ya que esto produce 2^i n -tuplas que difieren exactamente en las mismas i entradas. Por lo que basta contar el número de subconjuntos de n -tuplas con esta característica. Dadas $n - i$ posiciones fijas, hay 2^{n-i} posibles secuencias de 1's y 0's. Como hay $\binom{n}{n-i}$ posibles maneras de tomar estas $n - i$ posiciones y $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, tenemos que Q_n contiene $2^{n-i} \binom{n}{i}$ Q_i 's. \square

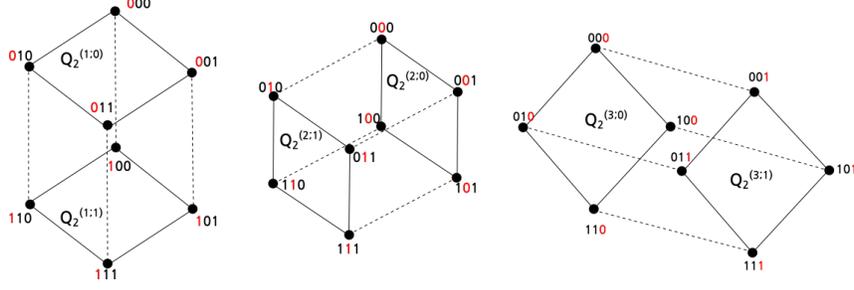


Figura 3.4: Las tres descomposiciones del hipercubo Q_3 en dos Q_2 's disjuntos.

Existe una manera natural de descomponer un hipercubo de dimensión n en subhipercubos de dimensión menor, dejando fijas algunas coordenadas. Por ejemplo, para $j \in \{1, \dots, n\}$ definimos $Q_{n-1}^{(j:0)}$ y $Q_{n-1}^{(j:1)}$ como los subhipercubos de Q_n inducidos por los siguientes conjuntos de vértices:

$$V(Q_{n-1}^{(j:0)}) = \{x_1 x_2 \cdots x_n \in V(Q_n) : x_j = 0\},$$

$$V(Q_{n-1}^{(j:1)}) = \{x_1 x_2 \cdots x_n \in V(Q_n) : x_j = 1\}.$$

Notemos que, a partir de estos dos subhipercubos de dimensión $n - 1$, obtenemos una partición de los vértices y las aristas de Q_n de la siguiente manera:

$$V(Q_n) = V(Q_{n-1}^{(j:0)}) \cup V(Q_{n-1}^{(j:1)}), \quad (3.2)$$

$$E(Q_n) = E(Q_{n-1}^{(j:0)}) \cup E(Q_{n-1}^{(j:1)}) \cup E'$$

donde E' es el conjunto de aristas de Q_n con un extremo en $V(Q_{n-1}^{(j:0)})$ y otro en $V(Q_{n-1}^{(j:1)})$.

Esta descomposición del hipercubo Q_n en dos subhipercubos disjuntos de dimensión $n - 1$ se puede hacer de n maneras distintas, ya que hay n posibilidades para la posición j . En la figura 3.4 podemos ver las tres maneras de descomponer Q_3 en dos Q_2 's disjuntos.

Terminaremos el capítulo con dos lemas sobre subhipercubos de dimensión $k \leq n$ que serán de gran utilidad en algunas demostraciones de teoremas importantes que veremos en el siguiente capítulo.

Lema 3.1. *Sean k y n enteros tales que $1 \leq k \leq n$. Entonces, cualesquiera dos vértices del hipercubo Q_n están en a lo más $\binom{n-1}{k-1}$ sub- Q_k 's (subhipercubos de dimensión k).*

Demostración. Sean x y y dos vértices distintos de Q_n . Por la Proposición 3.2 sabemos que Q_n es vértice-transitivo, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x es el vértice con n ceros. Como x y y son distintos al menos difieren en una coordenada. Si este fuera el caso, entonces formarían una arista y tendrían $n - 1$ coordenadas iguales. Para

que un sub- Q_k contenga a ambos vértices, los vértices de este sub- Q_k deben tener $n - k$ coordenadas iguales fijas; de manera que hay $\binom{n-1}{n-k}$ maneras de fijar estas $n - k$ coordenadas y así estos dos vértices adyacentes estarían en $\binom{n-1}{n-k}$ distintos Q_k 's. Si x y y no fueran adyacentes, supongamos que tienen distancia de Hamming $t > 1$. Entonces x y y difieren en t coordenadas, de manera que sólo hay $n - t$ coordenadas en común de donde podemos tomar subconjuntos de $n - k$ coordenadas. Por lo tanto, estos dos vértices están en $\binom{n-t}{n-k}$ distintos Q_k 's. Y como $\binom{n-1}{n-k} > \binom{n-t}{n-k}$, entonces los vértices x y y están en a lo más $\binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ Q_k 's. \square

Lema 3.2. Sean k y n enteros tales que $1 \leq k \leq n$. Entonces, cualesquiera dos aristas del hipercubo Q_n están en a lo más $\binom{n-2}{k-2}$ sub- Q_k 's.

Demostración. Sean $e_1 = \{x_1, y_1\}$ y $e_2 = \{x_2, y_2\}$ dos aristas de Q_n . Como las aristas deben ser distintas, existen al menos dos vértices (uno en cada arista) que son distintos, digamos x_1 y x_2 . Como la distancia de Hamming entre x_1 y y_1 es uno y lo mismo ocurre para x_2 y y_2 , entonces x_1 y x_2 deben diferir en al menos dos coordenadas, es decir su distancia de Hamming debe ser al menos dos. Para contar los Q_k 's que contengan a las dos aristas (es decir a los 4 vértices), estos deben tener $n - k$ coordenadas fijas. Entonces por la última observación, los cuatro vértices, x_1, y_1, x_2, y_2 tienen al menos $n - 2$ coordenadas iguales de donde podemos fijar las $n - k$ coordenadas para encontrar los Q_k 's. Por lo tanto, las aristas e_1 y e_2 están en a lo más $\binom{n-2}{n-k} = \binom{n-2}{k-2}$ Q_k 's. \square

El estudio de los sub- Q_k 's de Q_n es altamente relevante para este trabajo de tesis ya que más adelante se expondrá con detalle algunos resultados estudiados de varios artículos y resultados originales donde se busca precisamente sub- Q_k 's con características particulares.

Capítulo 4

Coloraciones libres en el hipercubo

En este capítulo estudiaremos coloraciones del hipercubo libres de subhipercubos heterocromáticos. Dados n y k enteros positivos tales que $k \leq n$, vamos a considerar coloraciones del hipercubo de dimensión n sin sub-hipercubos heterocromáticos de dimensión k . En este contexto, podemos estudiar dos tipos de coloraciones interesantes, a saber, coloraciones de vértices o coloraciones de aristas. En 2007, Maria Axenovich et al. [2] consideraron coloraciones de aristas, obteniendo los resultados que se presentan en la Sección 4.1. En la Sección 4.2, realizamos el estudio análogo correspondiente a coloraciones de vértices, siendo este un trabajo original.

4.1. Coloraciones de aristas

Dada una coloración de aristas de una gráfica G , decimos que una subgráfica H de G es *heterocromática* si H no contiene dos aristas del mismo color. Dadas dos gráficas G y H , nos interesamos por el estudio de coloraciones de las aristas de G libres de subgráficas heterocromáticas isomorfas a H . A continuación se define el parámetro que estudiaremos a lo largo de esta sección.

Definición 4.1. *Una coloración de las aristas de G , se llama H -libre si ninguna subgráfica de G isomorfa a H es heterocromática. Definimos $f(G, H)$ como el máximo número de colores para el cual existe una coloración H -libre de las aristas de G .*

Notemos que $f(G, H)$ siempre existe. Más aún

$$|E(H)| \leq f(G, H) \leq |E(G)|,$$

ya que toda coloración con menos de $|E(H)|$ colores es H -libre y así se da la primer desigualdad. La segunda desigualdad es trivial, ya que toda coloración suprayectiva de las aristas de G ocupa a lo más $|E(G)|$ colores.

Observemos que para demostrar que $f(G, H) = r$, es necesario y suficiente demostrar las siguientes dos desigualdades:

$$r \leq f(G, H) \leq r.$$

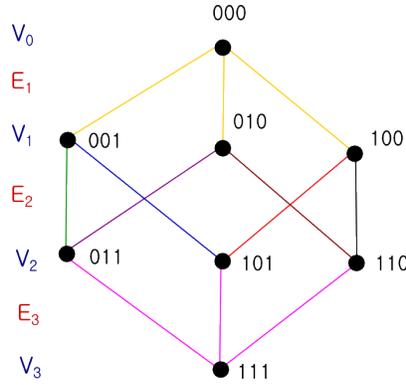


Figura 4.1: Coloración libre de Q_2 heterocromáticos.

La desigualdad $r \leq f(G, H)$ se demuestra exhibiendo una coloración explícita de las aristas de G con exactamente r colores que sea H -libre. Para demostrar la desigualdad $f(G, H) \leq r$, se debe probar que toda coloración de las aristas de G con $r+1$ colores produce una subgráfica heterocromática isomorfa a H ; es decir, no existen coloraciones H -libres de G con $f(G, H)+1$ colores o más.

En este trabajo, exploraremos cotas de $f(Q_n, Q_k)$ para todo $k \leq n$. Para sentar ideas de cómo atacar cada desigualdad, a continuación determinamos $f(Q_3, Q_2)$.

Proposición 4.1. *Sean Q_3 y Q_2 los hipercubos de dimensión 3 y 2 respectivamente, entonces $f(Q_3, Q_2) = 8$.*

Demostración. Empezaremos por demostrar que $8 \leq f(Q_3, Q_2)$, exhibiendo una coloración con 8 colores libre de Q_2 heterocromáticos (ver figura 4.1). Como podemos ver, la coloración que damos asigna al conjunto de aristas E_1 un solo color, al conjunto de aristas E_3 otro color, y al conjunto de aristas E_2 le asigna 6 colores (uno distinto para cada arista). Como cada Q_2 ocupa exactamente dos niveles de aristas en el diagrama de Hasse, es fácil observar que la coloración es Q_2 -libre.

Ahora probaremos que $f(Q_3, Q_2) \leq 8$. Supongamos que existe una coloración c de las aristas de Q_3 con 9 colores que es Q_2 -libre. Sea $X \subset E(Q_3)$ un conjunto tal que $|X| = 9$ y X es heterocromático, es decir, los colores asignados a las aristas de X bajo c son todos distintos. Así obtenemos una partición, $E(Q_3) = X \cup Y$, donde Y es el conjunto de las 3 aristas restantes. Observemos que cada uno de los seis subhipercubos Q_2 de Q_3 , contiene al menos una arista de Y (de otra manera, existiría un Q_2 cuyas aristas son todas elementos de X y entonces sería heterocromático contradiciendo la hipótesis). Notemos además que toda arista de Q_3 está contenida en exactamente dos subhipercubos Q_2 , de lo cual concluimos que todo sub- Q_2 de Q_3 contiene exactamente una arista de Y . Consideremos ahora $e \in Y$ y los dos subhipercubos, digamos Q'_2 y Q''_2 , que la contienen (ver figura 4.2). Como Q'_2 es no heterocromático, existe $e_1 \in E(Q'_2) \cap X$ tal que $c(e) = c(e_1)$ (esto es porque sabemos que la única arista de Q'_2 que no pertenece a X es e). De igual manera, existe $e_2 \in E(Q''_2) \cap X$ tal que $c(e) = c(e_2)$. Pero entonces $c(e_1) = c(e_2)$ lo cual es una contradicción ya que e_1, e_2

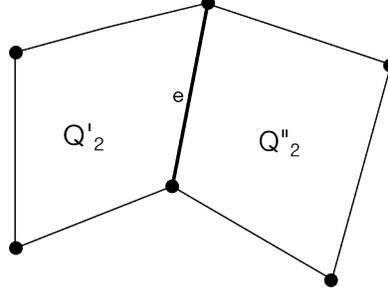


Figura 4.2: Una arista e y los dos sub- Q_2 que la contienen.

pertenecen a X , y X es un conjunto heterocromático. \square

A continuación presentamos dos teoremas correspondientes, respectivamente, a una cota inferior y a una cota superior generales para $f(Q_n, Q_k)$. Ambos teoremas se pueden consultar en [2]. Sin embargo, las pruebas que aquí damos exponen de manera más clara algunos detalles que no son obvios en el artículo. Antes de continuar requerimos una definición y un lema.

Definición 4.2. Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, definimos $L_n(i, k)$ como la unión de todos los niveles de aristas E_t , del diagrama de Hasse de Q_n , tales que $t \equiv i \pmod{k}$. Es decir, $L_n(i, k) = E_i \cup E_{i+k} \cup E_{i+2k} \cup \dots \cup E_{i+\lfloor \frac{n-i}{k} \rfloor k}$.

Lema 4.1. Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Entonces,

- (a) El número de niveles E_t , del diagrama de Hasse de Q_n , en cada $L_n(i, k)$ es o bien $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ o bien $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.
- (b) $|E(Q_n)| = \sum_{i=1}^k |L_n(i, k)|$.
- (c) El promedio del número de aristas en $L_n(i, k)$ es $\frac{n2^{n-1}}{k}$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración. (a) Es sencillo ver que el número n se puede ver como $n = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor k + r$, donde r es un residuo tal que $0 \leq r \leq k - 1$. Si nos fijamos solamente en los niveles de aristas del conjunto $\{E_1, \dots, E_k, E_{k+1}, \dots, E_{2k}, \dots, E_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor k}\}$, notamos que cada $L_n(i, k)$ hasta este punto, tiene el mismo número de niveles cada uno, es decir $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Ahora falta por considerar los niveles $E_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor k + 1}, \dots, E_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor k + r}$. Observemos que cada uno pertenece a un $L_n(i, k)$ diferente donde $1 \leq i \leq r$, y entonces estos $L_n(i, k)$'s tienen $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{k} \rceil$ niveles de aristas, mientras que para $i > r$ los $L_n(i, k)$'s tienen solamente $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ niveles de aristas.

- (b) Es muy intuitivo ver que los $L_n(i, k)$ con k fijo define una partición de las aristas de Q_n . Esto se debe a que en el diagrama de Hasse toda arista debe estar en algún E_j para $1 \leq j \leq n$, así que j se puede escribir como $j = km + r$ para algún m entero

positivo y $0 \leq r \leq k - 1$. Entonces esta arista debe estar en $L_n(r, k)$. Cualesquiera $L_n(i, k)$ y $L_n(j, k)$ donde $i \neq j$ se intersectan en el vacío ya que si una arista estuviera en ambos, entonces esta arista estaría en un nivel E_t donde $t \equiv i \pmod{k}$ y al mismo tiempo $t \equiv j \pmod{k}$, lo cual sería una contradicción.

Por lo tanto al ser $\cup_{i=1}^k L_n(i, k)$ una partición de las aristas, es inmediato concluir que $|E(Q_n)| = \sum_{i=1}^k |L_n(i, k)|$.

- (c) Al ser los $L_n(i, k)$ con k fija una partición de las aristas en k conjuntos es inmediato ver que $\frac{n2^{n-1}}{k}$ es el promedio de aristas que hay en cada $L_n(i, k)$. \square

Teorema 4.1 (Axenovich, Harborth, Kemnitz, Möller, Schiermeyer, 2004). *Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Entonces*

$$n2^{n-1} - \left\lfloor \frac{n}{k}(2^{n-1} - k + 1) \right\rfloor \leq f(Q_n, Q_k).$$

Demostración. Consideremos una coloración de $E(Q_n)$ que asigne $k - 1$ colores distintos a cada nivel de $L_n(i, k)$ y a cada arista fuera de $L_n(i, k)$ se le asigna un color distinto. Observemos que en cada nivel de aristas en $L_n(i, k)$ con esta coloración, podemos tomar un conjunto de $k - 1$ aristas fijas de colores distintos. Las aristas fuera de este conjunto en ese nivel serán llamadas *aristas restantes*. Sea r_i el número de aristas restantes de $L_n(i, k)$ la suma de las aristas restantes en cada nivel de $L_n(i, k)$. Para saber cual es la cantidad de colores utilizados en esta coloración, tomaremos la diferencia del total de las aristas de Q_n y el número r_i de aristas restantes de $L_n(i, k)$. Sea $i_m \in \{1, \dots, k\}$ tal que $|L_n(i_m, k)|$ es mínimo. De esta manera, obtenemos la siguiente cota:

$$n2^{n-1} - r_{i_m} \leq f(Q_n, Q_k).$$

Para poder dar una cota inferior en términos de n y k , haremos uso del promedio de aristas restantes sobre todos los $L_n(i, k)$'s. Dicho promedio esta dado por:

$$\frac{n2^{n-1} - n(k - 1)}{k}$$

ya que $n2^{n-1} - n(k - 1)$ es la suma de las aristas restantes para todo i en $L_n(i, k)$.

De lo anterior, concluimos que:

$$n2^{n-1} - \frac{n2^{n-1} - n(k - 1)}{k} \leq n2^{n-1} - \left\lfloor \frac{n2^{n-1} - n(k - 1)}{k} \right\rfloor \leq n2^{n-1} - r_{i_m} \leq f(Q_n, Q_k),$$

y por lo tanto

$$n2^{n-1} - \left\lfloor \frac{n}{k}(2^{n-1} - k + 1) \right\rfloor \leq f(Q_n, Q_k)$$

que es la cota buscada. \square

Teorema 4.2 (Axenovich, Harborth, Kemnitz, Möller, Schiermeyer, 2004). Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Entonces

$$f(Q_n, Q_k) \leq n2^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{(n-1)k2^{k-2}} \right).$$

Demostración. Sea $c : E(Q_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, f\}$ una coloración Q_k -libre. Consideremos la partición en clases cromáticas inducida por c :

$$E(Q_n) = E_1 \cup \dots \cup E_f \quad (4.1)$$

donde, por definición, $E_i = c^{-1}(i)$ es un conjunto no vacío de aristas para todo i , y suponemos sin pérdida de generalidad que

$$|E_1| \geq |E_2| \geq \dots \geq |E_f| \geq 1.$$

A partir de (4.1) obtenemos

$$n2^{n-1} = |E(Q_n)| = \sum_{i=1}^f |E_i|,$$

de donde, substrayendo f unidades de ambos lados, concluimos que

$$n2^{n-1} - f = \sum_{i=1}^f (|E_i| - 1). \quad (4.2)$$

Notemos que cada sumando en (4.2) satisface $|E_i| - 1 \geq 0$. Además, $|E_i| - 1 = 0$ si y sólo si $|E_i| = 1$. Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación (4.2) como

$$n2^{n-1} - f = \sum_{i=1}^p (|E_i| - 1) \quad (4.3)$$

donde p es tal que $|E_i| \geq 2$ si y sólo si $i \leq p$.

Para facilitar la lectura de esta demostración, sea $n_i = |E_i| - 1$ donde $n_i \geq 1$.

$$n2^{n-1} - f = \sum_{i=1}^p (|E_i| - 1) = \sum_{i=1}^p n_i \quad (4.4)$$

Más aún, la ecuación (4.4) se puede reescribir como

$$n2^{n-1} - f + p = \sum_{i=1}^p |E_i|. \quad (4.5)$$

Definimos q_i como el número de Q_k 's con al menos 2 aristas de color i . Como c es Q_k -libre, obtenemos que la suma de todos los q_i 's es al menos el total de los Q_k 's en Q_n , es decir,

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} \leq \sum_{i=1}^f q_i,$$

y particularmente,

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} \leq \sum_{i=1}^p q_i \quad (4.6)$$

pues $q_i = 0$ si $|E_i| = 1$.

Ahora acotaremos el valor de q_i , en función de $|E_i|$, de dos maneras distintas. Por el Lema 3.2 cada pareja de aristas de una clase cromática E_i ocurre en a lo más $\binom{n-2}{k-2}$ de los Q_k 's, de tal manera que

$$q_i \leq \binom{|E_i|}{2} \binom{n-2}{k-2}. \quad (4.7)$$

Por otra parte, el Lema 3.1 implica que cada arista está en $\binom{n-1}{k-1}$ distintos Q_k 's en Q_n y al contar sobre cada arista e de color i el número de Q_k 's con al menos dos aristas de color i (una de ellas siendo e), notamos que estos Q_k 's se cuentan al menos el doble. Por lo tanto,

$$q_i \leq \frac{|E_i|}{2} \binom{n-1}{k-1}. \quad (4.8)$$

En la siguiente afirmación determinaremos en qué casos la cota (4.7) es mejor que la cota (4.8).

Afirmación 4.1. $\binom{|E_i|}{2} \binom{n-2}{k-2} < \frac{|E_i|}{2} \binom{n-1}{k-1}$ si y sólo si $n_i < \frac{n-1}{k-1}$.

La afirmación se justifica con las siguientes equivalencias:

$$|E_i| - 1 < \frac{n-1}{k-1}$$

si y sólo si

$$\frac{|E_i|}{2} (|E_i| - 1) \binom{n-2}{k-2} < \frac{|E_i|}{2} \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2}$$

si y sólo si

$$\frac{|E_i| (|E_i| - 1) \binom{n-2}{k-2}}{2} < \frac{|E_i|}{2} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

si y sólo si

$$\binom{|E_i|}{2} \binom{n-2}{k-2} < \frac{|E_i|}{2} \binom{n-1}{k-1}.$$

Regresemos ahora a la ecuación (4.4), y notemos que esta nos da una partición del entero $n2^{n-1} - f$ en p sumandos n_1, \dots, n_p la cual fue inducida por una coloración Q_k -libre, lo que implica que la suma de sus q_i 's, denotada por $\sum q_i$, asociada a esta partición, cumple la desigualdad (4.6). Consideremos todas las posibles particiones del entero $n2^{n-1} - f$ que

son inducidas por coloraciones Q_k -libres, es decir, que cumplen (4.6). Notemos que no todas estas particiones usan el mismo número de sumandos, p .

Sea $s = \lceil \frac{n-1}{k-1} \rceil - 1$. Para una partición con sumandos n_i y n_j donde $n_i < s$ y $n_i \leq n_j$, observemos que usando las desigualdades (4.7) y (4.8), obtenemos lo siguiente:

$$q_i + q_j \leq \binom{|E_i|}{2} \binom{n-2}{k-2} + \frac{|E_j|}{2} \binom{n-1}{k-1} \leq \frac{|E_i|}{2} \binom{n-1}{k-1} + \frac{|E_j|}{2} \binom{n-1}{k-1} \leq \frac{|E_i| + |E_j|}{2} \binom{n-1}{k-1}.$$

De tal manera que $n_i + n_j$ se puede tratar como un solo sumando al hacer la suma total de los q_i 's y q_j 's, y se sigue cumpliendo la desigualdad (4.8). Realizaremos este procedimiento hasta obtener una nueva partición del entero $n2^{n-1} - f$ de modo que todos los sumandos n_i cumplen $n_i = |E_i| - 1 \geq s$. Por lo explicado anteriormente, podemos suponer que desde el principio comenzamos con una coloración Q_k -libre tal que, para toda $i \in \{1, \dots, p\}$, se satisface $n_i = |E_i| - 1 \geq s$. Bajo tal hipótesis, se puede garantizar que el número de sumandos, p , no puede ser muy grande.

Afirmación 4.2. Si $n_i = |E_i| - 1 \geq \lceil \frac{n-1}{k-1} \rceil - 1 = s$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, entonces

$$p \leq \frac{n2^{n-1} - f}{s}. \quad (4.9)$$

La afirmación se obtiene sustituyendo en (4.4) la hipótesis, $n_i \geq s$, y despejando. Utilizando (4.5), (4.6) y (4.8) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{n-k} &\leq \sum_{i=1}^p q_i \leq \sum_{i=1}^p \frac{|E_i|}{2} \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-1} \sum_{i=1}^p |E_i| \\ &= \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-1} (n2^{n-1} - f + p). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De donde podemos obtener, utilizando (4.9), una cota superior para f en función de n , k y r . De (4.9) llegamos a que:

$$n2^{n-1} - f + p \leq (n2^{n-1} - f) + \frac{n2^{n-1} - f}{s} = (n2^{n-1} - f) \left(1 + \frac{1}{s}\right).$$

Por lo tanto, la desigualdad (4.10) se convierte en:

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} \leq \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-1} (n2^{n-1} - f) \left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

Ahora basta despejar f para obtener la cota superior buscada. A continuación se muestra el procedimiento.

$$\frac{2\binom{n}{k}2^{n-k}}{\binom{n-1}{k-1}\left(1+\frac{1}{s}\right)} \leq n2^{n-1} - f$$

si y sólo si

$$f \leq n2^{n-1} - \frac{2\binom{n}{k}2^{n-k}}{\binom{n-1}{k-1}\left(1+\frac{1}{s}\right)}$$

si y sólo si

$$f \leq n2^{n-1} - \frac{n2^{n-k+1}}{k\left(1+\frac{1}{s}\right)}$$

si y sólo si

$$f \leq n2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k2^{k-2}\left(1+\frac{1}{s}\right)}\right).$$

Y como $\frac{n-1}{k-1} - 1 \leq \lceil \frac{n-1}{k-1} \rceil - 1 = s$, entonces

$$f \leq n2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k2^{k-2}\left(1+\frac{1}{s}\right)}\right) \leq n2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k2^{k-2}\left(1+\frac{k-1}{n-k}\right)}\right),$$

obteniendo así la cota superior de $f(Q_n, Q_k)$ buscada:

$$f \leq n2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k2^{k-2}\left(1+\frac{1}{s}\right)}\right) \leq n2^{n-1} \left(1 - \frac{n-k}{k2^{k-2}(n-1)}\right). \quad \square$$

En el artículo *Rainbows in the hypercube* [2] se logró determinar el valor exacto para $f(Q_n, Q_{n-1})$ y $f(Q_4, Q_2)$, y en el artículo de Bode et al. [18] se obtuvieron los valores exactos de $f(Q_5, Q_2)$ y $f(Q_5, Q_3)$, y estos son los únicos que se conocen hasta ahora. A continuación, veremos el valor exacto de $f(Q_n, Q_{n-1})$.

Teorema 4.3 (Axenovich, Harborth, Kemnitz, Möller, Schiermeyer, 2004). *Sea Q_n el hipercubo de dimensión n y Q_{n-1} el hipercubo de dimensión $n-1$, entonces*

$$f(Q_n, Q_{n-1}) = \begin{cases} n2^{n-1} - 4 & \text{si } 3 \leq n \leq 5, \\ n2^{n-1} - 3 & \text{si } n \geq 6. \end{cases}$$

Demostración. Empezamos por demostrar que $n2^{n-1} - 4 \leq f(Q_n, Q_{n-1})$ para todo $n \geq 3$ exhibiendo una coloración Q_{n-1} -libre con $n2^{n-1} - 4$ colores. En el diagrama de Hasse de Q_n asignaremos el color A a tres aristas en E_1 , el color B a tres aristas en E_n y colores distintos a todas las aristas restantes. De tal manera que cualquier sub- Q_{n-1} ocupa al menos dos aristas del color A o al menos dos aristas del color B y esto garantiza que la coloración

es libre y ocupa $n2^{n-1} - 4$ colores. Para demostrar que $n2^{n-1} - 3 \leq f(Q_n, Q_k)$ si $n \geq 6$, exhibiremos una coloración libre con $n2^{n-1} - 3$ colores. Consideramos el diagrama de Hasse de Q_n con los vértices de cada nivel en orden lexicográfico. Asignamos el color A a las últimas dos aristas ($\{00 \cdots 00, 010 \cdots 00\}, \{00 \cdots 00, 10 \cdots 00\}$) del nivel E_1 y el color B a las primeras dos aristas ($\{11 \cdots 101, 11 \cdots 11\}, \{11 \cdots 10, 11 \cdots 11\}$) del nivel E_n . Observemos que cualquier sub- Q_{n-1} que contenga a la pareja de aristas de color A o a la pareja de aristas de color B será libre de Q_{n-1} 's heterocromáticos, pero aún existen dos sub- Q_{n-1} 's sin la pareja de aristas de color A y dos sub- Q_{n-1} 's sin la pareja de aristas de color B . Estos cuatro sub- Q_{n-1} 's son generados por los siguientes conjuntos de vértices:

$$Q_{n-1}^{(1)} = \langle \{(x_1 x_2 \cdots x_n) : x_1 = 0\} \rangle,$$

$$Q_{n-1}^{(2)} = \langle \{(x_1 x_2 \cdots x_n) : x_2 = 0\} \rangle,$$

$$Q_{n-1}^{(3)} = \langle \{(x_1 x_2 \cdots x_n) : x_n = 1\} \rangle,$$

$$Q_{n-1}^{(4)} = \langle \{(x_1 x_2 \cdots x_n) : x_{n-1} = 1\} \rangle,$$

donde los vértices $(x_1 x_2 \cdots x_n)$ son vértices de Q_n . Notemos que la intersección de estos cuatro sub-hipercubos resulta en un sub- Q_{n-4} que llamaremos Q y está determinado por $\langle \{(x_1 x_2 \cdots x_n) : x_1 = 0, x_2 = 0, x_{n-1} = 1, x_n = 1\} \rangle$. Asignamos el color C a dos aristas de Q . Entonces cualquier sub- Q_{n-1} contiene o bien a una pareja de aristas de color A , de color B o de color C , y así garantizamos una coloración libre que utiliza $n2^{n-1} - 3$ colores.

Demostremos, ahora, la cota superior $f(Q_n, Q_{n-1}) \leq n2^{n-1} - 3$ usando contradicción. Supongamos que existe una coloración libre con $n2^{n-1} - 2$ colores, y recordemos que por la proposición 3.4 hay $2n$ sub- Q_{n-1} 's en Q_n . Al tener sólo $n2^{n-1} - 2$ colores y por el principio de las casillas se dan dos casos: o bien existen dos clases cromáticas con exactamente dos aristas cada una, o hay una clase cromática con exactamente tres aristas. En ambos casos, el resto de las clases cromáticas tienen una sola arista. En el primer caso, una pareja de aristas monocromáticas está en a lo más $\binom{n-2}{n-1-2} = n-2$ Q_{n-1} 's, entonces ambas parejas está en a lo más $2(n-2) < 2n$ Q_{n-1} 's, y así existen al menos 4 Q_{n-1} 's sin alguna de estas parejas monocromáticas y esto es una contradicción. En el segundo caso hay tres aristas del mismo color. Como una de estas aristas está en a lo más $\binom{n-1}{n-2} = n-1$ Q_{n-1} 's, entonces por doble conteo a lo más $\frac{3(n-1)}{2} < 2n$ distintos Q_{n-1} 's contienen a alguna pareja de estas tres aristas y esto es una contradicción.

Finalmente, demostraremos la cota superior $f(Q_n, Q_{n-1}) \leq n2^{n-1} - 4$ para $3 \leq n \leq 5$, usando contradicción de nuevo. Supongamos que existe una coloración libre con $n2^{n-1} - 3$ colores. Al tener sólo $n2^{n-1} - 3$ colores, por el principio de las casillas, se dan los siguientes tres casos:

Caso 1. Hay tres clases cromáticas con dos aristas cada una. Como dos aristas del mismo color están en a lo más $n-2$ Q_{n-1} 's, entonces hay a lo más $3(n-2) = 3n-6$ Q_{n-1} 's que contienen a alguna de estas parejas. Pero $3n-6 < 2n$ para $3 \leq n \leq 5$ y esto es una

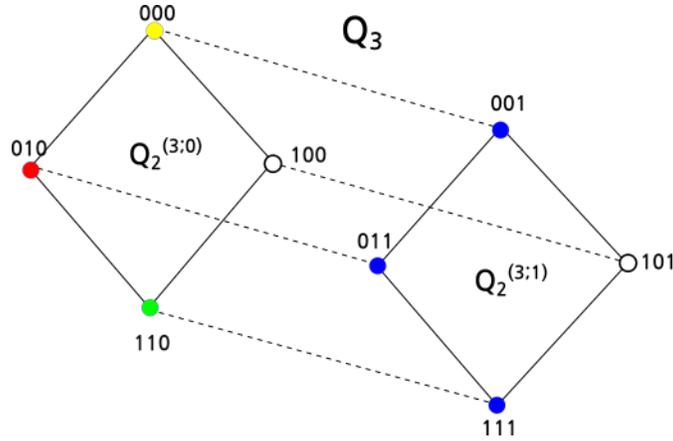


Figura 4.3: Coloración libre de Q_2 heterocromático.

contradicción.

Caso 2. Hay una clase cromática con tres aristas y otra clase cromática con dos aristas. Hay a lo más $(n-2) + \frac{3(n-2)}{2} = \frac{5n}{2} - 5$ Q_{n-1} 's que contienen a alguna pareja monocromática de aristas de alguna de estas clases monocromáticas. Pero $\frac{5n}{2} - 5 < 2n$ para $3 \leq n \leq 5$ y esto es una contradicción.

Caso 3. Hay una clase cromática con cuatro aristas. Como cada arista de esta clase monocromática está en $\binom{n-1}{n-2} = n-1$ Q_{n-1} 's, entonces por doble conteo hay a lo más $\frac{4(n-1)}{2} = 2(n-1)$ Q_{n-1} 's que contienen alguna pareja monocromática de aristas de esta clase. Pero $2(n-1) < 2n$ para $3 \leq n \leq 5$ y esto es una contradicción. \square

4.2. Coloraciones de vértices

Al estudiar el artículo [2] surgieron muchas preguntas y se lograron algunos resultados originales que serán vistos en esta sección. De manera similar a la definición de $f(G, H)$, definimos $\tilde{f}(G, H)$ como el máximo número de colores tal que existe una coloración de los vértices de G , con $\tilde{f}(G, H)$ colores, donde no hay subgráfica isomorfa a H que sea heterocromática. De nuevo, daremos un ejemplo pequeño para que quede claro el concepto.

Proposición 4.2. Sean Q_3 y Q_2 los hipercubos de dimensión 3 y 2 respectivamente, entonces $\tilde{f}(Q_3, Q_2) = 5$.

Demostración. Empezaremos por demostrar que $\tilde{f}(Q_3, Q_2) \geq 5$. Para esto, basta dar una 5-coloración de los vértices de Q_3 que sea libre de Q_2 heterocromáticos. Consideremos el diagrama de Hasse de Q_3 , y sea $c : V(Q_3) \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ una coloración tal que los niveles V_0 y V_2 tienen el mismo color, y los niveles V_1 y V_3 tienen colores distintos en todos los vértices (ver figura 4.3). Como cualquier Q_2 ocupa 3 niveles de vértices, todo Q_2 en Q_3 contiene 2 vértices del mismo color (el color asignado a V_0 y V_2).

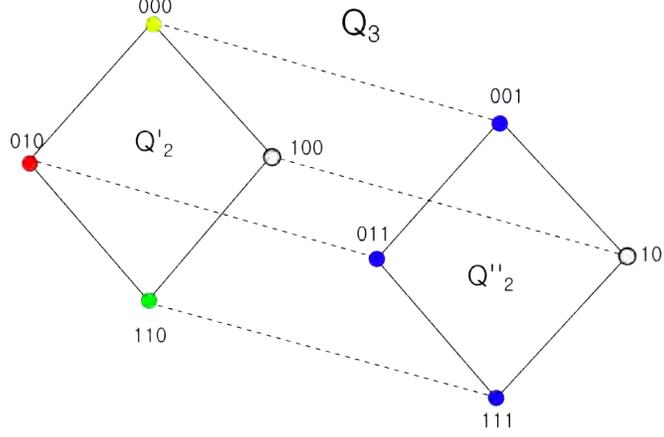


Figura 4.4: Coloración libre de Q_2 heterocromático.

Ahora demostraremos que $\tilde{f}(Q_3, Q_2) \leq 5$. Supongamos que $\tilde{c} : V(Q_3) \rightarrow \{1, \dots, 6\}$ es una coloración libre de Q_2 heterocromáticos. Recordemos que Q_3 se puede descomponer en dos Q_2 's mediante la descomposición vista en la Sección 3.2. Sea $V(Q_3) = V(Q_2^{(3;0)}) \cup V(Q_2^{(3;1)})$ una descomposición de los vértices de Q_3 , donde $V(Q_2^{(3;0)}) = \{000, 100, 010, 110\}$ genera a $Q_2^{(3;0)}$ y $V(Q_2^{(3;1)}) = \{001, 101, 011, 111\}$ genera a $Q_2^{(3;1)}$. Observemos que $Q_2^{(3;0)}$ y $Q_2^{(3;1)}$ admiten exactamente tres colores distintos cada uno, ya que si alguno tuviera cuatro colores distintos, este sería heterocromático y tendríamos una contradicción. Observemos también que hay al menos dos Q_1 's (aristas) heterocromáticos en $Q_2^{(3;0)}$ y cada uno de estos forma un Q_2 con dos vértices de $Q_2^{(3;1)}$, los cuales deben ser del mismo color para evitar un Q_2 heterocromático. Pero entonces $Q_2^{(3;1)}$ admitiría a lo más dos colores, y esto es una contradicción ya que $Q_2^{(3;1)}$ debe admitir exactamente tres colores distintos (ver figura 4.4). \square

Expondremos una cota inferior para $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ inspirada en las ideas del artículo [2], pero antes necesitamos una sencilla definición que resultará familiar para el lector.

Definición 4.3. Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, definimos $\tilde{L}_n(i, k-1)$ como la unión de todos los niveles de vértices V_t , del diagrama de Hasse de Q_n , tales que $t \equiv i \pmod{k-1}$. Es decir,

$$\tilde{L}_n(i, k-1) = V_i \cup V_{i+(k-1)} \cup V_{i+2(k-1)} \cup \dots \cup V_{i+\lfloor \frac{n+1-i}{k-1} \rfloor (k-1)}.$$

Teorema 4.4. Sean n y k enteros positivos tales que $2 \leq k < n$. Entonces

$$2^n - \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k).$$

Demostración. Consideremos una coloración de $V(Q_n)$ que asigne $k-1$ colores distintos a los vértices de cada nivel de $\tilde{L}_n(i, k-1)$ y colores distintos a cada vértice fuera de $\tilde{L}_n(i, k-1)$.

Observemos que en cada nivel de vértices en $\tilde{L}_n(i, k-1)$ con esta coloración, podemos tomar un conjunto de $k-1$ vértices fijos de colores distintos. Llamaremos a los vértices fuera de este conjunto, en ese nivel, *vértices restantes*. Sea *el número de vértices restantes de un* $\tilde{L}_n(i, k-1)$ la suma de los vértices restantes en cada nivel de $\tilde{L}_n(i, k-1)$.

Para saber cual es la cantidad de colores utilizados en esta coloración, tomaremos la diferencia del total de los vértices de Q_n y el número r_i de vértices restantes de $\tilde{L}_n(i, k-1)$. Sea $i_m \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $|\tilde{L}_n(i_m, k-1)|$ es mínimo.

De esta manera, obtenemos la siguiente cota:

$$2^n - r_{i_m} \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k)$$

Para poder dar una cota inferior de $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ en términos de n y k , haremos uso del promedio de vértices restantes sobre todos los $\tilde{L}_n(i, k-1)$'s. Este promedio esta dado por:

$$\frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1},$$

ya que $2^n - (k-1)(n-1) - 2$ es la suma de los vértices restantes para todo i en $\tilde{L}_n(i, k-1)$.

De lo anterior, concluimos que:

$$2^n - \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \leq 2^n - \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor \leq 2^n - r_{i_m} \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k),$$

y entonces obtenemos la cota inferior buscada:

$$2^n - \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k). \quad \square$$

Parte del trabajo original que realizamos, fue dar una mejor cota inferior para $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$, proponiendo una coloración de $V(Q_n)$ libre de Q_k 's heterocromáticos más adecuada. Dicha coloración será explicada a detalle después de la siguiente definición.

Definición 4.4. Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, definimos $\tilde{L}_n(i, k)$ como la unión de todos los niveles de vértices V_t , del diagrama de Hasse de Q_n , tales que $t \equiv i \pmod{k}$. Es decir, $\tilde{L}_n(i, k) = V_i \cup V_{i+(k)} \cup V_{i+2(k)} \cup \dots \cup V_{i+\lfloor \frac{n+1-i}{k} \rfloor(k)}$.

La mejor cota inferior general que encontramos para $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ es la siguiente:

Teorema 4.5. Sean n y k enteros positivos tales que $2 \leq k < n$. Entonces,

$$2^n - \left\lfloor \frac{2^n}{k} \right\rfloor + 1 \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k).$$

Demostración. Sea $i_m \in \{1, \dots, k\}$ tal que $|\tilde{L}_n(i_m, k)|$ es mínimo. Consideremos una coloración de $V(Q_n)$ que asigne un sólo color a los vértices de cada nivel de $\tilde{L}_n(i_m, k)$ y colores distintos a cada vértice fuera de $\tilde{L}_n(i_m, k)$. De tal manera que obtenemos la siguiente cota:

	$2^n - \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k)$						
k, n	3	4	5	6	7	8	9
2	4	5	6	7	8	9	10
3	*	12	21	38	71	136	265
4	*	*	26	49	92	179	350
5	*	*	*	54	103	200	393
6	*	*	*	*	109	213	418
7	*	*	*	*	*	221	435
8	*	*	*	*	*	*	448

Cuadro 4.1: Tabla con los valores de la cota inferior del Teorema 4.4.

$$2^n - |\tilde{L}_n(i_m, k)| + 1 \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k)$$

Pero para poder dar una cota inferior en términos de n y k , haremos uso del promedio de vértices en $\tilde{L}_n(i, k)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Este promedio esta dado por $\frac{2^n}{k}$ ya que cada $\tilde{L}_n(i, k)$ representa en promedio una k -ésima parte de los 2^n vértices. Y como $\lfloor \frac{2^n}{k} \rfloor \geq |\tilde{L}_n(i_m, k)|$, obtenemos la cota buscada.

$$2^n - \left\lfloor \frac{2^n}{k} \right\rfloor + 1 \leq 2^n - |\tilde{L}_n(i_m, k)| + 1 \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k). \quad \square$$

En los cuadros 4.1 y 4.2 mostramos los valores correspondientes a las cotas de los Teoremas 4.4 y 4.5, para $3 \leq n \leq 9$ y todo $k < n$. Podemos observar que, para dichos valores, la cota del Teorema 4.5 es mejor que la cota del Teorema 4.4 excepto en los casos $(n, k) = (5, 4)$, $(n, k) = (6, 5)$ y $(n, k) = (7, 6)$. A continuación probaremos que la cota del Teorema 4.5 es mejor que la cota del Teorema 4.4 para toda n y k con $n \geq 10$ y $k < n$.

Proposición 4.3. *Sea $n \geq 10$ y $2 \leq k \leq n$, entonces $2^n - \lfloor \frac{2^n}{k} \rfloor + 1 \geq 2^n - \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor$.*

Demostración. Empezamos por definir $d := 2^n - \lfloor \frac{2^n}{k} \rfloor + 1 - \left(2^n - \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor \right)$.

La proposición es equivalente a demostrar que d es no negativo. Observemos que:

$$d = \left\lfloor \frac{2^n - (k-1)(n-1) - 2}{k-1} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{2^n}{k} \right\rfloor \quad (4.11)$$

$$= \left\lfloor \frac{2^n - 2}{k-1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^n}{k} \right\rfloor - (n-2). \quad (4.12)$$

$2^n - \lfloor \frac{2^n}{k} \rfloor + 1 \leq \tilde{f}(Q_n, Q_k)$							
k, n	3	4	5	6	7	8	9
2	5	9	17	33	65	129	257
3	*	12	23	44	87	172	343
4	*	*	25	49	97	193	385
5	*	*	*	53	104	206	411
6	*	*	*	*	108	215	428
7	*	*	*	*	*	221	440
8	*	*	*	*	*	*	449

Cuadro 4.2: Tabla con los valores de la cota inferior del Teorema 4.5.

Recordemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se da que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad (4.13)$$

Por (4.12) y (4.13), obtenemos que:

$$d > \frac{2^n - 2}{k - 1} - 1 - \left\lfloor \frac{2^n}{k} \right\rfloor - (n - 2) \geq \frac{2^n - 2}{k - 1} - \frac{2^n}{k} - (n - 1) \quad (4.14)$$

Ahora definimos la función $\psi : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\psi(x) = \frac{2^n - 2}{x - 1} - \frac{2^n}{x}$ y es sencillo ver que es decreciente. Entonces la desigualdad (4.14) implica que:

$$d > \frac{2^n - 2}{k - 1} - \frac{2^n}{k} - (n - 1) \quad (4.15)$$

$$\geq \frac{2^n - 2}{n - 1} - \frac{2^n}{n} - (n - 1) \quad (4.16)$$

$$= \frac{2^n - 2n - n(n - 1)^2}{n(n - 1)} \quad (4.17)$$

Por la desigualdad (4.17), para ver que $d \geq 0$, basta ver que:

$$2^n - 2n - n(n - 1)^2 \geq 0 \quad (4.18)$$

Como $n > \frac{3}{2}$,

$$n^3 > n(n - 1)^2 + 2n \quad (4.19)$$

De la desigualdad anterior obtenemos que:

$$2^n - 2n - n(n-1)^2 > 2^n - n^3 \quad (4.20)$$

Como $n \geq 10$, es fácil demostrar por inducción que

$$2^n \geq n^3 \quad (4.21)$$

De las desigualdades (4.20) y (4.21), se da la desigualdad (4.18), y así se concluye la prueba. \square

Ahora enunciaremos el resultado principal del trabajo de tesis, el cual consiste en dar una cota superior general del número $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ empleando las técnicas usadas en el artículo [2], donde se da una cota superior de $f(Q_n, Q_k)$ correspondiente a coloraciones en aristas.

Teorema 4.6. *Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq n$. Entonces*

$$\tilde{f}(Q_n, Q_k) \leq 2^n \left(1 - \frac{n-k}{n2^{k-1}}\right).$$

Demostración. Sea $c : V(Q_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, \tilde{f}\}$ una coloración Q_k -libre. Consideremos la partición en clases cromáticas inducida por c :

$$V(Q_n) = V_1 \cup \dots \cup V_{\tilde{f}} \quad (4.22)$$

donde, por definición, $V_i = c^{-1}(i)$ es un conjunto no vacío de vértices para todo i , y suponemos sin pérdida de generalidad que

$$|V_1| \geq |V_2| \geq \dots \geq |V_{\tilde{f}}| \geq 1.$$

A partir de (4.22) obtenemos

$$2^n = |V(Q_n)| = \sum_{i=1}^{\tilde{f}} |V_i|,$$

de donde, substrayendo \tilde{f} unidades de ambos lados, concluimos que

$$2^n - \tilde{f} = \sum_{i=1}^{\tilde{f}} (|V_i| - 1). \quad (4.23)$$

Notemos que cada sumando en (4.23) satisface $|V_i| - 1 \geq 0$. Además, $|V_i| - 1 = 0$ si y sólo si $|V_i| = 1$. Por lo tanto, podemos reescribir la ecuación (4.23) como

$$2^n - \tilde{f} = \sum_{i=1}^p (|V_i| - 1) \quad (4.24)$$

donde p es tal que $|V_i| \geq 2$ si y sólo si $i \leq p$.

Para facilitar la lectura de esta demostración, sea $m_i = |V_i| - 1$ donde $m_i \geq 1$. Entonces

$$2^n - \tilde{f} = \sum_{i=1}^p (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^p m_i, \quad (4.25)$$

Más aún, la ecuación (4.25) se puede reescribir como

$$2^n - \tilde{f} + p = \sum_{i=1}^p |V_i|. \quad (4.26)$$

Definimos q_i como el número de Q_k 's con al menos 2 vértices de color i . Como c es Q_k -libre, obtenemos que la suma de todos los q_i 's es al menos el total de los Q_k 's en Q_n , es decir,

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} \leq \sum_{i=1}^{\tilde{f}} q_i,$$

y particularmente,

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} \leq \sum_{i=1}^p q_i \quad (4.27)$$

pues $q_i = 0$ si $|V_i| = 1$.

Ahora acotaremos el valor de q_i , en función de $|V_i|$, de dos maneras distintas. Por el lema 3.1, es fácil deducir que cada pareja de vértices de una clase cromática V_i ocurre en a lo más $\binom{n-1}{k-1}$ de los Q_k 's, de tal manera que

$$q_i \leq \binom{|V_i|}{2} \binom{n-1}{k-1}. \quad (4.28)$$

Por otra parte, cada vértice está en $\binom{n}{k}$ distintos Q_k 's en Q_n ya que de cada vértice salen n aristas de las cuales se pueden escoger k para formar un Q_k . Y al contar sobre cada vértice v de color i el número de Q_k 's con al menos dos vértices de color i (uno de ellos siendo v), notamos que estos Q_k 's se cuentan al menos el doble. Por lo tanto,

$$q_i \leq \frac{|V_i|}{2} \binom{n}{k}. \quad (4.29)$$

En la siguiente afirmación determinaremos en qué casos la cota (4.28) es mejor que la cota (4.29).

Afirmación 4.3. $\binom{|V_i|}{2} \binom{n-1}{k-1} < \frac{|V_i|}{2} \binom{n}{k}$ si y sólo si $m_i < \frac{n}{k}$.

La afirmación se justifica con las siguientes equivalencias:

$$|V_i| - 1 < \frac{n}{k}$$

si y sólo si

$$\frac{|V_i|}{2}(|V_i| - 1) \binom{n-1}{k-1} < \frac{|V_i|}{2} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

si y sólo si

$$\frac{|V_i|(|V_i| - 1)}{2} \binom{n-1}{k-1} < \frac{|V_i|}{2} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si y sólo si

$$\binom{|V_i|}{2} \binom{n-1}{k-1} < \frac{|V_i|}{2} \binom{n}{k}.$$

Regresemos ahora a la ecuación (4.25), y notemos que esta nos da una partición del entero $2^n - \tilde{f}$ en p sumandos m_1, \dots, m_p la cual fue inducida por una coloración Q_k -libre, lo que implica que la suma de sus q_i 's, denotada por $\sum q_i$, asociada a esta partición, cumple la desigualdad (4.27). Consideremos todas las posibles particiones del entero $2^n - \tilde{f}$ que son inducidas por coloraciones Q_k -libres, es decir, que cumplen (4.27). Notemos que no todas estas particiones usan el mismo número de sumandos.

Sea $s = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$. Para una partición con sumandos m_i y m_j donde $m_i < s$ y $m_i \leq m_j$, observemos que usando las desigualdades (4.28) y (4.29), obtenemos lo siguiente:

$$q_i + q_j \leq \binom{|V_i|}{2} \binom{n-1}{k-1} + \frac{|V_j|}{2} \binom{n}{k} \leq \frac{|V_i|}{2} \binom{n}{k} + \frac{|V_j|}{2} \binom{n}{k} \leq \frac{|V_i| + |V_j|}{2} \binom{n}{k}.$$

De tal manera que $m_i + m_j$ se puede tratar como un solo sumando al hacer la suma total de los q_i 's y q_j 's, y se sigue cumpliendo la desigualdad (4.29). Realizaremos este procedimiento hasta obtener una nueva partición del entero $2^n - \tilde{f}$ de modo que todos los sumandos m_i cumplen $m_i = |V_i| - 1 \geq s$. Por lo explicado anteriormente, podemos suponer que desde el principio comenzamos con una coloración Q_k -libre tal que, para toda $i \in \{1, \dots, p\}$, se satisface $m_i = |V_i| - 1 \geq s$. Bajo tal hipótesis, se puede garantizar que el número de sumandos, p , no puede ser muy grande.

Afirmación 4.4. Si $m_i = |V_i| - 1 \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 = s$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, entonces

$$p \leq \frac{2^n - \tilde{f}}{s}. \quad (4.30)$$

La afirmación se obtiene sustituyendo en (4.25) la hipótesis, $m_i \geq s$, y despejando p . Utilizando (4.26), (4.27) y (4.29) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} 2^{n-k} &\leq \sum_{i=1}^p q_i \leq \sum_{i=1}^p \frac{|V_i|}{2} \binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{2} \binom{n}{k} \sum_{i=1}^p |V_i| \\
&= \frac{1}{2} \binom{n}{k} (2^n - \tilde{f} + p). \tag{4.31}
\end{aligned}$$

De donde podemos obtener, utilizando (4.30), una cota superior para \tilde{f} en función de n , k y r . De (4.30), llegamos a que:

$$2^n - \tilde{f} + p \leq (2^n - \tilde{f}) + \frac{2^n - \tilde{f}}{\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1} = (2^n - \tilde{f}) \left(1 + \frac{1}{\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1} \right).$$

Por lo tanto, la desigualdad (4.31) se convierte en:

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} \leq \frac{1}{2} \binom{n}{k} (2^n - \tilde{f}) \left(1 + \frac{1}{s} \right).$$

Ahora basta despejar \tilde{f} para obtener la cota superior buscada. A continuación se muestra el procedimiento.

$$\frac{2 \cdot 2^{n-k}}{\left(1 + \frac{1}{s}\right)} \leq 2^n - \tilde{f}$$

si y sólo si

$$\tilde{f} \leq 2^n - \frac{2^{n-k+1}}{\left(1 + \frac{1}{s}\right)}$$

si y sólo si

$$\tilde{f} \leq 2^n - \frac{2^{n-k+1}}{\left(1 + \frac{1}{s}\right)}$$

si y sólo si

$$\tilde{f} \leq 2^n \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} \left(1 + \frac{1}{s}\right)} \right).$$

Y como $\frac{n}{k} - 1 \leq \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1 = s$, entonces

$$\tilde{f} \leq 2^n \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} \left(1 + \frac{1}{s}\right)} \right) \leq 2^n \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right)} \right)$$

obteniendo así la cota superior de $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ buscada:

$$\tilde{f} \leq 2^n \left(1 - \frac{1}{2^{k-1} \left(1 + \frac{1}{s} \right)} \right) \leq 2^n \left(1 - \frac{n-k}{n2^{k-1}} \right). \quad \square$$

El problema de encontrar el valor exacto de $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ resulta ser un problema muy difícil. Sin embargo a continuación logramos dar el valor exacto de $\tilde{f}(Q_n, Q_{n-1})$.

Teorema 4.7. *Sea Q_n el hipercubo de dimensión $n \geq 3$ y Q_{n-1} el hipercubo de dimensión $n - 1$. Entonces,*

$$\tilde{f}(Q_n, Q_{n-1}) = 2^n - 3.$$

Demostración. Empezamos por demostrar que $2^n - 3 \leq \tilde{f}(Q_n, Q_{n-1})$. Usaremos el diagrama de Hasse con los vértices en orden lexicográfico para facilitar la ejecución de la demostración. En esta demostración diremos que una coloración de $V(Q_n)$ es *libre* cuando hablemos de una coloración libre de Q_{n-1} 's heterocromáticos.

Para los casos donde $n = 3$ y $n = 4$ exhibiremos coloraciones particulares ya que su orden tan pequeño lo amerita. Para $n \geq 5$ exhibiremos una coloración más general. Empezamos por dar una coloración particular para el caso donde $n = 3$. En el diagrama de Hasse de Q_3 , asignaremos el color A a los vértices de V_0 y V_2 . Asignaremos colores distintos a los vértices restantes. Cualquier sub- Q_2 es no heterocromático ya que este debe contener o bien dos vértices de V_2 o bien uno de V_2 y otro de V_0 . Hemos usado $2^n - 4 + 1 = 2^n - 3 = 2^3 - 3$ colores. Para el caso $n = 4$, exhibiremos una coloración con exactamente tres clases cromáticas con dos vértices cada una. En el diagrama de Hasse de Q_4 asignaremos el color A a los vértices 0000 y 0001, el color B a los vértices 0111 y 1111 y colores distintos a los vértices restantes. Observemos que la pareja de vértices de color A está en exactamente tres Q_3 's. Si fijamos la primera, segunda o tercer coordenada de ambos vértices obtenemos estos Q_3 's. De igual manera, la pareja de vértices de color B está en exactamente tres Q_3 's. Fijando la segunda, tercera o cuarta coordenada de ambos vértices. Observemos también que estos 6 Q_3 's son distintos, ya que los primeros 3 contienen al vértice 0000 y los otros tres contienen al vértice 1111. Como Q_4 contiene 8 Q_3 's por la proposición 3.4, aún hay dos Q_3 's que no contienen una pareja monocromática de vértices de color A ni de color B . Y estos dos Q_3 's son $Q'' = \langle 1x_2x_3x_4 \rangle$ y $Q'' = \langle x_1x_2x_30 \rangle$, y es fácil ver que se intersectan en los vértices de la forma $1x_2x_30$. Entonces asignamos el color C a dos de estos vértices, y colores distintos al resto de los vértices. De esta manera, todo sub- Q_3 contiene al menos una pareja monocromática de vértices, y para esta coloración hemos usado $2^n - 6 + 3 = 2^n - 3 = 2^4 - 3$ colores.

Para $n \geq 5$ en el diagrama de Hasse asignamos el color A a los dos últimos vértices de V_1 y el color B a los dos últimos vértices de V_{n-1} . Notemos que hay $\binom{n-2}{n-3}$ Q_{n-1} 's que contienen a ambos vértices de color A y de igual manera, hay $\binom{n-2}{n-3}$ Q_{n-1} 's que contienen a ambos vértices de color B , pero existen aún cuatro Q_{n-1} 's que no contienen a alguna pareja de vértices de color A o B . Estos cuatro Q_{n-1} 's son:

1. $Q' = \langle x_1x_2 \cdots x_{n-1}0 \rangle$,

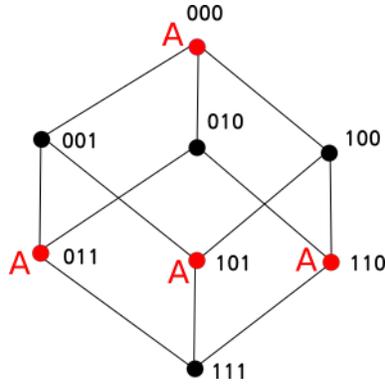


Figura 4.5: Asignación del color A en Q_3 .

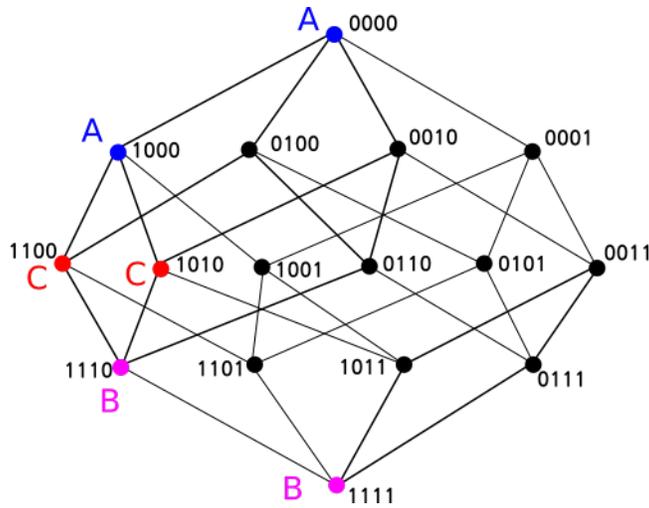


Figura 4.6: Asignación de los colores A, B y C en Q_4 .

2. $Q'' = \langle x_1 x_2 \cdots 0 x_n \rangle$,
3. $Q''' = \langle 1 x_2 \cdots x_n \rangle$,
4. $Q^{iv} = \langle x_1 1 \cdots x_n \rangle$.

Notemos que los vértices de la forma $11x_3x_4 \cdots x_{n-2}00$ están contenidos en estos cuatro Q_{n-1} 's, entonces asignamos el color C a dos de estos vértices, y así garantizamos que todo sub- Q_{n-1} contiene al menos dos vértices del mismo color. Asignamos al resto de los vértices colores distintos para obtener una coloración libre con $2^n - 3$ colores.

Ahora demostraremos que $\tilde{f} \leq 2^n - 3$ para $n \geq 3$. Supongamos que existe una coloración libre con $2^n - 2$ colores. Por el principio de las casillas o bien hay dos clases cromáticas con dos vértices cada una o bien hay una sola clase cromática con tres vértices. En el primer caso, notemos que dos vértices del mismo color están en a lo más $n - 1$ Q_{n-1} 's, entonces hay

a lo más $2(n-1) < 2n$ Q_{n-1} 's que contiene a alguna pareja monocromática de vértices. Y esto es una contradicción, ya que Q_n contiene $2n$ Q_{n-1} 's. En el segundo caso, observemos que un solo vértice está en $\binom{n}{n-1} = n$ Q_{n-1} 's. Contando los Q_{n-1} 's que puedan tener al menos una pareja de vértices de esta clase cromática notamos que por doble conteo hay a lo más $\frac{3n}{2}$ Q_{n-1} 's que contienen a alguna pareja monocromática de vértices. Pero Q_n contiene $2n$ Q_{n-1} 's y $\frac{3n}{2} < 2n$, así que es una contradicción. \square

Aún queda mucho trabajo por hacer para mejorar las cotas de $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$, y encontrar más valores exactos de este número para valores fijos de n y k .

Capítulo 5

Otras coloraciones en el hipercubo

Como se puede constatar en el *survey* de Harary, Hayes y Wu [19] que fue publicado en 1988, y del cual expondremos algunos resultados básicos en la primera sección de este capítulo, el estudio del hipercubo de dimensión n se concentra en la segunda mitad del siglo XX. En este *survey* se presentan resultados sobre distancia, coloraciones, dominación y género del hipercubo, así como propiedades definidas por subgráficas particulares, ciclos hamiltonianos, encajes y problemas de empaquetamiento (mejor conocidos como problemas de “packing”). Sin embargo, la presente tesis se concentra en el estudio de diferentes coloraciones, específicamente en coloraciones de aristas o de vértices en el hipercubo. Por lo tanto, en este capítulo haremos una breve compilación de las distintas coloraciones que se han encontrado en la literatura sobre el hipercubo.

Uno de los parámetros más comunes a estudiar cuando hablamos de coloraciones de una gráfica, es el número cromático. Dada una gráfica G , el *número cromático* de G , $\chi(G)$, se define como el mínimo entero t tal que existe una t -coloración propia de los vértices de G , es decir, cada clase cromática es un conjunto independiente. Como se hace notar en el *survey* [19], determinar el número cromático de Q_n es muy sencillo, siendo este 2. Lo cual se concluye de inmediato si pensamos en el diagrama de Hasse de Q_n y asignamos un color a todos los vértices de V_i donde i es par, y otro color a todos los vértices de V_i donde i es impar.

Existen, sin embargo, otras coloraciones interesantes que se han estudiado en el hipercubo y que expondremos a continuación.

5.1. Coloraciones domáticas

En el artículo [20] de 1977, se introduce un tipo de coloración relacionada con la noción de dominación, que se define como sigue: sea una G una gráfica con V_1 y V_2 subconjuntos arbitrarios de vértices. Decimos que V_1 *domina* a V_2 si para todo $y \in V_2$ existe un $x \in V_1$ adyacente a y . Decimos que V_1 es un *conjunto dominante* de G si V_1 domina a $V(G) \setminus V_1$. Una D -*partición* de G es una partición de $V(G)$ en conjuntos dominantes de G . El *número domático*, $\tau(G)$, es el máximo orden de las D -particiones de G . Pero estas D -particiones

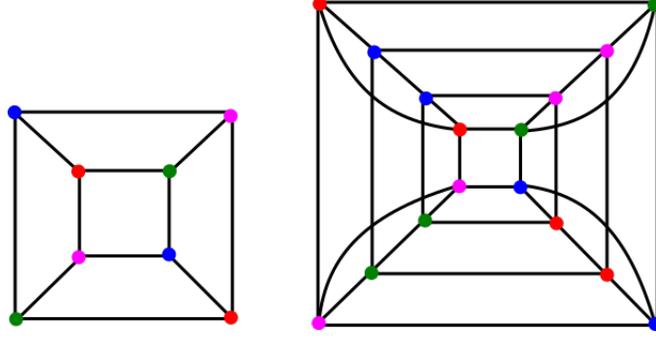


Figura 5.1: Coloraciones domáticas de Q_3 y Q_4 dadas en el *survey* [19].

pueden ser definidas como una coloración, donde una *coloración domática*, satisface que cada vértice coloreado con cierto color es adyacente a vértices coloreados por todos los demás colores, y $\tau(G)$ es el máximo número de colores que se pueden usar. En la figura 5.1 se puede apreciar un ejemplo de coloraciones domáticas de Q_3 y Q_4 . En el año de 1982 Zelinka [21] probó que para todo k entero positivo, se verifica:

$$\tau(Q_{2^k-1}) = \tau(Q_{2^k}) = 2^k.$$

Los números domáticos para cubos de otras dimensiones, hasta donde sabemos, aún no están determinados, y la conjetura más importante en el tema es la siguiente.

Conjetura 5.1 (Zelinka, 1982 [21]). *Si $n + 1$ no es potencia de 2, entonces $\tau(Q_n) = n$.*

5.2. Coloración totalmente multicoloreada

En el artículo [9], el autor Juan José Montellano-Ballesteros trabaja con coloraciones de gráficas donde no se pueden evitar ciertas estructuras. En este trabajo, el autor obtiene un resultado muy interesante sobre el hipercubo. Empezamos con algunas sencillas definiciones empleadas en el trabajo.

Dada una coloración de las aristas de una gráfica G , una subgráfica M de G será llamada *totalmente multicoloreada* si no hay dos aristas de M con el mismo color. Sea $h(G, K_{1,q})$ el mínimo entero tal que toda coloración de las aristas de G con exactamente $h(G, K_{1,q})$ colores produce al menos una copia totalmente multicoloreada de $K_{1,q}$ en G . Cabe observar que los conceptos de subgráfica totalmente multicoloreada y $h(G, K_{1,q})$ corresponden a los conceptos de subgráfica heterocromática y $nh(G, K_{1,q})$ respectivamente, vistos en la Sección 1.3. También es importante mencionar la relación que tiene con el parámetro $f(G, H)$ definido en la Sección 4.1. Recordemos que $f(G, H)$ es el máximo número de colores para el cual existe una coloración H -libre de las aristas de G . Y por lo tanto, $h(G, K_{1,q}) = f(G, K_{1,q}) + 1$. En este trabajo, el autor da una cota superior y algunas aplicaciones de esta cota superior. Sin embargo, lo que nos importa es la aplicación que expone sobre el hipercubo.

Teorema 5.1 (Montellano-Ballesteros, 2006 [9]). *Sean n y q enteros tales que $n > q \geq 2$. Entonces*

$$h(Q_n, K_{1,q}) = 2^{n-1}(q-2) + 2^{q-2} + 1.$$

Este resultado naturalmente nos motiva a proponer el siguiente problema.

Problema 5.1. *Dada una coloración de los vértices de una gráfica G , una subgráfica M de G será llamada totalmente multicolorada por vértices si no hay dos vértices de M con el mismo color. Sea $\tilde{h}(G, K_{1,q})$ el mínimo entero t tal que toda t -coloración de los vértices de G produce un $K_{1,q}$ totalmente multicolorado por vértices. Encontrar $\tilde{h}(Q_n, K_{1,q})$.*

5.3. Coloraciones y distancia de Hamming

En vista de que el número cromático de Q_n es trivialmente 2 para todo $n \geq 1$, se definió una variante a este parámetro, utilizando la distancia de Hamming. En el trabajo *New Bounds on a Hypercube Coloring Problem and Linear Codes* [22], los autores Hung Quang Ngo, Ding-Zhu Du y Ronald L. Graham definen el parámetro $\chi_{\bar{k}}(n)$ que es el mínimo número de colores que se necesitan para que exista una coloración de los vértices del hipercubo de tal manera que cualesquiera dos vértices cuya distancia de Hamming sea a lo más k tengan colores distintos. Este es un problema difícil, sin embargo los autores lograron mejorar las cotas inferiores y superiores ya conocidas y hacen una conexión de este tipo de coloración con códigos lineales. Ellos aportan el siguiente teorema:

Teorema 5.2 (Ngo, Du y Graham, 2002 [22]). *Sea $t = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ y denotamos a $\sum_{i=0}^m \binom{n}{i}$ como $\binom{n}{m}$. Entonces, cuando k es par, tenemos que*

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} + \frac{1}{\lfloor n/(t+1) \rfloor} \binom{n}{t} \left(\frac{n-t}{t+1} - \left\lfloor \frac{n-t}{t+1} \right\rfloor \right) \leq \chi_{\bar{k}}(n) \leq 2^{\lfloor \log_2 \binom{n-1}{k-1} \rfloor + 1}$$

y cuando k es impar, tenemos

$$2\alpha \leq \chi_{\bar{k}}(n) \leq 2^{\lfloor \log_2 \binom{n-2}{k-2} \rfloor + 2}.$$

donde $\alpha = \sum_{i=0}^t \binom{n-1}{i} + \frac{1}{\lfloor (n-1)/(t+1) \rfloor} \binom{n-1}{t} \left(\frac{n-1-t}{t+1} - \left\lfloor \frac{n-1-t}{t+1} \right\rfloor \right)$.

5.4. El número heterocromático de vecindad

El artículo *On a heterochromatic number for hypercubes* [23] del año 2008 de Juan José Montellano-Ballesteros, Víctor Neumann-Lara y Eduardo Rivera-Campo es otro trabajo importante que estudia coloraciones del hipercubo. Este trabajo resulta especialmente interesante para nosotras ya que la coloración que implementaron los autores es en los vértices del hipercubo y no en las aristas como usualmente se estudia. El trabajo empieza con la

definición de número heterocromático, el cual es relacionado con coloraciones anti-Ramsey como observaremos en esta sección.

Dada una hipergráfica no vacía H , el *número heterocromático* de H , $h_c(H)$, es el mínimo entero k tal que toda coloración de los vértices de H con k colores produce una hiperarista de H cuyos vértices tienen todos colores distintos. Para una hipergráfica H , $h_c(H) - 1$ es el máximo número de colores en una coloración de los vértices de H tal que cada hiperarista contiene al menos 2 vértices con el mismo color, es decir, es libre de hiperaristas heterocromáticas. Notemos que esta es la misma noción de los conceptos de teoría anti-Ramsey vista en la Sección 1.3.

En este trabajo, los autores estudiaron el número heterocromático de una clase de hipergráficas obtenidas de la siguiente manera: para una gráfica G sea H_G la hipergráfica con conjunto de vértices $V(H_G) = V(G)$ en donde un conjunto A de vértices forma una hiperarista si y sólo si A es el conjunto de vecinos de algún vértice u de G .

Sea c una coloración de los vértices de una gráfica G . Un conjunto U de vértices de G es *heterocromático* si c asigna diferentes colores a diferentes vértices de U . El *número heterocromático de vecindad* $nh_c(G)$ de una gráfica G no vacía es el mínimo entero l tal que para toda coloración de $V(G)$ con l colores existe un vértice cuya vecindad es heterocromática. Observemos que $nh_c(G) = h_c(H_G)$ para toda gráfica G no vacía.

Los autores demostraron lo siguiente:

Teorema 5.3 (Montellano-Ballesteros, Neumann-Lara, Rivera-Campo, 2008 [23]). *Para todo entero positivo n ,*

$$2^{2^n} - 2^{2^n - n + 1} + 2^{2^{n-1} - n + 1} \leq nh(Q_{2^n}) - 1 \leq 2^{2^n} - 2^{2^n - n},$$

donde Q_{2^n} es el hipercubo de dimensión 2^n .

Al final del trabajo dieron la siguiente conjetura:

Conjetura 5.2 (Montellano-Ballesteros, Neumann-Lara, Rivera-Campo, 2008 [23]). *El valor exacto de $nh(Q_{2^n}) - 1$ es:*

$$2^{2^n} - 2^{2^n - n + 1} + 2^{2^{n-1} - n + 1} = nh(Q_{2^n}) - 1$$

para todo entero $n \geq 1$.

En el trabajo demostraron que la conjetura es cierta si las coloraciones son tales que para cada color α , ningún vértice de Q_{2^n} es adyacente a más de dos vértices con color α .

5.5. Etiquetas en el hipercubo y trayectorias monocromáticas antipodales

Un *etiquetamiento* del hipercubo Q_n es una coloración que asigna el valor 0 o 1 a cada arista. Un etiquetamiento es *antipodal* si aristas antipodales de Q_n reciben valores distintos.

En 2008, Matt Devos publicó en el conocido sitio web “Open Problem Garden” la conjetura de S. Norine titulada “Edge-antipodal colorings of cubes”, que dice lo siguiente:

Conjetura 5.3 (Matt Devos, S. Norine, Open Problem Garden, 2008.). *Si $n \geq 2$ y $\phi : E(Q_n) \rightarrow \{0, 1\}$ es un etiquetamiento antipodal, entonces existe una pareja de vértices antipodales unidos por una trayectoria monocromática.*

Tal conjetura se puede verificar a mano para $n \leq 5$. En 2013, los autores Tomás Feder y Carlos Subi [24] verificaron la Conjetura 5.3 en el caso particular en que el etiquetamiento es *simple*, es decir, que ningún cuadrado (subhipercubo de dimensión 2, Q_2) con vértices ordenados x, y, z, t en Q_n tiene el valor 0 asignado a xy, zt y el valor 1 asignado a yz, tx , aún cuando el etiquetamiento no sea antipodal. La demostración se basa en una nueva propiedad de etiquetamientos simples de Q_n . Los autores exhiben una clase grande de etiquetamientos simples que satisfacen la conjetura. Ellos también proponen una conjetura:

Conjetura 5.4 (Tomás Feder, Carlos Subi, 2013 [24]). *Si $n \geq 2$ y $\phi : E(Q_n) \rightarrow \{0, 1\}$ es un etiquetamiento, entonces existe una pareja de vértices antipodales unidos por una trayectoria que cambia de etiqueta a lo más una vez.*

Ellos verificaron la conjetura para $n \leq 5$.

Capítulo 6

Trabajo futuro

En el Capítulo 4 vimos coloraciones del hipercubo, tanto de vértices como de aristas, libres de subhipercubos heterocromáticos; tales resultados, naturalmente, pertenecen a la teoría anti-Ramsey. En el Capítulo 5 vimos otras coloraciones del hipercubo que se han estudiado, y presentamos diversas conjeturas que se encuentran en la literatura. En este capítulo veremos algunas variaciones interesantes, a saber, coloraciones de suma-cero, y plantearemos también algunas conjeturas y problemas.

6.1. Coloraciones de suma-cero en el hipercubo

Hay una gran cantidad de resultados de coloraciones de suma-cero donde, apartir de una \mathbb{Z}_r -coloración de los vértices o aristas de alguna gráfica, esta produce otra subgráfica H de suma-cero. En el Capítulo 2, estudiamos el teorema de EGZ e hicimos énfasis en la importancia de este resultado ya que ha dado pie a muchos problemas de este estilo. Uno de ellos siendo el teorema de Bialostocki y Dierker (Teorema 2.7) donde se da una variante del teorema de EGZ para estrellas de suma-cero a partir de una coloración de las aristas de una gráfica completa suficientemente grande. En esta sección daremos algunos resultados sencillos y proponemos problemas de tipo suma-cero para el hipercubo.

Proposición 6.1. *Dados n y $k = 2$. Para todo r entero positivo, existe una \mathbb{Z}_r -coloración de los vértices del hipercubo, Q_n , libre de Q_2 de suma-cero.*

Demostración. Exhibiremos una coloración $f : V(Q_n) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ libre de Q_2 de suma-cero. En el diagrama de Hasse de Q_n asignamos el color 1 a todos los niveles de vértices V_i donde $i \equiv 0, 1 \pmod{4}$, y el color 0 en los demás vértices. De esta manera, todo sub- Q_2 contiene exactamente tres vértices con el mismo color y por lo tanto, su suma siempre es $1 \pmod{2}$. \square

Un resultado un poco más general se da a continuación.

Teorema 6.1. *Dados n y $k \leq n$ enteros. Para todo r entero positivo, donde $r \nmid 2^{k-1}$, existe una \mathbb{Z}_r -coloración de los vértices del hipercubo, Q_n , libre de Q_k de suma-cero.*

Demostración. Demostraremos que existe una coloración $f : V(Q_n) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ libre de Q_k de suma-cero para todo $r \nmid 2^{k-1}$ y $k \geq 3$. La coloración es muy sencilla. En el diagrama de Hasse de Q_n , asignamos el color 0 a los niveles V_i donde i es par y el color 1 en los vértices restantes. De manera que cualquier sub- Q_k tendrá esta misma coloración alternante de colores 0 y 1 en sus niveles de vértices. Como la cardinalidad de cada nivel V_i de Q_k con $i \in \{0, \dots, k\}$ es $\binom{k}{i}$ por la proposición 3.3, y $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k$ por la observación (3.1). Usamos la bien conocida propiedad de los binomiales para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1} &= \binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k} = \frac{2^k}{2} \text{ cuando } k \text{ es impar.} \\ \binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} &= \binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k-1} = \frac{2^k}{2} \text{ cuando } k \text{ es par.} \end{aligned}$$

Y entonces los vértices de todo sub- Q_k suman 2^{k-1} , y así la coloración es libre de Q_k de suma-cero para todo r con $r \nmid 2^{k-1}$. \square

Esto nos dice que no hay un teorema tipo EGZ para hipercubos, lo cual no es sorprendente ya que lo mismo ocurre frecuentemente cuando se quiere proponer la versión anti-Ramsey de un problema que originalmente era de tipo Ramsey. Ya vimos en capítulos anteriores que esto no siempre es posible. A continuación mencionamos algunos problemas como parte de un proyecto a futuro.

Problema 6.1. *Dados n y $k \leq n$ enteros. Para todo $r \geq 3$ entero positivo ¿existe una \mathbb{Z}_r -coloración suprayectiva de los vértices/aristas del hipercubo, Q_n , libre de Q_k de suma-cero?*

Problema 6.2. *Dado n y $k \leq n$. ¿Qué densidad requieren las clases cromáticas tal que para todo $r \geq 3$ entero positivo toda \mathbb{Z}_r -coloración de los vértices/aristas del hipercubo, Q_n produzca un Q_k de suma-cero?*

Los problemas de tipo EGZ para el hipercubo son atractivos por las interesantes propiedades que cumple el hipercubo y la poderosa herramienta que nos brinda el teorema de EGZ, sin embargo no son problemas triviales y se planea continuar trabajando en ellos.

6.2. Coloraciones balanceadas en el hipercubo

En la sección anterior estudiamos las coloraciones de suma-cero y propusimos algunos problemas para garantizar o evitar la existencia de estructuras de suma-cero a partir de una \mathbb{Z}_r -coloración. Una alternativa interesante estudiada en el artículo [25] son las $\{-1, 1\}$ -coloraciones balanceadas $f : V(Q_n) \rightarrow \{-1, 1\}$ donde las clases cromáticas del 1 y -1 tienen la misma cardinalidad. La pregunta natural que uno se hace es:

Problema 6.3. *Dados n y $k \leq n$ enteros. ¿Será cierto que toda $\{-1, 1\}$ -coloración balanceada de los vértices/aristas del hipercubo, Q_n , produce un Q_k balanceado?*

Presentamos una definición general de coloración balanceada. Una coloración de los elementos de un conjunto X con k colores, $f : X \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, se llama *balanceada* si $|f^{-1}(1)| = |f^{-1}(2)| = \dots = |f^{-1}(k)|$. En otras palabras, una coloración es balanceada si

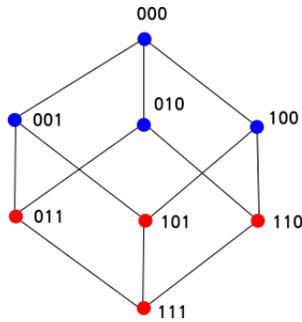


Figura 6.1: Coloración balanceada de Q_3 .

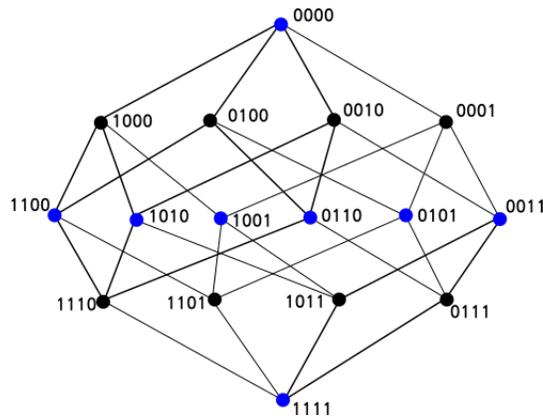


Figura 6.2: Coloración balanceada de Q_4 .

cada color fue asignado al mismo número de elementos. Para que esto sea posible, el número de colores debe dividir a la cardinalidad del conjunto X . En las figuras 6.1 y 6.2 podemos apreciar ejemplos de coloraciones balanceadas con dos colores.

Podemos observar que en la coloración mostrada en la figura 6.1 no hay sub-hipercubos balanceados de dimensión 2, Q_2 . En este caso diremos que la coloración es *balanceada y libre de Q_2 balanceados*. En la figura 6.2 podemos observar que la coloración no es libre de Q_2 balanceados, sin embargo este ejemplo no garantiza la inexistencia de una coloración balanceada de Q_4 libre de Q_3 balanceados. Esta observación nos lleva a la siguiente pregunta:

¿Será que para todo n existe una coloración balanceada de los vértices de Q_n libre de Q_2 balanceados?

Apartir de la coloración en la figura 6.1 podemos dar un pequeño lema que responde la pregunta para algunos casos.

Proposición 6.2. *Sea Q_n el hipercono de dimensión $n \geq 3$ con n impar. Entonces existe una coloración balanceada con dos colores libre de Q_2 balanceados.*

Demostración. En el diagrama de Hasse de Q_n , asignamos el primer color a los vértices de V_i con $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ y el segundo color a los demás vértices. Todo sub- Q_2 o bien es monocromático, o bien tiene dos niveles consecutivos del mismo color en su diagrama de Hasse y por lo tanto la coloración es libre de Q_2 's balanceados. \square

Pero, ¿qué podemos decir sobre los hipercubos de dimensión n par? Esta es una de las preguntas que han quedado como trabajo a futuro.

El objetivo de este trabajo de tesis fue atacar problemas sobre coloraciones del hipercubo que surgieran de la búsqueda por variantes de ellas. A lo largo de esta búsqueda nos encontramos con la bonita variante de las coloraciones balanceadas y algunas otras

Y observamos que, al pensar en coloraciones balanceadas con dos colores, en realidad estamos pensando en coloraciones particulares con el grupo cíclico \mathbb{Z}_2 . Podemos usar el teorema de EGZ para afirmar que para todo k entero positivo, toda coloración balanceada de un conjunto X con dos colores produce un subconjunto S monocromático con k elementos, donde X tiene cardinalidad $2k$. Esta sencilla observación nos motiva a darle estructura a los conjuntos X y S y así hacer el problema más interesante. Ahora vuelven a surgir otras preguntas:

Sea Q_n el hipercubo de dimensión n . ¿Cuántos colores r serán necesarios para que exista una coloración de Q_n balanceada con r colores tal que produzca un sub-hipercubo Q_k monocromático?

Sea Q_n el hipercubo de dimensión n . ¿Cuántos colores r serán necesarios para que exista una coloración de Q_n balanceada con \mathbb{Z}_r tal que produzca un sub-hipercubo Q_k de suma-cero?

Una de las variaciones más interesantes de este tipo de problemas es variando las densidades de las clases cromáticas. Por ejemplo, pedir que un tercio del conjunto X obtenga el primer color y el resto el segundo color. Hemos notado que al variar las densidades se pueden obtener resultados que de forma balanceada no son tan fáciles de obtener. Damos las últimas preguntas con respecto a esta última variación.

¿Para qué valores de r y t sucede que toda 2-coloración $f : V(Q_n) \rightarrow \{A, B\}$ donde $|f^{-1}(A)| = \frac{2^n}{r}$ y $|f^{-1}(B)| = \frac{2^n}{t}$ con $\frac{1}{r} + \frac{1}{t} = 1$ produce un Q_k balanceado/monocromático?

El hipercubo de dimensión n admite coloraciones muy interesantes de las que surge mucho trabajo a futuro. Las bonitas propiedades de Q_n nos brindan muchas herramientas para atacar estos problemas y seguir trabajando.

6.3. Conclusiones

La teoría de las coloraciones de tipo-Ramsey, anti-Ramsey, y de suma-cero, incluyendo balanceadas, etc, es muy rica y llena de problemas abiertos y preguntas que surgen de forma natural. Aunque los problemas parezcan sencillos, usualmente no lo son. En esta tesis buscamos familiarizarnos con propiedades interesantes del hipercubo y algunas de las coloraciones que más se han estudiado para plantear un proyecto de investigación que se pueda llevar a cabo en el futuro.

Definimos un nuevo parámetro $\tilde{f}(Q_n, Q_k)$ inspirado en el artículo [2] donde logramos dar una cota inferior y superior. Así como el valor exacto para casos particulares. Se sigue trabajando con estas coloraciones de los vértices del hipercubo donde no hay aún ningún trabajo aparte del nuestro.

Bibliografía

- [1] A. Bialostocki and P. Dierker, “On the Erdős-Ginzburg-Ziv theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings.,” *Discrete Mathematics*, vol. 110, no. 1-3, pp. 1–8, 1992.
- [2] M. Axenovich, H. Harborth, A. Kemnitz, M. Möller, and I. Schiermeyer, “Rainbows in the hypercube,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 23, no. 2, pp. 123–133, 2007.
- [3] B. M. Landman and A. Robertson, *Ramsey theory on the integers*. American mathematical society Providence, RI, 2004.
- [4] P. Erdős, M. Simonovits, and V. Sós, “Anti-ramsey theorems, infinite and finite sets (colloq., keszthely, 1973; dedicated to p. erdos on his 60th birthday), vol ii, 633–643,” in *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, vol. 10.
- [5] P. Erdős and M. Simonovits, “A limit theorem in graph theory,” in *Studia Sci. Math. Hung.*, Citeseer, 1965.
- [6] S. Fujita, C. Magnant, and K. Ozeki, “Rainbow generalizations of Ramsey theory: a survey,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 26, no. 1, pp. 1–30, 2010.
- [7] J. J. Montellano-Ballesteros and V. Neumann-Lara, “An anti-Ramsey theorem on cycles,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 21, no. 3, pp. 343–354, 2005.
- [8] T. Jiang, “Edge-colorings with no large polychromatic stars,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 18, no. 2, pp. 303–308, 2002.
- [9] J. J. Montellano-Ballesteros, “On totally multicolored stars,” *Journal of Graph Theory*, vol. 51, no. 3, pp. 225–243, 2006.
- [10] T. Jiang and D. B. West, “Edge-colorings of complete graphs that avoid polychromatic trees,” *Discrete mathematics*, vol. 274, no. 1, pp. 137–145, 2004.
- [11] H. Davenport, “On the addition of residue classes,” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 1, no. 1, pp. 30–32, 1935.
- [12] P. Erdos, A. Ginzburg, and A. Ziv, “Theorem in the additive number theory,” *Bull. Res. Council Israel F*, vol. 10, pp. 41–43, 1961.

- [13] Y. Caro, “On zero-sum ramsey numbers—stars,” *Discrete Mathematics*, vol. 104, no. 1, pp. 1–6, 1992.
- [14] Y. Caro, “Zero-sum problems—a survey,” *Discrete Mathematics*, vol. 152, no. 1, pp. 93–113, 1996.
- [15] F. Harary and F. Harary, *Graph theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [16] C. Godsil and G. F. Royle, *Algebraic graph theory*, vol. 207. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] G. Chartrand, *Introduction to graph theory*. Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- [18] J.-P. Bode, D. Grimm, and A. Kemnitz, “Hypercube-anti-Ramsey numbers of $Q(5)$,” *Ars Combinatoria*, vol. 110, pp. 105–111, 2013.
- [19] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, “A survey of the theory of hypercube graphs,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 15, no. 4, pp. 277–289, 1988.
- [20] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, “Towards a theory of domination in graphs,” *Networks*, vol. 7, no. 3, pp. 247–261, 1977.
- [21] B. Zelinka, “Domatic numbers of cube graphs,” *Mathematica Slovaca*, vol. 32, no. 2, pp. 117–119, 1982.
- [22] H. Q. Ngo, D.-Z. Du, and R. L. Graham, “New bounds on a hypercube coloring problem,” *Information Processing Letters*, vol. 84, no. 5, pp. 265–269, 2002.
- [23] J. J. Montellano-Ballesteros, V. Neumann-Lara, and E. Rivera-Campo, “On a heterochromatic number for hypercubes,” *Discrete Mathematics*, vol. 308, no. 16, pp. 3441–3448, 2008.
- [24] T. Feder and C. Subi, “On hypercube labellings and antipodal monochromatic paths,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 161, no. 10, pp. 1421–1426, 2013.
- [25] Y. Caro, A. Hansberg, and A. Montejano, “Zero-sum subsequences in bounded-sum -1 , 1 -sequences.” arXiv preprint arXiv:1612.06523.