



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRAZAS PARCIALES EN SISTEMAS RELATIVISTAS CON
GRADO DE LIBERTAD INTERNO EN MECÁNICA CUÁNTICA:
DISCUSIÓN Y EJEMPLOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:
GIBRAN DAVID VALDÉS RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CARLOS PINEDA



CIUDAD UNIVERSITARIA
CIUDAD DE MÉXICO

2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Valdés
Ramírez
Gibran David
56621128
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
306234606

2. Datos del tutor

Dr.
Carlos Francisco
Pineda
Zorrilla

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Erick Leonardo
Patiño
Jaidar

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Saúl Noé
Ramos
Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dra.
Andrea
Valdés
Hernández

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Eduardo
Nahmad
Achar

7. Datos del trabajo escrito

Trazas parciales en sistemas relativistas con grado de libertad interno en mecánica
cuántica: discusión y ejemplos
67 p
2017

*Es mejor que el mundo se pierda por causa de la verdad
a que se salve por la mentira.*

N. CASANSKIS

Agradecimientos

Esta tesis es resultado de un largo camino que llegué a pensar interminable. Así es, entre la dificultad del tema aquí estudiado, mi desinterés y mis muchas otras actividades que ocupaban mi tiempo de forma constante parecía que este trabajo nunca vería la luz. Sin embargo, gracias a que hice un esfuerzo constante, que variaba de intensidad con el tiempo pero que nunca se detuvo por completo, y gracias a un conjunto de personas que nunca me abandonaron y me brindaron la más valiosa ayuda pude terminarlo.

En primer lugar quiero agradecer a mi padre por siempre brindarme su apoyo incondicional, por posibilitarme la mejor educación que pude haber tenido y deseado y sobre todo por siempre impulsarme a terminar todo lo que empiezo. También quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Carlos Pineda, especialmente por todo lo que me ha enseñado, por confiar siempre en mí, ser muuuy paciente y darme la oportunidad de acabar este trabajo al ritmo que necesitaba para cumplir con mis otras obligaciones. Otra persona que merece aquí una mención especial es mi gran amigo Claudio, que conocí como mi ayudante de mecánica vectorial, él siempre, desde entonces, me ha brindado la más desinteresada ayuda en todo lo que se refiere a los terrenos espinosos de la física, años y años de preguntas, respuestas y sesiones de esclarecimiento que me ayudaron a lo largo de toda la carrera y particularmente en la elaboración de esta tesis. Sin la ayuda de Claudio mi camino en la física definitivamente hubiera sido diferente. Por último quiero agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado de una u otra manera en este proceso, no los menciono individualmente en esta sección para no hacerla demasiado larga, pero sin duda me encargaré de llegar el agradecimiento de forma personal.

Agradezco los apoyos brindados por Conacyt CB 153190 y DGAPA-IN-111015.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Grupo de Poincaré	5
2.1.1. Grupo de Poincaré y grupo propio ortócrono de Lorentz	6
2.1.2. Transformación de los estados	9
2.1.3. Rotaciones de Wigner	10
2.1.4. Interpretación de las rotaciones de Wigner	13
2.2. Operador de densidad	15
2.2.1. Definición y propiedades	16
2.3. Operador de densidad y matrices de Pauli	19
2.4. Entropía de von Neumann	21
3. Traza parcial en mecánica cuántica para sistemas relativistas	23
3.1. Traza parcial: definición y propiedades	23
3.2. Empleo tradicional de la traza parcial en mecánica cuántica	26
3.3. Ejemplos del uso de traza parcial en sistemas relativistas	27
3.3.1. Estado gaussiano de momento	28
3.3.2. Transformación y cálculo de la entropía von Neumann	31
3.3.3. Estado tipo 'gato de Schrödinger'	36
4. Discusión del empleo de la traza parcial para sistemas relativistas en mecánica cuántica.	42

4.1. Problemas del empleo de la traza parcial para sistemas relativistas	43
4.2. Posibles soluciones al problema de la traza parcial	48
5. Conclusiones	52
A. Rotaciones de Wigner en su representación de 2×2	55

Trazas parciales en sistemas relativistas con grado de libertad interno en mecánica cuántica: discusión y ejemplos

por

Gibran David Valdés Ramírez

Resumen

En este trabajo se hace una investigación del empleo de la traza parcial en sistemas cuánticos relativistas. Este estudio es analítico y numérico. El sistema físico que se estudia es el de una partícula libre relativista con masa y espín $1/2$, observada desde distintos marcos de referencia. La partícula se analiza en dos casos: cuando se encuentra en un estado coherente y cuando se encuentra en un estado tipo gato de Schrödinger, esto es, una superposición de dos estados coherentes. Particularmente, se estudia el cambio de la función de onda que describe el estado de la partícula para marcos de referencia con diferentes velocidades, así como para estados descritos por funciones gaussianas con diferentes anchos. Para el estado gato se estudia igualmente el caso de observadores con diferentes velocidades y además el caso de diferentes separaciones entre las gaussianas del estado. También se calcula la entropía de von Neumann de espín en el marco de referencia de la partícula en reposo y en marcos de referencia con distintas velocidades para ambos estados, notando que el valor de la entropía de espín cambia con el cambio de observador. Al final de esta parte se hace una comparación entre los resultados obtenidos de los dos estados. Después se expone una discusión que ha surgido los últimos años, acerca de los problemas e inconsistencias que se manifiestan al utilizar la traza parcial para sistemas relativistas. Se muestran algunas alternativas para solucionar estas inconsistencias y por último se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Introducción

Hace algunas décadas la teoría de la información surgió gracias al trabajo que el ingeniero electrónico y matemático Claude E. Shannon desarrolló en 1948 [1]. Con el desarrollo de este trabajo se pudo concluir que los procesos de transmisión de la información son procesos físicos, y por esto dichos procesos pueden ser cuantificados. La importancia de poder controlar los procesos físicos bajo los cuales la información se transmite fue evidente de inmediato y por supuesto dio pie a muchísimas aplicaciones. Al mismo tiempo la teoría de la mecánica cuántica tomaba lugar como una de las teorías más generales y por lo mismo más importantes de la física. Esto hizo que las tecnologías cuánticas avanzaran y, con las mismas, el rango de aplicación de la mecánica cuántica. Así, fue inevitable que eventualmente se buscara empatar la teoría de la información y la mecánica cuántica, ya que la primera había sido desarrollada en el contexto de la física clásica cuyos límites de aplicación habían sido rebasados a principios del siglo XX.

Surgió, entonces, la teoría de la información cuántica. Esta teoría básicamente estudia el procesamiento de la información con sistemas cuánticos. Esto a pesar de sonar simple es muy diferente a lo que se había estudiado antes en términos de la teoría clásica de la información, pues los sistemas cuánticos poseen características únicas que permiten el procesamiento y transmisión de la información de una manera completamente novedosa. De este modo aparecieron nuevas áreas de investigación como la computación cuántica y la criptografía cuántica, en donde nuevos protocolos de procesamiento de la información, como la codificación superdensa y la teleportación cuántica, que aprovechan el formalismo de la mecánica cuántica, fueron usados. Esto no sólo arrojó una nueva manera de procesar la información sino también una manera más

eficiente. En el campo de la computación cuántica se encontraron algoritmos que hacían tareas que ya hacen las computadoras clásicas, como las tareas de búsqueda, pero de manera mucho más eficiente; en el terreno de la criptografía cuántica se encontraron maneras de transmitir la información con un nivel de seguridad nunca igualado por la criptografía clásica.

Desde luego la historia no se acaba ahí, pues si se quiere entender el procesamiento de la información de la manera más general posible, es necesario estudiar los contextos físicos más generales. Hay que tomar en cuenta otra teoría además de la mecánica cuántica. Estoy hablando, por supuesto, de la teoría de la relatividad que formuló Albert Einstein en la primera mitad del siglo XX. El mundo no sólo es cuántico, también es relativista. Todos los procesos físicos, hasta donde sabemos, ocurren en el espacio-tiempo y en consecuencia están regidos por las leyes que la teoría relativista impone. Por lo mismo es necesario estudiar problemas de procesamiento de información cuántica en contextos relativistas, ya que además de lo mencionado, esto nos permite generalizar el conocimiento que tenemos acerca del procesamiento de la información y así avanzar en las siguientes direcciones:

1. Poder hacer experimentos de transmisión de información cuántica en donde los efectos relativistas del problema no sean despreciables.
2. Entender con mayor profundidad todos los conceptos y problemas que surgen con la teoría de la información cuántica, la mecánica cuántica por sí sola y la relatividad.
3. Como consecuencia del punto 2, abordar problemas abiertos en otras áreas.

En la actualidad se han alcanzado las condiciones técnicas para poder hacer experimentos de información cuántica en condiciones relativistas (como transmitir información cuántica o qubits entre un satélite en órbita y un laboratorio en la Tierra). Se han encontrado propiedades nuevas y sorprendentes de los procesos ya conocidos en información cuántica “clásica” cuando son estudiados en contextos relativistas (partículas a altas velocidad, marcos de referencia no inerciales y altas energías en donde el número de partículas no es fijo) y además se han dado nuevas respuestas a problemas abiertos en áreas como la cosmología. Por todo esto este campo ha llamado la atención de la comunidad científica. Prueba de ello es que recientemente se han estado publicando muchos trabajos (véanse [2] y [3] y los trabajos que citan) en lo que ahora se conoce como información cuántica relativista o RQI (por sus siglas en inglés).

Como mencioné antes, en RQI hay problemas de distintos tipos que se abordan con herramientas diferentes, como es el caso de los problemas donde la velocidad del sistema en cuestión es alta pero la energía involucrada es lo suficientemente pequeña como para que el número de partículas se quede fijo. En este caso, usualmente se utiliza el formalismo del grupo propio ortócrono de Poincaré y su representación en el espacio de Hilbert, formalismo que desarrolló Wigner [4]. También está el caso en el que las energías involucradas en el problema son muy altas y el número de partículas cambia. Entonces hay que usar toda la maquinaria del formalismo de la teoría cuántica de campos. En este trabajo estudiamos y discutimos problemas relativos al primer caso. De hecho, el sistema físico en el cual nuestro análisis se centra es el de una partícula relativista, masiva y con espín $1/2$.

Este trabajo tiene la siguiente estructura: en el capítulo 2 discutiré las herramientas teóricas que se necesitan para abordar los problemas pertenecientes a los sistemas cuánticos donde el número de partículas se queda fijo y las velocidades son altas (relativistas). En particular, se estudia el grupo de Poincaré, el cual proporciona una representación irreducible en el espacio de Hilbert que permite efectuar transformaciones a estados de sistemas cuánticos relativistas para ser analizados en sistemas de referencia inerciales distintos. El estudio de estas transformaciones nos conduce a las rotaciones de Wigner. Estas rotaciones son analizadas y su interpretación física es discutida. Por último, en este capítulo se presenta el formalismo de la traza parcial y cómo se utiliza ésta en mecánica cuántica no relativista.

El capítulo 3 comienza con el estudio del empleo de la traza parcial en sistemas relativistas. Posteriormente, se pasa a discutir un par de ejemplos concretos de sistemas físicos que se estudian analíticamente y numéricamente con los formalismos del grupo de Poincaré y la traza parcial, expuestos en el capítulo 2, inspirándonos en [5]. Consideramos un estado coherente en representación de momento y un estado tipo Schrödinger, de dos gaussianas, también en representación de momento. Estos estados representan a la partícula relativista, masiva y con espín $1/2$ que indiqué anteriormente. En este mismo capítulo se muestran los resultados de este estudio. Encontramos que, para diferentes sistemas de referencia inerciales (SRI), hay diferencias en la estructura de la función de onda del estado físico en cuestión. También se calcula la entropía de von Neumann de espín de la partícula en los dos estados referidos con anterioridad. El resultado es que para distintos SRI la entropía es diferente. De hecho, la entropía aumenta

con el aumento de la velocidad del SRI en el que se mide.

En el capítulo 4 se expone una discusión que se ha suscitado los últimos años en el área de la RQI. Esta discusión gira entorno al formalismo de la traza parcial, que en este trabajo se expone y se utiliza en los capítulos 2 y 3, respectivamente. Parece que utilizar la traza parcial en un sistema cuántico compuesto dentro de un contexto relativista lleva a inconsistencias inevitables, que nos guían a concluir que la utilización de este formalismo se puede estar mal usando. Esto ha provocado que diferentes descripciones y soluciones al problema mencionado vean la luz. Esta discusión de ninguna manera está concluida, y aun no queda claro cual es el camino a seguir para solucionar las inconsistencias que surgen cuando se emplea la traza parcial de la manera en que se ha empleado en diferentes trabajos de investigación, incluida, claro está, la presente tesis. Por lo cual, considerando que este trabajo se vería incompleto sin hablar de este problema y el hecho de que la solución definitiva al mismo no ha sido establecida aún, se decidió incluir en el capítulo 4 un planteamiento detallado de las inconsistencias físicas que la utilización de la traza parcial acarrea en el estudio de los sistemas físicos de nuestro interés, además de una breve descripción de algunas posibles soluciones propuestas en los últimos años, solamente para dar un panorama general del estado de las cosas en la actualidad. Después de esto, considerando que se mostró, de manera general, el tratamiento del uso de la traza parcial para los sistemas físicos mencionados se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo voy a dar un repaso breve de las herramientas teóricas que se necesitan para estudiar los sistemas físicos que se analizarán en el presente trabajo. Se presentará y discutirá el grupo de Poincaré como una herramienta útil para caracterizar estados de sistemas cuánticos en contextos relativistas, especialmente aquellos estados correspondientes a una partícula masiva con un grado de libertad discreto. Así, después de que sean descritos los estados cuánticos que estudiaremos, se presentarán las transformaciones de Poincaré. Estas transformaciones se aplican a los estados de nuestro interés cuando dichos estados son examinados desde un marco de referencia inercial distinto al marco de referencia en el que fueron preparados. Luego se presentará de forma sucinta la definición y las propiedades de la matriz de densidad. En nuestro caso específico, esta herramienta matemática nos permitirá, a través de la aplicación de la traza parcial, describir el subsistema que nos interesa del estado cuántico que analizaremos; en otras palabras, utilizar la matriz de densidad nos posibilitará, trazando sobre el momento, estudiar sólo el grado de libertad discreto de la partícula en cuestión.

2.1. Grupo de Poincaré

*When you are with a nice girl an hour seems like a second.
When you sit on a red-hot cinder a second seems like an hour.
That's relativity.*
— ALBERT EINSTEIN

2.1.1. Grupo de Poincaré y grupo propio ortócrono de Lorentz

El principio de relatividad de Einstein establece que las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial. Este principio restringe las transformaciones que puede haber entre sistemas de referencia estableciendo así una simetría fundamental entre las tres dimensiones espaciales y la dimensión temporal, es decir si x^μ son las coordenadas en un sistema de referencia inercial (con x^1, x^2, x^3 las coordenadas espaciales, y $x^0 = t$, la coordenada temporal, ya que aquí como en el resto del trabajo usamos unidades donde $c = \hbar = 1$), entonces en cualquier otro sistema de referencia inercial las coordenadas x'^μ deben satisfacer

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2, \quad (2-1)$$

donde η es el *tensor métrico* cuya representación es la matriz diagonal con elementos $\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33} = -1$ y $\eta_{00} = 1$. A la ecuación 2-1 también se le conoce como *elemento de línea*. Cualquier transformación de la forma $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ que satisface la ecuación 2-1, es decir, que deje invariante al tensor métrico, es lineal:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (2-2)$$

Esto se puede ver si tomamos un cuadri-vector de momento k^μ de una partícula con masa en el marco de referencia que está en reposo

$$k^\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2-3)$$

En un marco de referencia que se mueve con respecto a la partícula el cuadri-vector de la misma sería

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}, \quad (2-4)$$

Donde p^μ se obtendría de aplicarle una transformación Λ_ν^μ a k^ν , es decir $p^\mu = \Lambda_\nu^\mu k^\nu$. Si usamos 2-1 entonces:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= k^\mu k^\nu \eta_{\mu\nu} & (2-5) \\
 &= k^\mu k^\nu (\Lambda_\mu^\rho \eta_{\rho\sigma} \Lambda_\nu^\sigma) \\
 &= p^\rho p^\sigma \eta_{\rho\sigma} \\
 &= E^2 - \mathbf{p}^2,
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{p} es la parte espacial de p^μ . A esta ecuación se le puede identificar como la ecuación relativista para la energía:

$$E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (2-6)$$

Según el desarrollo anterior, cualquier transformación Λ_ν^μ que satisfaga 2-1 cumplirá con el principio de relatividad y viceversa. Por lo tanto, Λ satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
 \eta_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu &= \eta_{\rho\sigma} \\
 \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \quad (2-7)$$

Esto significa que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (2-8)$$

donde Λ^T es la transpuesta de Λ . La representación matricial para Λ_ν^μ suele ser una matriz de cuatro por cuatro que usualmente se escribe de manera contraída así:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \mathbf{v}^T \\ -\gamma \mathbf{v} & I + \frac{\gamma-1}{v^2} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \end{pmatrix}, \quad (2-9)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es la velocidad relativa entre los sistemas de referencia. Estas transformaciones forman un grupo, llamado *grupo homogéneo de Lorentz*. Estas transformaciones son homogéneas en las coordenadas 4-dimensionales [6]. La homogeneidad del espacio-tiempo requiere también la invarianza de las leyes de la física bajo traslaciones

4-dimensionales $T(a)$, las cuales son transformaciones inhomogéneas

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (2-10)$$

El grupo completo de transformaciones $T(\Lambda, a)$ es una generalización del grupo homogéneo de Lorentz y es conocido como *grupo inhomogéneo de Lorentz* o *grupo de Poincaré*. El grupo de Poincaré es un grupo continuo que depende de diez parámetros; tres números para definir rotaciones en tres dimensiones, tres números para definir un boost, que son transformaciones de un sistema de referencia a otro con una velocidad relativa entre sí, y cuatro parámetros para definir las traslaciones en el espacio-tiempo. El significado físico de la transformación de Poincaré entonces es un cambio de sistema de referencia a otro que se encuentra rotado, trasladado y que se mueve a cierta velocidad constante con respecto al sistema original. El grupo de Poincaré tiene importantes subgrupos. Primero están los boosts, que son aquellas transformaciones que tienen $a^{\mu} = 0$ y claramente forman un subgrupo

$$T(\bar{\Lambda}, 0)T(\Lambda, 0) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, 0). \quad (2-11)$$

Éste es por supuesto el grupo mencionado con anterioridad, el grupo homogéneo de Lorentz. Para definir el siguiente subgrupo, primero es necesario notar que si usamos las ecuaciones 2-8 y sacamos el determinante por los dos lados

$$|\Lambda|^2 = 1, \quad (2-12)$$

se puede concluir que $|\Lambda| = \pm 1$. También podemos observar que si en la segunda ecuación en 2-7 se toman $\mu = \nu = 0$ tenemos

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \Lambda_0^i \Lambda_0^i = 1 + \Lambda_i^0 \Lambda_i^0, \quad (2-13)$$

con i sumando de 1 a 3. De la anterior ecuación se puede ver que $\Lambda_0^0 \geq 1$ ó $\Lambda_0^0 \leq -1$, entonces el subgrupo formado por las transformaciones de Lorentz (o Poincaré) con $|\Lambda| = 1$ y $\Lambda_0^0 \geq 1$ es llamado el grupo propio ortócrono de Lorentz, este subgrupo preserva la orientación del espacio y del tiempo. Como no es posible brincar de $\det \Lambda = 1$ a $\det \Lambda = -1$ o de $\Lambda_0^0 \geq 1$ a $\Lambda_0^0 \leq -1$ a

través de un cambio continuo de parámetros, entonces cualquier transformación que pueda ser obtenida desde la identidad (que tiene las propiedades de que $|\mathbb{1}| = 1$ y $\Lambda_0^0 = 1$) a través de un continuo cambio de parámetros tiene que pertenecer al grupo propio ortócrono de Lorentz ya que estas transformaciones necesariamente son aquellas que tienen $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda_0^0 \geq 1$.

En este trabajo nos enfocaremos en el grupo inhomogéneo propio ortócrono de Poincaré (Lorentz).

2.1.2. Transformación de los estados

Los únicos estados cuánticos que vamos a estudiar en el presente trabajo van a ser estados de una partícula masiva con grado de libertad interno discreto. La definición de dichos estados la haremos de acuerdo a su transformación bajo el grupo inhomogéneo propio ortócrono de Lorentz. Para el desarrollo de toda esta parte se consultó el libro de Weinberg [7].

Para una partícula libre los componentes del operador de cuádrimomento conmutan todos entre sí [7], por lo tanto, es natural expresar los estados físicos correspondientes a la partícula que estudiaremos como eigenestados del operador de cuádrimomento. Introducimos la etiqueta σ para denotar el grado discreto del estado de la partícula. Consideremos los estados $|p, \sigma\rangle$ con

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle. \quad (2-14)$$

Ahora, en el espacio de Hilbert, donde pertenecen los vectores que representan a los estados cuánticos, las traslaciones finitas están dadas por

$$U(1, a) = e^{-iP^\mu a_\mu}, \quad (2-15)$$

donde $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. Entonces por las ecuaciones 2-14 y 2-15 tenemos que los estados $|p, \sigma\rangle$ se transforman bajo traslaciones de la siguiente manera:

$$U(1, a) |p, \sigma\rangle = e^{-ip^\mu a_\mu} |p, \sigma\rangle. \quad (2-16)$$

Ahora, también tenemos que operando una transformación homogénea de Lorentz $U(\Lambda, 0)$ sobre

los estados $|p, \sigma\rangle$ nos queda:

$$P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) [U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)] |p, \sigma\rangle \quad (2-17)$$

$$= U(\Lambda) \Lambda_\nu^\mu P^\nu |p, \sigma\rangle \quad (2-18)$$

$$= U(\Lambda) \Lambda_\nu^\mu p^\nu |p, \sigma\rangle. \quad (2-19)$$

Como podemos ver de las anteriores ecuaciones, esta transformación produce un eigenvector del operador de cuádrimomento con eigenvalor Λp . Por lo tanto $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$ puede ser expresado como una combinación lineal de estados con etiqueta Λp , es decir

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (2-20)$$

2.1.3. Rotaciones de Wigner

Lo que sigue es encontrar una representación irreducible del grupo inhomogéneo de Lorentz para determinar la estructura de los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$. Para esto es importante notar que $p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ y el signo de p^0 son invariantes bajo todas las transformaciones propias ortócronas de Lorentz Λ_ν^μ . Por lo tanto, para cada valor de p^2 y cada signo de p^0 se puede escoger un cuádrimomento estándar, digamos k^μ , y expresar cada p^μ de esta clase como

$$p^\mu = L_\nu^\mu(p) k^\nu, \quad (2-21)$$

donde $L_\nu^\mu(p)$ (que ahora denotaremos L_p) es una transformación de Lorentz estándar que depende de p^μ , y también implícitamente de nuestra elección de k^μ . Resulta conveniente elegir a k^μ como el cuádrivedector de momento de una partícula con masa m en el marco de referencia en el que dicha partícula se encuentra en reposo. Y como se mostró en 2-3 éste k^μ tiene la siguiente forma:

$$k^\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2-22)$$

Ahora, para este k^μ particular se puede escoger convenientemente que las transformaciones de Lorentz L_p que sean boosts puros tengan la siguiente forma [7]:

$$L_p = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E & p^1 & p^2 & p^3 \\ p^1 & m + \frac{(p^1)^2}{m+E} & \frac{p^1 p^2}{m+E} & \frac{p^1 p^3}{m+E} \\ p^2 & \frac{p^2 p^1}{m+E} & m + \frac{(p^2)^2}{m+E} & \frac{p^2 p^3}{m+E} \\ p^3 & \frac{p^3 p^1}{m+E} & \frac{p^3 p^2}{m+E} & m + \frac{(p^3)^2}{m+E} \end{pmatrix}. \quad (2-23)$$

Estos boosts puros que nos llevan de k a p , que están parametrizados en términos de p , nos podrán ayudar más adelante en la construcción del grupo pequeño. Ahora, podemos definir los estados propios $|p, \sigma\rangle$ del operador de cuadri-momento de la siguiente manera

$$|p, \sigma\rangle := U(L_p) |k, \sigma\rangle. \quad (2-24)$$

Esta definición nos dice que la etiqueta σ , correspondiente al grado de libertad discreto de la partícula (por ejemplo el espín), no cambia después de un boost puro L_p , es decir, con la ecuación 2-24 sabemos como σ se relaciona con diferentes momentos conectados por una transformación L_p . La ecuación 2-24 nos permite operar una transformación arbitraria del grupo homogéneo de Lorentz $U(\Lambda)$ sobre uno de los estados base

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) U(L_p) |k, \sigma\rangle \quad (2-25a)$$

$$= U(L_{\Lambda p} L_{\Lambda p}^{-1}) U(\Lambda L_p) |k, \sigma\rangle \quad (2-25b)$$

$$= U(L_{\Lambda p}) U(L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p) |k, \sigma\rangle \quad (2-25c)$$

$$= U(L_{\Lambda p}) U(W(\Lambda, p)) |k, \sigma\rangle, \quad (2-25d)$$

donde $L_{\Lambda p}$ es el boost estándar que te lleva de k al momento Λp . La importancia del último paso radica en mostrar la transformación de Lorentz $L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p := W(\Lambda, p)$. Esta transformación deja a k invariante

$$W(\Lambda, p)k = L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p k = L_{\Lambda p}^{-1}(\Lambda p) = k. \quad (2-26)$$

A esta transformación $W(\Lambda, p)$ se le conoce como *rotación de Wigner*, correspondiente a la transformación Λ y al momento p . Estas rotaciones forman un subgrupo del grupo homogéneo de

Lorentz llamado *grupo pequeño*. Si en la ecuación 2-20 nos restringimos sólo a transformaciones que pertenezcan al grupo pequeño, entonces

$$U(W) |k, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W) |k, \sigma'\rangle. \quad (2-27)$$

Así, con la ecuación anterior, se puede ver que los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}(W)$ proporcionan una representación del grupo pequeño en el espacio del grado de libertad discreto σ . En vista de esto, cuando se toman en cuenta las rotaciones de Wigner y los boosts de Lorentz, la ecuación 2-20 adquiere la siguiente forma

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (2-28)$$

Con 2-24, 2-25d y esta última ecuación es claro que el problema que teníamos con las $C_{\sigma\sigma'}$ se reduce a encontrar representaciones irreducibles del grupo pequeño llamadas *matrices de Wigner*. A esto se le llama el método de representaciones inducidas. Como vimos, las transformaciones de Wigner no alteran el momento de la partícula, especialmente el momento tridimensional, es decir, las transformaciones de Wigner son transformaciones en el grupo homogéneo de Lorentz que no incluyen velocidades relativas entre los diferentes sistemas de referencia. Este subgrupo es el grupo de rotaciones en $SO(3)$. Así, las matrices de Wigner, en general, tienen la siguiente estructura

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & O & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (2-29)$$

En donde O es una matriz de rotación perteneciente al grupo $SO(3)$. Esta rotación puede ser definida por un vector normal \bar{n} sobre el cual la rotación es hecha y un ángulo Ω . Así dicha matriz puede ser expresada de la siguiente manera:

$$D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) = e^{-i\Omega \hat{J} \cdot \bar{n}} \quad (2-30)$$

donde la representación de $\hat{J} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ depende del espín de la partícula σ . En nuestro caso, el espín de la partícula a estudiar es $1/2$, la representación de los operadores \hat{J} para este espín son las matrices de Pauli $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ de 2×2 . Si expandimos en series la exponencial para el caso que vamos a estudiar en el presente trabajo, en donde $(\sigma \cdot n)^2 = 1$, entonces tenemos que la ecuación anterior puede adquirir la siguiente forma

$$D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) = \cos \Omega - i(\hat{\sigma} \cdot \bar{n}) \sin \Omega. \quad (2-31)$$

De esta manera se encontró la representación irreducible del grupo pequeño que es equivalente a una representación irreducible del grupo propio ortócrono de Lorentz. Esta matriz nos permite transformar la etiqueta discreta de los estados de una partícula masiva de acuerdo al sistema de referencia en el que escojamos analizar el sistema físico en cuestión.

2.1.4. Interpretación de las rotaciones de Wigner

Es de nuestro interés, para la discusión que se hará más adelante, que quede completamente claro cómo cambia $W(\Lambda, p)$ a la etiqueta σ , correspondiente al espín de una partícula masiva relativista. Para este propósito se hará una demostración que haga evidente el hecho de que las $W(\Lambda, p)$ rotan realmente el eje de cuantización del espín. Esta demostración seguirá lo hecho en [2]. Entonces, en el marco de referencia O_{rep} , en el que la partícula está en reposo, el espín está definido como el momento angular total de la misma. Consideremos una partícula con espín $1/2$. En el marco de referencia O_{rep} su cuadrimomento es $(m, 0)$, siendo m la masa de la partícula; Aquí un tratamiento no relativista, donde el espín y el momento pueden separarse, es correcto. Por lo tanto, en este marco de referencia el espín de la partícula puede describirse por el vector de Bloch. Entonces introduzcamos el concepto de *vector de polarización* o, para nuestro caso, que es el de una partícula con espín $1/2$, también puede ser llamado *vector de Bloch*. El vector de Bloch se define como

$$\mathbf{r} \equiv \langle \sigma | \hat{\sigma}_i | \sigma \rangle = (\langle \sigma | \hat{\sigma}_x | \sigma \rangle, \langle \sigma | \hat{\sigma}_y | \sigma \rangle, \langle \sigma | \hat{\sigma}_z | \sigma \rangle), \quad (2-32)$$

el cual representa el valor de expectación de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_i \equiv \hat{\sigma}_x \hat{x} + \hat{\sigma}_y \hat{y} + \hat{\sigma}_z \hat{z}$. Ahora, si sustituimos en 2-28 la etiquetas σ por la etiqueta \mathbf{r} , que contiene la misma información

para una partícula de espín 1/2, la rotación de Wigner cambiará el vector de Bloch como una rotación tres-dimensional $\mathbf{r}' = R(W)\mathbf{r}$. Así la ecuación 2-28 puede ser cambiada por

$$U(\Lambda) |p, \mathbf{r}\rangle = |\Lambda p, R(W)\mathbf{r}\rangle. \quad (2-33)$$

Para preparar el estado $|p, \mathbf{r}\rangle$ tendríamos que medir el momento de la partícula obteniendo eigenvalores p_i para cada componente, y medir la proyección del espín con un eje de cuantización en la dirección de \mathbf{r} en el marco de referencia de reposo de la partícula, obteniendo así el eigenvalor $+\hbar/2$ para la componente de espín. Para medir el espín de la partícula se puede usar un aparato tipo Stern-Gerlach con un campo magnético inhomogéneo que apunte en la dirección \mathbf{r} en el marco de referencia O_{rep} . Para encontrar el campo magnético en el marco de referencia donde la partícula está en reposo, se deben aplicar la correspondiente transformación de Lorentz al tensor electromagnético F que describe el campo del aparato en el marco de referencia O_{lab} del laboratorio [8]:

$$F_0 = L_p^{-1} F \tilde{L}_p^{-1}, \quad (2-34)$$

donde \tilde{L} es la transpuesta de L . Definiendo a $\mathbf{b}(F)$ como un vector unitario que apunta en la dirección del campo magnético del tensor electromagnético F tenemos que

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}(L_p^{-1} F \tilde{L}_p^{-1}). \quad (2-35)$$

Ahora pasemos a la descripción de la preparación del estado de la partícula por un observador que se encuentra en un marco de referencia O' obtenido de aplicar una transformación de Lorentz homogénea Λ al marco de referencia O_{lab} . El tensor electromagnético del aparato Stern-Gerlach en el marco de referencia O' es $\Lambda F \tilde{\Lambda}$ y el cuadrimomento de la partícula es Λp . Entonces, el vector de Bloch que apunta en la dirección del campo magnético en el marco de referencia de reposo de la partícula obtenido por el observador en O' es

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b}(L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda F \tilde{\Lambda} L_{\Lambda p}^{-1}). \quad (2-36)$$

Pero hay que recordar que las rotaciones de Wigner están definidas como se presenta en la ecuación 2-26 y si nosotros multiplicamos por la derecha ambos lados de esta ecuación por L_p^{-1}

obtenemos $WL_p^{-1} = L_{\Lambda p}^{-1}\Lambda$, entonces la ecuación 2-36 queda

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{b}(WL_p^{-1}F\tilde{L}_p^{-1}\tilde{W}) \\ &= R(W)\mathbf{r},\end{aligned}\tag{2-37}$$

que está en concordancia con 2-33. Así queda establecido que la rotación de Wigner es una consecuencia directa de la dependencia que tiene el eje de cuantización de medición del espín con el momento de la partícula, concluyendo así que diferentes observadores tienen diferentes ejes de cuantización para la medición.

2.2. Operador de densidad

*I worry that, especially as the Millennium edges nearer,
pseudo-science and superstition will seem year by year more tempting,
the siren song of unreason more sonorous and attractive.*
— CARL SAGAN, *The Demon-Haunted World* (1995)

En esta sección voy a introducir el concepto de *operador de densidad*, también llamado *matriz de densidad*, cuando la dimensión del espacio de Hilbert en el que se trabaja es finita. El operador de densidad es importante ya que toma el papel del vector de estado de un sistema cuántico, en el sentido de que dicho operador contiene toda la información accesible del sistema en cuestión. El operador de densidad puede ser una representación de un estado cuántico de un sistema particular en donde el vector de estado no es suficiente para describir todos los fenómenos que se ven ahí envueltos. Hay ocasiones en las que el sistema está acoplado a un ambiente sobre el cual no se tiene información o también está el caso en el que el sistema es una mezcla estadística de diferentes estados, en esos casos el vector de estado no es una buena representación y hay que hacer uso de la matriz de densidad. Estos objetos son muy importantes para las teorías de información y comunicación cuántica ya que recordemos que una de las funciones más importantes de cualquier teoría física que se tome como correcta es hacer predicciones de experimentos y desde esta visión, todo sistema cuántico está acoplado a un ambiente, digamos un aparato de medición, de modo que en todo contexto experimental realista debemos considerar sistemas cuánticos abiertos y describir nuestros estados de manera estadística.

2.2.1. Definición y propiedades

Supongamos que el sistema físico que queremos estudiar no puede ser representado por un vector-estado $|\psi\rangle$ ya que el sistema está constituido por una mezcla de estados $|\psi_i\rangle$ independientes entre sí. En este caso una variable dinámica A puede estar bien definida para cada uno de los estados de la mezcla y tener el valor A_i para el estado $|\psi_i\rangle$; sin embargo, el valor medio de esta variable sobre toda la mezcla depende de qué tanto contribuye o pesa cada uno de los estados, es decir, si al estado $|\psi_i\rangle$ le asignamos peso p_i , lo que equivale a suponer que del total de los estados que componen la mezcla, un estado o una fracción p_i de ellos se encuentra o ha sido preparada en el estado $|\psi_i\rangle$, el promedio de A sobre la mezcla la definimos como

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^N p_i A_i. \quad (2-38)$$

Entonces el sistema cuántico ya no queda caracterizado sólo por un vector, sino por un conjunto (finito o infinito) de vectores de estado y por un conjunto de pesos o probabilidades que especifican la aportación de cada uno de ellos a la mezcla. Este sistema cuántico se describe a través del *operador de densidad* o *matriz de densidad* ρ que se define de la siguiente manera

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2-39)$$

Como todos los operadores que consideramos son lineales, ahora las predicciones experimentales (ver ecuación 2-38) para un estado ρ se calculan de la siguiente manera:

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho A). \quad (2-40)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
Tr(\rho A) &= Tr\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A\right) & (2-41) \\
&= \sum_n \sum_i p_i \langle n | \psi_i\rangle \langle \psi_i | A | n\rangle \\
&= \sum_n \sum_i p_i \langle \psi_i | A | n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \\
&= \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i\rangle \\
&= \langle A \rangle.
\end{aligned}$$

Para pasar de la línea tres a la cuatro de la demostración anterior se usó la relación de completitud $\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}$. Si se quisiera saber cuál es la probabilidad de encontrar ρ en un estado particular, solamente usamos el operador de proyección correspondiente en lugar del operador A . Para que un operador de densidad ρ tenga validez física tiene que tener las siguientes propiedades:

1)

$$Tr(\rho) = 1. \quad (2-42)$$

La propiedad es consecuencia directa de que la suma de todos los pesos de probabilidad de los diferentes estados que integran a la mezcla es igual a 1, es decir, $\sum_i p_i = 1$. También nos podemos fijar en la ecuación 2-40, hacemos $A = 1$.

2)

$$\rho^\dagger = \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|\right)^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \rho. \quad (2-43)$$

Como por definición los p_i son positivos y reales entonces ρ automáticamente es autoadjunta.

3)

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in H. \quad (2-44)$$

Si se representa ρ de forma diagonal (lo cual es posible por la definición de ρ), queda una matriz donde todos los eigenvalores son no-negativos.

Todavía quedan dos puntos importantes por mencionar; qué son los *estados puros* y qué son los *estados mixtos*, que se pueden definir en términos de la matriz de densidad.

Un *estado puro* está representado por un estado donde en la ecuación 2-39 se encuentra una base de $|\psi_i\rangle$ en donde todas las p_i son cero excepto una. Si eso no sucede entonces se tiene un estado *mixto*. Aunque hay otros criterios que sirven para distinguir un estado mixto de uno puro, uno de mucha utilidad es el que sigue: si $Tr(\rho^2) < 1$ es un estado mixto y si $Tr(\rho^2) = 1$ entonces es un estado puro. La demostración de esto es sencilla. Para el caso del estado puro sabemos que $\rho = \rho^2$ y por 2-42 entonces se cumple que $Tr(\rho^2) = 1$. Si ρ representa un estado mixto entonces al menos dos p_i de 2-39 son distintas de cero. En general tenemos que $0 \leq p_i \leq 1$ para toda i , ya que son probabilidades. Como tenemos al menos dos p_i diferentes de cero entonces tenemos una desigualdad estricta $0 \leq p_i < 1$, para toda i , entonces $0 \leq p_i^2 < p_i$ y por lo tanto

$$0 < \sum_i p_i^2 < \sum_i p_i,$$

y eso significa que $Tr(\rho^2) < 1$, que es lo que se quería demostrar. Cabe decir que un estado mixto puede ser visto como una mezcla estadística de estados puros, sin embargo esta mezcla no es única, un mismo estado mixto puede ser representado por más de una mezcla de estados puros. Un ejemplo de esto es el siguiente: Tenemos dos bases ortonormales $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ y $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ que pertenecen al espacio de Hilbert $H = \mathbb{C}^2$, y además

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle), \\ |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle). \end{aligned}$$

Entonces las matrices de densidad

$$\begin{aligned} \rho_\psi &= \frac{1}{2} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \frac{1}{2} |\psi_2\rangle \langle \psi_2|, \\ \rho_\phi &= \frac{1}{2} |\phi_1\rangle \langle \phi_1| + \frac{1}{2} |\phi_2\rangle \langle \phi_2|, \end{aligned}$$

son iguales $\rho_\psi = \rho_\phi$. Por lo que así tenemos un estado mixto que es mezcla estadística de dos conjuntos de estados puros distintos al mismo tiempo.

2.3. Operador de densidad y matrices de Pauli

En esta sección demostraremos una relación muy importante que existe entre la matriz de densidad y las matrices de Pauli en su representación para partículas con espín 1/2. Dicha relación nos dará una representación nueva del operador de densidad ρ que nos será muy útil más adelante en el presente trabajo.

Primero presentaré a las matrices de Pauli en su representación para espín 1/2

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cuando a estas matrices se les multiplica por $\hbar/2$ entonces se vuelven los operadores de espín 1/2 para los ejes x , y y z , respectivamente. Estas matrices tienen diferentes propiedades que nos van a ayudar a demostrar la relación que estamos buscando. La primera propiedad importante de las matrices de Pauli es el producto entre dos de ellas [9]

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (2-45)$$

donde $i, j = x, y, z$, δ_{ij} es la delta de Kronecker, $\mathbb{1}$ es la matriz identidad de dos dimensiones y ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. De esta relación podemos deducir otras propiedades de las matrices de Pauli, por ejemplo, si $i = j$ entonces

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1}, \quad (2-46)$$

y para $i = x$ y $j = y$:

$$\begin{aligned}\sigma_x \sigma_y &= i \sigma_z, \\ \sigma_y \sigma_x &= -i \sigma_z.\end{aligned}$$

Otra propiedad importante es que la traza de las matrices de Pauli es nula

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0. \quad (2-47)$$

Y si sacamos la traza del producto de dos matrices de Pauli, usando todo lo anterior, tenemos

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}. \quad (2-48)$$

Ahora, una relación fundamental es que cualquier matriz Hermitiana de dos dimensiones (por ejemplo el operador de densidad ρ) se puede ver como una combinación lineal de la matriz identidad y las matrices de Pauli [9]

$$\rho = a\mathbb{1} + \sum_i b_i \sigma_i. \quad (2-49)$$

Para poder determinar completamente una matriz de densidad de dos dimensiones en términos de las matrices de Pauli falta saber el valor de los coeficientes a y b_i . El coeficiente a es fácil obtenerlo, se saca la traza de ρ y con ayuda de 2-42 y de 2-47 tenemos que

$$a = \frac{1}{2}. \quad (2-50)$$

Para sacar b_i primero multiplicamos 2-49 por σ_j , sacamos la traza de la expresión obtenida, y luego utilizamos 2-47 y 2-48 para obtener

$$\text{Tr}(\rho \sigma_j) = 2 \sum_j b_i \delta_{ij} = 2b_j. \quad (2-51)$$

Si se recuerdan las expresiones 2-40 y 2-32 entonces se hará claro que b_i es

$$b_i = \frac{\mathbf{r}_i}{2}, \quad (2-52)$$

donde \mathbf{r}_i es el vector de Bloch. Entonces, nos queda que la relación final entre el operador de

densidad y las matrices de Pauli es

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \sum_i \mathbf{r}_i \sigma_i \right). \quad (2-53)$$

2.4. Entropía de von Neumann

La entropía derivada de una distribución de probabilidad que describe un sistema físico es una medida de la incertidumbre asociada a tal distribución. En otras palabras, la entropía es una cantidad que nos indica cuánto conocemos de un sistema dado. Si muchas de las probabilidades del sistema tienen valores altos, tal que muchos de los posibles eventos tengan la misma probabilidad o casi la misma probabilidad de suceder, entonces la entropía será alta. Si la probabilidad de que ocurra un evento es casi uno, tal que los otros posibles eventos tengan probabilidad casi nula, entonces la entropía es pequeña. Este concepto también se puede extender a la mecánica cuántica. La cantidad física que mide la incertidumbre o la falta de conocimiento asociado a un sistema cuántico se llama *entropía de von Neumann*. La ecuación que nos ayuda a calcular la entropía de von Neumann es

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho), \quad (2-54)$$

donde ρ es la matriz de densidad asociada al sistema. El operador de densidad es un operador Hermitiano positivo y puede ser escrito de forma diagonal

$$\rho = \sum_i \rho_i |\rho_i\rangle \langle \rho_i|, \quad (2-55)$$

donde los estados $|\rho_i\rangle$ son los eigenvectores de ρ , y los ρ_i son los respectivos eigenvalores, los cuales suman uno. Cuando se escribe el operador de densidad como 2-55 entonces la entropía de von Neumann toma la siguiente forma:

$$S(\rho) = - \sum_i \rho_i \log \rho_i. \quad (2-56)$$

Si un sistema físico particular se encuentra en un estado puro entonces su matriz de densidad contiene sólo un elemento; todas las entradas de una matriz de densidad diagonalizada son cero excepto por un término que es igual a 1 en la diagonal principal. Entonces la entropía de von Neumann de un estado puro será cero:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \Leftrightarrow \quad S(\rho) = 0. \quad (2-57)$$

La entropía de von Neumann alcanza su máximo valor cuando la matriz de densidad representa a un estado que es lo más mixto posible. Esto sucede cuando un estado cuántico perteneciente a un espacio de dimensión d es representado por una matriz de densidad donde todos sus eigenvalores ρ_i valen lo mismo: $1/d$. En este caso la entropía vale $\log d$ y ρ es proporcional a la identidad:

$$\rho = \frac{1}{d}I \quad \Leftrightarrow \quad S(\rho) = \log d. \quad (2-58)$$

Otra cosa importante que hay que mencionar es que la entropía de von Neumann es invariante ante transformaciones unitarias:

$$S(U\rho U^\dagger) = S(\rho). \quad (2-59)$$

Es fácil ver esto, basta recordar que la entropía es sólo función de los eigenvalores de ρ y estos, a diferencia de los autovectores, son invariantes ante transformaciones unitarias.

Capítulo 3

Traza parcial en mecánica cuántica para sistemas relativistas

En este capítulo se introducirá el concepto de traza parcial y matriz de densidad reducida, así como sus propiedades y su utilidad en la mecánica cuántica. Posteriormente se usará esta herramienta para ver que un observador en otro marco de referencia puede ver un aumento de la entropía debido al enlazamiento entre los grados de libertad traslacionales e internos, mediante ejemplos analíticos y numéricos.

3.1. Traza parcial: definición y propiedades

Los estados que nos interesan en el presente trabajo son aquellos que representan sistemas compuestos, particularmente sistemas compuestos bipartitas. Los sistemas compuestos son aquellos que están asociados a dos o más espacios de Hilbert, es decir, si tenemos un sistema A asociado a un espacio de Hilbert $H_{(A)}$ y un sistema B asociado al espacio de Hilbert $H_{(B)}$, el sistema compuesto AB que consta de los subsistemas A y B está asociado al espacio de Hilbert $H_{(AB)}$, dado por el producto tensorial de $H_{(A)}$ y $H_{(B)}$:

$$H_{(AB)} = H_{(A)} \otimes H_{(B)}. \quad (3-1)$$

Así, el vector $|\psi\rangle$ perteneciente al espacio de Hilbert compuesto $H_{(AB)}$, que está conformado

por el vector $|\chi_{(A)}\rangle \in H_{(A)}$ y por el vector $|\phi_{(B)}\rangle \in H_{(B)}$, se puede ver de la siguiente forma:

$$|\psi\rangle = |\chi_{(A)}\rangle \otimes |\phi_{(B)}\rangle. \quad (3-2)$$

Este estado, resultado del producto tensorial de $|\chi_{(A)}\rangle$ y $|\phi_{(B)}\rangle$, también puede escribirse como $|\chi, \phi\rangle$ que es la notación que hemos estado utilizando en este trabajo. Es importante decir que no todos los estados de un sistema compuesto pueden ser escritos en términos de un producto tensorial de otros estados. A los estados que se pueden escribir de la forma de la ecuación 3-2 se les llama *estados separables*, y a los que no se pueden escribir como un producto tensorial se les llama *estados enredados*. Las propiedades de los estados enredados, como la aparición de un nivel de correlación imposible para los sistemas clásicos, son muy importantes para la mecánica cuántica y en particular la información cuántica y sus aplicaciones. Son estas propiedades, por ejemplo, lo que hace posible la teleportación cuántica. En este trabajo estudiaremos estados de sistemas físicos cuyos grados de libertad en principio son separables, es decir, que se pueden ver como 3-2. Sin embargo, en la sección 4 se verá que en contextos relativistas esto no es necesariamente cierto, por el hecho de que los grados de libertad de estos estados al ser vistos por un observador en otro marco de referencia ya no son separables, esto se debe a la naturaleza de las transformaciones relativistas de los estados.

Ahora, los operadores $C_{(AB)}$ en $H_{(AB)}$ son combinaciones lineales de productos tensoriales

$$C_{(AB)} = C_{(A)} \otimes C_{(B)} \quad (3-3)$$

donde $C_{(A)} : H_{(A)} \rightarrow H_{(A)}$ y $C_{(B)} : H_{(B)} \rightarrow H_{(B)}$, y la acción de $C_{(AB)}$ sobre los vectores pertenecientes a H_{AB} se define como

$$\begin{aligned} C_{(AB)} |\chi_{(A)}, \phi_{(B)}\rangle &= C_{(A)} \otimes C_{(B)} |\chi_{(A)}\rangle \otimes |\phi_{(B)}\rangle \\ &= C_{(A)} |\chi_{(A)}\rangle \otimes C_{(B)} |\phi_{(B)}\rangle. \end{aligned} \quad (3-4)$$

Hay ocasiones, como es el caso del análisis que se hará en este trabajo, que sólo nos interesa estudiar una de las partes del sistema compuesto pero la descripción de dicha parte no está completa a menos de que se tome en cuenta la parte del sistema que se quiere ignorar. Es

decir, digamos que nos interesa la información asociada al subsistema A y queremos descartar la información asociada al subsistema B . Eso significa que lo que nos interesa calcular es el valor esperado de los operadores de la forma $X = X_{(A)} \otimes \mathbb{1}$. Ahora, si nuestro estado está representado por una matriz de densidad entonces el valor esperado de X es

$$\begin{aligned}
\langle X \rangle &= Tr((X_{(A)} \otimes \mathbb{1})\rho) \\
&= \sum_{ij} \langle \psi_{i(A)}, \psi_{j(B)} | (X_{(A)} \otimes \mathbb{1})\rho | \psi_{i(A)}, \psi_{j(B)} \rangle \\
&= \sum_i \langle \psi_{i(A)} | X_{(A)} \left[\sum_j \langle \psi_{j(B)} | \rho | \psi_{j(B)} \rangle \right] | \psi_{i(A)} \rangle \\
&= \sum_i \langle \psi_{i(A)} | X_{(A)} \rho_{(A)} | \psi_{i(A)} \rangle
\end{aligned} \tag{3-5}$$

donde hemos usado bases ortonormales $|\psi_{i(A)}\rangle$ y $|\psi_{i(B)}\rangle$ en los subespacios H_A y H_B respectivamente. En la ecuación anterior definimos la traza parcial de ρ :

$$\begin{aligned}
\rho_{(A)} &= \sum_i \langle \psi_{i(B)} | \rho | \psi_{i(B)} \rangle \\
&= Tr_B(\rho)
\end{aligned} \tag{3-6}$$

donde Tr_B es la traza parcial sobre el subsistema B y a ρ_A se le conoce como *matriz de densidad reducida* en el subsistema A . Así, a través de ρ_A se obtiene *toda* la información correspondiente al subsistema A descartando al subsistema B . Pero la traza parcial no puede aplicarse a todos los casos de sistemas compuestos, ya que para poder descartar al subsistema B es necesario que los operadores se puedan ver como $X = X_{(A)} \otimes \mathbb{1}$, que es el operador que actúa sólo sobre uno de los subsistemas, pero hay operadores Hermitianos más generales que no pueden ser escritos de esta forma, a estos operadores se les llama *operadores no locales* u *operadores colectivos*. Un ejemplo de este tipo de operadores se da cuando se considera el operador total de espín para un sistema de dos partículas con espines j_1 y j_2 ; en este caso, el operador total de espín es $\mathbf{J} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}$ y no es separable, en el sentido de que no se puede obtener el operador $\mathbf{J}_{(1)} = \mathbf{j}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$.

Uno estaría tentado a usar el mismo formalismo para sistemas compuestos en el caso relativista, pues parece lo más lógico. En la siguiente sección discutiré cómo se ha hecho esto, es

decir, cómo se ha utilizado la traza parcial y la matriz de densidad reducida como herramientas para obtener la información de uno de los subsistemas del estado cuántico en cuestión en otro marco de referencia inercial.

3.2. Empleo tradicional de la traza parcial en mecánica cuántica

En la sección anterior vimos que la traza parcial es una herramienta matemática que se utiliza en mecánica cuántica de sistemas compuestos para, dado un sistema de este tipo, poder describir adecuadamente los resultados experimentales asociados a la medición de una de las variables físicas correspondiente a uno de los subsistemas, descartando todos los demás. Cuando comenzó, hace unas décadas, la rama de la información cuántica para sistemas relativistas, en los artículos pioneros se comenzó a utilizar el formalismo de la traza parcial y la matriz de densidad reducida de la misma manera que en el caso no relativista [5, 10–20]. Es decir, si tenemos una partícula con dos grados de libertad que pertenecen a dos espacios de Hilbert distintos, en un sistema de referencia O , el estado de dicha partícula puede tomarse como un sistema compuesto, ya que al pertenecer los grados de libertad a dos espacios de Hilbert distintos se puede pensar que el sistema de la partícula está conformado por dos partes que se pueden estudiar independientemente. Así, el estado de la partícula se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = |p, \sigma\rangle, \quad (3-7)$$

donde p puede ser un grado de libertad continuo y σ un grado de libertad discreto de la partícula en cuestión. Después se calcula la matriz de densidad $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Una vez que se obtiene la matriz de densidad, y uno quiere tener codificada solamente la información de los posibles resultados experimentales correspondientes a realizar mediciones sobre una de las variables físicas del sistema, por ejemplo de la variable σ , entonces sacamos la matriz de densidad reducida ρ_σ haciendo la traza parcial sobre la variable p que no nos interesa

$$\rho_\sigma = Tr_p(\rho). \quad (3-8)$$

Ahora, podríamos hacer las mediciones en otro sistema de referencia O' , pero no tenemos una ley de transformación relativista para la matriz de densidad reducida (ecuación 3-8), entonces lo que se ha hecho, para seguir usando el formalismo de la traza parcial de la misma forma que en el caso no relativista, es, en primera instancia, transformar el estado (véase 2-28)

$$|\psi'\rangle = U(\Lambda) |\psi\rangle. \quad (3-9)$$

Luego, ya que se obtiene $|\psi'\rangle$ se saca su matriz de densidad correspondiente

$$\rho' = |\psi'\rangle \langle\psi'| \quad (3-10)$$

y después de eso se calcula la matriz de densidad reducida $\rho'_{\sigma'}$, trazando sobre el momento. Uno vuelve a utilizar el formalismo que se usó en el sistema de referencia O , pensando que esta matriz de densidad reducida $\rho'_{\sigma'}$ codifica adecuadamente sólo la información del grado de libertad discreto de nuestra partícula. En otras palabras, que desde el sistema de referencia O' este formalismo nos puede ayudar a predecir estadísticamente todos los resultados experimentales provenientes de hacer mediciones sobre la variable física σ' . A continuación se presentarán dos ejemplos físicos concretos de cómo se ha usado este formalismo en mecánica cuántica en sistemas relativistas.

3.3. Ejemplos del uso de traza parcial en sistemas relativistas

Después de exponer, en general, cómo se da uso a la traza parcial en sistemas relativistas, paso a mostrar un par de ejemplos sencillos, analíticos y numéricos, en los que se hace uso de esta herramienta. Para todos los resultados numéricos que se presentarán en esta sección se desarrolló un código con el programa Mathematica 10. Los sistemas que se estudiarán corresponderán a estados cuánticos de una partícula relativista con masa y espín 1/2. En estos ejemplos se calcula la entropía de von Neumann en dos sistemas de referencia distintos. Posteriormente se compararán los resultados entre los dos marcos de referencia.

3.3.1. Estado gaussiano de momento

El primer ejemplo que mostraré será el del sistema físico que analiza A. Peres en su artículo *Quantum entropy and special relativity* [5]. Este artículo fue uno de los primeros en el área de la información cuántica relativista y fue escogido para comparar los resultados analíticos que se muestran ahí con los resultados numéricos del código antes mencionado.

El sistema que se analiza en el artículo mencionado es el de una partícula libre, masiva, con espín 1/2 y en superposición de momento en el marco de referencia O . El estado cuántico de dicha partícula en el marco de referencia O , en la representación de momento, puede ser escrito en la forma espinorial de dos componentes:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1(q) \\ a_2(q) \end{pmatrix}, \quad (3-11)$$

donde las amplitudes obedecen la relación

$$\sum_{r=1,2} \int |a_r(q)|^2 dq = 1. \quad (3-12)$$

Nótese que estamos usando q para momento. Por simplicidad, Peres escoge el caso particular de una partícula preparada en un eigenestado del operador de espín σ_z , con el espín en la dirección $+z$, por lo tanto la componente $a_2(q) = 0$. La primera componente es una función gaussiana $a_1(q) = (2\pi)^{-3/4} \omega^{3/2} \exp\left[-\frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{2\omega^2}\right]$ siendo ω el parámetro que determina el ancho de la gaussiana. Ahora deseamos calcular la entropía de espín para este estado en el marco de referencia O . Para eso primero se saca la matriz de densidad $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ que queda

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1(q')a_1^*(q'') & a_1(q')a_2^*(q'') \\ a_2(q')a_1^*(q'') & a_2(q')a_2^*(q'') \end{pmatrix}, \quad (3-13)$$

donde las primas que están sobre los momentos nos sirven para hacer notar que los productos de los coeficientes se dan sobre cualquier par de momentos q' y q'' . Después se traza sobre el momento para obtener la matriz densidad reducida de espín con la ecuación 3-8. Esto es

equivalente a hacer $q' = q'' = q$, quedando

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1(q)a_1^*(q) & a_1(q)a_2^*(q) \\ a_2(q)a_1^*(q) & a_2(q)a_2^*(q) \end{pmatrix}. \quad (3-14)$$

Y como $a_2(q) = 0$ y 3-12, entonces

$$\rho_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3-15)$$

Para este caso es evidente que ρ_σ representa la matriz de densidad de un estado puro. La entropía de espín para un estado de este tipo es cero. Cuando la partícula es descrita en un marco de referencia inercial O' , moviéndose con velocidad v en la dirección x con respecto al marco de referencia O , entonces se necesita transformar el estado

$$U(\Lambda) |\psi\rangle = |\psi'\rangle = \begin{pmatrix} b_1(p) \\ b_2(p) \end{pmatrix}, \quad (3-16)$$

donde $p = \Lambda q$. Para obtener la forma explícita de las componentes $b_1(p)$ y $b_2(p)$, de la misma manera que se muestran en el artículo, es necesario conocer a la transformación $U(\Lambda)$. Debido a que $\gamma = \cosh \alpha$ y $v\gamma = \sinh \alpha$, los boost en general, para su representación de 2×2 , pueden ser parametrizados de la siguiente forma:

$$\Lambda = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\hat{J} \cdot \mathbf{e}), \quad (3-17)$$

donde \mathbf{e} es un vector unitario en la dirección en la que está hecho el boost y $\alpha = \text{arctanh}(v)$, siendo v la velocidad con la que se hace el boost. Ahora, en las secciones 2.1.3 y 2.1.1 se vio cuál era la representación de 4×4 para los boosts estándar Lorentz L_p (véase ec. 2-23) que llevan el vector escogido de momento k al momento p . Si vemos que $\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = [(\gamma + 1)/2]^{1/2}$ y $\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = [(\gamma - 1)/2]^{1/2}$ y tomamos a $\gamma = q_0/m$, estas mismas transformaciones de Lorentz puras o boosts en su representación de 2×2 quedan de la siguiente manera [21, 22]:

$$L_q = \left(\frac{q_0 + m}{2m}\right)^{1/2} + \left(\frac{q_0 - m}{2m}\right)^{1/2} \frac{\hat{J} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}, \quad (3-18)$$

donde $\hat{J} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ es el vector de Pauli y $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ es la parte espacial del cuadrimomento que caracteriza a esta transformación de Lorentz, que también es el momento de la partícula en el sistema de referencia inicial (véase 3-20), ya que, como se expuso con anterioridad, es esta L_q la que lleva el cuadri-vector estándar que escogimos $k^\mu = (m, 0, 0, 0)^T$ al cuadri-vector $q^\mu = (q_0, q_x, q_y, q_z)$, es decir, $L_q k^\mu = q^\mu$. Tomando a $p = \Lambda q$ la expresión para las rotaciones de Wigner en esta representación queda* [21]

$$\begin{aligned} W(\Lambda, q) &= L_p^{-1} \Lambda L_q \\ &= \frac{q_0}{[p_0 (q_0 + m) (p_0 + m)]^{1/2}} \left(\cosh \frac{\alpha}{2} (q_0 + m) + \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}) - i \sinh \frac{\alpha}{2} [\hat{J} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{e})] \right). \end{aligned} \quad (3-19)$$

Así, tomando en cuenta que el boost se da en la dirección x y usando las ecuaciones 3-16 y 3-19, tenemos que

$$W(\Lambda, q) |\psi\rangle = K \begin{pmatrix} \cosh \frac{\alpha}{2} (q_0 + m) + \sinh \frac{\alpha}{2} (iq_y + q_x) & -\sinh \frac{\alpha}{2} q_z \\ \sinh \frac{\alpha}{2} q_z & \cosh \frac{\alpha}{2} (q_0 + m) - \sinh \frac{\alpha}{2} (iq_y + q_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(q) \\ a_2(q) \end{pmatrix},$$

donde $K = [q_0/p_0(q_0 + m)(p_0 + m)]^{1/2}$. Entonces las componentes de $|\psi'\rangle$ quedan así:

$$\begin{aligned} b_1(p) &= K \left[\cosh \left(\frac{\alpha}{2} \right) (q_0 + m) + \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right) (q_x + iq_y) \right] a_1(q), \\ b_2(p) &= K \sinh \left(\frac{\alpha}{2} \right) q_z a_1(q). \end{aligned} \quad (3-20)$$

Luego, asumiendo que trazar sobre el momento del estado transformado de la forma usual es válido (cuestión que será discutida en la sección 4), se obtiene la nueva matriz de densidad reducida ρ'_σ

$$\rho'_\sigma = Tr_p(\rho'), \quad (3-21)$$

donde $\rho' = |\psi'\rangle \langle \psi'|$. Como vimos en la sección 2.3 esta matriz de densidad reducida puede ser expresada en términos de las componentes del vector de Bloch y las matrices de Pauli. El vector de Bloch $\mathbf{n}_i = (n_x, n_y, n_z)$ (utilizando la misma notación que en [5]) está dado por las siguientes

*Para el lector que esté interesado en ver algunos pasos claves de la deducción de 3-19 puede consultar el apéndice A

componentes

$$n_z = \langle \sigma | \hat{\sigma}_z | \sigma \rangle = \int [|b_1(p)|^2 - |b_2(p)|^2] dp \quad (3-22)$$

y

$$n_x - in_y = \langle \sigma | \hat{\sigma}_x | \sigma \rangle - i \langle \sigma | \hat{\sigma}_y | \sigma \rangle = \int b_1(p)b_2(p)^* dp. \quad (3-23)$$

Utilizamos 2-53, que se dedujo en la sección 2.3, y entonces ahora ρ'_σ queda como

$$\rho'_\sigma = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \sum_i \mathbf{n}_i \sigma_i \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1 - n_z \end{pmatrix}. \quad (3-24)$$

Ahora, en el artículo donde se lleva a cabo este análisis se hace una aproximación a primer orden cuando $\omega/m \ll 1$, es decir con ω muy pequeña ya que la masa se fija, lo cual significa que se trabajará con una partícula que tenga un momento casi localizado, con una distribución gaussiana muy estrecha. En ese caso los autores del artículo obtienen que $n_x = n_y = 0$ y que

$$n_z = 1 - \left(\frac{w \tanh[\frac{\alpha}{2}]}{2m} \right)^2. \quad (3-25)$$

Y así, cuando en [5] calculan la entropía de von Neumann del espín bajo esta aproximación para el sistema de referencia O' tienen que

$$S \simeq t(1 - \ln(t)), \quad (3-26)$$

donde $t = \omega^2 \tanh^2[\frac{\alpha}{2}]/8m^2$. Se puede notar que la entropía en el marco de referencia en movimiento es mayor que la del marco de referencia original, que en este caso es cero, es decir, la entropía de von Neumann no es un invariante de Lorentz.

3.3.2. Transformación y cálculo de la entropía von Neumann

Todos los resultados de la subsección anterior fueron calculados analíticamente por los autores de [5]. Ahora, voy a pasar a presentar los cálculos numéricos que se llevaron a cabo con el código indicado anteriormente. Después se compararán los resultados del artículo de Peres con los numéricos, y así, finalmente, se presentarán los resultados numéricos que arrojó el código al

analizar una partícula en un estado cuántico distinto.

Primero voy a mostrar cómo cambia la gaussiana del estado representado por la ecuación 3-20, con $a_1(q) = (2\pi)^{-3/4}\omega^{3/2} \exp(-\frac{(q_x^2+q_y^2+q_z^2)}{2\omega^2})$, después de la transformación dada por las ecuaciones 3-20 para distintas velocidades v .

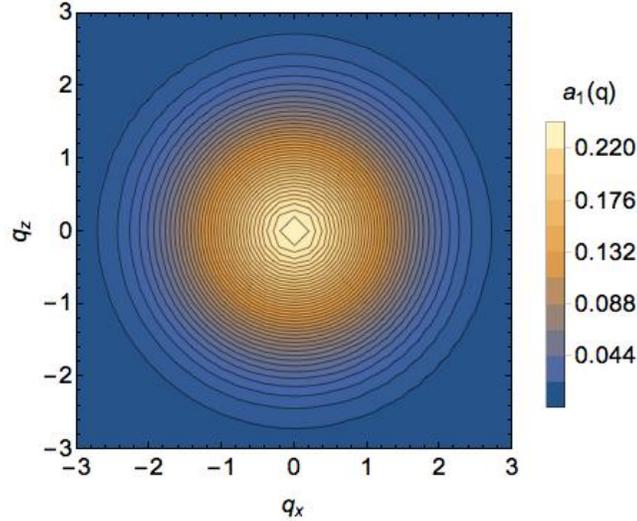


Figura 3-1: Primera componente del estado gaussiano en representación de momento en el marco de referencia O .

En la figura 3-1 tenemos la gaussiana en representación de momento de la primera componente $a_1(q)$ del estado de la partícula en el marco de referencia inicial O , donde $a_2(q) = 0$. Ahora, en las figuras 3-2 y 3-3 tenemos la representación de la parte real de $b_1(p)$ y $b_2(p)$, la primera y la segunda componente del estado transformado $|\psi'\rangle$, que es, recordando, el estado que se observa en un marco de referencia O' con velocidad v en dirección x con respecto al marco original. Sólo se discutirán las gráficas de la parte real ya que solamente $b_1(p)$ tiene parte imaginaria (véase 3-20), y como se puede ver en 3-4 es muy pequeña, aproximadamente un orden de magnitud más pequeña que la parte real para las mismas velocidades, entonces, sin pérdida de generalidad, podemos hacer el análisis tomando en cuenta solamente la parte real. Como podemos ver en las figuras mencionadas, mientras la velocidad del marco de referencia O' aumenta, con respecto al sistema de referencia original, las gráficas que representan a la primera componente $b_1(p)$ de $|\psi'\rangle$ dejan de estar centradas en cero, y esto, como se puede apreciar, sucede de forma cada vez más pronunciada. Ahora, se constata en la ecuación 3-20 que en el marco de referencia O' la segunda componente del estado $|\psi'\rangle$, a diferencia de la segunda componente

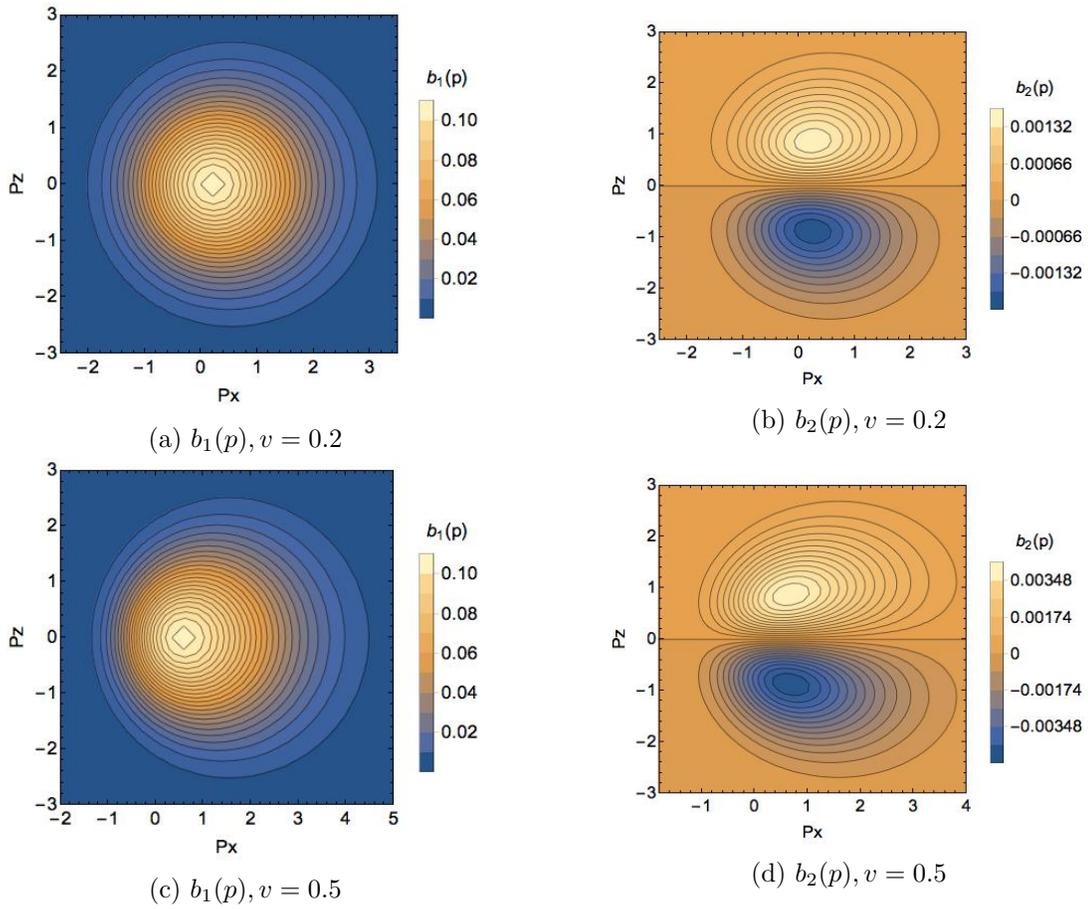


Figura 3-2: Aquí se presentan las gráficas de $b_1(p)$ y $b_2(p)$, primera y segunda componentes del estado gaussiano transformado. Como se puede ver las gráficas de la primera columna, con el fondo azul, corresponden a la primera componente, desde el marco de referencia O' con velocidad $v = 0.2$ y velocidad $v = 0.5$. Las gráficas de la segunda columna, las que tienen el fondo color mostaza, corresponden a la segunda componente, una desde el marco de referencia O' con velocidad $v = 0.2$ y la otra cuando O' tiene velocidad $v = 0.5$.

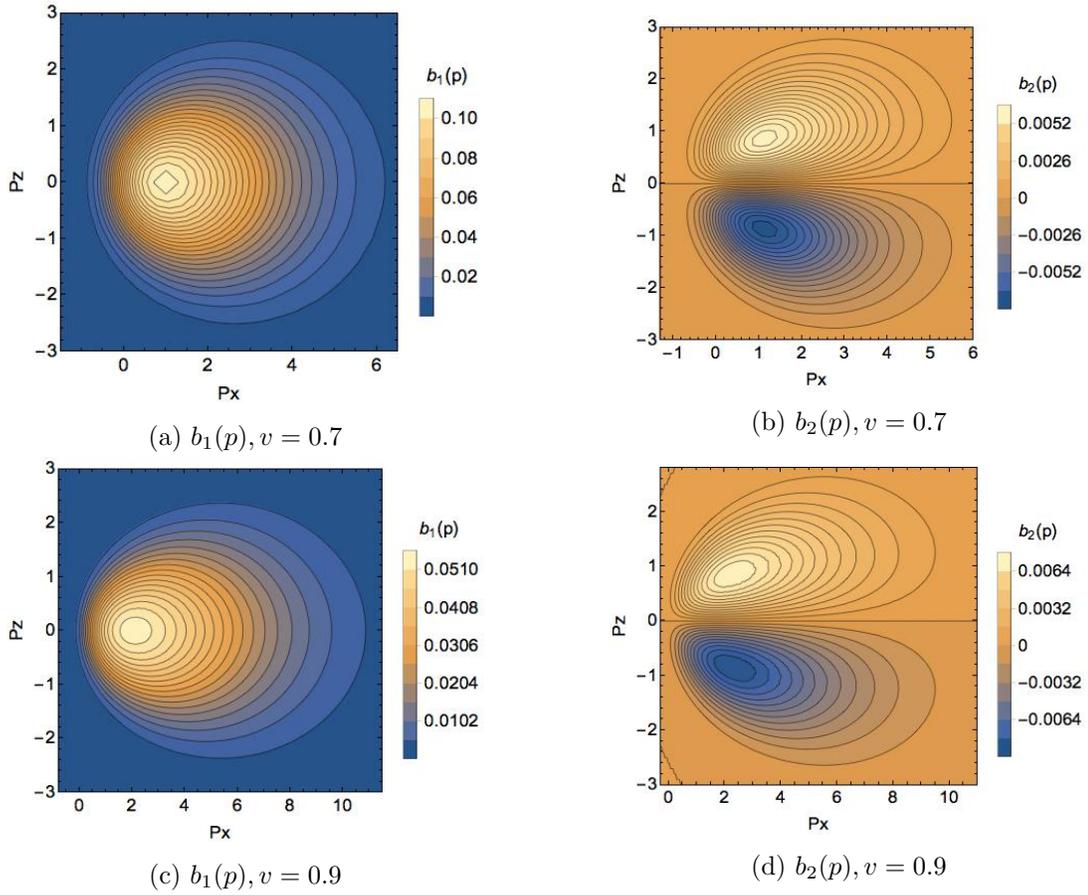


Figura 3-3: Aquí podemos ver las gráficas de $b_1(p)$ y $b_2(p)$, primera y segunda componentes del estado gaussiano transformado. En este caso se puede ver que las gráficas de la primera columna, con el fondo azul, corresponden a la primera componente, desde el marco de referencia O' con velocidad $v = 0.7$ y velocidad $v = 0.9$, y las gráficas de la segunda columna, las que tienen el fondo color mostaza, corresponden a la segunda componente, una desde el marco de referencia O' con velocidad $v = 0.5$ y la otra cuando O' tiene velocidad $v = 0.9$.

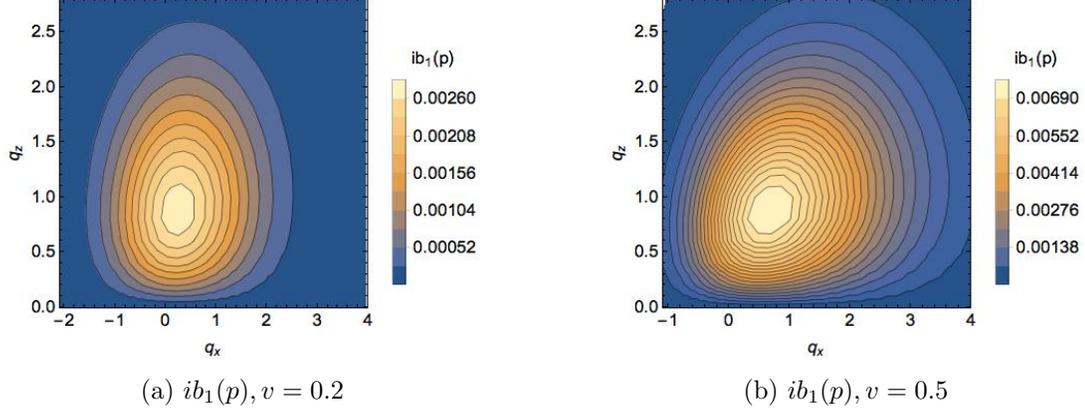


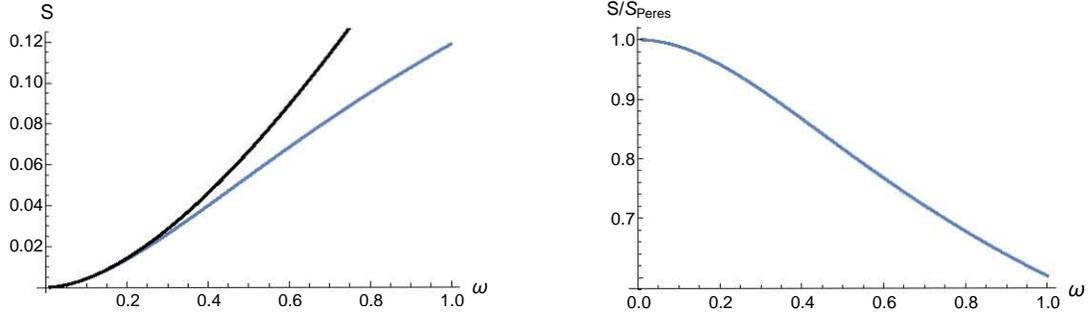
Figura 3-4: Aquí vemos las gráficas de la parte imaginaria de $b_1(p)$ cuando el marco de referencia O' tiene velocidades de $v = 0.2$ y $v = 0.5$ con respecto al marco de referencia O .

del estado no transformado $|\psi\rangle$, no es cero. En la figuras 3-2 y 3-3 podemos ver cuatro gráficas de la segunda componente $b_2(p)$ del estado gaussiano transformado para diferentes velocidades. Podemos advertir que, al igual que en las gráficas de la primera componente $b_1(p)$, las gráficas de $b_2(p)$ se desplazan y deforman sobre el eje x positivo mientras la velocidad del sistema de referencia O' con respecto al sistema de referencia O aumenta. No es de sorprender este resultado pues el boost está hecho en la dirección x y es lógico que el estado cambie notoriamente en esta dirección mientras la velocidad del sistema de referencia O' se acerca más a la velocidad de la luz $c = 1$.

Ahora, ya sabemos por la subsección anterior que estas transformaciones, al cambiar el estado, también afectan el valor de la entropía de von Neumann del espín. Vimos que el resultado analítico que dedujo Peres para $\omega/m \ll 1$, siendo ω el ancho de la gaussiana y m la masa de la partícula (cuyo valor podemos tomar igual a 1 sin pérdida de generalidad), es el presentado en la ecuación 3-26. Para comparar nuestros resultados numéricos con los resultados analíticos de Peres calculamos la entropía del espín del estado transformado para diferentes valores de ω con la expresión presentada en la sección 2.4:

$$S = -Tr(\rho_\sigma \ln \rho_\sigma). \quad (3-27)$$

Los resultados se pueden ver en las gráficas de la figura 3-5. Podemos notar en la gráfica (a) que las curvas de la entropía son iguales para ω pequeñas. La curva negra es la correspondiente



(a) Comparación entre la entropía (azul) y la aproximación de Peres (negro) mientras crece ω . (b) Razón de la entropía entre la aproximación de Peres contra ω .

Figura 3-5: Gráficas de la comparación entre los resultados analíticos del artículo de Peres y nuestros cálculos numéricos en términos de ω . Tomar ω como parámetro es importante ya que la aproximación de Peres es válida para $\omega \ll 1$, y se ve como en ambas gráficas muestran que los resultados numéricos y los analíticos coinciden justo para este caso y van divergiendo mientras ω crece.

a la expresión 3-26 que es una aproximación para $\omega \ll 1$, mientras que la curva azul es para la entropía calculada numéricamente con la ecuación 3-27. Así el cálculo numérico de la entropía tiene el resultado correcto para el régimen donde la expresión de Peres es válida. Ahora, en la gráfica (b) vemos el cociente de la entropía calculada numéricamente y la aproximación de Peres; aquí se ve que para ω pequeñas el cociente es igual a 1 y se va alejando mientras ω crece, si el momento está más localizado y $\omega \rightarrow 0$ entonces $S \rightarrow 0$, como se esperaba. Además se aprecia en la gráfica (a) que la curva correspondiente a la aproximación de Peres crece mucho más que la entropía calculada numéricamente cuando ω aumenta, ya que la pendiente de la curva de Peres es mayor que la del resultado numérico, eso hace que en la gráfica (b) el cociente S/S_{Peres} decrezca rápidamente mientras ω crece.

Ya que está probado que el código reproduce los resultados numéricos correctos, podemos usarlo para analizar otros casos; por ejemplo; cómo varía la entropía de espín al aumentar la velocidad v del marco de referencia del observador O' . Esto se puede ver en las gráficas de la siguiente sección.

3.3.3. Estado tipo 'gato de Schrödinger'

En esta parte del trabajo presentaré algunos resultados numéricos relacionados al estudio de un estado tipo *gato de Schrödinger* en representación de momento en un contexto relativista.

El tratamiento es bastante similar al que se presentó en 3.3.1, es decir, tenemos un estado

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a_1(q) \\ a_2(q) \end{pmatrix}, \quad (3-28)$$

preparado en un sistema de referencia O con el espín de la partícula apuntando $+z$, es decir, con la segunda componente $a_2(q) = 0$. En este caso, la diferencia con el ejemplo anterior radica en que la primera componente de $|\phi\rangle$ no es una gaussiana centrada en cero, sino una superposición de dos gaussianas cuyos centros están colocados simétricamente a los lados del origen. Este estado es del tipo "gato de Schrödinger" (que llamaremos simplemente estado gato desde ahora). La primera componente está dada por

$$a_1(\mathbf{q}) = N \left(e^{-\frac{(\mathbf{q}-\mu)^2}{2\omega^2}} + e^{-\frac{(\mathbf{q}+\mu)^2}{2\omega^2}} \right), \quad (3-29)$$

donde N es un factor de normalización, $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$, ω es el ancho de las gaussianas y $\pm\mu$ es el centro de los picos de ambas curvas. Ahora, en este caso también se hará un boost en la dirección x con respecto al sistema O , por lo mismo, la transformación $U(\Lambda)$ para el estado gato es la misma que en el ejemplo dado en 3.3.1, ya que el contexto físico es el mismo. Así, $b_1(\mathbf{p})$ y $b_2(\mathbf{p})$ en el marco de referencia O' son parecidas a las componentes expresadas en 3-20 con la diferencia de que se debe sustituir la primera componente $a_1(q)$ por la expresión de la ecuación 3-29. Ahora, la representación gráfica de la primera componente de la función de onda del estado gato en el marco de referencia O , se puede ver en la figura 3-6. En las gráficas podemos observar que la simetría de las gaussianas con respecto al eje z no cambia pero sí hay un corrimiento y deformación sobre el eje x , que es la misma dirección en la que se hace el boost, este corrimiento sobre el eje x aumenta mientras v crece.

La segunda componente $b_2(\mathbf{p})$, del estado gato, después de la transformación no es nula, y podemos ver su representación en las gráficas (b) y (d) de las figuras 3-7 y 3-8. En este caso también vemos como mientras el observador en O' tienen mayor velocidad la segunda componente se recorre sobre el eje p_x positivo y se deforma.

La entropía de von Neumann para el espín del estado gato en el marco de referencia O es igual a cero, ya que, al igual que en el ejemplo anterior, la matriz de densidad reducida del espín

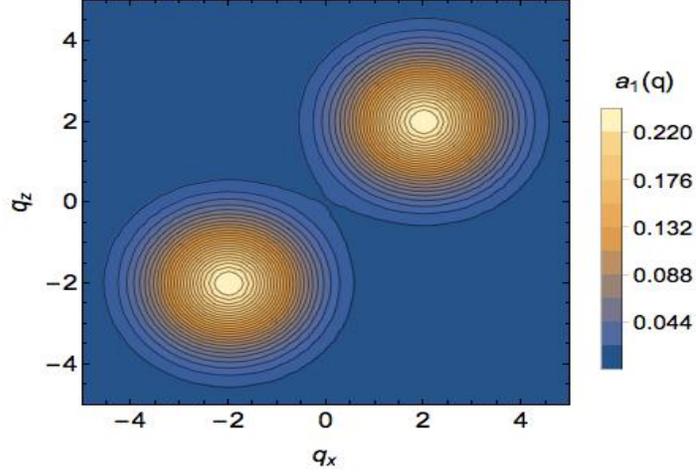


Figura 3-6: Primera componente del estado gato en representación de momento en el marco de referencia O .

representa un estado puro. Lo interesante es medir la entropía de espín para el caso del sistema de referencia O' . Para calcularla seguimos el procedimiento usual; transformamos el estado gato $U(\Lambda) |\phi\rangle \rightarrow |\phi'\rangle$, posteriormente calculamos su matriz de densidad y luego, asumiendo que esto es válido, trazamos sobre momento, obteniendo así la matriz de densidad reducida para el espín en O' . Por último calculamos la entropía del espín con la expresión 3-27. Ahora, en el marco de referencia O' la entropía no es cero, pues el estado representado por la matriz de densidad reducida del espín ya no es puro. De hecho hay un entrelazamiento entre los grados de libertad de la partícula debido a la rotación de Wigner, y entonces la matriz de densidad reducida de espín representa un estado mixto. El cálculo de la entropía de espín para el estado gato transformado mientras la velocidad del observador O' aumenta y para diferentes μ , se puede ver en las curvas de la figura 3-9. Para este cálculo se fijó $w = 1$ y se varió μ de 0 (que es la curva que está en negro pues es la misma que representa al estado gaussiano) hasta 3. Se puede observar, que al igual que en el caso anterior, la entropía aumenta con la velocidad y que además al ser más grande la separación entre las gaussianas el valor de la entropía es mayor (las curvas de los demás colores), mostrando con esto que el estado gato tiene mayor entropía de espín que el gaussiano. También calculamos como varía S del espín en términos de μ para diferentes velocidades. Para este cálculo también se fijó $\omega = 1$, y se obtuvieron curvas para v de 0.2 a 0.99 la velocidad de la luz. Esto se puede apreciar en las curvas de la figura 3-10. En

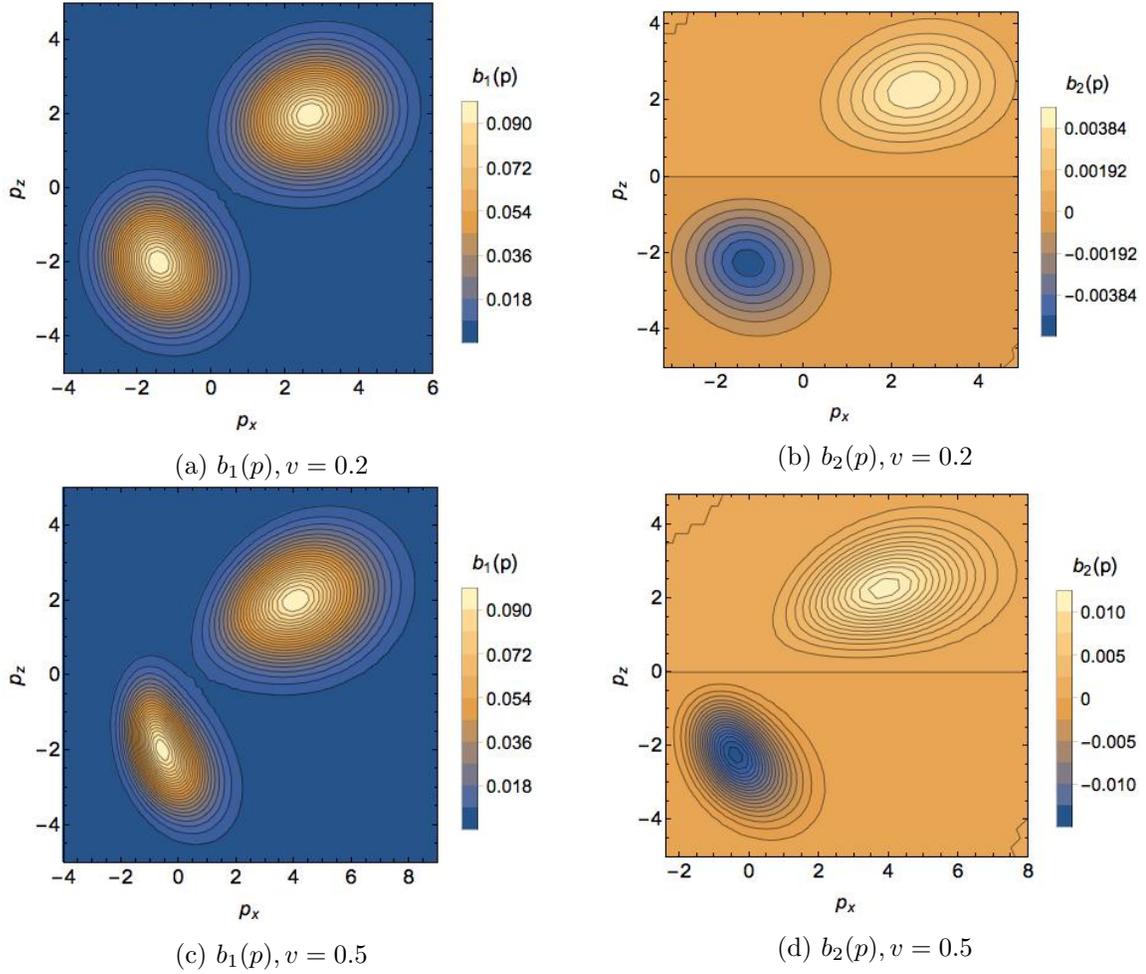


Figura 3-7: Gráficas de $b_1(p)$ y $b_2(p)$, primera y segunda componentes del estado tipo gato para el marco de referencia O' con velocidades $v = 0.2$ y $v = 0.5$ respectivamente.

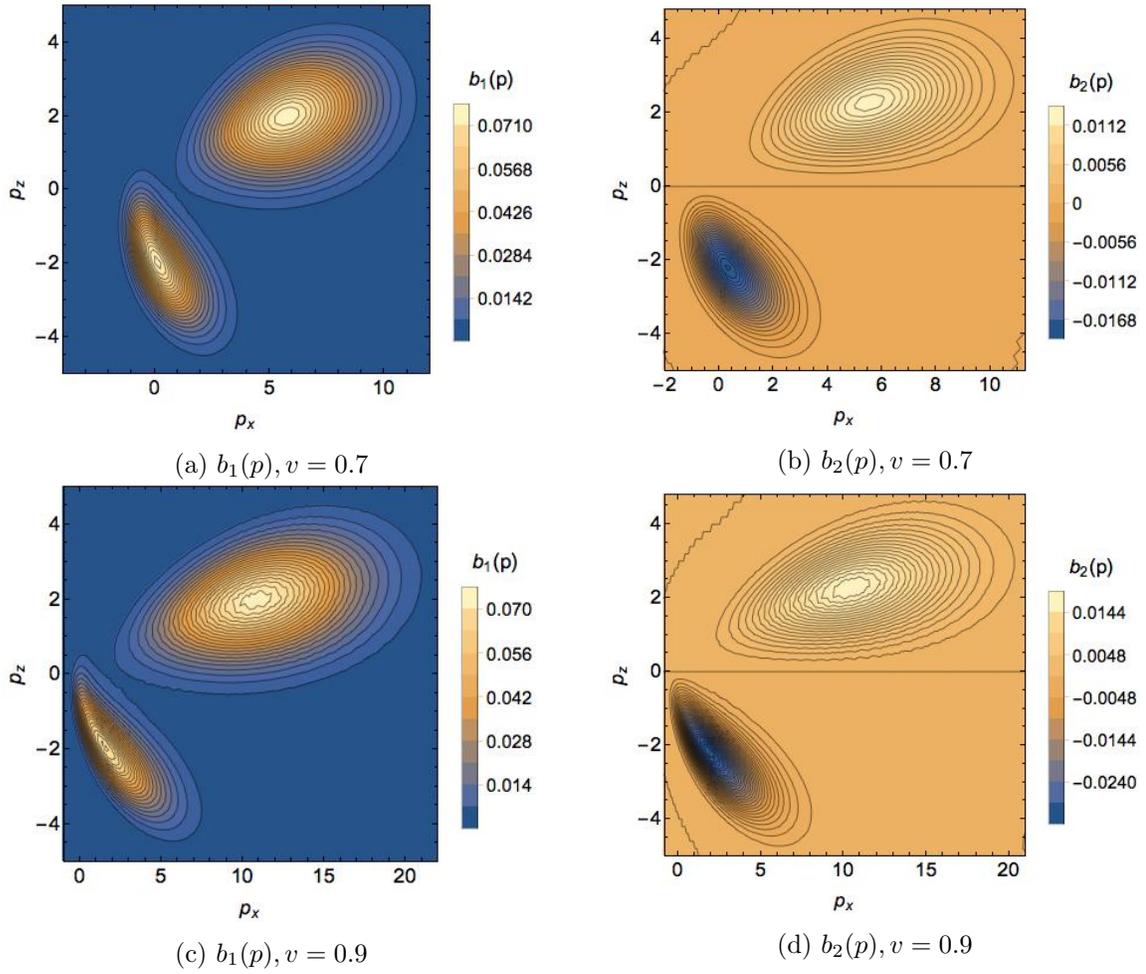


Figura 3-8: Gráficas de $b_1(p)$ y $b_2(p)$, primera y segunda componentes del estado tipo gato para el marco de referencia O' con velocidades $v = 0.7$ y $v = 0.9$ respectivamente.

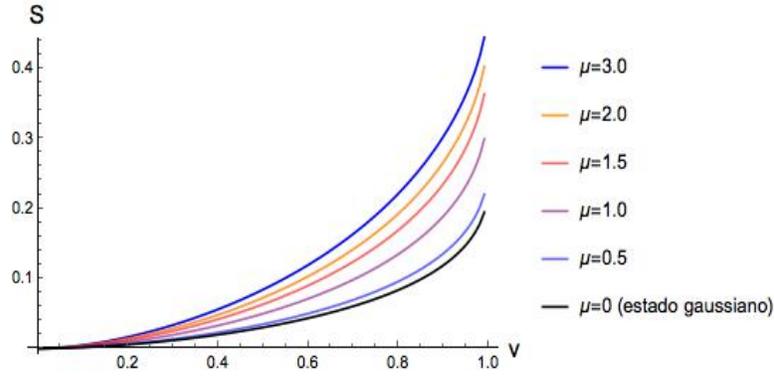


Figura 3-9: Valor de la entropía para el estado gaussiano y el estado gato al aumentar la velocidad del observador O' de 0 a $0.99 c$ para diferentes valores de μ . Para $\mu = 0$ la curva describe el estado gaussiano mientras el observador O' aumenta de velocidad (curva negra) y para las $\mu > 0$ son los estados gato cada vez más alejados del origen simétricamente mientras el observador O' aumenta de velocidad (las curvas de los colores restantes).

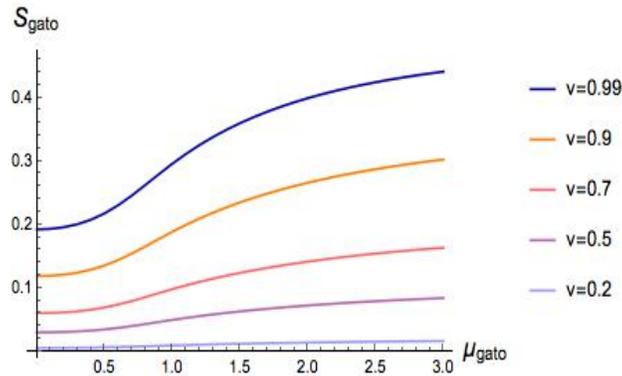


Figura 3-10: Valor de la entropía para el estado gato mientras aumenta μ , es decir, mientras las gaussianas se alejan del origen. Las diferentes curvas corresponden a diferentes velocidades del observador O' , como lo marca la gráfica.

dicha figura se puede ver que la entropía no es cero en el origen, de hecho mientras es mayor la velocidad el inicio de la gráfica se recorre positivamente sobre el eje de la entropía, así, aunque $\mu = 0$ la entropía no lo es, pues cuando μ es cero estamos reduciendo la función de onda gato al caso de una sola gaussiana; el estado de la subsección anterior. Ya vimos que para ese estado S tiene un valor más alto cuando la velocidad aumenta. También podemos ver, en la figura 3-10, que al inicio la entropía cambia muy poco pero esto cambia mientras las gaussianas se alejan del origen, específicamente el cambio ocurre entre $\mu = 1.0$ y $\mu = 1.5$, entonces el cambio de la entropía es mayor.

Capítulo 4

Discusión del empleo de la traza parcial para sistemas relativistas en mecánica cuántica.

En el capítulo anterior describí cómo se ha utilizado el formalismo de la traza parcial (cuyo empleo es habitual en mecánica cuántica no relativista) en sistemas donde la teoría especial de la relatividad entra en juego. También se mostraron ejemplos concretos en donde se utilizó esta herramienta matemática. Este tipo de tratamiento ha causado críticas que cuestionan la validez y significado físico de la matriz de densidad reducida para los sistemas relativistas. Uno de los problemas con este formalismo surge cuando se quiere describir desde otros marcos de referencia uno de los subsistemas de un sistema cuántico compuesto. Particularmente, se ha investigado el caso de una partícula con un grado de libertad continuo, como el momento, y un grado de libertad interno, el espín. Otro problema, relacionado al anterior, surge cuando se quiere extender el estudio a un sistema en superposición cuántica. Esta problemática ha llamado bastante la atención y en los últimos años han visto la luz diferentes artículos donde se discute el tema y se proponen diversas soluciones al conflicto [2, 3, 19, 20, 23–28]. En este capítulo presentaré parte de la discusión que ha suscitado este tema, tanto los problemas como algunas de las posibles soluciones.

4.1. Problemas del empleo de la traza parcial para sistemas relativistas

En esta sección iniciaré con la discusión del problema relacionado a la aplicación de la traza parcial a estados de una partícula relativista que no está en superposición cuántica y posteriormente extenderé el análisis a los estados superpuestos.

El conflicto comienza cuando analizamos con cuidado cómo afectan las rotaciones de Wigner a la etiqueta discreta del estado de la partícula. Como se demostró en la subsección 2.1.3, si la etiqueta discreta de la partícula representa el espín entonces diferentes observadores tienen diferentes ejes de cuantización para la medición de la proyección del espín [2], ya que la transformación perteneciente a este grado de libertad rota el eje de cuantización (ver la ecuación 2-37).

Ahora, con lo expuesto previamente, podemos discutir en detalle el punto donde surgen los problemas. Recapitulemos: tenemos un estado del tipo

$$|\psi\rangle = |p, \sigma\rangle, \quad (4-1)$$

donde p es la etiqueta de momento y σ la de espín. Este estado se define a través de la ecuación 2-24. Esta ecuación nos dice que nos situemos en el marco de referencia en el cual la partícula está en reposo, donde su estado es $|k, \sigma\rangle$, con $k = (m, 0, 0, 0)$, y entonces llevemos $k \rightarrow p$ a través de una transformación de Lorentz L_p . Esto quiere decir que en la ecuación 4-1 tenemos información en dos sistemas de referencia distintos, ya que la etiqueta σ en esta expresión no es el espín en el marco de referencia donde la partícula tiene momento p , sino en el marco de referencia donde la partícula se encuentra en reposo, es decir, donde el espín se define como el momento angular total de la partícula. En el marco de referencia donde la partícula está en reposo el tratamiento de espín es no relativista [2, 3] y no hay ningún conflicto con emplear el formalismo usual de la traza parcial, ya que al trazar sobre el momento se puede obtener la información correcta asociada a la medición de este observable. Entonces, en principio, uno puede separar las variables físicas que describen al sistema, es decir, se puede factorizar el estado de la forma $|\psi\rangle = |p\rangle \otimes |\sigma\rangle$. En otras palabras; una vez que obtengo la matriz de densidad reducida para la etiqueta σ , determino completamente el estado de espín en el que se encuentra la partícula.

Dicha matriz de densidad reducida representa a un estado puro, y esto significa que *puedo conocer con certeza el resultado experimental que saldrá de medir la proyección del espín sobre el eje de cuantización*. Por lo tanto, si yo, en el marco de referencia donde la partícula está en reposo, preparo el estado de espín de tal forma que $\sigma = \sigma_{+z}$, entonces al hacer una medición sobre el eje de cuantización z la probabilidad de que la partícula se irá deflectada para arriba es 1. Pero hay que tener cuidado; en el marco de referencia donde la partícula tiene momento p , esto no es así; si se hace la medición sobre el eje de cuantización z la probabilidad de que la partícula se deflece para abajo no es cero^{*}. Una posible pregunta aquí es ¿cómo preparar el estado de la ecuación 4-1? Esto se hace como se indica en la parte final de la sección 2.1.3, es decir, midiendo el momento p de la partícula y haciendo pasar la partícula por un filtro (un Stern-Gerlach con una de las componentes bloqueadas) que esté alineado con σ , el espín en el sistema de referencia donde la partícula se encuentra en reposo. Ahora, digamos que el marco de referencia donde la partícula tiene momento p es O . Para analizar el estado de la partícula desde otro marco de referencia O' , tenemos que transformar dicho estado según la ecuación 2-28 y nos queda:

$$|\psi'\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |\Lambda p, \sigma'(p)\rangle. \quad (4-2)$$

Nótese que el eje de cuantización del espín rota al hacer la transformación; se puede ver a $|\psi'\rangle$ como en la expresión 2-33. La etiqueta discreta $\sigma'(p)$ del estado transformado tiene una dependencia explícita del momento de la partícula. Esta dependencia proviene del tipo de transformación que le corresponde a esta etiqueta, como se explicó anteriormente (véase 2.1.3). Entonces, se puede ver que dependiendo del observador y el momento con el que éste vea a la partícula, el eje de cuantización donde se medirá la proyección del espín σ' cambiará. Ahora, lo que se ha hecho en el tratamiento usual para conocer la información del espín de la partícula después de transformar el estado, es sacar la matriz de densidad reducida trazando sobre el momento, al igual que en el marco de referencia original; sin embargo usar este procedimiento en el nuevo marco de referencia es problemático. El problema aparece por la rotación que hay en el eje de cuantización del espín al transformar el estado, ya que esta rotación afecta el

^{*}Cuando aquí decimos *medición* estamos hablando de un Stern-Gerlach fijo para un sistema de referencia dado. En el límite no relativista, no hay diferencia si el aparato se mueve o no, pero cuando los campos se modifican, entonces sí, que es el caso entre el sistema de referencia donde la partícula tiene momento p y el sistema de referencia donde está en reposo.

nivel de correlación que hay entre los grados de libertad de la partícula; de hecho, los enreda [5, 19, 24]. Este enredamiento es muy particular, pues no es entre dos partículas, sino que se da entre los grados de libertad de una misma partícula. En consecuencia el estado ya no es factorizable, en el sentido en que las dos etiquetas ya no son independientes. Esto significa que la matriz de densidad reducida del espín ya no representa el espín de la partícula cuando está en reposo, y por lo tanto no describe el conjunto de experimentos que nos interesan. Puesto de otra manera: para los experimentos realizados en el sistema de referencia O el estado de espín de la partícula predice que la partícula siempre se va a ir deflectada en una dirección, en cambio, el estado de espín de la partícula, visto desde un observador en O' , no puede ser especificado completamente sólo por un vector $|\sigma'\rangle$ en el que no se tome en cuenta el momento de la partícula, dicho estado predecirá que la partícula, para el mismo conjunto de experimentos que se hacen en O , tiene posibilidades de deflectarse en diferentes direcciones. Es decir, al hacer la traza sobre el momento del estado transformado en realidad no se está obteniendo solamente la información perteneciente a la etiqueta de la variable física que importa. De este modo, si se prepara a la partícula en el marco de referencia donde está en reposo con un aparato Stern-Gerlach, de tal forma que la partícula quede en un estado completamente polarizado, y después se coloca un segundo Stern-Gerlach alineado con la dirección del vector de polarización, es decir alineado con el primer Stern Gerlach, entonces puedo predecir con completa exactitud hacia dónde se irá deflectada la partícula. Cuando yo quiera conocer el estado de la partícula para un observador O' , que tiene una cierta velocidad con respecto al sistema de referencia O , justo después de salir del primer Stern-Gerlach, no tendré más un estado completamente polarizado en la misma dirección que lo tengo en O ya que, como se ve en la ecuación 2-33, el eje de cuantización de la partícula cambia por la rotación de Wigner, enredando la etiqueta de momento con la de espín. El estado transformado de espín entonces tendrá una probabilidad distinta de cero de deflectarse en cualquiera de las dos direcciones del eje sobre el que se encuentra el Stern-Gerlach en el sistema de referencia O . Cuando yo calcule la matriz de densidad reducida del estado transformado, ésta no describirá los resultados provenientes de la medición del segundo Stern-Gerlach de la misma manera que lo hace el observador en el marco de referencia O .

El problema no es de invarianza relativista, sino que estamos hablando realmente de dos experimentos distintos. En el sistema de referencia O tenemos un Stern-Gerlach "fijo" y en el

marco de referencia O' tenemos un Stern-Gerlach en "movimiento", el hecho de que no exista una ley de transformación para la traza y las matrices de densidad reducidas que se calculan en cada marco de referencia hace que las descripciones del sistema entre los dos marcos de referencia no coincidan. Este es el principal motivo por el cual surgen las críticas al formalismo tradicional de la traza parcial en sistemas relativistas, poniendo en duda su significado físico. Para entender más a fondo esta problemática, es útil considerar estados más generales.

El conflicto del enlazamiento de los grados de la partícula se puede extender para estados cuánticos en superposición. La forma más general del estado de la ecuación 3-7 es un estado en superposición continua de momento:

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int f_{\sigma}(p) |p, \sigma(p)\rangle d\mu(p), \quad (4-3)$$

donde $f_{\sigma}(p)$ es una función de amplitud de probabilidad que cumple con $\sum_{\sigma} \int |f_{\sigma}(p)|^2 dp = 1$. Cabe mencionar que la medida de integración es $d\mu(p) = \frac{d^3p}{2E(p)}$, donde $E(p) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ es la energía. La razón de esto es que

$$\langle p, \sigma | p', \sigma' \rangle = 2E(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'} \quad (4-4)$$

y

$$1 = \int \langle p, \sigma | p', \sigma' \rangle d\mu(p) = \int d^3p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Rightarrow d\mu(p) = \frac{d^3p}{2E(p)}. \quad (4-5)$$

Ahora, sin pérdida de generalidad y en función del análisis que nos interesa hacer en esta parte del presente trabajo, podemos fijarnos en un caso particular, más sencillo, de la ecuación 4-3:

$$|\psi\rangle = c_1 |p_1, \sigma_{+z}\rangle + c_2 |p_2, \sigma_{+z}\rangle, \quad (4-6)$$

donde las c_1 y c_2 son las amplitudes de probabilidad. Cabe recordar e insistir que la etiqueta σ_{+z} es la componente z del espín de la partícula en el sistema de referencia donde la partícula está en reposo, según la definición de la ecuación 2-24. En general en el sistema de referencia donde la partícula tiene los momentos p_1 y p_2 habrá un eje de cuantización σ_{+z} distinto para cada uno de los momentos. Entonces, al sacar la matriz de densidad reducida de espín del estado de la ecuación 4-6 trazando sobre momento podría haber problemas de consistencia con

respecto a mediciones hechas sobre el espín de la partícula. Veamos, usando el mismo ejemplo que en el caso en el que la partícula no está en superposición cuántica, si se midiera con un aparato Stern-Gerlach la proyección del espín en la dirección z en el marco de referencia donde la partícula está en reposo se puede decir con completa certeza que la partícula será deflectada hacia $+z$, pero en el marco de referencia donde la partícula tiene el estado de la ecuación 4-6 la posibilidad de deflectarse hacia $-z$ no es nula. Ahora, en el caso donde el estado de la partícula no está en superposición de momento, un estado tipo $|p, \sigma\rangle$, siempre se puede encontrar un eje de alineación para el Stern-Gerlach, en el marco de referencia donde el aparato está fijo, en el que la partícula se vaya deflectada sólo hacia una dirección cada vez que se repita el experimento. Sin embargo, cuando la partícula está en un estado de superposición de momento, eso no es posible y entonces la matriz de densidad reducida del estado 4-6 no describirá correctamente los resultados experimentales. Pero podemos pensar en hacer una prueba cuántica, como se menciona en [29], en la que se escoja el proyector adecuado y entonces se pueda decir que efectivamente la partícula tiene espín $+z$. Si se escoge el proyector

$$\hat{P} = |p_1, \sigma_{+z}\rangle \langle p_1, \sigma_{+z}| + |p_2, \sigma_{+z}\rangle \langle p_2, \sigma_{+z}|, \quad (4-7)$$

la matriz de densidad reducida dará las predicciones físicas correctas ya que el estado de la ecuación 4-6 es eigenestado de 4-7. La implementación del proyector \hat{P} no es trivial y no se puede hacer con un Stern-Gerlach usual. Pasemos ahora a fijarnos en el caso de un observador O' , que se mueve con una velocidad v con respecto al marco de referencia O , donde la partícula tiene el estado 4-6. En este caso tenemos que aplicarle al estado una transformación de Poincaré

$$U(\Lambda) |\psi\rangle = c_1 U_1(W(\Lambda, p_1)) |\Lambda p_1, \sigma_{+z}\rangle + c_2 U_2(W(\Lambda, p_2)) |\Lambda p_2, \sigma_{+z}\rangle, \quad (4-8)$$

donde $U_1(W)$ y $U_2(W)$ son las rotaciones de Wigner que actúan sobre la etiqueta σ_{+z} de cada uno de los términos. Una vez más podemos ver cómo los grados de libertad de espín y momento se enredan vía las rotaciones de Wigner. El estado transformado 4-8, no es eigenestado del proyector

$$\hat{P}' = |\Lambda p_1, \sigma_{+n}\rangle \langle \Lambda p_1, \sigma_{+n}| + |\Lambda p_2, \sigma_{+n}\rangle \langle \Lambda p_2, \sigma_{+n}|, \quad (4-9)$$

para cualquier dirección $+n$. Por lo tanto, ya no se puede decir que la partícula esté en un estado definido de espín, ya que la matriz de densidad reducida para σ del estado 4-8 ya no representa un estado puro. El estado representado por la matriz de densidad reducida de espín será un estado mixto y la probabilidad de que se defleccione hacia un $+n$ no será igual a la unidad, al contrario de lo que se observa experimentalmente. De hecho el problema es más agudo; para cada componente de momento tenemos una etiqueta σ' distinta; si las componentes de momento son muy distintas entre sí, también lo serán los ejes de cuantización después de la transformación de Wigner.

En conclusión, en el caso de un estado cuántico de una partícula relativista en superposición de momento la matriz de densidad reducida, calculada con el procedimiento usual, no proporciona la información completa para describir un experimento de Stern-Gerlach fijo en el laboratorio observado desde distintos marcos de referencia.

4.2. Posibles soluciones al problema de la traza parcial

Ha habido diversas propuestas en artículos que han salido los últimos cinco años, de cómo solucionar o aclarar las inconsistencias presentadas en la sección anterior relativas al uso de la traza parcial en sistemas relativistas. A continuación discutiré uno de estos artículos y mencionaré algunos otros por su relevancia en el tema.

Parece que todo se reduce a conseguir los valores esperados correctos del espín para un conjunto de experimentos determinado en todos los sistemas de referencia inerciales. En ese sentido encontrar el operador adecuado es crucial. Una de las opciones para lograr esto es hacer el análisis de la medición del espín junto con el aparato con el que se va a medir, como se hace en [2]. Por ejemplo, si estamos realizando un experimento con un aparato de medición tipo Stern-Gerlach, entonces se puede acoplar el espín con el campo electromagnético del aparato en cuestión. Para evitar el problema que surge al emplear la traza parcial lo que se busca es hacer el acoplamiento de una manera covariante, garantizando que todos los observadores puedan obtener los mismos valores esperados para el mismo conjunto de experimentos.

En el caso en donde la medición se hace con un aparato Stern-Gerlach, el experimento se prepara de tal forma que, en el sistema de referencia O donde la partícula está en reposo, el

Hamiltoniano de interacción que describe el acoplamiento espín-aparato es:

$$\hat{H}_{SG} = -\hat{\mu}_0 \cdot \mathbf{B}_0, \quad (4-10)$$

donde \mathbf{B}_0 es el campo magnético en O , y $\hat{\mu}_0 = \alpha\hat{\mathbf{s}}$ es el operador de momento dipolar magnético ($\hat{\mathbf{s}} = \hbar\hat{\sigma}/2$ es el operador de espín para la partícula y α es el radio giromagnético). Ahora, los momentos dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}$ y dipolar eléctrico \mathbf{d} de una partícula, multiplicados por $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2}$, donde v es la velocidad de la partícula vista en algún sistema de referencia O' , forman un tensor antisimétrico D de la misma manera que el tensor electromagnético F , con las substituciones $E \rightarrow \gamma_v \mathbf{d}$ y $B \rightarrow \gamma_v \boldsymbol{\mu}$. Como en el marco de referencia donde la partícula está en reposo el valor para el operador de momento dipolar magnético es $\hat{\mu}_0 = \alpha\hat{\mathbf{s}}$ y el operador de momento dipolar eléctrico \hat{d}_0 es nulo, entonces, en un marco de referencia donde la partícula tiene velocidad v , el Hamiltoniano de interacción debe tener un término no nulo del campo eléctrico, y así el Hamiltoniano puede ser escrito como

$$\hat{H}_{SG}(p) = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot B - \hat{\mathbf{d}} \cdot E = -\frac{1}{2\gamma_v} Tr(\eta F \eta \hat{D}). \quad (4-11)$$

Acá, η es la matriz diagonal con elementos $\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33} = 1$ y $\eta_{00} = -1$, Tr la operación traza,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \alpha \left[\hat{\mathbf{s}} - \frac{\gamma_v}{\gamma_v + 1} v(v \cdot \hat{\mathbf{s}}) \right] \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{d}} = \alpha(v \times \hat{\mathbf{s}}). \quad (4-12)$$

Como se puede ver de las ecuaciones anteriores el Hamiltoniano \hat{H}_{SG} depende del momento ya que los operadores $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y $\hat{\mathbf{d}}$ dependen de la velocidad de la partícula. El tratamiento se puede afirmar como covariante por que si hacemos un cambio de marco de referencia representado con una transformación de Lorentz Λ , el Hamiltoniano de interacción en el nuevo marco se ve como

$$\gamma'_v \hat{H}'_{SG} = -\frac{1}{2} Tr(\eta \Lambda F \Lambda^T \eta \Lambda \hat{D} \Lambda^T) = \gamma_v \hat{H}_{SG}, \quad (4-13)$$

donde usamos la propiedad para Λ de la ecuación 2-8. Aquí vemos que el operador de espín que se encuentra en las expresiones correspondientes a los operadores de momento magnético dipolar y momento eléctrico dipolar (véase 4-12) se debe de transformar como parte de un tensor bajo una transformación de Lorentz por la descripción de interacción covariante. Los

autores afirman que ya construido el operador de la interacción los valores esperados para las mediciones de espín toman la forma

$$\frac{\langle \hat{H}_{SG}(p) \rangle}{|\lambda(\hat{H}_{SG}(p))|} \quad (4-14)$$

para cada valor de momento, siendo la misma expresión para cualquier sistema de referencia, donde $\langle \hat{H}_{SG}(p) \rangle$ es el valor de expectación del Hamiltoniano y $|\lambda(\hat{H}_{SG}(p))|$ el módulo de los eigenvalores. Así, continúan los autores, al tomar en cuenta todos los momentos del estado de la partícula, el operador correspondiente a las mediciones del espín asociadas a un aparato Stern-Gerlach finalmente queda como

$$\hat{M}_{SG} = \int d^3p |p\rangle \langle p| \otimes \frac{\hat{H}_{SG}(p)}{|\lambda(\hat{H}_{SG}(p))|} \quad (4-15)$$

con los estados en la representación ya mencionada $|p, \sigma(p)\rangle$. Esta es una respuesta posible a la problemática que arroja el uso de la traza parcial sobre sistemas cuánticos-relativistas con grado de libertad interno, sin embargo no es la única como se mencionará más adelante, tampoco creemos que sea la respuesta más satisfactoria al problema. Buscaremos ahondar en esta cuestión en estudios posteriores.

Ahora vale la pena mencionar algunos artículos que han destacado en la discusión de este tema, sólo para dar una idea del panorama que hay en este momento al respecto.

Comienzo, mencionando un artículo del año 2013 [3]. En este artículo el autor también obtiene un operador de espín relativista a través de la descripción física de la interacción de una partícula con el campo electromagnético del aparato Stern-Gerlach. Sin embargo, en este caso el formalismo que se utiliza para abordar el problema es distinto ya que se aplica la aproximación WKB a la ecuación de Dirac con acoplamiento mínimo. Una de las razones que se menciona en este artículo para hacer ver que es más ventajosa y adecuada la teoría de Dirac para solucionar este problema es la necesidad de utilizar una notación covariante que nos asegure que las predicciones estadísticas de los experimentos no dependan del marco de referencia, en el mismo espíritu de [2].

Otra alternativa, que no está relacionada con acoplar el espín de la partícula con el aparato que hace la medición, es presentada en [26], en donde los autores proponen la construcción

de matrices de densidad reducida efectivas para la variable secundaria del sistema (en este caso, el espín) equivalentes a las matrices de densidad reducida obtenidas por la traza parcial convencional pero capaces de describir los resultados que estas no pueden describir (véase 4.1). Esta construcción se hace a partir de una definición del operador de espín dependiente de las transformaciones $C(p, k)$ del conjunto complementario del grupo de Poincaré y por lo mismo de los momentos p y k .

Por último mencionaré un artículo [25] en el que plantean el problema de encontrar el operador relativista de espín adecuado desde una perspectiva distinta pero bastante interesante. En este caso los autores proponen tres condiciones necesarias para que un operador de espín pueda ser aceptado como tal. Ellos estudian todos los operadores de espín que se han propuesto en la literatura del tema y escogen como los correctos los únicos que cumplen con las siguientes condiciones: (i) El espín no convierte estados de energía positiva (negativa) a estados de energía negativa (positiva), (ii) el espín es un pseudovector y, por último, (iii) los eigenvalores del operador de proyección del espín en una dirección arbitraria no dependen de esta dirección. Las razones por las cuales escogen estas tres condiciones son las siguientes: (i) "El espín es un grado interno de la partícula, entonces conmuta con las traslaciones" [25] (ii) el espín tiene que transformarse igual que el momento angular total y (iii) por la isotropía del espacio. Ellos encuentran que cuatro operadores de espín cumplen con estos requerimientos, pero a pesar de que 4 operadores cumplen con sus requerimientos sólo uno de estos cumple también con el límite no relativista adecuado. Este operador de espín es equivalente a los operadores de espín de Newton-Wigner y el operador de espín Foldy-Wouthuysen [25].

Con esto termino la breve reseña del panorama en que se encuentra el camino a encontrar la solución correcta al problema de la traza parcial en sistemas relativistas.

Capítulo 5

Conclusiones

Como se mencionó en este trabajo, el formalismo de la traza parcial en mecánica cuántica no relativista ha demostrado ser muy efectivo para simplificar problemas de diferente índole, en particular dentro del área de la información cuántica. La extensión del uso de este formalismo a problemas de información cuántica en sistemas relativistas donde no cambia el número de partículas, parece natural. En este sentido, se han desarrollado trabajos de investigación en este campo en los cuales se emplea sistemáticamente esta herramienta teórica. La primer parte de este trabajo se centró en emplear dicha herramienta y discutir algunos resultados básicos de esta nueva área de la física moderna.

En esta primer parte se presentaron los resultados analíticos del artículo seminal de Asher Peres [5]. Él hace el cálculo de la entropía de von Neumann del espín para una partícula relativista, masiva y de espín $1/2$. En el artículo la partícula se encuentra en un estado cuántico coherente en representación de momento y el cálculo se hace desde dos marcos de referencia inerciales distintos (ver la sección 3.3). Usando la traza parcial, Asher Peres en su artículo obtiene que la entropía de espín cambia si se mide desde sistemas de referencia distintos. También se mostró un análisis numérico de este mismo problema, usando la traza parcial y además cambiando diferentes parámetros, como la anchura de la gaussiana o la velocidad de la partícula, obteniendo resultados similares a los de Peres (ver sección 3.3): La entropía no es un invariante de Lorentz. Al hacer los cálculos numéricamente, podemos extender su validez y estudiar casos donde no necesariamente $v \ll c$. También se hizo el mismo estudio a una partícula en un estado de gato de Schrödinger en representación de momento, es decir, una partícula cuya superposi-

ción continua de momento correspondía a una distribución de dos gaussianas simétricamente separadas. En este caso los resultados fueron similares; la entropía del grado de libertad correspondiente al espín cambia con el sistema de referencia en el que se mida. Para este estado el cambio de la entropía varía según la velocidad de la partícula, el ancho de las gaussianas y la separación entre ellas. La comparación entre los dos estados, el gaussiano y el de gato, nos muestra que el valor del aumento de la entropía es mayor para el estado gato. Estos resultados señalan que en condiciones relativistas los experimentos de información cuántica tienen que considerar que la entropía de un observable como el espín, que parece un candidato ideal para codificar la información cuántica, cambia de acuerdo al sistema de referencia en el que se haga el análisis del sistema.

Las conclusiones anteriores corresponden a sólo una parte del trabajo que se presenta aquí. Esto pertenece a un análisis que supone que el formalismo de la traza parcial es correcto para sistemas cuánticos y relativistas. Sin embargo, esta suposición parece no ser correcta, ya que usar la traza parcial de la forma que se ha venido usando, como en los ejemplos expuestos en este trabajo, trae inconsistencias serias. El problema es que las transformaciones que corresponden a la etiqueta discreta enlazan los grados de libertad de la partícula, provocando que las predicciones para un conjunto de experimentos dado no coincidan cuando estas predicciones se hacen desde marcos de referencia distintos. Como se mencionó, este no es un problema de invarianza relativista del fenómeno de la medición del espín, que sería muy grave, sino de la invarianza del formalismo que se está usando para describir el fenómeno. En esa dirección, ya se han planteado soluciones a este problema, como hacer una descripción covariante en términos de la descripción del sistema partícula-aparato de medición determinando el hamiltoniano de interacción y deduciendo de ahí el operador de espín relativista adecuado para obtener los valores esperados correctos para cada experimento, o tal vez proponer matrices de densidad efectivas para el sistema que se quiere estudiar, en este caso el espín, a través de introducción de un operador de espín dependiente del momento [2, 3, 19, 20, 23–28]. En todo caso, con estas y otras opciones que hay en la literatura del tema, aún no queda claro cuál es la respuesta definitiva al problema del uso de la traza parcial en sistemas relativistas. Este problema, que no es trivial, parece que no sólo se debe a una herramienta matemática mal usada, sino que posiblemente también es ocasionado por un problema de índole más esencial, la truculenta e

inaccesible unión de la teoría cuántica con la teoría de la relatividad. Así que, de alguna manera, la solución de este problema podría arrojar una nueva luz en el conocimiento de ambas teorías, una cuestión de suma importancia que merece todo nuestro interés.

Lo que sigue para mí en esta línea de trabajo es estudiar con más profundidad el problema de la medición del espín en sistemas relativistas, y entonces, encontrar una solución a las inconsistencias que surgen con el empleo de la traza parcial, o también, identificar cual de las soluciones propuestas es la más adecuada. Una vez hecho esto podría abordar los problemas de RQI, donde el número de partículas se mantiene fijo, de manera adecuada.

Apéndice A

Rotaciones de Wigner en su representación de 2×2

En este apéndice pondré algunos pasos claves para poder deducir la ecuación 3-19. Todos los pasos que se presentarán a continuación serán expuestos exactamente como en [21].

Primero, de la sección 3 recordemos que los boosts estándar L_q y L_p dependientes de los momentos q y $\Lambda q = p$ en la representación de 2×2 tienen la siguiente forma

$$L_q = \left(\frac{q_0 + m}{2m} \right)^{1/2} + \left(\frac{q_0 - m}{2m} \right)^{1/2} \frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}, \quad (\text{A-1})$$

$$L_p = \left(\frac{p_0 + m}{2m} \right)^{1/2} + \left(\frac{p_0 - m}{2m} \right)^{1/2} \frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (\text{A-2})$$

donde $\hat{\mathbf{J}} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ es el vector de Pauli y $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ y $\mathbf{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ son la parte espacial de los cuadri-momentos que caracterizan a estas transformaciones. En la misma representación de 2×2 los boosts Λ , dependientes de la velocidad v de la partícula, son

$$\Lambda = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}), \quad (\text{A-3})$$

donde \mathbf{e} es un vector unitario en la dirección en la que está hecho el boost y $\alpha = \text{arctanh}(v)$. Las matrices de Wigner se definen como $W(\Lambda, q) = L_p^{-1} \Lambda L_q$, y el producto de estos 3 factores

es igual a

$$\begin{aligned}
2mW(\Lambda, q) = & [(q_0 + m)(p + m)]^{1/2} [\cosh \frac{\alpha}{2} + \sinh \frac{\alpha}{2} (\hat{J} \cdot \mathbf{e})] \\
& - \frac{1}{|\mathbf{p}|} [(q_0 + m)(p_0 - m)]^{1/2} [\cosh \frac{\alpha}{2} (\hat{J} \cdot \mathbf{p}) \\
& + \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} + i\hat{J} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{e}))] \\
& + \frac{1}{|\mathbf{q}|} [(q_0 - m)(p_0 + m)]^{1/2} [\cosh \frac{\alpha}{2} (\hat{J} \cdot \mathbf{q}) \\
& + \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{q} + i\hat{J} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{q}))] \\
& - \frac{1}{|\mathbf{q}||\mathbf{p}|} [(q_0 - m)(p_0 - m)]^{1/2} \{ \cosh \frac{\alpha}{2} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + i\hat{J} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})] \\
& + \sinh \frac{\alpha}{2} [i(\mathbf{p} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{q} + (\hat{J} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}) - (\hat{J} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) + (\hat{J} \cdot \mathbf{p})\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}] \}.
\end{aligned} \tag{A-4}$$

Esta expresión para $2mW(\Lambda, q)$ puede ser escrita como

$$2mW(\Lambda, q) = A + B(\hat{J} \cdot \mathbf{q}) + C(\hat{J} \cdot \mathbf{e}) + iD\hat{J} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{e}) \tag{A-5}$$

si \mathbf{p} es expresado en términos de \mathbf{q} y \mathbf{e} . Los coeficientes A , B , C y D se pueden obtener de A-4, y cada uno puede ser simplificado considerablemente con las manipulaciones algebraicas adecuadas. A continuación definiré estos coeficientes pero sólo pondré algunos de los pasos algebraicos, las manipulaciones vienen más detalladas en [21], si el lector quisiera verlas puede consular la fuente.

$$\begin{aligned}
A = & [(q_0 + m)(p + m)]^{1/2} \cosh \frac{\alpha}{2} \\
& - \frac{1}{|\mathbf{p}|} [(q_0 + m)(p_0 - m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) \\
& + \frac{1}{|\mathbf{q}|} [(q_0 - m)(p_0 + m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{q}) \\
& - \frac{1}{|\mathbf{q}||\mathbf{p}|} [(q_0 - m)(p_0 - m)]^{1/2} \cosh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \\
= & \frac{2m}{[(q_0 + m)(p + m)]^{1/2}} [\cosh \frac{\alpha}{2} (q_0 + m) + \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})].
\end{aligned} \tag{A-6}$$

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{1}{|\mathbf{p}|}[(q_0 + m)(p_0 - m)]^{1/2} \cosh \frac{\alpha}{2} \\
&\quad + \frac{1}{|\mathbf{q}|}[(q_0 - m)(p_0 + m)]^{1/2} \cosh \frac{\alpha}{2} \\
&\quad - \frac{1}{|\mathbf{q}||\mathbf{p}|}[(q_0 - m)(p_0 - m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} [q_0 \sinh \alpha + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}) \cosh \alpha + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A-7}$$

$$\begin{aligned}
C &= [(q_0 + m)(p_0 + m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} \\
&\quad - \frac{1}{|\mathbf{p}|}[(q_0 + m)(p_0 - m)]^{1/2} \cosh \frac{\alpha}{2} [(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})(\cosh \alpha - 1) + q_0 \sinh \alpha] \\
&\quad - \frac{1}{|\mathbf{q}||\mathbf{p}|}[(q_0 - m)(p_0 - m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} [-\mathbf{q}^2 + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})^2 - q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}) \sinh \alpha \\
&\quad - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})^2 \cosh \alpha - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})^2 + q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}) \sinh \alpha + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})^2 \cosh \alpha] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A-8}$$

$$\begin{aligned}
D &= -\frac{1}{|\mathbf{p}|}[(q_0 + m)(p_0 - m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} \\
&\quad - \frac{1}{|\mathbf{q}|}[(q_0 - m)(p_0 + m)]^{1/2} \sinh \frac{\alpha}{2} \\
&\quad + \frac{1}{|\mathbf{q}||\mathbf{p}|}[(q_0 - m)(p_0 - m)]^{1/2} \cosh \frac{\alpha}{2} [q_0 \sinh \alpha + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})(\cosh \alpha - 1)] \\
&= \frac{-2m \sinh \frac{\alpha}{2}}{[(q_0 + m)(p_0 + m)]^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{A-9}$$

Tomando los resultados para A , B , C y D y sustituyéndolos en A-5, la matriz que representa al grupo pequeño queda

$$W(\Lambda, q) = \frac{1}{[(q_0 + m)(p_0 + m)]^{1/2}} \left(\cosh \frac{\alpha}{2} (q_0 + m) + \sinh \frac{\alpha}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}) - i \sinh \frac{\alpha}{2} [\hat{J} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{e})] \right). \tag{A-10}$$

Que es justo la ecuación 3-19 de la sección 3 que se quería deducir.

Bibliografía

- [1] Claude E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Echnical Journal*, 27:379–423, July 1948.
- [2] P. L. Saldanha and V. Vedral. Physical interpretation of the Wigner rotations and its implications for relativistic quantum information. *New J. Phys.*, 14(0234041), 2012.
- [3] M. C. Palmer, M. Takahashi, and H. F. Westman. WKB analysis of relativistic Stern-Gerlach measurements. *Ann. Phys.*, 336(505), 2013.
- [4] E. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz Group. *Ann Math.*, 40(149), 1939.
- [5] A. Peres, P. F. Scudo, and D. R. Terno. Quantum entropy and special relativity. *Phys. Rev. Lett*, 88(230402), 2002.
- [6] P. E. Luther. *Continuous Groups of Transformations*. Dover, 1961.
- [7] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields vol. 1*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics 3rd edn*. Wiley, 1999.
- [9] Karl Blum. *Density Matrix Theory and Applications*. Springer, 3 edition, 2012.
- [10] R. M. Gingrich and Adami. Quantum entanglement of moving bodies. *Phys. Rev. Lett.*, 89(270402), 2002.
- [11] H. Li and J. Du. Relativistic invariant quantum entanglement between the spins of moving bodies. *Phys. Rev. A*, 68(022108), 2003.

- [12] A. Peres and D. R. Terno. Quantum information and relativity theory. *Rev. Mod. Phys.*, 76:93–123, 2004.
- [13] S. D. Bartlett and D. R. Terno. Relativistically invariant quantum information. *Phys. Rev. A*, 71(012302), 2005.
- [14] A. Peres, P. F. Scudo, and D. R. Terno. Reply to comment on "quantum entropy and special relativity". *Phys. Rev. Lett.*, 94(078902), 2005.
- [15] P. Caban and J. Rembieliński. Lorentz-covariant reduced spin density matrix and Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm correlations. *Phys. Rev. A*, 72(012103), 2005.
- [16] T. F. Jordan, A. Shaji, and E. C. Sudarshan. Lorentz transformations that entangle spins and entangle momenta. *Phys. Rev. A*, 75(022101), 2007.
- [17] L. Lamata, M. A. Martin-Delgado, and E. Solano. Relativity and Lorentz invariance of entanglement distillability. *Phys. Rev. Lett.*, 97(250502), 2006.
- [18] J. Dunningham, V. Palge, and V. Vedral. Entanglement and nonlocality of a single relativistic particle. *Phys. Rev. A*, 80(044302), 2009.
- [19] S. Rastgoo and M. M. Golshan. Spin-momenta entanglement in moving frames: Properties of von Neumann entropy. *Pramana Jour. Phys.*, 81(3), 2013.
- [20] H. Bauke, S. Ahrens, C. H. Keitel, and R. Grobe. What is the relativistic spin operator? *New J. Phys.*, 16(043012), 2014.
- [21] F. R. Halpern. *Special Relativity and Quantum Mechanics*. Prentice-Hall, 1968.
- [22] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2001.
- [23] P. L. Saldanha and V. Vedral. Spin quantum correlations of relativistic particles. *Phys. Rev. A*, 85(062101), 2012.
- [24] P. L. Saldanha and V. Vedral. Wigner rotations and an apparent paradox in relativistic quantum information. *Phys. Rev. A*, 87(042102), 2013.

- [25] P. Caban, J. Rembieliński, and M. Włodarczyk. Spin operator in the diraac theory. *Phys. Rev. A*, 88(022119), 2013.
- [26] E. R. F. Taillebois and A. T. Avelar. Spin-reduced density matrices for relativistic particles. *Phys. Rev. A*, 88(060302), 2013.
- [27] T. Choi, J. Hur, and J. Jim. Relativistic effects on the spin entanglement of two massive dirac particles. *Phys. Rev. A*, 84(012334), 2011.
- [28] P. Caban and J. Rembieliński. Comment on relativistic effects on the spin entanglement of two massive dirac particles”. *Phys. Rev. A*, 86(066301), 2012.
- [29] E. Castro-Ruiz and E. Nahmad-Achar. Lorentz transformations for massive two-particle systems: entanglement change and invariant subspaces. *Physica Scripta*, 90(6), 2015.