



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
ING. EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES –  
YACIMIENTOS

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL DEL TAMAÑO DE BLOQUE A  
PARTIR DE PRUEBAS DE PRESIÓN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
COLÍN NÚÑEZ SERGIO JOSHUA

TUTORES PRINCIPALES  
DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., MAYO DE 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Índice de figuras	v
Índice de tablas	ix
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisión de la literatura</b>	<b>5</b>
<b>3 Solución de la ecuación de difusión</b>	<b>7</b>
3.1 Formulación del modelo . . . . .	7
3.2 Solución . . . . .	8
3.3 Distribución lognormal . . . . .	10
3.4 Validación . . . . .	11
<b>4 Análisis de sensibilidad</b>	<b>13</b>
4.1 Relación de almacenamiento, $\omega_f$ . . . . .	13
4.2 Coeficiente de flujo interporoso, $\lambda_{\text{máx}}$ . . . . .	14
4.3 Relación de coeficientes de flujo interporoso, $\lambda_{\text{ratio}}$ . . . . .	15
<b>5 Condiciones de frontera externa</b>	<b>19</b>
5.1 Yacimiento finito (cerrado en la frontera externa) . . . . .	19
5.2 Frontera a presión constante . . . . .	20
<b>6 Metodología para analizar pruebas de incremento y decremento de presión</b>	<b>23</b>
6.1 Comportamiento de la función $g(s)$ . . . . .	25
6.1.1 Solución aproximada de la función $g(s)$ para tiempos cortos ( $s \rightarrow \infty$ ) . . . . .	25
6.1.2 Solución aproximada de la función $g(s)$ para tiempos largos ( $s \rightarrow 0$ ) . . . . .	26
6.2 Comportamiento de la función derivada de presión . . . . .	29
6.3 Ejemplo. Prueba de incremento de presión . . . . .	30
6.4 Obtención del radio de investigación . . . . .	36
6.5 Recuperación de petróleo . . . . .	37

	<b>Página</b>
<b>7 Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>45</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>
<b>Apéndices</b>	<b>55</b>
A Solución. Flujo matriz-fractura pseudo- estacionario . . . . .	55
B Solución. Flujo matriz-fractura transitorio . . . . .	61
C Solución. Yacimiento finito (cerrado en la frontera externa) . . . . .	63
D Solución. Frontera a presión constante . . . . .	65
E Solución. Frontera a presión constante, considerando daño y almace- namiento . . . . .	67

# Agradecimientos

A mi familia, en especial a mi mamá, Isa, que siempre ha estado a mi lado apoyándome, gracias por la educación que me has dado. A mi hermano Érick, por tantos momentos de diversión.

A Diana, mi compañera de vida, gracias por apoyarme en todo momento, te agradezco que estés a mi lado, incluso en los malos ratos.

Al Dr. Rangel, fue un privilegio haber trabajado al lado una persona tan brillante como usted, le agradezco sus enseñanzas, consejos y el tiempo que me brindó.

Al Dr. Samaniego, le agradezco que se haya tomado el tiempo para apoyarme en la etapa final de la tesis, sin usted no hubiera sido posible terminarla.

Un agradecimiento especial a Grecia, gracias por los consejos que me has dado.

A mis amigos, Moisés, Isaac, Lalo Maldonado, Ana, quienes han estado siempre ahí desde mi etapa estudiantil.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por brindarme el apoyo económico para poder realizar mis estudios de maestría.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial a la Facultad y al Posgrado de Ingeniería. Me siento privilegiado por la educación que me han brindado.



# Resumen

Se desarrolla un modelo para estudiar el comportamiento de la presión de los pozos y de la función primera derivada, de un yacimiento naturalmente fracturado (YNF) compuesto por bloques horizontales de espesor variable, siendo la variación continua, de forma lognormal. Se considera flujo pseudo-estacionario y transitorio entre matriz y fractura, se incluye el caso en el que se tenga daño y almacenamiento en los pozos, se tenga un pozo en un yacimiento infinito, finito y cerca de una frontera a presión constante.

Se presenta un procedimiento para analizar pruebas de decremento e incremento de presión, para estimar los parámetros convencionales del yacimiento, así como la función de densidad de probabilidad de los bloques de matriz.

Empleando datos reales de una prueba de incremento de presión, se muestra el procedimiento para estimar los parámetros antes mencionados, se introdujeron los valores obtenidos en el modelo propuesto para calcular el comportamiento de la presión y de la función primera derivada, obteniéndose una buena concordancia con los datos de la prueba y mejorando los resultados obtenidos con el modelo de Warren and Root. Se muestra el procedimiento para obtener el radio de investigación alcanzado durante la prueba.

Como aplicación a los resultados obtenidos, se muestra el procedimiento para determinar el comportamiento de la producción de petróleo aportado por la matriz, cuando el mecanismo predominante es la imbibición, para una matriz preferentemente mojable por agua, mostrándose el efecto de los bloques por encima de la moda de la distribución lognormal en la producción de petróleo.





# Índice de figuras

1.1	Idealización de un medio poroso heterogéneo naturalmente fracturado. . . . .	1
1.2	Diagrama de la frecuencia combinado para tres conjuntos de fracturas (Nelson, 1987). . . . .	2
3.1	Validación. Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario, $S = C_D = 0$ . . . . .	12
3.2	Validación. Flujo matriz-fractura transitorio, $S = C_D = 0$ . . . . .	12
4.1	Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a $\omega_f$ . Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario. . . . .	13
4.2	Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a $\omega_f$ . Flujo matriz-fractura transitorio. . . . .	14
4.3	Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a $\lambda_{m\acute{a}x}$ . Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario. . . . .	15
4.4	Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a $\lambda_{m\acute{a}x}$ . Flujo transitorio. . . . .	15
4.5	Sensibilidad de la respuesta de presión y de la función derivada, con respecto a $\lambda_{ratio}$ . Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario. . . . .	16
4.6	Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a $\lambda_{ratio}$ . Flujo matriz-fractura transitorio. . . . .	16
5.1	Comportamiento de la respuesta de la presión y de la función derivada en un YNF finito. Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario. . . . .	20
5.2	Comportamiento de la respuesta de la presión y de la función derivada en un YNF finito. Flujo matriz-fractura transitorio. . . . .	20
5.3	Comportamiento de la respuesta de la presión y de la función derivada en un YNF con una frontera a presión constante. Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario. . . . .	21

5.4	Comportamiento la respuesta de presión y de la función derivada en un YNF con una frontera a presión constante. Flujo matriz-fractura transitorio. . . . .	22
6.1	Comportamiento de $S + \frac{K_0(\sqrt{sg(s)})}{\sqrt{sg(s)K_1(\sqrt{sg(s)})}}$ como una función de $sg(s)e^{-2S}$ . Modelo de Warren & Root. . . . .	24
6.2	Comportamiento de $S + \frac{K_0(\sqrt{sg(s)})}{\sqrt{sg(s)K_1(\sqrt{sg(s)})}}$ como una función de $sg(s)e^{-2S}$ . Distribución lognormal del tamaño de bloque de matriz. . . . .	24
6.3	Curvas tipo para yacimientos con comportamiento homogéneo. . . . .	28
6.4	Curvas tipo del valle de la función derivada para yacimientos con comportamiento de doble porosidad. . . . .	29
6.5	Gráfica log-log para una prueba de incremento de presión de $\Delta p$ & $\Delta t \Delta p'$ vs t. . . . .	30
6.6	Ajuste con las curvas tipo para comportamiento homogéneo y función derivada de la presión. . . . .	32
6.7	Proceso iterativo para obtener el mejor ajuste del valle, empleando el modelo propuesto. . . . .	33
6.8	Ajuste total del modelo de Warren & Root y del modelo propuesto (Distribución lognormal). . . . .	34
6.9	Ajuste del valle del modelo de Warren & Root y del modelo propuesto (Distribución lognormal). . . . .	34
6.10	Función de densidad de probabilidad y acumulada del tamaño de bloque. . . . .	36
6.11	Obtención del radio de investigación. . . . .	37
6.12	Recuperación acumulada de petróleo, $N_p$ para cada tamaño de bloque. . . . .	40
6.13	Comparación entre la recuperación acumulada de petróleo aportada por el grupo de bloques pequeños, el grupo de bloques grandes y el modelo de Warren and Root. . . . .	41
6.14	Comparación entre el factor de recuperación del grupo de bloques pequeños, el grupo de bloques grandes y el método de Warren and Root. . . . .	41
6.15	Análisis de la función de densidad de probabilidad lognormal. . . . .	43

6.16	Comparación entre la recuperación acumulada de petróleo obtenida con el modelo de Warren and Root y el modelo propuesto al variar el espesor de la formación. . . . .	43
------	---	----



# Índice de tablas

6.1	Información del fluido y del yacimiento. . . . .	31
6.2	Espesor de los bloques de matriz y su probabilidad de ocurrencia en el yacimiento. . . . .	39
6.3	Comportamiento de la recuperación de petróleo tomando en cuenta la distribución del tamaño de los bloques de matriz.	40



# 1. Introducción

Los yacimientos naturalmente fracturados contienen más del 60% de las reservas y aportan gran parte de la producción de hidrocarburos en México y a nivel mundial. Están compuestos de distribuciones aleatorias de fracturas, cavidades de disolución y bloques de matriz.

El modelo clásico para yacimientos naturalmente fracturados considera que la formación está compuesta por dos medios, una red de fracturas y el sistema matriz, donde los bloques de matriz tienen una forma regular con un tamaño constante. La red de fracturas esencialmente provee canales de flujo, y los hidrocarburos están contenidos en ambas partes del sistema. Se supone que el fluido de la formación fluye de los bloques de matriz a las fracturas y a través de éstas hacia los pozos (Barenblatt et al., 1960; Warren and Root, 1963; Cinco, 1996; Bourdet, 2002; Ezekwe, 2011). Se asume que la transferencia de fluidos entre la matriz y las fracturas ocurre bajo condiciones de flujo pseudo-estacionario o transitorio. Los bloques se representan por cubos, paralelepípedos, cilindros o esferas. En la Fig. 1.1 se muestra la idealización de un yacimiento naturalmente fracturado mediante cubos para representar los bloques de matriz.

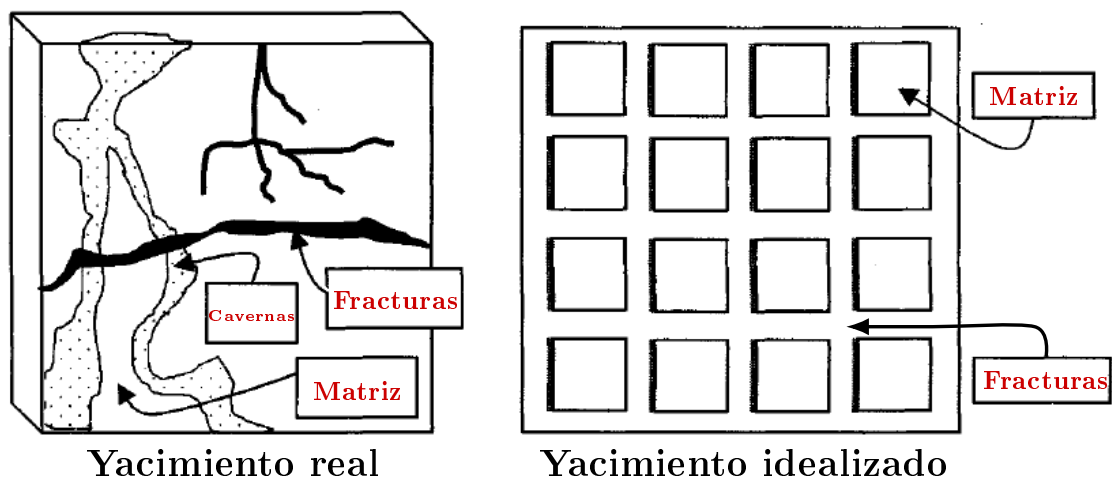


Figura 1.1: Idealización de un medio poroso heterogéneo naturalmente fracturado.

Un volumen de roca en un yacimiento naturalmente fracturado, contendrá fracturas visibles de diferentes tamaños, con un rango muy amplio, pequeñas desde algunos milímetros de longitud, hasta grandes que llegan a medir decenas de metros.

El grado de reproducibilidad de un sistema de fracturas a diferentes escalas de observación es una función del origen de dicho sistema y por lo tanto los hace de cierta forma predecibles, por ejemplo el sistema de fracturas de origen tectónico es reproducible a diferentes escalas de observación, (Nelson, 1987).



En afloramientos donde puede observarse una mezcla de tamaños de fracturas, la apertura ( $b$ ), la longitud ( $L$ ) y el espaciamiento ( $d$ ) varían de manera conjunta, conforme a la escala de las fracturas. En sistemas de fracturas de origen tectónico, entre más pequeñas son las fracturas, más numerosas son, conservando la misma orientación que las fracturas más grandes, y tienden a tener un espaciamiento más reducido; por lo tanto se tiene una gran cantidad de bloques pequeños; conforme se tienen fracturas de mayores dimensiones, tendrán una mayor apertura, longitud y espaciamiento; por consiguiente se tendrán en menor cantidad en el yacimiento. Al combinar diagramas de frecuencias de la apertura, largo y espaciamiento de cada rango de tamaño de fracturas, resulta en una distribución lognormal característica, Fig. 1.2, (Nelson, 1987).

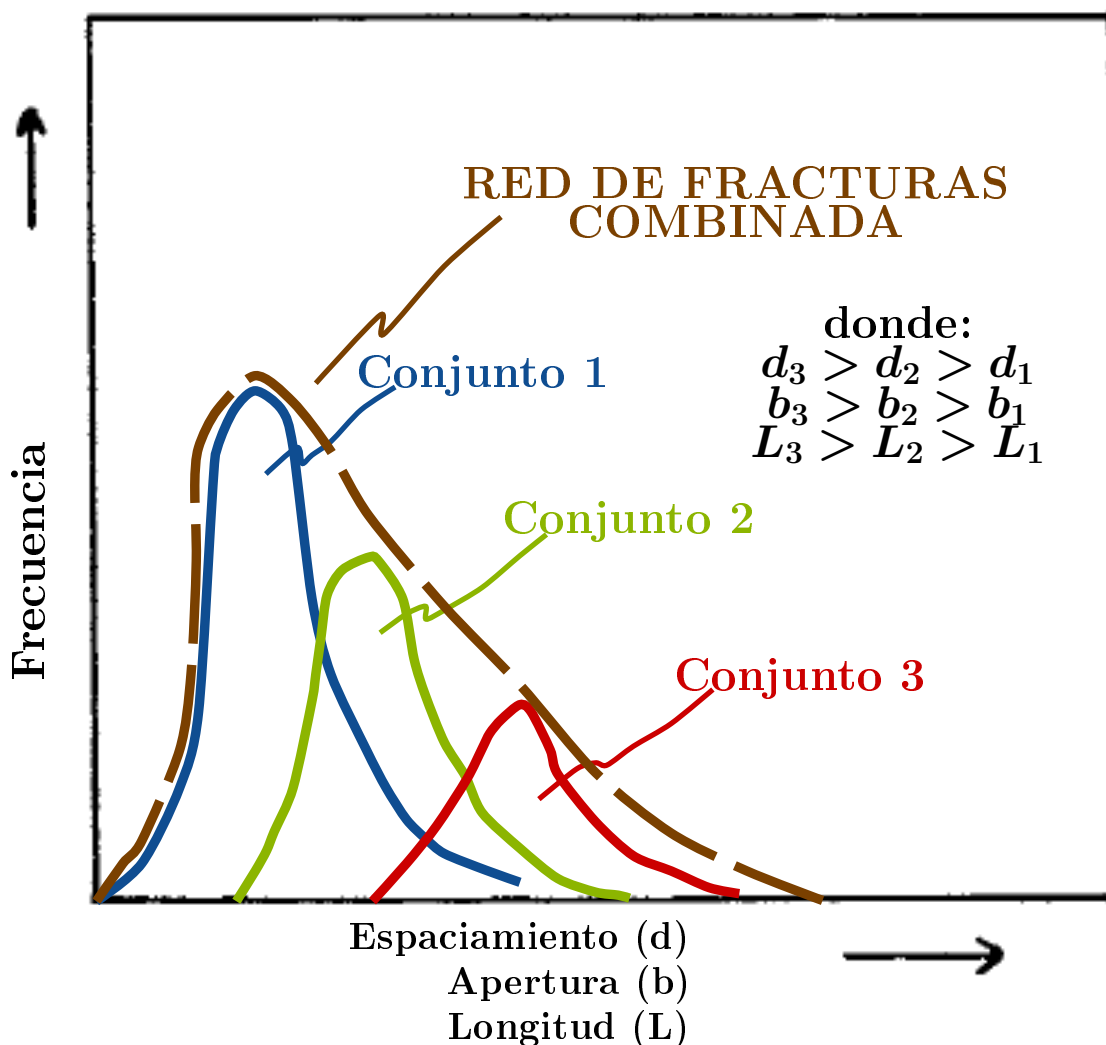


Figura 1.2: Diagrama de la frecuencia combinado para tres conjuntos de fracturas (Nelson, 1987).

El espaciamiento de fracturas típicamente se mide usando una línea de exploración (scan line) a lo largo de un afloramiento o un núcleo, donde se registran espaciamientos sucesivos entre fracturas conforme éstas intersecan la línea de exploración. Una vez que la información del espaciamiento de las fracturas ha sido obtenida, el espaciamiento para cada conjunto de fracturas puede ajustarse a una variedad de modelos matemáticos para proveer una descripción estadística de los datos (Reis, 1998).

Rouleau y Gale (1985) proporcionaron información acerca de la orientación, longitud, espaciamiento y densidad de cuatro conjuntos de fracturas de una masa granítica de roca, de la mina Stripa en Suecia. La información del espaciamiento se combinó para construir histogramas para cada conjunto y tomando en cuenta el sesgado hacia la derecha que presentan, se realizó un análisis del ajuste con tres modelos teóricos, exponencial negativa, lognormal y Weibull. Los resultados indican que la distribución exponencial negativa no se ajusta en absoluto a la información, el modelo Weibull se ajusta a dos de los cuatro conjuntos de fracturas y finalmente, la distribución lognormal se ajusta de manera satisfactoria a todos los conjuntos de fracturas.

Gale et al. (1991) presentaron información de dos afloramientos de la formación Monterey en California. En cada uno de los afloramientos, Government point y Jalama Beach se identificaron dos conjuntos de fracturas, a los cuales se realizó un estudio del espaciamiento de las fracturas, la forma altamente sesgada a la derecha de los histogramas generados sugiere, que se trata de una distribución lognormal.

Existe la necesidad de desarrollar un modelo que honre de una mejor manera la variabilidad del espesor de los bloques de matriz presentes en el yacimiento. La utilidad de determinar la variación del tamaño de los bloques\* resulta imprescindible, dado que la variación en el tamaño es uno de los parámetros principales que gobiernan la productividad en un yacimiento naturalmente fracturado. Controla la transición entre la producción temprana de las fracturas y la producción del yacimiento como un sistema pseudo-homogéneo (matriz y fracturas) (Johns y Jaladi-Yazdi, 1989).

Las pruebas de presión proveen una herramienta ideal para determinar los parámetros del yacimiento, detectar y evaluar heterogeneidades y estimar la variabilidad del tamaño de los bloques de matriz, permitiendo una caracterización más confiable del yacimiento.

Este trabajo discute el desarrollo de un modelo para el comportamiento de la presión de un pozo que produce a gasto constante, en un yacimiento naturalmente fracturado, que presenta un comportamiento de doble porosidad, donde se consi-

---

\*En el contexto de la tesis, el término *tamaño* se refiere al espesor de los bloques de matriz.

dera que existe una distribución lognormal del tamaño de los bloques de matriz. Se propone una metodología que puede emplearse para obtener la función de densidad de probabilidad del tamaño de los bloques, a través del análisis de pruebas de incremento o decremento de presión; y se muestra un procedimiento para obtener el comportamiento de la producción de petróleo en este tipo de yacimientos, considerando la variabilidad en el tamaño de los bloques de matriz.

## 2. Revisión de la literatura

El modelo de doble porosidad lo presentó primeramente Barenblatt et al. en 1960; se supone que el yacimiento está compuesto por dos medios distintos que coexisten en el mismo entorno; uno de baja permeabilidad, bloques de matriz, rodeado por una red de fracturas de alta permeabilidad. La alta conductividad del sistema de fracturas provee al yacimiento canales de flujo, mientras que la matriz provee principalmente el almacenamiento de los hidrocarburos. Se considera que existe flujo pseudo-estacionario entre la matriz y las fracturas.

La solución se implementó para su aplicación por Warren and Root, en 1963, quienes describieron la geometría del yacimiento como un sistema continuo ortogonal de fracturas con espaciamiento uniforme, cada una paralela al eje principal de permeabilidad. Definieron dos parámetros que ayudan a la comprensión del comportamiento de los yacimientos de doble porosidad: la relación de almacenamiento,  $\omega_f$  y el coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ . Supusieron flujo pseudo-estacionario entre la matriz y las fracturas.

Odeh (1965), sugirió que los efectos de daño y almacenamiento dominan la respuesta de la presión para tiempos cortos, y en consecuencia la primer línea recta podría no observarse.

El flujo transitorio fue descrito por algunos autores (Kazemi, 1969a; de Swaan, 1976; Najurieta, 1980; Streltsova, 1983).

Kazemi et al. (1969), aplicaron la solución para pruebas de interferencia, resolviéndola de manera analítica y numérica.

Mavor y Cinco (1979), obtuvieron la solución para transferencia matriz-fractura pseudo-estacionaria de la ecuación de Warren & Root, considerando los efectos de daño y almacenamiento.

Bourdet y Gringarten (1980), introdujeron una metodología para analizar pruebas de decremento e incremento de presión, en pozos que presentan efectos de daño y almacenamiento, mediante el ajuste con curvas tipo.

Cinco-Ley et al. (1985), describieron el comportamiento transitorio en un yacimiento naturalmente fracturado compuesto de una red de fracturas y bloques de matriz de tamaño múltiple. Se considera que los bloques de matriz están distribuidos a lo largo del yacimiento de manera uniforme.

Belani y Jaladi-Yazdi (1988), extendieron la formulación discreta a funciones de probabilidad continuas de tamaño de bloque de matriz, considerando tres funciones de densidad de probabilidad: delta de Dirac, uniforme y binomial.

Bourdet et al. (1989), mostraron el análisis de pruebas de presión mediante el comportamiento de la función derivada.

Los modelos de doble porosidad se han extendido para diferentes condiciones

Houzé et al. (1998), para una fractura con conductividad infinita; Cinco-Ley y Menh (1988), para una fractura con conductividad finita y pozos horizontales.

## 3. Solución de la ecuación de difusión

### 3.1. Formulación del modelo

Partiendo de la ecuación de difusión:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + Q_m^* , \quad \dots(3.1)$$

donde  $p_f$  es la presión en la fractura,  $Q_m$  es el término fuente, que representa la suma de la contribución de cada uno de los bloques de matriz al sistema de fracturas. La Ec. 3.1 incorpora las consideraciones siguientes :

- i. Modelo de doble porosidad.
- ii. Ocurre flujo radial en las fracturas.
- iii. Se tiene una sólo fase móvil en el yacimiento.
- iv. El fluido es ligeramente compresible y con propiedades constantes.
- v. Los efectos gravitacionales e inerciales pueden despreciarse.
- vi. Aplicabilidad de la ley de Darcy.
- vii. Propiedades constantes en el yacimiento.

La contribución de cada bloque de matriz al sistema de fracturas, depende de la permeabilidad, del volumen almacenado y del espesor del bloque. En un yacimiento con espesor de bloques no uniforme, la contribución de la matriz está dada por:

$$Q_m = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh , \quad \dots(3.2)$$

donde  $Q(h)$  es la aportación de un bloque de matriz con tamaño  $h$ , y  $f(h)$  es la probabilidad de ocurrencia de dicho bloque en el yacimiento.

Nótese que para el modelo de tamaño único de bloque, la distribución de probabilidad se convierte en la función delta de Dirac  $\delta(h - H)$  (Belani, 1988); ésto es:

$$Q_m = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \delta(h - H) Q(h) dh = Q(H) , \quad \dots(3.3)$$

---

\*Ver Nomenclatura.

la cual es consistente con el modelo de Warren & Root.

Para yacimientos que presentan un fracturamiento intenso, la función de probabilidad que mejor representa la distribución del tamaño de bloques es una lognormal, ya que proporciona el peso requerido a los bloques más pequeños; que aunque su aportación individual será menor que la de bloques de mayores dimensiones, tienen una mayor probabilidad de ocurrencia en el yacimiento, característica que no se toma en cuenta por otras funciones de probabilidad y también toma en cuenta la baja probabilidad de ocurrencia de los bloques de mayor dimensión en el yacimiento, que al almacenar grandes volúmenes de petróleo, impactarán en los perfiles de producción.

### 3.2. Solución

Las Ecs. 3.1 y 3.2 se resuelven para bloques de matriz con forma de placa (slab blocks), para las condiciones inicial y de frontera que se especifican en los apéndices, ver (Apéndices A y B), pero considerando efectos de daño y almacenamiento en el pozo. La solución en el espacio de Laplace es la siguiente, (Mavor y Cinco, 1979):

$$\overline{p_{Df}}(1, s) = \frac{K_0(\sqrt{sg(s)}) + S\sqrt{sg(s)}K_1(\sqrt{sg(s)})}{s \left[ sC_D K_0(\sqrt{sg(s)}) + \sqrt{sg(s)}K_1(\sqrt{sg(s)}) (C_D Ss + 1) \right]}, \quad \dots(3.4)$$

donde  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo orden respectivamente y  $s$  es la variable de Laplace.

Para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\sqrt{\frac{s\omega_m}{3\lambda^3}}}{1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda}} f(\lambda) d\lambda. \quad \dots(3.5)$$

Para el caso de flujo matriz-fractura transitorio:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}}\right) f(\lambda) d\lambda. \quad \dots(3.6)$$

Las Ecs. 3.5 y 3.6 son la  $g(s)$  general para cualquier función de probabilidad

(PDF) para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente.

Las variables adimensionales se definen a continuación:

$$p_{D_f} = \frac{2\pi k_f h_f (p_i - p_f)}{q\mu B} , \quad \dots(3.7)$$

$$p_{D_m} = \frac{2\pi k_f h_f (p_i - p_m)}{q\mu B} , \quad \dots(3.8)$$

$$t_D = \frac{k_f t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} , \quad \dots(3.9)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} , \quad \dots(3.10)$$

$$\lambda = \frac{k_m r_w^2}{k_f h^2} , \quad \dots(3.11)$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{\text{máx}}^2} , \quad \dots(3.12)$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{\text{mín}}^2} , \quad \dots(3.13)$$

$$\frac{\lambda_{\text{mín}}}{\lambda_{\text{máx}}} = \left( \frac{h_{\text{mín}}}{h_{\text{máx}}} \right)^2 , \quad \dots(3.14)$$

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{(\phi_m c_m + \phi_f c_f)} , \quad \dots(3.15)$$

$$\omega_m = \frac{\phi_m c_m}{(\phi_m c_m + \phi_f c_f)} , \quad \dots(3.16)$$

$$h_D = \frac{h}{h_{\text{máx}}} , \quad \dots(3.17)$$

$$f(h_D) = h_{\text{máx}} f(h) , \quad \dots(3.18)$$

$$\xi_D = \frac{\xi}{h} . \quad \dots(3.19)$$

Las Ecs. 3.5 y 3.6 están en función del coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , porque éste toma en cuenta la relación entre la dimensión de cada bloque,  $h$ , y la rapidez con la que dichos bloques aportarán fluido ante los cambios de presión, es decir, los bloques de menores dimensiones tendrán un valor mayor de  $\lambda$ , puesto que son los



primeros en contribuir, mientras que los bloques de mayores dimensiones tardarán más en sentir los cambios de presión.

### 3.3. Distribución lognormal

Es una distribución continua de una variable aleatoria, cuyo logaritmo está distribuido normalmente y sólo tiene valores positivos. La función de probabilidad es la siguiente:

$$f(h_D) = \frac{1}{h_D \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(h_D) - \mu_{ln}]^2}{2\sigma^2} \right\} . \quad \dots(3.20)$$

donde  $\mu_{ln}$  y  $\sigma$  son, respectivamente, la media y la desviación estándar del logaritmo natural de las variables.

La función de probabilidad acumulada es la siguiente (Abramowitz, 1972):

$$CDF = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{\ln(h_D) - \mu_{ln}}{\sqrt{2}\sigma} \right] , \quad \dots(3.21)$$

donde  $\operatorname{erf}$  es la función error.

Para el cálculo de la media y de la desviación estándar, se hizo la siguiente suposición:

Todo el espectro del tamaño de los bloques está comprendido entre  $h_{\min}$  y  $h_{\max}$ .

De la Ec. 3.21, para los bloques de menor dimensión,  $h_{\min}$ , se tiene que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{\ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \right) - \mu_{ln}}{\sqrt{2}\sigma} \right] = 0 . \quad \dots(3.22)$$

De la Ec. 3.21, para los bloques de mayor dimensión,  $h_{\max}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[ -\frac{\mu_{ln}}{\sqrt{2}\sigma} \right] = 1 . \quad \dots(3.23)$$

Resolviendo de manera simultánea las Ecs. 3.22 y 3.23, tomando en cuenta que  $\operatorname{erf}(2.75) \approx 1$ , se llega a lo siguiente:

$$\sigma = \frac{\ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \right)}{\sqrt{2} (5.50)} , \quad \dots(3.24)$$

$$\mu_{ln} = -2.75\sqrt{2}\sigma . \quad \dots(3.25)$$

Sustituyendo la Ec. 3.20 en las Ecs. 3.5 y 3.6.

Para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\sqrt{\frac{s\omega_m}{3\lambda^3}}}{1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{ln} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda . \quad \dots(3.26)$$

Para flujo matriz-fractura transitorio:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh \left( \sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{ln} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda . \quad \dots(3.27)$$

Las Ecs. 3.26 y 3.27 no tienen una solución analítica y requieren de métodos numéricos de integración. Para una buena estabilidad numérica y un menor esfuerzo computacional, se recomienda realizar la integración mediante el método de cuadratura Gaussiana.

### 3.4. Validación

Conforme la relación entre el coeficiente de flujo interporoso máximo y mínimo,  $\lambda_{ratio} = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ , se aproxima a la unidad, la solución del modelo propuesto se aproxima a la respuesta de tamaño único de bloque (modelo de Warren and Root). En las Figs. **3.1** y **3.2**, se muestra la respuesta de la presión ( $p_{D_f}$ ) y de la función derivada ( $t_D p'_{D_f}$ ), para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente; para las funciones de distribución uniforme, lognormal y delta de Dirac (Warren and Root). Nótese que la función delta de Dirac es un caso particular de las otras dos funciones de distribución cuando  $\lambda_{ratio} \rightarrow 1$ .

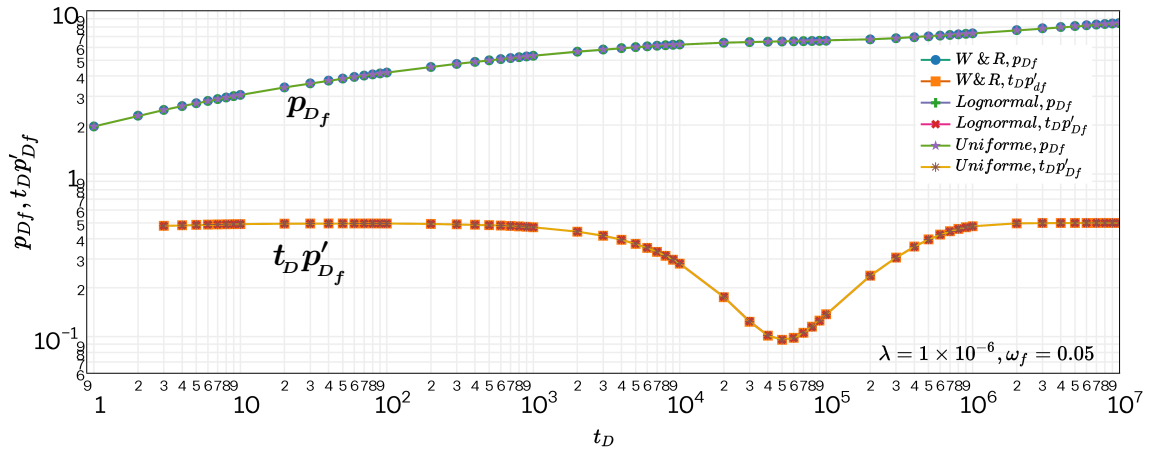


Figura 3.1: Validación. Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario,  $S = C_D = 0$ .

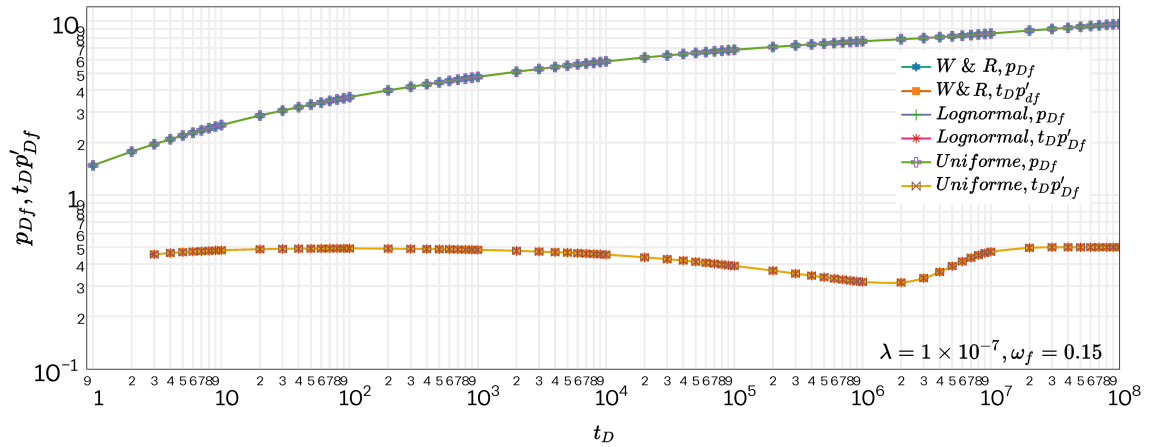


Figura 3.2: Validación. Flujo matriz-fractura transitorio,  $S = C_D = 0$ .

## 4. Análisis de sensibilidad

En este capítulo se analiza el comportamiento de la función derivada al variar la relación de almacenamiento,  $\omega_f$ , el coeficiente de flujo interporoso máximo,  $\lambda_{\text{máx}}$  y la relación de coeficientes de flujo interporoso,  $\lambda_{\text{ratio}}$ , para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, considerando una distribución lognormal en el tamaño de los bloques de matriz.

### 4.1. Relación de almacenamiento, $\omega_f$

El coeficiente de almacenamiento,  $\omega_f$ , es un parámetro que expresa la relación entre la capacidad de almacenamiento de las fracturas, respecto a la capacidad de almacenamiento del sistema matriz-fractura. Si  $\omega_f \rightarrow 0$ , se tendría un yacimiento homogéneo convencional; si  $\omega_f \rightarrow 1$ , el yacimiento se comportaría como homogéneo, dado que los fluidos producidos provendrían solamente en las fracturas. Generalmente  $\omega_f < 0.1$ .

La variación en la respuesta de la presión y la función derivada, al variar el coeficiente de almacenamiento,  $\omega_f$ , se muestra en las Figs. 4.1 y 4.2, para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente. Considerando una distribución lognormal en el tamaño de los bloques.

Para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, se mantuvieron constantes  $\lambda_{\text{máx}} = 1 \times 10^{-6}$  y  $\lambda_{\text{ratio}} = 100$ , en ambos casos  $S = C_D = 0$ .

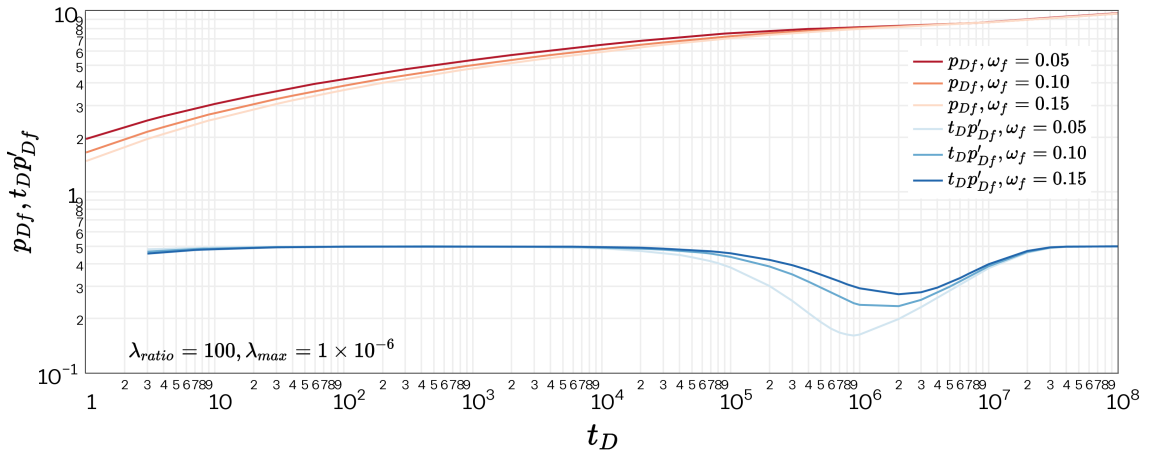
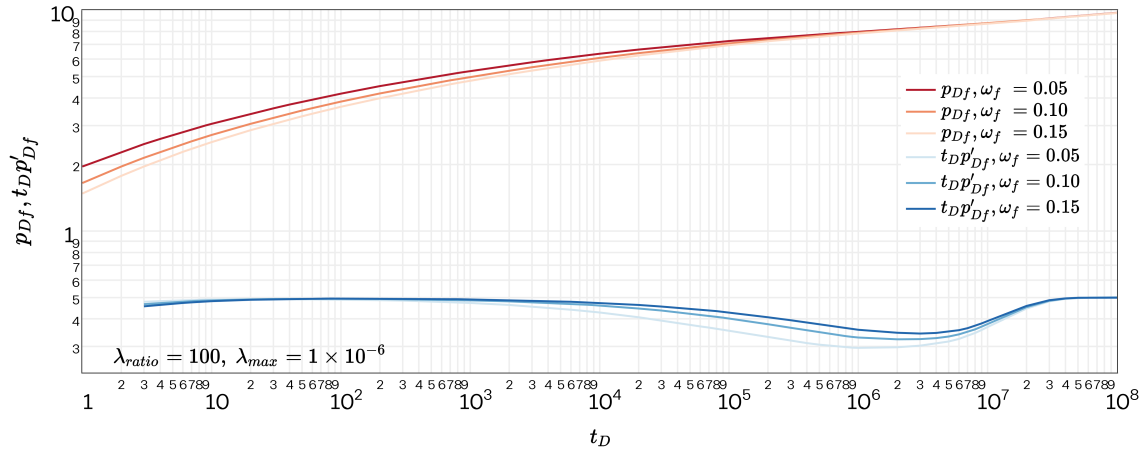


Figura 4.1: Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a  $\omega_f$ . Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario.



**Figura 4.2: Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a  $\omega_f$ . Flujo matriz-fractura transitorio.**

De las Figs. 4.1 y 4.2, se observaron las siguientes características:

- ⊗ Cuando disminuye el valor de  $\omega_f$ , el tiempo en el que la matriz comienza a aportar fluidos a las fracturas también decrece, debido a que se reduce la compresibilidad de las fracturas y por lo tanto, se presenta con antelación el efecto de doble porosidad.
- ⊗ El ancho y por consiguiente la profundidad del valle de la función derivada están relacionados de manera inversa con el valor de  $\omega_f$ ; cuando el valor de la relación de almacenamiento disminuye, el ancho del valle se incrementa, teniéndose un periodo de transición mayor.

## 4.2. Coeficiente de flujo interporoso, $\lambda_{\text{máx}}$

El coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$ , describe la habilidad de los bloques de matriz para aportar fluidos a las fracturas, está en función de la geometría de los bloques de matriz, la permeabilidad de la matriz y la permeabilidad de las fracturas. Valores usuales de  $\lambda$  están en el rango de  $10^{-10}$  a  $10^{-4}$ . Para valores superiores a  $10^{-3}$ , el nivel de heterogeneidad es insuficiente para que los efectos de doble porosidad sean de importancia.

La variación en la respuesta de la presión y la función derivada, al modificar el coeficiente de flujo interporoso máximo,  $\lambda_{\text{máx}}$ , se muestra en las Figs. 4.3 y 4.4, para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente. Considerando una distribución lognormal en el tamaño de los bloques.

Para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio se mantuvieron constantes,  $\lambda_{\text{ratio}} = 1000$  y  $\omega_f = 0.15$ , en ambos casos  $S = C_D = 0$ .

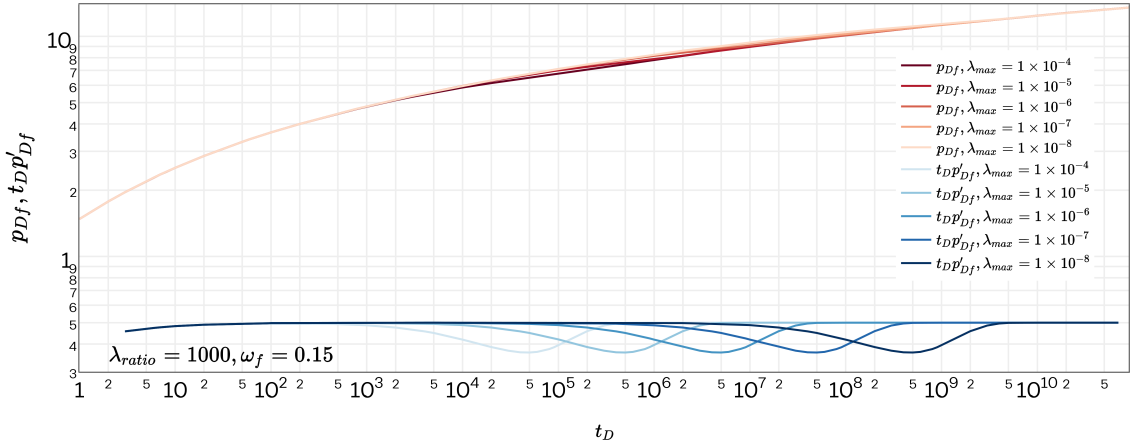


Figura 4.3: Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a  $\lambda_{m\acute{a}x}$ . Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario.

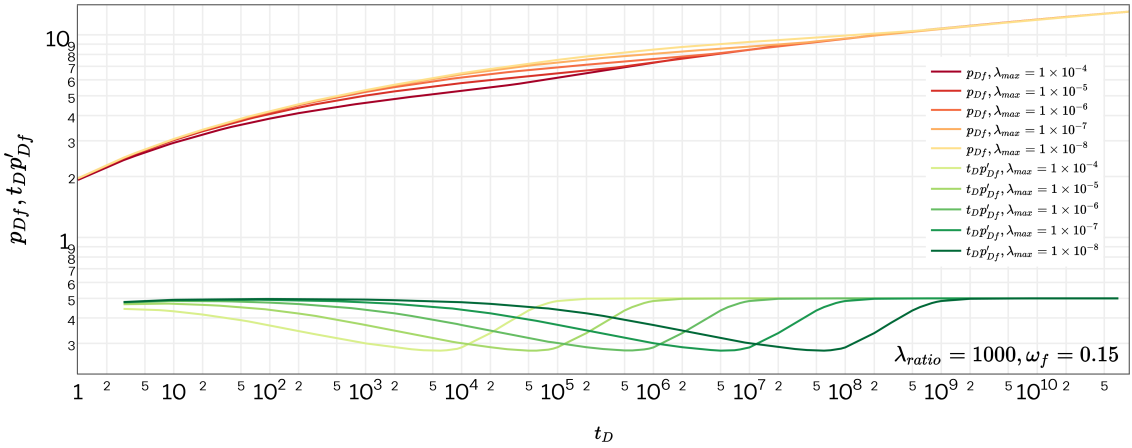


Figura 4.4: Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a  $\lambda_{m\acute{a}x}$ . Flujo transitorio.

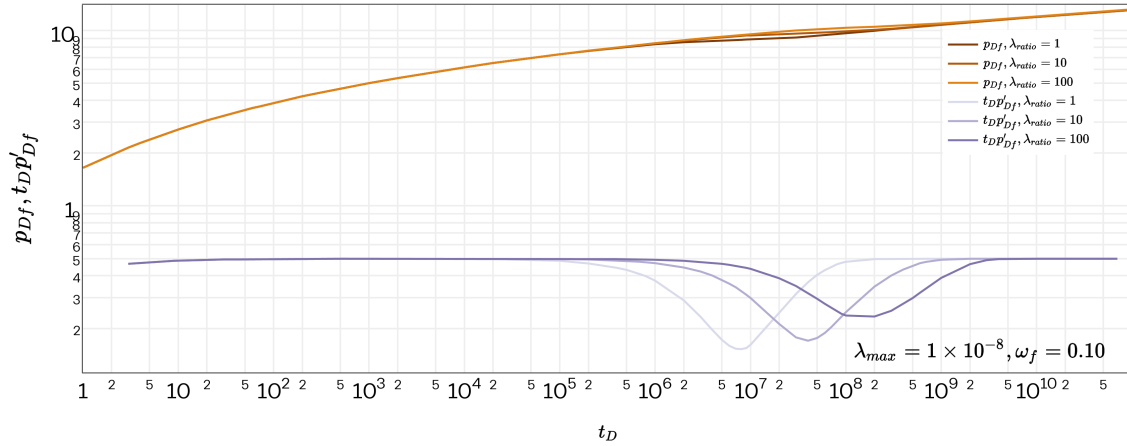
Como es posible apreciarse en las Figs. 4.3 y 4.4, la forma y el ancho del valle de la función derivada no se vio afectado por la variación de  $\lambda_{m\acute{a}x}$ . El tiempo en que la matriz comienza a aportar fluidos a las fracturas es proporcional al valor de  $\lambda_{m\acute{a}x}$ ; es decir, al incrementarse el valor del coeficiente de flujo interporoso máximo, el efecto de doble porosidad se presenta con antelación, es decir, el valle de la función derivada se recorre hacia la izquierda.

### 4.3. Relación de coeficientes de flujo interporoso, $\lambda_{ratio}$

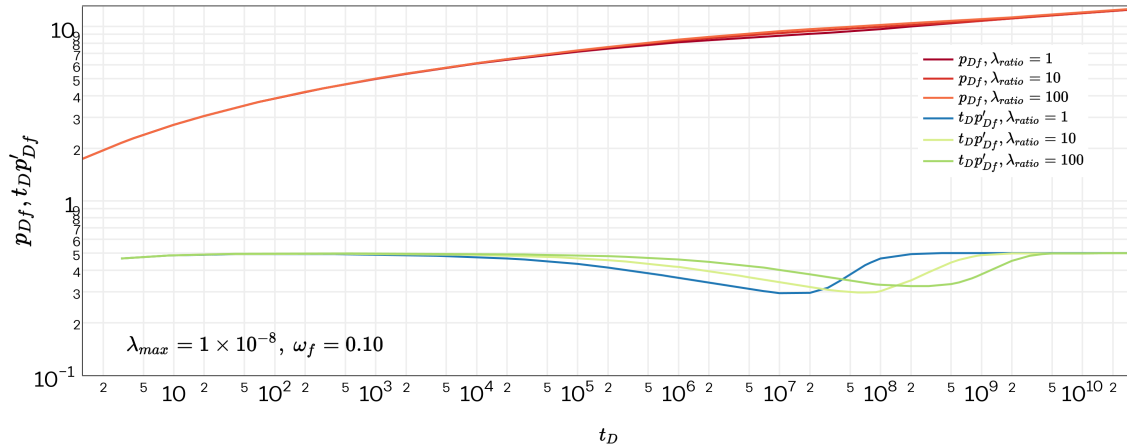
La variación en la respuesta de la presión y la función derivada al modificar el  $\lambda_{ratio}$ , se muestra en las Figs. 4.5 y 4.6, para flujo matriz-fractura pseudo-

estacionario y transitorio, respectivamente. Considerando una distribución lognormal en el tamaño de los bloques.

Para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, se emplearon los valores siguientes  $\lambda_{\text{máx}} = 1 \times 10^{-8}$  y  $\omega_f = 0.1$ , en ambos casos  $S = C_D = 0$ .



**Figura 4.5:** Sensibilidad de la respuesta de presión y de la función derivada, con respecto a  $\lambda_{ratio}$ . Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario.



**Figura 4.6:** Sensibilidad de la respuesta de la presión y de la función derivada, con respecto a  $\lambda_{ratio}$ . Flujo matriz-fractura transitorio.

El comportamiento de la función derivada de las Figs. 4.5 y 4.6, indican:

- ▶ En el límite cuando  $\lambda_{\text{mín}}$  se aproxima a  $\lambda_{\text{máx}}$ , se obtiene la respuesta para un tamaño de bloque único (Warren & Root).
- ▶ La contribución de cada tamaño de bloque afecta la respuesta de la presión, causando un alargamiento del valle, dando como resultado que la forma de la derivada sea poco predecible.

- Entre mayor es la heterogeneidad en los tamaños de los bloques, es decir, cuando se incrementa  $\lambda_{ratio}$ , el comienzo del efecto de doble porosidad se retrasa, debido a que se incrementa la proporción de petróleo en los bloques grandes y son los que más tardan en reaccionar ante los cambios de presión en el sistema de fracturas.





## 5. Condiciones de frontera externa

En este capítulo se muestra la solución de la ecuación de difusión, para los casos en que se tenga un pozo en un yacimiento finito y cerca de una frontera a presión constante, sin considerar los efectos de daño y almacenamiento, para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, considerando una distribución lognormal en el tamaño de los bloques de matriz. Además se muestra la respuesta de la presión y de la función derivada al variar el radio de drene adimensional.

### 5.1. Yacimiento finito (cerrado en la frontera externa)

La solución en el espacio de Laplace, para un yacimiento finito, sin considerar efectos de daño y almacenamiento es la siguiente, ver Apéndice C:

$$\overline{p}_{D_f}(r_{e_D}, s) = \frac{I_1(\sqrt{sg(s)}r_{e_D})K_0(\sqrt{sg(s)}) + I_0(\sqrt{sg(s)})K_1(\sqrt{sg(s)}r_{e_D})}{s\sqrt{sg(s)}\left[I_1(\sqrt{sg(s)}r_{e_D})K_1(\sqrt{sg(s)}) - I_0(\sqrt{sg(s)})K_1(\sqrt{sg(s)}r_{e_D})\right]}, \quad \dots(5.1)$$

donde  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $K_0$  y  $K_1$  son funciones modificadas de Bessel, la función  $g(s)$  está dada por las Ecs. 3.26 y 3.27 para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente y  $r_{e_D}$  es el radio de drene adimensional,  $r_{e_D} = r_e/r_w$ .

Para evitar problemas de inestabilidad numérica cuando comienzan a sentirse los efectos de frontera al emplear el algoritmo de Stehfest, se recomienda emplear máximo seis coeficientes.

Para  $(\sqrt{sg(s)}r_{e_D}) > 700$ , la Ec. 5.1 se reduce a la solución de un yacimiento infinito:

$$\overline{p}_{D_f}(1, s) = \frac{K_0(\sqrt{sg(s)})}{s\sqrt{sg(s)}K_1(\sqrt{sg(s)})}. \quad \dots(5.2)$$

En las Figs. 5.1 y 5.2, se muestra el comportamiento de la presión para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente, al variar el valor del radio de drene adimensional,  $r_{e_D}$ .

En las respuestas para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, se mantuvieron constantes  $\lambda_{\text{máx}} = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda_{\text{ratio}} = 350$  y  $\omega_f = 0.01$ .

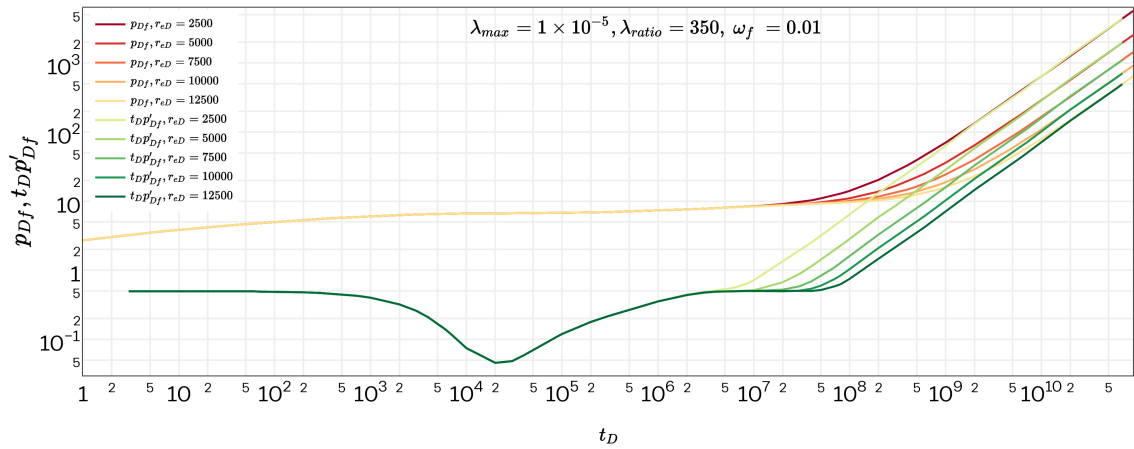


Figura 5.1: Comportamiento de la respuesta de la presión y de la función derivada en un YNF finito. Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario.

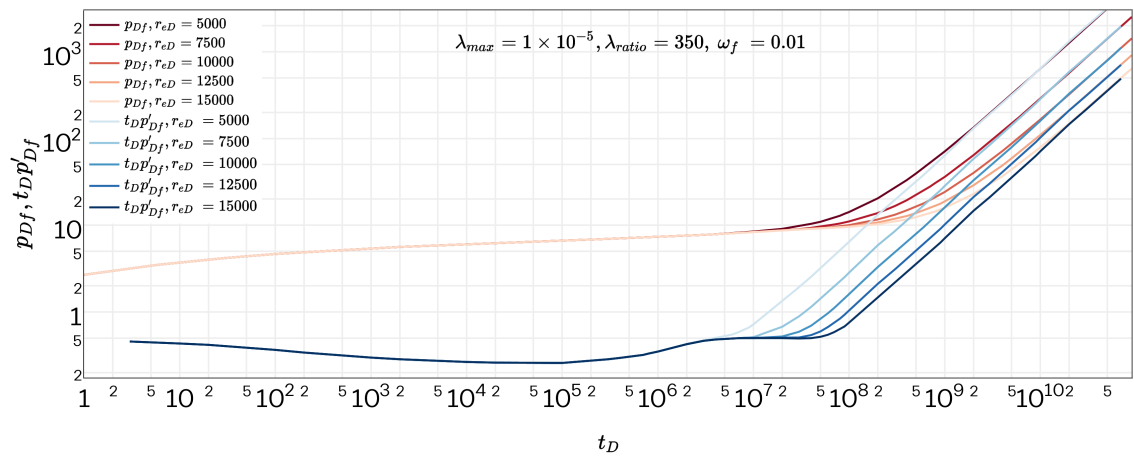


Figura 5.2: Comportamiento de la respuesta de la presión y de la función derivada en un YNF finito. Flujo matriz-fractura transitorio.

## 5.2. Frontera a presión constante

Se utiliza una frontera a presión constante para describir la influencia de un cambio lineal en las propiedades de los fluidos, como ocurre en la presencia de un casquete de gas, un acuífero o una falla conductiva que se encuentra a cierta distancia del pozo productor. La solución en el espacio de Laplace para un yacimiento en cuya frontera se tiene presión constante, sin considerar efectos de daño y almacenamiento, es la siguiente, ver Apéndice D:

$$\overline{p_{Df}}(r_{eD}, s) = \frac{I_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD})K_0(\sqrt{sg(s)}) - I_0(\sqrt{sg(s)})K_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD})}{s\sqrt{sg(s)}\left[I_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD})K_1(\sqrt{sg(s)}) + I_1(\sqrt{sg(s)})K_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD})\right]}, \quad \dots(5.3)$$

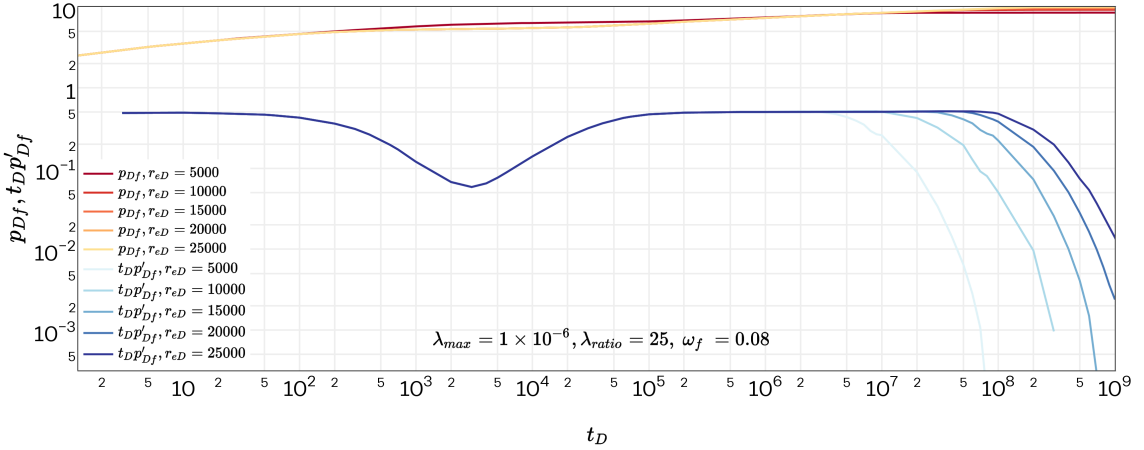
donde la función  $g(s)$  está dada por las Ecs. 3.26, 3.27 para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente.

Para evitar problemas de inestabilidad numérica al emplear el algoritmo de Stehfest cuando se comienzan a sentir los efectos de frontera, se recomienda utilizar máximo cuatro coeficientes.

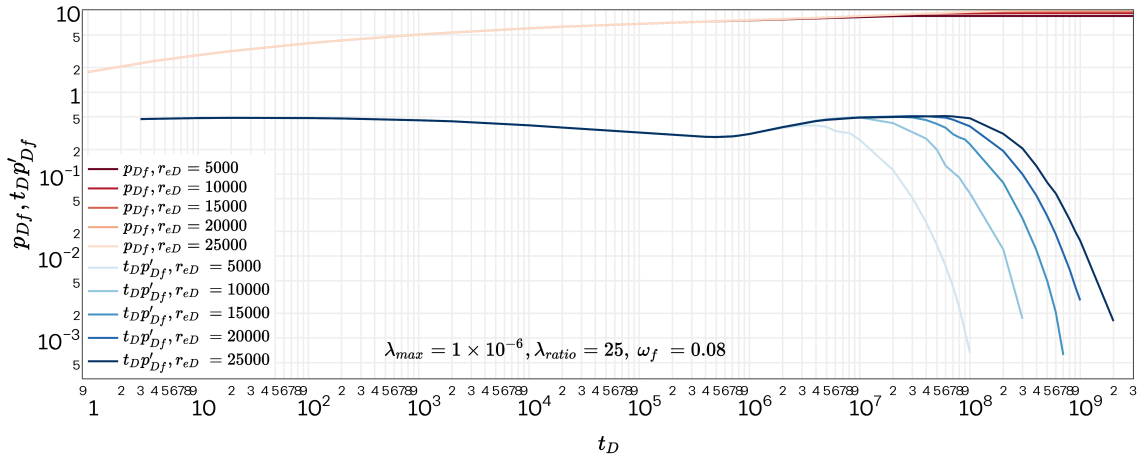
Para  $(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) > 700$ , la Ec. 5.3 se reduce a la solución de yacimiento infinito, Ec. 5.2.

En las Figs. 5.3 y 5.4, se muestra el comportamiento de la presión para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio al encontrarse con una frontera a presión constante, respectivamente.

Para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, se mantuvieron constantes  $\lambda_{\text{máx}} = 1 \times 10^{-6}$ ,  $\lambda_{\text{ratio}} = 25$  y  $\omega_f = 0.08$ .



**Figura 5.3: Comportamiento de la respuesta de la presión y de la función derivada en un YNF con una frontera a presión constante. Flujo matriz-fractura pseudo-estacionario.**



**Figura 5.4: Comportamiento la respuesta de presión y de la función derivada en un YNF con una frontera a presión constante. Flujo matriz-fractura transitorio.**

En las Figs. 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se pueden observar las siguientes características:

- a) En todos los casos, la respuesta se comporta como si el pozo estuviera en un yacimiento infinito, hasta que el disturbio de presión alcanza las fronteras.
- b) En el caso de un yacimiento finito, Figs. 5.1 y 5.2, durante los periodos de decremento de presión, una vez que se comienzan a sentir los efectos de las fronteras, el yacimiento comienza a depresionarse y se alcanza un régimen de flujo pseudo-estacionario y la presión de fondo fluyendo varía proporcionalmente con respecto al tiempo, por lo que la presión y la función derivada convergen en una línea recta con pendiente unitaria.
- c) En el caso de un pozo cerca de una frontera a presión constante, Figs. 5.3 y 5.4, puede observarse que durante los periodos de decremento o de cierre, la presión se estabiliza y se alcanza un régimen de flujo estacionario, la función derivada tiende a cero cuando se comienza a sentir la influencia de la frontera a presión constante y ésta sigue una línea recta con pendiente unitaria negativa.

## 6. Metodología para analizar pruebas de incremento y decremento de presión

La metodología siguiente muestra cómo puede obtenerse la distribución lognormal del tamaño de los bloques de matriz a través del ajuste de los datos de presión y la función primera derivada con curvas tipo, este procedimiento se presenta en (Bourdet y Gringarten, 1980).

En la respuesta de un pozo productor, se pueden observar tres periodos de flujo:

- ♣ Tiempos cortos ( $s \rightarrow \infty$ ): Al principio la contribución de los bloques de matriz es despreciable, por lo que sólo se tiene aporte de las fracturas, por lo tanto este periodo corresponde a un comportamiento homogéneo.
- ♣ Tiempos intermedios: La respuesta de la presión se desvía del comportamiento homogéneo anterior, conforme los bloques de la matriz comienzan a aportar fluidos a las fracturas.
- ♣ Tiempos largos ( $s \rightarrow 0$ ): Se alcanza un régimen pseudo-estacionario entre la matriz y las fracturas circundantes, por lo que el sistema matriz-fractura se comporta como si fuera uno solo.

A continuación se muestra la manipulación de la Ec. 3.4, con el fin de demostrar que para tiempos cortos y largos, la respuesta de la presión considerando una distribución lognormal en el tamaño de los bloques se comporta como homogéneo y es posible analizar las pruebas de presión mediante el ajuste con curvas tipo.

Reduciendo la Ec. 3.4, se obtiene:

$$\overline{p_{D_f}}(1, s') = \frac{1}{s' \left\{ s' C_D + \frac{1}{S + \frac{K_0(\sqrt{s'g(s')})}{\sqrt{s'g(s')} K_1(\sqrt{s'g(s')})}} \right\}} \quad \dots(6.1)$$

Una gráfica semilogarítmica de la función  $S + \frac{K_0(\sqrt{sg(s)})}{\sqrt{sg(s)} K_1(\sqrt{sg(s)})}$  contra  $sg(s)e^{-2S}$  puede aproximarse a la recta semilogarítmica  $\ln\left(\frac{2}{\gamma\sqrt{sg(s)}e^{-2S}}\right)$ , Figs. **6.1** y **6.2**; donde  $\gamma = 1.78$  es la constante exponencial de Euler.

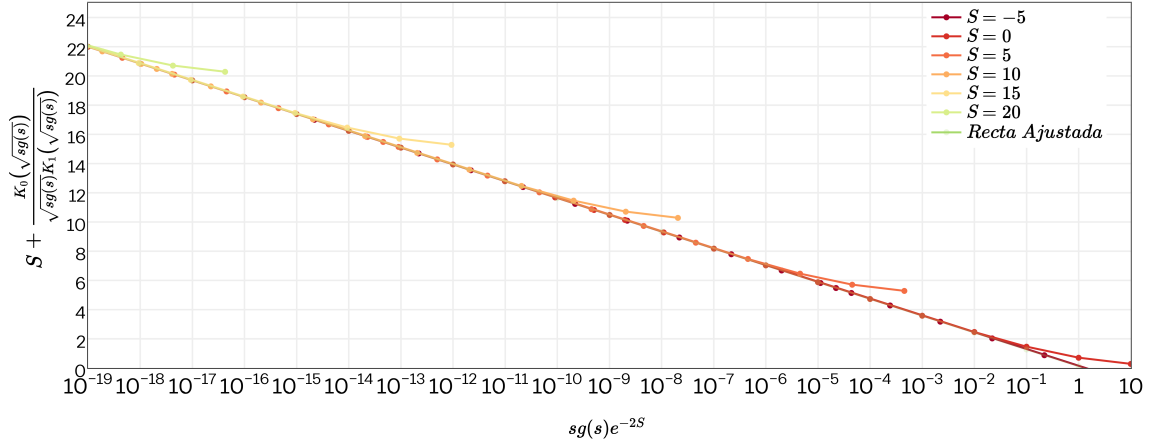


Figura 6.1: Comportamiento de  $S + \frac{K_0(\sqrt{sg(s)})}{\sqrt{sg(s)}K_1(\sqrt{sg(s)})}$  como una función de  $sg(s)e^{-2S}$ . Modelo de Warren & Root.

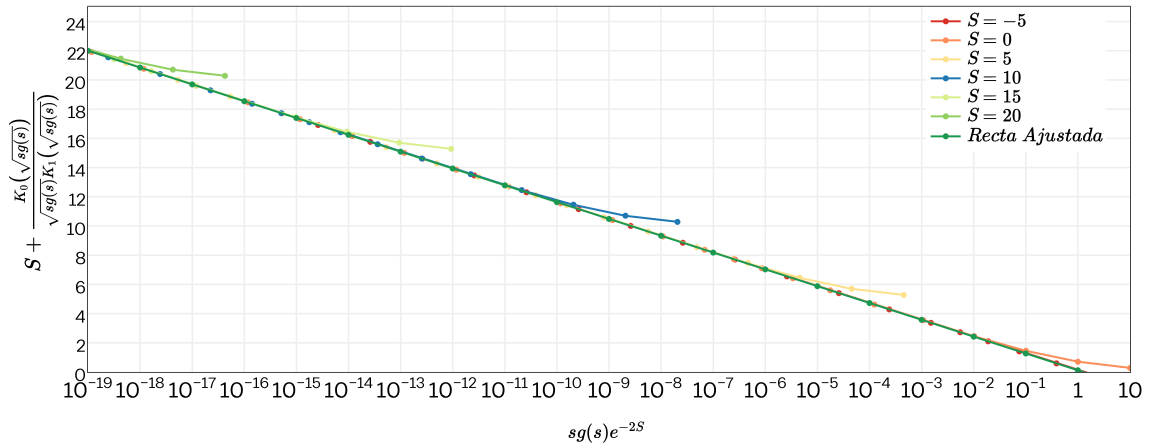


Figura 6.2: Comportamiento de  $S + \frac{K_0(\sqrt{sg(s)})}{\sqrt{sg(s)}K_1(\sqrt{sg(s)})}$  como una función de  $sg(s)e^{-2S}$ . Distribución lognormal del tamaño de bloque de matriz.

Por lo que se tiene:

$$\overline{p_{D_f}}(1, s') = \frac{1}{s' \left\{ s' C_D + \frac{1}{\ln \left( \frac{2}{\gamma \sqrt{s' g(s')} e^{-2S}} \right)} \right\}}. \quad \dots(6.2)$$

Realizando un cambio de variable:  $s = s' C_D$ , se obtiene:

$$\overline{p_{Df}}(1, s) = \frac{1}{s \left\{ s + \frac{1}{\ln \left( \frac{2}{\gamma \sqrt{\frac{s}{C_D}} g(s) e^{-2s}} \right)} \right\}} . \quad \dots(6.3)$$

## 6.1. Comportamiento de la función $g(s)$

Realizando el cambio de variable a la Ec. 3.26, se obtiene:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{\min} C_D}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\sqrt{\frac{s\omega_m}{3\lambda^3 C_D}}}{1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda C_D}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ - \frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{tn} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda .$$

Simplificando la ecuación anterior, se obtiene:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda \left( 1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda C_D} \right)} \exp \left\{ - \frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{tn} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda . \quad \dots(6.4)$$

### 6.1.1. Solución aproximada de la función $g(s)$ para tiempos cortos ( $s \rightarrow \infty$ )

Tomando el límite cuando  $s \rightarrow \infty$  de la Ec. 6.4, se obtiene:



$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \omega_f + \frac{\omega_m}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda C_D}\right)} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{ln} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda \right\} .$$

Por lo tanto:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = \omega_f . \quad \dots(6.5)$$

Para tiempos cortos puede considerarse que  $\omega_f \rightarrow 1$ , porque la producción proviene sólo de las fracturas. Por lo tanto, reduciendo la Ec. 6.3, se obtiene:

$$\overline{p}_{D_f}(1, s) = \frac{1}{s \left\{ s + \frac{1}{\ln \left( \frac{2}{\gamma \sqrt{\frac{s}{C_{D_f}}} e^{-2s}} \right)} \right\}} . \quad \dots(6.6)$$

### 6.1.2. Solución aproximada de la función $g(s)$ para tiempos largos ( $s \rightarrow 0$ )

Tomando el límite cuando  $s \rightarrow 0$  de la Ec. 6.4, se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \omega_f + \frac{\omega_m}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda C_D}\right)} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{ln} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda \right\} ,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m}{2\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{ln} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda .$$

Realizando la integral, se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\mu_{ln} - \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \right)}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left( -\frac{\mu_{ln}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] . \quad \dots(6.7)$$

De las suposiciones consideradas para  $h_{\min}$  y  $h_{\max}$ , Ecs. 3.22 y 3.23, se tiene que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\mu_{ln} - \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \right)}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left( -\frac{\mu_{ln}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] .$$

Finalmente:

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = \omega_f + \omega_m = 1 . \quad \dots(6.8)$$

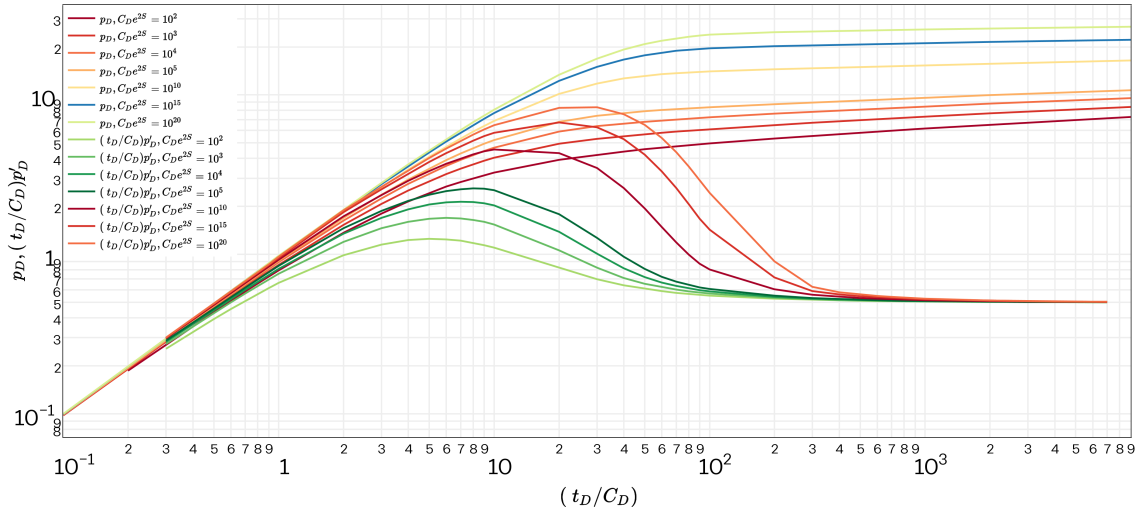
Por lo tanto la Ec. 6.3, se reduce a:

$$\overline{p}_{D_f}(1, s) = \frac{1}{s \left\{ s + \frac{1}{\ln \left( \frac{2}{\gamma \sqrt{\frac{s}{C_{D_f+m}}} e^{-2s}} \right)} \right\}} . \quad \dots(6.9)$$

La Ec. 6.6 describe el comportamiento de la presión para un yacimiento homogéneo, puesto que para tiempos cortos, sólo el sistema de fracturas aporta fluidos, mientras que la Ec. 6.9 describe el comportamiento de la presión cuando el sistema

matriz-fractura actúa como si fuera uno solo.

La prueba de presión debe ajustarse a la familia de curvas tipo para comportamiento homogéneo, Fig. 6.3. Para tiempos largos se obtendrá el valor de la curva,  $(C_D e^{2S})_{f+m}$  y para tiempos cortos, debido a los efectos de daño y almacenamiento es conveniente corroborar el valor de la curva tipo de presión ajustada con la familia de curvas tipo de la función derivada, ambos valores deben ser iguales, obteniéndose el valor de la curva con la que se ajusta,  $(C_D e^{2S})_f$ . Cabe resaltar que  $(C_D e^{2S})_f > (C_D e^{2S})_{f+m}$ .



**Figura 6.3: Curvas tipo para yacimientos con comportamiento homogéneo.**

Una vez realizado el ajuste entre la prueba de presión y la familia de curvas tipo para comportamiento homogéneo, se debe seleccionar un punto cualquiera de donde se deben leer los valores de  $p_{D_f}$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta t$  y  $t_D/C_D$  en los ejes correspondientes. Del ajuste de la prueba con la Fig. 6.3, puede obtenerse:

$$k_f h = \alpha q B \mu \left( \frac{p_{D_f}}{\Delta p} \right)_{\text{Ajuste}}, \quad \dots(6.10)$$

$$C = 0.000295 \left( \frac{k_f h}{\mu} \right) \left( \frac{\Delta t}{\frac{t_D}{C_D}} \right)_{\text{Ajuste}}, \quad \dots(6.11)$$

$$(C_D)_{f+m} = \frac{\beta k_f}{\phi \mu c_t r_w^2} \left( \frac{\Delta t}{\frac{t_D}{C_D}} \right)_{\text{Ajuste}}, \quad \dots(6.12)$$

$$S = 0.5 \ln \left( \frac{(C_D e^{2S})_{f+m}}{(C_D)_{f+m}} \right). \quad \dots(6.13)$$

## 6.2. Comportamiento de la función derivada de presión

Para ajustar el valle de la función derivada, se parte de la solución en el espacio real del modelo de Warren & Root:

$$p_{Df} \left( \frac{t_D}{C_D} \right) = \frac{1}{2} \left[ 0.80908 + \ln \left( \frac{t_D}{C_D} \right) + E_i \left( -\frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f) C_D} \frac{t_D}{C_D} \right) \right], \quad \dots(6.14)$$

donde  $E_i$  es la función integral exponencial.

Derivando la Ec. 6.14, se obtiene:

$$p'_{Df} \left( \frac{t_D}{C_D} \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \exp \left( -\frac{3\lambda C_{Df+m}}{\omega_f(1-\omega_f) C_D} \frac{t_D}{C_D} \right) - \exp \left( -\frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f) C_D} \frac{t_D}{C_D} \right) \right]. \quad \dots(6.15)$$

La Ec. 6.15 describe el valle completo, mientras que la parte ascendente del valle se obtiene con la ecuación siguiente, en la que se desprecia el término correspondiente a la primera exponencial dentro del parámetro del paréntesis rectangular de la Ec. 6.15:

$$p'_{Df} \left( \frac{t_D}{C_D} \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f) C_D} \frac{t_D}{C_D} \right) \right]. \quad \dots(6.16)$$

Con las Ecs. 6.15 y 6.16 se generan las curvas tipo para ajustar el valle de la función derivada, Fig. 6.4.

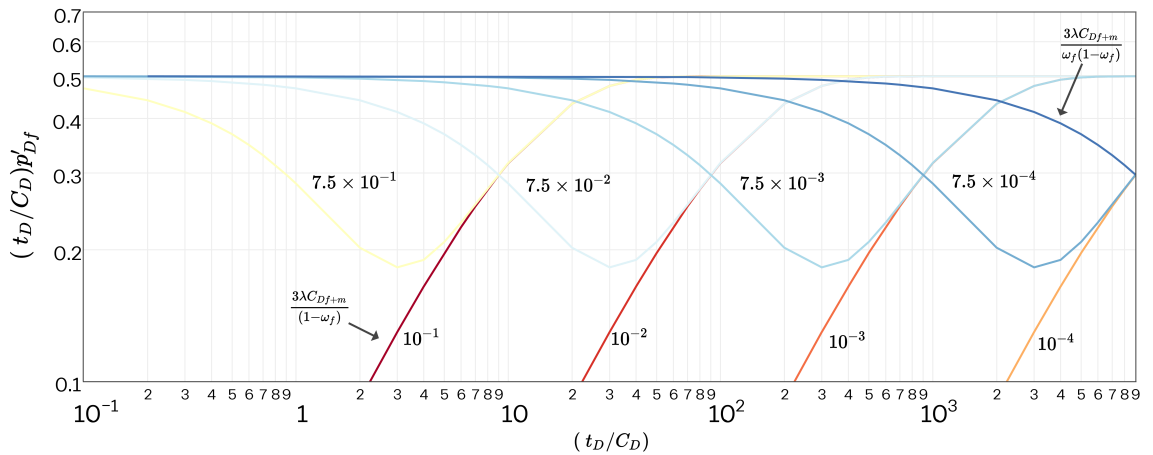


Figura 6.4: Curvas tipo del valle de la función derivada para yacimientos con comportamiento de doble porosidad.

Del ajuste del valle de la función derivada, puede obtenerse:

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f)}\right)}{\left(\frac{3\lambda C_{Df+m}}{\omega_f(1-\omega_f)}\right)}, \quad \dots(6.17)$$

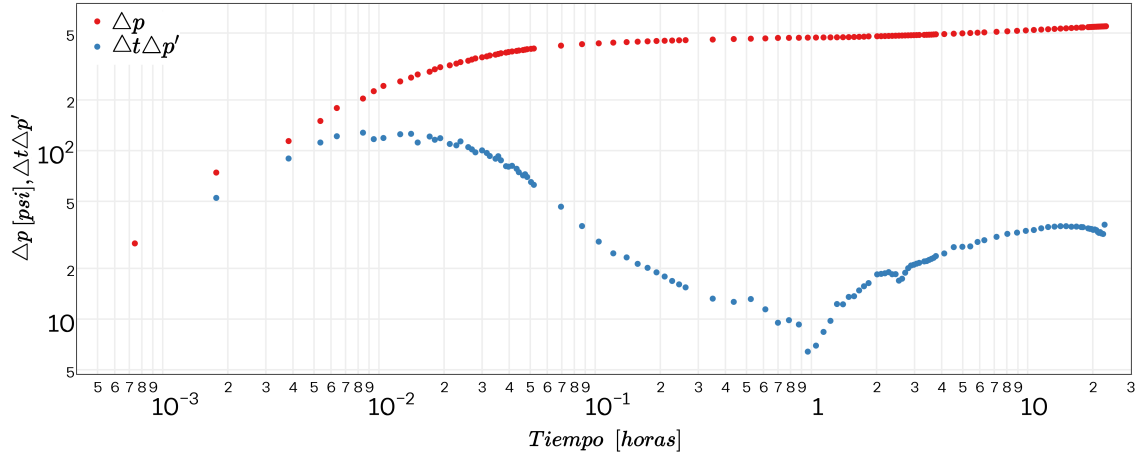
$$\lambda_{WR} = \left(\frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f)}\right) \left(\frac{1-\omega_f}{3 \times (C_D)_{f+m}}\right). \quad \dots(6.18)$$

Empleando los valores estimados  $\omega_f$ ,  $(C_D)_{f+m}$  y  $S$ , y mediante un proceso iterativo se deben obtener los valores de  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\lambda_{\text{ratio}}$  que mejor se ajusten al valle de la función derivada.

Finalmente con las Ecs. 3.24 y 3.25 se pueden obtener las funciones de densidad de probabilidad y acumulada del tamaño de los bloques de matriz.

### 6.3. Ejemplo. Prueba de incremento de presión

Se realizó una prueba de incremento de presión en un yacimiento naturalmente fracturado (Escobar, 2003), cuya información se encuentra en la Fig. 6.5. Una producción variable precedió a esta prueba de incremento de presión; por lo tanto fue usada una función de superposición para modelar la historia del flujo.



**Figura 6.5:** Gráfica log-log para una prueba de incremento de presión de  $\Delta p$  &  $\Delta t \Delta p'$  vs  $t$ .

Información adicional en relación al pozo y las propiedades del yacimiento se especifican en la Tabla 6.1:

Tabla 6.1: Información del fluido y del yacimiento.

Propiedad	Valor
Producción de petróleo, $q$	880 [bpd]
Compresibilidad total, $c_t$	$20 \times 10^{-6}$ [psi <sup>-1</sup> ]
Radio del pozo, $r_w$	0.29 [ft]
Porosidad, $\phi$	0.08
Factor de volumen del petróleo, $B$	1.3 [RB/STB]
Viscosidad del petróleo, $\mu$	1.3 [cp]
Espesor neto de la formación, $h$	29 [ft]
Permeabilidad de la matriz, $k_m$	0.1 <sup>a</sup> [md]

<sup>a</sup> Propuesto.

Para tiempos largos, la prueba se ajustó con la familia de curvas tipo para comportamiento homogéneo, Fig. 6.3, obteniéndose los puntos de ajuste siguientes:

$$\text{Punto de ajuste de la presión, } \left( \frac{p_{Df}}{\Delta p} \right)_{\text{Ajuste}} = \left( \frac{1.08739}{74.16} \right).$$

$$\text{Punto de ajuste del tiempo, } \left( \frac{\Delta t}{\frac{t_D}{C_D}} \right)_{\text{Ajuste}} = \left( \frac{0.001768}{1.0344568} \right).$$

Empleando el punto de ajuste de la presión, aplicando la Ec. 6.10, se obtiene:

$$k_f h = \alpha q B \mu \left( \frac{p_{Df}}{\Delta p} \right)_{\text{Ajuste}},$$

$$k_f h = 141.2 \times 880 \times 1.3 \times 1.3 \times \left( \frac{1.08739}{74.16} \right),$$

$$k_f h = 3084.734 [\text{md} - \text{ft}],$$

$$k_f = \frac{3084.734}{29} = 106.37 [\text{md}].$$

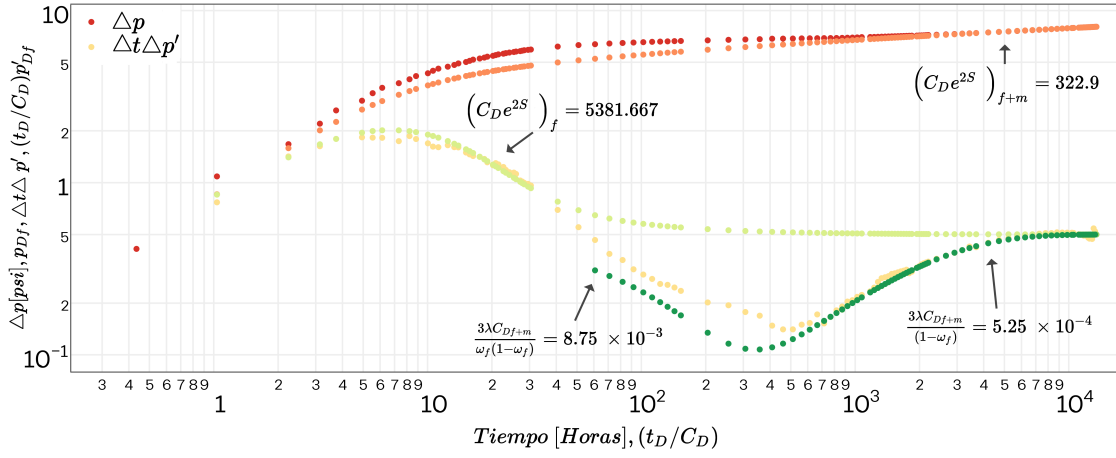
Utilizando el punto de ajuste del tiempo, aplicando la Ec. 6.12, se obtiene:

$$(C_D)_{f+m} = \frac{\beta k_f}{\phi \mu c_t r_w^2} \left( \frac{\Delta t}{\frac{t_D}{C_D}} \right)_{\text{Ajuste}},$$

$$(C_D)_{f+m} = \frac{2.637 \times 10^{-4} \times 106.37}{0.08 \times 1.3 \times 20 \times 10^{-6} \times 0.29^2} \left( \frac{0.001768}{1.0344568} \right),$$

$$(C_D)_{f+m} = 274.0563 .$$

En la Fig. 6.6 se muestra el ajuste realizado con las curvas tipo.



**Figura 6.6: Ajuste con las curvas tipo para comportamiento homogéneo y función derivada de la presión.**

$$(C_D e^{2S})_{f+m} = 322.9 ; \left( \frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f)} \right) = 5.25 \times 10^{-4} ; \left( \frac{3\lambda C_{Df+m}}{\omega_f(1-\omega_f)} \right) = 8.75 \times 10^{-3} .$$

Aplicando la Ec. 6.17, se puede estimar la relación de almacenamiento,  $\omega_f$ :

$$\omega_f = \frac{\left( \frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f)} \right)}{\left( \frac{3\lambda C_{Df+m}}{\omega_f(1-\omega_f)} \right)},$$

$$\omega_f = \frac{5.25 \times 10^{-4}}{8.75 \times 10^{-3}} = 0.06 .$$

El factor de daño,  $S$ , puede estimarse a partir de la Ec. 6.13:

$$S = 0.5 \ln \left( \frac{(C_D e^{2S})_{f+m}}{(C_D)_{f+m}} \right),$$

$$S = 0.5 \ln \left( \frac{322.9}{274.0563} \right) = 0.082 .$$

El coeficiente de flujo interporoso para el modelo de Warren and Root (W&R),  $\lambda_{WR}$ , se estima a partir de la Ec. 6.18:

$$\lambda_{WR} = \left( \frac{3\lambda C_{Df+m}}{(1-\omega_f)} \right) \left( \frac{1-\omega_f}{3 \times (C_D)_{f+m}} \right) ,$$

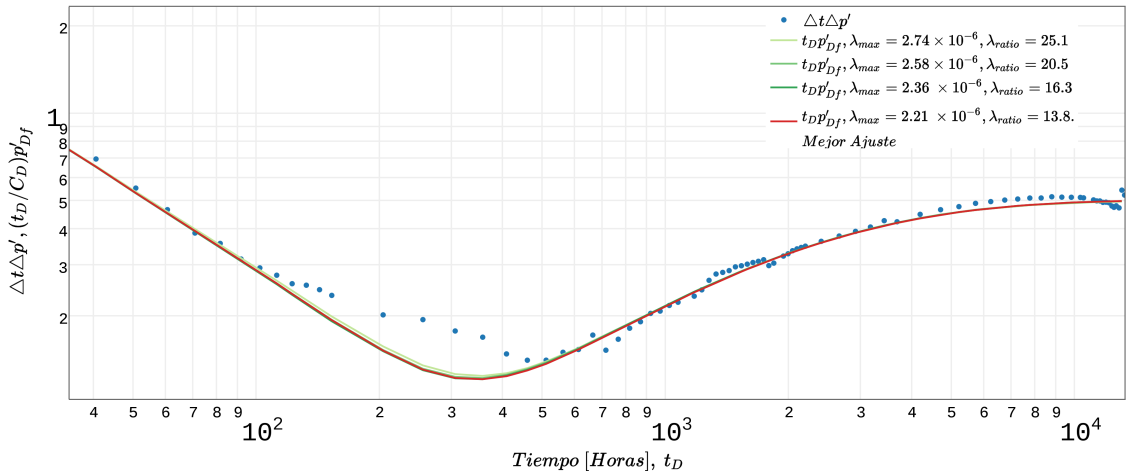
$$\lambda_{WR} = (5.25 \times 10^{-4}) \left( \frac{1-0.06}{3 \times 1096.2253} \right) = 6.0 \times 10^{-7} .$$

El tamaño de los bloques, de acuerdo al modelo de Warren & Root, puede obtenerse mediante la definición de coeficiente de flujo interporoso, Ec. 3.11, tomando en cuenta el factor de forma,  $\sigma_f$ :

$$h_{WR} = \sqrt{\frac{3 k_m r_w^2}{k_f \lambda_{WR}}} ,$$

$$h_{WR} = \sqrt{\frac{3 \times 0.1 \times 0.29^2}{106.37 \times 6.0 \times 10^{-7}}} = 19.88 [ft] .$$

Para obtener el coeficiente de flujo interporoso máximo,  $\lambda_{m\acute{a}x}$  y la relación de coeficientes de flujo interporoso,  $\lambda_{ratio}$ , es necesario llevar a cabo un proceso iterativo hasta obtener el mejor ajuste del valle de la función derivada, Fig. 6.7:



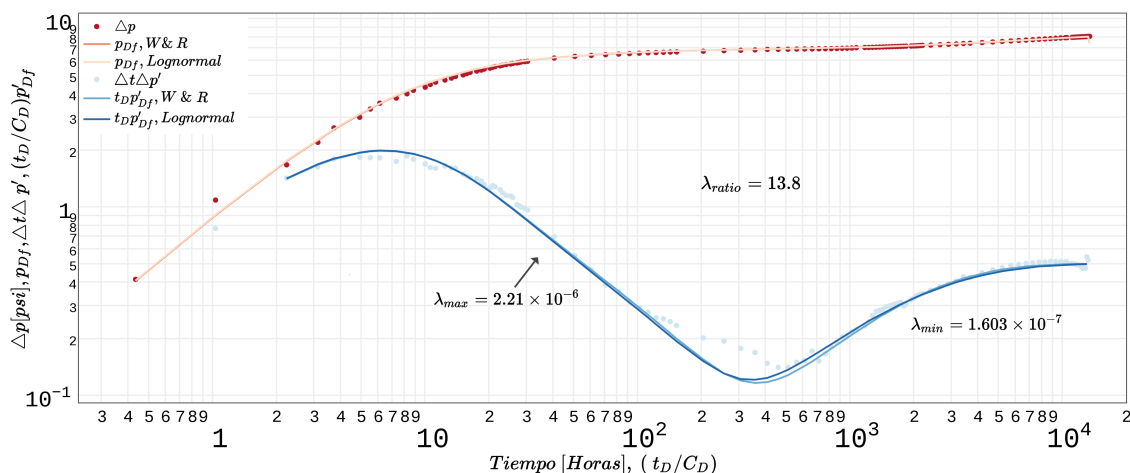
**Figura 6.7:** Proceso iterativo para obtener el mejor ajuste del valle, empleando el modelo propuesto.

La solución obtenida con el modelo propuesto representa adecuadamente el comportamiento del valle. El primer ajuste ( $\lambda_{m\acute{a}x} = 2.74 \times 10^{-6}$  y  $\lambda_{ratio} = 25.1$ ) mostrado

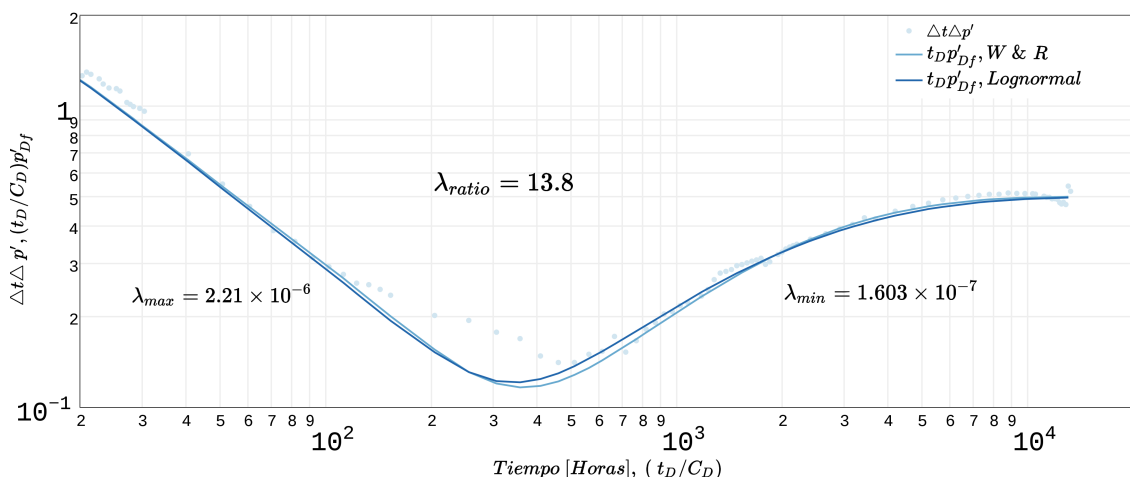


en la Fig. 6.7 tuvo un error relativo del valle de **4.4%**, y el error fue disminuyendo conforme el proceso iterativo continuó, hasta que el mejor ajuste ( $\lambda_{\text{máx}} = 2.21 \times 10^{-6}$  y  $\lambda_{\text{ratio}} = 13.8$ ) tuvo un error relativo del valle de **4.28%**.

En la Figs. **6.8** y **6.9** se muestra el ajuste final mediante el modelo propuesto (distribución lognormal) comparado con el obtenido con el modelo de Warren & Root.



**Figura 6.8:** Ajuste total del modelo de Warren & Root y del modelo propuesto (Distribución lognormal).



**Figura 6.9:** Ajuste del valle del modelo de Warren & Root y del modelo propuesto (Distribución lognormal).

El ajuste con ambos modelos fue casi idéntico, empleando el modelo de Warren & Root se obtuvo un error relativo del valle de **4.45%**, mientras que empleando el modelo propuesto, se obtuvo un error relativo de **4.28%**, cabe destacar que la derivada numérica tuvo mucho ruido en la parte media del valle y por consiguiente el error relativo no fue tan pequeño, aunque en las partes donde no se tuvo tanto

ruido, el error relativo fue menor a 0.1 %. Además con el modelo propuesto se puede ahora obtener mayor información del análisis de la prueba de presión.

El cálculo del tamaño de bloque máximo y mínimo, se estima mediante las Ecs. 3.12 y 3.13, respectivamente:

$$h_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{3 k_m r_w^2}{k_f \lambda_{\text{mín}}}} ; \quad (6.19)$$

$$h_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.1 \times 0.29^2}{106.37 \times 1.6031 \times 10^{-7}}} = 38.46[ft] ;$$

$$h_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{3 k_m r_w^2}{k_f \lambda_{\text{máx}}}} ; \quad (6.20)$$

$$h_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.1 \times 0.29^2}{106.37 \times 2.2123 \times 10^{-6}}} = 10.35[ft] .$$

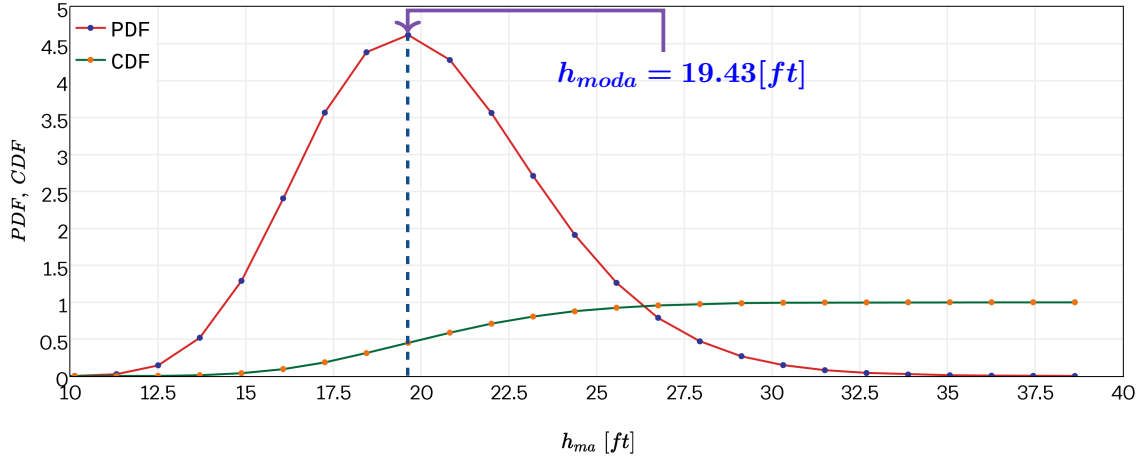
La moda del tamaño de los bloques puede estimarse mediante la ecuación siguiente:

$$h_{\text{moda}} = h_{\text{máx}} e^{(\mu_{ln} - \sigma^2)} , \quad \dots(6.21)$$

$$h_{\text{moda}} = (38.46) e^{(-0.65435 - 0.16825^2)} = 19.43[ft] .$$

El tamaño de bloque obtenido con el modelo de Warren & Root concuerda con la moda del tamaño de los bloques de matriz de la distribución lognormal.

Finalmente la función de la densidad de probabilidad del tamaño de bloque para esta prueba es la siguiente, Fig. **6.10**. Cuya información se empleará para obtener el comportamiento de la producción de petróleo al considerar la variabilidad en el espesor de los bloques de matriz.



**Figura 6.10:** Función de densidad de probabilidad y acumulada del tamaño de bloque.

## 6.4. Obtención del radio de investigación

En la práctica, el radio de investigación durante periodos de cierre se aproxima, así como para periodos de decremento, mediante la distancia a un efecto de frontera introducido al final del periodo de cierre. Si se utiliza una frontera a presión constante, la distorsión de la respuesta de la función derivada es más aguda que al utilizar un modelo con una falla sellante, y la distancia hasta el cambio en las propiedades del yacimiento es más fácil de definir, (Bourdet, 2002).

La solución en el espacio de Laplace, para la condición de frontera externa antes mencionada, considerando efectos de daño y almacenamiento es la siguiente, ver Apéndice E:

$$\overline{p_{wDf}}(r_{eD}, s) = \frac{A}{s D}, \quad \dots(6.22)$$

donde:

$$A = I_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) K_0(\sqrt{sg(s)}) - I_0(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) + \\ + S\sqrt{sg(s)} \left[ I_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) K_1(\sqrt{sg(s)}) + I_1(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) \right]$$

$$D = (C_D S s + 1) \left[ \sqrt{sg(s)} I_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) K_1(\sqrt{sg(s)}) + \sqrt{sg(s)} I_1(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) \right] + \\ + s C_D \left[ I_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) K_0(\sqrt{sg(s)}) - I_0(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) \right]$$

Para  $(\sqrt{sg(s)}r_{eD}) > 700$ , la Ec. E.16 se reduce a la solución de yacimiento infinito con efectos de daño y almacenamiento, Ec. 3.4.

En la Fig. 6.11, se muestra el ajuste realizado para la prueba de presión presentada anteriormente:

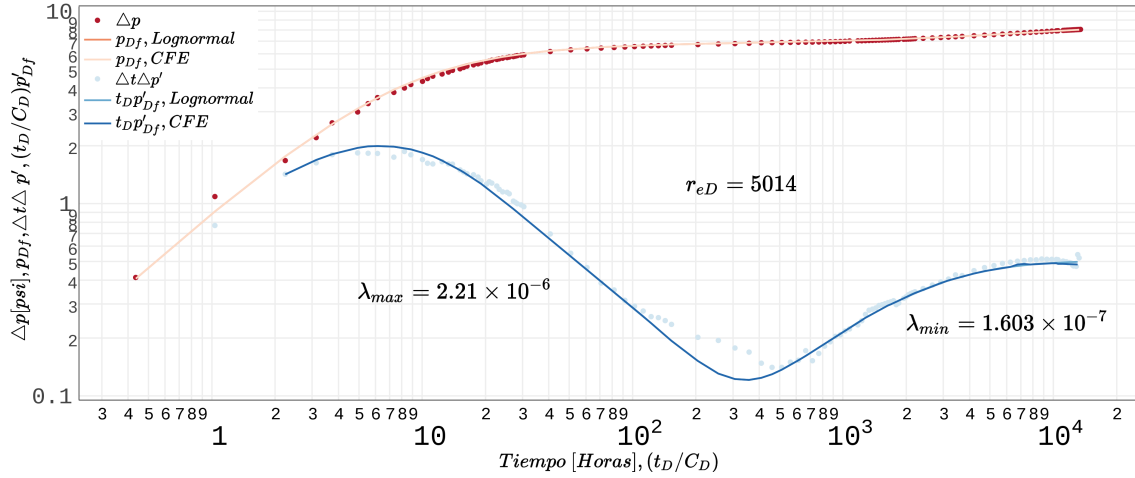


Figura 6.11: Obtención del radio de investigación.

Empleando la definición de radio de drene adimensional, se tiene:

$$r_e = r_{eD} \times r_w , \quad \dots(6.23)$$

$$r_e = (5014)(0.29) = 1454 [ft] = 443 [m] .$$

## 6.5. Recuperación de petróleo

Como una aplicación a los resultados obtenidos al analizar la prueba de presión previa, función de densidad de probabilidad y radio de investigación, se analizará la recuperación de petróleo por el mecanismo de imbibición, considerando que la matriz es preferentemente mojable por agua, comparando los resultados que se obtendrían con el modelo de Warren and Root y considerando que los bloques de matriz están distribuidos de manera lognormal a lo largo del yacimiento.

Mattax y KYTE en 1962 obtuvieron el tiempo que se requiere para recuperar una fracción de petróleo por el mecanismo de imbibición por agua para cierto tiempo  $t$ , de un bloque de un yacimiento naturalmente fracturado. Presentaron un método para predecir el comportamiento en donde la imbibición es el mecanismo predominante, despreciando los efectos gravitacionales.

$$t_{frac} = C^* h_{ma}^2 , \quad \dots(6.24)$$

donde  $t_{frac}$  es el tiempo requerido para recuperar una fracción de petróleo, mientras que  $C^*$  es una constante de proporcionalidad.

Aronofsky et al. en 1958 propusieron la siguiente ecuación:

$$q_o = \frac{N_r}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} , \quad \dots(6.25)$$

la Ec. 6.25 sirve para calcular el gasto de petróleo para un tiempo  $t$ , que produce por imbibición un bloque de matriz rodeado totalmente por agua desde el principio del proceso;  $N_r$  es el volumen de petróleo recuperable del bloque y  $\tau$  es el tiempo al cual se produce la fracción  $(1 - 1/e) \approx 0.63$  del petróleo recuperable.

A partir de la relación entre el gasto y el volumen producido,  $q_o = dV/dt$  y la Ec. 6.25, se obtiene:

$$V_o = N_r \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) , \quad \dots(6.26)$$

por medio de la Ec. 6.26, se obtiene el volumen acumulado de petróleo, desde el tiempo en el que se sumerge el bloque totalmente en el agua hasta el tiempo  $t$ .

Aplicando la Ec. 6.26 a un yacimiento naturalmente fracturado, que tenga  $NB$  tamaños de bloques y a su vez tengan  $n_{bl}$  bloques de cada tamaño, el volumen de petróleo producido para cierto tiempo es:

$$\sum_{i=1}^{NB} V_{o_i} n_{bl_i} = \sum_{i=1}^{NB} N_{r_i} n_{bl_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) , \quad \dots(6.27)$$

la Ec. 6.27, considera que todos los bloques de cierto tamaño tienen el mismo valor de  $\tau$ .

Considerando que  $N_{r_T} = N_r n_{bl}$  como el petróleo recuperable de los  $n_{bl}$  bloques de matriz de cierto tamaño, se tiene que:

$$N_p = \sum_{i=1}^{NB} N_{r_{T_i}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) ; \quad \dots(6.28)$$

la Ec. 6.28 toma en cuenta la función lognormal del tamaño de los bloques de matriz.

A continuación se presenta un ejemplo del comportamiento de la recuperación de petróleo para el pozo cuya prueba de presión se analizó en las secciones previas, la función de distribución de probabilidad se muestra en la Fig. 6.10, además los resultados se comparan con los que se obtendrían con el modelo de Warren and Root (W & R). Este procedimiento se presenta en (Rodríguez, 2000).

La información de la función de densidad de probabilidad obtenida se especifica en la Tabla **6.2**.

**Tabla 6.2: Espesor de los bloques de matriz y su probabilidad de ocurrencia en el yacimiento.**

$h_{ma}$ [ft]	$f_i$
16.0	0.0949
18.5	0.2158
21.0	0.2780
23.0	0.2177
25.5	0.1191
28.0	0.0501
30.5	0.0174

El resto de la información se encuentra en la Tabla 6.1 y a continuación:

$$* A = 6.17 \times 10^5 [m^2]$$

$$* N = 47.76 \times 10^6 [STB]$$

$$* S_o = 0.80$$

Para fines ilustrativos, se considera que el espesor del yacimiento es de  $h = 820$  [ft], para que el número de bloques,  $n_{bl}$ , obtenido para los espesores de los bloques de matriz de mayor dimensión sean al menos 1.

Se considera que el yacimiento tiene las mismas características (permeabilidad, mojabilidad, etc.) que en el caso estudiado por Mattax y Kyte; por lo tanto la constante de proporcionalidad  $C^*$  es la misma para cada uno de los tamaños de bloques que se incluyen en el ejemplo.

En la Tabla 2 del artículo de Mattax y Kyte, se presentan los datos del yacimiento en estudio:

$$\ddagger h_{ma} = 2.744 [m]; \quad \phi_{ma} = 0.091$$

$$\ddagger k_{ma} = 1.9 [mD]; \quad \mu_w = 0.6 [cp]$$

$$\ddagger \mu_o = 1.8 [cp]; \quad S_w = 0.243$$

$$\ddagger \sigma = 35 [dinas/cm]; \quad N_r = 0.3$$

$$\ddagger \text{Rapidez de avance del agua} = 1 [\text{in/días}]$$

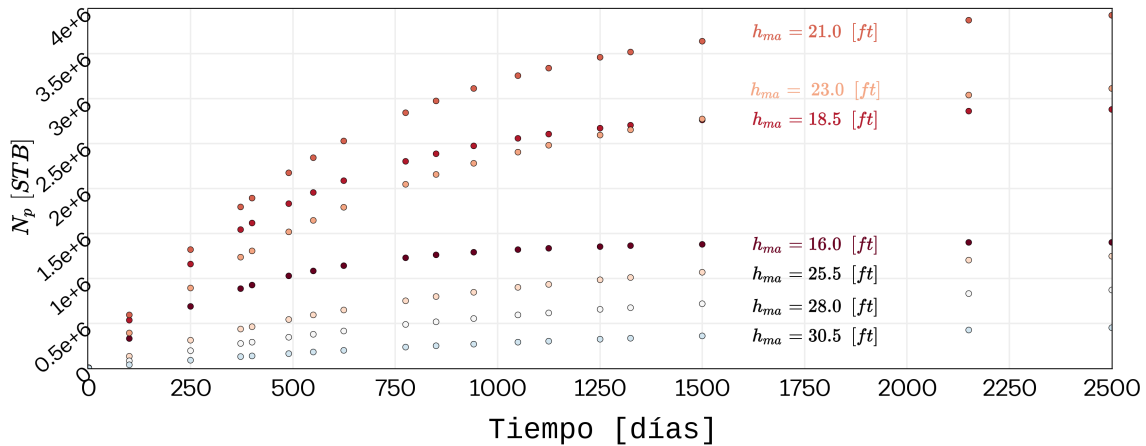
$$\ddagger \text{El medio poroso es fuertemente mojable por agua.}$$

De la Fig. 6 del artículo de referencia se observa que a los 116.8 días, se obtiene una recuperación de  $(1 - 1/e)$  veces el total de petróleo recuperable, por lo tanto  $C^* = 15.511$  [días/ $m^2$ ].

Los resultados se muestran en la Tabla 6.3 y en la Fig. 6.12; los valores de  $f_i$  se ajustaron para dar valores enteros de  $n_{bl}$ .

**Tabla 6.3: Comportamiento de la recuperación de petróleo tomando en cuenta la distribución del tamaño de los bloques de matriz.**

Grupo	$i$	$h_{ma}$ [ft]	$f_i$	$n_{bl_i}$	$N_{r_{T_i}}$ [ $10^6 STB$ ]	$\tau_i$ [días]
Bloques pequeños	1	16.0	0.0979	5	1.4039	372
	2	18.5	0.2024	9	2.8997	490
	3	21.0	0.2792	11	4.0006	624
Bloques grandes	4	23.0	0.2262	8	3.2416	775
	5	25.5	0.1247	4	1.7868	942
	6	28.0	0.0341	1	0.4882	1125
	7	30.5	0.0174	1	0.5297	1325
W & R		19.88	1.0000	41	1.4240	570



**Figura 6.12: Recuperación acumulada de petróleo,  $N_p$  para cada tamaño de bloque.**

Para ejemplificar de una manera más clara la aportación de los bloques más pequeños y los bloques más grandes, se dividieron los bloques en dos grupos: los **bloques pequeños** están integrados por los primeros tres tamaños de bloques ( $h_{ma_1}$  a  $h_{ma_3}$ ), corresponden a los bloques que están por debajo de la moda antes estimada y los **bloques grandes** están integrados por los cuatro tamaños de bloques más grandes ( $h_{ma_4}$  a  $h_{ma_7}$ ), corresponden a los bloques que son mayores a la moda. Mostrándose los resultados en las Figs. 6.13 y 6.14.

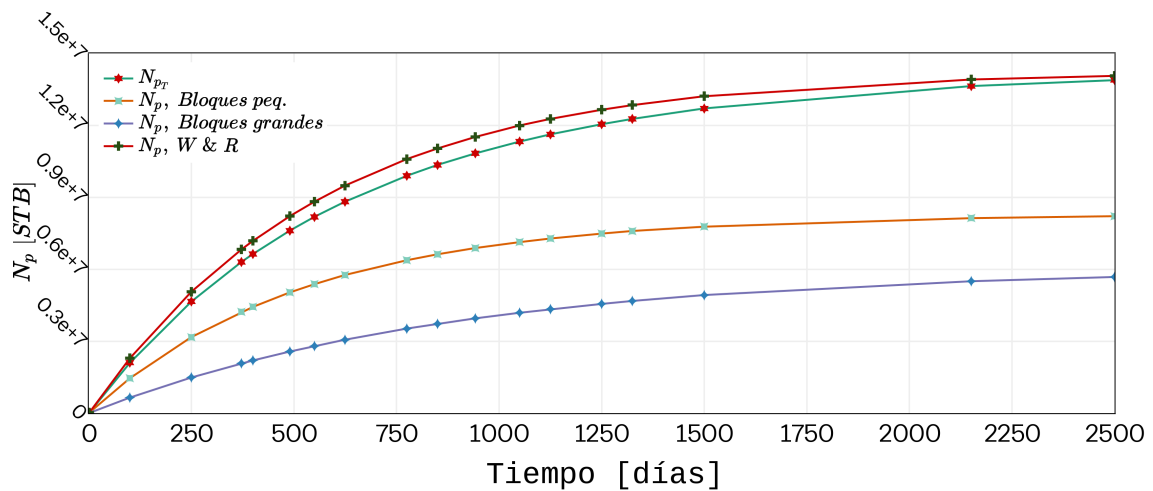


Figura 6.13: Comparación entre la recuperación acumulada de petróleo aportada por el grupo de bloques pequeños, el grupo de bloques grandes y el modelo de Warren and Root.

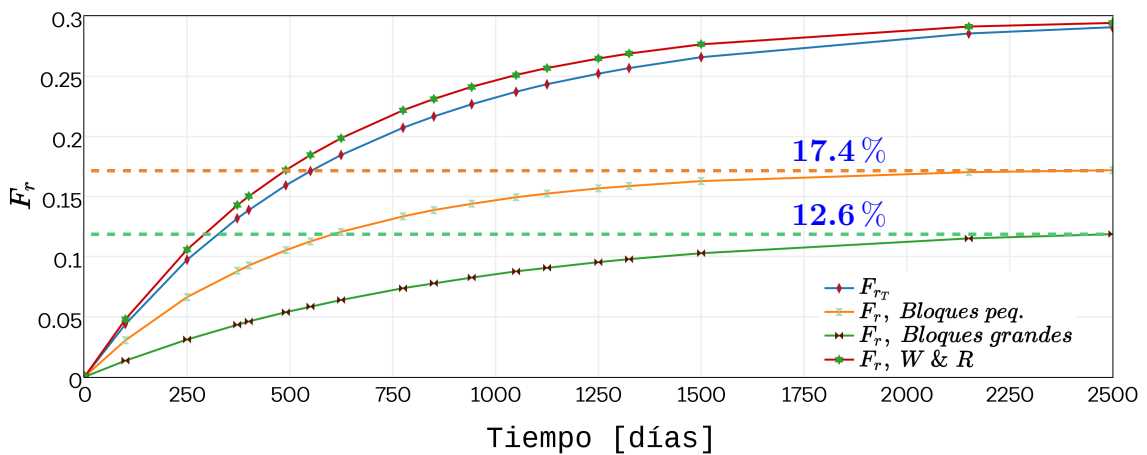


Figura 6.14: Comparación entre el factor de recuperación del grupo de bloques pequeños, el grupo de bloques grandes y el método de Warren and Root.

En la Fig. 6.13 se pueden realizar las siguientes observaciones:

- ♠ El grupo de bloques pequeños transcurridos los 2500 días de la simulación, obtuvo una mayor producción acumulada, poco más de  $8 \times 10^6$  [STB], que el grupo de bloques grandes que alcanzó poco más de  $5.5 \times 10^6$  [STB], lo anterior es debido a que el grupo de bloques pequeños representa el 58% de los bloques de matriz presentes en el yacimiento y además, los bloques de menores dimensiones son los primeros en aportar fluidos a la red de fracturas.
- ♠ Al grupo de bloques pequeños, le tomó poco más de 2000 días en alcanzar la máxima producción acumulada, mientras que al grupo de bloques grandes, le



tomó casi 5000 días en alcanzar su máximo.

- ♠ En los primeros 550 días, la producción acumulada total proviene principalmente del grupo de los bloques pequeños, los cuales aportaron más del 60 %, lo cual corrobora que los bloques de menor dimensión en el yacimiento son los que aportan primero al sistema de fracturas.
- ♠ A los 1100 días, la aportación de ambos grupos de bloques, pequeños y grandes es la misma, a partir de ese día la producción proveniente del grupo de bloques pequeños fue disminuyendo, hasta que para el final de la simulación, el grupo de bloques grandes aporta el 70 % de la producción.
- ♠ El resultado empleando el modelo de Warren and Root sobreestimó la producción acumulada obtenida mediante el modelo propuesto, porque este último considera la existencia de los bloques de mayores dimensiones, los cuales tienen el 42 % del petróleo total para este ejemplo y son los que más tardan en aportar fluidos a la red de fracturas.

De la Fig. 6.14, se pueden realizar las siguientes observaciones:

- ≡ Del 30 % del petróleo recuperable, el grupo de bloques pequeños aportó el 17.4 %, mientras que el grupo de bloques grandes aportó el 12.6 %.
- ≡ Al comparar los dos modelos (Warren and Root y distribución lognormal), en los primeros 550 días de simulación, el modelo de Warren and Root estaba sobreestimando en un 10 % la recuperación obtenida con el modelo propuesto, dicha diferencia fue disminuyendo conforme el grupo de bloques grandes comenzó a aportar fluidos a la red de fracturas y porque ya se había obtenido la recuperación máxima mediante el modelo de Warren and Root.

Para mostrar la influencia que tienen bloques de matriz cuyo espesor es mayor a la *moda* estimada, en las Figs. 6.15 y 6.16 se presenta el análisis realizado a la función de densidad de probabilidad obtenida y la comparación en la producción acumulada de petróleo,  $N_p$ , empleando el modelo de Warren and Root y el modelo propuesto, al variar el espesor de la formación, respectivamente.

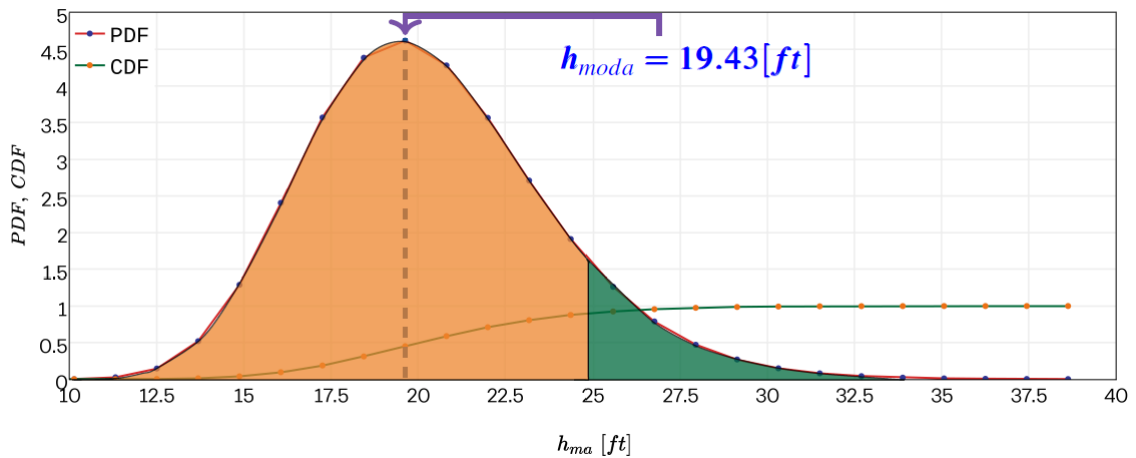


Figura 6.15: Análisis de la función de densidad de probabilidad lognormal.

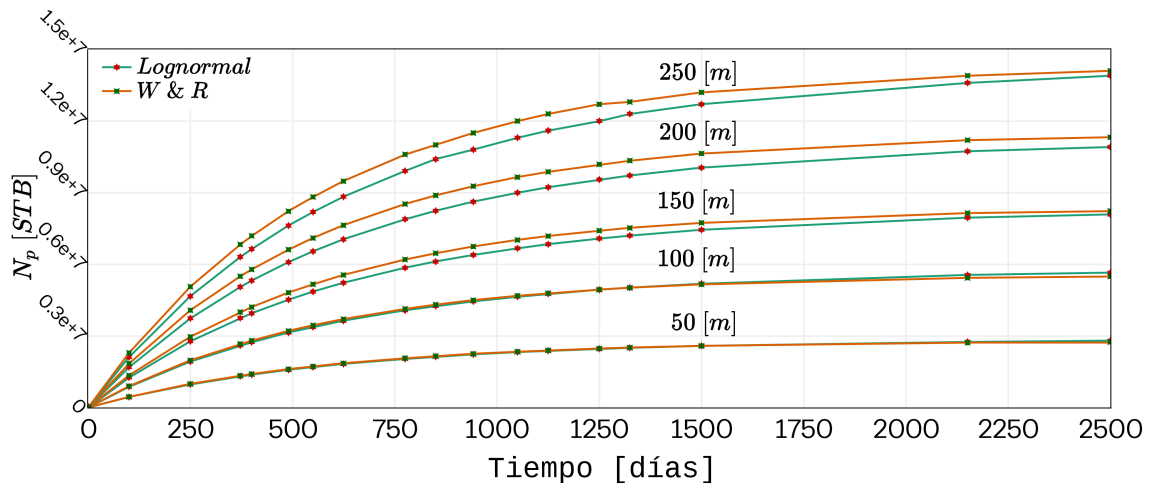


Figura 6.16: Comparación entre la recuperación acumulada de petróleo obtenida con el modelo de Warren and Root y el modelo propuesto al variar el espesor de la formación.

De las Figs. 6.15 y 6.16, se pueden realizar las siguientes observaciones:

- ∪ La rapidez con la que los bloques con espesor menor a la *moda* aportan petróleo a la red de fracturas, es compensada por la lentitud con la que los bloques de matriz mayores a la *moda*, lado derecho de la parte naranja, aportan fluidos a la red de fracturas. Entonces si en el yacimiento sólo se tienen bloques de matriz de hasta 25 [ft] de espesor, las soluciones de Warren and Root y la propuesta van a ser muy similares.
- ∪ Para los casos cuyo espesor fue 50 y 100 [m], de acuerdo a la distribución lognormal se tuvo sólo un bloque de matriz por encima de los 25 [ft] de espesor,

y las respuestas obtenidas con los modelos de Warren and Root y el propuesto tuvieron una diferencia menor al 2% durante la simulación.

- ∪ Conforme se incrementa el espesor de la formación, la diferencia entre los dos modelos también lo hace, porque se incrementa el número de bloques por encima de los 25 [ft] de espesor, hasta que para el espesor de la formación de 250 [m] el modelo de Warren and Root sobreestima la producción acumulada de petróleo en un 10% durante los primeros 500 días de simulación.
- ∪ El modelo de Warren and Root no toma en cuenta el incremento en la probabilidad de ocurrencia de los bloques de matriz mayores a 25 [ft] (parte verde de la Fig. 6.15) al incrementarse el espesor de la formación, lo que provoca que se sobreestime la recuperación de petróleo, porque estos bloques tienen un gran volumen de petróleo almacenado y son los que más tardan en reaccionar antes los cambios de presión de las fracturas circundantes.
- ∪ En este caso  $\lambda_{ratio} = 13.8$ , cuanto más grande sea  $\lambda_{ratio}$ , la parte verde de la Fig. 6.15 será mayor porque la *moda* estimada será menor, ocasionando un incremento en la proporción de petróleo en los bloques de matriz cuya *CDF* sea mayor al doble de la *moda* estimada, lo cual retrasa la recuperación de petróleo porque entre más espesor tienen los bloques de matriz más tardan en reaccionar ante los cambios de presión en el sistema de fracturas, característica que no es tomada en cuenta por el modelo de Warren and Root, por lo tanto se sobreestimarán todavía más la producción acumulada de petróleo con el incremento de  $\lambda_{ratio}$ .

## 7. Conclusiones y Recomendaciones

El propósito de esta tesis ha sido el desarrollo de un procedimiento para estimar los parámetros del yacimiento, así como la función de densidad de probabilidad del tamaño de bloque de un yacimiento naturalmente fracturado, considerando una distribución lognormal del tamaño de los bloques de matriz.

Con base en la teoría y los resultados presentados, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- i. Se demostró que para tiempos cortos y largos, tomando en cuenta una distribución lognormal del tamaño de los bloques de matriz, el yacimiento se comporta como homogéneo.
- ii. Se muestran las ecuaciones y las soluciones para dos diferentes condiciones de frontera, no flujo y frontera a presión constante, así como frontera a presión constante considerando los efectos de daño y almacenamiento.
- iii. Se desarrolla un procedimiento para estimar parámetros del yacimiento de doble porosidad, con tamaño múltiple de bloque de matriz, a partir de pruebas de decremento o incremento de presión. También se muestra cómo obtener la función de densidad de probabilidad que define la variabilidad del tamaño de los bloques a lo largo del yacimiento, estos parámetros son la media,  $\mu_n$ , y la desviación estándar,  $\sigma$ , así como la relación de coeficientes de flujo interporoso,  $\lambda_{ratio}$ .
- iv. Se desarrolla un procedimiento para obtener el radio de investigación de la prueba de presión tomando en cuenta la variabilidad del tamaño de los bloques de matriz.
- v. En el yacimiento generalmente se tiene un predominio de los bloques pequeños por sobre los bloques de mayores dimensiones, por lo tanto, la distribución lognormal representa de mejor manera la disposición de los bloques de matriz a lo largo del yacimiento.
- vi. El ajuste final en el valle considerando una distribución lognormal del tamaño de los bloques de matriz, mejoró comparado con el obtenido con el modelo de Warren and Root, además de que puede obtenerse mayor información.
- vii. Se muestra cómo obtener el gasto petróleo por imbibición a un tiempo dado, así como la predicción del comportamiento de la producción de petróleo y el factor de recuperación considerando la variabilidad en el tamaño de los bloques de matriz y el modelo de Warren and Root.

- viii. Para tiempos cortos se tiene la mayor diferencia entre las soluciones para estimar la producción de petróleo, dado que en el modelo propuesto sí se toma en cuenta la probabilidad de existencia de los bloques que tienen un espesor por encima de la moda.
- ix. El número de coeficientes en el algoritmo de Stehfest no tuvo influencia en el caso del comportamiento infinito, mientras que para las dos condiciones de frontera mostradas, para evitar oscilaciones cuando comienzan a sentirse los efectos de las fronteras, se recomienda emplear seis coeficientes para el caso de un yacimiento finito y cuatro coeficientes para el caso de una frontera a presión constante.

Las recomendaciones para investigaciones futuras son:

- i. Buscar información y complementarla en lo posible, con el fin de hacer una aplicación en un caso de campo, del procedimiento para estimar los parámetros del yacimiento y la distribución del tamaño de los bloques de matriz.
- ii. Con los resultados, calcular el gasto por imbibición y el comportamiento de la producción de petróleo, corroborando la influencia que tienen los bloques con espesores por encima de la moda en la recuperación de petróleo de los bloques de matriz.
- iii. Desarrollar extensiones del modelo para incluir el análisis de pruebas de interferencia de presión.
- iv. Desarrollar extensiones del cálculo de la producción de petróleo por imbibición, analizando las condiciones bajo las cuales los efectos capilares y los gravitacionales no son despreciables.
- v. Realizar una comparación entre la forma de los valles generados por diferentes funciones de probabilidad, con el fin de que en un futuro se pueda identificar el tipo de distribución de los bloques de matriz que se tiene en el yacimiento, a partir de pruebas de presión.

# Nomenclatura

$A$	= Área del yacimiento
$B$	= Factor de volumen del petróleo
$b$	= Apertura de las fracturas
$C$	= Coeficiente de almacenamiento dimensional
$CDF$	= Función de densidad acumulativa, Ec. 3.21
$C^*$	= Constante de proporcionalidad
$C_1, C_2$	= Constantes de integración
$C_D$	= Coeficiente de almacenamiento adimensional
$c_m$	= Compresibilidad de la matriz
$c_t$	= Compresibilidad de la fractura
$d$	= Espaciamiento de las fracturas
$E_i$	= Función exponencial
$erf$	= Función error
$f(h)$	= Función de distribución del tamaño de bloque
$f(h_D)$	= Función de distribución del tamaño de bloque adimensional, Ec. 3.18
$g(s)$	= Función que describe la transferencia matriz-fractura
$h$	= Tamaño variable de los bloques de matriz
$h_D$	= Tamaño de bloque adimensional, Ec. 3.17
$h_f$	= Apertura de la fractura
$h_{WR}$	= Tamaño de bloque, considerando el modelo de Warren & Root
$h_{máx}$	= Espesor máximo de los bloques, Ec. 6.19
$h_{mín}$	= Espesor mínimo de los bloques, Ec. 6.20
$h_{ma}$	= Espesor de los bloques de matriz
$I_0(x)$	= Función modificada de Bessel, primer tipo, orden cero

$I_1(x)$	= Función modificada de Bessel, primer tipo, orden uno
$K_0(x)$	= Función modificada de Bessel, segundo tipo, orden cero
$K_1(x)$	= Función modificada de Bessel, segundo tipo, orden uno
$k_f$	= Permeabilidad del sistema de fracturas
$L$	= Longitud de las fracturas
$N$	= Volumen original de petróleo
$NB$	= Número de tamaños de bloques de matriz
$N_p$	= Volumen producido acumulado de petróleo, Ec. 6.28
$N_r$	= Volumen de petróleo recuperable de un bloque por el mecanismo de imbibición
$N_{r_{T_i}}$	= Petróleo recuperable de cada bloque de matriz de cierto tamaño
$n_{bl}$	= Número de bloques de matriz de cierto tamaño
$\overline{p_{Df}}$	= Presión adimensional en la fractura en el espacio de Laplace
$\overline{p_{wDf}}$	= Presión adimensional de las fracturas en el pozo, en el espacio de Laplace
$p_f$	= Presión del fluido en la fractura
$p_i$	= Presión inicial
$p_m$	= Presión del fluido en la matriz
$p_{Df}$	= Presión adimensional en la fractura, Ec. 3.7
$p_{Dm}$	= Presión adimensional en la matriz, Ec. 3.8
$Q(h)$	= Contribución de la matriz de tamaño $h$
$Q_m$	= Contribución acumulada de la matriz
$q$	= Producción de petróleo
$r$	= Coordenada radial
$r_e$	= Radio de drene dimensional

$r_w$	= Radio del pozo
$r_{eD}$	= Radio de drene adimensional, Pág.19
$S$	= Factor de daño
$S_o$	= Saturación de aceite en los bloques de matriz
$s$	= Variable temporal del espacio de Laplace
$s'$	= Variable temporal auxiliar en el espacio de Laplace
$t$	= Tiempo
$t_{frac}$	= Tiempo requerido para recuperar una fracción de petróleo, Ec. 6.24
$V_o$	= Volumen de petróleo producido mediante imbibición, Ec. 6.26
$\alpha$	= Constante de conversión de unidades
$\delta(h - H)$	= Función delta de Dirac
$\gamma$	= Constante exponencial de Euler
$\lambda$	= Coeficiente de flujo interporoso, Ec. 3.11
$\lambda_{WR}$	= Coeficiente de flujo interporoso del modelo de Warren & Root
$\lambda_{m\acute{a}x}$	= Coeficiente de flujo interporoso máximo, Ec. 3.13
$\lambda_{m\acute{i}n}$	= Coeficiente de flujo interporoso mínimo, Ec. 3.12
$\lambda_{ratio}$	= Relación de coeficientes de flujo interporoso, Pág. 11
$\mu$	= Viscosidad
$\mu_{ln}$	= Media del tamaño de bloque de matriz, Ec. 3.25
$\omega_f$	= Relación de almacenamiento del sistema de fracturas, Ec. 3.15
$\omega_m$	= Relación de almacenamiento de los bloques de matriz, Ec. 3.16
$\phi_f$	= Porosidad de la fractura
$\phi_m$	= Porosidad de la matriz
$\sigma$	= Desviación estándar del tamaño de bloque de matriz, Ec. 3.24



$\sigma_f$	=	Factor de forma
$\tau$	=	Tiempo al cual se produce $(1 - 1/e)$ veces el petróleo recuperable
$\Delta p$	=	Cambio de presión
$\Delta t$	=	Tiempo transcurrido
$\xi$	=	Coordenada normal a la interfaz matriz-fractura
$\xi_D$	=	Coordenada normal a la interfaz matriz-fractura adimensional, Ec. 3.19

# Bibliografía

- Abramowitz, M., Stegun, I.: "*Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*", 10<sup>th</sup> Printing, National Bureau of Standards Applied Mathematics, Series 55, Diciembre 1972.
- Aronofsky, J. S., Massé, L. y Natanson, S. G.: "A Model for the Mechanism of Oil Recovery from the Porous Matrix Due to Water Invasion in Fractured Reservoirs", Trans., AIME (1958) Vol. 213,17.
- Barenblatt, G.E., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N.: "Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks," *J. Appl. Math. Mech.* (1960) 24, 852-864.
- Belani, A.K.: "Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs," M. Sc. report, Stanford U., Agosto 1988.
- Belani, A.K. y Jaladi-Yazdi, Y.: "Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs", SPE 18171, presented at the 63<sup>rd</sup> Fall Technical Conference. Houston, TX, Octubre 1988.  
<http://dx.doi.org/10.2118/18171-MS>
- Bourdet, D., y Gringarten, A.C.: "Determination of Fissure Volume and Block Size in Fractured Reservoirs by Type-Curve Analysis," paper SPE 9293 presented at the 55<sup>th</sup> Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, Septiembre 21-24, 1980.  
<http://dx.doi.org/10.2118/9293-MS>
- Bourdet, D., Ayoub, J.A. y Pirard, Y.M.: "Use of Pressure Derivative in Well-Test Interpretation," *SPEFE* (Junio 1989) 293-302.
- Bourdet, D.: *Well Test Analysis: The Use of Advanced interpretation Models*, 1<sup>st</sup> Edition, Elsevier (2002).
- Cinco-Ley, H., Samaniego-V., F. y Kucuk, F.J.: "The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoirs with Multiple Block Size," artículo SPE 14168, presentado en la 60<sup>th</sup> Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, NV, Sept. 22-25, 1985.  
<http://dx.doi.org/10.2118/14168-MS>
- Cinco-Ley, H. y Menh, H.Z.: "Pressure Transient Analysis of Wells with Finite Conductivity Fractures in Double Porosity Reservoirs," SPE 18172, presentado en la 63<sup>rd</sup> Annual Fall Meeting, Las Vegas, NV, 1988.  
<http://dx.doi.org/10.2118/18172-MS>
- Cinco-Ley, H.: "Well-Test Analysis for Naturally Fractured Reservoirs," *JPT* (Enero 1996) 51-54.
- de Swaan-O., A.: "Analytical Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing," *SPEJ* (Junio 1976) 117-122.
- Escobar, F.H.: *Análisis Moderno de Presiones de Pozos*, 2003.

- Ezekwe, N.: *Petroleum Reservoir Engineering Practice*, 1<sup>st</sup> Edition, Pearson Education, Inc. (2011).
- Gale, J.E., Schaefer, R.A., Carpenter, A.B. y Herbert, A.: "Collection, Analysis and Integration of Discrete Fracture Data From the Monterey Formation for Fractured Reservoir Simulations,"SPE 22741, presentado en la 66<sup>th</sup> Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, TX, Oct. 6-9, 1991.  
<http://dx.doi.org/10.2118/22741-MS>
- Houzé, O.P., Horne, R. y Ramey, H.J. Jr.: "Infinite Conductivity Vertical Fracture in a Reservoir with Double Porosity Behavior,"*SPEFE* (Septiembre 1998) 510-518.
- Johns, R.T. y Jaladi-Yazdi, Y. "Comparison of Pressure Transient Response in Intensely and Sparsely Fractured Reservoirs,"SGP-TR-122 presentado en la 14<sup>th</sup> Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, Stanford, California, Enero 24-26, 1989.
- Kazemi, H.: "Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution,"*SPEJ* (Diciembre 1969) 451-62.
- Kazemi, H., Seth, M.S. y Thomas, G.W.: "The Interpretation of Interference Tests in Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution,"*SPEJ* (Diciembre 1969) 463-72.
- Mattax, C. C., KYTE, J. R.: "Imbibition Oil Recovery from Fractured, Water-Drive Reservoir", *SPEJ* (Jun. de 1962) 177-84.
- Mavor, M.J., Cinco-Ley, H.: "Transient Pressure Behaviour of Naturally Fractured Reservoirs,"Artículo SPE 7977 presentado en la 1979 SPE California Regional Meeting, Ventura, Abril 18-20.  
<http://dx.doi.org/10.2118/7977-MS>
- Najurieta, H.L.: "A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs,"*JPT* (Julio 1980) 1241-50.
- Nelson, R.A.: "Fractured Reservoirs: Turning Knowledge into Practice,"*JPT* (Abril 1987) 407-414.
- Odeh, A.S.: "Unsteady State Behaviour of Naturally Fractured Reservoirs,"*SPEJ* (Marzo 1965) 60-66.
- Reis, C.J.: "Effect of fracture spacing distribution on pressure transient response in naturally fractured reservoirs,"*J. Pet. Sci. Eng.* 20 (1998) 31-47.
- Rodríguez, N.R.: "Caracterización de Yacimientos de Doble Porosidad con Tamaño Múltiple de Bloques de Matriz,"M. Sc. report, U.N.A.M., Febrero 2000.
- Rouleau, A., Gale, J.E.: "Statistical Characterization of the Fracture System in the Stripa Granite, Sweden"*Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* 22 (6) (1985) 353-367.

Streltsova, T.D.: "Well Pressure Behaviour of a Naturally Fractured Reservoir," *SPEJ*  
(Octubre 1983) 769-80.

Warren, J.E. and Root, P.J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs," *SPEJ*  
(Septiembre 1963) 245-255.



# Apéndices

## A. Solución. Flujo matriz-fractura pseudo- estacionario

La ecuación de difusión de balance de masa para un sistema fracturado, puede escribirse como sigue:

$$\frac{k_f}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh , \quad \dots(A.1)$$

El flujo en la matriz, se define a continuación:

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \sigma_f \frac{k_m}{\mu} (p_f - p_m) , \quad \dots(A.2)$$

De la ley de Darcy en la interfaz matriz-fractura, se tiene la siguiente expresión:

$$Q(h) = \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} , \quad \dots(A.3)$$

**Condición inicial, (CI):**

$$p_f = p_m = p_i , \quad t = 0 . \quad \dots(A.4)$$

**Condición de frontera interna, (CFI):**

$$r \frac{\partial p_f}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = - \frac{q\mu}{2\pi k_f h} . \quad \dots(A.5)$$

**Condición de frontera externa, (CFE):**

$$p_f = p_m = p_i ; \quad r \rightarrow \infty ; \quad t > 0 . \quad \dots(A.6)$$

Para flujo pseudo-estacionario matriz-fractura, el gradiente de presión es constante en el espacio:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} = c(t) . \quad \dots(A.7)$$

Condiciones de Frontera:

$$p_m = p_f ; \quad \text{para } \xi = 0 .$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = 0 ; \quad \text{para } \xi = h .$$

Integrando dos veces la Ec. A.7 respecto a  $\xi$ :

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = c(t)\xi + A ,$$

$$p_m = \frac{1}{2}c(t)\xi^2 + A\xi + B ,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración.

Aplicando las condiciones de frontera, se obtiene:

$$B = p_f ; \quad A = -hc(t) .$$

Aplicando el teorema del valor medio de las integrales:

$$f(c) [b - a] = \int_a^b f(x)dx .$$

Promediando la expresión para  $p_m$ , desde 0 hasta  $h$ , se obtiene:

$$p_m(h - 0) = \int_0^h \left[ \frac{1}{2}c(t)\xi^2 + (-hc(t))\xi + p_f \right] d\xi ,$$

$$hp_m = \frac{1}{6}c(t)\xi^3 - \frac{1}{2}hc(t)\xi^2 + p_f\xi \Big|_0^h ,$$

$$p_m - p_f = \left[ \frac{h^2 - 3h^2}{6} \right] c(t) .$$

Finalmente

$$c(t) = \frac{3(p_f - p_m)}{h^2} .$$

Sustituyendo  $c(t)$  en la Ec. A.7, se obtiene:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} (p_m - p_f) , \quad \dots(A.8)$$

lo cual implica que  $\sigma_f = 3/h^2$ .

Escribiendo de forma adimensional la Ec. A.2, conjuntando y escribiendo de forma adimensional las Ecs. A.1 y A.3, se obtiene:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} f(h_D) d(h_D) , \quad \dots(A.9)$$

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{3\lambda}{\omega_m} (p_{Df} - p_{Dm}) . \quad \dots(A.10)$$

Escribiendo de forma adimensional la CI y las condiciones de frontera:

Condición inicial:

$$p_{Df} = p_{Dm} = 0 ; \quad r_D \rightarrow \infty ; \quad t_D = 0 .$$

Condición de frontera interna:

$$r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1 .$$

Condición de frontera externa:

$$p_{Df} = p_{Dm} = 0 ; \quad t_D > 0 .$$

Realizando la transformada de Laplace de las condiciones de frontera y la condición inicial:

CI:

$$\overline{p_{Df}} = \overline{p_{Dm}} = 0 .$$

CFI:

$$r_D \frac{d\overline{p_{Df}}}{dr_D} \Big|_{r_D=1} = -\frac{1}{s} .$$

CFE:

$$\overline{p_{Df}} = \overline{p_{Dm}} = 0 .$$

La transformada de Laplace de las Ecs. A.9 y A.10:

$$\frac{d^2 \overline{p_{Df}}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\overline{p_{Df}}}{dr_D} - s\omega_f \overline{p_{Df}} - \omega_m \int_{h_{ratio}}^1 s\overline{p_{Dm}} f(h_D) dh_D = 0 , \quad \dots(A.11)$$



$$\overline{p_{Dm}} = \frac{3\lambda}{s\omega_m + 3\lambda} \overline{p_{Df}} . \quad \dots(\text{A.12})$$

Sustituyendo la Ec. A.12 en la Ec. A.11, se obtiene:

$$\frac{d^2 \overline{p_{Df}}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\overline{p_{Df}}}{dr_D} - sg(s) \overline{p_{Df}} = 0 , \quad \dots(\text{A.13})$$

donde:

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{h_{ratio}}^1 \frac{3\lambda}{s\omega_m + 3\lambda} f(h_D) dh_D . \quad \dots(\text{A.14})$$

La Ec. A.13 es una ecuación paramétrica de Bessel, cuya solución es:

$$\overline{p_{Df}} = C_1 K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) + C_2 I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) . \quad \dots(\text{A.15})$$

Derivando la Ec. A.15, se obtiene:

$$\frac{d\overline{p_{Df}}}{dr_D} = -C_1 \sqrt{sg(s)} K_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) + C_2 \sqrt{sg(s)} I_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) . \quad \dots(\text{A.16})$$

Introduciendo la CFI, se obtiene:

$$C_1 \sqrt{sg(s)} K_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) - C_2 \sqrt{sg(s)} I_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) \Big|_{r_D=1} = \frac{1}{s} . \quad \dots(\text{A.17})$$

Introduciendo la CFE en la Ec. A.15, se obtiene:

$$C_1 K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) + C_2 I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) = 0 .$$

Se tiene que para  $r_D \rightarrow \infty$ ,

$$K_0(\infty) \rightarrow 0 ; \quad I_0(\infty) \rightarrow \infty .$$

Por lo tanto:

$$C_2 = 0 . \quad \dots(\text{A.18})$$

Sustituyendo la Ec. A.18 en la Ec. A.16, se obtiene:

$$C_1 \sqrt{sg(s)} K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) = \frac{1}{s} ,$$

$$C_1 = \frac{1}{s \sqrt{sg(s)} K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right)} . \quad \dots(\text{A.19})$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. A.19 y A.18 en la Ec. A.15, la presión en el pozo está dada por la Ec. A.20:

$$\overline{p_{Df}} = \frac{K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right)}{s \sqrt{sg(s)} K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right)} \Big|_{r_D=1} . \quad \dots(\text{A.20})$$

Haciendo un cambio de diferencial en la Ec. A.14, se obtiene:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\sqrt{\frac{s\omega_m}{3\lambda^3}}}{1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda}} f(h_D) d\lambda , \quad \dots(\text{A.21})$$

donde  $f(h_D)$  es cualquier función de probabilidad que se desee emplear.

Para el caso de una distribución lognormal:

$$f(h_D) = \frac{1}{h_D \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(h_D) - \mu_{ln}]^2}{2\sigma^2} \right\} , \quad \dots(\text{A.22})$$

donde:

$$h_D = \frac{\sqrt{\frac{k_m r_w^2}{k_f \lambda}}}{h_{\max}} \quad \Rightarrow \quad h_D = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} .$$

Finalmente la Ec. A.14, para una distribución lognormal,  $g(s)$  puede expresarse:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\sqrt{\frac{s\omega_m}{3\lambda^3}}}{1 + \frac{s\omega_m}{3\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \right) - \mu_{ln} \right]^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda . \quad \dots(\text{A.23})$$



## B. Solución. Flujo matriz-fractura transitorio

La ecuación de difusión para un sistema fracturado, puede escribirse como sigue:

$$\frac{k_f}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh . \quad \dots(B.1)$$

Se resuelve con las mismas condiciones inicial y de frontera empleadas para la transferencia matriz-fractura pseudo-estacionaria, Ecs. A.4, A.5 y A.6.

$$Q(h) = - \frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{interfase} . \quad \dots(B.2)$$

Ecuación de balance de materia:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} . \quad \dots(B.3)$$

Obteniendo la derivada respecto de  $\xi$ , sabiendo que  $\frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = h$ :

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = \left( - \frac{q\mu}{2\pi k_f h_f} \right) \left( \frac{1}{h} \right) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} , \quad \dots(B.4)$$

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = \left( - \frac{q\mu}{2\pi k_f h_f h^2} \right) \frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} . \quad \dots(B.5)$$

Escribiendo en forma adimensional y conjuntando las Ecs. B.1 y B.2:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \int_{h_{ratio}}^1 \lambda \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) dh_D . \quad \dots(B.6)$$

Escribiendo de forma adimensional la Ec. B.3:

$$\frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\omega_m}{\lambda} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} . \quad \dots(B.7)$$

Haciendo la transformada de Laplace de las Ecs. B.6 y B.7:

$$\frac{d^2 \overline{p_{Df}}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \overline{p_{Df}}}{dr_D} - s \omega_f \overline{p_{Df}} + \int_{h_{ratio}}^1 \lambda \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} f(h_D) dh_D = 0 , \quad \dots(B.8)$$

$$\frac{d^2 \overline{p_{D_m}}}{d\xi_D^2} = \frac{s\omega_m}{\lambda} \overline{p_{D_m}} . \quad \dots(B.9)$$

Resolviendo la Ec. B.9, con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \overline{p_{D_m}} &= \overline{p_{D_f}} ; & \xi_D &= 0 , \\ \frac{d\overline{p_{D_m}}}{d\xi_D} &= 0 ; & \xi_D &= 1 . \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\left. \frac{d\overline{p_{D_m}}}{d\xi_D} \right|_{\xi_D=0} = -\overline{p_{D_f}} \sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}} \tanh\left(\sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}}\right) . \quad \dots(B.10)$$

Sustituyendo la Ec. B.10 en la Ec. B.8, se obtiene:

$$\frac{d^2 \overline{p_{D_f}}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\overline{p_{D_f}}}{dr_D} - sg(s) \overline{p_{D_f}} = 0 , \quad \dots(B.11)$$

donde:

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{h_{ratio}}^1 \sqrt{\frac{\lambda}{s\omega_m}} \tanh\left(\sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}}\right) f(h_D) dh_D . \quad \dots(B.12)$$

Resolviendo la Ec. B.11, se obtiene:

$$\overline{p_{D_f}} = \frac{K_0\left(\sqrt{sg(s)}r_D\right)}{s\sqrt{sg(s)}K_1\left(\sqrt{sg(s)}\right)} \Big|_{r_D=1} . \quad \dots(B.13)$$

Realizando un cambio de diferencial se llega a:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}}\right) f(\lambda) d\lambda . \quad \dots(B.14)$$

Finalmente la Ec. B.15, para el caso de una distribución lognormal,  $g(s)$ , puede expresarse:

$$\begin{aligned} g(s) &= \omega_f + \\ &+ \frac{\omega_m \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{s\omega_m}}}{2} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{s\omega_m}{\lambda}}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}}\right) - \mu_n\right]^2}{2\sigma^2}\right\} d\lambda . \quad \dots(B.15) \end{aligned}$$

## C. Solución. Yacimiento finito (cerrado en la frontera externa)

Se consideran la misma ecuación de difusión, condición inicial y condición de frontera interna presentadas en el Apéndice A.

**Condición de frontera externa, (CFE):**

$$\frac{\partial p_f}{\partial r}(r_e, t) = 0 . \quad \dots(\text{C.1})$$

Expresando de forma adimensional la Ec. C.1, se obtiene:

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D}(r_{e_D}, t_D) = 0 . \quad \dots(\text{C.2})$$

Realizando la transformada de Laplace de la Ec. C.2, se obtiene:

$$\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D}(r_{e_D}, s) = 0 . \quad \dots(\text{C.3})$$

Introduciendo la CFE en la Ec. A.16, se obtiene:

$$-C_1 \sqrt{sg(s)} K_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) + C_2 \sqrt{sg(s)} I_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) = 0 .$$

Por lo tanto:

$$C_1 = C_2 \frac{I_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{K_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})} . \quad \dots(\text{C.4})$$

Introduciendo la CFI, sustituyendo la Ec. C.4 en la Ec. A.17, se obtiene:

$$C_2 \frac{I_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{K_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})} \sqrt{sg(s)} K_1(\sqrt{sg(s)}) - C_2 \sqrt{sg(s)} I_1(\sqrt{sg(s)}) = \frac{1}{s} .$$

Despejando  $C_2$ , se obtiene:

$$C_2 = \frac{K_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{s \sqrt{sg(s)} \left[ I_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) K_1(\sqrt{sg(s)}) - I_1(\sqrt{sg(s)}) K_1(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) \right]} . \quad \dots(\text{C.5})$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$C_1 = \frac{I_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right)}{s \sqrt{sg(s)} \left[ I_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) - I_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) \right]} \cdot \dots (C.6)$$

Sustituyendo las Ecs. C.5 y C.6 en la Ec. A.15, se obtiene:

$$\overline{p_{Df}}(r_{e_D}, s) = \frac{I_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) + I_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right)}{s \sqrt{sg(s)} \left[ I_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) - I_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) \right]} \cdot \dots (C.7)$$

Donde la  $g(s)$ , está definida por las Ecs. A.23 y B.15, para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente.

## D. Solución. Frontera a presión constante

Se consideran la misma ecuación de difusión, condición inicial y condición de frontera interna presentadas en el Apéndice A.

**Condición de frontera externa, (CFE):**

$$\frac{\partial p_f}{\partial r}(r_e, t) = p_i . \quad \dots(D.1)$$

Expresando de forma adimensional la Ec. D.1, se obtiene:

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D}(r_{e_D}, t_D) = 0 . \quad \dots(D.2)$$

Realizando la transformada de Laplace de la Ec. D.2, se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D}(r_{e_D}, s) = 0 . \quad \dots(D.3)$$

Introduciendo la CFE en la Ec. A.15, se obtiene:

$$C_1 \sqrt{sg(s)} K_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) + C_2 \sqrt{sg(s)} I_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) = 0 .$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -C_2 \frac{I_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{K_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})} . \quad \dots(D.4)$$

Introduciendo la CFI, sustituyendo la Ec. D.4 en la Ec. A.17, se obtiene:

$$-C_2 \frac{I_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{K_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})} \sqrt{sg(s)} K_1(\sqrt{sg(s)}) - C_2 \sqrt{sg(s)} I_1(\sqrt{sg(s)}) = \frac{1}{s} .$$

Despejando  $C_2$ , se obtiene:

$$C_2 = \frac{-K_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{s \sqrt{sg(s)} \left[ I_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) K_1(\sqrt{sg(s)}) + I_1(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) \right]} . \quad \dots(D.5)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$C_1 = \frac{I_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D})}{s \sqrt{sg(s)} \left[ I_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) K_1(\sqrt{sg(s)}) + I_1(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)} r_{e_D}) \right]} . \quad \dots(D.6)$$



Sustituyendo las Ecs. D.5 y D.6 en la Ec. A.15, se obtiene:

$$\overline{p_{Df}}(r_{e_D}, s) = \frac{I_0(\sqrt{sg(s)}r_{e_D}) K_0(\sqrt{sg(s)}) - I_0(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)}r_{e_D})}{s\sqrt{sg(s)} \left[ I_0(\sqrt{sg(s)}r_{e_D}) K_1(\sqrt{sg(s)}) + I_1(\sqrt{sg(s)}) K_0(\sqrt{sg(s)}r_{e_D}) \right]} \dots (D.7)$$

Donde la  $g(s)$ , está definida por las Ecs. A.23 y B.15, para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente.

## E. Solución. Frontera a presión constante, considerando daño y almacenamiento

Se consideran la misma ecuación de difusión y condición inicial presentadas en el Apéndice A.

**Condición de frontera interna, (CFI):**

$$q = C \left( \frac{dp_{wf}}{dt} \right) - \frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right)_{r=r_w} , \quad \dots(\text{E.1})$$

$$p_{wf} = \left[ p_f - S \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) \right]_{r=r_w} . \quad \dots(\text{E.2})$$

**Condición de frontera externa, (CFE):**

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} (r_e, t) = p_i . \quad \dots(\text{E.3})$$

Expresando de forma adimensional las Ecs. E.1 y E.2, se obtiene:

$$C_D \left[ \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - S r_D \frac{\partial}{\partial t_D} \left( \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1} - \left( r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 , \quad \dots(\text{E.4})$$

donde:

$$C_D = \frac{C}{2\pi h \phi c_t r_w^2} , \quad \dots(\text{E.5})$$

$$p_{w_{Df}} = \left[ p_{Df} - S r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} . \quad \dots(\text{E.6})$$

Expresando de forma adimensional la Ec. E.3, se obtiene:

$$\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} (r_{e_D}, t_D) = 0 . \quad \dots(\text{E.7})$$

Realizando la transformada de Laplace de las Ecs. E.4 y E.6, se obtiene:

$$s C_D \overline{p_{Df}} - (C_D S s + 1) \left. \frac{d\overline{p_{Df}}}{dr_D} \right|_{r_D=1} = \frac{1}{s} , \quad \dots(\text{E.8})$$

$$\overline{p_{w_{Df}}} = \left( \overline{p_{Df}} - S r_D \frac{d\overline{p_{Df}}}{dr_D} \right)_{r_D=1} . \quad \dots(\text{E.9})$$

Realizando la transformada de Laplace de la Ec. E.7, se obtiene:

$$\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} (r_{e_D}, s) = 0 . \quad \dots(\text{E.10})$$

Introduciendo la CFI (Ec. E.8) en las Ecs. A.15 y A.16, se obtiene:

$$C_1 \left[ sC_D K_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) + \sqrt{sg(s)} K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) (C_D Ss + 1) \right] + \dots(E.11)$$

$$+ C_2 \left[ sC_D I_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) - \sqrt{sg(s)} I_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) (C_D Ss + 1) \right] = \frac{1}{s} .$$

Introduciendo la CFE en la Ec. A.15, se obtiene:

$$C_1 \sqrt{sg(s)} K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) + C_2 \sqrt{sg(s)} I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) = 0 .$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -C_2 \frac{I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right)}{K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right)} . \dots(E.12)$$

Sustituyendo la Ec. E.12 en la Ec. E.11, se obtiene:

$$C_2 = \frac{-K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right)}{sD} , \dots(E.13)$$

donde:

$$D = (C_D Ss + 1) \left[ \sqrt{sg(s)} I_0 \left( r_{e_D} \sqrt{sg(s)} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) + \sqrt{sg(s)} I_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) \right] +$$

$$+ sC_D \left[ K_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) - K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) I_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) \right]$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$C_1 = \frac{I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right)}{sD} . \dots(E.14)$$

Sustituyendo las Ecs. E.14 y E.13 en la Ec. A.15, se obtiene:

$$\overline{p_{Df}} = \frac{I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) - I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_D \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right)}{sD} . \dots(E.15)$$

Finalmente sustituyendo la Ec. E.15 en la Ec. E.9, se obtiene:

$$\overline{p_{w_{Df}}}(r_{e_D}, s) = \frac{A}{sD} , \dots(E.16)$$

donde:

$$A = I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) - I_0 \left( \sqrt{sg(s)} \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) + \\ + S \sqrt{sg(s)} \left[ I_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) K_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) + I_1 \left( \sqrt{sg(s)} \right) K_0 \left( \sqrt{sg(s)} r_{e_D} \right) \right] .$$

Donde la  $g(s)$ , está definida por las Ecs. A.23 y B.15, para flujo matriz-fractura pseudo-estacionario y transitorio, respectivamente.