



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sistemas micro y nano mecánicos de materiales
bidimensionales.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

José Alberto Nava Aquino

DIRECTOR DE TESIS

Raúl Patricio Esquivel Sirvent



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tesis

José Alberto Nava Aquino

Tesis presentada para optar al título de:
Físico

Tutor:
Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent

Línea de Investigación:
Estado Sólido

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Ciudad de México, México
2017

A Gabriela Cabrera.

Agradecimientos

A mis padres y a toda mi familia por apoyarme a lo largo de la licenciatura.

Al Dr. Raúl Esquivel Sirvent por haberme dado la oportunidad de formar parte de su grupo de investigación y asesorarme en la presente tesis.

A mis amigos Alex, Jorge, Alfredo, Patricio y Victor por ofrecerme sus comentarios sobre la tesis y a todos mis amigos por su amistad durante estos años.

A la Facultad de Ciencias y a la UNAM por ofrecerme la oportunidad de formarme profesionalmente, por los años que pasé en sus instituciones y por lo que aprendí en ellas.

A todos los profesores, compañeros, autores y otras personas que de alguna forma contribuyeron en mi formación académica.

Resumen

Los sistemas micro y nano-electromecánicos (MEMS y NEMS) son limitados por el colapso de sus partes movibles provocado por las fuerzas presentes, como fuerzas electrostáticas, de Van der Waals, Casimir u otras. Dispositivos como éstos de materiales bidimensionales, como grafeno, prometen ser una gran alternativa a dispositivos hechos de materiales como el silicio. En esta tesis, se consideró un sistema general de un dispositivo MEMS/NEMS de este tipo de materiales bajo un potencial electrostático y se analizó el comportamiento dinámico y estático de estos sistemas y las condiciones necesarias para su colapso utilizando distintos diagramas de bifurcación y de espacio fase calculados. Para el análisis, se consideró un modelo de masa resorte y un modelo electrostático-elástico más completo. Los resultados obtenidos de ambos modelos coinciden salvo por diferencias mínimas. Los cálculos muestran que MEMS y NEMS de varias capas de estos materiales requieren de potenciales similares a dispositivos de silicio mas gruesos antes de colapsar. Se consideró también un dispositivo bajo un potencial general de tipo Yukawa, se analizó el comportamiento dinámico y estático del sistema de manera análoga al caso electrostático. Se calcularon condiciones de colapso con una variación en los parámetros del potencial, se determinó en qué casos el dispositivo es más estable frente al colapso.

Objetivos

Determinar si dispositivos MEMS/NEMS de materiales bidimensionales podrían tener ventajas sobre otros de dispositivos de esta clase fabricados a partir de materiales más comunes como el silicio. En particular, como se compara el voltaje de salto a contacto de dispositivos como éstos a los de silicio.

Comparar los modelos de masa-resorte y electrostático-elástico utilizados y analizar hasta que grado coinciden y en qué difieren.

Entender el comportamiento dinámico de sistemas bajo potenciales de Yukawa según los valores de sus parámetros. A partir de esto, determinar cuándo el sistema puede hacerse más o menos estable según los parámetros del potencial.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Objetivos	x
1. Introducción	2
2. Modelo de masa-resorte en MEMS/NEMS	4
2.1. Planteamiento del problema como un condensador de placas paralelas	4
2.2. El problema de salto a contacto	5
2.3. Comportamiento dinámico	7
2.3.1. Sin amortiguamiento	7
2.3.2. Con amortiguamiento	9
3. MEMS/NEMS de materiales bidimensionales	11
3.1. Materiales considerados, sus propiedades y aplicaciones	11
3.2. Modo vibracional fundamental de una placa circular	12
3.3. Voltajes de salto a contacto de MEMS/NEMS de materiales bidimensionales	16
4. Modelo electrostático-elástico de la membrana	19
4.1. Descripción del modelo	19
4.1.1. El problema electrostático	19
4.1.2. El problema elástico	19
4.2. Considerando únicamente tensión en la placa	20
4.2.1. Escalamiento	20
4.2.2. El límite de razón de forma pequeño	21
4.2.3. Diagrama de bifurcación del sistema considerando únicamente tensión	22
4.3. Considerando únicamente la rigidez de la placa	25
4.3.1. Escalamiento	25
4.3.2. Diagrama parcial de bifurcación del sistema considerando únicamente la rigidez	26
4.4. Comparación con el modelo de masa-resorte	27

5. Modelo de masa-resorte con potenciales de Yukawa	30
5.1. Ecuación dinámica del sistema	30
5.2. Diagramas de bifurcación y espacio fase del sistema	32
6. Conclusiones	37
A. Anexo: Código de programas utilizados	39
A.1. Programa 1	39
A.1.1. Descripción	39
A.1.2. Código	39
A.1.3. Descripción de algunas líneas	39
A.2. Programa 2	40
A.2.1. Descripción	40
A.2.2. Código	40
A.2.3. Descripción de algunas líneas	41
A.3. Programa 3	41
A.3.1. Descripción	41
A.3.2. Código	41
A.3.3. Descripción de algunas líneas	43
A.4. Programa 4	43
A.4.1. Descripción	43
A.4.2. Código	43
A.4.3. Descripción de algunas líneas	45
A.5. Programa 5	45
A.5.1. Descripción	45
A.5.2. Código	45
A.5.3. Descripción de algunas líneas	46
Bibliografía	48

Lista de Figuras

2-1. Esquema del sistema. Un condensador de placas paralelas. La placa superior está sujeta a un resorte amortiguado. Figura tomada de [16].	5
2-2. Diagrama de bifurcación del sistema. Se muestran las posiciones de equilibrio en función del voltaje aplicado V , se tienen dos posiciones de equilibrio por cada valor de V hasta el valor crítico o voltaje de salto a contacto. Se muestra una división entre posiciones de equilibrio estable e inestable.	6
2-3. Comportamiento dinámico del sistema no amortiguado. (a) Diagrama de fase con $V=0$. (b) Diagrama de fase con $V = 0.5V_{sc}$. La cantidad de condiciones iniciales que no llevan al colapso del sistema es reducida respecto al caso anterior. (c) Diagrama de fase con $V = V_{sc}$. Todas las condiciones iniciales del sistema llevan a su colapso. (d) Desplazamiento del sistema con dos condiciones iniciales distintas, mostrando el colapso del sistema en uno de los casos.	8
2-4. Comportamiento dinámico del sistema amortiguado. (a) Diagrama de fase del sistema amortiguado con $V=0$. (b) Diagrama de fase del sistema amortiguado con $V = 0.5V_{sc}$. La cantidad de condiciones iniciales que no llevan al colapso del sistema es reducida respecto al caso anterior. (c) Diagrama de fase del sistema amortiguado con $V = V_{sc}$. Todas las condiciones iniciales del sistema llevan a su colapso. (d) Desplazamiento para tres condiciones iniciales distintas, colapsando en uno de los casos.	10
3-1. Frecuencias de resonancia natural para una placa de grafeno calculadas con métodos de Rayleigh y Southwell para un rango amplio de valores del radio de la placa. Se toma $T = 1\frac{N}{m}$	13
3-2. Frecuencias de resonancia de una placa de grafeno calculada con el método de Southwell mostrando ambas contribuciones por separado. ω_r corresponde a la parte debido únicamente a la rigidez de la placa y ω_t la que corresponde a la tensión, ω toma en cuenta ambas contribuciones.	15
3-3. Comparación del voltajes de salto a contacto en función del radio de membranas de 3 materiales bidimensionales (una capa) y una de silicio con un grosor de 10 nanómetros.	17

3-4. Comparación del voltajes de salto a contacto en función del radio de membranas de 10 capas de 3 materiales bidimensionales y silicio con un grosor de 10 nanómetros. Además se muestra una separación entre dimensiones correspondientes a MEMS o NEMS.	18
4-1. Esquema de un sistema electrostático-elástico general. Figura tomada de [16]	20
4-2. Diagrama de bifurcación considerando únicamente la tensión en la membrana. La rama superior, hasta la primer bifurcación, corresponde a las soluciones de equilibrio estable.	23
4-3. Simulación de la dinámica de la membrana en cuatro tiempos distintos con valores de $\lambda = 0.75$ y $\alpha^2 = 10$, el tiempo se toma en segundos.	24
4-4. Diagrama parcial de bifurcación del sistema considerando únicamente la rigidez del material de la membrana en el que se muestra únicamente una rama del diagrama de bifurcación completo, que corresponde a las soluciones estables.	26
4-5. Comparación de los voltajes de salto a contacto calculados con dos modelos distintos, se tomó a $d = \frac{a}{20}$	27
4-6. Comparación entre el voltaje de salto a contacto de un dispositivo de silicio medido experimentalmente reportado en [4] y cálculos realizados considerando un dispositivo similar utilizando el modelo de masa-resorte y electrostático-elástico.	29
5-1. Diagramas de bifurcación con distintos valores de n y α . (a) Diagrama de bifurcación con $n=1$ y distintos valores de α . Se observa que al aumentar α , los valores de λ de salto a contacto aumentan, por lo que el sistema es más estable con valores mayores de α . (b) Diagrama de bifurcación con $\alpha = 0$ y algunos valores de n . Se observa un comportamiento opuesto al caso anterior, al aumentar el valor de n el sistema se vuelve más inestable al disminuir el valor de λ de salto a contacto.	31
5-2. λ de salto a contacto para $n = 1, 3$ al variar α . En esta figura puede verse como al aumentar α , el valor del λ de salto a contacto aumenta considerablemente, por lo que fuerzas de Yukawa mayores serán necesarias para que el sistema colapse. Además, el sistema es ligeramente más estable para $n = 1$ que para $n = 3$	32
5-3. Diagrama de espacio fase para cuatro valores de n y otros parámetros constantes. Se observa que la cantidad de soluciones sin colapso disminuye cuando n aumenta, es decir, el sistema se hace más inestable.	33
5-4. Diagrama de espacio fase para cuatro valores de α y otros parámetros constantes. Se observa que contrario al caso anterior, cuando α aumenta, el número de soluciones sin colapso aumentan y el sistema se hace más estable.	34

-
- 5-5.** Diagrama de espacio fase para cuatro valores de η y otros parámetros constantes. Al aumentar η (disminuye el factor de calidad), el sistema se hace más amortiguado, por lo que el sistema llega al reposo más rápidamente. 35
- 5-6.** Diagrama de espacio fase para cuatro valores de η y otros parámetros constantes. Se tienen los mismos parámetros que en el caso anterior a excepción de α que en este caso tiene un valor de 5. Se observa que el comportamiento del sistema es más estable al anterior ya que α es mayor. 36

1. Introducción

Los sistemas micro-electromecánicos (MEMS) son dispositivos microscópicos, en particular, aquellos con partes móviles; en escalas nanométricas reciben el nombre de sistemas nano-electromecánicos (NEMS). Debido a la alta superficie en relación al volumen que existe en estos dispositivos, los efectos de superficie (como cargas electrostáticas, momentos magnéticos y tensión superficial) son más importantes que en otros dispositivos de mayor escala y deben ser considerados en su diseño. El trabajo experimental en el área de MEMS comenzó en 1967 [15] con el trabajo de Nathanson et. al. [13] En su artículo, Nathanson y sus compañeros describen la manufactura, experimentación, y modelado de un resonador de dimensiones milimétricas. Este dispositivo MEMS utilizaba componentes mecánicos y eléctricos en el mismo sustrato resultando en alta eficiencia, bajo costo y tamaño reducido del sistema. Nathanson incluso introdujo un modelo simple de masa-resorte de actuación electrostática. Casi al mismo tiempo, G.I. Taylor también investigaba la actuación electrostática [17]. Aunque él estaba más interesado en la dinámica de películas de jabón que en el desarrollo de dispositivos MEMS, su trabajo produjo literatura de interés para el desarrollo de MEMS y NEMS. Existen diferentes tipos de MEMS/NEMS, como transductores, sensores o actuadores. Algunos dispositivos de actuación electrostática como micro-válvulas, micro-interruptores, micro-motores, entre otros, son limitados por un voltaje de salto a contacto, por lo que corresponden a la clase de dispositivos estudiados en este trabajo.

La mayoría de MEMS actualmente son fabricados con materiales como el silicio o polímeros; sin embargo, MEMS y NEMS hechos de materiales como el grafeno parecen ser grandes candidatos para la siguiente generación de dispositivos más pequeños, ligeros y sensibles; el grafeno y otros materiales bidimensionales poseen propiedades mecánicas y electromecánicas excepcionales. Dispositivos de esta clase pueden utilizarse como resonadores de alta frecuencia, sensores de presión y tensión ultra sensibles, entre otras prometedoras aplicaciones, por lo cuál resultan ser dispositivos de gran interés actualmente. Cualquier dispositivo MEMS/-NEMS debe ser modelado antes de su fabricación por los altos precios y tiempo necesarios para hacerlo. Por ello, el estudio teórico de estos sistemas es necesario para conocer sus posibilidades y limitaciones y así proponer dispositivos útiles y eficientes.

En este trabajo se presentan resultados de las limitaciones de sistemas de grafeno y otros materiales bidimensionales en comparación con dispositivos de silicio utilizando cálculos analíticos y numéricos. En el capítulo 2, se definen conceptos importantes en el diseño de MEMS/NEMS, como el voltaje de salto a contacto. Se utiliza un modelo de masa-resorte representando un dispositivo general bajo un potencial electrostático para describir el com-

portamiento estático y dinámico de estos sistemas a partir de diagramas de bifurcación y de espacio fase calculados en este capítulo. En el capítulo 3 se utiliza la teoría desarrollada en el capítulo anterior y un cálculo de la frecuencia natural de una membrana, para encontrar los voltajes de salto a contacto de dispositivos de grafeno, siliceno y fosforeno y compararlos con uno de silicio en un rango muy amplio de dimensiones. En el capítulo 4 se hacen los mismos cálculos que los descritos en el capítulo 3, esta vez usando un modelo electrostático-elástico más completo que el de masa-resorte utilizado en ese capítulo. Se comparan los resultados de ambos modelos. En el capítulo 5 se considera un potencial de tipo Yukawa en lugar del potencial electrostático considerado antes y se calculan potenciales críticos o de salto a contacto usando diagramas de bifurcación, también se muestran diagramas de espacio fase con la variación de algunos parámetros, describiendo en cada caso si el sistema se vuelve más o menos estable según el parámetro variado. Finalmente, el capítulo 6 presenta las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

2. Modelo de masa-resorte en MEMS/NEMS

2.1. Planteamiento del problema como un condensador de placas paralelas

En este capítulo se presentan conceptos importantes en el diseño de MEMS/NEMS como el salto a contacto del sistema y diagramas de bifurcación; que permiten conocer condiciones en las cuales el sistema permanecerá estable. Para este fin, se utiliza un modelo de masa-resorte, que permite ignorar las complicaciones geométricas de un modelo más preciso y enfocarse en el balance de las fuerzas elástica y electrostática. Se considera un sistema simplificado para entender su comportamiento estático y dinámico consistente de un condensador hecho de dos placas conductoras paralelas entre las cuales se aplica un voltaje V (figura 2-1). La placa superior es sujeta por un resorte de constante k y puede moverse, la placa inferior está fija, separado a una distancia d de la posición de equilibrio de la placa superior. Por simplicidad, se considera que las placas son infinitas debido a su gran tamaño comparado con la separación entre ellas, esto permite ignorar los efectos de borde del campo eléctrico. Esta aproximación implica ignorar la deformación de la placa y considerar que todas sus partes permanecen paralelas, definiéndose su estado dinámico con una sola variable de desplazamiento. Este problema representa una cantidad importante de MEMS/NEMS como micro-interruptores. [16]

Se analiza el balance de fuerzas del sistema, de la segunda ley de Newton se tiene:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \text{ fuerzas.} \quad (2-1)$$

Donde x es el desplazamiento de la placa superior con respecto a la placa inferior y m es la masa de la placa superior. Las fuerzas presentes en el sistema son: la fuerza del resorte, F_s , una de amortiguamiento, F_d , y la electrostática entre las placas debido a la diferencia de voltaje V entre ellas, F_e . Suponiendo que el resorte es lineal y que cumple con la ley de Hooke, se tiene:

$$F_s = -k(x - d). \quad (2-2)$$

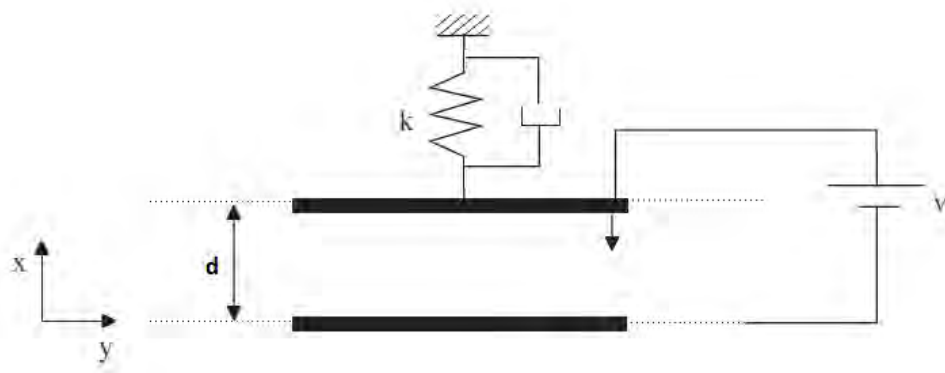


Figura 2-1.: Esquema del sistema. Un condensador de placas paralelas. La placa superior está sujeta a un resorte amortiguado. Figura tomada de [16].

La fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, se tiene:

$$F_d = -a \frac{dx}{dt}. \quad (2-3)$$

Con a constante. El inverso de a es conocido como el factor de calidad Q del dispositivo, por lo que siempre se desea tener factores de calidad altos ya que ésto implica reducir el amortiguamiento del sistema y por lo tanto que éste sea más estable. Además, se sabe que la fuerza electrostática debida al potencial entre las placas es:

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 AV^2}{x^2} \quad (2-4)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y A el área de la placa. Insertando las ecuaciones (2-2), (2-3) y (2-4) en (2-1) se obtiene la ecuación dinámica del sistema:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k(x - d) + a \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 AV^2}{x^2}. \quad (2-5)$$

2.2. El problema de salto a contacto

De la ecuación (2-5) puede verse que el comportamiento dinámico del problema depende de la diferencia de voltaje entre las placas V , si aumenta, las placas se acercan. Existe un voltaje crítico para el cuál la fuerza electrostática es igual a la fuerza de restitución del resorte (si se ignora el amortiguamiento) y el sistema colapsa al juntarse ambas placas. Este voltaje crítico es llamado *voltaje de salto a contacto* y la distancia en la que esto sucede, *distancia de salto a contacto*. Tomando como cero las derivadas temporales, se obtiene la ecuación estática del sistema:

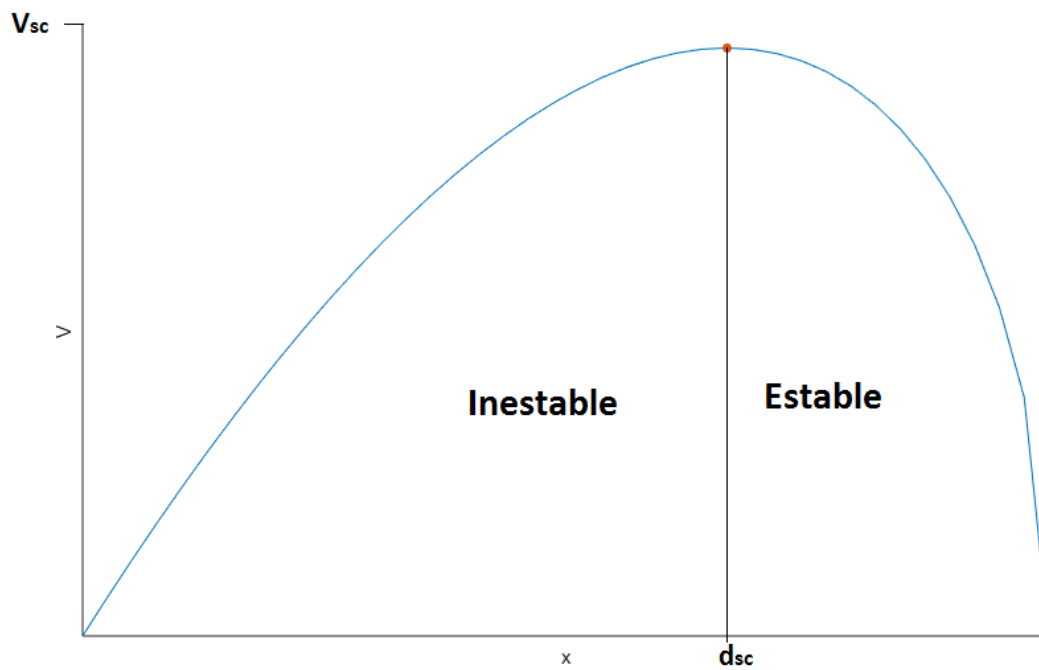


Figura 2-2.: Diagrama de bifurcación del sistema. Se muestran las posiciones de equilibrio en función del voltaje aplicado V , se tienen dos posiciones de equilibrio por cada valor de V hasta el valor crítico o voltaje de salto a contacto. Se muestra una división entre posiciones de equilibrio estable e inestable.

$$k(x - d) = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A V^2}{x^2}. \quad (2-6)$$

Los valores de x que cumplen con la ecuación (2-6) son las posiciones de equilibrio del sistema en función del voltaje aplicado V , la figura **2-2** obtenida usando MATLAB (A.1), muestra una gráfica de estas posiciones. De la figura se observa que existen dos posiciones de equilibrio para cada voltaje hasta el voltaje de salto a contacto, donde solo existe una. Para voltajes mayores a este, no existe ninguna posición de equilibrio. Este diagrama se conoce como *diagrama de bifurcación*. Encontrando el máximo de la función mostrada en la gráfica, puede encontrarse que los valores para el voltaje de salto a contacto V_{sc} y la distancia de salto a contacto d_{sc} , son:

$$V_{sc} = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{k d^3}{\epsilon_0 A}} \quad y \quad d_{sc} = \frac{2}{3} d \quad (2-7)$$

A partir de la ecuación 2-5, anulando el amortiguamiento, se obtiene:

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{x^3} - k. \quad (2-8)$$

y sustituyendo la ecuación estática 2-6 en esta última, se obtiene que en un punto de equilibrio:

$$\frac{\delta F}{\delta x}(x_{eq}) = \frac{2k(d - x)}{x} - k. \quad (2-9)$$

$\frac{\delta F}{\delta x}(x_{eq})$ es negativo para $x > \frac{2}{3}d$, por lo cuál estos puntos de equilibrio son estables, es decir, un cambio en el desplazamiento provoca una fuerza en sentido contrario a este, por lo que el sistema tenderá a estabilizarse. Para $x < \frac{2}{3}d$, $\frac{\delta F}{\delta x}(x_{eq})$ es positivo, por lo que se tiene un comportamiento opuesto y estas posiciones se consideran de equilibrio inestable. Esto puede observarse en la figura **2-2** donde se divide el dominio en dos regiones: estable e inestable.

2.3. Comportamiento dinámico

2.3.1. Sin amortiguamiento

Retomando la ecuación dinámica del sistema (2-5), sin amortiguamiento y escribiéndola en forma adimensional [16] tomando $k = \omega^2 m$, se obtiene:

$$m \frac{d^2 x^*}{dt^2} + \omega^2 (x^* - 1) = -\frac{4}{27} \omega^2 \frac{V^{*2}}{x^{*2}}, \quad (2-10)$$

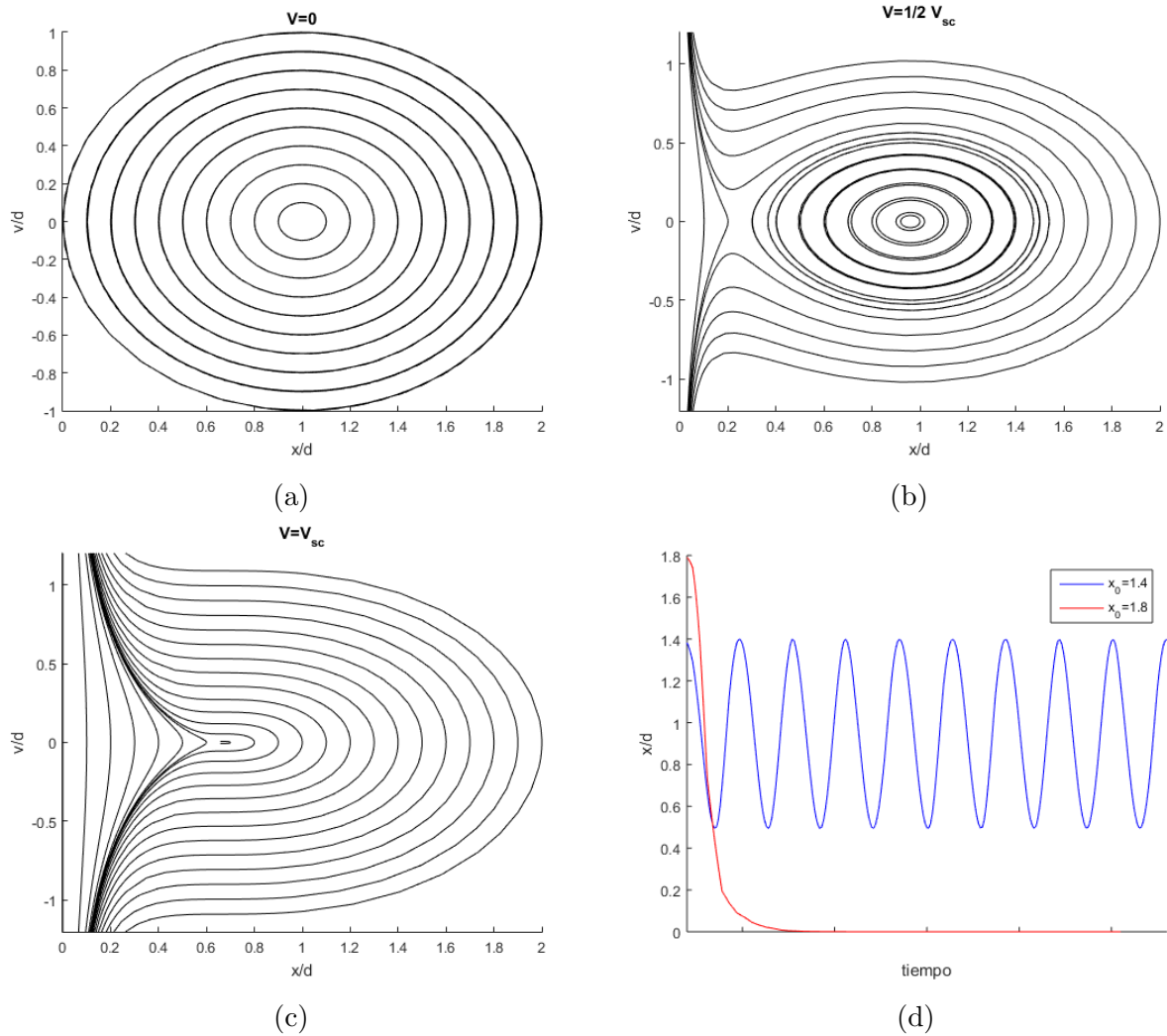


Figura 2-3.: Comportamiento dinámico del sistema no amortiguado. (a) Diagrama de fase con $V=0$. (b) Diagrama de fase con $V = 0.5V_{sc}$. La cantidad de condiciones iniciales que no llevan al colapso del sistema es reducida respecto al caso anterior. (c) Diagrama de fase con $V = V_{sc}$. Todas las condiciones iniciales del sistema llevan a su colapso. (d) Desplazamiento del sistema con dos condiciones iniciales distintas, mostrando el colapso del sistema en uno de los casos.

con:

$$x^* = \frac{x}{d}, \quad V^* = \frac{V}{V_{sc}}. \quad (2-11)$$

Se encontraron soluciones numéricas de la ecuación (2-10) utilizando MATLAB (A.2), a partir de estas, se obtienen diagramas de fase para distintos valores de V^* . En las figuras **2-3a**, **2-3b** y **2-3c** se muestran tres comportamientos dinámicos del sistema para distintos valores de V^* . En **2-3a** se tiene $V^* = 0$ y se observa el comportamiento del sistema puramente mecánico. En **2-3b**, $V^* = 0.5$. El sistema es estable cerca del punto de equilibrio y oscila al rededor de este. Si el desplazamiento o la velocidad inicial son suficientemente grandes, la fuerza electrostática es mayor a la fuerza de restitución del resorte y ambas placas colapsan. Entonces, incluso para voltajes menores al voltaje de salto a contacto, el sistema puede hacerse inestable si se tiene el suficiente desplazamiento o velocidad inicial, a este voltaje se le denomina *voltaje de salto a contacto dinámico*. Finalmente, en la figura **2-3c** se tiene que $V^* = 1$, por lo que el sistema se hace inestable para cualquier condición inicial. En los cálculos para estas tres figuras se tomó $\omega = 1$, para distintas frecuencias la forma de los diagramas son similares, solo las magnitudes en las velocidades varían.

Se incluye también una figura (**2-3d**) mostrando el desplazamiento para igual frecuencia y voltaje pero distintas condiciones iniciales para ilustrar lo descrito sobre la figura **2-3b**. Se observa que en un caso el sistema se mantiene oscilando, mientras que en el otro se vuelve rápidamente inestable.

2.3.2. Con amortiguamiento

Los resultados de la ecuación dinámica (2-5), esta vez considerando el término de amortiguamiento, se muestran como diagramas de fase para 3 voltajes distintos (figuras **2-4a**, **2-4b** y **2-4c**) y tomando $a = 1 \text{ N s/m}$. También se muestra el desplazamiento para tres condiciones iniciales distintas con un voltaje de $V = 0.7 * V_{sc}$ y $a = 0.2 \text{ N s/m}$ (figura **2-4d**), en el tercer caso se observa que el sistema colapsa .

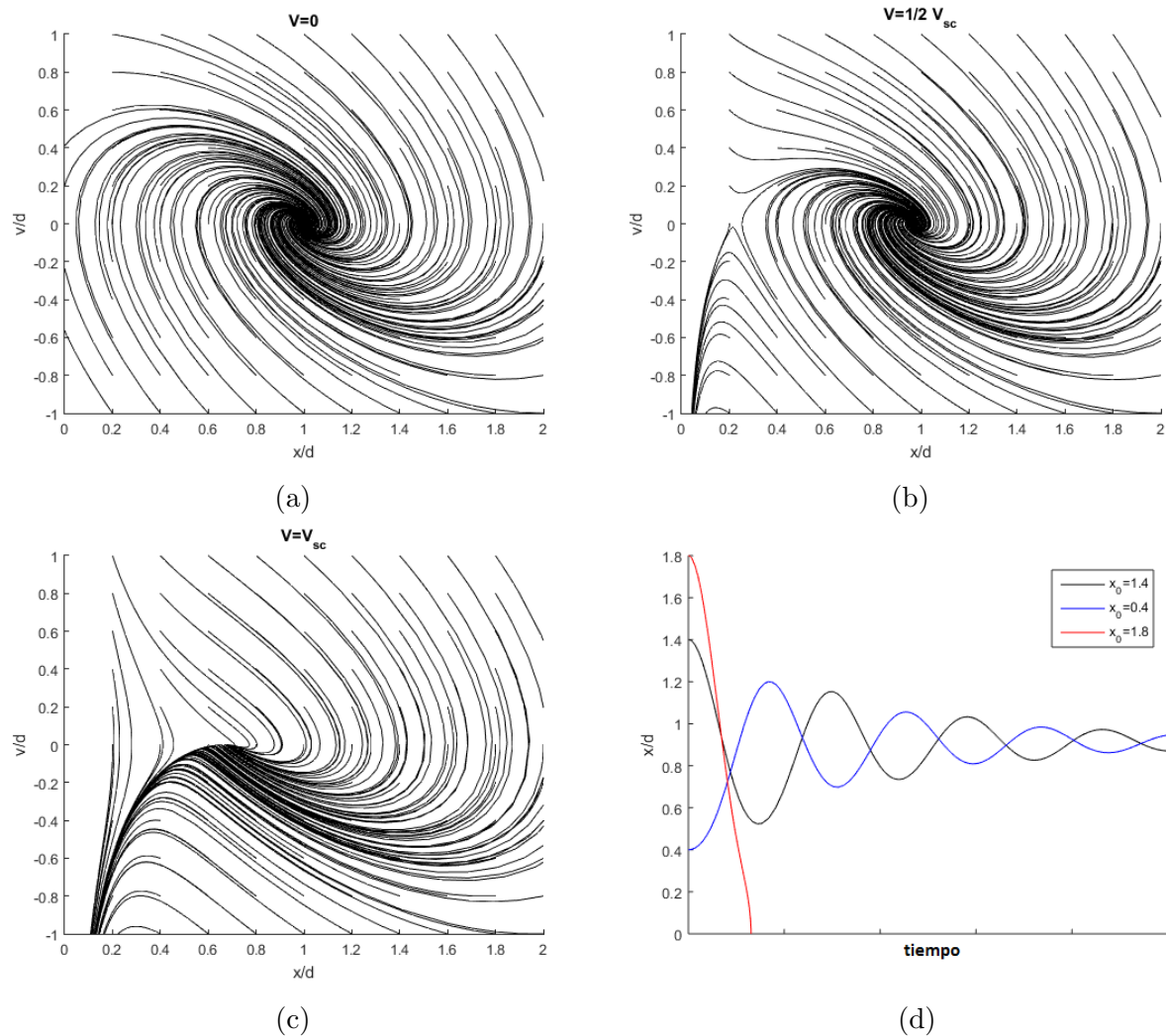


Figura 2-4.: Comportamiento dinámico del sistema amortiguado. (a) Diagrama de fase del sistema amortiguado con $V=0$. (b) Diagrama de fase del sistema amortiguado con $V = 0.5V_{sc}$. La cantidad de condiciones iniciales que no llevan al colapso del sistema es reducida respecto al caso anterior. (c) Diagrama de fase del sistema amortiguado con $V = V_{sc}$. Todas las condiciones iniciales del sistema llevan a su colapso. (d) Desplazamiento para tres condiciones iniciales distintas, colapsando en uno de los casos.

3. MEMS/NEMS de materiales bidimensionales

3.1. Materiales considerados, sus propiedades y aplicaciones

El grafeno es un alótropo del carbono en la forma de una red hexagonal bidimensional, donde cada átomo forma un vértice. El grafeno tiene muchas propiedades interesantes. Es varias veces más resistente a esfuerzos mecánicos que cualquier metal de iguales dimensiones, es un excelente conductor de calor y electricidad, es transparente, entre otras características. Por estas propiedades, el grafeno parece ser un material con aplicaciones prometedoras como pantallas electrónicas ligeras, flexibles y resistentes; como material utilizado en dispositivos espintrónicos, puntos cuánticos, varios procesos químicos, médicos e industriales y más [15]. En el área de MEMS/NEMS en particular, el grafeno parece ser una alternativa con mucho potencial. Resonadores de grafeno de alta frecuencia y alto factor de calidad podrían ser utilizados para mediciones de masa o de carga de alta precisión o para medir fuerzas muy bajas. Sensores piezoresistentes de grafeno pueden realizar mediciones de presión más sensibles y ser considerablemente más pequeños que sus análogos de silicio. Durante la realización de esta tesis, Khan et al. publicaron una recopilación de las propiedades y posibles aplicaciones de MEMS de grafeno [6] que incluye éstas y otras más para estos dispositivos.

Similarmente al grafeno, el siliceno y fosforeno son alótropos de silicio y fósforo, respectivamente, con propiedades y posibles aplicaciones similares. Se consideraron estos tres materiales, además del silicio por ser un material común en esta clase de dispositivos. Para los cálculos mostrados en este capítulo, se necesitaron las propiedades mecánicas de los materia-

Tabla 3-1.: Propiedades mecánicas de los materiales considerados en los cálculos de este capítulo.

	Módulo de Young (TPa)	C. Poisson	Grosor (nm)	Densidad vol g/m^3
Grafeno	1000	0.186	0.345	2200
Siliceno	178	0.30	0.262	2329
Fosforeno	105	0.66	0.549	2690
Silicio	77	0.22	-	2329

les mencionados. Para el grafeno se considera un módulo de Young de 1 TPa, un coeficiente de Poisson de 0.186 [7], un grosor de 0.345 nm y una densidad volumétrica de 2200 g/m³ (grafito), la densidad de masa por área se obtiene multiplicando esta cantidad por el grosor. Para el siliceno se toma un módulo de Young de 178 GPa, un coeficiente de Poisson de 0.30 [11], un grosor de 0.262 nm [12] y una densidad volumétrica de 2329 g/m³. Para el fosforeno, un módulo de Young de 105 GPa (ya que el fosforeno es anisotrópico, se toma un promedio en ambas direcciones), un coeficiente de Poisson de 0.66 [7], un grosor de 0.549 nm [7] y una densidad volumétrica de 2690 g/m³. Finalmente, para el silicio se consideró un módulo de Young de 77 GPa [12], un coeficiente de Poisson de 0.22 [12] y una densidad volumétrica de 2329 g/m³. Todos los valores usados se muestran en la tabla **3-1**.

3.2. Modo vibracional fundamental de una placa circular

En este capítulo se considera el problema de calcular las condiciones de salto a contacto para MEMS/NEMS que consisten en una placa de cierto material suspendida sobre otro electrodo entre los cuales se aplica un voltaje. Para ésto, se utiliza el modelo descrito en el capítulo 2 (masa-resorte). A la placa superior se le asigna una constante de resorte efectiva dependiendo del material considerado. Se considera que la placa superior es circular con radio R y totalmente sujeta en su circunferencia. Para estas consideraciones, la frecuencia de resonancia angular fundamental puede ser aproximada por distintos métodos [9, 5]. Considerando una función de desviación de la forma:

$$z = (R^2 - r^2)^2 r^n \cos n\theta, \quad (3-1)$$

donde n es el número de nodos diametrales. En conjunto con el método de Rayleigh, calculando los máximos para las energías cinética y potencial, como se explica en [18], se obtienen cotas superiores de las frecuencias de los modos:

$$\omega^2 \leq \frac{8(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)}{3} \frac{D}{\rho R^4} \left(1 + \frac{TR^2}{2(n+2)(n+4)D}\right), \quad (3-2)$$

donde D es la rigidez flexural definida por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3-3)$$

ρ es la densidad de masa por unidad de área de la placa, h su grosor, E el módulo de Young del material de la placa, ν su coeficiente de Poisson, y T la tensión por unidad de longitud en el borde.

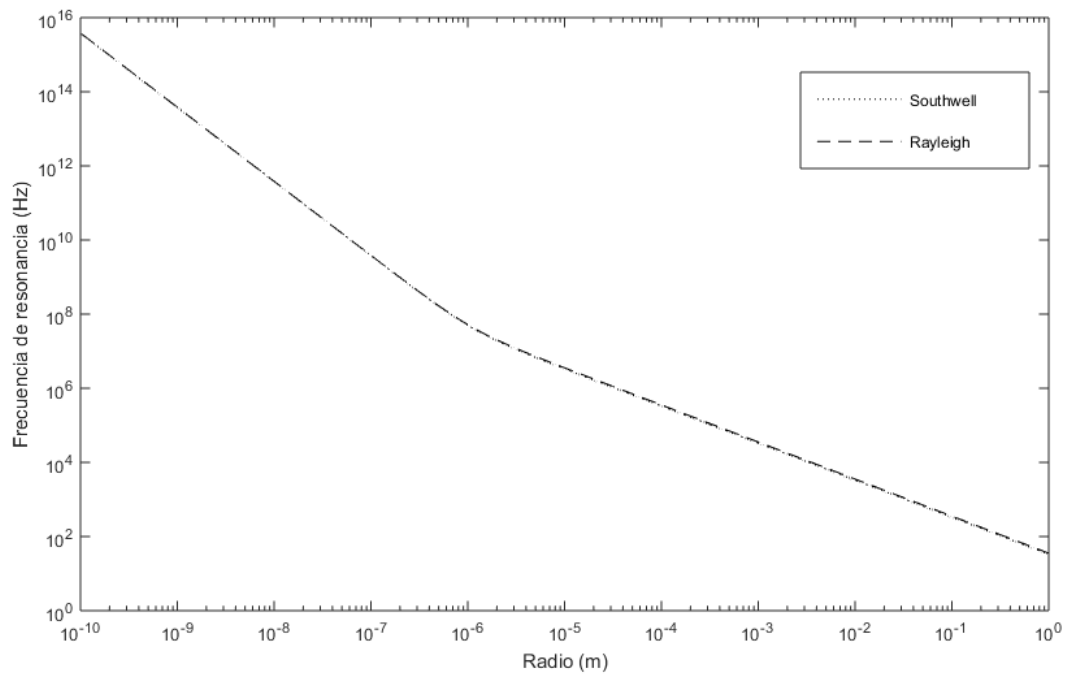


Figura 3-1.: Frecuencias de resonancia natural para una placa de grafeno calculadas con métodos de Rayleigh y Southwell para un rango amplio de valores del radio de la placa. Se toma $T = 1\frac{N}{m}$.

En este caso $n = 0$ ya que se considera el modo de vibración fundamental, por lo que se obtiene:

$$\omega^2 \leq \frac{320}{3} \frac{D}{\rho R^4} \left(1 + \frac{TR^2}{16D}\right), \quad (3-4)$$

Además, del método de Southwell, como se explica en [8], se obtienen cotas inferiores de las frecuencias de los modos:

$$\omega^2 \geq \omega_r^2 + \omega_t^2, \quad (3-5)$$

donde ω_r es la frecuencia de resonancia tomando en cuenta solo la rigidez de la placa y ω_t tomando en cuenta solo la tensión en el borde y ambas partes son dadas por:

$$\omega_r^2 = 104.36 \frac{D}{\rho R^4}, \quad (3-6)$$

y

$$\omega_t^2 = 5.783 \frac{T}{\rho R^2}. \quad (3-7)$$

Estas expresiones se usaron para calcular las frecuencias de resonancia de una placa de grafeno (figura **3-1**) tomando $T = 1 \frac{N}{m}$ (A.3). Se observa que los valores calculados por ambos métodos tienen una diferencia despreciable, por lo que ambos son igualmente fiables para estimar las frecuencias de resonancia. Se muestran nuevamente los resultados obtenidos con el método de Southwell (figura **3-2**), esta vez mostrando las contribuciones de ω_r y ω_t por separado. En esta ocasión se consideró a $T = 0.0564 \frac{N}{m}$ para ajustarlo con los resultados reportados por Chen et al. para un resonador de grafeno con un radio de $2 \mu m$ [2].

De los resultados obtenidos para esta figura, se concluye que para radios menores a cierto valor (en este caso, aproximadamente $10^{-8} m$), la parte debida a la rigidez (ω_r) es la que más contribuye, siendo ω_t despreciable. En cambio, a partir de cierto valor ($10^{-7} m$ en este caso), el contribuyente despreciable es ω_r . Para radios que se encuentren en el rango intermedio, ambas contribuciones deben ser consideradas, dependiendo de la precisión deseada. Los radios de la placa en los que cierta contribución será despreciable respecto a la otra, dependen de los valores de la rigidez flexural D y la tensión en el borde T como se ve en las ecuaciones (3-6) y (3-7). Considerando una tensión fija, estos radios dependerán únicamente de D y por lo tanto del grosor h del material considerado. Se realizaron los mismos cálculos considerando placas de siliceno y fosforeno de donde se obtienen gráficas con comportamientos similares.

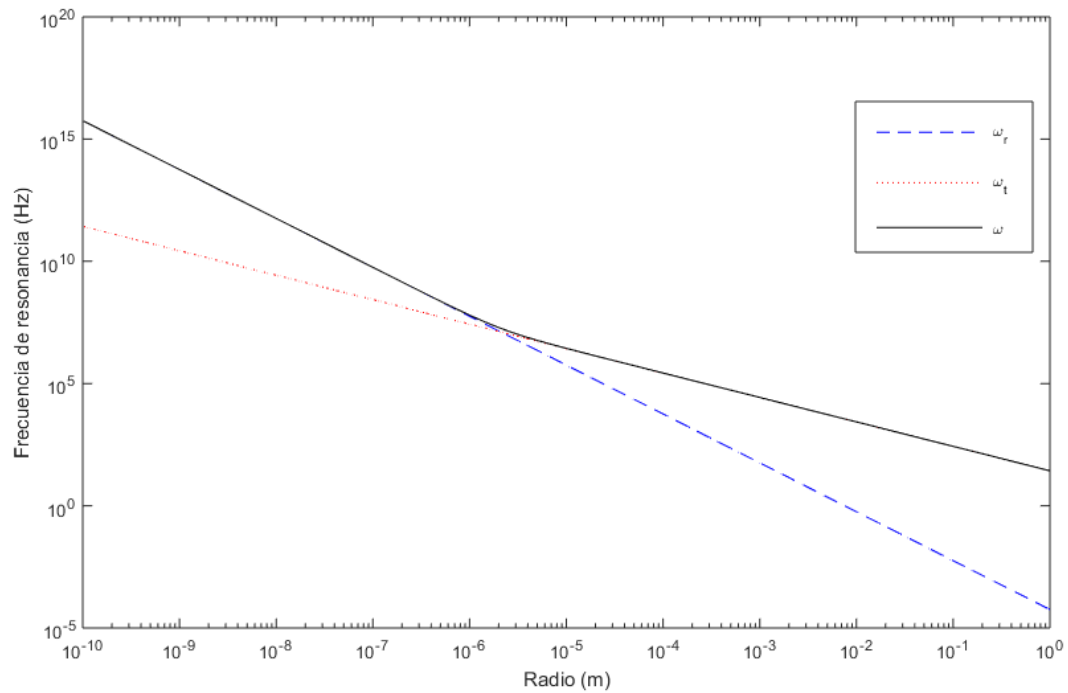


Figura 3-2.: Frecuencias de resonancia de una placa de grafeno calculada con el método de Southwell mostrando ambas contribuciones por separado. ω_r corresponde a la parte debido únicamente a la rigidez de la placa y ω_t la que corresponde a la tensión, ω toma en cuenta ambas contribuciones.

3.3. Voltajes de salto a contacto de MEMS/NEMS de materiales bidimensionales

En la sección anterior se mencionaron los cálculos de frecuencias de modos fundamentales de placas circulares de distintos materiales, con estas frecuencias se asocian constantes de resorte a las placas correspondientes según

$$k = \omega^2 m \quad (3-8)$$

siendo ω la frecuencia angular de resonancia y m la masa de la placa. A partir de esto y utilizando la ecuación (2-7), pueden obtenerse los valores del voltaje de salto a contacto para cada uno de los materiales. Se muestran estos resultados calculados para una capa de grafeno, siliceno, fosforeno comparados con una membrana de silicio con grosor de 10 nm (figura 3-3) tomando la distancia entre las placas d como un veinteaño del radio de la placa (A.3). La figura muestra un rango muy amplio de radios considerados, pero al referirnos a MEMS y NEMS en este trabajo, el rango relevante corresponde a radios del orden de micras y menores, en estas dimensiones se observa que los voltajes de salto a contacto calculados para placas de materiales bidimensionales son menores que los obtenidos para silicio, material que es comúnmente usado en muchos MEMS.

De las ecuaciones (2-7), (3-5) y (3-8), puede verse que el voltaje de salto a contacto es proporcional a \sqrt{E} y a h^2 , por lo que a pesar de tener módulos de Young mayores, el voltaje de salto a contacto de materiales bidimensionales es menor por sus bajos grosores, por lo que dispositivos basados en estos materiales son mas inestables. Xiang et al [19] reportan el valor del módulo de Young de hasta ocho capas de grafeno con un valor de 1.16 TPa y Partoens [14] reporta que hasta diez capas de grafeno mantienen sus propiedades sin llegar a ser grafito. Se muestra nuevamente el cálculo anterior, esta vez considerando diez capas de grafeno, siliceno y fosforeno (figura 3-4). En el caso de grafeno, se supuso que el valor del módulo de Young permanecía igual que para 8 capas; en los dos materiales restantes, se consideró que su módulo de Young aumentaba de 1 a 10 capas en la misma razón que en el grafeno. Como se observa, al menos para el grafeno y fosforeno, los voltajes de salto a contacto son comparables a los de silicio aunque un poco menores, a pesar de ser el conjunto de capas varias veces mas delgado que la membrana de silicio considerada. Por lo tanto, es posible tener dispositivos de materiales bidimensionales tan como otros similares de silicio, además, siendo estos últimos de dimensiones mayores.

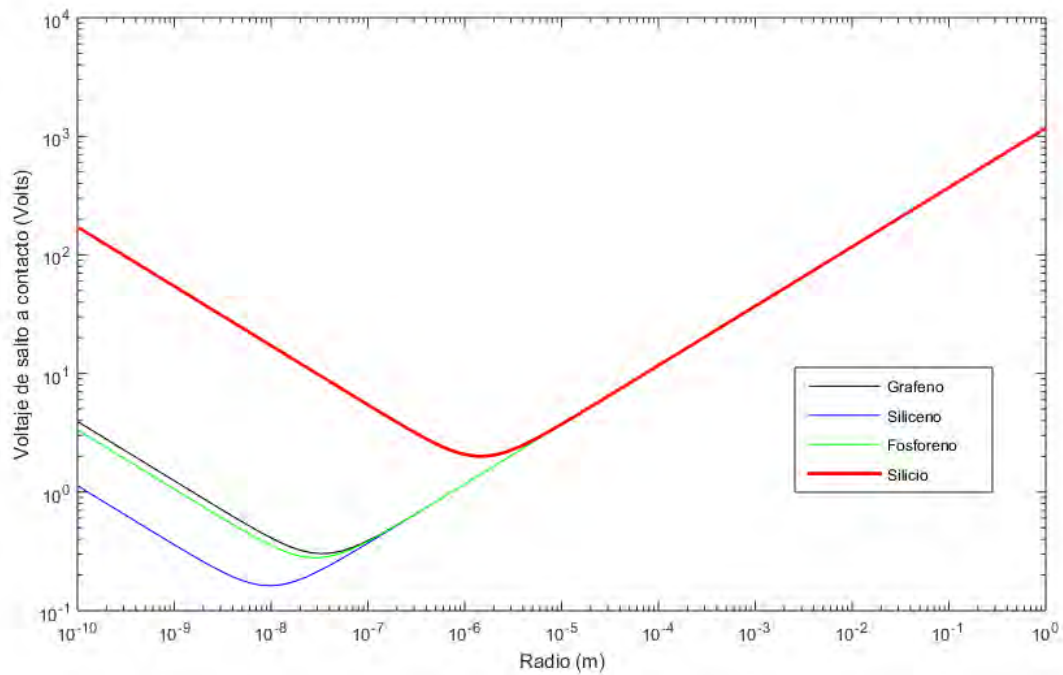


Figura 3-3.: Comparación del voltajes de salto a contacto en función del radio de membranas de 3 materiales bidimensionales (una capa) y una de silicio con un grosor de 10 nanómetros.

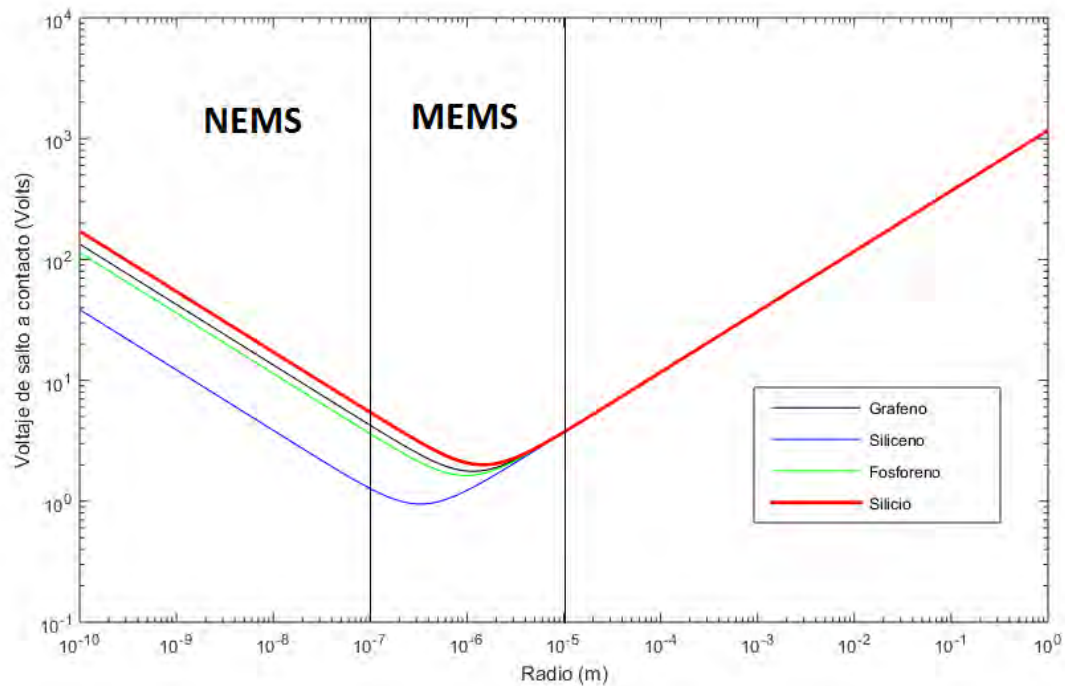


Figura 3-4.: Comparación del voltajes de salto a contacto en función del radio de membranas de 10 capas de 3 materiales bidimensionales y silicio con un grosor de 10 nanómetros. Además se muestra una separación entre dimensiones correspondientes a MEMS o NEMS.

4. Modelo electrostático-elástico de la membrana

4.1. Descripción del modelo

4.1.1. El problema electrostático

El modelo de masa-resorte no captura la geometría real del problema. En esta sección se desarrolla una teoría general de sistemas electrostático-elásticos (figura 4-1), en los que la deformación de la placa se toma en cuenta, así como los efectos del campo eléctrico entre esta y la placa aterrizada.

Se considera a Ω como la región ocupada por la placa superior y R la longitud de la misma. Se considera una placa elástica a un potencial V , mientras que otra placa fija está a potencial $V=0$. Además, el potencial electrostático ϕ satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0, \tag{4-1}$$

en la región entre las placas y alrededor de estas. Las condiciones de frontera son:

$$\phi = V \text{ en la placa elástica} \tag{4-2}$$

y

$$\phi = 0 \text{ en la placa fija.} \tag{4-3}$$

Por lo que el problema electrostático está acoplado al problema elástico a través de las condiciones de frontera, ya que dependen de la deformación de la placa elástica.

4.1.2. El problema elástico

Para modelar la placa elástica se utiliza la ecuación para la deformación de una placa en un potencial eléctrico. La desviación w' de la placa satisface [15]:

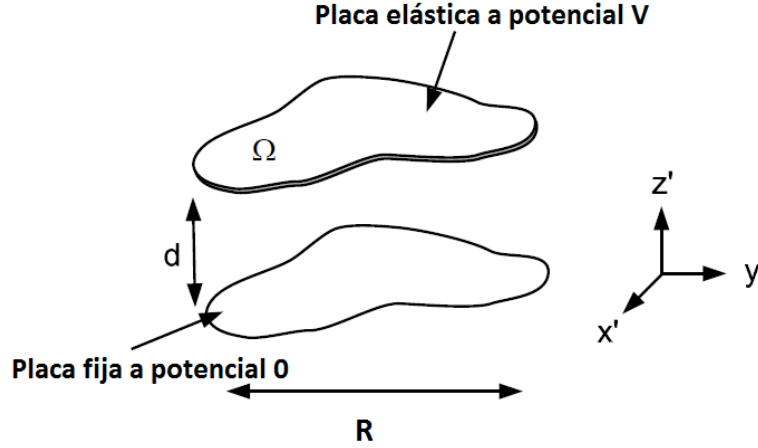


Figura 4-1.: Esquema de un sistema electrostático-elástico general. Figura tomada de [16]

$$\rho h \frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} + a \frac{\partial w'}{\partial t'} - \mu \nabla_{\perp}^2 w' + D \nabla_{\perp}^4 w' = -\frac{\epsilon_0}{2} |\nabla \phi|^2. \quad (4-4)$$

Donde ρ es la densidad de la placa, h su grosor, μ la tensión por unidad de longitud en su borde, a un parámetro de amortiguamiento, D la rigidez flexural y ϵ_0 la permitividad del vacío. El operador ∇_{\perp} corresponde a diferenciación únicamente en las direcciones x' y y' .

4.2. Considerando únicamente tensión en la placa

4.2.1. Escalamiento

En esta sección se considera el problema descrito considerando que la rigidez flexural es despreciable en comparación a la tensión, como se vio con el modelo de masa-resorte, esta suposición es válida cuando el radio de la placa es grande comparado a su grosor.

Es útil reescalar el sistema para escribir las ecuaciones en forma adimensional. Se escala el potencial electrostático con el voltaje aplicado, el tiempo con una escala del sistema, las variables x' y y' con una longitud característica del sistema, z' y w' con la distancia entre ambas placas d . Se define:

$$w = \frac{w'}{d}, \quad \psi = \frac{\phi}{V}, \quad x = \frac{x'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R}, \quad z = \frac{z'}{d}, \quad t = \frac{\mu t'}{a R^2}. \quad (4-5)$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones (4-1) - (4-4), se obtiene:

$$\epsilon^2 \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-6)$$

$$\psi = 1 \text{ en la placa elástica} \quad (4-7)$$

$$\psi = 0 \text{ en la placa fija} \quad (4-8)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 w + \delta \nabla_{\perp}^4 w = -\lambda [\epsilon^2 |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2]. \quad (4-9)$$

El parámetro α es el inverso del factor de calidad del sistema. Es definido por

$$\alpha = \frac{aR}{\sqrt{\rho h \mu}}. \quad (4-10)$$

El parámetro δ mide la importancia relativa de la tensión y rigidez y se define como:

$$\delta = \frac{D}{R^2 \mu}. \quad (4-11)$$

El parámetro ϵ es la razón de forma del sistema y es definido por:

$$\epsilon = \frac{d}{R}. \quad (4-12)$$

El parámetro λ es la razón entre una fuerza electrostática y una elástica de referencia y es definido por:

$$\lambda = \frac{\epsilon_0 V^2 R^2}{2d^3 \mu} \quad (4-13)$$

4.2.2. El límite de razón de forma pequeño

Se considera a $\epsilon \ll 1$. Físicamente, esto significa que las dimensiones laterales del sistema son grandes comparadas con la separación entre ambas placas (figura 4-1). Para muchos MEMS esta es una aproximación válida. Si se toma el límite en el que ϵ es cero, el problema electrostático se reduce a :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4-14)$$

la cuál puede resolverse para obtener el potencial aproximado:

$$\psi \approx Az + B. \quad (4-15)$$

Se requiere el potencial entre las placas, por lo que se aplica a ψ las condiciones de frontera:

$$\psi(x, y, w, t) = 1, \quad (4-16)$$

y

$$\psi(x, y, 0, t) = 0. \quad (4-17)$$

Con lo que se obtiene:

$$\psi \approx \frac{z}{w}. \quad (4-18)$$

Esta aproximación es equivalente a ignorar los efectos de borde eléctrico. Finalmente se toma a ϵ como cero en la ecuación (4-9) ya que $R \gg d$ y se usa el potencial aproximado encontrado para obtener:

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w + \delta \nabla^4 w = -\frac{\lambda}{w^2}. \quad (4-19)$$

Esta ecuación está desacoplada de la ecuación del potencial eléctrico y puede ser resuelta de manera independiente. Se deja la notación ∇_{\perp} por solo ∇ , debe recordarse que el operador actúa únicamente en x y y . El término δ se toma como cero por la suposición de la rigidez flexural despreciable.

4.2.3. Diagrama de bifurcación del sistema considerando únicamente tensión

. Tomando como cero las derivadas respecto al tiempo de la ecuación (4-19), se obtiene:

$$\nabla^2 w = \frac{\lambda}{w^2} \text{ en } \Omega \quad (4-20)$$

y

$$w = 1 \text{ en } \partial\Omega \quad (4-21)$$

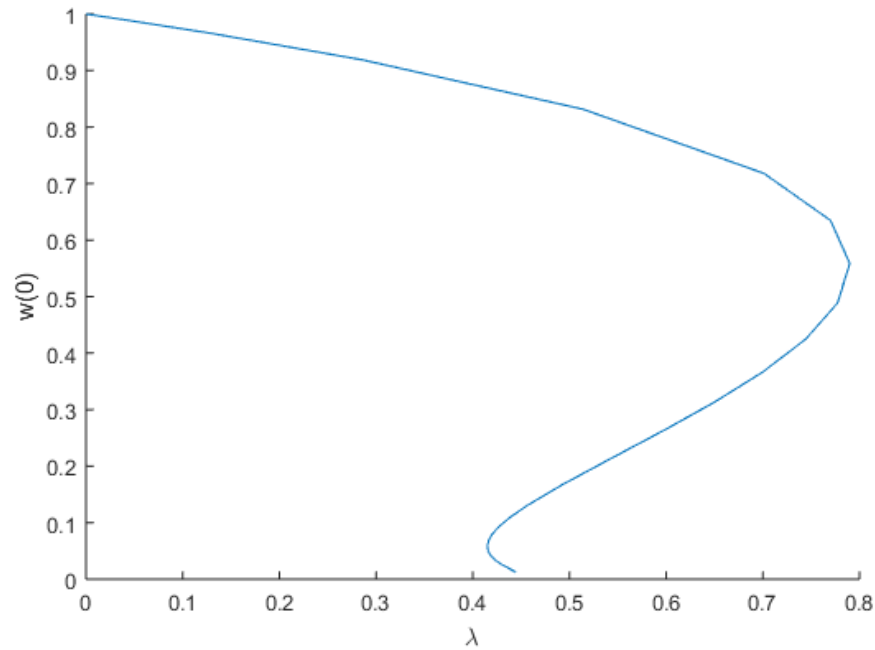


Figura 4-2.: Diagrama de bifurcación considerando únicamente la tensión en la membrana. La rama superior, hasta la primer bifurcación, corresponde a las soluciones de equilibrio estable.

Se toma a L como el radio de la membrana. Eligiendo coordenadas cilíndricas debido a la simetría del problema, la ecuación (4-20) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\lambda}{w^2} \text{ en } \Omega \quad (4-22)$$

Una solución detallada de esta ecuación puede encontrarse en [15]. Se muestran resultados calculados de λ comparados a $w(0)$, el mayor desplazamiento en la membrana (figura 4-2). Ya que λ es proporcional al cuadrado de V , la figura muestra que existe un voltaje máximo a partir del cuál no existen más posiciones de equilibrio, al igual que lo concluido a partir del modelo de masa-resorte. Únicamente la primer rama de la figura, hasta el valor máximo de λ , corresponde a puntos de equilibrio estables [15]. También se muestra una simulación de la dinámica de la membrana para 4 tiempos distintos, obtenida de la resolución numérica de la ecuación (4-19) (figura 4-3) con la utilización de MATLAB (A.4).

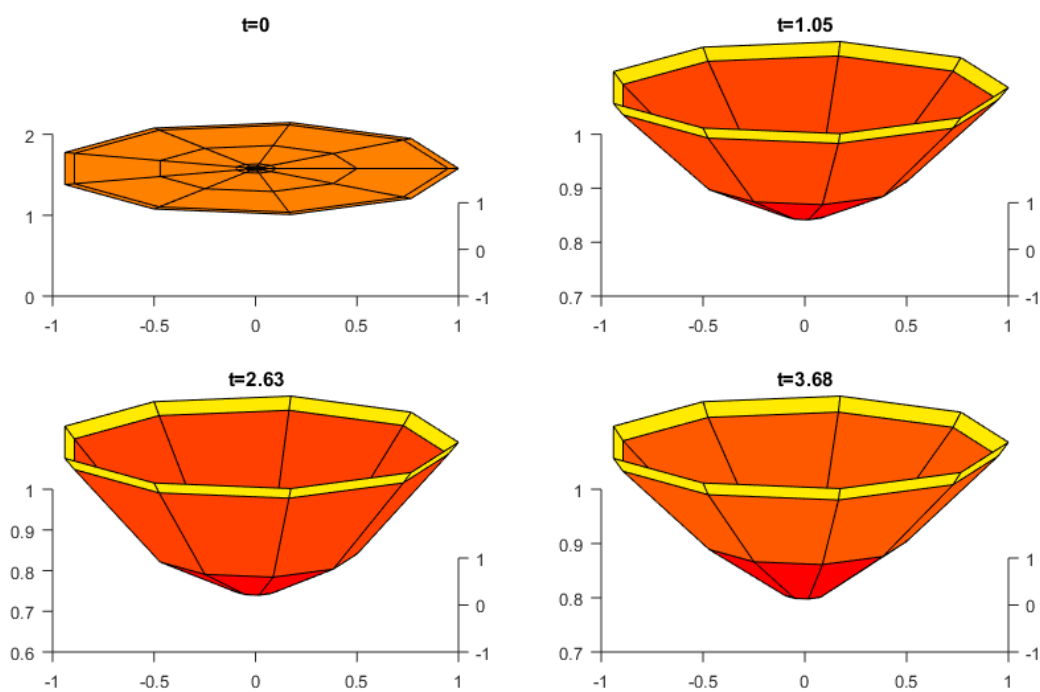


Figura 4-3.: Simulación de la dinámica de la membrana en cuatro tiempos distintos con valores de $\lambda = 0.75$ y $\alpha^2 = 10$, el tiempo se toma en segundos.

4.3. Considerando únicamente la rigidez de la placa

4.3.1. Escalamiento

Ya que se tiene interés en MEMS/NEMS, el rango más importante para el radio es cuando son relativamente pequeños, por lo que en esta sección se considera que la tensión es despreciable en comparación a la rigidez flexural, esta suposición es válida en el rango mencionado.

Se reescala el sistema al igual que en la sección anterior para obtener la ecuación de éste en su forma adimensional. Se define:

$$w = \frac{w'}{d}, \psi = \frac{\phi}{V}, x = \frac{x'}{R}, y = \frac{y'}{R}, z = \frac{z'}{d}, t = \frac{Dt'}{aR^4}. \quad (4-23)$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones (4-1) - (4-4), se obtiene:

$$\epsilon^2 \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-24)$$

$$\psi = 1 \text{ en la placa elástica} \quad (4-25)$$

$$\psi = 0 \text{ en la placa fija} \quad (4-26)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\delta} \nabla_{\perp}^2 w + \nabla_{\perp}^4 w = -\Lambda [\epsilon^2 |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2]. \quad (4-27)$$

Con:

$$\beta = \frac{aR^2}{\sqrt{\rho h D}}, \quad (4-28)$$

$$\Lambda = \frac{\epsilon_0 V^2 R^4}{2d^3 D}, \quad (4-29)$$

δ y ϵ iguales a la sección anterior, igualmente se considera la aproximación de razón de forma pequeña, por lo que se obtiene la ecuación dinámica del sistema:

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla_{\perp}^4 w = -\frac{\Lambda}{w^2}. \quad (4-30)$$

Donde se ha tomado $\frac{1}{\delta} = 0$ por considerarse que la tensión es despreciable.

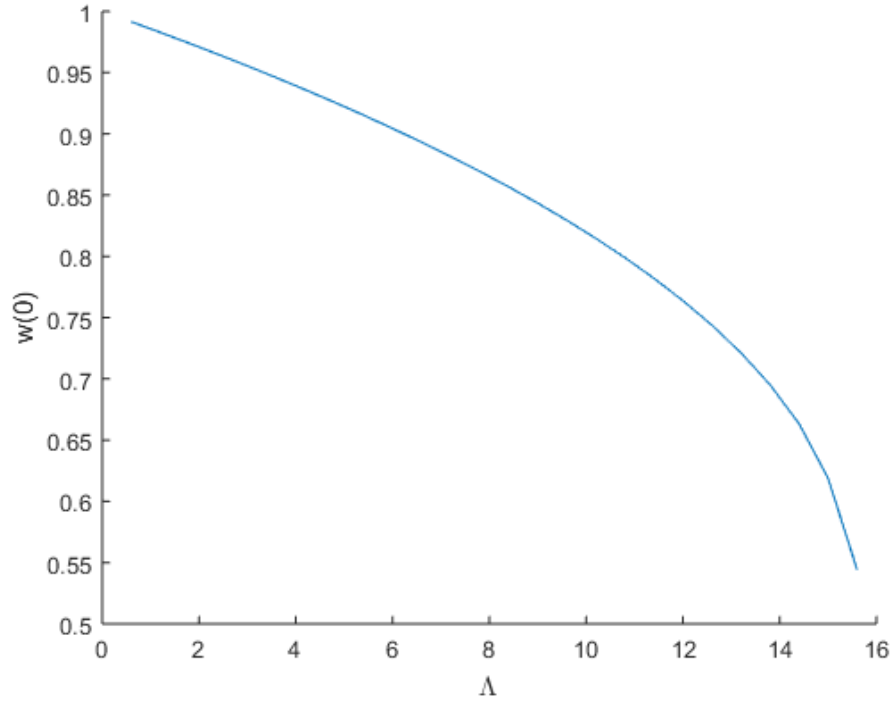


Figura 4-4.: Diagrama parcial de bifurcación del sistema considerando únicamente la rigidez del material de la membrana en el que se muestra únicamente una rama del diagrama de bifurcación completo, que corresponde a las soluciones estables.

4.3.2. Diagrama parcial de bifurcación del sistema considerando únicamente la rigidez

Tomando como cero las derivadas respecto al tiempo de la ecuación (4-30), se obtiene la ecuación estática:

$$\nabla^4 w = -\frac{\lambda}{w^2} \text{ en } \Omega, \quad (4-31)$$

en coordenadas cilíndricas, considerando que w solo depende de r :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\lambda}{w^2} \quad (4-32)$$

con condiciones de frontera:

$$w(1) = 1 \quad \frac{\partial w(1)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial w(0)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial^3 w(0)}{\partial r^3} = 0. \quad (4-33)$$

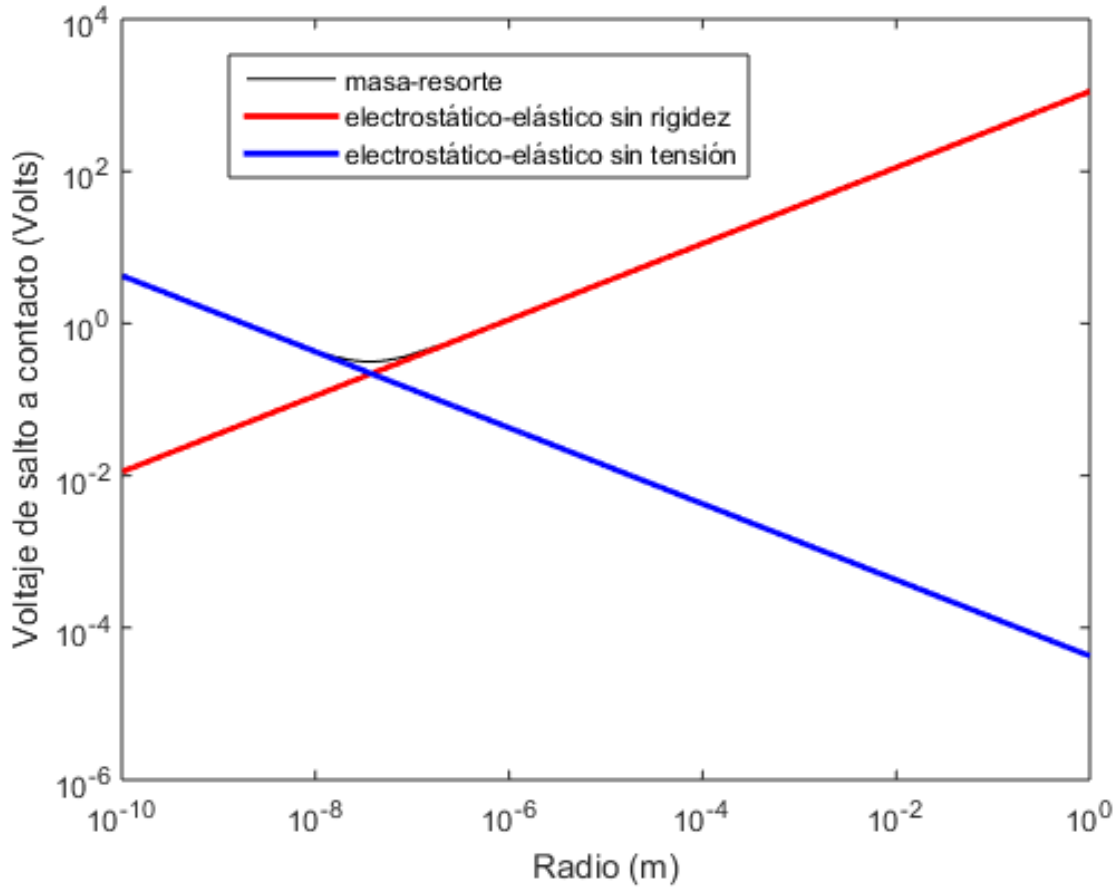


Figura 4-5.: Comparación de los voltajes de salto a contacto calculados con dos modelos distintos, se tomó a $d = \frac{a}{20}$.

Se resolvió numéricamente la ecuación (4-32) utilizando MATLAB (A.5), con condiciones de frontera (4-33) para una serie de valores de Λ , encontrándose igualmente que existe un valor máximo a partir del cuál, la ecuación no tiene solución. Se muestran los resultados hasta este punto, mostrándose todos los valores de equilibrio estable del sistema (figura 4-4).

4.4. Comparación con el modelo de masa-resorte

En esta sección se comparan los resultados de las secciones 4.2 y 4.3 con los obtenidos usando el modelo de masa-resorte. A partir de los valores de λ y Λ máximos obtenidos, puede encontrarse el voltaje de salto a contacto de cada uno de los casos. En los cálculos realizados ignorando la rigidez, se encontró un valor máximo de λ es 0.7885, a partir de esto y la ecuación (4-13), pueden encontrarse los valores del voltaje de salto a contacto para distintos radios de la membrana. Análogamente, de los cálculos hechos sin considerar tensión, se obtuvo un valor de Λ de 15.6, y usando la ecuación (4-29) se encuentran fácilmente los

valores del voltaje de salto a contacto para distintos radios. Se puede observar que, con estos cálculos mas precisos, los voltajes de salto a contacto calculados son mayores a los obtenidos con el modelo anterior, llegando a diferir en un 4% aproximadamente para el caso sin rigidez, y tan solo en un 0.5% en el caso sin tensión. Estos resultados se muestran en la figura 4-5 para el caso de una capa de grafeno, como un ejemplo (A.3). Puede observarse que los cálculos usando este modelo electrostático-elástico se ajustan a los obtenidos por el modelo de masa-resorte, excepto cuando tanto la tensión como la rigidez del material es importante; sin embargo, en un rango apropiado para MEMS/NEMS, la rigidez suele ser más relevante. Además, de la figura 4-2, se observa que el valor mínimo de una posición de equilibrio es en $w(0) = 0.56$, y de la figura 4-4 se obtiene que es $w(0) = 0.54$, mientras que con el modelo de masa-resorte se había encontrado que esta posición era de $\frac{2}{3} \approx 0.66$. Finalmente, se compara un cálculo de voltaje de salto a contacto considerando un dispositivo de silicio usando ambos modelos descritos con un resultado experimental reportado en [4]. En este caso se considera que la placa tiene un grosor de 800 nanómetros, un radio de 1.2 milímetros, una separación entre ambas placas de 3 micras y una tensión residual de 20 MPa. El resultado reportado es de 6.75 Volts, mientras el obtenido a partir de los cálculos usando estos modelos fueron 8.5 Volts y 8.1 Volts utilizando los modelos de masa-resorte y electrostático-elástico, respectivamente. De lo anterior es claro que el modelo electrostático-elástico es más cercano al resultado experimental. La diferencia en resultados también puede relacionarse con la distinta geometría considerada a pesar de tratarse de dispositivos con las mismas dimensiones, en el experimento descrito en [4] las placas consideradas son cuadradas mientras que los cálculos realizados consideran placas circulares. La comparación de los resultados descritos se muestra en la figura 4-6.

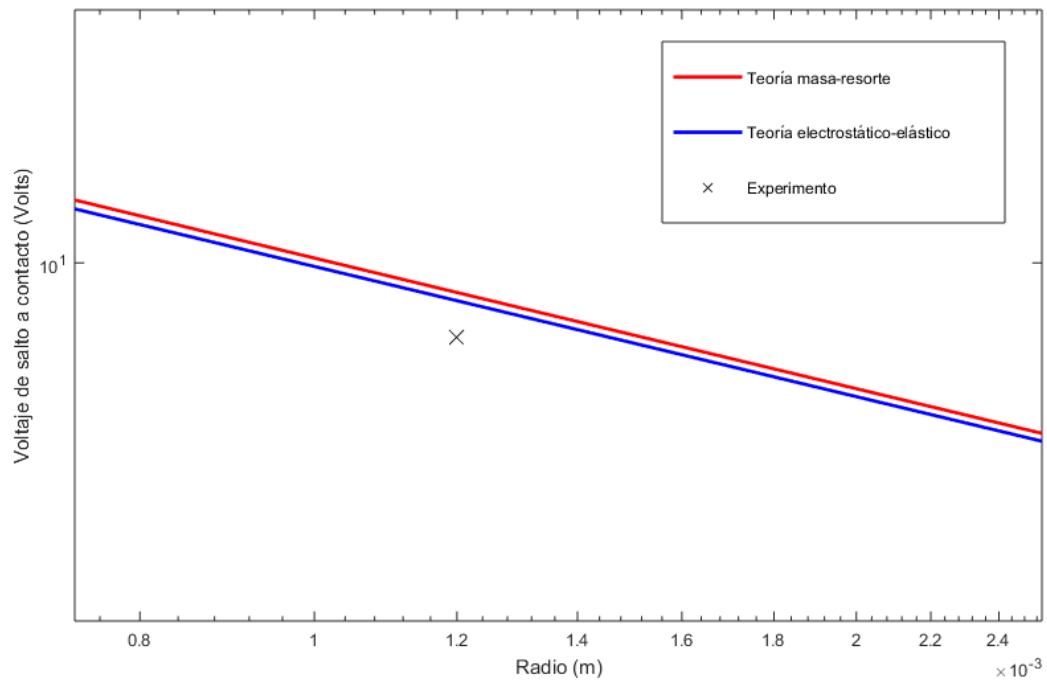


Figura 4-6.: Comparación entre el voltaje de salto a contacto de un dispositivo de silicio medido experimentalmente reportado en [4] y cálculos realizados considerando un dispositivo similar utilizando el modelo de masa-resorte y electrostático-elástico.

5. Modelo de masa-resorte con potenciales de Yukawa

5.1. Ecuación dinámica del sistema

En esta sección se considera un modelo de masa-resorte como en el capítulo 2, Se considera el mismo esquema que en aquel capítulo, es decir, la figura **2-1**. Esta vez no se considera un potencial electrostático como en aquel capítulo sino un potencial de tipo Yukawa de la forma:

$$V_{yuk} = -g^2 \frac{e^{-\bar{\alpha}x}}{x^n}, \quad (5-1)$$

donde g es una constante de magnitud, n y $\bar{\alpha}$ son números reales. Un potencial tipo Yukawa puede ser considerado como una generalización de potenciales que puedan ser descritos por esa expresión con cierto n y $\bar{\alpha}$. El potencial electrostático se encuentra incluido como un caso particular con $\bar{\alpha} = 0$ y $n = 1$. El efecto Casimir entre dos placas conductoras separadas por vacío [3], el potencial de Lennard-Jones [10], el potencial Buckingham [1] y otros de tipo Van Der Waals forman parte de este grupo. La ecuación dinámica del sistema es, entonces:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} = -k(x - d) - g^2 e^{-\bar{\alpha}x} \frac{\bar{\alpha}x + n}{x^{n+1}}, \quad (5-2)$$

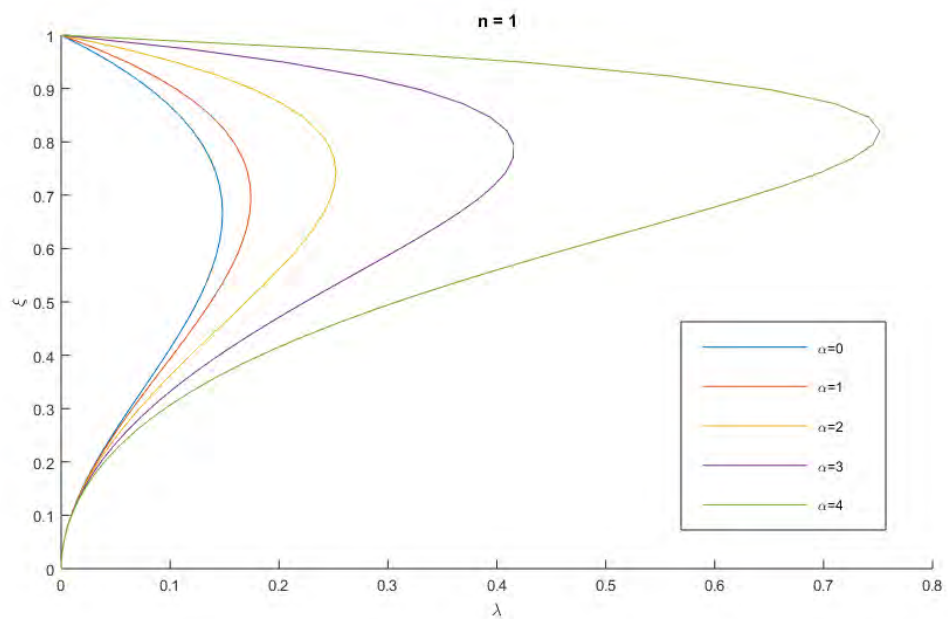
Definiendo:

$$\xi = \frac{x}{d}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \alpha = d\bar{\alpha} \quad (5-3)$$

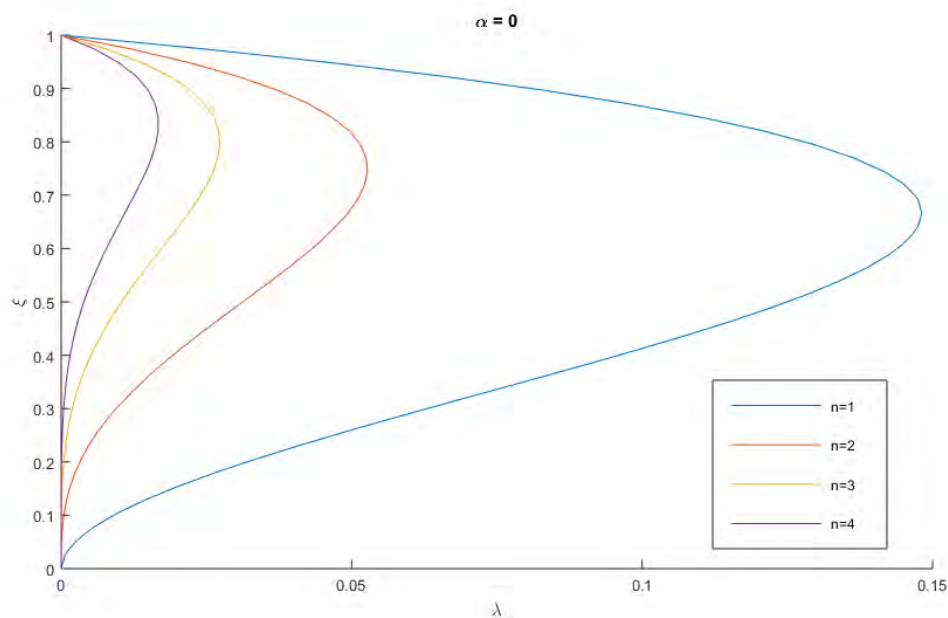
y sustituyendo en la ecuación (5-2), se obtiene la ecuación adimensional del sistema:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \eta \frac{d\xi}{d\tau} = -(\xi - 1) - \lambda e^{-\alpha\xi} \frac{\alpha\xi + n}{\xi^{n+1}}, \quad (5-4)$$

con:



(a)



(b)

Figura 5-1.: Diagramas de bifurcación con distintos valores de n y α . (a) Diagrama de bifurcación con $n=1$ y distintos valores de α . Se observa que al aumentar α , los valores de λ de salto a contacto aumentan, por lo que el sistema es más estable con valores mayores de α . (b) Diagrama de bifurcación con $\alpha=0$ y algunos valores de n . Se observa un comportamiento opuesto al caso anterior, al aumentar el valor de n el sistema se vuelve más inestable al disminuir el valor de λ de salto a contacto.

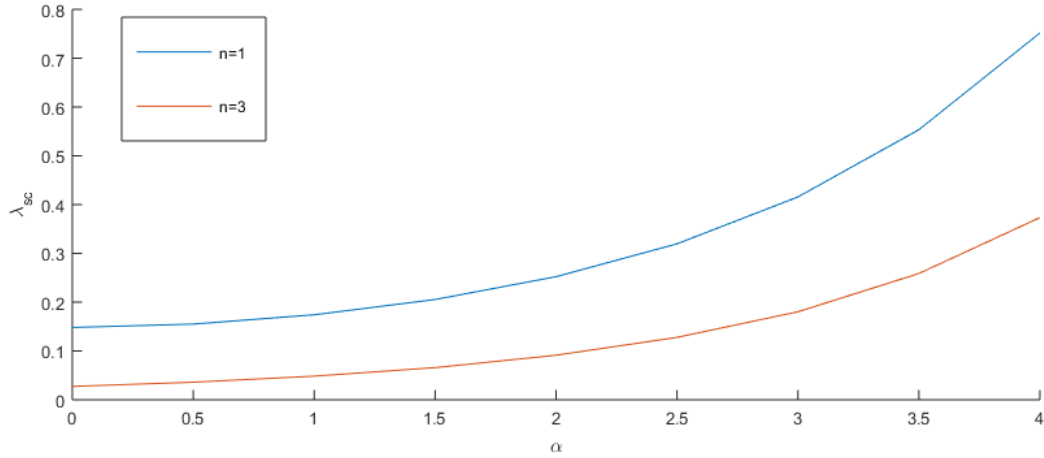


Figura 5-2.: λ de salto a contacto para $n = 1, 3$ al variar α . En esta figura puede verse como al aumentar α , el valor del λ de salto a contacto aumenta considerablemente, por lo que fuerzas de Yukawa mayores serán necesarias para que el sistema colapse. Además, el sistema es ligeramente más estable para $n = 1$ que para $n = 3$.

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \lambda = \frac{g^2}{kd^{n+2}}. \quad (5-5)$$

λ es una razón adimensional entre la fuerza provocada por el potencial de Yukawa y la fuerza de restitución del resorte, en el caso electrostático:

$$\lambda_{elec} = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2kd^3}. \quad (5-6)$$

5.2. Diagramas de bifurcación y espacio fase del sistema

De la ecuación (5-4) se obtiene la ecuación estática del sistema:

$$(1 - \xi) = \lambda e^{-\alpha\xi} \frac{\alpha\xi + n}{\xi^{n+1}}, \quad (5-7)$$

con la cuál puede graficarse ξ en función de λ , obteniéndose diagramas de bifurcación, las figuras 5-1a y 5-1b muestran estos diagramas para variaciones de α y n , respectivamente, con el otro parámetro constante en cada caso. De los resultados mostrados en estas figuras, se observa que con n fija, al aumentar α , el valor máximo de λ , o λ de salto a contacto, aumenta, por lo cuál la fuerza de Yukawa necesaria para que el sistema colapse incrementa.

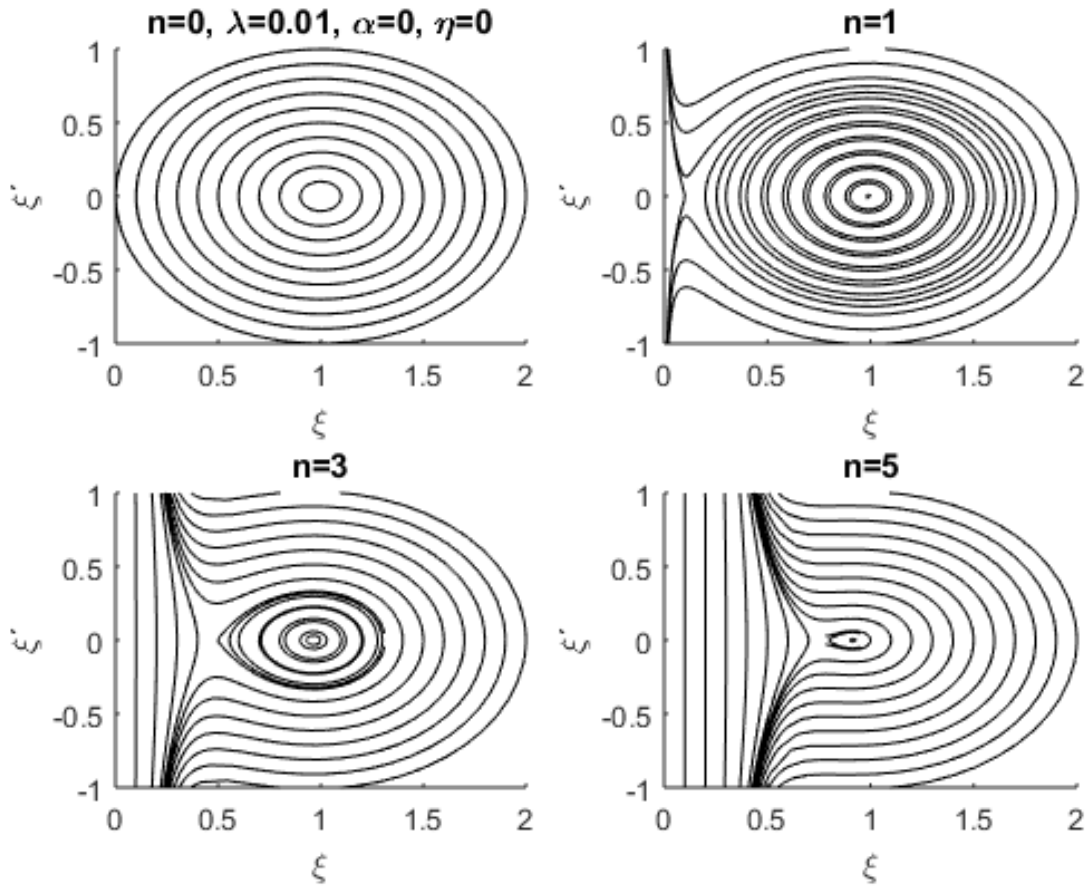


Figura 5-3.: Diagrama de espacio fase para cuatro valores de n y otros parámetros constantes. Se observa que la cantidad de soluciones sin colapso disminuye cuando n aumenta, es decir, el sistema se hace más inestable.

En el caso en el que α es fijo y n aumenta, pasa lo opuesto. Por lo tanto, valores menores de n y mayores de α representan sistemas más estables. Para ilustrar lo anterior, se muestran cálculos de λ de salto a contacto realizados con dos valores fijos de n al variar α (figura 5-2) Las figuras 5-3, 5-4, 5-5 y 5-6 muestran diagramas de espacio fase calculados a partir de soluciones numéricas de la ecuación (5-4) calculadas utilizando MATLAB (A.2), cada figura muestra una variación en algún parámetro manteniendo al resto constantes. De estos diagramas de espacio fase se observa que el número de soluciones donde el sistema no colapsa aumentan con el aumento del valor de α y la disminución del valor de n . Esto coincide con la información obtenida del diagrama de bifurcación pero en este caso se tiene un resultado más completo, ya que no se consideran únicamente posiciones de equilibrio sino un amplio conjunto de condiciones iniciales.

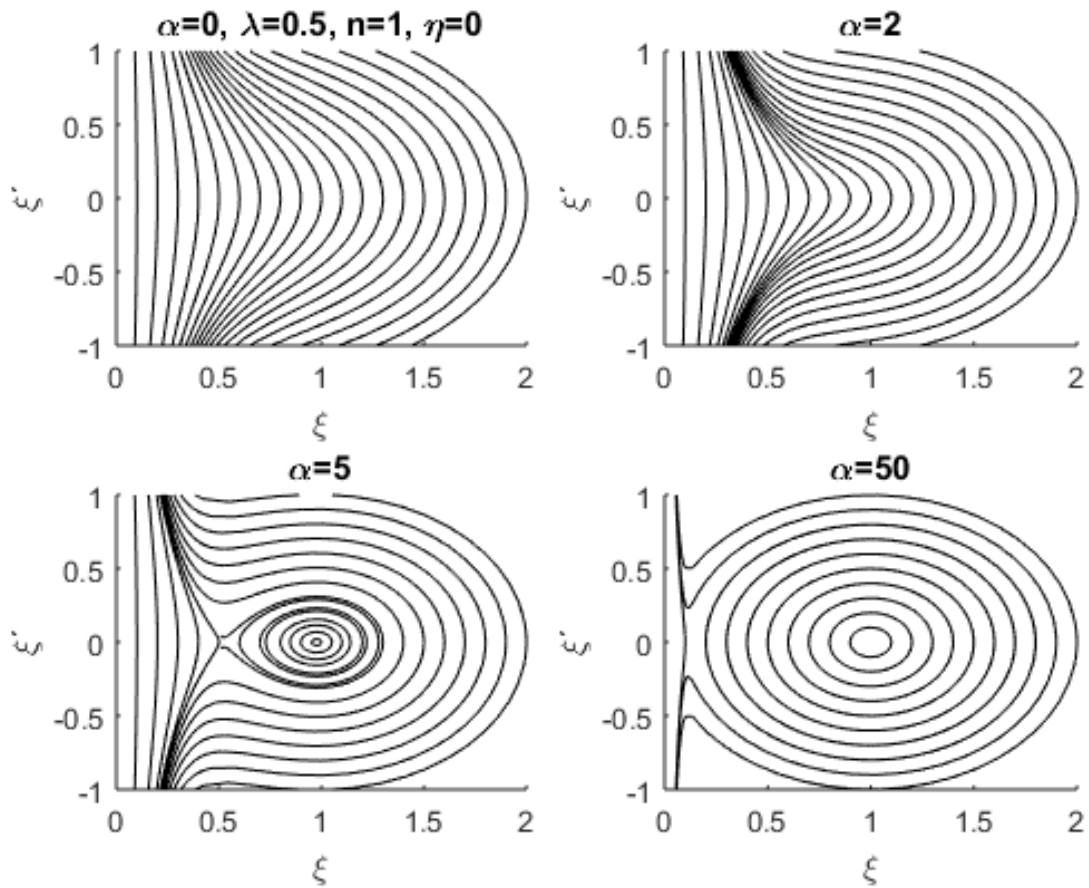


Figura 5-4.: Diagrama de espacio fase para cuatro valores de α y otros parámetros constantes. Se observa que contrario al caso anterior, cuando α aumenta, el número de soluciones sin colapso aumentan y el sistema se hace más estable.

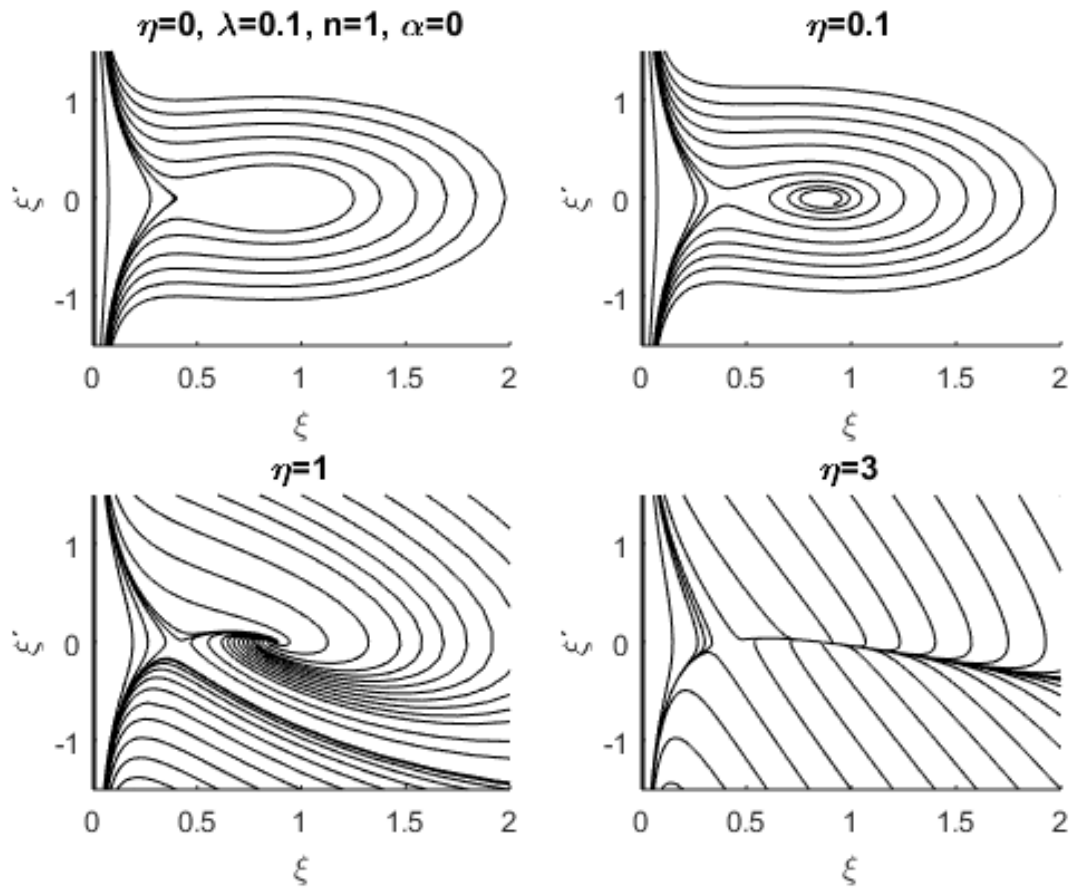


Figura 5-5.: Diagrama de espacio fase para cuatro valores de η y otros parámetros constantes. Al aumentar η (disminuye el factor de calidad), el sistema se hace más amortiguado, por lo que el sistema llega al reposo más rápidamente.

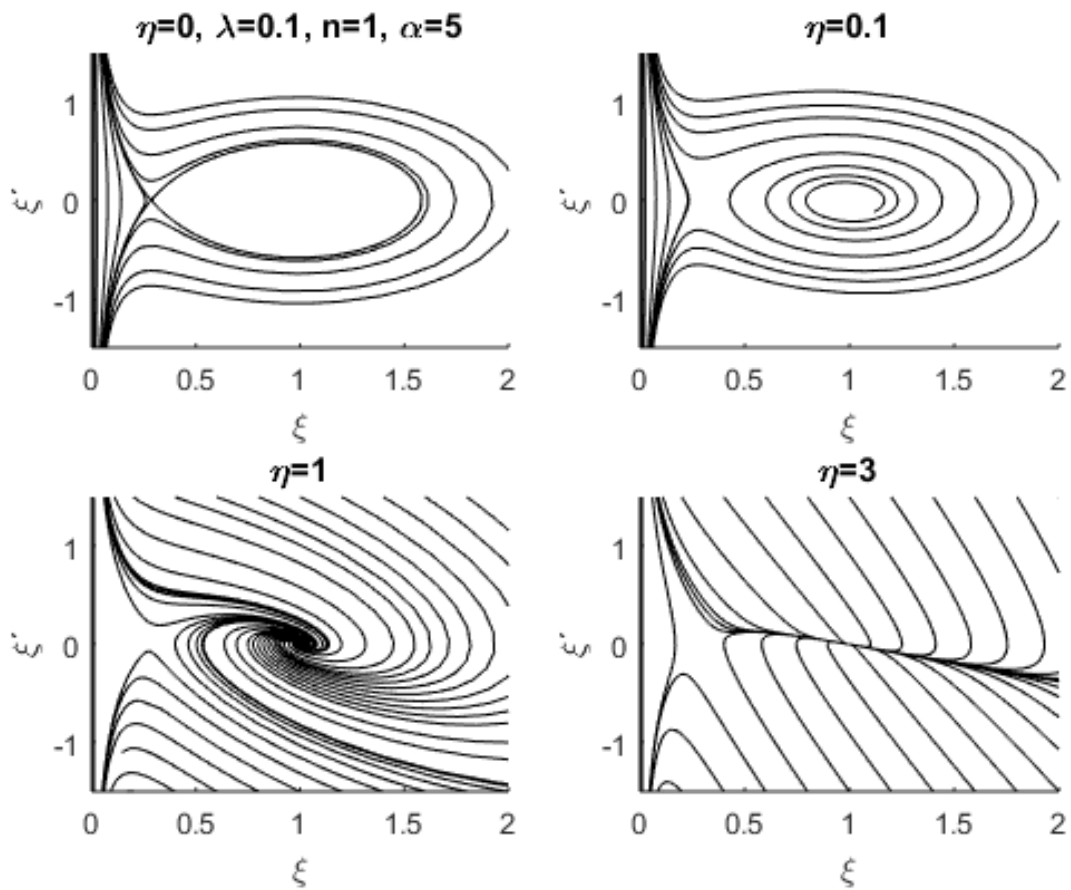


Figura 5-6.: Diagrama de espacio fase para cuatro valores de η y otros parámetros constantes. Se tienen los mismos parámetros que en el caso anterior a excepción de α que en este caso tiene un valor de 5. Se observa que el comportamiento del sistema es más estable al anterior ya que α es mayor.

6. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las condiciones en las cuáles un dispositivo MEMS/NEMS colapsa y la dinámica de estos sistemas considerando potenciales de distintos tipos utilizando métodos numéricos y analíticos. En el caso del potencial más sencillo (electrostático) se consideraron dispositivos basados en materiales bidimensionales como grafeno, siliceno y fosforeno y se presentaron resultados de voltajes críticos que limitan a estos dispositivos en comparación con otros de silicio.

En escalas de importancia para los MEMS/NEMS, en órdenes de micras o menores, dispositivos hechos a partir de varias capas de materiales bidimensionales como el grafeno y fosforeno pueden mostrar voltajes de salto a contacto similares a los hechos con materiales comunes como silicio, por lo que pueden ser dispositivos igualmente estables ante potenciales electrostáticos a pesar de seguir siendo considerablemente más delgados. Dispositivos de una sola capa de estos materiales son más inestables que sus análogos de silicio. Es importante considerar que los voltajes de salto a contacto dinámico son menores que los de salto a contacto estático, por lo que estos dispositivos podrían colapsar bajo potenciales menores a los considerados en el sistema en equilibrio.

Los modelos de masa-resorte y electrostático-elástico mostraron en general resultados muy similares, particularmente en el cálculo de voltajes de salto a contacto, donde las diferencias resultan ser muy pequeñas. El modelo de masa-resorte, a pesar de ser muy simple y considerablemente más sencillo que el modelo más completo, predice resultados correctos y útiles a considerar en el diseño de MEMS/NEMS. Sin embargo, el modelo electrostático-elástico sí muestra ciertos resultados, como diagramas de bifurcación, de manera más precisa. Como posibles recomendaciones en el diseño de esta clase de dispositivos, se menciona que el factor de calidad Q en esta clase de dispositivos es mayor en diseños de tipo tambor (membranas circulares ancladas en toda su circunferencia, como la considerada en este trabajo), que en dispositivos con diseños como tiras ancladas en dos extremos y otros similares [6]. También debe considerarse que en esta clase de dispositivos, se ha reportado que el factor de calidad es inversamente proporcional a la temperatura y proporcional al diámetro de la membrana y a la tensión en el borde de ésta. Tener estas consideraciones en cuenta es importante para conocer las condiciones para un funcionamiento más eficaz en el dispositivo, ya que para factores de calidad altos, el amortiguamiento será mínimo.

Al considerar potenciales de tipo Yukawa, el aumento en el parámetro α provoca también un aumento considerable en la magnitud del potencial crítico, por lo que dispositivos bajo un potencial de este tipo con un valor de α grande, representan sistemas mucho más estables

que sus análogos con $\alpha = 0$ o valores pequeños. El aumento en el parámetro n en potenciales de este tipo provoca un efecto opuesto. Por ésto es importante considerar ciertos potenciales en el diseño de MEMS/NEMS que pueden hacer al sistema considerablemente más inestables a ciertas distancias cuando se traten de potenciales con un valor de n mayor al del potencial electrostático, como el efecto Casimir ($n=3$, $\alpha = 0$).

Los cálculos presentados en este trabajo utilizando el modelo más completo (electrostático-elástico), se realizaron considerando dos rangos de dimensiones del dispositivo distintos. Ignorando la rigidez del material considerado y tomando en cuenta únicamente la tensión sobre este, en un caso; y considerando únicamente la rigidez del material e ignorando la tensión, en otro caso. Se propone resolver la ecuación dinámica completa del sistema en un trabajo posterior, sin despreciar ningún término, para obtener soluciones de un sistema completo válidas para dispositivos de cualquier dimensión.

A. Anexo: Código de programas utilizados

Este anexo adjunta algunos de los programas utilizados en MATLAB para los cálculos de los resultados mostrados en esta tesis. Cada sección incluye una descripción breve de la función del programa seguida del código de éste. Después de las líneas más relevantes se incluye una breve descripción de ésta. No se describen las líneas más comunes o simples como la inclusión de figuras, nombramiento de los ejes o definiciones de variables o funciones. Algunos programas utilizados no se muestran por ser variaciones de otros dentro de este anexo, en tales casos, se incluye una mención a estos en la sección correspondiente.

A.1. Programa 1

A.1.1. Descripción

Calcula los resultados del diagrama de bifurcación mostrado en la figura 2-2. El programa realiza un cálculo de V usando la ecuación (2-6) para un conjunto de valores de x y muestra los resultados en una gráfica. Los diagramas de bifurcación mostrados en la 5-1 se obtienen de manera similar, en ese caso utilizando la ecuación (5-7) variando los parámetros n y α en cada caso.

A.1.2. Código

```
1 figure('Color',[1 1 1]);  
2 xlabel('x')  
3 ylabel('V')  
4 title('Diagrama de bifurcacion')  
5 X=linspace(0,1,40);  
6 L=sqrt((X).^2-(X).^3);  
7 plot(X,L)
```

A.1.3. Descripción de algunas líneas

(5) Crea un vector de 40 elementos con valores del 1 al 40.

(6) Calcula los valores del voltaje según la ecuación (2-6) a partir del vector anterior, se tomó como 1 el valor de todas las constantes.

A.2. Programa 2

A.2.1. Descripción

Calcula los resultados del diagrama de espacio fase mostrado en la figura 2-3a. El programa calcula soluciones numéricas de la ecuación (2-10) para un conjunto de condiciones iniciales dentro de un intervalo de tiempo, grafica las soluciones de la posición y velocidad. El código para los resultados mostrados en 2-3b y 2-3c es análogo. Para los resultados del comportamiento dinámico de la placa mostrados en la figura 2-3d el código es análogo, en este caso se muestra la posición respecto al tiempo para únicamente dos condiciones iniciales. Los resultados mostrados en la figura 2-4 se realizaron con un programa similar a este pero sin ignorar el término de amortiguamiento. Los programas utilizados para obtener las figuras 5-3, 5-4, 5-5 y 5-6 son análogos a este, en esos casos la ecuación a resolver fue (5-4) y se variaron distintos parámetros en cada caso.

A.2.2. Código

```

1 function programa2
2 figure('Color',[1 1 1]);
3 title('V=0')
4 xlabel('x/d')
5 ylabel('v/d')
6 for k=0:20
7 x0=[2-k*0.1;0];
8 [t,x]=ode45(@dxdt,[0 8],x0);
9 hold on
10 plot(x(:,1),x(:,2),'k')
11 end
12 end
13
14 function d=dxdt(t,x)
15 v=0;
16 d=[x(2); -0.1481*(v^2/(x(1))^2)-x(1)+1];
17 end

```

A.2.3. Descripción de algunas líneas

(8) Usa la función ode45 de MATLAB para resolver la ecuación diferencial de la función dxdt (definida abajo) para t de 0 a 8 y condiciones iniciales definidas con el vector x_0

(16) Define la ecuación (2-10) como un vector para ser resuelta numéricamente como un sistema de dos ecuaciones diferenciales.

A.3. Programa 3

A.3.1. Descripción

Calcula los resultados mostrados en las figuras **3-1**, **3-2**, **3-3** y **4-5**. El programa calcula frecuencias de resonancia y voltajes de salto a contacto de placas de distintos materiales usando distintos modelos como se describe en los capítulos 3 y 4.

A.3.2. Código

```

1 Y=[1E12, 0.178E12, 0.105E12, 0.077E12];
2 H=[3.45E-10, 2.62E-10, 5.49E-10, 100E-10];
3 V=[0.186, 0.3, 0.66, 0.22];
4 P=[2200, 2329, 2690, 2329];
5 D=[0, 0, 0, 0];
6 n=0.05643;
7 epsilon=8.854E-12;
8 L=0.7885;
9 L2=15.6;
10 for m=1:4
11 D(m)=(Y(m)*H(m)^3)/(12*(1-V(m)^2));
12 for k=1:1000
13 R(k,m)=(1E-10)*(10^(k/100));
14 F(k,m)=(10.21/(2*pi*R(k,1)^2))*sqrt(D(m)/(P(m)*H(m)));
15 F2(k,m)=2.404/(2*pi*R(k,1))*sqrt(n/(P(m)*H(m)));
16 F3(k,m)=(1/(2*pi))*sqrt((D(m)/(P(m)*H(m)*R(k,1)^4))
    *(104.36+5.783*((n*R(k,1)^2)/D(m))));
17 F4(k,m)=(1/(2*pi))*sqrt(((320/3)*(D(m)/(P(m)*H(m)*R(k,1)^4))
    *(1+((n*R(k,1)^2)/(16*D(m))))));
18 d=R(k,m)/20;
19 U(k,m)=sqrt(((8/27)*(((2*pi)*F3(k,m))^2*P(m)*H(m)*d^3)/epsilon));
20 U2(k,m)=sqrt(((2*L*(d^3)*n)/(epsilon*(R(k,m)^2))));

```



```

21 U3(k,m)=sqrt((2*D(m)*(d^3)*L2)/(epsilon*(R(k,m)^4)));
22 end
23 end
24
25
26 figure('Color',[1 1 1]);
27 loglog(R(:,1),F3(:,1),'k')
28 hold on
29 loglog(R(:,1),F4(:,1),'— k')
30 xlabel('Radio (m)')
31 ylabel('Frecuencia de resonancia (Hz)')
32 legend('Southwell', 'Rayleigh')
33
34 figure('Color',[1 1 1]);
35 loglog(R(:,1),F(:,1),'— b')
36 hold on
37 loglog(R(:,1),F2(:,1),'r')
38 loglog(R(:,1),F3(:,1),'k')
39 xlabel('Radio (m)')
40 ylabel('Frecuencia de resonancia (Hz)')
41 legend('\omega_r', '\omega_t', '\omega')
42
43 figure('Color',[1 1 1]);
44 loglog(R(:,1),U(:,1),'k')
45 hold on
46 loglog(R(:,2),U(:,2),'b')
47 loglog(R(:,3),U(:,3),'g')
48 loglog(R(:,4),U(:,4),'r', 'LineWidth',2)
49 xlabel('Radio (m)')
50 ylabel('Voltaje de salto a contacto (Volts)')
51 legend('Grafeno', 'Siliceno', 'Fosforeno', 'Silicio')
52
53 figure('Color',[1 1 1]);
54 loglog(R(:,1),U(:,1),'k')
55 hold on
56 loglog(R(:,1),U2(:,1),'r', 'LineWidth',2)
57 loglog(R(:,1),U3(:,1),'b', 'LineWidth',2)
58 xlabel('Radio (m)')
59 ylabel('Voltaje de salto a contacto (Volts)')

```

```
60 legend('masa-resorte','electrostatico-elastico sin rigidez','
        electrostatico-elastico sin tension')
```

A.3.3. Descripción de algunas líneas

(14-17) Se calculan las frecuencias de resonancia según las ecuaciones (3-6), (3-7), (3-5) y (3-4), respectivamente

(19) Se calculan los voltajes de salto a contacto para una variedad de dimensiones según la ecuación (2-7) utilizando las frecuencias de resonancia calculadas antes.

(20-21) Se calculan los voltajes de salto a contacto para una variedad de dimensiones según la ecuación (2-7), esta vez utilizando los valores de λ y Λ (L y L2 en el código) dados por las ecuaciones (4-13) y (4-29). Los valores de estas constantes se obtuvieron a partir de los diagramas de bifurcación calculados con programas presentados más adelante en este anexo

A.4. Programa 4

A.4.1. Descripción

Realiza los cálculos de la dinámica de la membrana bajo un potencial mostrados en la figura 4-3 resolviendo la ecuación diferencial (4-19) para algunos valores específicos de tiempo.

A.4.2. Código

```
1 function programa4
2
3 x = [0.001 0.005 0.01 0.05 0.1 0.5 0.95 1];
4 t = linspace(0,10,20);
5 sol = pdepe(1,@pdefun,@icfun,@bcfun,x,t);
6
7 phi=linspace(0,2*pi,10);
8 [R PHI] = meshgrid(x,phi);
9
10     figure('Color',[1 1 1]);
11     hold on
12
13
14     subplot(2,2,1)
15     hold on
```

```

16     title('t=0')
17     j=1;
18     Z=[sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j
    , :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1)];
19     surf(R.*cos(PHI), R.*sin(PHI), Z);
20     view(0,30)
21
22     subplot(2,2,2)
23     hold on
24     title('t=1.05')
25     j=3;
26     Z=[sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j
    , :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1)];
27     surf(R.*cos(PHI), R.*sin(PHI), Z);
28     view(0,30)
29
30     subplot(2,2,3)
31     hold on
32     title('t=2.63')
33     j=6;
34     Z=[sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j
    , :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1)];
35     surf(R.*cos(PHI), R.*sin(PHI), Z);
36     view(0,30)
37
38     subplot(2,2,4)
39     hold on
40     title('t=3.68')
41     j=8;
42     Z=[sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j
    , :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1); sol(j, :, 1)];
43     surf(R.*cos(PHI), R.*sin(PHI), Z);
44     view(0,30)
45
46
47
48
49
50     function [c, f, s] = pdefun(x, t, u, DuDx)
51     c = [1; .1];

```

```

52 f = [0; DuDx(1)];
53 l=0.75;
54 s = [u(2); -1/(u(1)^2)-u(2)];
55
56 function [pl,ql,pr,qr] =bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
57 pl = [0; 0];
58 ql = [1; 1];
59 pr = [ur(1)-1; ur(2)];
60 qr = [0; 0];
61
62 function u0 = icfun(x);
63 u0 = [1; 0];

```

A.4.3. Descripción de algunas líneas

(5) Se utiliza la función *pdepe* de MATLAB para resolver una ecuación diferencial parcial con condiciones iniciales y de frontera definidas. La función utiliza las funciones *pdefun*, *bcfun* y *icfun* definidas en las líneas 50, 56 y 62 como definiciones de la ecuación a resolver (4-19), condiciones de frontera y condiciones iniciales, respectivamente.

(18) Crea un vector con las soluciones de la ecuación para un tiempo específico. Las líneas 26, 34 y 42 hacen lo mismo para otros tiempos.

(19) Muestra una gráfica de las soluciones haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas usando las definiciones de las líneas 7 y 8. Las líneas 27, 35 y 43 hacen lo mismo para otros tiempos.

A.5. Programa 5

A.5.1. Descripción

Calcula los resultados del diagrama de bifurcación mostrado en la figura 4-4. El programa obtiene valores de λ al resolver numéricamente la ecuación diferencial de cuarto grado (4-32) con condiciones de frontera (4-33). La figura 4-2 se obtiene a partir de un programa similar pero más simple (la ecuación diferencial a resolver es de segundo grado en este caso (4-22)).

A.5.2. Código

```

1
2 function programa5
3

```

```

4 mesh=linspace(0.0001,1,10);
5 solinit = bvpinit(mesh,[2; 0; 0; 0]);
6 syms y(x)
7 for k=1:26;
8     L(k)=k*0.6;
9 [V] = odeToVectorField(diff(y, 4) + (2/x)*diff(y,3) - (1/x^2)*diff
    (y,2) + (1/x^3)*diff(y) == -(L(k))/y^2);
10
11 M = matlabFunction(V, 'vars', {'x', 'Y'})
12
13 sol = bvp4c(M, @bifurcationrbc, solinit);
14
15 xint = linspace(0.0001, 1, 10);
16 yint = deval(sol, xint);
17
18 w(k)=yint(1,1);
19 end
20 figure('Color',[1 1 1]);
21 xlabel('\Lambda')
22 ylabel('w(0)')
23 hold on
24
25 plot(L,w)
26 end
27
28     function res = bifurcationrbc(ya,yb)
29
30 res = [ yb(1)-1; yb(2); ya(2); ya(4) ];
31     end

```

A.5.3. Descripción de algunas líneas

(5) Se usa la función de MATLAB *bvpinit* que establece una primera aproximación a la solución.

(9) Convierte la ecuación (4-32) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma de vector.

(11) Se transforma el vector definido en la línea 9 como una función definiendo sus variables.

(13) Se utiliza la función de MATLAB *bvp4c* para resolver la ecuación (4-32) definida por

la función M con condiciones de frontera definidas por la función *bifurcationrbc* y con *solinit* como una primer aproximación a la solución.

(28-31) Función que define las condiciones de frontera del problema ((4-33)).

Bibliografía

- [1] ATKINS, P. ; DE PAULA, J.: *Atkins' Physical Chemistry*. W. H. Freeman
- [2] CHEN, C. ; L., S. ; DESHPANDE, V. ; LEE, G.-H. ; LEKAS, M. ; SHEPPARD, K. ; HONE, J.: Graphene mechanical oscillators with tunable frequency. En: *Nature Nanotechnology* 232 (2013), p. 1–5
- [3] DZYALOSHINSKII, I. E. ; LIFSHITZ, E. M. ; PITAEVSKII, L. P.: General theory of Van der Waals' forces. En: *Soviet Physics Uspekhi* 153 (1961)
- [4] GANJI, B.A. ; MOUSAVI, A.: Accurate Determination of Pull-in Voltage for MEMS Capacitive Devices with Clamped Square Diaphragm. En: *International Journal of Engineering* 25 (2012), p. 161–166
- [5] GUPTA, S.S. ; BATRA, R.C.: Elastic Properties and Frequencies of Free Vibrations of Single-Layer Graphene Sheets. En: *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* 7 (2010), p. 1–14
- [6] KHAN, Z. H. ; KERMANY, A. R. ; ÖCHSNER, A. ; LACOPI, F.: Mechanical and electromechanical properties of graphene and their potential application in MEMS. En: *Journal of Physics D: Applied Physics* 50 (2017), p. 1–19
- [7] KOU, L. ; CHEN, C. ; SMITH, S. C.: Phosphorene: Fabrication, Properties and Applications. , p. 13–14
- [8] LAMB, H. ; SOUTHWELL, R. V.: *The vibrations of a Spinning Disk*. London. : Proc. Roy. Soc., 1921. – 272–280 p.
- [9] LEISSA, A. W.: *Vibration of plates*. Washington, D.C. : NASA, 1969
- [10] LENNARD-JONES, J.E.: On the Determination of Molecular Fields. En: *Proc. Roy. Soc. A* 106 (1924), p. 463–477
- [11] LEW YAN VOON, L. C.: *Silicene: Structure, Properties and Applications*. Springer, 2016
- [12] NAJI, S. ; KHALIL, B. ; LABRIM, H. ; BHIHI, M. ; BELHAJ, A. ; BENYOUSSEF, A. ; LAKHAL, A. ; EL KENZ, A.: Interdistance Effects on Flat and Buckled Silicene Like-bilayers. 491 (2014), p. 1–7

-
- [13] NATHANSON, H.C. ; NEWELL, W.E. ; WICKSTROM, R.A. ; DAVIS, J.R.: The resonant Gate Transistor. En: *IEEE Trans. on Electron Devices* 14 (1967), p. 117–133
- [14] PARTOENS, B. ; PEETERS, F.M.: From graphene to graphite: Electronic structure around the K point. En: *Phys. Rev. B* 72 (2006)
- [15] PELESKO, J. ; BERNSTEIN, D.: *Modeling MEMS and NEMS*. Washington, D.C. : CHAPMAN & HALL, 2003
- [16] ROCHUS, V. ; RIXEN, D.J. ; GOLINVAL, J.-C.: Electrostatic coupling of MEMS structures: transient simulations and dynamic pull-in. En: *Nonlinear Analysis* 63 (2005), p. e1619–e1621
- [17] TAYLOR, G.I.: The Coalescence of Closely Spaced Drops When They are at Different Electric Potentials. En: *Proc. Roy. Soc. A* 306 (1968), p. 423–434
- [18] TEMPLE, G. ; BICKLEY, W. G.: *Rayleigh's Principle*. London. : Oxford Univ. Press, 1933
- [19] XIANG, L. ; YING MA, S. ; WANG, F. ; ZHANG, K.: Nanoindentation models and Young's modulus of a few-layer graphene: a molecular dynamics study. En: *Journal of Physics D: Applied Physics* 48 (2015), p. 1–7