



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

EL NÚMERO CROMÁTICO FRACCIONAL DE LAS HIPERGRÁFICAS DE  
KNESER VISTO A TRAVÉS DE LAS HIPERGRÁFICAS EXTREMALES.

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
M. C. JUAN CARLOS DÍAZ PATIÑO

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT  
(Instituto de Matemáticas, UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DRA. DÉBORAH OLIVEROS BRANIFF  
(Instituto de Matemáticas, UNAM)

DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA  
(Facultad de Ciencias, UNAM)

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO  
2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

El número cromático fraccional de las hipergráficas de  
Kneser visto a través de las hipergráficas extremales.

Juan Carlos Díaz Patiño

# Introducción

Esta tesis es la culminación de un proyecto de vida que me planteé hace cerca de 17 años. Mi gusto por las matemáticas surgió en la secundaria cuando descubrí que era una materia en la que me iba bien a diferencia de las demás. Afortunadamente en la preparatoria tuve la fortuna de tener maestros que fomentaran mi gusto por las matemáticas y me motivaran para entrar a la Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas de la UMSNH. Desde los primeros años de la carrera me encontré con ciertos resultados que brillan por su elegancia y sencillez, algunos ejemplos clásicos son la demostración de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$ , o el argumento diagonal de Cantor para demostrar que el conjunto de los números reales es no-numerable. Esto me generó un gusto por algunas áreas de las matemáticas como lo son las Matemáticas Discretas, la Topología y la Geometría. Esta fue la principal razón de escoger como tutor de doctorado al Dr. Luis Montejano pues una amiga de la maestría me comentó que al Dr. Montejano también le interesaban mucho estos temas; yo no lo conocía pero después de asistir a una de sus conferencias en el Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana me llamo mucho la atención su pasión por las matemáticas y la increíble habilidad que tiene para contagiarnos. Así que este fue el principio del trabajo que realizamos los últimos años buscando un resultado original. Descubrí las enormes dificultades que implican generar conocimiento, que en caso de las matemáticas se refiere a crear/descubrir teoremas pero al mismo tiempo me divertí en el proceso de leer los artículos más importantes de nuestra área de investigación y emocionarme con la parte creativa que implica buscar un problema nuevo.

El trabajo de esta tesis comenzó con la lectura del artículo de Lovász [Lov78] que brilla por cómo relacionó la topología y la teoría de gráficas. Después continuó con el estudio de problemas extremales vinculados a la programación lineal hasta llegar a nuestro problema principal: el número cromático fraccional de las gráficas de Kneser.

Una coloración fraccional es una relajación del problema de coloraciones en gráficas. Es decir, el número cromático de una gráfica es un número entero y el número cromático fraccional es un número racional que es menor o igual al número cromático tradicional. Las hipergráficas de Kneser se definen como una generalización a la definición de las gráficas de Kneser y a grandes rasgos decimos que dos de sus vértices son adyacentes si sus respectivos conjuntos son ajenos. Las hipergráficas extremales son hipergráficas con el mayor número de aristas y que satisfacen una condición (en particular no contienen a cierta hipergráfica como subhipergráfica).

El primer artículo relacionado con el tema es de L. Lovász [Lov78] donde encuentra el número cromático de las gráficas de Kneser. En los trabajos posteriores se encontró el número cromático de las hipergráficas de Kneser [AFL86], [Sar90]. Los principales pro-

---

blemas extremales relacionados son el teorema de Erdős-Ko-Rado y su respectiva generalización para  $p$ -emparejamientos [EKR61], [Erd65] y la solución parcial a la conjetura de Erdős [Fra13]. Un resultado clásico en la literatura es el de la coloración fraccional de las gráficas de Kneser utilizando el teorema de Erdős-Ko-Rado, pero salvo este caso, no hay más resultados de este tipo en la literatura. Recientemente hubo un renovado interés sobre la conjetura de Erdős (ver [FLM12], [LM14], [HLS12], [FJS14], [FJ14] y [Fra13]) planteada en [Erd65] que a grandes rasgos nos dice cual es el mayor número de aristas que tiene hipergráfica si pedimos que no tenga más de  $r$ -aristas ajenas. Las investigaciones citadas nos dieron la pauta para preguntarnos ¿Cuál es el número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser? Este es el tema principal de la tesis, pero para poder abordarlo necesitamos estudiar diferentes temas antes de plantearlo de manera concreta.

El primer capítulo contiene definiciones y resultados que serán utilizados en toda la tesis. En el segundo capítulo definimos las gráficas de Kneser y damos algunas de sus propiedades más interesantes. En el tercer capítulo hablamos de programación lineal para poder definir coloraciones fraccionales en hipergráficas. El cuarto capítulo es un compendio de varias demostraciones del teorema de Kneser-Lovász poniendo énfasis en que todas estas demostraciones utilizan métodos topológicos. El quinto capítulo contempla el aspecto clásico de la teoría de gráficas extremal y la teoría conjuntos extremal que es la base para definir el problema  $(p, q)$ -extremal y por último, en el capítulo 6 presentamos nuestros resultados y futuros proyectos de investigación.

# Dedicatoria

*Dedicado a mi Papá y Hermanos que me han apoyado durante toda la vida a pesar de lo terco y testarudo que soy.*



# Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi Papá, no tengo palabras para agradecer todo el apoyo que me ha dado durante toda mi vida y este pequeño trabajo se lo dedico principalmente a el. También quiero agradecer a mis hermanos que me han apoyado desde que era niño, siempre fueron mis modelos a seguir y muchas de las decisiones importantes de vida las hice tomando en cuenta sus experiencias.

Pertenezco a una familia pequeña que incluye a mis tías, tíos, primos, primas, sobrinos, etc... y sólo nos vemos cada año en navidad y año nuevo, pero siempre me da mucho gusto saludarlos, me han apoyado y dado cariño mucho desde que era niño, así que se los agradezco enormemente.

Me considero una persona muy afortunada porque tengo muchos buenos amigos, conservo a muchos de mis amigos de la preparatoria, una época difícil en mi vida y que estuvieron para apoyarme y molestarme cuando fuera necesario (y en ocasiones más de la cuenta). También sigo en contacto con muchos de mis compañeros de la licenciatura y con algunos todavía nos juntamos a comer muy seguido. Los amigos y amigas de la maestría y doctorado ahora son mis colegas y acostumbro verlos en congresos y conferencias así que han estado enterados de muchas de mis actividades.

Entrando a la maestría tome la decisión de continuar mis estudios en la UNAM campus Ciudad de México y me hice de muy buenos amigos y amigas a los que trato de visitar cada vez que voy a la ciudad antes conocida como D.F. En el doctorado me mude a la ciudad de Querétaro y también tengo muy buenos amigos y colegas. Y solo me queda recordar a mis amigos de Dharma que son muchos pero que constantemente los veo, asisto a retiros con ellos y tratamos de ser felices cada día.

También debo incluir a mis profesores, pero honestamente también los considero mis amigos así que ya los mencioné en los párrafos anteriores. Más debo añadir que han sido muy pacientes conmigo.

Incluir los nombres de todos me llevaría a cometer el error de omitir a alguno por mi mala memoria pero creo que saben a quienes me refiero porque los veo muy seguido y ahora saben que constantemente pienso en uds.

Sin su apoyo no lo hubiese logrado, me siento profundamente agradecido y en deuda con todos.



# Índice general

<b>1. Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1. Conjuntos. . . . .	1
1.2. Geometría. . . . .	1
1.3. Topología. . . . .	2
1.4. Teoría de Gráficas. . . . .	2
1.5. Emparejamientos. . . . .	6
1.6. Hipergráficas. . . . .	9
<b>2. Gráficas de Kneser</b>	<b>11</b>
2.1. Hipergráficas de Kneser. . . . .	13
2.2. Gráficas de Schrijver. . . . .	15
<b>3. El Número Cromático Fraccional.</b>	<b>17</b>
3.1. Programación Lineal y Entera. . . . .	17
3.2. Coloraciones Fraccionales. . . . .	18
<b>4. Métodos Topológicos.</b>	<b>23</b>
4.1. Demostración de J. Greene . . . . .	24
4.2. Demostración de Dol'nikov . . . . .	24
4.3. Demostración de I. Bárány . . . . .	26
4.4. Demostración de L. Montejano . . . . .	26
<b>5. Teoría Extremal</b>	<b>29</b>
5.1. Teoría de Gráficas Extremales. . . . .	29
5.1.1. Definiciones Básicas. . . . .	29
5.1.2. Resultados clásicos. . . . .	30
5.2. Teoría de Conjuntos extremales. . . . .	35
5.2.1. La Teoría de desplazamiento. . . . .	35
<b>6. Resultados.</b>	<b>43</b>
6.1. El problema $(p, q)$ -extremal . . . . .	43
6.2. El número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser. . . . .	48
6.3. Conclusiones . . . . .	49

# Capítulo 1

## Preliminares.

### 1.1. Conjuntos.

Dado  $X$  un conjunto, la *cardinalidad* del conjunto  $X$  se representa como  $|X|$ . El *conjunto potencia* es el conjunto de todos los subconjuntos de  $X$  y se representa como  $2^X$ . Un conjunto de cardinalidad  $k$  se llama *k-conjunto* (*k-subconjunto*).

Una *familia*  $\mathcal{F}$  en  $X$  es un conjunto de subconjuntos de  $X$ , i.e.  $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ . La familia de todos los  $k$ -subconjuntos de  $X$  se representa como  $\binom{X}{k}$ . Al conjunto de los primeros  $n$  números naturales se le representa como  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Queremos resaltar la diferencia entre  $\binom{n}{k}$  y  $\binom{[n]}{k}$  donde el primero representa el número de combinaciones con  $k$  elementos tomados de un conjunto con  $n$  elementos y el segundo es la familia de los  $k$ -subconjuntos de  $[n]$ .

Una familia  $\mathcal{F}$  se llama *intersectante* si cualquier pareja de conjuntos  $F, F' \in \mathcal{F}$ , tiene un elemento en común, i.e.,  $F \cap F' \neq \emptyset$ . Una familia de conjuntos  $\mathcal{F}$  es *q-ajena* si para cualesquiera  $q$  subconjuntos, la intersección es vacía. Si  $q = 2$ , la definición quiere decir que la familia es ajena por parejas.

Observamos que si  $\mathcal{F}$  es una familia  $q$ -ajena, entonces también es  $i$ -ajena para todo  $i \geq q$ , pero si  $i < q$ ,  $\mathcal{F}$  no es  $i$ -ajena necesariamente.

### 1.2. Geometría.

El símbolo  $\mathbb{R}^d$  representa al espacio Euclideo de dimensión  $d$ . Los elementos de  $\mathbb{R}^d$  se escriben en negritas y se entiende que son vectores renglón; así, escribimos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . El *producto escalar* de dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  es  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{xy}^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_dy_d$ . La *norma* del vector  $\mathbf{x}$  es  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$ .

Un *hiperplano* en  $\mathbb{R}^d$  es un subespacio  $(d-1)$ -dimensional, i.e., un conjunto de la forma  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b\}$  para algún vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$  diferente del vector cero y algún  $b \in \mathbb{R}$ . Un *semiespacio cerrado* es de la forma  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq b\}$  con  $\mathbf{a}$  y  $b$  definidos de la misma manera.

La *bola unitaria de dimensión d*,  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$  se representa como  $B^d$ , mientras que  $S^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  es la *esfera unitaria de dimensión d*.

Un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  es *convexo* si para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ , el segmento de recta que une a  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{y}$  está completamente contenido en  $C$ . El *casco convexo* de un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $X$  y se representa como  $\text{conv}(X)$ . Dado un conjunto  $X$  de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  decimos que el conjunto  $X$  está en *posición general* si cualesquiera  $d + 1$  puntos de  $X$  no pertenecen a un hiperplano.

**Teorema 1.1** (Helly, [Hel23]). *Sean  $C_1, C_2, \dots, C_n$  conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$ ,  $n \geq d + 1$ . Si la intersección de cada  $d + 1$  de estos conjuntos es no vacía, entonces la intersección de todos los  $C_i$  es no vacía.*

### 1.3. Topología.

Si  $\mathbf{x}$  es un punto de  $S^n$ , entonces su *antípoda* es el punto  $-\mathbf{x}$ . Una función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es *antipodal* si  $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in S^n$ .

A continuación enunciamos el Teorema de Borsuk-Ulam con varias equivalencias. Hay varias demostraciones pero la más conocida es la que se ve en los primeros cursos de Topología Algebraica (véase [Mun02] capítulo 57).

**Teorema 1.2.** *Para cada  $n \geq 0$ , los siguientes resultados son verdaderos y equivalentes:*

- a) [Bor33] *Para toda función continua  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existe un punto  $\mathbf{x} \in S^n$  tal que  $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ .*
- b) *Para toda función antipodal  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existe un punto  $\mathbf{x} \in S^n$  que satisface  $f(\mathbf{x}) = 0$ .*
- c) *No hay función antipodal  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ .*
- d) *No hay función continua  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  que sea antipodal en la frontera, i.e. que satisfaga  $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \partial B^n \cong S^{n-1}$ .*
- e) [LS30] *Para toda cubierta  $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$  de la esfera  $S^n$  de  $n + 1$  conjuntos cerrados, hay al menos un conjunto que tiene un par de antípodas.*
- f) *Para cualquier cubierta  $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$  de la esfera  $S^n$  de  $n + 1$  conjuntos abiertos, hay al menos un conjunto que tiene un par de antípodas.*
- g) [Gre02] *Siempre que  $S^n$  esté cubierto por  $n + 1$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  donde cada  $A_i$  es abierto o cerrado, hay al menos un conjunto que tiene un par de antípodas.*

### 1.4. Teoría de Gráficas.

Una *gráfica simple*  $G = (V, E)$  se compone de los conjuntos  $V$  y  $E$  donde  $V$  es un conjunto no vacío y sus elementos son llamados *vértices*, el conjunto  $E$  es una familia de 2-subconjuntos de  $V$  llamados *aristas*.

El número de vértices de una gráfica  $G$  es llamado el *orden* de  $G$  y es representado por  $v(G)$ , el número de aristas es llamado el *tamaño* de  $G$  representado por  $e(G)$ . Cuando queremos hacer énfasis de que  $V$  corresponde al conjunto de vértices de la gráfica  $G$ , escribimos  $V$  como  $V(G)$ , por la misma razón escribimos  $E$  como  $E(G)$ .

Un vértice es *incidente* con una arista  $e$  si  $v \in e$ . La arista  $\{x, y\}$  se escribe como  $xy$  o  $yx$ . Dos vértices  $x, y$  de  $G$  son *adyacentes* o *vecinos* si  $xy$  es una arista de  $G$ . Dos aristas  $e \neq f$  son *adyacentes* si tienen un vértice en común. Un conjunto de vértices (aristas) es *independiente* si cualquier pareja de vértices (aristas) son no adyacentes. El *número de independencia* (por vértices) de  $G$  es la máxima cardinalidad de un conjunto independiente de  $V(G)$  y se representa como  $\alpha(G)$ .

La *gráfica completa* tiene todas las aristas posibles, i.e., es de la forma  $(V, \binom{V}{2})$  y se representa como  $K_n$ ; la gráfica completa  $K_3$  también se llama *triángulo*. La gráfica que tiene  $2p$  vértices y  $p$  aristas independientes se llama  $pK_2$ . La *gráfica complementaria*  $\overline{G}$  de  $G$  es la gráfica con conjunto de vértices  $V(G)$  y el conjunto de aristas está formado por todas las parejas de vértices  $\{x, y\}$  tales que  $xy \notin E(G)$ . La *gráfica vacía* con  $n$  vértices es  $\overline{K_n}$ . Dados dos subconjuntos de vértices ajenos  $X, Y$  y una pareja de vértices  $x \in X$  y  $y \in Y$ , decimos que  $xy$  es una  $X - Y$  arista. El conjunto de todas las  $X - Y$  aristas se representa como  $E(X, Y)$ . Una gráfica  $G$  es *bipartita* si el conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos ajenos no vacíos  $A$  y  $B$ , de manera que las únicas aristas de  $G$  son  $A - B$  aristas, en este caso la pareja  $A, B$  es una *partición* de  $V(G)$ . Una *gráfica completa bipartita*  $K_{n,m}$  tiene como particiones a los conjuntos  $A$  y  $B$  con cardinalidades  $n$  y  $m$  respectivamente y  $E(K_{n,m}) = E(A, B)$  (de manera que  $e(K_{n,m}) = mn$ ). Una *estrella* es cualquier gráfica completa bipartita  $K_{1,n}$  con  $n \geq 1$ .

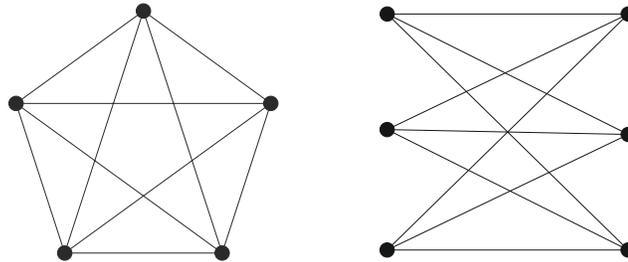


Figura 1.1: La gráfica completa  $K_5$  y la gráfica bipartita  $K_{3,3}$

Una *trayectoria* es una gráfica cuyos vértices pueden ordenarse en una sucesión de manera que dos vértices son adyacentes si, y sólo si son consecutivos en la sucesión. De la misma manera, un *ciclo* de tres o más vértices es una gráfica simple cuyos vértices pueden ordenarse en una sucesión cíclica de manera que dos vértices son adyacentes si, y sólo si son consecutivos en la sucesión. La longitud de una trayectoria o un ciclo es el número de sus aristas. Una trayectoria de longitud  $k$  se denota  $P_k$  y un ciclo de longitud  $k$  se representa como  $C_k$ .

El *grado* de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$  es el número de aristas incidentes con  $v$  y se representa como  $\deg_G(v)$  y si no hay ambigüedad sobre la gráfica a la que pertenece  $v$  solo escribimos  $\deg(v)$ . Un vértice de grado cero se llama *vértice aislado*. Representamos por  $\delta(G)$  y  $\Delta(G)$  a los grados mínimo y máximo de los vértices de  $G$  respectivamente. Si todos los vértices de una gráfica tienen el mismo grado  $k$  entonces decimos que la gráfica es *k-regular*.

Un teorema muy conocido en la teoría de gráficas trata de la suma de los grados de los vértices de una gráfica. Este teorema fue observado por primera vez por el gran

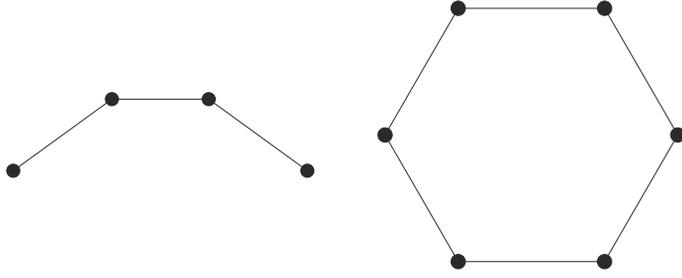


Figura 1.2: La trayectoria  $P_3$  y el ciclo  $C_6$ .

matemático suizo Leonhard Euler en un artículo de 1736 que es considerado el primer artículo escrito de teoría de gráficas. Es citado frecuentemente como el Primer Teorema de Teoría de Gráficas. (Algunos autores han llamado a este teorema como el **Lema de los Saludos**, aunque Euler nunca usó este nombre.)

**Teorema 1.3** (Primer Teorema de Teoría de Gráficas). *Si  $G$  es una gráfica de tamaño  $m$ , entonces*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \quad (1.1)$$

*Demostración.* Cuando sumamos los grados de los vértices de  $G$ , cada arista de  $G$  se cuenta dos veces, una por cada uno de los vértices incidentes. ■

Sean  $G$  y  $F$  dos gráficas. La gráfica  $F$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $V(F) \subseteq V(G)$  y  $E(F) \subseteq E(G)$ . Si  $F$  es subgráfica de  $G$ , entonces escribimos  $F \subseteq G$ . Si  $v \in V(G)$  y  $|V(G)| \geq 2$ , entonces  $G - v$  representa a la subgráfica con conjunto de vértices  $V(G) \setminus \{v\}$  y cuyas aristas son aquellas de  $G$  que no son incidentes con  $v$ ; de la misma manera, si  $U \subseteq V(G)$ , definimos  $G - U$  como la gráfica con conjunto de vértices  $V(G) \setminus U$  y el conjunto de aristas está compuesto por las aristas que son adyacentes a vértices de  $V(G) \setminus U$ ; si  $e \in E(G)$ , entonces  $G - e$  es la subgráfica que tiene como conjunto de vértices a  $V(G)$  y conjunto de aristas  $E(G) \setminus \{e\}$ .

Si  $u$  y  $v$  son vértices no adyacentes de una gráfica  $G$ , entonces  $G + uv$ , es la gráfica con conjunto de vértices  $V(G)$  y conjunto de aristas  $E(G) \cup \{u, v\}$ . Claramente  $G \subseteq G + uv$ .

Si  $F$  y  $G$  son gráficas tales que  $V(F) \cap V(G) = \emptyset$  entonces definimos la *unión de  $F$  y  $G$*  como la gráfica  $G \cup F$  con conjunto de vértices  $V(G) \cup V(F)$  y conjunto de aristas  $E(G) \cup E(F)$ . Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas donde los conjuntos de vértices  $V(G)$  y  $V(H)$  son ajenos; si incluimos todas las aristas de la forma  $\{a, b\}$  con  $a \in V(F)$  y  $b \in V(G)$  obtenemos una nueva gráfica que llamamos el *join* de  $G$  y  $H$  y la representamos como  $G \vee H$ .

Siempre que una subgráfica  $F$  de  $G$  tenga el mismo orden de  $G$ , decimos que  $F$  es una subgráfica *generadora* de  $G$ . Las trayectorias generadoras y los ciclos generadores se llaman *trayectorias Hamiltonianas* y *ciclos Hamiltonianos* respectivamente y una subgráfica  $k$ -regular generadora se llama  *$k$ -factor*.

Si  $U$  es un subconjunto no vacío de vértices de  $G$ , entonces la subgráfica  $\langle U \rangle$  de  $G$  *inducida* por  $U$  es la gráfica que tiene conjunto de vértices  $U$  y cuyas aristas consisten de todas las aristas de  $G$  que tienen vértices en  $U$ .

**Ejemplo 1.4.** Como ejemplos de las definiciones anteriores tenemos a la gráfica  $K_1 \vee \overline{K_{n-1}}$  que es la estrella con  $n$  vértices y la gráfica  $(K_1 \vee \overline{K_{n-1}}) + uv$  es la estrella con una arista extra.

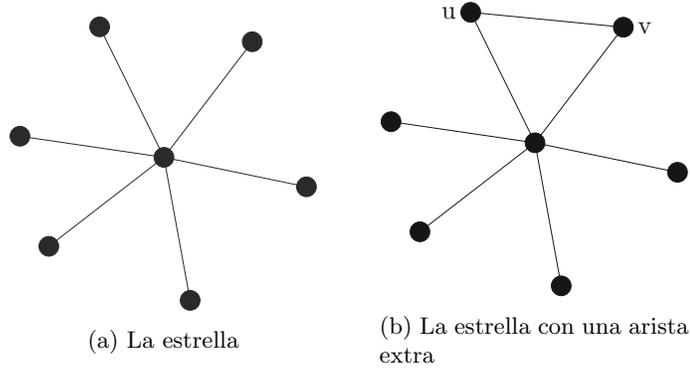


Figura 1.3: Ejemplos de gráficas construidas con el join y con la suma

**Definición 1.1.** Sean  $n, t \in \mathbb{N}$  tales que  $n > t \geq 1$ . Las *gráficas de separación*  $\mathcal{F}_2(n, t)$  se definen como  $\mathcal{F}_2(n, t) = K_t \vee \overline{K_{n-t}}$ . En otras palabras,  $\mathcal{F}_2(n, t)$  es una gráfica con  $n$  vértices que tiene a todas las aristas posibles que pasan por  $t$  vértices fijos. El número de aristas es:  $e(\mathcal{F}_2(n, t)) = \binom{n}{2} - \binom{n-t}{2}$ . Definimos la siguiente función que nos da el número de aristas que tiene la gráfica:

$$\varphi(n, t) = \binom{n}{2} - \binom{n-t}{2} = nt - \binom{t+1}{2}$$

**Ejemplo 1.5.** Ilustramos algunos ejemplos con las figuras 1.4a y 1.4b

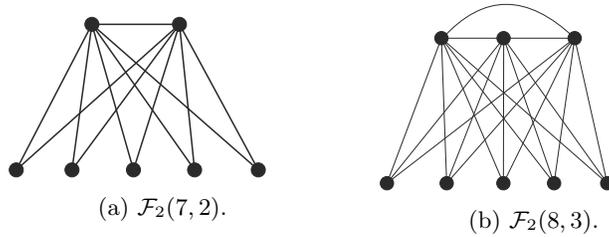


Figura 1.4: Ejemplos de gráficas de separación.

Una *k-coloración propia* de los vértices de una gráfica es una partición del conjunto de vértices en  $k$  clases de manera que no haya aristas cuyos extremos pertenezcan a la misma clase; a cada clase le llamamos *clase cromática*. Una gráfica es *k-coloreable* si tiene una *k-coloración propia*. Una manera equivalente de definir coloración propia es definir una *función cromática*  $c : V(G) \rightarrow [k]$  donde cada imagen inversa de cada número entero  $i \in [k]$  es un conjunto independiente. El *número cromático* de  $G$  es el mínimo número entero  $k$  para el cual  $G$  es *k-coloreable* y se representa como  $\chi(G)$ .

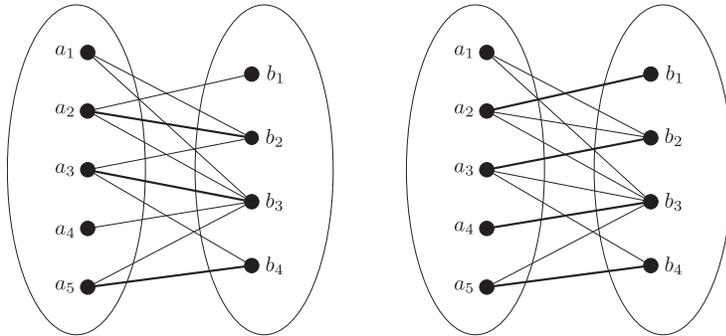
Un *clan* de una gráfica  $G$  es una subgráfica isomorfa a una gráfica completa. El *número de clan* de  $G$  es la cardinalidad del clan máximo de  $G$  y se representa como  $\omega(G)$ .

## 1.5. Emparejamientos.

Un conjunto de aristas independientes también se llama *emparejamiento* y un emparejamiento de cardinalidad máxima se llama *emparejamiento máximo*. El conjunto de aristas  $M$  es un emparejamiento de  $U \subseteq V$  si todo vértice de  $U$  es incidente con una arista de  $M$ . Entonces los vértices de  $U$  se llaman *emparejados* (por  $M$ ); y los vértices que no son incidentes con ninguna arista de  $M$  no están emparejados. El número de aristas en un emparejamiento máximo de  $G$  se llama *el número de independencia por aristas* o *número de emparejamiento* de  $G$  y se representa por  $\nu(G)$ . Si  $M$  es un emparejamiento en una gráfica  $G$  con la propiedad de que todos los vértices de  $G$  están emparejados con alguna arista de  $M$  entonces  $M$  es un *emparejamiento perfecto* de  $G$ , observamos que un 1-factor es equivalente a un emparejamiento perfecto. Un *k-emparejamiento* es un emparejamiento con  $k$  aristas.

Sea  $G$  una gráfica bipartita con partición  $A, B$  y sea  $M$  un emparejamiento en  $G$ . Una trayectoria que empieza en  $A$  en un vértice sin emparejar y que contiene de manera alternada aristas de  $E \setminus M$  y de  $M$ , es una *trayectoria alternante* con respecto a  $M$ . Una trayectoria alternante que termina en un vértice sin emparejar de  $B$  se llama *trayectoria de incremento* porque se puede usar para convertir  $M$  en un emparejamiento más grande.

**Ejemplo 1.6.** En la gráfica  $G$  tenemos el emparejamiento  $M = \{a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4\}$  y la trayectoria alternante  $T = \{a_4, b_3, a_3, b_2, a_2, b_1\}$ ; observamos que es de incremento pues las aristas  $a_4b_3$  y  $a_2b_1$  no pertenecen a  $M$ , por lo tanto podemos intercambiar las aristas del emparejamiento y obtenemos un emparejamiento con más aristas, i.e. el nuevo emparejamiento se obtiene de intercambiar las aristas de  $M \cap E(T)$  por las de  $E(T) \setminus M$ . El nuevo emparejamiento quedaría como  $M' = \{a_2b_1, a_3b_2, a_4b_3, a_5b_4\}$



A continuación enunciamos tres teoremas que hablan de condiciones para encontrar emparejamientos en gráficas.

Sea  $U \subseteq V(G)$ ; decimos que  $U$  es *cubierta* de  $E$  si cada arista de  $G$  es incidente con un vértice de  $U$ .

**Teorema 1.7** (Teorema de König, [Kön31]). *Sea  $G$  una gráfica bipartita. La máxima cardinalidad de un emparejamiento en  $G$  es igual a la mínima cardinalidad de una cubierta de sus aristas.*

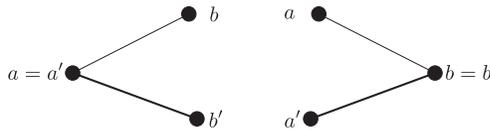
*Demostración.* Sea  $M$  un emparejamiento máximo de  $G$ . Para cada arista  $e = \{x, y\}$  de  $M$  escogemos sólo uno de sus vértices y definimos los conjuntos  $A$  y  $B$  de la siguiente manera:

- El vértice  $x$  está en  $A$  (y  $y \notin A$ ) si existe trayectoria alternante que termina en  $x$ .
- El vértice  $x$  está en  $B$  (y  $y \notin B$ ) si no pasa lo anterior.

Solo hay que observar que dada la arista  $e = \{x, y\}$  de  $M$  y  $x \in A$  entonces también existe trayectoria alternante que termina en  $y$ . Esto pasa porque si la última arista de la trayectoria alternante es  $e$ , entonces es claro que  $T - x$  también es una trayectoria alternante y termina en el vértice  $y$ ; Ahora, si la última arista no es  $e$ , entonces es una arista que no pertenece a  $M$ , por lo tanto  $T + e$  es una trayectoria alternante que termina en  $y$ . Así podemos estar seguros de que solo estamos escogiendo un vértice por cada arista de  $M$  y entonces los conjuntos  $A$  y  $B$  son ajenos.

Mostraremos que el conjunto  $U = A \cup B$  de estos  $|M|$  vértices es cubierta de  $E(G)$ , y como cualquier cubierta de vértices de  $E$  cubre a  $M$ , no puede haber una con menos de  $|M|$  vértices, y de ahí verificamos el teorema.

Sea  $ab \in E$  una arista; demostraremos que  $a$  o  $b$  está en  $U$ . Si  $ab \in M$ , se sigue de la definición de  $U$  que  $a$  o  $b$  pertenecen a  $U$ , por lo tanto uno de los dos vértices cubre a  $e$ , así que suponemos que  $ab \notin M$ . Como  $M$  es un emparejamiento máximo, contiene una arista  $a'b'$  con  $a = a'$  o  $b = b'$ . Podemos suponer que  $a = a'$ , porque si  $a$  está sin emparejar (y  $b = b'$ ), entonces  $ab$  es una trayectoria alternante y así también el vértice de  $a'b' \in M$  elegido por  $U$  fue el vértice  $b' = b$ .



Ahora, si  $a' = a$  no está en  $U$ , entonces  $b' \in U$  y alguna trayectoria alternante  $P$  termina en  $b'$ . Pero también hay otra trayectoria alternante  $P'$  que termina en  $b$ : ya sea  $P' = Pb$  (si  $b \in P$ ) o  $P' := Pb'a'b$ . Por la maximalidad de  $M$ ,  $P'$  no es una trayectoria de incremento. Así que  $b$  tiene que estar emparejado y por lo tanto contenido en  $U$  pues fue elegido por la arista de  $M$  que lo contiene. ■

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica no vacía. La *vecindad de  $v$*  es el conjunto de vértices adyacentes a  $v$  en  $G$  y se representa por  $N_G(v)$  o, si no hay ambigüedad  $N(v)$ . De manera general para  $U \subseteq V$ , la *vecindad de  $U$*  representada por  $N(U)$ , es la unión de todas las vecindades  $N(v)$  con  $v \in U$ .

El siguiente teorema se atribuye a Hall y también se conoce dentro de la literatura como el teorema de los matrimonios. Digamos que estamos en una fiesta de adolescentes y quisiéramos saber cual es una condición necesaria para que cada chico consiga una pareja en la fiesta (o viceversa), después de pensarlo por unos momentos podemos concluir

que es necesario que cualquier conjunto de chicos conozca al menos el mismo número de chicas para que puedan emparejarse. Resulta que esta sencilla condición es suficiente para garantizar que existe un emparejamiento desde el conjunto de chicos hacia el de las chicas.

El problema traducido al lenguaje de teoría de gráficas queda planteado de la siguiente manera: Dada una gráfica bipartita  $G$  con conjuntos de partición  $A, B$ , ¿qué condición es necesaria para que exista un emparejamiento desde el conjunto  $A$  hacia  $B$ ? La condición necesaria que para todo subconjunto  $S \subseteq A$ ,  $|N(S)| \geq |S|$  se llama *la condición del matrimonio* y el teorema de Hall afirma que esta condición es suficiente.

**Teorema 1.8** (Teorema de Hall, [Hal35]). *Sea  $G$  una gráfica bipartita con conjuntos de partición  $A, B$ . La gráfica  $G$  contiene un emparejamiento de  $A$  hacia  $B$  si, y sólo si  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq A$ .*

*Demostración.* Es claro que si existe un emparejamiento desde  $A$  hacia  $B$  entonces  $|N(S)| \geq |S|$  para todo subconjunto  $S \subseteq A$ . Ahora seguimos con la otra implicación del teorema.

Aplicamos inducción en  $|A|$ . Para  $|A| = 1$  la afirmación es verdadera. Ahora sea  $|A| \geq 2$  y suponemos que la condición del matrimonio es suficiente para la existencia de un emparejamiento de  $A$  cuando  $|A|$  es más pequeño.

Si  $|N(S)| \geq |S| + 1$  para todo subconjunto no vacío  $S \subsetneq A$  escogemos una arista  $ab \in G$  y consideramos la gráfica que se obtiene al quitar los vértices  $a$  y  $b$ ,  $G' := G - \{a, b\}$ . Entonces todo subconjunto no vacío  $S \subseteq A \setminus \{a\}$  satisface

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|,$$

así que por la hipótesis de inducción  $G'$  contiene un emparejamiento de  $A \setminus \{a\}$ . Junto con la arista  $ab$ , esto nos deja un emparejamiento de  $A$  en  $G$ .

Supongamos ahora que  $A$  tiene un subconjunto propio no vacío  $A'$  con  $|B'| = |A'|$  con  $B' := N(A')$ . Por la hipótesis de inducción,  $G' := \langle A' \cup B' \rangle$  contiene un emparejamiento de  $A'$ . Pero  $G - G'$  satisface la condición del matrimonio también, pues si existiera un conjunto  $S \subseteq A \setminus A'$  tal que  $|N_{G-G'}(S)| < |S|$  tenemos que  $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$ , contrario a nuestra hipótesis. De nuevo por la hipótesis de inducción  $G - G'$  contiene un emparejamiento desde  $A \setminus A'$ . Juntando estos dos emparejamientos tenemos un emparejamiento de  $A$  en  $G$ . ■

Dada una gráfica  $G$ , una *componente impar* de  $G$  es una componente conexa con número impar de vértices,  $q(G)$  representa el número de componentes impares de  $G$ .

El siguiente teorema demostrado por Tutte nos da una condición necesaria y suficiente para la existencia de un emparejamiento máximo en cualquier gráfica. Como pasa generalmente en matemáticas, el teorema abarca más casos que el teorema de Hall, pero en la práctica la condición no es sencilla de calcular para una gráfica arbitraria.

**Teorema 1.9** (Teorema de Tutte, [Tut47]). *Una gráfica  $G$  tiene un emparejamiento perfecto si, y sólo si  $q(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ .*

Otro teorema que está profundamente relacionado con los anteriores es el Teorema del  $k$ -factor de Lovász. El tema es muy interesante pero no incluiremos más detalles porque no es el tema de esta tesis, pero el libro de Lovász [LP09] es un excelente libro de referencia que profundiza sobre este teorema.

Con esto finalizamos una breve discusión sobre los teoremas relacionados con emparejamientos, pero recomendamos la lectura del estudio [Plu92] sobre la historia de estos teoremas y como están relacionados entre sí.

## 1.6. Hipergráficas.

Una *hipergráfica*  $\mathcal{H} = (V, E)$  es la generalización de la definición de gráfica donde ahora el conjunto  $E$  es simplemente una familia de subconjuntos de  $V$ , i.e.  $E \subseteq 2^V$ . Los elementos de  $E$  se llaman *aristas* o *hiperaristas*. Una hipergráfica es lo mismo que un *sistema de conjuntos*, pero llamándola hipergráfica hacemos énfasis en el punto de vista de teoría de gráficas.

El número de vértices de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  se llama *orden* de  $\mathcal{H}$  y se representa por  $v(\mathcal{H})$ , el número de aristas se llama *tamaño* de  $\mathcal{H}$  y se representa por  $e(\mathcal{H})$ . Para hacer énfasis en que  $V$  es el conjunto de vértices de la hipergráfica  $\mathcal{H}$ , escribimos  $V$  como  $V(\mathcal{H})$ , por la misma razón escribimos  $E$  como  $E(\mathcal{H})$ . El *grado* de un vértice  $v$  en una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es el número de aristas en  $\mathcal{H}$  que contienen al vértice  $v$ .

Una hipergráfica es *k-uniforme* (*k-hipergráfica*) si todas las aristas tienen cardinalidad  $k$ . Si  $V$  es un conjunto finito, es más sencillo utilizar  $V = [n]$ . Por conveniencia escribimos  $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k}$  para indicar que  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica  $k$ -uniforme sobre el conjunto de vértices  $[n]$ ; si  $k = 2$ ,  $\mathcal{H}$  es una *gráfica simple*.

Si  $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{r}$  es una hipergráfica que tiene a todos los  $r$ -subconjuntos de  $[n]$  como aristas, decimos que  $\mathcal{H}$  es una *r-hipergráfica completa*.

Un *conjunto independiente* de vértices en una hipergráfica, se define como un subconjunto de vértices de  $\mathcal{H}$  sin aristas. El *número de independencia* por vértices de  $\mathcal{H}$  es la cardinalidad del máximo conjunto independiente y se representa como  $\alpha(\mathcal{H})$ .

Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica con conjunto de vértices  $X$ , una coloración  $c : X \rightarrow [m]$  es una *m-coloración propia* de  $\mathcal{H}$  si no hay aristas monocromáticas bajo  $c$ . El *número cromático*  $\chi(\mathcal{H})$  es el más pequeño  $m$  tal que  $\mathcal{H}$  es  $m$ -coloreable. Un *clan* de  $\mathcal{H}$  es una subhipergráfica completa.

Sean  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  dos hipergráficas. Un *morfismo de hipergráficas* entre  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  es una función  $f : V(\mathcal{P}) \rightarrow V(\mathcal{Q})$  que preserva aristas, es decir, si el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  es una arista en  $\mathcal{P}$ , entonces  $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)\}$  es una arista en  $\mathcal{Q}$ . Un *automorfismo* es un morfismo entre la misma hipergráfica y que es biyectivo en el conjunto de vértices. Una hipergráfica  $\mathcal{H} = (V, E)$  es *vértice-transitiva* si para cualquier par de vértices  $u, v \in V$ , existe un automorfismo  $\gamma$  que satisface  $\gamma(v) = u$ .

**Lema 1.1.** *Si  $\mathcal{H}$  es una hipergráfica  $k$ -uniforme con  $m$  aristas, entonces*

$$\sum_{v \in V(\mathcal{H})} \deg(v) = km \tag{1.2}$$

**Miscelánea.** La notación  $a := B$  significa que la expresión  $B$  define el símbolo  $a$ . Para el número real  $x$ ,  $[x]$  denota el entero más grande que no excede a  $x$  y  $\lceil x \rceil$  significa el entero más pequeño al menos tan grande como  $x$ .



## Capítulo 2

# Gráficas de Kneser

Al estar trabajando en un artículo de Irving Kaplansky sobre formas cuadráticas, Martin Kneser planteó un problema que relaciona los  $k$ -subconjuntos tomados de un conjunto con  $n$  elementos y sus intersecciones. En 1955 Kneser publicó su conjetura en la revista alemana “Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung” [Kne55] (fig. 2.1) la cual permaneció abierta durante 22 años hasta que L. Lovász encontró la solución dando la confirmación a la conjetura.

En el siguiente capítulo vamos a introducir la definición de las gráficas de Kneser y daremos algunas de sus propiedades, las cuales se utilizarán en capítulos posteriores.

La siguiente es la formulación original de M. Kneser. Parece un problema sencillo de combinatoria, pero eso solo es en apariencia.

**Aufgabe 360:**  $k$  und  $n$  seien zwei natürliche Zahlen,  $k \leq n$ ;  $N$  sei eine Menge mit  $n$  Elementen,  $N_k$  die Menge derjenigen Teilmengen von  $N$ , die genau  $k$  Elemente enthalten;  $f$  sei eine Abbildung von  $N_k$  auf eine Menge  $M$ , mit der Eigenschaft, daß  $f(K_1) \neq f(K_2)$  ist falls der Durchschnitt  $K_1 \cap K_2$  leer ist;  $m(k, n, f)$  sei die Anzahl der Elemente von  $M$  und  $m(k, n) = \min_f m(k, n, f)$ . Man beweise: Bei festem  $k$  gibt es Zahlen  $m_0 = m_0(k)$  und  $n_0 = n_0(k)$  derart, daß  $m(k, n) = n - m_0$  ist für  $n \geq n_0$ ; dabei ist  $m_0(k) \geq 2k - 2$  und  $n_0(k) \geq 2k - 1$ ; in beiden Ungleichungen ist vermutlich das Gleichheitszeichen richtig.

Heidelberg.

MARTIN KNESER.

Figura 2.1: De la revista “Jahresbericht der DMV” de 1955.

**Problema 360:** Sean  $k$  y  $n$  dos números naturales,  $k \leq n$ ; Sea  $N$  un conjunto con  $n$  elementos,  $N_k$  es el conjunto de todos los subconjuntos de  $N$  con exactamente  $k$  elementos; sea  $f$  una función desde  $N_k$  a un conjunto  $M$  con la propiedad de que  $f(K_1) \neq f(K_2)$  si la intersección  $K_1 \cap K_2$  es vacía; sea  $m(k, n, f)$  el número de elementos de  $M$ , y  $m(k, n) = \min_f m(k, n, f)$ . Demuestre que para un  $k$  fijo hay números  $m_0 = m_0(k)$  y  $n_0 = n_0(k)$  tales que  $m(k, n) = n - m_0$  para  $n \geq n_0$ ; donde  $m_0 \geq 2k - 2$  y  $n_0 \geq 2k - 1$ ; ambas

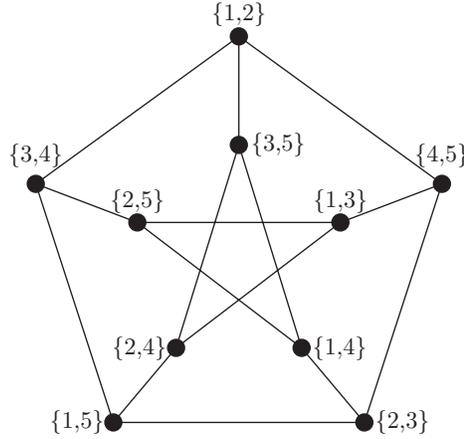


Figura 2.2: Gráfica de Kneser  $K\binom{[5]}{2}$ .

desigualdades probablemente ciertas con la igualdad.

A continuación vamos a replantear el problema de Kneser en un lenguaje matemático moderno que involucra a la Teoría de Gráficas.

**Definición 2.1.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{F} \subseteq 2^X$  una familia de subconjuntos de  $X$ . La *gráfica de Kneser de  $\mathcal{F}$* , denotada por  $K(\mathcal{F})$ , tiene a  $\mathcal{F}$  como el conjunto de vértices y dos conjuntos  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  son adyacentes en  $K(\mathcal{F})$  si, y sólo si  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . En símbolos:

$$K(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 = \emptyset\}).$$

La definición anterior es la manera general de definir las gráficas de Kneser, pero la mayoría de los resultados que hay sobre estas gráficas se enfocan en el caso cuando la familia de conjuntos  $\mathcal{F}$  es  $\binom{[n]}{k}$ .

**Teorema 2.1** (Teorema de Lovász-Kneser, [Lov78]). *Para todos enteros  $n, k$  tales que  $k \geq 2$  y  $n \geq 2k - 1$  el número cromático de las gráficas de Kneser es:*

$$\chi\left(K\left(\binom{[n]}{k}\right)\right) = n - 2k + 2. \quad (2.1)$$

**Ejemplo 2.2.**

- $K\binom{[n]}{1}$  es la gráfica completa  $K_n$  y  $\chi(K_n) = n$ .
- $K\binom{[2k-1]}{k}$  es una gráfica sin aristas y por lo tanto su número cromático es 1.
- $K\binom{[2k]}{k}$  es la gráfica formada por un  $k$ -emparejamiento y por lo tanto  $\chi(K\binom{[2k]}{k}) = 2$  para toda  $k \geq 1$ .
- El primer ejemplo interesante es  $K\binom{[5]}{2}$ , que resulta ser la gráfica de Petersen (véase figura 2.2).
- Otro ejemplo interesante  $K\binom{[2k+1]}{k}$  son las llamadas gráficas impares.

## 2.1. Hipergráficas de Kneser.

Ahora vamos a dar la extensión de la definición de gráficas de Kneser a hipergráficas de Kneser.

**Definición 2.2.** La  $p$ -hipergráfica de Kneser  $K^p\binom{[n]}{k}$  tiene por conjunto de vértices a  $V(K^p\binom{[n]}{k}) = \binom{[n]}{k}$ ;  $p$  subconjuntos forman una  $p$ -arista si estos forman una familia ajena por parejas.

Esta construcción se presentó por primera vez en el artículo [AFL86] de N. Alon, P. Frankl y L. Lovász.

**Ejemplo 2.3.** En la figura 2.3 representamos a la 3-hipergráfica de Kneser  $K^3\binom{[6]}{2}$  que tiene 15 vértices y 15 aristas ilustradas como triángulos.

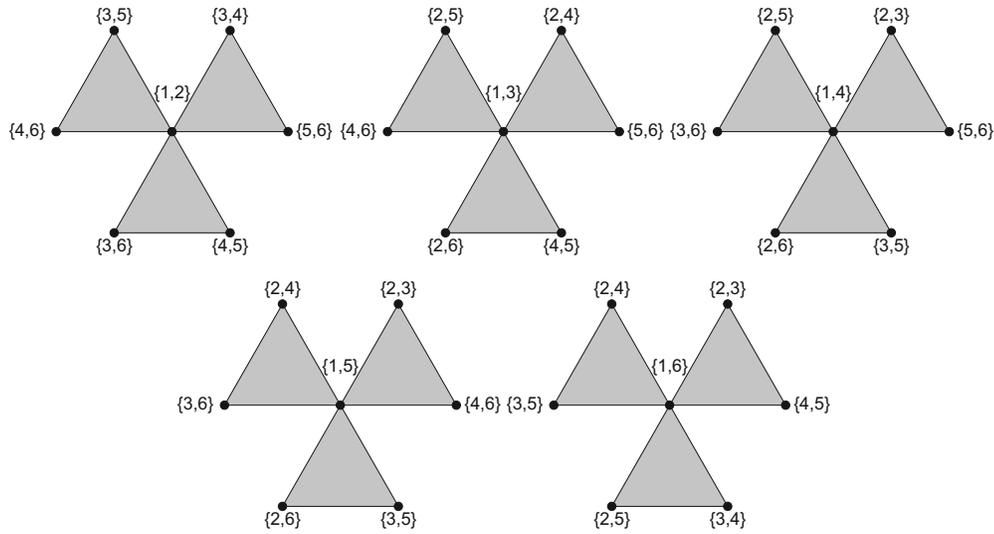


Figura 2.3: Hipergráfica de Kneser  $K^3\binom{[6]}{2}$

La siguiente es la construcción que dio S. Sarkaria en [Sar90].

**Definición 2.3.** Las  $p$ -hipergráficas de Kneser  $q$ -ajenas  $K_q^p\binom{[n]}{k}$ ,  $2 \leq q \leq p$  tienen por conjunto de vértices a  $V(K_q^p\binom{[n]}{k}) = \binom{[n]}{k}$ ;  $p$  subconjuntos forman una  $p$ -arista si estos forman una familia  $q$ -ajena.

Si tomamos  $q = 2$  en la definición anterior obtenemos la definición de hipergráfica de Kneser que dieron Alon et al. y si además tomamos  $p = 2$  obtenemos la definición de la gráfica de Kneser.

**Ejemplo 2.4.** Vamos a dejar fijo el conjunto  $\binom{[8]}{2}$  y nos concentramos en los conjuntos:

$$\blacksquare E_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$$

- $E_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$
- $E_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{5, 6\}\}$

Podemos ver que  $E_1$  es una familia 2-ajena,  $E_2$  es 3-ajena pero no es 2-ajena,  $E_3$  es 4-ajena pero no 3-ajena. Así que  $E_1$  es una arista de  $K_2^4\binom{[8]}{2}$ ,  $K_3^4\binom{[8]}{2}$  y  $K_4^4\binom{[8]}{2}$ , la familia  $E_2$  es una arista de  $K_3^4\binom{[8]}{2}$  y  $K_4^4\binom{[8]}{2}$  pero no de  $K_2^4\binom{[8]}{2}$  y por último  $E_3$  es arista de  $K_4^4\binom{[8]}{2}$  pero no de  $K_2^4\binom{[8]}{2}$  ni de  $K_3^4\binom{[8]}{2}$ .

En general tenemos la siguiente contención propia para los conjuntos de aristas de las 4-hipergráficas de Kneser  $q$ -ajenas  $K_q^4\binom{[8]}{2}$ ,  $2 \leq q \leq 4$ :

$$E\left(K_2^4\binom{[8]}{2}\right) \subsetneq E\left(K_3^4\binom{[8]}{2}\right) \subsetneq E\left(K_4^4\binom{[8]}{2}\right).$$

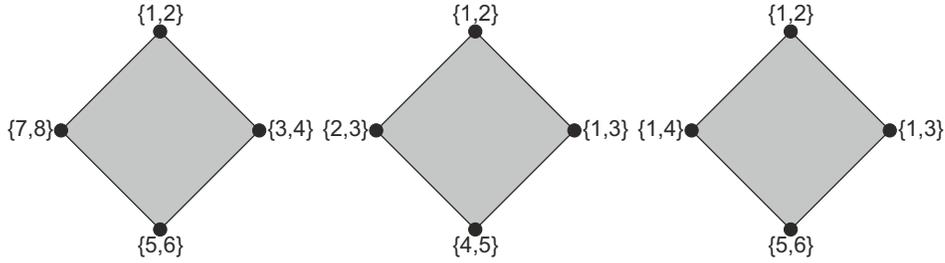


Figura 2.4: Aristas de  $K_2^4\binom{[8]}{2}$ ,  $K_3^4\binom{[8]}{2}$  y  $K_4^4\binom{[8]}{2}$ .

**Lema 2.1.** Las hipergráficas de Kneser  $K_q^p\binom{[n]}{k}$  son vértice transitivas.

*Demostración.* Basta demostrar que cualquier biyección  $\phi : [n] \rightarrow [n]$  induce una biyección en  $\binom{[n]}{k}$ . Para simplificar la notación de los elementos de  $\binom{[n]}{k}$  siempre supondremos que los elementos de los  $k$ -subconjuntos están ordenados de menor a mayor, es decir, si  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in \binom{[n]}{k}$ , entonces  $a_i \leq a_{i+1}$  para toda  $1 \leq i \leq k-1$ .

Sea  $\phi : [n] \rightarrow [n]$  una biyección; definimos la función  $\gamma : \binom{[n]}{k} \rightarrow \binom{[n]}{k}$  de la siguiente manera:

$$\gamma(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{\phi(a_1), \phi(a_2), \dots, \phi(a_k)\},$$

donde  $a_i \in [n]$  para toda  $1 \leq i \leq k$ .

Ahora vamos a verificar que  $\gamma$  es un automorfismo en  $\binom{[n]}{k}$ .

- $\gamma$  es inyectiva. Si  $\gamma(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \gamma(\{b_1, b_2, \dots, b_k\})$ , entonces

$$\{\phi(a_1), \phi(a_2), \dots, \phi(a_k)\} = \{\phi(b_1), \phi(b_2), \dots, \phi(b_k)\}$$

pero esto implica que  $\phi(a_i) = \phi(b_i)$  para toda  $1 \leq i \leq k$ , pero  $\phi$  es biyección, por lo tanto  $a_i = b_i$  para toda  $1 \leq i \leq k$ , por lo tanto,  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ .

- $\gamma$  es suprayectiva. Sea  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in \binom{[n]}{k}$ ; entonces como  $b_i \in [n]$  para toda  $1 \leq i \leq k$ , existe  $a_i \in [n]$  tal que  $\phi(a_i) = b_i$  para toda  $1 \leq i \leq k$  pues  $\phi$  es biyección, entonces, si  $A := \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  tenemos que  $\gamma(A) = B$ .

- $\gamma$  preserva aristas. Sea  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_p\} \subseteq \binom{[n]}{k}$  tal que  $|\mathcal{F}| = p$  y  $\mathcal{F}$  es  $q$ -ajena, entonces queremos demostrar que  $\gamma(\mathcal{F})$  también es  $q$ -ajena. Procedemos por contradicción, es decir, suponemos que hay  $q$  elementos  $\gamma(A_{i_1}) = B_1, \gamma(A_{i_2}) = B_2, \dots, \gamma(A_{i_q}) = B_q$  tales que  $\bigcap_{j=1}^q B_j \neq \emptyset$ , entonces existe un elemento  $b \in B_j$  para toda  $1 \leq j \leq q$ , pero entonces existe  $a \in [n]$  tal que  $a \in \gamma^{-1}(B_j)$  para toda  $1 \leq j \leq q$ , pero esto es una contradicción pues la hipótesis dice que  $\mathcal{F}$  es  $q$ -ajena.

Las hipergráficas de Kneser son vértice transitivas pues para mandar un vértice  $A_1$  a  $A_2$  por medio de un automorfismo utilizamos cualquier permutación de  $[n]$  que satisfaga  $\phi(A_1) = A_2$  y con esta permutación construimos el automorfismo buscado. ■

## 2.2. Gráficas de Schrijver.

Esta sección se trata de gráficas de Kneser restringidas a un subconjunto de  $\binom{[n]}{k}$ .

**Definición 2.4.** Llamamos a un subconjunto  $S \subseteq \binom{[n]}{k}$  estable si no contiene dos elementos consecutivos modulo  $n$  (si  $i \in S$ , entonces  $i + 1 \notin S$  y si  $n \in S$  entonces  $1 \notin S$ ). Representamos por  $\binom{[n]}{k}_{stab}$  a la familia de  $k$ -subconjuntos estables de  $[n]$ .

**Definición 2.5.** La gráfica de Schrijver ([Sch78]) es la gráfica de Kneser sobre la familia  $\binom{[n]}{k}_{stab}$ :

$$S\left(\binom{[n]}{k}\right) := K\left(\binom{[n]}{k}_{stab}\right) \quad (2.2)$$

es decir, los vértices de  $S\left(\binom{[n]}{k}\right)$  son la familia de subconjuntos estables de  $\binom{[n]}{k}$  y dos vértices son adyacentes si la intersección de sus respectivos conjuntos es vacía.

**Ejemplo 2.5.** Vamos a construir  $S\left(\binom{[5]}{2}\right)$ . El conjunto de vértices es:

$$V\left(S\left(\binom{[5]}{2}\right)\right) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$$

por lo tanto la gráfica queda representada en la figura 2.5.

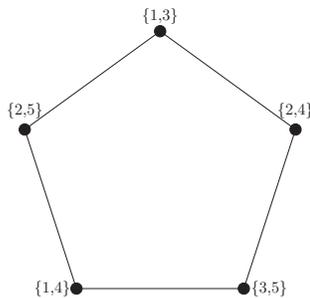


Figura 2.5: Gráfica de Schrijver  $S\left(\binom{[5]}{2}\right)$

**Teorema 2.6** (Schrijver, [Sch78]). *Para toda  $n \geq 2k \geq 0$ , tenemos que*

$$\chi\left(S\binom{[n]}{k}\right) = \chi\left(K\binom{[n]}{k}\right) = n - 2k + 2. \quad (2.3)$$

De hecho Schrijver demostró que  $S\binom{[n]}{k}$  es una subgráfica *vértice-crítica* de  $K\binom{[n]}{k}$  es decir, el número cromático disminuye si se borra cualquier vértice de  $S\binom{[n]}{k}$ .

## Capítulo 3

# El Número Cromático Fraccional.

En el presente capítulo estudiaremos los problemas típicos de programación lineal y veremos como están relacionados con las coloraciones de (hiper)gráficas.

### 3.1. Programación Lineal y Entera.

Un *programa lineal (PL)* es un problema de maximizar o minimizar una función lineal de variables reales que esta sujeta a restricciones de igualdades o desigualdades. Por medio de simples sustituciones, tales como reemplazar una ecuación por dos desigualdades, cualquier PL puede transformarse en uno de la siguiente forma

$$\text{maximizar } \mathbf{c}\mathbf{x} \text{ sujeto a } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ y } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  es una matriz de  $m \times n$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  es un vector renglón de  $1 \times n$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  es un vector columna de  $m \times 1$  y el símbolo de menor o igual se interpreta entrada a entrada. Las  $m$  desigualdades  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , y las  $n$  condiciones  $x_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , se conocen como las *restricciones* del problema. La función  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  a ser maximizada se llama la *función objetivo*.

Un vector columna  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es una *solución factible* de (3.1) si satisface las  $m + n$  restricciones, y una solución factible en la cuál la función objetivo  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  alcanza su valor máximo es una *solución óptima*. El máximo es el *valor óptimo* del PL.

Asociado a cada PL, hay otro PL, llamado su dual. El *dual* de el PL (3.1) es el PL:

$$\text{minimizar } \mathbf{y}\mathbf{b} \text{ sujeto a } \mathbf{y}\mathbf{A} \geq \mathbf{c} \text{ y } \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Con referencia a este PL dual, el PL original (3.1) se llama PL *primal*.

No todos los PL tienen solución factible. Además, aunque tengan una, no es necesariamente una solución óptima: la función objetivo puede no estar acotada sobre un conjunto de soluciones factibles, y por lo tanto no alcanzar el máximo (o mínimo). Un PL de esta naturaleza se llama *no acotado*.

Las siguientes propiedades implican que si el PL primal y el dual tienen soluciones factibles, ambas están acotadas.

**Teorema 3.1** (Teorema débil de Dualidad). *Sea  $\mathbf{x}$  una solución factible de (3.1) y  $\mathbf{y}$  una solución factible de su dual (3.2). Entonces*

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}\mathbf{b} \tag{3.3}$$

*Demostración.* Como  $\mathbf{c} \leq \mathbf{y}\mathbf{A}$  y  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , tenemos que  $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}$ . Como  $\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}\mathbf{b}$ , la desigualdad (3.3) se cumple. ■

**Corolario 3.2.** *Sean  $\mathbf{x}$  una solución factible de 3.1 y  $\mathbf{y}$  una solución factible de 3.2. Si  $\mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{x}$  es una solución óptima de 3.1 y  $\mathbf{y}$  es una solución óptima de 3.2.* ■

La importancia de este corolario es que si la igualdad se da en (3.3), la solución primitiva  $\mathbf{x}$  sirve para garantizar la optimalidad de la solución dual y viceversa. Un teorema importante y fundamental de von Neumann (1928) garantiza que siempre podemos certificar optimalidad de esta manera.

**Teorema 3.3** (Teorema de Dualidad). *Si un PL tiene solución óptima, entonces su dual también tiene solución óptima, y los valores óptimos de estos dos PL son iguales.*

Un programa lineal en el cual las variables están restringidas a tomar únicamente valores enteros se llama *programa lineal entero (PLE)*. Cualquier PLE puede transformarse a uno de la forma siguiente:

$$\text{maximizar } \mathbf{c}\mathbf{x} \text{ sujeto a } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

Una aproximación al problema de determinar el valor de un parámetro gráfico-teórico, es expresar el problema como un PLE de la forma (3.4) y después resolver su *relajación* a un PL, esto es el PL (3.1) obtenido por desechar la restricción de la variable entera  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ . Si la solución óptima encontrada resulta ser entera, también es una solución del PLE. En cualquier evento, el valor regresado por el PL será una cota superior para el valor del parámetro. Esta cota superior será referida como la *versión fraccional* del parámetro.

## 3.2. Coloraciones Fraccionales.

La familia de conjuntos independientes de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  se representa como  $I(\mathcal{H})$  y además  $I(\mathcal{H}, v)$  representa a los conjuntos independientes que contienen al vértice  $v$ .

A continuación vamos a definir el *número cromático fraccional* como la solución de un PL.

**Definición 3.1.** Una *coloración fraccional* de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es una función  $f : I(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que para todo  $v \in V(\mathcal{H})$ .

$$\sum_{S \in I(\mathcal{H}, v)} f(S) \geq 1. \tag{3.5}$$

El *peso de una coloración fraccional*  $p(f)$  es la suma de todos sus valores o sea  $p(f) = \sum_{S \in I(\mathcal{H})} f(S)$ ; el *número cromático fraccional*  $\chi_f(\mathcal{H})$  de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es el mínimo peso posible para una coloración fraccional.

La definición anterior es la descripción de un PL del tipo (3.2). Sean  $I = |I(\mathcal{H})|$  y  $n = |V(\mathcal{H})|$  los parámetros de nuestra hipergráfica; los valores del PL son:  $\mathbf{b} = (1, 1, \dots, 1)$  vector de dimensión  $1 \times I$ ,  $\mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1)$  vector de dimensión  $n \times 1$ ,  $\mathbf{y} = (f(S_1), f(S_2), \dots, f(S_I))$  vector de dimensión  $1 \times I$  y la matriz de incidencia de conjuntos independientes  $\mathbf{A}$  de dimensión  $I \times n$ .

Ahora vamos a ver que efectivamente la definición de número cromático fraccional es una generalización de la definición clásica de número cromático.

Dada una  $k$ -coloración propia de una gráfica  $G$ , las clases cromáticas forman una partición de  $V(G)$  con  $k$  conjuntos independientes  $V_1, V_2, \dots, V_k$ . La función  $f : I(G) \rightarrow k$  definida como:  $f(V_i) = 1$  para todo  $i \in [k]$  y  $f(S) = 0$  para el resto de los conjuntos independientes, es una coloración fraccional de peso  $k$ . Por lo tanto es inmediato que

$$\chi_f(G) \leq \chi(G). \quad (3.6)$$

De manera inversa, si  $G$  tiene una coloración fraccional  $f$  de peso  $k$  con valores en  $\{0, 1\}$ , entonces el soporte de  $f$  consiste de  $k$  conjuntos independientes  $V_1, V_2, \dots, V_k$  cuya unión es  $V(G)$ . Si coloreamos un vértice  $v$  con el más pequeño  $i$  tal que  $v \in V_i$ , entonces tenemos una  $k$ -coloración propia de  $G$ . Entonces el número cromático de  $G$  es el peso mínimo de una coloración fraccional con valores en  $\{0, 1\}$ .

La palabra fraccional viene de la observación de que las todas las entradas del PL son números racionales (de hecho son 0's o 1's) y un resultado básico de la teoría nos dice que la solución óptima para este PL es un número racional.

Ahora vamos a ver cuál es el programa dual de una coloración fraccional:

**Definición 3.2.** Un *clan fraccional* de una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es una función  $g : V(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para todo  $S \in I(\mathcal{H})$ .

$$\sum_{v \in S} g(v) \leq 1. \quad (3.7)$$

El *peso de un clan fraccional* es la suma de todos sus valores o sea  $p(g) = \sum_{v \in V} g(v)$ . El *número de clan fraccional* de  $\mathcal{H}$  es el máximo peso posible para un clan fraccional y se denota por  $w_f(\mathcal{H})$ .

Sea  $K$  un clan de  $\mathcal{H}$ . La función característica que asigna el valor 1 a cada vértice del clan y 0 a cualquier otro vértice, es un clan fraccional con valores en  $\{0, 1\}$  de peso  $|K|$  y entonces

$$w(\mathcal{H}) \leq w_f(\mathcal{H}) \quad (3.8)$$

Si  $\alpha(\mathcal{H})$  es el máximo tamaño de un conjunto independiente en  $\mathcal{H}$ , entonces  $g := \alpha(\mathcal{H})^{-1} \mathbf{1}$  es un clan fraccional ( $\mathbf{1}$  es un vector de longitud  $v(\mathcal{H})$ ) entonces tenemos lo siguiente.

**Lema 3.1.** Para cualquier hipergráfica  $\mathcal{H}$

$$w_f(\mathcal{H}) \geq \frac{v(\mathcal{H})}{\alpha(\mathcal{H})} \quad (3.9)$$

Hay un caso importante donde podemos determinar el número de clan fraccional.

**Lema 3.2.** Si  $\mathcal{H}$  es vértice-transitiva, entonces:

$$w_f(\mathcal{H}) = \frac{v(\mathcal{H})}{\alpha(\mathcal{H})} \quad (3.10)$$

y  $\alpha(\mathcal{H})^{-1}\mathbf{1}$  es un clan fraccional con este peso.

*Demostración.* Supongamos que  $g : V(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  es un clan fraccional diferente de cero de  $\mathcal{H}$ . Entonces  $p(g) = \sum_{v \in V} g(v)$ .

Si  $\gamma_i \in \text{Aut}(\mathcal{H})$  y  $m = |\text{Aut}(\mathcal{H})|$  definimos la función  $g_i$  para todo  $1 \leq i \leq m$  como  $g_i(v) = g(\gamma_i(v))$ . Entonces  $g_i$  es un clan fraccional con el mismo peso de  $g$ . Vamos a revisar esto. El peso de  $g_i$  es

$$p(g_i) = \sum_{v \in V} g_i(v) = \sum_{v \in V} g(\gamma_i(v)) \quad (3.11)$$

pero como  $\gamma_i$  es una biyección entre los elementos de  $V$ , concluimos que  $p(g) = p(g_i)$  y además, como  $\gamma_i$  es un automorfismo, preserva a los conjuntos independientes, es decir, manda conjuntos independientes en conjuntos independientes. Ahora definimos la siguiente función  $\hat{g} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_i$  que es un clan fraccional con el mismo peso de  $g$ ;

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \hat{g}(v) &= \sum_{v \in V} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_i(v) \right) = \frac{1}{m} \left( \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^m g_i(v) \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{v \in V} g_i(v) \right) = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m p(g_i) \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m p(g) \right) = \frac{mp(g)}{m} = p(g). \end{aligned}$$

$\hat{g}$  es constante en los vértices de  $\mathcal{H}$ . Si esto fuera cierto, se cumpliría que  $\hat{g}(v) = \hat{g}(u)$  es decir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_i(v) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_i(u) \\ \sum_{i=1}^m g_i(v) &= \sum_{i=1}^m g_i(u) \\ \sum_{i=1}^m g_i(v) &= \sum_{i=1}^m g_i(\phi(v)) \\ \sum_{i=1}^m g(\gamma_i(v)) &= \sum_{i=1}^m g(\gamma_i(\phi(v))) \\ \sum_{i=1}^m g(\gamma_i(v)) &= \sum_{j=1}^m g(\gamma_j(v)) \end{aligned}$$

El conjunto  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  y su regla de composición definen un grupo. El último renglón sale de que la acción de  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  en los vértices de la gráfica es transitiva, es decir, para cada

pareja de vértices  $v, u \in V$  existe  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{H})$  tal que  $\phi(v) = u$ . La última igualdad es verdadera pues cada automorfismo  $g_i \in \text{Aut}(\mathcal{H})$  se puede escribir como  $g_i = (g_i\phi^{-1})\phi$ , y cada elemento de la forma  $g_i\phi$  también es un automorfismo. Por lo tanto la función  $\hat{g}$  es constante.

Ahora para cualquier valor constante  $c$ ,  $c\mathbf{1}$  es un clan fraccional sí, y solo si  $c \leq \alpha(\mathcal{H})^{-1}$  y tenemos el resultado buscado. ■

Como  $\chi_f(\mathcal{H})$  y  $w_f(\mathcal{H})$  son duales, el teorema de dualidad nos dice que las soluciones óptimas de estos programas lineales son iguales, por lo tanto  $\chi_f(\mathcal{H}) = w_f(\mathcal{H})$  para cualquier hipergráfica  $\mathcal{H}$

**Corolario 3.4.** *Si  $H$  es vértice-transitiva, entonces*

$$\chi_f(\mathcal{H}) = \frac{v(\mathcal{H})}{\alpha(\mathcal{H})}. \quad (3.12)$$

Los resultados anteriores nos dicen que:

$$\chi_f \left( K_q^p \binom{[n]}{k} \right) = \frac{\binom{n}{k}}{\alpha(K_q^p \binom{[n]}{k})}.$$

Así que para encontrar el número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser basta encontrar su número de independencia.

Usando los resultados de los capítulos anteriores podemos determinar exactamente algunos valores para el número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser.

**Corolario 3.5.** *Sean  $n, k$  números enteros tales que  $n \geq 2k$ . Entonces*

$$\chi_f \left( K_2^2 \binom{[n]}{k} \right) = \frac{n}{k}.$$

*Demostración.* Solo tenemos que determinar cuánto vale  $\alpha(K_2^2 \binom{[n]}{k})$ . Recordamos que un par de conjuntos ajenos definen una arista en  $\alpha(K_2^2 \binom{[n]}{k})$ , por lo tanto un conjunto independiente satisface la propiedad de que cada par de conjuntos se intersectan, esto es equivalente a decir que el conjunto independiente es intersectante.

El Teorema de Erdős-Ko-Rado nos dice cual es la cardinalidad del conjunto intersectante más grande y como  $n \geq 2k$  tenemos que:

$$\alpha \left( K_2^2 \binom{[n]}{k} \right) = \binom{n-1}{k-1},$$

por lo tanto

$$\chi_f \left( K_2^2 \binom{[n]}{k} \right) = \frac{\binom{n}{k}}{\alpha(K_2^2 \binom{[n]}{k})} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{n}{k}. \quad \blacksquare$$



## Capítulo 4

# Métodos Topológicos.

La aplicación de los métodos topológicos a la combinatoria es una herramienta que se ha explotado mucho durante los últimos 30 años. Todo surgió con la publicación del teorema de Kneser-Lovász donde se utiliza el teorema de Borsuk-Ulam para resolver un problema que parecía intrínseco a la combinatoria. Este resultado desencadenó una serie de publicaciones que involucran a la topología para resolver problemas de matemáticas discretas.

En este capítulo analizaremos varias demostraciones del teorema de Kneser-Lovász. Primero damos una coloración para las gráficas de Kneser.

**Cota superior para  $\chi(K\binom{[n]}{k})$ .** Es sencillo demostrar que el número cromático de  $K\binom{[n]}{k}$  no puede ser más grande que  $n - 2k + 2$ . Para ver esto coloreamos los vértices de la gráfica de Kneser con la siguiente función:

$$c(F) := \min\{\min(F), n - 2k + 2\}.$$

Esto asigna un color  $c(F) \in \{1, 2, \dots, n - 2k + 2\}$  a cada subconjunto  $F \in \binom{[n]}{k}$ . Si dos conjuntos  $F, F'$  tienen el mismo color  $c(F) = c(F') = i < n - 2k + 2$ , entonces no pueden ser ajenos, pues ambos contienen el elemento  $i$ . Si los dos  $k$ -subconjuntos tienen el color  $n - 2k + 2$ , entonces ambos están contenidos en el conjunto  $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$  que solo tiene  $2k - 1$  elementos, y por lo tanto no puede contener a dos  $k$ -subconjuntos ajenos. ■

La mayoría de las demostraciones de la cota inferior justa para  $\chi(K\binom{[n]}{k})$  son topológicas o al menos imitan las demostraciones topológicas. Empezamos con una demostración sencilla descubierta por J. Greene [Gre02] y que algunos autores consideran es una demostración de “el libro”<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>El famoso matemático húngaro P. Erdős solía decir que existía un libro donde Dios tenía todas las demostraciones elegantes y hermosas de los teoremas matemáticos y que si eres matemático podías no creer en Dios, pero definitivamente tenías que creer en “el libro”. En la actualidad cuando algún matemático da una demostración hermosa, elegante y sobre todo ingeniosa, se suele hacer mención a “el libro”.

## 4.1. Demostración de J. Greene

**Primera demostración del teorema 2.1.** Consideremos la gráfica de Kneser  $K\binom{[n]}{k}$  y sea  $d := n - 2k + 1$ . De manera natural, definimos una biyección entre  $[n]$  y un conjunto  $X \subseteq S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  en posición general, es decir, a cada elemento de  $[n]$  le asociamos un punto en la esfera de tal manera que ningún hiperplano por el origen pasa por  $d + 1$  de ellos.

Procedemos por contradicción. Supongamos que existe una coloración propia de  $K\binom{[n]}{k}$  con  $d$  colores. Fijamos esta coloración y definimos los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_d \subseteq S^d$  de la siguiente manera: Para un punto  $\mathbf{x} \in S^d$ , tenemos que  $\mathbf{x} \in A_i$  si hay al menos un  $k$ -subconjunto  $F \in \binom{X}{k}$  de color  $i$  contenido en el hemisferio abierto  $H(\mathbf{x})$  centrado en  $\mathbf{x}$  (de manera formal  $H(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in S^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle > 0\}$ ). Finalmente, definimos  $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$ .

Claramente,  $A_1$  hasta  $A_d$  son conjuntos abiertos, mientras que  $A_{d+1}$  es cerrado. Por el Teorema 1.2 g), existe  $i \in [d + 1]$  y  $\mathbf{x} \in S^d$  tal que  $\mathbf{x}, -\mathbf{x} \in A_i$ .

Si  $i \leq d$ , tenemos dos  $k$ -subconjuntos ajenos coloreados con el mismo color  $i$ , uno en el hemisferio abierto  $H(\mathbf{x})$  y otro en el hemisferio opuesto  $H(-\mathbf{x})$ . Esto significa que la coloración considerada no es una coloración propia de la gráfica de Kneser.

Si  $i = d + 1$ , entonces  $H(\mathbf{x})$  contiene a lo más  $k - 1$  puntos de  $X$ , y también  $H(-\mathbf{x})$ . Por lo tanto el complemento  $S^d \setminus (H(\mathbf{x}) \cup H(-\mathbf{x}))$ , que es un “ecuador”, contiene al menos  $n - 2k + 2 = d + 1$  puntos de  $X$  y esto contradice la elección de  $X$ . ■

## 4.2. Demostración de Dol’nikov

La demostración de Dol’nikov del teorema 2.1 es muy interesante, pero necesitamos introducir algunos conceptos.

**Lema 4.1.** Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_d$  familias de convexos compactos no vacíos en  $\mathbb{R}^d$  tales que para cada  $i = 1, 2, \dots, d$ , la familia  $\mathcal{C}_i$  es intersectante; esto es,  $C \cap C' \neq \emptyset$  para  $C, C' \in \mathcal{C}_i$ . Entonces hay un hiperplano transversal que intersecta a todos los conjuntos de  $\cup_{i=1}^d \mathcal{C}_i$ .

*Demostración.* Para una dirección  $\mathbf{v} \in S^{d-1}$ , sea  $l_{\mathbf{v}}$  la línea que pasa por  $\mathbf{v}$  y el origen, orientada desde el origen a través de  $\mathbf{v}$ . Consideremos el sistema de proyecciones ortogonales de los conjuntos  $\mathcal{C}_i$  en la línea  $l_{\mathbf{v}}$ :

Cada una de estas proyecciones es un intervalo cerrado y acotado, y cualesquiera dos de ellos se intersectan. Es fácil de ver (directamente o por el Teorema de Helly de dimensión 1) que la intersección de estos intervalos es un intervalo no trivial, que representaremos por  $I_i(\mathbf{v})$ . Sea  $m_i(\mathbf{v})$  el punto medio de  $I_i(\mathbf{v})$ . Definimos una función antipodal  $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  donde la coordenada  $i$ -ésima de la función es  $f(\mathbf{v})_i = \langle m_i(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$ , la distancia orientada de  $m_i(\mathbf{v})$  desde el origen. Esto es una función antipodal y afirmamos que para esta función, existe un punto  $\mathbf{v} \in S^{d-1}$  tal que  $f(\mathbf{v})_1 = f(\mathbf{v})_2 = \dots = f(\mathbf{v})_d$ . Para ver esto, definimos una nueva función antipodal  $g$ , esta vez en  $\mathbb{R}^{d-1}$ , como  $g_i = f_i - f_d$ ,  $i = 1, 2, \dots, d - 1$ . Esta  $g$  tiene un cero por el teorema de Borsuk-Ulam y si  $g(\mathbf{v}) = 0$  entonces  $f_1(\mathbf{v}) = f_2(\mathbf{v}) = \dots = f_d(\mathbf{v})$  como se pedía. Para un  $\mathbf{v}$  con esta propiedad, todos los  $d$  puntos medios  $m_i(\mathbf{v})$  coinciden, y por lo tanto el hiperplano que pasa a través de ellos y es perpendicular a  $l_{\mathbf{v}}$  es la transversal buscada a todos los conjuntos  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_d$ . ■

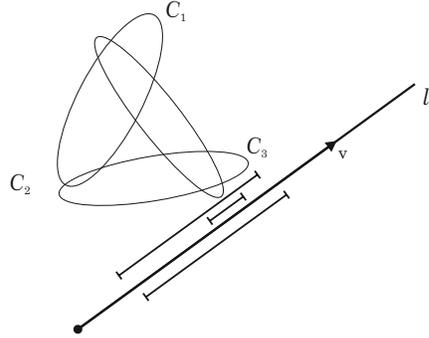


Figura 4.1: Proyecciones de los convexos  $C_1, C_2, C_3$  en la línea  $l_v$ .

El  $m$ -defecto de coloración, representado por  $cd_m(\mathcal{H})$ , es el mínimo tamaño de un subconjunto  $Y \subseteq X$  tal que la subhipergráfica de  $\mathcal{H}$  que no contienen a  $Y$  es  $m$ -coloreable. En símbolos:

$$cd_m(\mathcal{H}) = \min\{|Y| : \text{la hipergráfica } (X \setminus Y, \{F \in E(\mathcal{H}) : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ es } m\text{-coloreable}\}.$$

Por ejemplo, para  $m = 2$ , queremos colorear cada punto de  $X$  de rojo, azul o blanco de manera que ninguna arista de  $\mathcal{H}$  es completamente roja o azul (pero puede ser completamente blanca) y  $cd_2(\mathcal{H})$  es el mínimo número requerido de puntos blancos para tal coloración.

En esta sección trabajaremos  $m = 2$ .

**Ejemplo 4.1.** Como ejemplo tomemos a la 3-hipergráfica completa con 5 vértices  $\mathcal{H} = \binom{[5]}{3}$ . El número cromático de  $\mathcal{H}$  es 3 pues no es posible encontrar una 2-coloración propia por el principio de las casillas. Ahora bien,  $cd_m(\mathcal{H}) = 1$  pues al quitar cualquier vértice podemos dar una 2-coloración propia de los vértices de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 4.2** (Teorema de Dol'nikov, [Dol81]). Para cualquier hipergráfica finita  $\mathcal{H}$ , tenemos que

$$\chi(K(\mathcal{H})) \geq cd_2(\mathcal{H}). \quad (4.1)$$

*Demostración.* Supongamos que existe una  $d$ -coloración de la gráfica de Kneser  $K \binom{[n]}{k}$ . Esto significa que el conjunto de vértices  $\binom{[n]}{k}$  se divide en conjuntos  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_d$  tales que cualesquiera dos  $k$ -conjuntos de  $\mathcal{F}_i$  tienen un punto en común,  $i = 1, 2, \dots, d$ .

Colocamos los puntos del conjunto  $[n]$  en  $\mathbb{R}^d$  por medio de una biyección con un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  en posición general, de manera que cada conjunto  $\mathcal{F}_i$  tiene su correspondiente conjunto  $F_i \subseteq \mathbb{R}^d$ . Definimos las  $d$  familias de conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^d$  como

$$\mathcal{C}_i = \{\text{conv}(F) : F \in \mathcal{F}_i\}$$

Estas familias de convexos  $\mathcal{C}_i$  satisfacen las hipótesis del lema 4.1 y por lo tanto hay un hiperplano  $h$  que intersecta los cascos convexos de todos los  $F \in \binom{[n]}{k}$ .

Coloreamos los puntos de  $[n]$  en uno de los semiespacios acotados por  $h$  de color rojo, los del otro lado de color azul, y los demás que están en  $h$  de color blanco.

Hay a lo más  $d$  puntos de color blanco y esta coloración demuestra que  $cd_2(K \binom{[n]}{k}) \leq d$  por lo tanto el teorema queda demostrado. ■

La cota para  $\chi(K(\mathcal{H}))$  dada por el teorema anterior no es necesariamente justa, más aún, el parámetro  $cd_2(\mathcal{H})$  no es sencillo de determinar en general.

**Segunda demostración del teorema 2.1.** Si  $\mathcal{H} = \binom{[n]}{k}$ ,  $n \geq 2k$ , entonces después de borrar cualesquiera  $n - 2k + 1$  puntos nos queda una subhipergráfica con todas las aristas de un conjunto con  $2k - 1$  elementos. En cualquier coloración roja-azul de éste conjunto, uno de los colores tiene al menos  $k$  puntos por el principio de las casillas y contiene un  $k$ -subconjunto monocromático. Entonces  $cd_2(\mathcal{H}) \geq n - 2k + 2$ , y vemos que el teorema generaliza el teorema de Lovász-Kneser. ■

### 4.3. Demostración de I. Bárány

La siguiente es la demostración de I. Bárány en [Bár78]. Está publicada en la misma revista donde está la demostración de Lovász pero con meses de diferencia. El matemático J. Green se inspiró en esta demostración [Gre02] pero aquí necesitamos el lema de Gale y las dimensiones de los espacios son diferentes.

**Teorema 4.3** (Lema de Gale, [Gal56]). *Para cada  $d \geq 0$  y cada  $k \geq 1$ , existe un conjunto  $X \subseteq S^d$  de  $2k + d$  puntos tales que cada hemisferio abierto de  $S^d$  contiene al menos  $k$  puntos de  $X$ .*

**Tercera demostración del teorema 2.1.** Consideramos la gráfica de Kneser  $K\binom{[n]}{k}$  y fijamos  $d := n - 2k$ . Sea  $X \subseteq S^d$  un conjunto como en el teorema 4.3. Identificamos a  $[n]$  con  $X$ , así que los vértices de  $K\binom{[n]}{k}$  son  $k$ -subconjuntos de puntos de  $X$ .

Procedemos por contradicción. Supongamos que existe una  $(d + 1)$ -coloración propia de  $K\binom{[n]}{k}$ . Definimos los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_{d+1} \subseteq S^d$  al poner a  $\mathbf{x} \in A_i$  si existe al menos un  $k$ -subconjunto  $F \in \binom{X}{k}$  de color  $i$  contenido en el hemisferio abierto  $H(\mathbf{x})$  con centro en  $\mathbf{x}$ .

Los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_{d+1}$  forman una cubierta abierta de  $S^d$  y cada  $H(\mathbf{x})$  contiene al menos un  $k$ -subconjunto por el lema de Gale. Por el teorema de Borsuk-Ulam existe  $i \in [d + 1]$  y  $\mathbf{x} \in S^d$  tales que  $\mathbf{x}, -\mathbf{x} \in A_i$ . Esto nos lleva a una contradicción porque tenemos dos  $k$ -subconjuntos de color  $i$ , uno en  $H(\mathbf{x})$  y el otro en  $H(-\mathbf{x})$ . ■

### 4.4. Demostración de L. Montejano

Un sistema de hiperplanos  $\chi$  en  $\mathbb{R}^d$  se obtiene al escoger, de manera continua, un hiperplano de  $\mathbb{R}^d$  en cada dirección. Esto es, un sistema de hiperplanos está determinado por una función continua  $\varphi : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ ,  $\varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ .

Para ver esto, dado  $\varphi$ , es suficiente escoger para cada  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ , un hiperplano perpendicular a  $\mathbf{x}$  a través de  $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{x}$ , que gira para coincidir con el hiperplano perpendicular a  $-\mathbf{x}$  a través de  $-\varphi(-\mathbf{x})\mathbf{x}$ , y viceversa.

El siguiente lema, que sigue el espíritu de Dol'nikov, es crucial en la demostración del Teorema de Kneser-Lovász.

**Lema 4.2.** *Dados  $d$  sistemas de hiperplanos  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_d \in \mathbb{R}^d$ , existe una dirección en la que todos los hiperplanos coinciden.*

*Demostración.* Para cada  $\chi_i$ , sea  $\varphi_i : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\varphi_i(-\mathbf{x}) = -\varphi_i(\mathbf{x})$ , para cada  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$  su función correspondiente. Sea  $\Psi : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ , definida por  $\Psi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi_d(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{d-1}(\mathbf{x}) - \varphi_d(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{d-1}$ , para cada  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$ . Notemos que  $\Psi(-\mathbf{x}) = -\Psi(\mathbf{x})$ . Por el teorema de Borsuk-Ulam, existe  $\mathbf{x}_0 \in S^{d-1}$  tal que  $\Psi(\mathbf{x}_0) = 0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ . Esto es,  $\varphi_i(\mathbf{x}_0) = \varphi_d(\mathbf{x}_0)$ , para  $i = 1, \dots, d-1$ . ■

Ahora estamos listos para la demostración.

**Cuarta demostración del teorema 2.1.** Supongamos que el teorema no es verdadero. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que nuestro conjunto con  $n$  elementos  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n-2k+1}$  es un conjunto de puntos en posición general. Un  $k$ -ágono de  $V$  es la cerradura convexa de un  $k$ -subconjunto de  $V$ . Suponemos que los  $k$ -ágonos de  $V$  están coloreados con  $n-2k+1$  colores en una manera que dos  $k$ -ágonos de  $V$  con el mismo color se intersectan.

Sea  $L$  una línea que pasa por el origen. Escogemos un color, digamos rojo. Entonces la proyección de cada  $k$ -ágono es un intervalo compacto contenido en  $L$ . Además, esta colección de intervalos rojos es mutuamente intersectante. Entonces por el Teorema de Helly en el plano, la intersección de todos estos intervalos rojos es de nuevo un intervalo compacto. Tomemos un hiperplano  $H_L$ , perpendicular a  $L$ , a través del punto medio de la intersección de todos los intervalos rojos. Claramente  $H_L$  cambia continuamente con respecto a  $L$ , produciendo un sistema de hiperplanos en  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$ . Similarmente obtenemos un sistema de hiperplanos para cada color. Por el lema anterior, existe una dirección en la cual todos los  $n-2k+1$  sistemas de hiperplanos en  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$  coinciden, pero esto implica que existe un hiperplano  $\Gamma$  transversal a todos los  $k$ -ágonos de  $V$ .

A la izquierda de  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$ , tenemos menos de  $k$  puntos de  $V$ , de lo contrario  $\Gamma$  no sería transversal a los  $k$ -ágonos de  $V$ . Similarmente a la derecha de  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^{n-2k+1}$ , tenemos menos de  $k$  puntos de  $V$ , así que hay  $n-2k+2$  o más puntos de  $V$  en el hiperplano  $\Gamma$ , contradiciendo el hecho de que  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-2k+1}$  es un conjunto de puntos en posición general. ■

Los siguientes son teoremas relacionados con las hipergráficas de Kneser definidas en el capítulo 2.

**Teorema 4.4** (N. Alon, P. Frankl y L. Lovász, [AFL86]). *Para todos enteros  $n, k$  y  $p$  tales que  $k \geq 2, p \geq 2, n \geq pk-1$  tenemos que:*

$$\chi \left( K^p \binom{[n]}{k} \right) = \left\lceil \frac{n-p(k-1)}{p-1} \right\rceil. \quad (4.2)$$

La demostración de este teorema utiliza las mismas ideas de topología que Lovász aplicó en [Lov78].

**Teorema 4.5** (S. Sarkaria, [Sar90]). *Para todos enteros  $p, q, k$  y  $n$ , tales que  $k \geq 2, p \geq q \geq 2$  y  $n \geq (pk-1)/(q-1)$  tenemos que:*

$$\chi \left( K_q^p \binom{[n]}{k} \right) = \left\lceil \frac{n(q-1) - p(k-1)}{p-1} \right\rceil. \quad (4.3)$$



# Capítulo 5

## Teoría Extremal

La teoría de problemas extremales se basa en la siguiente pregunta: ¿Cuál es la (hiper)gráfica con mayor número de aristas que satisface la propiedad  $P$ ? El capítulo se divide en la parte clásica de gráficas y la teoría extremal de conjuntos. Los teoremas relevantes para la tesis son el teorema 5.6 y el teorema 5.9.

### 5.1. Teoría de Gráficas Extremales.

La Teoría de Gráficas Extremales es una subárea de la Teoría de Gráficas, pero podemos decir que abarca prácticamente todos los problemas de teoría de gráficas. El principal problema de la Teoría de Gráficas extremales es el de la *gráfica prohibida* que se plantea de la siguiente manera: Dada una gráfica  $F$  (la gráfica prohibida) de orden  $k$ , ¿cuál es el mayor número de aristas que toda gráfica  $G$  de orden  $n \geq k$  tiene, de manera que no contenga a  $F$  como subgráfica?

Desde el siglo pasado han surgido resultados sorprendentes comenzando con el resultado de Mantel donde la gráfica prohibida es  $K_3$  resultado que fue generalizado después por Turán para cualquier gráfica completa  $K_r$ . Podemos decir que el resultado más importante es el Lema de Regularidad de Szemerédi que a grandes rasgos describe cómo son las gráficas con número de vértices “muy grande”.

Varios matemáticos húngaros continuaron resolviendo problemas de gráficas prohibidas, entre los que se incluyen P. Erdős y a sus alumnos A. Szemerédi, B. Bollobás y L. Lovász.

#### 5.1.1. Definiciones Básicas.

Para una gráfica  $F$  de orden  $k$  y un entero  $n \geq k$ , el *valor extremal*  $\text{ex}(n, F)$  de  $F$  es el máximo número de aristas en una gráfica de orden  $n$  que no contiene a  $F$  como subgráfica. Consecuentemente, toda gráfica de orden  $n$  y tamaño  $\text{ex}(n, F) + 1$  contiene a  $F$  como subgráfica. Las gráficas de orden  $n$ , tamaño  $\text{ex}(n, F)$  y que no contienen a  $F$  como subgráfica son las *gráficas extremales para*  $(n, F)$ . Podemos determinar  $\text{ex}(n, F)$  para algunas gráficas sencillas. Por ejemplo, si  $F = K_2$  entonces  $\text{ex}(n, F) = 0$  para  $n \geq 2$ , mientras que si  $F = P_2$ , entonces  $\text{ex}(n, F) = \lfloor n/2 \rfloor$  para  $n \geq 2$ .

Sean  $G$  y  $F$  dos gráficas; decimos que  $G$  es  $F$ -libre si  $F$  no es subgráfica de  $G$ . Podemos extender la definición a una familia de finita gráficas  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ . Decimos que  $G$  es  $\mathcal{F}$ -libre si es  $F_i$ -libre para toda  $F_i \in \mathcal{F}$ . El *valor extremal de  $\mathcal{F}$*  se define como:

$$\text{ex}(n, \mathcal{F}) := \max\{e(G) : v(G) = n \text{ y } G \text{ es } \mathcal{F}\text{-libre}\}.$$

Decimos que  $G$  es una *gráfica extremal* si  $v = n$ ,  $e(G) = \text{ex}(n, \mathcal{F})$  y es  $\mathcal{F}$ -libre. La función  $\text{ex}(n, \mathcal{F})$  satisface las siguientes propiedades:

**Lema 5.1.** *Si  $F'$  es subgráfica de  $F$  y  $\mathcal{F}'$  es un subconjunto de  $\mathcal{F}$ , las siguientes desigualdades se cumplen para cualquier  $n$ .*

$$\text{ex}(n, F') \leq \text{ex}(n, F) \tag{5.1}$$

$$\text{ex}(n, \mathcal{F}) \leq \text{ex}(n, \mathcal{F}') \tag{5.2}$$

$$\text{ex}(n, \mathcal{F}) \leq \text{ex}(n+1, \mathcal{F}) \tag{5.3}$$

*Demostración.* Para la primer desigualdad tomamos una gráfica  $G$  extremal para la pareja  $(n, F')$ , entonces  $G$  también es  $F$ -libre, por lo tanto  $\text{ex}(n, F') \leq \text{ex}(n, F)$ . Para la segunda desigualdad tomamos una gráfica  $G$  extremal para la pareja  $(n, \mathcal{F})$ ; por la definición sabemos que  $G$  es  $F$ -libre para toda  $F \in \mathcal{F}$ , por lo tanto también es  $\mathcal{F}'$ -libre para cualquier subconjunto de  $\mathcal{F}$ , con lo que obtenemos la desigualdad. La última desigualdad nos dice que la función  $\text{ex}(n, \mathcal{F})$  es monótona creciente con respecto a la primera variable. Esto se deduce de que si tenemos una gráfica  $G$  extremal para  $(n, \mathcal{F})$  entonces la gráfica  $G \cup \{x\}$  es una gráfica con  $n+1$  vértices y es  $\mathcal{F}$ -libre, por lo tanto  $\text{ex}(n, \mathcal{F}) \leq \text{ex}(n+1, \mathcal{F})$ . ■

### 5.1.2. Resultados clásicos.

A continuación revisamos algunos resultados clásicos sobre problemas de teoría de gráficas extremales.

**Teorema 5.1** (Mantel, [Man07]). *Para  $n \geq 3$  tenemos que:  $\text{ex}(n, K_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ ; la gráfica extremal es  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$  y es única.*

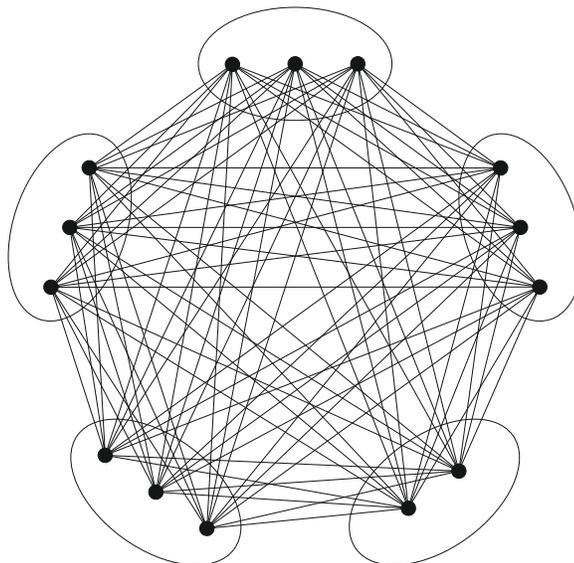
*Demostración.* Primero observemos que la gráfica  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$  es  $K_3$ -libre pues toda gráfica bipartita no tiene ciclos impares y tiene  $\lfloor n^2/4 \rfloor$  aristas, por lo tanto  $\lfloor n^2/4 \rfloor \leq \text{ex}(n, K_3)$ .

Ahora vamos a ver que cualquier gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$  aristas contiene a  $K_3$ , es decir  $\text{ex}(n, K_3) < \lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ . Procedemos por inducción en  $n$ . Para  $n = 3$ , la única gráfica de orden  $n$  y tamaño al menos  $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$  es  $K_3$ , que es por supuesto un triángulo. Para  $n = 4$ , la única gráfica con las condiciones dadas es  $K_4 - e$  y claramente contiene a  $K_3$ . Entonces el resultado es verdadero para  $n = 3, 4$ .

Supongamos que toda gráfica de orden  $k$  y tamaño al menos  $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$  contiene un triángulo para todos los enteros  $k$  con  $3 \leq k < n$ , donde  $n \geq 5$ . Ahora sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  con al menos  $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$  aristas. Sean  $u$  y  $v$  vértices adyacentes de  $G$  y definimos la gráfica  $H = G - u - v$ . Si  $u$  y  $v$  son mutuamente adyacentes a un vértice de  $H$ , entonces  $G$  tiene un triángulo. Entonces podemos decir que  $u$  y  $v$  tienen a lo más  $n-2$  vecinos en  $H$  y ninguno de estos es vecino de ambos. Por lo tanto el tamaño de  $H$  es al menos

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1 - (n-1) = \left\lfloor \frac{n^2 - 4n + 4}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1$$

Por la hipótesis de inducción,  $H$  contiene un triángulo, y por lo tanto también  $G$ . ■

Figura 5.1: Gráfica de Turán  $T_5(14)$ 

En la demostración del siguiente teorema veremos que la gráfica bipartita  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$  es la única gráfica extremal.

Decimos que una gráfica  $G$  es *multipartita* si existe una partición de los vértices de  $G$  en conjuntos independientes; si la partición tiene  $r$  elementos decimos que la gráfica es  *$r$ -partita* así que a las gráficas bipartitas también se les llama 2-partitas. Si  $G$  es una gráfica  $r$ -partita y tiene todas las aristas posibles entre cada partición, decimos que la gráfica  $G$  es  *$r$ -partita completa*.

¿Cuál es el valor  $\text{ex}(n, K_{r+1})$ , el máximo número de aristas en una gráfica de orden  $n$  que no contiene a  $K_{r+1}$ ? Si  $G$  es  $r$ -partita, entonces no contiene a  $K_{r+1}$ , pues cada conjunto de la partición de  $G$  contiene a lo más un vértice de una gráfica completa. Entonces  $\text{ex}(n, K_{r+1})$  es al menos tan grande como el tamaño máximo de una gráfica  $r$ -partita de orden  $n$ . De hecho, hay una única gráfica  $r$ -partita de orden  $n$  que tiene tamaño máximo; se llama la *gráfica de Turán*  $T_r(n)$  y es, en efecto, la gráfica  $r$ -partita completa con  $n$  vértices y particiones de los vértices tan iguales como sea posible, así que si ordenamos las particiones por tamaño y hay  $n_k$  vértices en la partición  $k$ -ésima, entonces  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq n_1 + 1$ . Para ver que este es el caso, sea  $G$  una gráfica  $r$ -partita de orden  $n$  y tamaño máximo. Claramente  $G$  es una gráfica  $r$ -partita completa. Supongamos que los conjuntos de la partición no son tan iguales como es posible; digamos que hay  $m_1$  vértices en una clase y  $m_2 \geq m_1 + 2$  en otra. Entonces, al transferir un vértice de la segunda clase a la primera, vamos a incrementar el número de aristas por  $(m_1 + 1)(m_2 - 1) - m_1 m_2 = m_2 - m_1 - 1 \geq 1$ . Las relaciones  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$  y  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  determinan únicamente a los  $n_i$  y por lo tanto  $T_r(n)$  es única. De hecho  $n_i = \lfloor (n + i - 1)/r \rfloor$  para  $i = 1, \dots, r$ .

**Teorema 5.2** (Turán, [Tur41]). *Para todos los enteros  $r, n$  con  $r > 1$ , toda gráfica  $K_r$ -libre con  $n$  vértices y  $\text{ex}(n, K_r)$  aristas es la gráfica  $T_{r-1}(n)$ .*

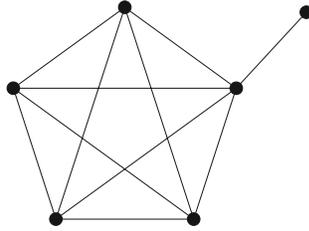


Figura 5.2: Gráfica extremal para el teorema 5.4.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $ex(n, K_r)$  aristas y  $K_r$ -libre. Ya vimos que entre las gráficas  $k$ -partitas con  $n$  vértices, las gráficas de Turán  $T_k(n)$  son las que tienen más aristas y además  $T_{r-1}(n)$  tiene más aristas que cualquier  $T_k(n)$  con  $k < r - 1$ , así que es suficiente demostrar que  $G$  es completa multipartita.

Si no es así, entonces la “no-adyacencia” no es una relación de equivalencia en  $V(G)$  y por lo tanto hay vértices  $y_1, x, y_2$  tales que  $y_1x, xy_2 \notin E(G)$  pero  $y_1y_2 \in E(G)$ . Si  $deg(y_1) > deg(x)$ , entonces al borrar  $x$  y reemplazarlo por una copia de  $y_1$  (es decir que el nuevo vértice  $y'_1$  tiene exactamente los mismos vecinos de  $y_1$ ) nos lleva a otra gráfica  $K_r$ -libre con más aristas que  $G$ , contradiciendo la elección de  $G$ . Así que  $deg(y_1) \leq deg(x)$  y, de manera similar,  $deg(y_2) \leq deg(x)$ . Pero al borrar ambos  $y_1$  y  $y_2$  y reemplazarlo por dos copias de  $x$  nos lleva a una gráfica  $K_r$ -libre con más aristas que  $G$  (si  $deg(x) = deg(y_1) = deg(y_2)$  estamos quitando la arista  $y_1y_2$  y la estamos reemplazando por dos nuevas aristas), de nueva vez contradiciendo la maximalidad de  $G$ , por lo tanto  $G$  es multipartita completa y de ahí concluimos que  $G \cong T_r(n)$ . ■

El siguiente teorema es un resultado clásico de la teoría de gráficas hamiltonianas y nos servirá para resolver un problema extremal.

**Teorema 5.3.** *Si  $G$  es una gráfica con orden al menos  $n \geq 3$  tal que para cualesquiera par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$ .*

$$deg(u) + deg(v) \geq n \tag{5.4}$$

entonces  $G$  es hamiltoniana.

**Teorema 5.4** (Ore. [Ore61]). *Para  $n \geq 3$ ,  $ex(n, C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$ . Sólo hay una gráfica extremal que es  $(K_{n-1} \cup K_1) + e$  donde  $e$  es cualquier arista que une a  $K_1$  y a  $K_{n-1}$ .*

*Demostración.* Por contradicción. Suponemos que existe una gráfica  $G$  con  $n$  vértices,  $\binom{n-1}{2} + 2$  aristas y que no es hamiltoniana, por lo tanto existen vértices  $u, v \in G$  no adyacentes tales que

$$deg(u) + deg(v) \leq n - 1$$

Entonces al quitar estos dos vértices tenemos una gráfica con  $n - 2$  vértices y al menos  $\binom{n-1}{2} + 2 - (n - 1)$  aristas, pero esto implica que:

$$e(G - u - v) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 = \binom{n-2}{2} + 1,$$

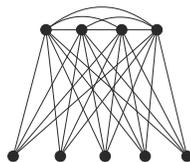


Figura 5.3: Gráfica purísima  $\mathcal{F}_2(9, 4)$ .

lo que quiere decir que la nueva gráfica tiene más aristas que la gráfica completa con  $n - 2$  vértices, lo cual es una contradicción. ■

Como es costumbre, Erdős dio una generalización al problema anterior.

**Teorema 5.5** (Erdős. [Erd62]). *Sea  $G$  una gráfica y  $\delta(G) \geq k$ , entonces*

$$\text{ex}(n, C_n) = \max_{k \leq t < n/2} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\}$$

El siguiente problema extremal nos dice cuál es el máximo número de aristas que tiene una gráfica  $pK_2$ -libre. Podemos ver inmediatamente que la gráfica completa  $K_{2p-1}$  es  $pK_2$ -libre, y que la gráfica  $\mathcal{F}_2(n, p-1)$  también es  $pK_2$ -libre. A partir de esta observación y de un juego de palabras en el idioma español decidimos “renombrar” a las gráficas  $\mathcal{F}_2(n, t)$  como las “purísimas” pues son libres de “pe-ka-dos”.

La demostración original de Erdős y Gallai, utiliza una técnica de *trayectorias alternantes* pero decidimos incluir la demostración de J. W. Moon [Moo68] porque es más elegante, solo involucra técnicas elementales de conteo y nos sirve como motivación para la demostración del teorema principal de esta tesis.

**Teorema 5.6** (Erdős, Gallai. [EG59]). *Para enteros positivos  $n$  y  $k$  con  $n \geq 2k$ ,*

$$\text{ex}(n, pK_2) = \max \left\{ \binom{2p-1}{2}, \varphi(n, p-1) \right\}, \quad (5.5)$$

*y las gráficas extremales son  $K_{2p-1}$  y  $\mathcal{F}_2(n, p-1)$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  que contiene un emparejamiento  $M$  de tamaño máximo  $p-1$  y sea  $U$  el conjunto de vértices de  $G$  que no son incidentes con alguna arista de  $M$ . Como  $M$  es un emparejamiento de tamaño máximo,  $U$  es un conjunto independiente. Además,  $U$  no contiene dos vértices que sean adyacentes a distintos vértices de  $G - U$  que están unidos por una arista de  $M$ ; de lo contrario,  $G$  contiene un emparejamiento de tamaño  $p$ , lo cual es una contradicción pues  $M$  es un emparejamiento de tamaño máximo. Ahora partimos las aristas de  $M$  en dos subconjuntos  $A$  y  $B$ . El conjunto  $A$  consiste de las aristas  $xy$  de  $M$  tales que alguno de los vértices  $x$  o  $y$ , digamos  $y$ , es adyacente a al menos dos vértices de  $U$ . El vértice  $x$  de la arista  $xy$  de  $A$  no es adyacente a ningún vértice de  $U$  (véase fig 5.4). El conjunto  $B$  consiste de las aristas restantes de  $M$ . Entonces si  $uv$  es una arista de  $B$ , hay a lo más un vértice de  $U$  que es adyacente a  $u$  o  $v$  (o ambos). Sean  $a = |A|$  y  $b = |B|$ ; así  $a + b = p - 1$ .

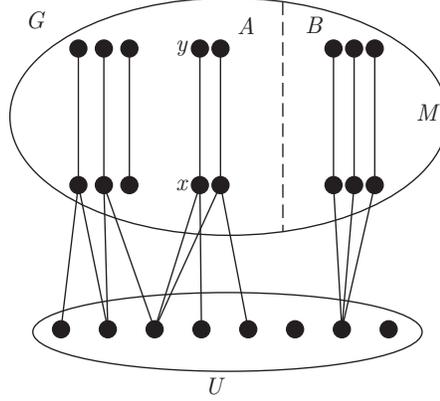


Figura 5.4: Bosquejo de la demostración del teorema 5.6.

Ahora observemos que si  $x_1y_1$  y  $x_2y_2$  son aristas de  $A$ , donde cada  $y_1$  y  $y_2$  es adyacente a al menos dos vértices de  $U$ , entonces  $x_1x_2 \notin E(G)$ ; de lo contrario  $G$  contiene un  $p$ -emparejamiento. Note que para cualquier par de aristas  $e_1$  y  $e_2$  de  $A$ , al menos un vértice incidente con  $e_1$  no es adyacente con un vértice de  $e_2$ ; así que el tamaño de  $\langle A \rangle$  es a lo más  $\binom{2a}{2} - \binom{a}{2}$ . Para cada arista  $e$  de  $A$ , hay un vértice incidente con  $e$  que no es adyacente con algún vértice de  $U$ . Entonces el número de aristas de que unen un vértice de  $\langle A \rangle$  con un vértice de  $U$  es a lo más  $a(n - 2p + 2)$ . Por lo tanto el número de aristas que son incidentes con dos vértices de  $A$  o con un vértice de  $A$  y un vértice de  $U$  es a lo más

$$\binom{2a}{2} - \binom{a}{2} + a(n - 2p + 2).$$

Ahora observemos que si  $x_1y_1$  y  $x_2y_2$  son aristas de  $A$ , donde  $y_1$  y  $y_2$  son adyacentes a dos o más vértices de  $U$ , entonces  $x_1$  y  $x_2$  no son adyacentes a distintos vértices incidentes de una arista  $uv$  de  $B$ ; de lo contrario  $G$  contiene un  $p$ -emparejamiento. Además, si  $u$  es adyacente a  $x_1$ , digamos, entonces  $v$  no es adyacente a algún vértice de  $U$ , pues de nuevo habría un  $p$ -emparejamiento en  $G$ . Esto implica que el número de aristas de  $G$  incidentes con al menos un vértice de  $B$  es a lo mas

$$\binom{2b}{2} + (2b)a + ba + 2b.$$

Como cada arista de  $G$  es una de los tipos descritos arriba, se sigue que

$$\begin{aligned} m &\leq \binom{2a}{2} - \binom{a}{2} + a(n - 2p + 2) + \binom{2b}{2} + (2b)a + ba + 2b \\ &= \binom{2p-1}{2} + \frac{a(2n - 5p + 2)}{2} - \frac{ab}{2} \\ &\leq \binom{2p-1}{2} + \frac{a(2n - 5p + 2)}{2} \\ &= (p-1)n - \binom{p}{2} - \frac{b(2n - 5p + 2)}{2} \end{aligned}$$

Si  $2n - 5p + 2 = 0$ , entonces por supuesto  $\binom{2p-1}{2} = (p-1) - \binom{p}{2}$ . Si  $2n - 5p + 2 > 0$ , entonces la ecuación anterior alcanza su valor máximo cuando  $b = 0$ ; mientras que si  $2n - 5p + 2 < 0$  entonces las ecuaciones anteriores alcanzan su valor máximo cuando  $a = 0$ , por lo tanto

$$m \leq \max \left\{ (p-1)n - \binom{p}{2}, \binom{2p-1}{2} \right\}$$

y por lo tanto

$$\text{ex}(n, pK_2) \leq \max \left\{ (p-1)n - \binom{p}{2}, \binom{2p-1}{2} \right\}.$$

La gráfica  $K_{2p-1} \vee \overline{K_{n-2p+1}}$  tiene orden  $n$ , tamaño  $\binom{2p-1}{2}$  y un emparejamiento de tamaño máximo  $p-1$ . Además la gráfica  $\mathcal{F}_2(n, p-1)$  tiene orden  $n$ , tamaño  $\varphi(n, p-1) = (p-1)n - \binom{p}{2}$  y emparejamiento de tamaño máximo  $p-1$ . Por lo tanto

$$\text{ex}(n, pK_2) \geq \max \left\{ (p-1)n - \binom{p}{2}, \binom{2p-1}{2} \right\},$$

lo que nos lleva al resultado buscado. ■

## 5.2. Teoría de Conjuntos extremales.

En esta sección vamos a ver varios resultados de Teoría de Conjuntos extremales. El resultado principal del área es el Teorema de Erdős-Ko-Rado que fue publicado en 1961; hay varias demostraciones éste teorema y en la tesis incluimos dos que consideramos importantes por su relación con el resultado principal. La primer demostración introduce la idea de “desplazamiento” o “compresión” (*shifting* en inglés) que es una herramienta importante para este tipo de problemas, y la segunda es una demostración de “el libro” desarrollada por G. Katona donde utiliza herramientas elementales de álgebra y de doble conteo. En la parte final incluimos varios resultados relevantes para el tema principal de la tesis.

En la actualidad hay un proyecto dirigido por varios de los investigadores más importantes del área de matemáticas discretas que lleva el nombre de *Polymath* y los proyectos “Polymath 10 y 11” son dos problemas de conjuntos extremales.

También hablamos de sistemas de conjuntos en vez de hipergráficas porque es más sencillo formular los resultados de esa manera. Entonces  $X$  representa a un conjunto finito de cardinalidad  $n$ . Un *sistema de conjuntos de  $X$*  es una familia de subconjuntos de  $X$ , y como en el caso de hipergráficas diremos que el sistema es  $k$ -uniforme si todos los subconjuntos son de tamaño  $k$ .

### 5.2.1. La Teoría de desplazamiento.

La teoría de *desplazamiento* apareció en el artículo [EKR61] y posteriormente se observó que es un herramienta muy útil para resolver problemas de conjuntos extremales. Uno de los principales autores que se dedican a este tipo de problemas es P. Frankl y esta sección está basada en varios de sus artículos.

El primer resultado sirve para darnos una idea general sobre los problemas de conjuntos extremales.

**Teorema 5.7.** *Sea  $\mathcal{F}$  un sistema de conjuntos de  $X$ . Si  $\mathcal{F}$  es intersectante, entonces  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$*

*Demostración.* Usamos el principio de las casillas. En cada casilla ponemos a la pareja  $(F, X \setminus F)$  donde  $F \in \mathcal{F}$ , por lo tanto tenemos a lo más  $2^{n-1}$  casillas pues el número total de subconjuntos de  $X$  es  $2^n$  pero como los estamos colocando en pareja con su respectivo complemento tenemos a lo más la mitad de los subconjuntos de  $X$ . Si suponemos que  $|\mathcal{F}| \geq 2^{n-1} + 1$ , entonces tenemos  $2^{n-1} + 1$  subconjuntos de  $X$ ; por el principio de las casillas, hay dos subconjuntos  $F$  y  $F'$  en la misma casilla, lo que quiere decir que su intersección es vacía, lo cual contradice la hipótesis de que  $\mathcal{F}$  es intersectante, por lo tanto  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ . ■

Una vez que la desigualdad está demostrada, estamos interesados en saber cuales familias alcanzan la igualdad. Estas familias son llamadas *óptimas (saturadas)*. En el caso del teorema 5.7 hay muchas familias óptimas y el siguiente lema nos da una receta de cómo generar estas familias.

**Lema 5.2.** *Dada una familia intersectante  $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ , existe otra familia intersectante  $\mathcal{G} \subseteq 2^X$  que satisface  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  y  $|\mathcal{G}| = 2^{n-1}$ .*

*Demostración.* Dada una familia intersectante  $\mathcal{F}$  tal que  $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$  podemos agregar un subconjunto nuevo a la familia de la siguiente manera: Sea  $A \subseteq X$  tal que  $A \notin \mathcal{F}$  y  $A^c \notin \mathcal{F}$ . Si  $A \cap F \neq \emptyset$  para todo  $F \in \mathcal{F}$  así que  $\mathcal{F} \cup \{A\}$  es una familia intersectante; en caso contrario existe  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $A \cap F = \emptyset$  entonces  $A^c$  contiene a  $F$  y, como la familia  $\mathcal{F}$  es intersectante, tenemos que  $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$  también es una familia intersectante. Continuamos agregando subconjuntos de esta manera hasta que tengamos una familia intersectante maximal  $\mathcal{G}$ , es decir, si  $A \subseteq X$ , entonces  $A \in \mathcal{G}$  o  $A^c \in \mathcal{G}$  y en el teorema 5.7 vimos que esta familia tiene cardinalidad  $2^{n-1}$ . ■

El primer teorema de intersecciones fue demostrado por Erdős, Ko y Rado a finales de 1930, sin embargo no fue publicado hasta 1961.

Los conjuntos tienen poca estructura y por esto es difícil trabajar con ellos, pero para cierto tipo de problemas extremales, el *desplazamiento* permite superar esta dificultad.

Para enteros  $1 \leq i < j \leq n$  y  $F$  un subconjunto de  $X$ , definimos el *desplazamiento-(i, j)* de  $F$ ,  $S_{ij}(F)$  como sigue:

$$S_{ij}(F) = \begin{cases} (F \setminus \{j\}) \cup \{i\} = F' & \text{Si } i \notin F, j \in F, F' \notin \mathcal{F} \\ F & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.6)$$

y para un sistema de conjuntos  $\mathcal{F}$  de  $X$ :

$$\mathcal{S}_{ij}(\mathcal{F}) = \{S_{ij}(F) : F \in \mathcal{F}\} \quad (5.7)$$

**Ejemplo 5.8.** *Sea  $X = [5]$  y  $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ ; ahora bien, consideremos la instrucción sencilla de desplazamiento, “intercambiar al 5 por el 2 donde sea posible”; los únicos conjuntos candidatos para utilizar el desplazamiento son  $\{3, 5\}$  y  $\{4, 5\}$  pero no podemos desplazar el conjunto  $\{3, 5\}$  pues quedaría el conjunto  $\{2, 3\}$  y este es un elemento de  $\mathcal{F}$ . Entonces el desplazamiento-(2, 5) de  $\mathcal{F}$  es  $\mathcal{S}_{25}(\mathcal{F}) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}\}$ , donde el único conjunto que se intercambió fue el  $\{4, 5\}$  por el  $\{2, 4\}$ .*

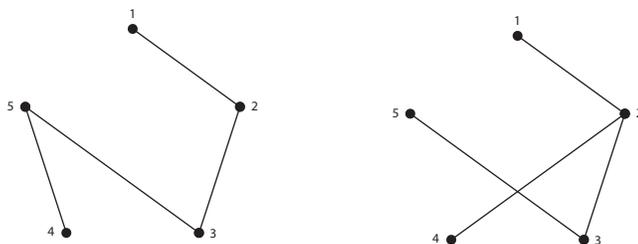


Figura 5.5: La familia  $\mathcal{F}$  antes y después del desplazamiento

La palabra desplazamiento viene de darle un orden parcial a  $\binom{[n]}{k}$ . Sean  $A, B \in \binom{[n]}{k}$  dos  $k$ -subconjuntos. Etiquetamos a sus elementos con el orden usual, es decir, si  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  y  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  entonces  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  y  $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ . Decimos que  $A <_l B$  en el orden *lexicográfico* si  $a_1 < b_1$ , o  $a_1 = b_1$  y  $a_2 < b_2$ , o  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  y  $a_3 < b_3$ , o  $\dots$   $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$  y  $a_k < b_k$ . Ahora bien, en el orden *colexicográfico* decimos que  $A <_c B$  si  $A \neq B$  y para  $s = \max\{t | a_t \neq b_t\}$  tenemos que  $a_s < b_s$ . También lo podemos escribir de manera similar a como definimos el orden lexicográfico, es decir,  $A <_c B$  si  $a_k < b_k$ , o  $a_k = b_k$  y  $a_{k-1} < b_{k-1}$ , o  $a_k = b_k, a_{k-1} = b_{k-1}$  y  $a_{k-2} < b_{k-2}$ , o  $\dots$   $a_k = b_k, a_{k-1} = b_{k-1}, \dots, a_2 = b_2$  y  $a_1 < b_1$ .

Por ejemplo,  $\{2, 4, 6, 8, 9\} <_l \{2, 5, 6, 7, 9\}$  y  $\{2, 5, 6, 7, 9\} <_c \{2, 4, 6, 8, 9\}$ .

**Lema 5.3.** Para cualquier  $A \in \mathcal{F}$  se tiene que  $S_{ij}(A) \leq_c A$ .

*Demostración.* La igualdad la obtenemos cuando  $S_{ij}(A) = A$ , por lo tanto solo nos concentramos en verificar que  $A' = (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} <_c A$ . Si  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  con sus elementos ordenados, entonces  $A'$  tiene los mismos elementos salvo el elemento  $a_r = j$  que fue intercambiado por  $i$ ; entonces el elemento  $a_{r-1}$  fue desplazado hacia la posición  $r$ -ésima dentro del conjunto  $A'$ , es decir,  $A' = \{\dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_k\}$ . Lo que nos interesa en el orden colexicográfico son los últimos elementos de cada conjunto y vemos que los elementos de  $A$  y  $A'$  son iguales hasta la posición  $r$ -ésima donde sabemos que  $a_{r-1} < a_r$ , por lo tanto  $A' <_c A$ . ■

La siguiente proposición recoge algunas propiedades sencillas pero importantes del desplazamiento.

**Lema 5.4.** Sea  $\mathcal{F}$  un sistema de conjuntos de  $X$ . Entonces:

1.  $|S_{ij}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$
2. Si  $\mathcal{F}$  es  $k$ -uniforme, entonces  $S_{ij}(\mathcal{F})$  también.
3. Si  $\mathcal{F}$  es intersectante entonces  $S_{ij}(\mathcal{F})$  también.

*Demostración.* 1 y 2 son evidentes. Para demostrar 3 escogemos  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ . Sean  $B_1$  y  $B_2$  los conjuntos correspondientes en  $\mathcal{S}_{ij}(\mathcal{F})$ , i.e.  $\mathcal{S}_{ij}(A_\nu) = B_\nu$  para  $\nu = 1, 2$  y demostraremos que  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ . Si  $|A_1 \cap A_2| \geq 2$  entonces  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  pues solo estamos cambiando a lo más un elemento de cada  $A_\nu$ , así que podemos suponer que  $|A_1 \cap A_2| = 1$ . Si  $B_\nu = A_\nu$  para  $\nu = 1, 2$  claramente se intersectan, si  $B_\nu = (A_\nu \setminus \{j\}) \cup \{i\}$  para  $\nu = 1, 2$ , entonces  $i \in B_1 \cap B_2$  y también se intersectan. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $B_1 = A_1$  y  $B_2 = (A_2 \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ . Hay dos casos en los cuales  $B_1 = A_1$ ; el primero es cuando  $j \notin A_1$ , pero como  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ , entonces existe  $x \in [n]$  tal que  $A_1 \cap A_2 = \{x\}$  con  $x \neq j$ , por lo tanto  $x \in B_1 \cap B_2$ . El otro caso es cuando  $j \in A_1$ , pero entonces el conjunto  $A_3 = (A_1 \setminus \{j\}) \cup \{i\}$  también pertenece a la familia  $\mathcal{F}$ ; como  $j$  es elemento de  $A_2$ , entonces  $A_1 \cap A_2 = \{j\}$  pero esto implica que  $A_3 \cap A_2 = \emptyset$  lo cual es una contradicción pues  $\mathcal{F}$  es intersectante, por lo tanto  $j \notin A_1$ , con lo cual quedan abarcados todos los casos. ■

Si continuamos desplazando, terminamos con una familia *desplazada*  $\mathcal{G}$ , i.e.  $\mathcal{S}_{ij}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ , para todos  $1 \leq i < j \leq n$ .

**Lema 5.5.** *Supongamos que  $\mathcal{F}$  es  $k$ -uniforme, intersectante y desplazada. Entonces para todo  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$*

$$|F_1 \cap F_2 \cap [2k - 1]| \geq 1. \quad (5.8)$$

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que existe una familia  $\mathcal{F}$  y elementos de la familia  $F_1, F_2$  tales que  $F_1 \cap F_2 \cap [2k - 1] = \emptyset$  y que además  $F_1$  tenga intersección máxima con  $[2k - 1]$ , es decir,  $F_1 \cap [2k - 1]$  tiene cardinalidad máxima. Como  $\mathcal{F}$  es intersectante, existe un  $j \in (F_1 \cap F_2)$ ,  $j > 2k - 1$ . Entonces  $F_1 \cup F_2 \not\subseteq [2k - 1]$  y podemos escoger  $i \notin F_1 \cup F_2$ ,  $i \leq 2k - 1$  y reemplazar  $F_1$  con  $(F_1 \setminus \{j\}) \cup \{i\}$  (recordemos que  $\mathcal{F}$  es desplazada); así tenemos una contradicción con la maximalidad de  $|F_1 \cap [2k - 1]|$ . ■

Ahora demostraremos el teorema de Erdős-Ko-Rado,  $n \geq 2k$ .

**Teorema 5.9** (Erdős, Ko, Rado. [EKR61]). *Si  $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$  es una familia intersectante y  $n \geq 2k$ , entonces*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

*Demostración.* Apliquemos inducción en  $k$ . El enunciado es trivial para  $k = 1$ . Ahora separamos la demostración en dos casos;  $n = 2k$  y  $n > 2k$ .

- $n = 2k$ . Si  $F \in \mathcal{F}$  entonces  $|[n] \setminus F| = n - k = k$  y  $(X \setminus F) \notin \mathcal{F}$ , de manera que  $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ .
- $n > 2k$ . En vista del lema 5.4 podemos suponer que  $\mathcal{F}$  es desplazado. Definimos  $\mathcal{F}_i = \{F \cap [2k] : F \in \mathcal{F}, |F \cap [2k]| = i\}$ . Por el lema 5.5,  $\mathcal{F}_i$  es intersectante.

Por inducción  $|\mathcal{F}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1}$  para  $i = 0, 1, \dots, k - 1$  y lo mismo se cumple para  $i = k$  por el caso anterior. Dada  $G \in \mathcal{F}_i$  hay a lo más  $\binom{n-2k}{k-i}$  conjuntos  $F$  en  $\mathcal{F}$  con

$F \cap [2k] = G$ . Inferimos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &\leq \sum_{1 \leq i \leq k} |\mathcal{F}_i| \binom{n-2k}{k-i} \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{k-i} \binom{n-2k}{k-i} \\ &= \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

■

**Segunda demostración.** La siguiente demostración es de G. Katona [Kat72] y también se le considera como una demostración de “el libro”; las ideas que utiliza son elementales y por eso se le reconoce como una demostración elegante.

La clave de la demostración está en el siguiente lema, que a primera vista no parece estar relacionado con nuestro problema. Consideremos un ciclo  $C_n$  que tiene  $n$  vértices y  $n$  aristas. Un *arco* de longitud  $k$  consiste de  $k+1$  puntos consecutivos y las aristas entre ellos. Dado un arco de longitud  $k$  es de la forma  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  donde  $a_1 \in [n]$  y  $a_i = a_1 + (i-1)$  para  $i = 2, \dots, k$  con la suma módulo  $n$ . Entonces decimos que  $a_1$  es un vértice inicial del arco y  $a_k$  es un vértice final.

**Lema 5.6.** *Sea  $n \geq 2k$ . Si existen  $t$  arcos distintos de longitud  $k$  tales que cualesquiera dos arcos tienen una arista en común, entonces  $t \leq k$ .*

*Demostración.* Para demostrar el lema, primero notemos que cualquier vértice del círculo  $C$  es el vértice final de a lo más un arco. Por ejemplo, supongamos que  $A_i$  y  $A_j$  tienen un vértice final común  $v$ , entonces los arcos empezaron en direcciones opuestas (pues son distintos) y tampoco pueden tener una arista en común pues  $n \geq 2k$  por lo tanto tienen vértices finales diferentes. Fijemos  $A_1$ ; como  $A_i$  ( $i \geq 2$ ) tiene una arista en común con  $A_1$ , uno de los puntos finales de  $A_i$  es un punto interior de  $A_1$ . Para arcos diferentes  $A_j, A_k$ , estos puntos tienen que ser diferentes como acabamos de ver y, como  $A_1$  tiene  $k-1$  puntos interiores, concluimos que puede haber a lo más  $k-1$  de estos arcos, y por lo tanto hay a lo más  $k$  arcos en total que satisfacen la hipótesis. ■

Ahora continuamos con la demostración del Teorema de Erdős-Ko-Rado.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  una familia  $k$ -uniforme intersectante. Consideremos un ciclo  $C_n$  como en el lema anterior. Tomemos cualquier permutación cíclica  $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  y escribamos los números  $a_i$  en el sentido de las manecillas del reloj junto a las aristas de  $C$ . Contamos el número de conjuntos  $A \in \mathcal{F}$  que aparecen como  $k$  números consecutivos en  $C$ . Como  $\mathcal{F}$  es una familia intersectante, por nuestro lema anterior, sabemos que tenemos a lo más  $k$  de estos conjuntos. Esto es cierto para cualquier permutación cíclica, y como hay  $(n-1)!$  permutaciones cíclicas, tenemos a lo más  $k(n-1)!$  conjuntos de  $\mathcal{F}$  que aparecen como elementos consecutivos de alguna permutación cíclica. ¿Qué tan seguido contamos un elemento fijo  $A \in \mathcal{F}$ ? Muy fácil:  $A$  aparece en  $\pi$  si los  $k$  elementos de  $A$  aparecen consecutivamente en algún orden. Entonces tenemos  $k!$  posibilidades de escribir  $A$  de

manera consecutiva, y  $(n-k)!$  maneras de ordenar los elementos restantes. Así concluimos que un conjunto fijo  $A$  aparece precisamente en  $k!(n-k)!$  permutaciones cíclicas. Acabamos de demostrar que  $k!(n-k)|\mathcal{F}| \leq k(n-1)!$ , por lo tanto

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!)} = \binom{n-1}{k-1}. \quad (5.9)$$

■

Hay un ensayo con varias demostraciones del teorema EKR por si lector está interesado [FG89].

Todas las definiciones de la Teoría de Gráficas extremal se pueden generalizar a las hipergráficas. En esta sección damos tales definiciones para poder utilizarlas adelante.

Una hipergráfica  $\mathcal{H} = (V, E)$  es  $\mathcal{F}$ -libre si no existe  $\mathcal{F}'$  isomorfa a  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}'$  es subgráfica de  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k\}$  es una familia finita de hipergráficas, decimos que  $\mathcal{H}$  es  $\mathfrak{F}$ -libre si es  $\mathcal{F}_i$ -libre para toda  $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{F}$ . El *valor extremo* para hipergráficas  $k$ -uniformes de la pareja  $(n, \mathcal{F})$  se define como:

$$\text{ex}_k(n, \mathcal{F}) := \text{máx} \left\{ e(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k}, v(\mathcal{H}) = n \text{ y } \mathcal{H} \text{ es } \mathcal{F}\text{-libre} \right\}.$$

Decimos que una hipergráfica  $\mathcal{H}$  es *extrema* si  $e(\mathcal{H}) = \text{ex}_k(n, \mathcal{F})$  y es  $\mathcal{F}$ -libre.

La función  $\text{ex}_k(n, \mathcal{F})$  satisface las siguientes propiedades:

**Lema 5.7.** *Si  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ , las siguientes desigualdades se cumplen para cualquier  $n$ .*

$$\begin{aligned} \text{ex}_k(n, \mathcal{F}') &\leq \text{ex}_k(n, \mathcal{F}) \\ \text{ex}_k(n, \mathcal{F}) &\leq \text{ex}_k(n, \mathcal{F}') \\ \text{ex}_k(n, \mathcal{F}) &\leq \text{ex}_k(n+1, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Decimos que una familia de  $\mathcal{F}$  de subconjuntos es intersectante si cualesquiera dos elementos  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  de  $\mathcal{F}$  se intersectan.

Los siguientes son teoremas que generalizan el resultado de Erdős, Ko y Rado.

**Teorema 5.10** (P. Frankl 1976). *Sea  $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$  una familia de subconjuntos tales que para cualesquiera  $F_1, F_2, \dots, F_q \in \mathcal{F}$ ,  $\bigcap_{j=1}^q F_j \neq \emptyset$ . Si  $n \geq \frac{qk}{q-1}$ , entonces*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Erdős intentó dar la siguiente generalización al teorema [EKR61] pero se conserva como una conjetura hasta la fecha; el mejor resultado es el que recientemente dio P. Frankl en 2013.

**Conjetura 1** ([Erd65]). *Si  $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$  y no tiene tiene  $p$  aristas ajenas, entonces*

$$|\mathcal{F}| \leq \text{máx} \left\{ \binom{pk-1}{k}, \binom{n}{k} - \binom{n-(p-1)}{k} \right\}$$

para  $n \geq pk - 1$ .

**Teorema 5.11** (P. Frankl. [Fra13]). *Si  $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$  y no tiene  $p$  aristas ajenas, entonces*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-(p-1)}{k}$$

*para  $n \geq (2p-1)k - (p-1)$ .*

En ambos resultados se intenta afirmar que únicamente hay dos gráficas extremas para el problema  $\text{ex}_k(n, pE_k)$ , una es una gráfica completa y la otra la familia de hipergráficas que es el equivalente a las gráficas purísimas que definimos en 1.1. Si  $k = 2$  tenemos el teorema de Erdős-Gallai y si  $p = 2$  es el teorema de Erdős-Ko-Rado.



# Capítulo 6

## Resultados.

En este capítulo definimos el problema  $(p, q)$ -extremal y obtenemos su solución para el caso de gráficas. El teorema más importante es el 6.1 y como corolario obtenemos el número cromático de las hipergráficas de Kneser para  $k = 2$ . Por último planteamos futuros proyectos de investigación que surgieron durante las sesiones de trabajo de esta tesis.

### 6.1. El problema $(p, q)$ -extremal

Decimos que una hipergráfica  $k$ -uniforme satisface la *propiedad*- $(p, q)$  si para cualesquiera  $p$  aristas,  $q$  de ellas se intersectan. El *problema*  $(p, q)$ -*extremal* consiste en encontrar el mayor número de aristas que tiene una hipergráfica  $k$ -uniforme y que satisface la propiedad- $(p, q)$ .

En otras palabras, queremos encontrar una hipergráfica  $\mathcal{H}$  con  $n$  vértices tal que la familia de aristas  $E(\mathcal{H})$  es máxima con la propiedad- $(p, q)$ , esto quiere decir que cualquier subhipergráfica de  $\mathcal{H}$  con  $p$  aristas tiene un vértice que está en al menos  $q$  de las  $p$  aristas elegidas.

La *familia de grado acotado*, representada por  $\mathfrak{D}_k(p, q)$ , se define como la familia de todas las hipergráficas  $k$ -uniformes con  $p$  aristas, sin vértices aislados y grado máximo menor o igual a  $q - 1$ . Esto es:

$$\mathfrak{D}_k(p, q) = \left\{ \mathcal{H} \subseteq \binom{[s]}{k} : s \geq k, e(\mathcal{H}) = p, \delta(\mathcal{H}) \geq 1, \Delta(\mathcal{H}) \leq q - 1 \right\}. \quad (6.1)$$

El lema de los saludos para hipergráficas  $k$ -uniformes nos da el número de vértices para cada  $\mathcal{H} \in \mathfrak{D}_k(p, q)$ :

$$\frac{kp}{q-1} \leq v(\mathcal{H}) \leq kp. \quad (6.2)$$

Si  $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k}$  es una hipergráfica  $k$ -uniforme tal que  $e(\mathcal{H}) < p$ , entonces  $\mathcal{H}$  es  $\mathfrak{D}_k(p, q)$ -libre porque todas las hipergráficas de  $\mathfrak{D}_k(p, q)$  tienen exactamente  $p$  aristas. Además  $\mathcal{H}$  satisface la propiedad- $(p, q)$  por vacuidad. Si  $\mathcal{F} \in \mathfrak{D}_k(p, q)$ , entonces  $\mathcal{F}$  no satisface la

propiedad- $(p, q)$  porque  $e(\mathcal{F}) = p$ ,  $\Delta(\mathcal{F}) \leq q - 1$ , y esto significa que para cualquier vértice  $v \in \mathcal{F}$ , el número de aristas de  $\mathcal{F}$  que contienen a  $v$  es a lo más  $q - 1$ . Entonces cualquier elección de  $q$  aristas de  $\mathcal{F}$  tiene intersección vacía.

**Lema 6.1.** Una hipergráfica  $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k}$  satisface la propiedad- $(p, q)$  si y solo si  $\mathcal{H}$  es  $\mathfrak{D}_k(p, q)$ -libre.

*Demostración.* Por las previas observaciones, podemos suponer que  $e(\mathcal{H}) \geq p$ . Supongamos además que  $\mathcal{H}$  satisface la propiedad- $(p, q)$ . Entonces no puede tener como subgráfica a ninguna  $\mathcal{F} \in \mathfrak{D}_k(p, q)$  porque  $\mathcal{F}$  no satisface la propiedad- $(p, q)$ . De manera inversa, supongamos que  $\mathcal{H}$  es  $\mathfrak{D}_k(p, q)$ -libre; entonces elegimos cualesquiera  $p$  aristas de  $\mathcal{H}$  y las etiquetamos como  $A = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ . Sea  $\mathcal{F}$  la hipergráfica con conjunto de vértices  $V = \bigcup_{i=1}^p e_i$  y conjunto de aristas  $A$ . Entonces  $e(\mathcal{F}) = p$  y  $\delta(\mathcal{F}) \geq 1$  y, como  $\mathcal{H}$  es  $\mathfrak{D}_k(p, q)$ -libre, entonces  $\Delta(\mathcal{F}) \geq q$  y esto implica que hay  $q$  aristas contenidas en  $A$  que tienen intersección no vacía. Por lo tanto  $\mathcal{H}$  satisface la propiedad- $(p, q)$ . ■

Así, el problema  $(p, q)$ -extremal es equivalente a encontrar  $\text{ex}_k(n, \mathfrak{D}_k(p, q))$ .

**Definición 6.1.** Dados  $n, k, t$ , enteros positivos con  $n \geq t \geq 1$ , definimos las hipergráficas purísimas  $k$ -uniformes  $\mathcal{F}_k(n, t) \subseteq \binom{[n]}{k}$ :

$$\mathcal{F}_k(n, t) := \left\{ A \in \binom{[n]}{k} : A \cap [t] \neq \emptyset \right\}. \quad (6.3)$$

Además,

$$\mathfrak{F}_k(n, t, r) = \left\{ \mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k} : \mathcal{F}_k(n, t) \subseteq \mathcal{H}, e(\mathcal{H}) = e(\mathcal{F}_k(n, t)) + r \right\}$$

es la familia de  $k$ -hipergráficas que contiene a  $\mathcal{F}_k(n, t)$  como subhipergráfica, tiene exactamente  $r$  aristas sin ningún vértice de  $[t]$ . A cualquier hipergráfica  $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_k(n, t)$  le llamaremos *hipergráfica purísima con  $r$  apestados*.

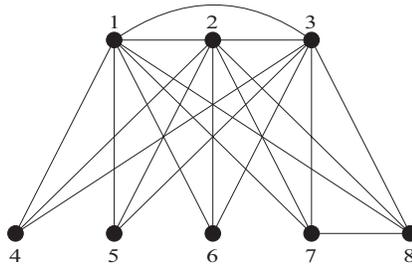


Figura 6.1: Ejemplo de una gráfica  $F \in \mathfrak{F}_2(8, 3, 1)$

**Lema 6.2.** Si  $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_k(n, t, r)$ , entonces  $\mathcal{H}$  satisface la propiedad- $(p, q)$  con  $t = \left\lfloor \frac{p-1}{q-1} \right\rfloor$  y  $r$  es el residuo de  $\frac{p-1}{q-1}$ .

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $p - 1 = t(q - 1) + r$ , donde  $t \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq r < q - 1$ . Todas las aristas de  $\mathcal{H}$  tienen un vértice en  $[t]$  excepto, digamos, por las aristas  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ . Si tomamos cualesquiera  $p$  aristas en  $\mathcal{H}$  entonces a lo más  $r$  aristas están en  $\mathcal{E}$ . Entonces las otras  $p - r = t(q - 1) + 1$  están en  $[t]$ , pero por el principio de las casillas, un vértice es adyacente al menos  $q$  de las aristas restantes. ■

Observemos que para cada  $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_k(n, t, r)$ ,  $e(\mathcal{H}) = \binom{n}{k} + \binom{n-t}{k} + r$ . Entonces definimos la función  $\varphi_k(n, p, q) := e(\mathcal{H})$  para toda  $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}_k(n, t, r)$  donde  $t$  y  $r$  se definen como en el lema 6.2.

**Lema 6.3.** *Sea  $G$  una gráfica bipartita con conjuntos de partición  $A$  y  $B$ . Si  $|A| \leq |B|$  y  $e(G) > (t - 1)|B|$ , entonces  $G$  tiene un  $t$ -emparejamiento. Además  $|A| \geq t$ .*

*Demostración.* Procedemos por contradicción. Supongamos que el emparejamiento máximo tiene a lo más  $t - 1$  aristas. Entonces por el teorema de König, sea  $c$  el número de vértices de una cubierta mínima de vértices; entonces  $c$  es a lo más  $t - 1$ . Sea  $C$  una cubierta mínima de vértices. Como esta pertenece a una gráfica bipartita sabemos que  $C = A' \cup B'$  donde  $A' \subseteq A$  y  $B' \subseteq B$ ; sean  $a = |A'|$  y  $b = |B'|$  sus respectivas cardinalidades; como son parte de una cubierta mínima concluimos que  $a + b = t - 1$ , entonces:

$$e(G) \leq a|B| + b|A| \tag{6.4}$$

$$\leq a|B| + b|B| = (t - 1)|B|, \tag{6.5}$$

lo cual es una contradicción.

Como  $G$  es una gráfica bipartita con un  $t$ -emparejamiento es claro que la menor de las particiones tiene que tener al menos  $t$  vértices. ■

**Teorema 6.1** (El problema  $(p, q)$ -extremal para gráficas). *Sean  $n, p$  y  $q$  números naturales. Si  $n \geq 2p^2$  y  $p \geq q \geq 3$ , tenemos que*

$$\text{ex}(n, \mathfrak{D}_2(p, q)) = \varphi_2(n, p, q) \tag{6.6}$$

*y la gráfica extremal es cualquier  $G \in \mathfrak{F}_2(n, t, r)$  salvo isomorfismo, donde  $t = \left\lfloor \frac{p-1}{q-1} \right\rfloor$  y  $r$  es el residuo de  $\frac{p-1}{q-1}$ .*

Antes de dar la demostración del teorema 6.1 notamos que el problema  $(p, 2)$ -extremal es equivalente al teorema 5.6 pues la familia de gráficas prohibidas  $\mathfrak{D}_2(p, 2)$  consiste únicamente de la gráfica  $pK_2$ .

*Demostración.* Dado  $q \geq 3$ , demostraremos el teorema por inducción en  $p$  a partir de  $p = q$ . La propiedad- $(q, q)$  dice que cualesquiera  $q$  aristas se intersectan en un vértice, pero esto implica que todas las aristas de  $G$  se intersectan en el mismo vértice pues  $n \geq 18$ , por lo tanto  $e(G) \leq n - 1 = \varphi_2(n, q, q)$ . La gráfica  $\mathcal{F}(n, 1)$  satisface la propiedad- $(q, q)$ , por lo tanto  $\text{ex}(n, \mathfrak{D}_2(q, q)) \geq n - 1$ . Entonces  $\text{ex}(n, \mathfrak{D}_2(q, q)) = \varphi_2(n, q, q)$ .

Para el siguiente paso, suponemos que  $p > q$  y, por inducción, que el teorema 6.1 es cierto para  $p - 1$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2p^2$  y supongamos que  $G$  es cualquier gráfica con  $e(G) = \text{ex}(n, \mathfrak{D}_2(p, q))$ . Por el lema 6.2, sabemos que  $e(G) \geq \varphi_2(n, p, q)$ . En lo que sigue, demostraremos que  $e(G) \leq \varphi_2(n, p, q)$  y  $G \in \mathfrak{F}_2(n, t, r)$ . Es fácil ver que  $\varphi_2(n, p, q) >$

$\varphi(n, p-1, q)$ , así que usando inducción, tenemos que  $e(G) > \varphi_2(n, p-1, q)$ . Entonces  $G$  contiene una subgráfica  $F \in \mathfrak{D}_2(p-1, q)$ .

Para poder demostrar que  $e(G) \leq \varphi_2(n, p, q)$ , será suficiente demostrar que existe un conjunto  $X \subseteq V(G)$  de cardinalidad  $t$  contenido en  $V(F)$  tal que  $\langle V(G) \setminus X \rangle$  contiene exactamente  $r$  aristas y eso lo conseguiremos demostrando las siguientes afirmaciones.

- a)  $V(G) \setminus V(F)$  es un conjunto independiente de vértices en  $G$ ,
- b)  $e(V(F) \setminus X, V(G) \setminus V(F)) = 0$ , y
- c)  $\langle V(F) \setminus X \rangle$  contiene exactamente  $r$  aristas en  $G$ .

**Demostración de a)**

Supongamos que existe una arista  $e$  contenida en  $\langle V(G) \setminus V(F) \rangle$ . Entonces las aristas de  $F$  junto con  $e$  contradicen la propiedad- $(p, q)$ .

**Demostración de b)**

Empezaremos por demostrar que  $e(V(F), V(G) \setminus V(F)) > (t-1)(v(G) - v(F))$ . Supongamos que  $e(V(F), V(G) \setminus V(F)) \leq (t-1)(v(G) - v(F))$ . Entonces

$$e(G) = e(F) + e(V(F), V(G) \setminus V(F)) + e(V(G) \setminus V(F)). \quad (6.7)$$

Recordemos que  $\frac{2(p-1)}{q-1} \leq v(F) \leq 2(p-1)$  y por lo tanto  $e(F) \leq \binom{2(p-1)}{2}$ , de lo cual deducimos la siguiente desigualdad:

$$nt - \binom{t+1}{2} + r = \varphi_2(n, p, q) \leq \binom{2(p-1)}{2} + (t-1) \left( n - \frac{2(p-1)}{q-1} \right). \quad (6.8)$$

Simplificando la desigualdad y despejando a  $n$  tenemos:

$$n \leq \binom{2(p-1)}{2} + \binom{t+1}{2} - \frac{2(p-1)(t-1)}{q-1} - r. \quad (6.9)$$

las siguientes desigualdades se deducen de la definición de  $t$  y  $r$ :

$$t \leq \frac{p-1}{q-1} \leq t+1, \quad (6.10)$$

$$0 \leq r < q-1, \quad (6.11)$$

y las utilizamos para llegar a la siguiente desigualdad:

$$n \leq 2p^2 - 5p + 3 - \frac{t(3t-5)}{2}. \quad (6.12)$$

Concluimos que  $n < 2p^2$  pero esto es una contradicción a la hipótesis del teorema.

Ahora bien, como  $e(V(F), V(G) \setminus V(F)) > (t-1)(v(G) - v(F))$  y  $n \geq 2p^2 \geq 4(p-1) \geq 2v(F)$  entonces por el lema 6.3, hay un  $t$ -emparejamiento contenido en  $E[V(F), V(G) \setminus V(F)]$ . Sea  $\{e_1, \dots, e_t\}$  tal emparejamiento, sea  $x_i$  el vértice de la arista  $e_i$  que está en  $V(F)$  y sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subseteq V(F)$ .

Consideremos ahora  $Y = \{y \in V(F) \mid y \text{ es adyacente a algún vértice de } V(G) \setminus V(F)\}$ . Claramente  $X \subseteq Y$ . Notemos que  $Y$  es un conjunto independiente de vértices en  $F$ .

Supongamos que hay una arista  $f = \{y_1, y_2\} \in E(F)$  donde  $y_1$  y  $y_2$  pertenecen a  $Y$ ; entonces, hay aristas  $f_1 = \{y_1, v_1\}$  y  $f_2 = \{y_2, v_2\}$  donde  $v_1$  y  $v_2$  no están en  $V(F)$  ( $v_1$  y  $v_2$  no son necesariamente diferentes). Al quitar la arista  $f$  y tomar las aristas restantes de  $F$  junto con las aristas  $f_1$  y  $f_2$  obtenemos una contradicción al hecho de que  $G$  satisface la propiedad- $(p, q)$  (en este paso es importante que  $q \geq 3$ , si hacemos los mismos pasos de la demostración pero para  $q = 2$  no obtenemos una contradicción al momento de hacer el proceso de quitar la arista  $f$  y agregar las aristas  $f_1$  y  $f_2$  al resto de las aristas de  $F$ ). Ahora demostraremos que  $X = Y$ ; notemos que por cada  $y \in Y$ ,  $\deg_F(y) = q - 1$ , de lo contrario, como  $y$  es adyacente a algún vértice de  $V(G) \setminus V(F)$ , hay una arista  $f_1 = \{y, v\}$  donde  $v$  no está en  $V(F)$ , pero entonces las aristas de  $F$  junto con  $f$  contradicen la propiedad- $(p, q)$ . Si  $|Y| \geq t + 1$  entonces

$$p - 1 = e(F) \geq (q - 1)|Y| \geq (q - 1)(t + 1) > t(q - 1) + r = p - 1 \quad (6.13)$$

que también es una contradicción, entonces  $|Y| = t$ , por lo tanto  $X = Y$  (véase fig 6.2).

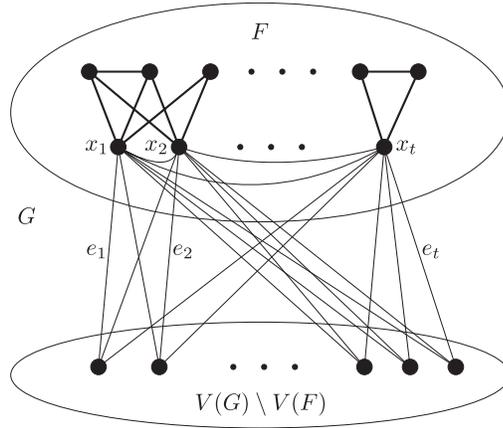


Figura 6.2: Bosquejo de la gráfica  $G \in \mathfrak{F}_2(n, t, r)$ , las líneas gruesas pertenecen a  $F$  y el resto son aristas de  $G$ .

### Demostración de c)

Primero notemos que  $\langle V(F) \setminus X \rangle$  contiene exactamente  $r$  aristas en  $F$ . Esto porque  $F$  tiene  $p - 1 = t(q - 1) + r$  aristas,  $X$  es un conjunto con  $t$  vértices independientes en  $F$  y para cada  $x_i \in X$ ,  $\deg_F(x_i) = q - 1$ . Supongamos que c) no es verdadero; entonces hay una arista  $f = \{y_1, y_2\} \in E(G) \setminus E(F)$  tal que  $y_1$  y  $y_2$  pertenecen a  $V(F) \setminus X$ . Tenemos tres casos.

- i)  $\deg_F(y_1) < q - 1$  y  $\deg_F(y_2) < q - 1$ ,
- ii)  $\deg_F(y_1) < q - 1$  y  $\deg_F(y_2) = q - 1$ ,
- iii)  $\deg_F(y_1) = \deg_F(y_2) = q - 1$ ,

Si el caso i) ocurre, las aristas de  $F$  junto con  $f$  contradicen la propiedad- $(p, q)$ . Para el caso ii), notemos que hay una arista  $f_1 = \{y_2, x_i\} \in E(F)$  porque  $\langle V(F) \setminus X \rangle$  contiene

exactamente  $r$  aristas en  $F$  y  $r < q-1$ . Al quitar la arista  $f_1$  y tomar las aristas restantes de  $F$  junto con  $f$  y  $e_i$  obtenemos una contradicción a la propiedad- $(p, q)$ . Finalmente, el hecho de que  $\langle V(F) \setminus X \rangle$  contiene exactamente  $r$  aristas en  $F$  y  $r < q-1$ , implican en el caso iii) que hay aristas  $f_1 = \{y_1, x_i\}$  y  $f_2 = \{y_2, x_j\}$  ambas en  $F$ , donde  $i \neq j$ ; quitamos las aristas  $f_1$  y  $f_2$ , tomamos las restantes de  $F$  junto con  $f, e_i$  y  $e_j$  para obtener la contradicción a la propiedad- $(p, q)$ . Esto concluye el hecho de que  $\langle V(F) \setminus X \rangle$  contiene exactamente  $r$  aristas en  $G$  y como consecuencia que  $e(G) \leq \varphi_2(n, p, q)$ . También demostramos que  $G \in \mathfrak{F}_2(n, t, r)$ . ■

**Conjetura 2.** Para  $n$  suficientemente grande y  $p \geq q \geq 2$ ,

$$\text{ex}_k(n, \mathfrak{D}_k(p, q)) = \varphi_k(n, p, q). \quad (6.14)$$

Si  $k = 2$ ,  $p \geq q = 2$ , la conjetura es verdadera por el teorema de Erdős y Gallai en [EG59]; si  $k \geq 2$ ,  $q = 2$ , el teorema de Frankl en [Fra13] también confirma la conjetura; si  $k = 3$  los teoremas en [FJ14] y [FJS14] demuestran el problema  $(p, 3)$ -extremal; y finalmente, si  $p = q$  y  $k \geq 2$ , el lema de Frankl en [Fra76] demuestra el problema  $(q, q)$ -extremal.

Ahora vamos a analizar la propiedad- $(p, 3)$  para gráficas donde el valor de  $n$  es igual a  $p$ .

**Teorema 6.2.** Para  $p \geq 3$ ,

$$\text{ex}(p, \mathfrak{D}_2(p, 3)) = \binom{p-1}{2} + 1.$$

*Demostración.* Demostramos la primera desigualdad  $\text{ex}(p, \mathfrak{D}_2(p, 3)) \geq \binom{p-1}{2} + 1$  mostrando que la gráfica  $G = K_{p-1} \cup e$  donde  $e \notin E(K_{p-1})$  (la gráfica completa  $K_{p-1}$  con una arista extra) satisface la propiedad- $(p, 3)$ . Cualquier conjunto con  $p$  aristas en  $G$  nos da una subgráfica  $F$  con  $p$  aristas y a lo más  $p$  vértices. Entonces, el grado promedio de  $F$  es al menos 2, la igualdad implica que  $F$  es una subgráfica  $p$  vértices,  $p$  aristas y  $\deg(v) = 2$  para todos sus vértices, pero esto no es posible porque  $K_{p-1} \cup e$  tiene exactamente un vértice de grado 1. Por lo tanto hay un vértice  $v \in F$  tal que  $\deg_F(v) \geq 3$ . Entonces  $G$  satisface la propiedad- $(p, 3)$  y  $\text{ex}(p, \mathfrak{D}_2(p, 3)) \geq \binom{p-1}{2} + 1$ .

Para la otra desigualdad observemos que la familia de gráficas prohibidas para el problema extremo- $(p, 3)$  es  $\mathfrak{D}_2(p, 3)$ , así que los elementos de la familia son ciclos, trayectorias o combinaciones de ambos, siempre con  $p$  aristas exactamente. Entonces es claro que el ciclo  $C_p$  con  $p$  aristas es un elemento de  $\mathfrak{D}_2(p, 3)$  y por la propiedad de monotonía de  $\text{ex}(n, \mathfrak{F})$  y el teorema de Ore (see [Ore61]) demostramos que  $\text{ex}(p, \mathfrak{D}_2(p, 3)) \leq \text{ex}(p, C_p) = \binom{p-1}{2} + 1$ . ■

## 6.2. El número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser.

Por último aplicamos el resultado del problema  $(p, q)$ -extremal para encontrar el número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser. Vimos al final del capítulo 5 que para poder calcular el número cromático fraccional de las hipergráficas de Kneser, es suficiente encontrar su número de independencia. Notemos que cualquier conjunto independiente  $\mathcal{F}$

de  $K_q^p\binom{[n]}{k}$  satisface la propiedad de que para cada  $p$  elementos de  $\mathcal{F}$ ,  $q$  de ellos se intersectan: esta es precisamente la propiedad- $(p, q)$  para hipergráficas  $k$ -uniformes. Entonces, determinar el número de independencia de  $K_q^p\binom{[n]}{k}$  es equivalente a resolver el problema  $(p, q)$ -extremal. Como consecuencia del teorema 6.1, tenemos

**Corolario 6.3.** *Sean  $n, p, q, t$  y  $r$  enteros positivos, donde  $p - 1 = (q - 1)t + r$ ,  $p \geq q \geq 3$ ,  $0 \leq r < q - 1$ ,  $n \geq 2p^2$ . Entonces*

$$\chi_f\left(K_q^p\binom{[n]}{2}\right) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2} - \binom{n-t}{2} + r}.$$

Otra cosa que podemos mencionar es que tenemos una cota inferior para el número de independencia de  $K_q^p\binom{[n]}{k}$  gracias al lema 6.2 y queda como sigue:

$$\alpha\left(K_q^p\binom{[n]}{k}\right) \geq \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k} + r.$$

Lo cual nos lleva a formular la siguiente conjetura:

**Conjetura 3.** *Para  $n$  suficientemente grande*

$$\alpha\left(K_q^p\binom{[n]}{k}\right) = \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k} + r.$$

Los resultados anteriormente citados apuntan a que la conjetura es cierta.

### 6.3. Conclusiones

En la tesis vimos la relación que existe entre varias áreas de las matemáticas para abordar un problema. Concretamente vimos como un problema de programación lineal (el número cromático fraccional) está relacionado con un problema extremal. Las hipergráficas de Kneser son vértice-transitivas y esa fue una parte importante del desarrollo de toda la tesis, para trabajos posteriores estamos considerando estudiar el número cromático fraccional de otras familias de hipergráficas vértice-transitivas y también de las hipergráficas de Schrijver que no son vértice-transitivas. La definición de coloración también se puede expresar de manera “fuerte” al pedir que dentro de una aristas todos los vértices tengan colores diferentes.

En cuanto al área de topología se puede seguir una línea de investigación donde se estudien resultados similares a Borsuk-Ulam pero que hablan de acciones sobre la esfera  $S^n$  donde el grupo que actúa es diferente a  $\mathbb{Z}_2$ .

Para el problema  $(p, q)$ -extremal queda resolver la conjetura 2 para hipergráficas  $k$ -uniformes y consideramos que utilizando las herramientas del desplazamiento y el método probabilístico se puede llegar a resultados interesantes. Otra fuente de problemas de investigación viene de la geometría convexa donde surgió originalmente el problema- $(p, q)$  y tiene que ver con el comportamiento de los conjuntos convexos formados por los subconjuntos de tamaño  $k$  de conjunto con  $n$  puntos en un espacio euclideo en posición general como lo vimos en el capítulo 4.



# Bibliográfia

- [AFL86] N. Alon, P. Frankl, and L. Lovász. The chromatic number of Kneser hypergraphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 298(1):359–370, 1986.
- [Bár78] J. Bárány. A short proof of kneser’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(3):325–326, 1978.
- [Bor33] Karol Borsuk. Drei sätze über die n-dimensionale euklidische sphäre. *Fundamenta Mathematicae*, 1(20):177–190, 1933.
- [Dol81] V. L. Dol’nikov. Transversals of families of sets. In *Studies in the theory of functions of several real variables (Russian)*, pages 30–36, 109. Yaroslav. Gos. Univ., Yaroslavl’, 1981.
- [EG59] P. Erdős and T. Gallai. On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 10:337–356 (unbound insert), 1959.
- [EKR61] P. Erdős, Chao Ko, and R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 12:313–320, 1961.
- [Erd62] P. Erdős. Remarks on a paper of Pósa. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 7:227–229, 1962.
- [Erd65] P. Erdős. A problem on independent  $r$ -tuples. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 8:93–95, 1965.
- [FG89] Péter Frankl and Ronald L Graham. Old and new proofs of the erdos-ko-rado theorem. *Sichuan Daxue Xuebao*, 26:112–122, 1989.
- [FJ14] Zoltán Füredi and Tao Jiang. Hypergraph Turán numbers of linear cycles. *J. Combin. Theory Ser. A*, 123:252–270, 2014.
- [FJS14] Zoltán Füredi, Tao Jiang, and Robert Seiver. Exact solution of the hypergraph Turán problem for  $k$ -uniform linear paths. *Combinatorica*, 34(3):299–322, 2014.
- [FLM12] Peter Frankl, Tomasz Łuczak, and Katarzyna Mieczkowska. On matchings in hypergraphs. *Electron. J. Combin.*, 19(2):Paper 42, 5, 2012.
- [Fra76] P. Frankl. On Sperner families satisfying an additional condition. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 20(1):1–11, 1976.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [Fra13] Peter Frankl. Improved bounds for Erdős' matching conjecture. *J. Combin. Theory Ser. A*, 120(5):1068–1072, 2013.
- [Gal56] David Gale. Neighboring vertices on a convex polyhedron. *Linear inequalities and related systems*, 38:255–263, 1956.
- [Gre02] Joshua E. Greene. A new short proof of Kneser's conjecture. *Amer. Math. Monthly*, 109(10):918–920, 2002.
- [Hal35] Philip Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10(1):26–30, 1935.
- [Hel23] Ed Helly. Über mengen konvexer körper mit gemeinschaftlichen punkte. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 32:175–176, 1923.
- [HLS12] Hao Huang, Po-Shen Loh, and Benny Sudakov. The size of a hypergraph and its matching number. *Combin. Probab. Comput.*, 21(3):442–450, 2012.
- [Kat72] G. O. H. Katona. A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 13:183–184, 1972.
- [Kne55] M. Kneser. Aufgabe 360. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 58(2):27, 1955.
- [Kön31] Dénes König. Graphen und matrizen. *Mat. Fiz. Lapok*, 38:116–119, 1931.
- [LM14] Tomasz Łuczak and Katarzyna Mieczkowska. On Erdős' extremal problem on matchings in hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 124:178–194, 2014.
- [Lov78] L. Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. *J. Combin. Theory Ser. A*, 25(3):319–324, 1978.
- [LP09] László Lovász and Michael D Plummer. *Matching theory*, volume 367. American Mathematical Soc., 2009.
- [LS30] L Lyusternik and S Shnirel'man. Méthodes topologiques dans des problèmes variationnels (en russe). *Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri OMGU, Moscow*, 1930.
- [Man07] Willem Mantel. Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, 10(60-61):320, 1907.
- [Moo68] JW Moon. On independent complete subgraphs in a graph. *Canad. J. Math*, 20:95–102, 1968.
- [Mun02] James Munkres. *Topologia 2E*. 2002.
- [Ore61] Oystein Ore. Arc coverings of graphs. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 55:315–321, 1961.
- [Plu92] Michael D Plummer. Matching theory: a sampler: from dénes könig to the present. *Discrete mathematics*, 100(1):177–219, 1992.

- [Sar90] K. S. Sarkaria. A generalized Kneser conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 49(2):236–240, 1990.
- [Sch78] A. Schrijver. Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 26(3):454–461, 1978.
- [Tur41] Paul Turán. On an extremal problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lapok*, 48(436-452):137, 1941.
- [Tut47] William T Tutte. The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2):107–111, 1947.