UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría espectral para operadores acotados y aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Juan Pablo Hernández Preciado

TUTORA

Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Datos del alumno
Apellido paterno: Hernández
Apellido materno: Preciado
Nombre(s): Juan Pablo
Teléfono: 55353582
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela o facultad: Facultad de Ciencias
Carrera: Matemáticas
Número de cuenta: 413088352

Datos del tutor
Grado: Doctora
Apellido paterno: Folch
Apellido materno: Gabayet
Nombre(s): Magali Louise Marie

Datos del sinodal 1
Grado: Doctora
Apellido paterno: Meda
Apellido materno: Guardiola
Nombre(s): Ana

Datos del sinodal 2
Grado: Doctora
Apellido paterno: Sandoval
Apellido materno: Romero
Nombre(s): María de los Ángeles

Datos del sinodal 3
Grado: Doctora
Apellido paterno: Ortiz
Apellido materno: Rodríguez
Nombre(s): Adriana

Datos del sinodal 4
Grado: Doctor
Apellido paterno: Rosales
Apellido materno: González
Nombre(s): Ernesto

Datos del trabajo escrito
Título: Teoría espectral para operadores acotados y aplicaciones
Número de páginas: 85
Año: 2017

Índice general

Introducción

La teoría espectral surge alrededor del año 1905, a partir del intento de solucionar la ecuación

$$Tv = \lambda v, \tag{1}$$

siendo T un operador en un espacio vectorial V, con el fin de obtener una representación del operador que facilite su manipulación. Fue el matemático alemán David Hilbert quien introdujo el nombre de teoría espectral en su trabajo sobre los espacios de Hilbert y, para su sorpresa, su trabajo no solamente tuvo impacto en las matemáticas, sino también en diversas áreas de la física. Por mencionar algunas, se descubrió en el área de mecánica cuántica que la teoría espectral lograba explicar propiedades interesantes del espectro atómico, también se logró aplicar esta teoría a las ecuaciones integrales de Fredholm, y a la teoría de Sturm-Liouville. Además de tener implicaciones en la física, la teoría espectral aporta mucha información sobre los operadores, lo que simplifica de manera considerable la manera de trabajar con ciertos sistemas de ecuaciones.

En este trabajo abordaremos las implicaciones que tiene el estudio de la teoría espectral en las matemáticas, enfocándonos especialmente en tres aspectos. Primero sentaremos las bases para entender el teorema espectral para operadores autoadjuntos, presentando los operadores compactos y sus propiedades espectrales, así como una breve introducción a la teoría de proyecciones, la cual es necesaria para el teorema espectral. Una vez enunciado el teorema, lo aplicaremos para dar una prueba del clásico problema de momentos de Hamburger. Finalmente, utilizaremos un resultado de la teoría espectral para operadores compactos para proporcionar una prueba del teorema de Bohr para funciones casi periódicas.

Para lograr las metas anteriormente mencionadas, necesitamos empezar de lo más básico, preguntándonos ¿Qué pasa cuando tenemos un operador definido en un espacio de dimensión finita? Aunque no todos los operadores lineales definidos en espacios de dimensión finita tienen valores propios[1], en caso de tenerlos la teoría espectral se resume a un solo teorema, el cual proporciona una manera elegante de escribir al operador, con base en sus valores propios.

El siguiente ejemplo muestra un operador definido en un espacio de dimensión finita que no tiene valores propios.

Ejemplo 0.0.1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal que rota a un vector en $\mathbb{R}^2$ en un ángulo de $\pi/2$ grados. Geométricamente se puede ver que al rotar un vector en el plano $\mathbb{R}^2$, el vector rotado no es un múltiplo del vector

[1] Todos los operadores diagonalizables tienen valores propios, como se puede ver en [4].

original, pues no son colineales. De esta forma, podemos concluir que si $x \in \mathbb{R}^2$, entonces $Tx \neq \lambda x$. Así, el operador lineal T no tiene vectores propios, y por tanto tampoco valores propios.

Antes de enunciar el teorema espectral para operadores lineales en dimensión finita, necesitamos recordar algunos conceptos de álgebra lineal relacionados con los valores y los vectores propios, y con el operador adjunto.

Definición 0.0.1. Sea $T : V \to V$ un operador lineal definido en un espacio vectorial V de dimensión finita, con producto interno $\langle , \rangle$ y sobre un campo $\mathbb{K}$.

1. Se define [2] al operador adjunto de T, denotado por T^*, como el operador que cumple que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$.
2. Se dice que el operador T es normal si $TT^* = T^*T$
3. Se dice que el operador T es autoadjunto si $T = T^*$
4. Si existe un valor $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Tv = \lambda v$, para algún $v \in V$ vector no nulo, el vector v se llama vector propio de T, y el valor λ se llama valor propio asociado al vector propio v.
5. El espacio propio W_λ de T correspondiente al valor propio λ se define como el conjunto de todos los vectores propios correspondientes al valor propio λ, es decir,
$$W_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}.$$

Teorema 0.0.1. *Sea T un operador lineal definido en un espacio vectorial V de dimensión finita, con producto interno $\langle , \rangle$, sobre un campo $\mathbb{K}$, y supongamos que tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Supongamos que T es normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y que T es autoadjunto si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Para cada i ($1 \leq i \leq k$), sea W_i el espacio propio de T correspondiente al valor propio λ_i, y sea T_i la proyección ortogonal de V sobre W_i. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $V = W_i \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$
2. $W_i^\perp = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$, *sumando todos los espacios propios W_j, excepto el espacio W_i.*
3. $T_iT_j = \delta_{ij}T_i$, *para* $1 \leq i,j \leq k$.
4. $I = T_1 + T_2 + ... + T_k$, *donde I es el operador identidad.*
5. $T = \lambda_1T_1 + \lambda_2T_2 + ... + \lambda_kT_k$ *(Ésta es la representación espectral de T).*

[2] El operador adjunto de un operador T definido en un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno $\langle , \rangle$ siempre existe, como se puede ver en [4].

Este importante teorema es bastante útil y conocido, y su demostración se puede consultar en [4]. Es importante mencionar que esta representación no es válida en el caso en que el operador está definido en un espacio de dimensión infinita, y esto pasa principalmente por dos razones. La primera es que el operador podría no tener valores propios, y la segunda es que el espectro de un operador lineal definido en un espacio de dimensión infinita puede ser un conjunto muy complicado, a diferencia del caso de dimensión finita, en el que el espactro está formado únicamente por los valores propios del operador.

Como dijimos, existen operadores en espacios de dimensión infinita que no poseen valores propios, veamos un ejemplo que lo ilustre.

Ejemplo 0.0.2. Consideremos al operador desplazamiento a la izquierda en el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$. Este operador está definido como $T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$. Sean λ un escalar y $x \in l_2(\mathbb{N})$ tales que $Tx = \lambda x$. Entonces se tiene que $(x_2, x_3, ...) = \lambda((x_1, x_2, ...)$, de manera que $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2 = \lambda(\lambda x_1)$, $x_4 = \lambda x_3 = \lambda(\lambda(\lambda x_1))$, y así sucesivamente. Entonces tenemos que $x_i = \lambda^{i-1} x_1$. Por otro lado,

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 = x_1^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2(i-1)} \right).$$

Esta suma diverge para todos los valores λ tales que $|\lambda| \geq 1$. Si $|\lambda| < 1$, entonces $x = 0$. Así, el único $x \in l_2(\mathbb{N})$ que resuelve la ecuación debe ser el vector cero, que no puede ser un vector propio. Podemos concluir entonces que este operador carece de valores que solucionen la ecuación $Tv = \lambda v$, es decir, carece de valores propios (según esta definición).

Quisiéramos encontrar una representación equivalente a la que proporciona el teorema espectral en dimensión finita, pero para espacios de dimensión infinita. No lograremos encontrar una representación espectral para cualquier operador lineal definido en un espacio de dimensión arbitraria, pero sí podremos encontrar esta representación para cualquier operador lineal acotado y autoadjunto, y una vez hecho esto (no es algo rápido de hacer) enunciaremos un teorema fuerte de extensión de funciones (teorema de von Neumann), que nos permitirá extender cualquier operador simétrico a un operador autoadjunto, de manera que tal representación también valdrá para operadores simétricos.

Capítulo 1

Espectro y operadores compactos

1.1. Algunos conceptos y definiciones importantes

Para empezar, consideremos un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$, $X \neq \emptyset$, y sea $T : D(T) \to X$ un operador lineal, donde $D(T) \subseteq X$. Cuando queremos obtener información sobre un operador, es natural preguntarnos por sus valores propios, y como ya sabemos, para obtenerlos tenemos que analizar el operador T-λI, donde λ es un número complejo cualquiera e I es el operador identidad en X. Para no escribir cada vez el operador T-λI, sea

$$T_\lambda = (T - \lambda I).$$

Cuando T_λ sea invertible, definimos el operador $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$. Este operador comunmente se llama operador resolvente. Notemos que el resolvente de T es un operador lineal, siempre que T lo sea. Como ya aclaramos, si queremos estudiar al operador T, necesitamos analizar a R_λ, y para esto necesitaremos algunos conceptos básicos que se definen a continuación.

Definición 1.1.1. Sea $X \neq \emptyset$ un espacio normado, y sea $T : D(T) \to X$ un operador lineal.

1. Definimos el conjunto resolvente $\rho(T)$ como el conjunto de todos lo valores complejos λ tales que R_λ existe, R_λ es un operador acotado, y R_λ está definido en un conjunto que es denso en X. A un valor $\lambda \in \rho(T)$ le llamaremos valor regular de T.

2. El conjunto $\mathbb{C} - \rho(T) = \sigma(T)$ se llamará el espectro de T, y un valor $\lambda \in \sigma(T)$ se llamará valor espectral.

3. Al conjunto de valores λ tales que T_λ no sea invertible, le llamaremos espectro puntual, y lo denotaremos por $\sigma_p(T)$. Un valor $\lambda \in \sigma_P(T)$ se llama valor propio.

4. Al conjunto de valores λ tales que R_λ existe y está definido sobre un dominio denso, pero no es acotado, le llamaremos espectro continuo, y lo denotaremos por $\sigma_c(T)$.

5. Al conjunto de valores λ tales que R_λ existe, y está definida en un conjunto que no es denso en X, le llamaremos espectro residual, y lo denotaremos por $\sigma_r(T)$.

Para ilustrar mejor estos conceptos, estudiaremos algunos ejemplos y demostraremos algunas propiedades del operador R_λ y de los conjuntos anteriores, y más particularmente del espectro. Por ejemplo, es natural pensar que si X es de dimensión infinita, entonces existen valores espectrales que no son valores propios. Veamos un caso particular en que esto pasa.

Ejemplo 1.1.1. Sea T: $l_2 \to l_2$ el operador definido por

$$T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$$

sobre el espacio de Hilbert l_2 (que es de dimensión infinita).

Este operador es inyectivo, pues si suponemos que $x,y \in l_2$ son tales que $T(x)$=$T(y)$, entonces

$$T(x_1, x_2, ...) = T(y_1, y_2, ...),$$

lo que significa que

$$(0, x_1, x_2, ...) = (0, y_1, y_2, ...),$$

por lo que concluimos que

$$(x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...).$$

Así, 0 no es un valor propio, y como T no es suprayectivo, entonces no es invertible, por lo que 0 es un valor espectral.

Ahora probaremos un teorema que puede parecer pequeño, pero nos da una manera conveniente de representar al operador $(I-T)^{-1}$ bajo ciertas hipótesis. De aquí en adelante denotaremos por $B(X,X)$ al espacio de todos los operadores acotados en el espacio de Banach X.

Teorema 1.1.1. *Sea $T \in B(X,X)$. Si $\|T\| < 1$, entonces $(I-T)^{-1}$ es un operador lineal y acotado, y se cumple que*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} T^i = I + T + T^2 + T^3 + ...,$$

donde la serie $\sum_{i=1}^{\infty} T^i$ converge en la norma de $B(X,X)$.

Demostración. Sabemos que si T es acotado, entonces $(I-T)^{-1}$ es un operador lineal y acotado. Usaremos que $\|T^i\| \leq \|T\|^i$ (se puede ver la demostración de este hecho en [5]). Recordemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \|T\|^i$ converge cuando $\|T\| < 1$, y esto lo sabemos por hipótesis, de modo que $\sum_{i=1}^{\infty} \|T\|^i$ converge. Usando esto, y el hecho de que $\|T^i\| \leq \|T\|^i$, obtenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \|T^i\|$ también converge.

Como ya sabemos, convergencia absoluta implica convergencia, siempre que el espacio sea completo, y como el espacio $B(X, X)$ es completo por ser X un espacio de Banach, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} T^i$ converge. Nos falta probar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} T^i = (I-T)^{-1}.$$

Para esto, notemos que

$$(I-T)(I+T+...+T^n) = (I+T+...+T^n)(I-T) = I - T^{n+1}.$$

Cuando $n \to \infty$ se tiene que $T^{n+1} \to 0$ en la norma de $B(X, X)$, pues $\|T\| < 1$. De lo anterior obtenemos que

$$(I-T)(\sum_{i=1}^{\infty} T^i) = (\sum_{i=1}^{\infty} T^i)(I-T) = I$$

de donde se tiene que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} T^i = (I-T)^{-1}$, que es lo que queríamos probar. □

Como una aplicación muy importante de este teorema, probaremos a continuación que el espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal y acotado T es un conjunto cerrado. Para probar esto, utilizaremos también el siguiente lema, cuya demostración es bastante elemental y se puede encontrar en [5].

Lema 1.1.2. *Sean X un espacio de Banach, $T : X \to X$ un operador lineal, y $\lambda \in \rho(T)$. Supongamos que T es acotado. Entonces $R_\lambda(T)$ está definido en todo el espacio X y es acotado.*

Teorema 1.1.3. *El espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal y acotado T es un conjunto cerrado.*

Demostración. Para probar esto, veremos que el conjunto $\mathbb{C}$ - $\sigma(T) = \rho(T)$ es un conjunto abierto, es decir, para todo $\lambda_0 \in \rho(T)$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo λ que cumpla $|\lambda_0 - \lambda| < \epsilon$ se tiene que $\lambda \in \rho(T)$.

Sean $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces tenemos que

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}). \quad (1.1)$$

Sea $V = (I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1})$. Entonces la ecuación (1.1) se puede escribir como $T_\lambda = T_{\lambda_0} V$, y como $\lambda_0 \in \rho(T)$ y T es acotado, por el lema 1.1.2 se tiene que $R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0} \in B(X, X)$. Usando el teorema 1.1.1, obtenemos que el operador V tiene inversa

$$V^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^i = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i R_{\lambda_0}^i$$

en $B(X, X)$ para todos los valores λ tales que $\|(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\| < 1$, es decir,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}. \tag{1.2}$$

Como $T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X, X)$ y $T_\lambda = T_{\lambda_0} V$, entonces para todos los valores λ que satisfacen la ecuación (1.2) el operador T_λ tiene inversa $R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0} V)^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0}$ Así, los valores λ que satisfacen la ecuación (1.2) forman una vecindad (de valores regulares de T) para λ_0, lo que significa que $\rho(T)$ es abierto. □

Una pregunta natural después de ver este teorema es si el espectro $\sigma(T)$ es también un conjunto compacto. La respuesta a esta pregunta es sí, y es el teorema que demostraremos a continuación.

Teorema 1.1.4. *El espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal y acotado T definido en un espacio de Banach X es un conjunto compacto, y vive en el disco definido por $|\lambda| \leq \|T\|$.*

Demostración. Sea $\lambda \neq 0$. Por el teorema 1.1.1, tenemos que si $\|\frac{1}{\lambda} T\| < 1$, entonces

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda} T\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^j.$$

El mismo teorema nos dice que los valores λ que lo cumplen hacen que el operador $(T$ - $\lambda I)^{-1}$ sea invertible, es decir, tales valores pertenecen al conjunto $\rho(T)$.

Lo anterior significa que $\sigma(T)$ vive en el disco dado por $|\lambda| \leq \|T\|$, por lo que el espectro de T es un conjunto acotado, y como ya sabemos que es también un conjunto cerrado, tenemos que $\sigma(T)$ es en efecto un conjunto compacto. □

El siguiente teorema podría parecer que es inmediato, pero de hecho su prueba es bonita, y muy ilustrativa sobre el concepto de espectro. Veamos lo que nos dice.

Teorema 1.1.5. *Sean X un espacio de Banach complejo, $T \in B(X, X)$ y f un polinomio con coeficientes complejos. Entonces se cumple que $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$. Es decir, el espectro del operador $f(T)$ está formado por los valores que la función f toma en el espectro $\sigma(T)$ de T.*

Demostración. El caso cuando f es una constante es trivial, así que consideremos el caso cuando el grado del polinomio f es mayor o igual a 1, y supongamos que $\mu \in f(\sigma(T))$, esto significa que $\mu = f(\lambda)$ para algún valor $\lambda \in \sigma(T)$. El polinomio $f(z)$ - μ tiene raíz λ, y por el teorema del resto, existe un polinomio q tal que

$$f(z) - \mu = (z - \lambda)q(z).$$

Entonces $f(T)$ - μI = $(T$ - $\lambda I)q(T)$, donde el operador T - λI no es invertible, pues $\lambda \in \sigma(T)$. De este modo podemos concluir que el operador $f(T)$ - μI no es invertible (pues uno de los factores que lo conforman no lo es), y eso quiere decir que $\mu \in \sigma(f(T))$. Así, tenemos la contención $f(\sigma(T)) \subseteq \sigma(f(T))$.

Ahora probaremos que si $\mu \notin f(\sigma(T))$, entonces $\mu \notin \sigma(f(T))$, lo que nos permitiría concluir la contención $\sigma(f(T)) \subseteq f(\sigma(T))$, y por tanto la igualdad. Sea $\mu \notin f(\sigma(T))$, y consideremos el polinomio $f(z)$ - μ. Como X es un espacio de Banach sobre el campo $\mathbb{C}$, entonces este polinomio se puede factorizar en factores lineales como

$$f(z) - \mu = c_0(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \tag{1.3}$$

donde n es el grado del polinomio f. De la igualdad 1.3 se sigue que $f(\lambda_j) = \mu$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Notemos que λ_1,...,$\lambda_n \notin \sigma(T)$, pues si suponemos que $\lambda_j \in \sigma(T)$ para algún j $\in$ 1,...,n, entonces $\mu = f(\lambda_j) \in f(\sigma(T))$, y supusimos que esto no pasa, de modo que λ_1,...,$\lambda_n \notin \sigma(T)$. De la igualdad 1.3 obtenemos que

$$\mu I - f(T) = -c_0(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I). \tag{1.4}$$

Todos los factores del lado derecho de la igualdad 1.4 son invertibles, pues λ_1,...,$\lambda_n \notin \sigma(T)$. Entonces podemos concluir que μI - $f(T)$ también es invertible, y esto significa que $\mu \notin f(\sigma(T))$. □

Algo muy importante que nos falta probar, y que de hecho hemos usado en algunos de los teoremas que hemos probado hasta ahora, es que el espectro es un conjunto no vacío. Para hacer la demostración de este importante teorema se necesita el Teorema de Liouville y un lema que involucra al operador resolvente R_λ, ambos se enuncian a continuación, sin embargo, para poder comprenderlos tenemos que definir los siguientes conceptos.

Definición 1.1.2. Sea $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función cualquiera.

1. Sea G un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Se dice que la función h es holomorfa (o analítica) en G si h está bien definida y es diferenciable en G, es decir, la derivada h' de h definida como

$$h'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{h(\lambda + \Delta\lambda) - h(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

existe para todo $\lambda \in G$

2. Se dice que la función h es entera si h es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, es decir, si h es holomorfa en λ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

Definición 1.1.3. Sea X un espacio normado.

1. Una funcional lineal f es un operador lineal acotado con rango en el campo escalar del espacio normado X en el cual vive el dominio de f.

2. El conjunto de todas las funcionales lineales acotadas en X forma un espacio normado con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X, \|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

   Este espacio se llama el espacio dual de X y se denota con X'.

Definición 1.1.4. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, X un espacio de Banach complejo y $(S_\lambda)_{\lambda \in U} \subseteq B(X, X)$.

1. Se dice que la función $S : U \to B(X, X)$ definida por $S(\lambda) = S_\lambda$ es localmente holomorfa en U si para todo $x \in X$ y para todo $f \in X'$, la función h dada por

$$h(\lambda) = f(S_\lambda x)$$

   es holomorfa en cualquier $\lambda_0 \in U$ en el sentido de la definición 1.1.2.

2. La función S es holomorfa en U si S es localmente holomorfa en U y U es abierto y conexo.

3. La función S es holomorfa en un punto $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ si S es holomorfa en alguna ε-vecindad de λ_0.

El siguiente lema y el teorema de Liouville no los probaremos, pero sus demostraciones detalladas puede consultarse en [5] y [1] respectivamente. Ambos serán sumamente útiles para probar que el espectro de un operador lineal y acotado es no vacío.

Lema 1.1.6. *El operador resolvente $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ de un operador lineal $T : X \to X$ definido en un espacio de Banach complejo X es holomorfo en cualquier punto λ_0 del conjunto resolvente $\rho(T)$ de T, en el sentido de la defínción 1.1.4.*

Teorema 1.1.7. ***(Liouville)*** *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces la función f es constante.*

Teorema 1.1.8. *Si T es un operador lineal y acotado definido en un espacio de Banach complejo X, entonces el espectro $\sigma(T)$ del operador T es un conjunto no vacío.*

Demostración. Supongamos que $T \neq 0$, entonces $\|T\| \neq 0$. Por el teorema 1.1.1, el operador $(T - \lambda I)^{-1}$ se puede expresar en forma de serie como

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^{i}$$

y vimos que esta serie converge para todos los valores λ tales que $|\lambda| > \|T\|$, o equivalentemente, para los λ tales que $\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{\|T\|}$. Entonces la serie converge absolutamente para $\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{2\|T\|}$, es decir, $|\lambda| > 2\|T\|$. Para las λ que lo cumplen, se tiene que

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{i=1}^{\infty}\|\frac{1}{\lambda}T\|^{i} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \leq \frac{1}{\|T\|}.$$

Supongamos que $\sigma(T) = \emptyset$ y veamos que esta hipótesis nos lleva a una contradicción. Como $\sigma(T) = \emptyset$, entonces $\rho(T) = \mathbb{C}$, de manera que, usando el lema 1.1.6, R_λ es holomorfa para todo λ. Entonces si tomamos una $x \in X$ fija, y una $f \in X'$ fija, la función h definida como

$$h(\lambda) = f(R_\lambda x)$$

es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, es decir, h es una función entera. Sabemos que si una función es entera, entonces es continua, por lo que h es continua y por tanto acotada para los valores λ tales que $|\lambda| \leq 2\|T\|$. Pero h también es acotada para los valores λ tales que $|\lambda| \geq 2\|T\|$, pues $\|R_\lambda\| < \frac{1}{\|T\|}$ y

$$|h(\lambda)| = |f(R_\lambda x)| \leq \|f\|\|R_\lambda x\| \leq \|f\|\|R_\lambda\|\|x\| \leq \|f\|\frac{\|x\|}{\|T\|}.$$

Así, tenemos que h es una función entera y acotada en $\mathbb{C}$, de manera que, por el Teorema de Liouville (Teorema 1.1.7), la función h es constante. Recordemos que $x \in X$ y $f \in X'$ eran arbitrarias, de modo que si $h = cte$, podemos concluir que R_λ no depende de λ, y por tanto $(R_\lambda)^{-1} = T - \lambda I$ tampoco depende de λ, lo cual es imposible. Hemos llegado a una contradicción, y por tanto el teorema queda demostrado. $\square$

Ya tenemos establecidas algunas propiedades básicas y definiciones importantes, válidas para cualquier operador lineal, así que ya podemos empezar a trabajar con el primer tipo especial de operadores que vamos a considerar, que son los operadores compactos.

1.2. Propiedades de los operadores compactos

Los operadores lineales compactos son muy importantes al momento de aplicar la teoría espectral, y de hecho la definición de compacidad de un operador lineal compacto surge gracias a las ecuaciones integrales. Estos operadores también juegan un papel central en varios problemas de matemáticas aplicadas. La razón de que estos operadores tan especiales sean importantes en ciertos problemas, es que aunque estén definidos en espacios de dimesnión infinita, sus propiedades espectrales se parecen mucho a las de los operadores definidos en espacios de dimensión finita.

En esta sección estudiaremos las propiedades básicas de los operadores compactos, haciendo énfasis en la forma de caracterizarlos. De hecho, proporcionaremos tres formas diferentes de caracterizar un operador lineal compacto, y después empezaremos a trabajar con las propiedades espectrales de éstos. Nos daremos cuenta a lo largo de esta sección que la teoría espectral de operadores compactos se puede resumir a unos pocos resultados que hacen esta teoría muy accesible.

Definición 1.2.1. Sean X y Y espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ se llama operador lineal compacto, si T es lineal, y para todo subconjunto acotado M de X, se tiene que $T(M)$ es relativamente compacto, es decir, la cerradura $\overline{T(M)}$ de $T(M)$ es un conjunto compacto.

El primer teorema que probaremos sobre este tipo de operadores tiene una demostración bastante sencilla, pero es importante, pues nos dice como se relaciona este tema con la parte anterior, de hecho nos dice que todo lo que ya probamos en la sección anterior se cumple también para los operadores que consideraremos ahora.

Teorema 1.2.1. *Sean X y Y espacios normados. Entonces*
(a) Todo operador lineal compacto T: $X \to Y$ es acotado.
(b) Si dim $X = \infty$, el operador identidad I: $X \to X$ es un operador no compacto.

Demostración. (a) Sea T un operador compacto, y consideremos el conjunto $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, es decir la esfera unitaria en X. Este conjunto es acotado, y como T es compacto, entonces $\overline{T(U)}$ es compacto, y por tanto es acotado, de modo que $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$. Así, el operador T es acotado.

(b) Consideremos la bola unitaria en X, $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Este conjunto es acotado, sin embargo, sabemos[1] que la bola unitaria en un espacio Z es un conjunto compacto si y solo si $dimZ < \infty$, y como $dimX = \infty$ entonces podemos concluir que M no es un conjunto compacto, de modo que $I(M) = M = \overline{M} = \overline{I(M)}$ no es compacto. □

Ahora probaremos algunos teoremas de convergencia de operadores compactos, que ayudarán a poder saber cuando algún operador lo es. Sus demostraciones además ayudan a entender mejor el concepto de compacidad.

[1] La demostración de este importante resultado puede consultarse en [7]

El siguiente teorema será muy útil en adelante, pues nos da un criterio para poder identificar a un operador compacto, y de hecho se usará fuertemente el teorema que nos dice cómo caracterizar a un conjunto compacto usando sucesiones (compacto por sucesiones).

Teorema 1.2.2. *Sean X y Y espacios normados, y T: $X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es compacto si y solo si $(T(x_n))$ es una sucesión en el espacio Y que tiene una subsucesión convergente, para todo $(x_n) \subseteq X$ sucesión acotada.*

Demostración. **Necesidad**: Si T es un operador compacto y (x_n) es una sucesión acotada, entonces $\overline{(T(x_n))}$ es un compacto en Y, y por tanto $(T(x_n))$ tiene una subsucesión convergente.

Suficiencia: Supongamos que para todo (x_n) sucesión acotada se cumple que la sucesión $(T(x_n))$ contiene una subsucesión convergente $(T(x_{n_k}))$. Sea $B \subseteq X$ un conjunto acotado, y sea (y_n) una sucesión cualquiera en T(B).

Entonces $y_n = Tx_n$ para alguna $x_n \in B$, y (x_n) es acotada, pues B lo es. Entonces por hipótesis $T(x_n)$ contiene una subsucesión convergente. Esto quiere decir que $\overline{T(B)}$ es compacto, pues es compacto por sucesiones. Así, T es un operador compacto. □

Corolario 1. *Si T_1 y T_2 son dos operadores compactos y α es un escalar, entonces $T_1 + \alpha T_2$ es un operador compacto.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión acotada. Primero probemos que αT_2 es un operador compacto. Probaremos que la sucesión $(\alpha T_2(x_n))$ contiene una subsucesión convergente, y entonces por el teorema 1.2.2 podremos concluir que αT_2 es en efecto un operador compacto.

Ya sabemos que la sucesión $(T_2(x_n))$ contiene una subsucesión convergente (por ser T_2 un operador compacto), digamos $(T_2(x_{nk}))$, de modo que $(\alpha T_2(x_{nk}))$ es una subsucesión convergente de la sucesión $(\alpha T_2(x_n))$, que es lo que buscábamos.

Nos falta ver que $T_1 + \alpha T_2$ es compacto. Veamos que $(T_1 + \alpha T_2)(x_n) = T_1(x_n) + \alpha T_2(x_n)$ tiene una subsucesión convergente. Ya sabemos que $\alpha T_2(x_{nk})$ es una subsucesión convergente de la sucesión $\alpha T_2(x_n)$, y como T es un operador compacto, tenemos que $T_1(x_n)$ tiene una subsucesión convergente $T_1(x_{nl})$, de modo que $T_1(x_{nl}) + \alpha T_2(x_{nk})$ es una subsucesión convergente de la sucesión $T_1(x_n) + \alpha T_2(x_n)$. □

Así, podemos concluir que el espacio de todos los operadores lineales compactos es un espacio vectorial.

Otra manera de comprobar si un operador es compacto, es vía un bonito teorema que probaremos a continuación, que sugiere en vagas palabras que el límite uniforme de operadores compactos, es también un operador compacto.

Teorema 1.2.3. *Sea (T_n) una sucesión de operadores lineales compactos definidos de un espacio normado X en un espacio de Banach Y. Si se tiene que $\| T_n - T\| \to 0$, entonces el operador T es compacto.*

Demostración. Probaremos que si (x_m) es una sucesión acotada en X, entonces su imagen (Tx_m) tiene una subsucesión convergente, lo que implica, usando el teorema 1.2.2 que el operador T es compacto.

Como T_1 es compacto, (x_m) tiene una subsucesión $(x_{1,m})$ tal que $(T_1 x_{1,m})$ es de Cauchy. De la misma manera, $(x_{1,m})$ tiene una subsucesión $(x_{2,m})$ tal que $(T_2 x_{2,m})$ es de Cauchy. Si seguimos de esta manera, podemos observar que la sucesión diagonal $(y_m) = (x_{m,m})$ es una subsucesión de la sucesión (x_n), y cumple que para todo entero positivo n, la sucesión $(T_n y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Sabemos que la sucesión (x_m) es acotada, digamos que $\|x_m\| \leq c$, para toda m. Entonces $\|y_m\| \leq c$, para toda m. Sea $\varepsilon > 0$. Como $T_n \to T$, existe $n = p$ tal que $\| T - T_p\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Como $(T_n y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe N tal que $\| T_p y_j - T_p y_k\| < \frac{\varepsilon}{3c}$, para $j, k > N$. De este modo, obtenemos que $\| Ty_j - Ty_k\| \leq \| Ty_j - T_p y_j\| + \| T_p y_j - T_p y_k\| + \| T_p y_k - Ty_k\| \leq \| T - T_p\| \, \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \| T - T_p\| \, \|y_k\| < \frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon$.

Esto prueba que la sucesión (Ty_n) es de Cauchy en Y, y como Y es de Banach, entonces es una sucesión convergente. Es claro que podemos concluir que el operador T es compacto, pues (y_n) es una subsucesión de la sucesión acotada (x_n). □

Antes de probar el teorema que sigue, necesitamos recordar un concepto que será fundamental para su demostración.

Definición 1.2.2. Una sucesión (x_n) en un espacio normado X converge débilmente si existe una $x \in X$ tal que para todo funcional $f \in X'$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Este tipo de convergencia se denota como $x_n \xrightarrow{w} x$.

Teorema 1.2.4. *Sean X y Y espacios normados y T: $X \to Y$ un operador lineal compacto. Sea (x_n) una sucesión que converge débilmente a un punto x, es decir $x_n \xrightarrow{w} x$. Entonces (Tx_n) converge fuertemente en Y y su límite es $y = Tx$.*

Demostración. Sean $y_n = Tx_n$, $y = Tx$.

Primero probaremos que $y_n \xrightarrow{w} y$, y después que $y_n \to y$.

Sea g una funcional lineal en Y, sea f definida como $f(z) = g(Tz)$, $z \in X$, con f cualquiera. Entonces f es acotada y lineal, pues T es compacto y por tanto acotado, y se tiene que

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\|\|Tz\| \leq \|g\|\|T\|\|z\|.$$

La definición de convergencia débil de (x_n) implica que $f(x_n) \to f(x)$, de modo que $g(Tx_n) \to g(Tx)$, es decir, $g(y_n) \to g(y)$ y como g era cualquier funcional acotado, queda demostrado que $y_n \xrightarrow{w} y$.

Nos falta probar que $y_n \to y$. Para esto supongamos que no se cumple. Entonces (y_n) tiene una subsucesión (y_{n_k}) tal que $\|y_{nk} - y\| \geq m$, para alguna $m > 0$, para toda k. Como (x_n) converge débilmente, (x_n) es acotada, y (x_{nk}) también lo es. Como T es compacto, por la caracterización que tenemos de operadores compactos, sabemos que (Tx_{nk}) tiene una subsucesión convergente, llamémosle (z_j). Supongamos que $(z_j) \to z$.

Entonces $(z_j) \xrightarrow{w} z$, de modo que $z = y$. Así, $\| z_j$ - $y \| \to 0$, pero

$$\|z_j - y\| \geq m > 0,$$

y esto es una contradicción, por lo que debe ser cierto que

$$y_n \to y.$$

□

Definición 1.2.3. Sea B un subconjunto de un espacio métrico X y sea $\varepsilon > 0$.

1. Un conjunto $M_\varepsilon \subseteq X$ se llama una ε-red para B si para todo $z \in B$ existe un punto $y \in M_\varepsilon$ tal que $d(z, y) < \varepsilon$.

2. El conjunto B es totalmente acotado si existe una ε-red finita $M_\varepsilon \subseteq X$ para B, y en este caso finita significa que tenga una cantidad finita de elementos.

El lema que se enuncia a continuación lo necesitaremos para demostrar una propiedad importante que relaciona a un operador compacto con su adjunto, sin embargo no lo demostraremos porque su demostración utiliza muchos argumentos de topología, y ese no es nuestro objetivo. Una demostración bastante completa se puede encontrar en [5].

Lema 1.2.5. *Sea B un subconjunto de un espacio métrico X. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.*
(a) Si B es relativamente compacto, entonces es totalmente acotado.
(b) Si B es totalmente acotado y X es completo, entonces B es relativamente compacto.
(c) Si B es totalmente acotado, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-red finita para B.
(d) Si B es totalmente acotado, entonces B es separable (tiene un subconjunto denso y numerable).

Definición 1.2.4. Sean X y Y espacios normados, y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. El operador adjunto de T, $T^* : Y' \to X'$ es el operador que cumple

$$(T^*g)(x) = g(Tx),$$

donde $g \in Y'$ y X' y Y' son los espacios duales de X y Y, respectivamente.

Aunque esta definición de operador adjunto no coincide con el operador adjunto de un operador lineal entre espacios de Hilbert, ambos adjuntos tienen la misma norma que el operador original, y además, en el caso en que X y Y son espacios de Hilbert, ambos adjuntos están relacionados, como se puede ver en [5].

Teorema 1.2.6. *Sea $T\colon X \to Y$ un operador lineal, donde X y Y son espacios normados sobre $\mathbb{R}$. Si T es compacto, entonces su adjunto $T^* : Y' \to X'$ también es compacto.*

Demostración. Sea B un subconjunto acotado del espacio Y', entonces

$$\|g\| \leq c,$$

para todo $g \in B$. Probaremos que $T^*(B) \subseteq X'$ es totalmente acotado, de modo que $T^*(B)$ será relativamente compacto por ser X' completo.

Para ver que $T^*(B)$ es totalmente acotado, debemos probar que para cualquier $\varepsilon_0 > 0$, $T^*(B)$ contiene una ε_0-red finita. Sea $U = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, ya sabemos que el conjunto U es acotado, y como T es compacto, entonces $T(U)$ es relativamente compacto, de modo que $T(U)$ es totalmente acotado, aplicando el lema 1.2.5 (a). Usando el inciso (c) del lema 1.2.5 podemos ver que existe una ε_1-red $M \subseteq T(U)$ para $T(U)$, con $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{4c}$. Esto quiere decir que el conjunto U contiene puntos $x_1, ..., x_n$ tales que para todo $x \in U$ se tiene que

$$\|Tx - Tx_j\| < \frac{\varepsilon_0}{4c}$$

para alguna $j \in \{1, ..., n\}$.

Sea A: $Y' \to \mathbb{R}^n$ definida por $Ag = (g(Tx_1), g(Tx_2), ...g(Tx_n))$. El operador g es acotado por hipótesis y T es acotado por ser un operador compacto. Entonces A es compacto, pues es acotado y $dimA(Y') < \infty$. Como B es acotado, $A(B)$ es relativamente compacto, y por el lema 1.2.5 (a) es totalmente acotado. Usando el inciso (b) del lema 1.2.5 tenemos que $A(B)$ contiene una ε_2-red finita $\{Ag_1, ..., Ag_m\}$ para $A(B)$, con $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0}{4}$, lo que significa que el conjunto B contiene puntos (funciones) $g_1, ..., g_m$ tales que para cada $g \in B$ se cumple que

$$\|Ag - Ag_k\|_0 < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

para alguna k, y donde $\|\cdot\|_0$ es la norma en $\mathbb{R}^n$. Nos resta probar que $T^*g_1, ..., T^*g_m$ es la ε_0-red que necesitamos para $T^*(B)$, una vez que probemos esto habremos acabado.

Ya sabemos que $Ag = (g(Tx_1), g(Tx_2), ...g(Tx_n))$ y que $\|Ag - Ag_k\|_0 < \frac{\varepsilon_0}{4}$, para alguna k, de donde obtenemos que para toda j, y para todo $g \in B$ existe una k tal que

$$|g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2 = \|A(g - g_k)\|_0 < (\frac{\varepsilon_0}{4})^2.$$

Sea $x \in U$. Entonces existe una j tal que $\|Tx - Tx_j\| < \frac{\varepsilon_0}{4c}$. Sea $g \in B$. Entonces existe una k tal que $\|Ag - Ag_k\|_0 < \frac{\varepsilon_0}{4}$, y se cumple que $|g(Tx_j) - g_k(Tx_j)|^2 < (\frac{\varepsilon_0}{4})^2$ para esta k y para toda j. Así, tenemos que $|g(Tx) - g_k(Tx)| \leq |g(Tx) - g(Tx_j)| + |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)| + |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)| < \|g\|\|Tx - Tx_j\| + \frac{\varepsilon_0}{4} + \|g_k\|\|Tx_j - Tx\| \leq c\frac{\varepsilon_0}{4c} + \frac{\varepsilon_0}{4} + c\frac{\varepsilon_0}{4c} < \varepsilon_0$.

Esto se cumple para todo $x \in U$, y por la definición de T^* tenemos que $g(Tx) = (T^*g)(x)$, por lo que tenemos que

$$\|T^*g - T^*g_k\| = \sup_{\|x\|=1} |(T^*(g - g_k))(x)| = \sup_{\|x\|=1} |g(Tx) - g_k(Tx)| < \varepsilon_0.$$

Entonces $\{T^*g_1, ..., T^*g_m\}$ es una ε_0-red para $T^*(B)$, de modo que $T^*(B)$ es totalmente acotado, y por tanto relativamente compacto por el inciso (b) del lema 1.2.5. Como B era cualquier conjunto acotado de Y', se tiene que T^* es compacto. □

Una pregunta natural que surge después de ver este teorema, es si el regreso"(la condición de suficiencia) también vale, es decir, ¿Es cierto que si T^* es un operador compacto, entonces T es compacto? La respuesta es sí, sin embargo para probarlo necesitaremos utilizar el siguiente lema. Su demostración se puede consultar en [9].

Lema 1.2.7. *Sean X y Y dos espacios de Banach, y sea T un operador lineal acotado $T : X \to Y$, entonces $(T^*)^* J_X = J_Y T$ donde J_X es el mapeo canónico de X en X'', es decir*

$$(J_X(x))(f) = f(x)$$

para todo $x \in X$, $f \in X'$, y J_Y el correspondiente mapeo canónico de Y en Y''.

Teorema 1.2.8. *Supongamos que T^*: $Y' \to X'$ es un operador compacto, entonces necesariamente se cumple que T es también un operador compacto.*

Demostración. Como T^* es compacto, por el teorema 1.2.6 $(T^*)^*$ es compacto. Además el operador $J_Y : Y \to Ran(J_Y)$ es acotado e invertible con inversa acotada (es una isometría, aunque esto no lo probaremos). Usando el lema 1.2.7, tenemos que $T = (J_Y)^{-1}(T^*)^* J_X$, y como $(T^*)^*$ es compacto y $(J_Y)^{-1}$ y J_X son acotados, entonces $(J_Y)^{-1}(T^*)^* J_X$ es compacto, por lo que podemos concluir que T es compacto. □

Esto prueba una nueva caracterización que tenemos para los operadores compactos, nos dice que un operador T es compacto si y sólo si su operador adjunto lo es, y esto se llama el Teorema de Schauder.

Como resumen de esta pequeña sección, tenemos la siguiente caracterización para los operadores compactos.

Teorema 1.2.9. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces son equivalentes*
(a) T es compacto.
(b) $(T(x_n)) \subseteq Y$ contiene una subsucesión covergente, para toda $(x_n) \subseteq X$ sucesión acotada.
(c)T^* es compacto.
(d)T es límite de operadores compactos.

Con estas tres posibles maneras de verificar si un operador es compacto terminamos con las propiedades básicas de los operadores compactos, y ahora nos concentraremos en sus propiedades espectrales, es decir, las propiedades del espectro, de los valores propios, de los valores espectrales, del operador asociado T_λ, y de los espacios propios asociados a un operador compacto.

1.3. Espectro de los operadores compactos

La teoría espectral de operadores compactos es una simple generalización de la teoría de valores propios para matrices en dimensión finita, y es bastante parecida a la teoría espectral en el caso de dimensión finita en varios sentidos.

Por ejemplo, si consideramos un operador compacto T en un espacio normado X, el conjunto de valores propios de T es numerable (puede ser finito e incluso vacío), y además el único punto de acumulación posible de tal conjunto es el valor $\lambda = 0$. También es cierto para este tipo de operadores que si λ es un valor propio tal que $\lambda \neq 0$, entonces cualquier espacio propio de T asociado a λ es de dimensión finita. Estos teoremas y varios más serán demostrados en lo que resta de esta sección, con el fin de resaltar el parecido entre la teoría espectral para operadores compactos, y la teoría espectral en el caso de dimensión finita.

El primer teorema que probaremos está relacionado con valores propios, y es mucho más útil de lo que parece. Nos dice que el espectro puntual de un operador compacto es un conjunto sencillo (no muy sofisticado). Antes de enunciarlo necesitamos recordar lo que afirma el lema de Riesz, que será una herramienta esencial en su demostración. Su prueba es bastante conocida y se puede consultar en [5].

Lema 1.3.1. ***(Riesz)*** *Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X. Supongamos que Y es cerrado, y que $Y \subseteq Z$ propiamente. Entonces para todo $0 < \theta < 1$ existe un elemento $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Teorema 1.3.2. *Sean X un espacio normado y $T : X \to X$ un operador compacto. Entonces el conjunto de valores propios de T es numerable, y el único punto de acumulación posible es $\lambda = 0$.*

Demostración. Basta probar que el conjunto de todos los valores $\lambda \in \sigma_p(T)$ tales que $|\lambda| \geq k$, para toda k es finito. Esto porque queremos probar que $\sigma_p(T)$ es a lo más numerable.

Para probarlo, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe un valor $k_0 > 0$ de tal forma que hay una infinidad de valores λ que cumplen $|\lambda| \geq k_0$, o equivalentemente, hay una sucesión (λ_n) de infinitos valores propios diferentes tal que $|\lambda_n| \geq k_0$. Como esta sucesión está formada por valores propios, también se cumple que $Tx_n = \lambda_n x_n$, para alguna $x_n \neq 0$. Los vectores propios $x_1, ..., x_n$ correspondientes a distintos valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de un operador lineal T en un espacio vectorial X conforman un conjunto linealmente independiente.

Sea $M_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle$. Entonces cada $x \in M_n$ tiene una representación única $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, de manera que

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + ... + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} \tag{1.5}$$

de modo que $(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}$ para toda $x \in M_n$ (esto porque $(T - \lambda_n I)$ ya no depende de x_n, como podemos ver de la igualdad 1.5). Notemos que al ser subespacios de dimensión finita de un espacio normado X, todos los M_n son cerrados. Entonces podemos aplicar el lema 1.3.1 (lema de Riesz), y obtener que existe una sucesión $(y_n) \in M_n$ tal que $\|y_n\| = 1$, y $\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in M_{n-1}$.

Probaremos que si $n < m$, entonces $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}k_0$, y entonces podremos concluir que (Ty_n) no tiene subsucesiones convergentes, pues $k_0 > 0$, y como la sucesión (y_n) es acotada, por la caracterización que tenemos de operadores compactos, tendremos una contradicción al supuesto de que T es compacto, y habremos acabado.

Sea $z = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m$, entonces $Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - z$. Consideremos $m < n$, y veamos que $z \in M_{n-1}$. Como $m \leq n-1$, entonces $y_m \in M_m \subseteq M_{n-1} = \langle x_1, ..., x_{n-1} \rangle$. De este modo, podemos concluir que $Ty_m \in M_{n-1}$, pues $Tx_j = \lambda_j x_j$.

Como vimos al principio de la demostración, $(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}$ para toda $x \in M_n$, entonces $\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}$, pues $y_n \in M_n$. Además recordemos que $z = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m$, y como ya sabemos que $Ty_m \in M_{n-1}$, entonces $z \in M_{n-1}$. Notemos que $x = \lambda_n^{-1} z \in M_{n-1}$, de modo que $\|\lambda_n y_n - z\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda_n| \geq \frac{1}{2}k_0$, pues $|\lambda_n| \geq k_0$.

Recordemos que buscábamos probar que $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}k_0$, esto se cumple si sustituimos z en la expresión anterior, y obtenemos que $\|\lambda_n y_n - z\| = \|\lambda_n y_n - \lambda_n y_n + Ty_n - Ty_m\| = \|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}k_0$. Entonces llegamos a una contradicción, y el teorema queda probado. □

Este teorema muestra que si un operador compacto tiene una cantidad infinita de valores propios, éstos se pueden ordenar de tal manera que formen una sucesión que converge a cero.

El lema que se enuncia a continuación afirma que la composición de dos operadores compactos es un operador compacto, y tiene muchas aplicaciones. Por el momento lo utilizaremos para el corolario al teorema 1.3.4.

Lema 1.3.3. *Sea $T : X \to X$ un operador lineal compacto y $S : X \to X$ un operador lineal acotado definidos en un espacio de Banach X. Entonces ST y TS son operadores compactos.*

Demostración. Sea $B \subseteq X$ un conjunto acotado. Como S es un operador acotado, entonces $S(B)$ es un conjunto acotado, y entonces $T(S(B))$ es relativamente compacto por ser T un operador compacto. Así, TS es un operador compacto.

Veamos que ST también es compacto: Sea (x_n) una sucesión acotada en X. Por el teorema 1.2.9 (Tx_n) contiene una subsucesión convergente (Tx_{nk}), de modo que (STx_{nk}) es convergente. Por tanto, ST es un operador compacto, que es lo que queríamos probar. $\square$

Ahora probaremos un teorema que nos permitirá probar un resultado interesante en la teoría espectral de operadores compactos, que afirma que para todo valor propio de un operador compacto T (puede ser que el operador no tenga valores propios, como dijimos al inicio de este trabajo), el espacio propio correspondiente tiene dimensión finita. Para probar esto, necesitamos el siguiente teorema:

Teorema 1.3.4. *Sea $T : X \to X$ un operador compacto definido en un espacio normado X. Entonces para todo $\lambda > 0$ se tiene que el núcleo del operador T_λ, $Nuc(T_\lambda)$, es de dimensión finita.*

Demostración. Sabemos que un espacio Y es de dimensión finita si y solo si la bola unitaria cerrada M es en conjunto compacto en Y. Probaremos entonces que la bola unitaria M en $Nuc(T_\lambda)$ es un conjunto compacto.

Sea (x_n) una sucesión en M. Entonces (x_n) es acotada y (Tx_n) tiene una subsucesión convergente (Tx_{nk}). Como $x_n \in M \subseteq Nuc(T_\lambda)$, entonces

$$T_\lambda x_n = Tx_n - \lambda x_n = 0,$$

de modo que $x_n = \lambda^{-1}Tx_n$, pues $\lambda \neq 0$. Así, $(x_{n_k}) = (\lambda^{-1}Tx_{n_k})$ es una sucesión convergente, y su límite permanece en M por ser M un conjunto cerrado. Entonces tenemos que toda sucesión en M contiene una subsucesión acotada, y el límite de tal sucesión está en M, por lo que podemos concluir que M es compacto, y entonces $Nuc(T_\lambda)$ es de dimensión finita. $\square$

Corolario 2. *Sea $T : X \to X$ un operador lineal compacto definido en una espacio normado X. Entonces para todo $\lambda \neq 0$ se tiene que $dimNuc(T_\lambda^n) < \infty$, y $\{0\} = Nuc(T_\lambda^0) \subseteq Nuc(T_\lambda) \subseteq Nuc(T_\lambda^2) \subseteq ...$*

Demostración. Supongamos que $x \in Nuc(T_\lambda^n)$. Como T_λ es lineal, $T_\lambda(0) = 0$, entonces si $T_\lambda^n x = 0$, tenemos que $T_\lambda^{n+1}x = 0$, y queda demostrado que $\{0\} = Nuc(T_\lambda^0) \subseteq Nuc(T_\lambda) \subseteq Nuc(T_\lambda^2) \subseteq ...$

Por el teorema del binomio, tenemos que

$$T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k(-\lambda)^{n-k} = (-\lambda)^n I + T\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}$$

Esto se puede ver como $T_\lambda^n = W - \mu I$, donde $\mu = -(-\lambda)^n, W = TS = ST$, y S es el operador $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}$. Como el operador T es compacto y el operador S es acotado (pues T es acotado por ser compacto), podemos concluir usando el lema 1.3.3, que W es compacto, y aplicando el teorema 1.3.4

al operador $W - \mu I$ tenemos que $dimNuc(T_\lambda^n) < \infty$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Ya trabajamos un poco con los núcleos de los operadores T_λ asociados a un operador compacto $T : X \to X$, y ya tenemos incluso un resultado importante que de cierta manera caracteriza al núcleo de un operador T_λ, que es el que dice que su dimensión es finita (de hecho la dimensión del ncleo de cualquier potencia es finita) en caso de que el operador T sea compacto.

Ahora consideremos los rangos. Recordemos que ya sabemos que el núcleo de un operador lineal acotado siempre es un espacio cerrado, sin embargo el rango de un operador de este estilo no siempre lo es. El importante teorema que probaremos a continuación es la respuesta a esta pregunta, y de hecho tiene todo que ver con el operador $T_\lambda = T - \lambda I$.

Teorema 1.3.5. *Sea $T : X \to X$ un operador lineal compacto definido en un espacio normado X. Entonces para todo $\lambda \neq 0$ el rango de $T_\lambda = T - \lambda I$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Denotaremos el rango de un operador T por $Ran(T)$. Supongamos que $Ran(T_\lambda)$ no es un conjunto cerrado. Entonces existen $y \in \overline{Ran(T_\lambda)}$ tal que $y \notin Ran(T_\lambda)$, y una sucesión (x_n) en X tal que

$$y_n = T_\lambda x_n \to y.$$

Probemos que $x_n \notin Nuc(T_\lambda)$, pero que $Nuc(T_\lambda)$ contiene una sucesión (z_n) tal que $\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$, donde δ_n es la distancia que hay de x_n a $Nuc(T_\lambda)$.

Como $Ran(T_\lambda)$ es un espacio vectorial, $0 \in Ran(T_\lambda)$. Sabemos que $y \notin Ran(T_\lambda)$, de modo que $y \neq 0$. Entonces $y_n \neq 0$ y por tanto $x_n \notin Nuc(T_\lambda)$ para todas las n's suficientemente grandes. Supongamos sin pérdida de generalidad que esto se cumple para toda n. Como $Nuc(T_\lambda)$ es un conjunto cerrado, la distancia δ_n de x_n a $Nuc(T_\lambda)$ es positiva, es decir,

$$\delta_n = \inf_{z \in Nuc(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0.$$

Por la definición de ínfimo existe una sucesión $(z_n) \in Nuc(T_\lambda)$ tal que $a_n := \|x_n - z_n\| < 2\delta_n$, que es lo que queríamos probar.

Dejemos esto por un lado, y ahora concentrémonos en probar que la sucesión a_n que acabamos de encontrar cumple que $a_n \to \infty$, es decir, queremos probar que $\|x_n - z_n\| \to \infty$. Supongamos que esto no se cumple, entonces la sucesión $(x_n - z_n)$ contiene una subsucesión acotada. Como T es un operador compacto, entonces $(T(x_n - z_n))$ tiene una subsucesión convergente. Sabemos que $T_\lambda = T - \lambda I$, y $\lambda \neq 0$, entonces $I = (T - T_\lambda)\lambda^{-1}$, y además $(z_n) \in Nuc(T_\lambda)$, de modo que $T_\lambda z_n = 0$. Así,

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n)$$

es decir

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n).$$

Sabemos que $(T(x_n - z_n))$ tiene una subsucesión convergente, y además $(T_\lambda x_n)$ es una sucesión convergente, pues converge a y, por lo que $(x_n - z_n)$ contiene una subsucesión convergente, digamos que $(x_{nk} - z_{nk}) \to v$, con $v \in X$.

Como T es compacto, es continuo, por tanto T_λ también lo es. Entonces $T_\lambda(x_{nk} - z_{nk}) \to T_\lambda v$, y como $(z_n) \in Nuc(T_\lambda)$, $T_\lambda z_{nk} = 0$, de modo que

$$T_\lambda(x_{nk} - z_{nk}) = T_\lambda x_{nk} \to T_\lambda v.$$

Pero también sabemos que $T_\lambda x_{nk} \to y$, pues $T_\lambda x_n \to y$, y sabemos que si una sucesión converge entonces todas sus subsucesiones convergen al límite de la sucesión original. Así, tenemos que $T_\lambda v = y$. Ya sabíamos que $v \in X$, por lo que $T_\lambda v \in T_\lambda(X) = Ran(T_\lambda)$, de modo que $y \in Ran(T_\lambda)$, que es una contradicción al hecho de que $y \notin Ran(T_\lambda)$, que teníamos desde el inicio de la prueba.

Resumiendo, hasta ahora tenemos: $y \in \overline{Ran(T_\lambda)}$ tal que $y \notin Ran(T_\lambda)$, y tenemos una sucesión $(T_\lambda x_n)$ que converge a y. Probamos que $x_n \notin Nuc(T_\lambda)$, pero $Nuc(T_\lambda)$ contiene una sucesión (z_n) tal que $\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$. Probamos también que $a_n \to \infty$, donde $a_n = \|x_n - z_n\|$, y ahora queremos usar la sucesión (w_n), donde $w_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$ para llegar a la contradicción que buscamos, y poder concluir que $Ran(T_\lambda)$ es un conjunto cerrado.

Sea $w_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n)$, entonces $\|w_n\| = 1$, y como $a_n \to \infty, T_\lambda z_n = 0$ y la sucesión $(T_\lambda x_n)$ converge, entonces

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{a_n} T_\lambda(x_n - z_n) = \frac{1}{a_n} T_\lambda x_n \to 0.$$

Recordemos que $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$, por lo que $w_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda w_n)$. Además sabemos que T es compacto y (w_n) es acotada, por lo que (Tw_n) contiene una subsucesión convergente. Ya vimos que $(T_\lambda w_n)$ converge a 0, y como $w_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda w_n)$, entonces (w_n) contiene una subsucesión convergente, digamos que $w_{n_j} \to w$.

Como $T_\lambda w_n \to 0$, entonces $T_\lambda w_{n_j} \to 0$, pero también tenemos por la continuidad de T y de T_λ que $T_\lambda w_{n_j} \to T_\lambda w$. Entonces $T_\lambda w = 0$, por lo que $w \in Nuc(T_\lambda)$, y como $z_n \in Nuc(T_\lambda)$, entonces

$$u_n := z_n + a_n w \in Nuc(T_\lambda).$$

Así, $\|x_n - u_n\| \geq \delta_n$, de modo que

$$\delta_n \leq \|x_n - z_n - a_n w\| = \|a_n w_n - a_n w\| = a_n \|w_n - w\| < 2\delta_n \|w_n - w\|$$

Entonces dividiendo por $2\delta_n$ obtenemos que $\frac{1}{2} < \|w_n - w\|$, que es una contradicción al hecho de que $w_{n_j} \to w$. Así, podemos concluir que $Ran(T_\lambda)$ es un conjunto cerrado. $\square$

Corolario 3. *Sea $T : X \to X$ un operador compacto definido en un espacio normado X. Entonces $Ran(T_\lambda^n)$ es un conjunto cerrado para todo $n = 0, 1, 2, ...$ y se tiene que*
$X = Ran(T_\lambda^0) \supseteq Ran(T_\lambda) \supseteq Ran(T_\lambda^2) \supseteq ...$

Demostración. Para probar que $Ran(T_\lambda^n)$ es un conjunto cerrado, recordemos que $T_\lambda^n = W - \mu I$, donde $\mu = -(-\lambda)^n, W = TS = ST$, y S es el operador $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1}(-\lambda)^{n-k}$ de la prueba del corolario 2, y esto lo podemos usar porque tenemos las mismas hipótesis que en el corolario 2. Al ser T compacto y S acotado, tenemos que W es compacto, y usando el teorema 1.3.5 obtenemos que $Ran(T_\lambda^n)$ es un conjunto cerrado.

Para probar que $X = Ran(T_\lambda^0) \supseteq Ran(T_\lambda) \supseteq Ran(T_\lambda^2) \supseteq ...$ procederemos por inducción sobre n. Sabemos que $Ran(T_\lambda^0) = Ran(I) = X \supseteq Ran(T_\lambda)$. Supongamos que $Ran(T_\lambda^{n-1}) \supseteq Ran(T_\lambda^n)$, entonces $Ran(T_\lambda^n) \supseteq Ran(T_\lambda^{n+1})$, de modo que se cumple para toda $n = 0, 1, ...$, y queda probado el corolario. $\square$

Los dos corolarios que tenemos nos permiten entonces conocer mejor al operador T_λ, y en general a cualquier potencia de este operador, pues nos dan información sobre su núcleo y sobre su rango. Recapitulando, ya demostramos

1. $Nuc(T_\lambda^n)$ es dimensión finita.
2. $0 = Nuc(T_\lambda^0) \subseteq Nuc(T_\lambda) \subseteq Nuc(T_\lambda^2) \subseteq ...$
3. $Ran(T_\lambda^n)$ es un conjunto cerrado.
4. $X = Ran(T_\lambda^0) \supseteq Ran(T_\lambda) \supseteq Ran(T_\lambda^2) \supseteq ...$

Ya tenemos bastante información sobre las propiedades espectrales de los operadores compactos, sin embargo, podemos decir aún más. Probaremos que para cierta n tal que $n \geq r$ las contenciones en el corolario 2 se hacen igualdades, y que para cierta n tal que $n \geq q$ las contenciones en el corolario 3 también se hacen igualdades. Aquí r y q son los menores enteros para los cuales se cumplen esas propiedades.

Lema 1.3.6. *Sean $T : X \to X$ un operador lineal compacto definido en un espacio normado X, y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un entero r_λ tal que si $n \geq r_\lambda$, los núcleos $Nuc(T_\lambda^n)$ son todos iguales, y si $r_\lambda > 0$, las contenciones $Nuc(T_\lambda^0) \subseteq Nuc(T_\lambda) \subseteq ... \subseteq Nuc(T_\lambda^{r_\lambda})$ son propias.*

Demostración. Denotaremos a $Nuc(T_\lambda^n)$ como Nuc_n para no escribir tanto. Supongamos que nunca se cumple que $Nuc_m = Nuc_{m+1}$. Ya sabemos que $Nuc_m \subseteq Nuc_{m+1}$, y como nunca se cumple que $Nuc_m = Nuc_{m+1}$, entonces $Nuc_n \subsetneq Nuc_{n+1}$ propiamente para toda n. Como estos núcleos son espacios cerrados, podemos usar el lema 1.3.1 para obtener una sucesión (y_n) tal que $y_n \in Nuc_n$, $\|y_n\| = 1$ y $\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ para toda $x \in Nuc_{n-1}$.

Probaremos que si $m < n$, entonces $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$, y si esto pasa, entonces (Ty_n) no tiene una subsucesión convergente, pues $|\lambda| > 0$, y esto es una contradicción al hecho de que el operador T es compacto, pues (y_n) es una sucesión acotada.

Veamos que si $m < n$, entonces $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$. Como $T_\lambda = T - \lambda I$, entonces $T = T_\lambda + \lambda I$, por lo que

$$Ty_n - Ty_m = T_\lambda y_n + \lambda y_n - T_\lambda y_m - \lambda y_m = \lambda y_n - \overline{x}$$

donde $\overline{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n$.

Sea $m < n$. Probaremos que $\overline{x} \in Nuc_{n-1}$. Como $m \leq n-1$, entonces $Nuc_m \subset Nuc_{n-1}$, de modo que $\lambda y_m \in Nuc_m \subset Nuc_{n-1}$. Además como $y_m \in Nuc_m$, tenemos que

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m), \tag{1.6}$$

es decir $T_\lambda y_m \in Nuc_{m-1} \subset Nuc_{n-1}$. Como $y_n \in Nuc_n$, usando el mismo argumento que en la ecuación (1.6) obtenemos $T_\lambda y_n \in Nuc_{n-1}$. Luego, $\overline{x} \in Nuc_{n-1}$.

Observemos que $x = \lambda^{-1}\overline{x} \in Nuc_{n-1}$, de modo que

$$\|\lambda y_n - \overline{x}\| = \|\lambda y_n - \lambda x\| = |\lambda|\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|,$$

es decir $\|\lambda y_n - \overline{x}\| = \|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$. Esto es una contradicción al hecho de que T es compacto, por lo que nuestra suposición de que nunca se cumple que $Nuc_m = Nuc_{m+1}$ es falsa, y por tanto $Nuc_m = Nuc_{m+1}$ para alguna m.

Ahora probaremos que si $Nuc_m = Nuc_{m+1}$, entonces $Nuc_n = Nuc_{n+1}$, siempre que $n > m$. Nuevamente supongamos que esto no se cumple, entonces $Nuc_n \subset Nuc_{n+1}$ propiamente para alguna $n > m$. Consideremos $x \in Nuc_{n+1} \setminus Nuc_n$. Luego $T_\lambda^{n+1}x = 0$, y $T_\lambda^n x \neq 0$. Sea $z = T_\lambda^{n-m}x$, y notemos que $n - m > 0$. Entonces $T_\lambda^{m+1}z = T_\lambda^{n+1}x = 0$, y $T_\lambda^m z = T_\lambda^n x \neq 0$.

Así, $z \in Nuc_{m+1}$, pero $z \notin Nuc_m$, de modo que $Nuc_m \subset Nuc_{m+1}$ propiamente. Esto es una contradicción al hecho de que $Nuc_m = Nuc_{m+1}$. Así, tenemos que si no se cumple que $Nuc_n = Nuc_{n+1}$ para alguna $n > m$, entonces no se cumple que $Nuc_m = Nuc_{m+1}$. Por contrapuesta podemos concluir que si

$Nuc_m = Nuc_{m+1}$, entonces $Nuc_n = Nuc_{n+1}$, siempre que $n > m$.

Esto prueba la existencia de la r_λ que necesitábamos, siendo r_λ la menor n tal que $Nuc_n = Nuc_{n+1}$. Así, si $r_\lambda > 0$ entonces todas las contenciones presentadas son propias, y esto termina la demostración. □

Este lema nos muestra una propiedad importante de los núcleos que hemos estado trabajando, y como es natural, existe un lema correspondiente para los rangos. Veamos lo que afirma.

Lema 1.3.7. *Sea $T : X \to X$ un operador compacto definido en un espacio normado X, y sea $\lambda \neq 0$. Entonces existe un número q_λ tal que si $n \geq q_\lambda$, los rangos $Ran(T_\lambda^n)$ son todos iguales, y si $q_\lambda > 0$, entonces las contenciones*

$$Ran(T_\lambda^0) \supseteq Ran(T_\lambda) \supseteq ... \supseteq Ran(T_\lambda^{r_\lambda})$$

son propias.

Omitiremos la demostración de este lema por ser muy parecida a la del lema anterior, en ella se usa el lema de Riesz fuertemente, y argumentos muy parecidos (los correspondientes para rangos) a los de la demostración anterior.

Hay dos resultados importantes que son nuestro objetivo final en el tema de operadores compactos, que nos dan propiedades importantes del espectro de un operador compacto, y además una manera de representar al espacio (en el cual está definido dicho operador) en términos de los núcleos y rangos con los que hemos estado trabajando. Sorprendentemente, estos resultados no son difíciles de probar, una vez demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1.3.8. *Sea $T : X \to X$ un operador compacto definido en un espacio normado X, y sea $\lambda \neq 0$. Entonces existe un entero r_λ tal que*

$$Nuc(T_\lambda^{r_\lambda}) = Nuc(T_\lambda^{r_\lambda+1}) = Nuc(T_\lambda^{r_\lambda+2}) = ... \tag{1.7}$$

y

$$Ran(T_\lambda^{r_\lambda}) = Ran(T_\lambda^{r_\lambda+1}) = Ran(T_\lambda^{r_\lambda+2}) = ..., \tag{1.8}$$

y si $r_\lambda > 0$, entonces las contenciones

$$Nuc(T_\lambda^0) \subseteq Nuc(T_\lambda) \subseteq ... \subseteq Nuc(T_\lambda^{r_\lambda}) \tag{1.9}$$

y

$$Ran(T_\lambda^0) \supseteq Ran(T_\lambda) \supseteq ... \supseteq Ran(T_\lambda^{r_\lambda}) \tag{1.10}$$

son propias.

Demostración. Del lema 1.3.6 tenemos que existe una r_λ tal que si $n \geq r_\lambda$ se cumple la ecuación 1.7, y si $r_\lambda > 0$, entonces las contenciones en 1.9 son propias. Análogamente, del lema 1.3.7 tenemos que existe una q_λ tal que si

$n \geq q_\lambda$, se cumple la ecuación 1.8, y si $q_\lambda > 0$, entonces las contenciones en 1.10 son propias.

Así, lo único que tenemos que hacer para demostrar este teorema es probar que $q_\lambda = r_\lambda$, y para esto probaremos que $q_\lambda \leq r_\lambda$ y que $r_\lambda \leq q_\lambda$. Como antes, escribiremos $Ran(T_\lambda^n) = Ran_n$ y $Nuc(T_\lambda^n) = Nuc_n$.

Por el lema 1.3.7, tenemos que $Ran_{q_\lambda+1} = Ran_{q_\lambda}$. Esto significa que

$$T_\lambda(Ran_{q_\lambda}) = Ran_{q_\lambda}.$$

Entonces, si $y \in Ran_{q_\lambda}$, se tiene que $y = T_\lambda x$, para alguna $x \in Ran_{q_\lambda}$. Probaremos que si tenemos un $x \in Ran_{q_\lambda}$ tal que $T_\lambda x = 0$, entonces $x = 0$.

Como ya es usual, supongamos que no se cumple lo anterior, es decir, no se cumple que si $x \in Ran_{q_\lambda}$ es tal que $T_\lambda x = 0$, entonces $x = 0$. Luego $T_\lambda x_1 = 0$ para algún $x_1 \in Ran_{q_\lambda}$, con $x_1 \neq 0$.

Sabemos que si $y \in Ran_{q_\lambda}$, se tiene que $y = T_\lambda x$, para alguna $x \in Ran_{q_\lambda}$, así que tomando $y = x_1$, tenemos $x_1 = T_\lambda x_2$, para algún $x_2 \in Ran_{q_\lambda}$. De manera similar, $x_2 = T_\lambda x_3$, para algún $x_3 \in Ran_{q_\lambda}$, siguiendo este proceso. Obtenemos entonces que para toda n,

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = ... = T_\lambda^{n-1} x_n$$

pero

$$0 = T_\lambda x_1 = T_\lambda^n x_n.$$

De lo anterior concluimos que $x_n \notin Nuc_{n-1}$, pero $x_n \in Nuc_n$. Por el lema 1.3.6, tenemos que $Nuc_{n-1} \subseteq Nuc_n$, y lo que acabamos de ver es que esta contención es propia para todo n, pues n lo elegimos arbitrariamente. Esto es una contradicción al lema 1.3.6 (que ya probamos) y nos permite concluir que si $x \in Ran_{q_\lambda}$ es tal que $T_\lambda x = 0$, entonces $x = 0$.

Probaremos ahora que $Nuc_{q_\lambda+1} = Nuc_{q_\lambda}$. Una vez que tengamos esto, podremos saber que $q_\lambda \geq r_\lambda$ por el lema 1.3.6, pues éste nos dice que r_λ es el entero a partir del cual se tiene la igualdad.

Ya sabemos por el corolario 2 que dice (entre otras cosas) que $Nuc(T_\lambda^n)$ tiene dimensión finita, que $Nuc_{q_\lambda+1} \supseteq Nuc_{q_\lambda}$, así que nos falta probar que $Nuc_{q_\lambda+1} \subseteq Nuc_{q_\lambda}$. Es decir, debemos probar que si $T_\lambda^{q_\lambda+1} x = 0$, entonces $T_\lambda^{q_\lambda} x = 0$.

Supongamos que esto es falso, entonces existe un x_0 tal que $y := T_\lambda^{q_\lambda} x_0 \neq 0$, pero $T_\lambda y = T_\lambda^{q_\lambda+1} x_0 = 0$. Entonces $y \in Ran_{q_\lambda}, y \neq 0$, y $T_\lambda y = 0$, y esto es una contradicción con el hecho de que si $x \in Ran_{q_\lambda}$ es tal que $T_\lambda x = 0$, entonces

$x = 0$, lo que nos permite concluir que si $T_\lambda^{q_\lambda+1}x = 0$, entonces $T_\lambda^{q_\lambda}x = 0$, y por tanto $Nuc_{q_\lambda+1} \subseteq Nuc_{q_\lambda}$. Por lo tanto, $q_\lambda \geq r_\lambda$.

Veamos ahora que $q_\lambda \leq r_\lambda$. Si $q_\lambda = 0$, esto se cumple, así que consideremos $q_\lambda \geq 1$. Probaremos que $Nuc_{q_\lambda+1} \subset Nuc_{q_\lambda}$ propiamente. Esto implica que $q_\lambda \leq r_\lambda$ pues r_λ es el entero n más pequeño tal que $Nuc_{n+1} = Nuc_n$ por el lema 1.3.6.

Por como definimos q_λ en el lema 1.3.7, tenemos que $Ran_{q_\lambda} \subset Ran_{q_\lambda-1}$ propiamente. Entonces existe $y \in Ran_{q_\lambda-1} \setminus Ran_{q_\lambda}$, por lo que $y \in Ran_{q_\lambda-1}$ y entonces $y = T_\lambda^{q_\lambda-1}x$, para alguna x. Además $T_\lambda y \in Ran_{q_\lambda} = Ran_{q_\lambda+1}$, por lo que $T_\lambda y = T_\lambda^{q_\lambda+1}z$, para alguna z. Como $T_\lambda^{q_\lambda}z \in Ran_{q_\lambda}$, pero $y \notin Ran_{q_\lambda}$, entonces tenemos que $T_\lambda^{q_\lambda-1}(x - T_\lambda z) = y - T_\lambda^{q_\lambda}z \neq 0$, de modo que $x - T_\lambda z \notin Nuc_{q_\lambda-1}$.

Sin embargo, $x - T_\lambda z \in Nuc_{q_\lambda}$, pues

$$T_\lambda^{q_\lambda}(x - T_\lambda z) = T_\lambda^{q_\lambda}x - T_\lambda^{q_\lambda+1}z = T_\lambda y - T_\lambda y = 0.$$

Esto prueba que $Nuc_{q_\lambda-1} \neq Nuc_{q_\lambda}$, de modo que $Nuc_{q_\lambda-1} \subset Nuc_{q_\lambda}$ propiamente. Así, $q_\lambda \leq r_\lambda$, de manera que tenemos $q_\lambda = r_\lambda$, y esto termina la demostración del teorema. □

Ahora probemos el primer resultado importante que forma parte de nuestro objetivo final en la sección de operadores compactos. Este resultado además de ser bonito nos da una forma sencilla de caracterizar al espectro de un operador compacto, y dice lo siguiente.

Teorema 1.3.9. *Sea $T : X \to X$ un operador compacto definido en un espacio de Banach X. Entonces cada valor espectral $\lambda \neq 0$ de T (si existe, pues al principio de este trabajo especificamos que T podría no tener valores propios) es un valor propio de T.*

Demostración. Si $Nuc(T_\lambda) \neq \{0\}, \lambda$ es un eigenvalor de T. Por contrapuesta supongamos que $Nuc(T_\lambda) = \{0\}$, con $\lambda \neq 0$. Entonces si $T_\lambda x = 0$ se tiene que $x = 0$, y entonces la inversa de T, $T_\lambda^{-1} : Ran(T_\lambda) \to X$ existe.

Como $\{0\} = Nuc(I) = Nuc(T_\lambda^0) = Nuc(T_\lambda)$ entonces $r = 0$ por el teorema 1.3.8. Así, $X = Ran(T_\lambda^0) = Ran(T_\lambda)$ por el teorema 1.3.8. De este modo podemos concluir que T_λ es biyectiva y T_λ^{-1} es acotada (por el teorema de la inversa acotada, pues X es completo), y entonces por definición $\lambda \in \rho(T)$, y esto termina la demostración. □

Veamos ahora el siguiente resultado importante, y el último de la sección de operadores compactos. Este teorema nos da una forma de caracterizar al espacio X en el cual está definido el operador compacto T, en términos de los núcleos y rangos con los que hemos estado trabajando.

Teorema 1.3.10. *Sea $T : X \to X$ un operador compacto definido en un espacio de Banach X, sea $\lambda \neq 0$, y r el menor entero tal que*

$$Nuc(T_\lambda^r) = Nuc(T_\lambda^{r+1}) = Nuc(T_\lambda^{r+2}) = ...$$

y

$$Ran(T_\lambda^r) = Ran(T_\lambda^{r+1}) = Ran(T_\lambda^{r+2}) = ...$$

Entonces el espacio X se puede representar como

$$X = Nuc(T_\lambda^r) \oplus Ran(T_\lambda^r).$$

Demostración. Sea $x \in X$. Para probar que $X = Nuc(T_\lambda^r) \oplus Ran(T_\lambda^r)$, debemos probar que x se puede escribir de manera única como $x = y + z$, con $y \in Nuc(T_\lambda^r)$, y $z \in Ran(T_\lambda^r)$. Nuevamente escribiremos $Nuc(T_\lambda^r) = Nuc_r$ y $Ran(T_\lambda^r) = Ran_r$.

Sea $z = T_\lambda^r x$, entonces $z \in Ran_r$. Sabemos que $Ran_r = Ran_{2r}$ por el teorema 1.3.8. Entonces $z \in Ran_{2r}$, de manera que $z = T_\lambda^{2r} x_1$, para algún $x_1 \in X$. Sea $x_0 = T_\lambda^r x_1$, entonces $x_0 \in Ran_r$, y se tiene que $T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^{2r} x_1 = z = T_\lambda^r x$. Esto prueba que $T_\lambda^r(x - x_0) = T_\lambda^r x - T_\lambda^r x_0 = 0$, de modo que $x - x_0 \in Nuc_r$ y entonces tenemos que

$$x = (x - x_0) + x_0 \tag{1.11}$$

donde $x - x_0 \in Nuc_r$ y $x_0 \in Ran_r$, pues $x_0 = T_\lambda^r x_1$, con $x_1 \in X$. Teniendo esto, ya sabemos que $x = y + z$, con $y \in Nuc(T_\lambda^r)$, y $z \in Ran(T_\lambda^r)$, así que nos falta ver que esta manera de escribir a x es única.

Supongamos que $x = (x - \overline{x_0}) + \overline{x_0}$, donde $x - \overline{x_0} \in Nuc_r, \overline{x_0} \in Ran_r$. Sea $v_0 = x_0 - \overline{x_0}$, entonces $v_0 \in Ran_r$ por ser Ran_r un espacio vectorial. Así, $v_0 = T_\lambda^r v$, para algún $v \in X$. Además

$$v_0 = x_0 - \overline{x_0} = (x - \overline{x_0}) - (x - x_0),$$

por lo que $v_0 \in Nuc_r$ (pues $x - \overline{x_0} \in Nuc_r$, y $x - x_0 \in Nuc_r$) , y $T_\lambda^r v_0 = 0$. Así, $T_\lambda^{2r} v = T_\lambda^r v_0 = 0$, y entonces $v \in Nuc_{2r} = Nuc_r$ por el teorema 1.3.8. Esto implica que $v_0 = T_\lambda v = 0$, lo que quiere decir que $v_0 = x_0 - \overline{x_0} = 0$, de manera que $x_0 = \overline{x_0}$, y por tanto la forma de representar a x como lo indica la ecuación 1.11 es única, y por tanto $X = Nuc(T_\lambda^r) \oplus Ran(T_\lambda^r)$. □

Como ya habíamos anticipado, esto termina la sección de operadores compactos, y nos podemos dar cuenta de que los últimos dos teoremas que probamos hacen que la teoría espectral para operadores compactos sea algo relativamente sencillo, pues tenemos una caracterización para el espectro de un operador de este tipo, y una representación en términos de $Ran(T_\lambda^r)$ y $Nuc(T_\lambda^r)$ para el espacio en el cual está definido el operador compacto T.

Capítulo 2

Operadores autoadjuntos

En este capítulo estudiaremos los operadores lineales autoadjuntos, que es un tipo de operadores muy importante para las aplicaciones que mostraremos después. En este trabajo los operadores autoadjuntos juegan un papel central, pues uno de los problemas que presentamos se resuelve utilizando el teorema espectral para operadores adjuntos, que es el objetivo final de este capítulo. Además de ser muy útiles para nuestro propósito, estos operadores tienen propiedades bonitas e interesantes. Por ejemplo, el espectro de un operador autoadjunto T es real, y vive en un intervalo de la forma $[m, M]$, donde m y M cumplen ciertas propiedades relacionadas con valores propios y vectores propios.

Lo que más nos interesa sobre este tipo de operadores es que es posible encontrar una representación para ellos en términos de una familia espectral, y ese será el objetivo en este capítulo. Para lograrlo tendremos que estudiar las propiedades espectrales de los operadores autoadjuntos, así como un poco de teoría de proyecciones, y finalmente abordaremos el concepto de familia espectral, que es esencial en esta construcción.

2.1. Espectro de los operadores autoadjuntos

Esta sección está dedicada a estudiar las propiedades relacionadas con valores propios y valores espectrales de los operadores autoadjuntos, y a lo largo de ella consideraremos operadores definidos en un espacio de Hilbert complejo. Empecemos recordando la definición básica que se necesita para estudiar estos operadores.

Definición 2.1.1. Sea $T : H \to H$ un operador definido en un espacio de Hilbert complejo H.

1. El operador adjunto $T^* : H \to H$ es el operador que cumple

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle,$$

para todo $x, y \in H$.

2. El operador T se llama autoadjunto si $T = T^*$.

Es importante mencionar que el operador T^* siempre existe, y es único (la demostración se puede consultar en [5]). Además, el operador T es autoadjunto si y solo si $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in X$.

Empecemos entonces con la investigación sobre el espectro de los operadores lineales autoadjuntos. A continuación probaremos algunas propiedades del espectro de estos operadores, que serán de vital importancia más adelante. Para empezar, es importante resaltar que un operador autoadjunto T no necesariamente tiene valores propios (lo probaremos más adelante), pero en el caso de que tenga, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.1.1. *Sea $T : H \to H$ un operador lineal autoadjunto definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces:*

1. *Todos los valores propios de T (si existen) son reales.*
2. *Los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes de T son ortogonales.*

Demostración.

1. Sea λ un valor propio de T y sea x un vector propio correspondiente. Entonces $x \neq 0$ y $Tx = \lambda x$. Como T es autoadjunto, obtenemos que

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle,$$

y como $x \neq 0$, entonces $\|x\|^2 \neq 0$, y entonces podemos dividir por $\langle x, x\rangle$ y obtener que λ es real.

2. Sean λ y μ valores propios de T, y sean x y y vectores propios correspondientes. Entonces $Tx = \lambda x$ y $Ty = \mu y$. Como T es autoadjunto y μ es real, tenemos que

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Como $\lambda \neq \mu$, entonces $\langle x, y\rangle = 0$, lo que quiere decir que x es ortogonal a y.

□

Ya tenemos que cada valor propio de un operador autoadjunto T es real, pero como anticipamos, todo el espectro de T es real, y esto será consecuencia del siguiente teorema que proporciona una caracterización del conjunto resolvente $\rho(T)$ de T.

Teorema 2.1.2. *Sea $T : V \to V$ un operador lineal definido en un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$. Sea $\lambda \in \rho(T)$, entonces existe $c > 0$ tal que para todo $x \in V$, se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$.*

Demostración. Como $\lambda \in \rho(T)$, entonces $R_\lambda := T_\lambda^{-1} : V \to V$ existe y es acotado, digamos que $\|R_\lambda\| = k$, con $k > 0$ (pues $R_\lambda \neq 0$). Notemos que $I = R_\lambda T_\lambda$, de modo que para todo $x \in V$ tenemos que

$$\|x\| = \|R_\lambda T_\lambda x\| \leq \|R_\lambda\| \|T_\lambda x\| = k\|T_\lambda x\|.$$

Esto nos dice que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, donde $c = \frac{1}{k}$. □

Aunque este teorema no tiene que ver con operadores autoadjuntos, es importante mencionarlo porque la versión conversa solamente se cumple para operadores autoadjuntos, de manera que una vez que la demostremos, tendremos una caracterización para el conjunto resolvente de un operador autoadjunto T. Para probar la versión conversa utilizaremos el siguiente teorema (teorema de la proyección), cuya demostración se puede consultar en [5].

Teorema 2.1.3. *Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces se tiene que*

$$H = Y \oplus Z,$$

donde $Z = Y^\perp$

Teorema 2.1.4. *Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert complejo H. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si existe un valor $c > 0$ tal que para todo $x \in H$, se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, entonces $\lambda \in \rho(T)$.*

Demostración. Supongamos que existe un valor $c > 0$ tal que para todo $x \in H$, se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$. Queremos probar que $\lambda \in \rho(T)$, y por definición esto quiere decir tres cosas: el operador $R_\lambda(T)$ existe, $R_\lambda(T)$ es acotado y $R_\lambda(T)$ está definido en un conjunto que es denso en H.

Probaremos tres hechos.

1. $T_\lambda : H \to Ran(T_\lambda)$ es biyectiva, de manera que $R_\lambda(T)$ existe.
2. $Ran(T_\lambda)$ es denso en H.
3. $Ran(T_\lambda)$ es cerrado en H.

De 2 y 3 podremos concluir que $Ran(T_\lambda) = H$ y por el teorema de la inversa acotada tendremos que $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ es acotada. Así, lograremos concluir que $\lambda \in \rho(T)$.

Veamos primero que $T_\lambda : H \to Ran(T_\lambda)$ es biyectiva. Supongamos que $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$. Debemos probar que $x_1 = x_2$. Como T es lineal y $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, entonces $0 = \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c\|x_1 - x_2\|$, y como $c > 0$, entonces $\|x_1 - x_2\| = 0$, y por tanto $x_1 = x_2$. Como x_1 y x_2 eran arbitrarios, tenemos que $T_\lambda : H \to Ran(T_\lambda)$ es biyectiva.

Ahora veamos que $Ran(T_\lambda)$ es denso en H. Veremos que si $x_0 \perp \overline{Ran(T_\lambda)}$, entonces $x_0 = 0$, de manera que $\overline{Ran(T_\lambda)}^\perp = \{0\}$, y entonces por el teorema 2.1.3, tendremos que $H = \overline{Ran(T_\lambda)}$, pues claramente $\overline{Ran(T_\lambda)}$ es cerrado y ya sabemos que es un subespacio de H.

Sea $x_0 \perp \overline{Ran(T_\lambda)}$. Entonces $x_0 \perp Ran(T_\lambda)$, de modo que tenemos

$$0 = \langle T_\lambda x, x_0\rangle = \langle Tx, x_0\rangle - \lambda\langle x, x_0\rangle \tag{2.1}$$

para todo $x \in H$. Como T es autoadjunto, de la ecuación 2.1 obtenemos que $\langle x, Tx_0\rangle = \langle Tx, x_0\rangle = \langle x, \overline{\lambda} x_0\rangle$, de manera que $Tx_0 = \overline{\lambda} x_0$. Una solución a esta ecuación es $x_0 = 0$, y $x_0 \neq 0$ es imposible, pues esto significaría que $\overline{\lambda}$ es un valor propio de T, y por el teorema 2.1.1 $\overline{\lambda} = \lambda$, de donde

$$Tx_0 - \lambda x_0 = T_\lambda x_0 = 0.$$

Por hipótesis existe un valor $c > 0$ tal que para todo $x \in H$, se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, de modo que tendríamos $0 = \|T_\lambda x_0\| \geq c\|x_0\| > 0$, y esto es una contradicción. Por tanto, $x_0 = 0$, y entonces podemos concluir que $H = \overline{Ran(T_\lambda)}$, lo que quiere decir que $Ran(T_\lambda)$ es denso en H, que es lo que necesitábamos.

Solamente nos falta probar que $Ran(T_\lambda)$ es cerrado, y habremos acabado la demostración. Para esto veremos que si $y \in \overline{Ran(T_\lambda)}$, entonces $y \in Ran(T_\lambda)$.

Sea $y \in \overline{Ran(T_\lambda)}$, entonces existe una sucesión $(y_n) \in Ran(T_\lambda)$ que converge a y. Como $y_n \in Ran(T_\lambda)$, entonces $y_n = T_\lambda x_n$, para algún $x_n \in H$. Por hipótesis, existe un valor $c > 0$ tal que para todo $x \in H$, se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, de modo que

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$

Como (y_n) converge, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy, y como H es completo (x_n) converge a un elemento $x \in H$. T es un operador continuo, por lo que T_λ también lo es, y entonces $y_n = T_\lambda x_n \to T_\lambda x$ (porque $x_n \to x$). Sabemos que $T_\lambda x \in Ran(T_\lambda)$ y como el límite es único $T_\lambda x = y$ de modo que $y \in Ran(T_\lambda)$. Así, $Ran(T_\lambda)$ es cerrado y esto termina la demostración del teorema. □

Juntando los teoremas 2.1.2 y 2.1.4 obtenemos una forma de caracterizar al conjunto resolvente $\rho(T)$ de T, considerando en el teorema 2.1.2 el caso particular en que el operador T está definido en un espacio de Hilbert complejo H, y es autoadjunto.

Teorema 2.1.5. *Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces un valor λ cumple que $\lambda \in \rho(T)$ si y sólo si existe un valor $c > 0$ tal que para todo $x \in H$, se tiene que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$.*

Una consecuencia directa de esta forma de caracterizar al conjunto resolvente es el sigueinte teorema.

Teorema 2.1.6. *El espectro $\sigma(T)$ de un operador autoadjunto $T : H \to H$ definido en un espacio de Hilbert H es un subconjunto de la recta real.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostraremos que entonces $\lambda \in \rho(T)$, de manera que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Por supuesto, para ver que $\lambda \in \rho(T)$ usaremos la caracterización de $\rho(T)$ que proporciona el teorema 2.1.5.

Para todo $x \in H, x \neq 0$ tenemos que $\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle$ y como $\langle Tx, x\rangle$ y $\langle x, x\rangle$ son reales, entonces $\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$. Como $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda = \alpha + i\beta$, por lo que $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Así, $\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle + \lambda\langle x, x\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = 2i\beta\|x\|^2$. Además $\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle = -2iIm\langle T_\lambda x, x\rangle$.

Resumiendo, tenemos que

$$-2iIm\langle T_\lambda x, x\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = 2i\beta\|x\|^2,$$

por lo que dividiendo por 2 obtenemos $-iIm\langle T_\lambda x, x\rangle = i\beta\|x\|^2$, sacando valor absoluto obtenemos $|\beta|\|x\|^2 = |Im\langle T_\lambda x, x\rangle|$. Además $|Im\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle|$, así que aplicando la desigualdad de Schwarz, tenemos que

$$|\beta|\|x\|^2 = |Im\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq \|T_\lambda x\|\|x\|.$$

Dividiendo por $\|x\|$ obtenemos que $|\beta|\|x\| \leq \|T_\lambda x\|$. Si $\beta \neq 0$, entonces por el teorema 2.1.5 $\lambda \in \rho(T)$. Entonces para $\lambda \in \sigma(T)$ debemos de tener forzosamente que $\beta = 0$, de modo que λ es real, y esto termina la demostración. □

Anticipamos que el espectro de un operador autoadjunto es un subconjunto de los reales, pero en realidad podemos ser más específicos. De hecho podemos indicar un intervalo en el cual vive el espectro de un operador de este tipo, que es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema 2.1.7. *Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert H. Entonces el espectro $\sigma(T)$ de T vive en el intervalo cerrado $[m, M]$, donde $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ y $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$.*

Demostración. Ya sabemos por el teorema 2.1.6 que el espectro $\sigma(T)$ de T es real. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos entonces que si $\lambda > M$, entonces $\lambda \in \rho(T)$, de tal manera que si $\lambda < M$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

Una vez que tengamos esto, probaremos que si $\lambda < m$, entonces $\lambda \in \rho(T)$, de manera que si $\lambda > m$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$, y habremos concluido que todo λ tal que $\lambda \in [m, M]$, cumple que $\lambda \in \sigma(T)$, es decir, el espectro $\sigma(T)$ de T vive en $[m, M]$.

Sea $\lambda = M + c, c > 0$. Para todo $x \neq 0$ y $v = \|x\|^{-1}x$ tenemos que $x = \|x\|v$, por lo que

$$\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2\langle Tv, v\rangle \leq \|x\|^2 \sup_{\|\overline{v}\|=1} \langle T\overline{v}, \overline{v}\rangle = \langle x, x\rangle M.$$

Entonces $-\langle Tx, x\rangle \geq -\langle x, x\rangle M$, y por la desigualdad de Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T_\lambda x\|\|x\| &\geq -\langle T_\lambda x, x\rangle = -\langle Tx, x\rangle + \lambda\langle x, x\rangle \\ &\geq -\langle x, x\rangle M + \lambda\langle x, x\rangle = (-M + \lambda)\langle x, x\rangle \\ &= c\langle x, x\rangle = c\|x\|^2 \end{aligned}$$

pues $\lambda = M + c$, por lo que $c = -M + \lambda$. Dividiendo por $\|x\|$ obtenemos que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, lo que significa que $\lambda \in \rho(T)$ por el teorema 2.1.5.

Ahora, sea $\lambda = m - c, c > 0$. Para todo $x \neq 0$ y $v = \|x\|^{-1}x$ tenemos que $x = \|x\|v$, por lo que

$$\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2\langle Tv, v\rangle \geq \|x\|^2 \inf_{\|\overline{v}\|=1} \langle T\overline{v}, \overline{v}\rangle = \langle x, x\rangle m.$$

Entonces $\langle Tx, x\rangle \geq \langle x, x\rangle m$, y por la desigualdad de Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T_\lambda x\|\|x\| &\geq \langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \\ &\geq \langle x, x\rangle m - \lambda\langle x, x\rangle = (m - \lambda)\langle x, x\rangle \\ &= c\langle x, x\rangle = c\|x\|^2, \end{aligned}$$

pues $\lambda = m - c$, por lo que $c = m - \lambda$. Dividiendo por $\|x\|$ obtenemos que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$, lo que significa que $\lambda \in \rho(T)$ por el teorema 2.1.5.

Ya tenemos entonces que si $\lambda > M$, se tiene que $\lambda \in \rho(T)$, y que si $\lambda < m$, se tiene que $\lambda \in \rho(T)$, de modo que para $\lambda \in \sigma(T)$ debemos tener que $\lambda < M$ y $\lambda > m$. Así, $\sigma(T)$ vive en el intervalo $[m, M]$. $\square$

Los valores m y M entre los cuales se encuentra el espectro $\sigma(T)$ de un operador autoadjunto T serán muy importantes, pues varias características de este tipo de operadores y de su espectro se encuentran relacionadas con ellos.

Teorema 2.1.8. *Para cualquier operador lineal autoadjunto $T : H \to H$ definido en un espacio de Hilbert H se tiene que*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Demostración. Por la desigualdad de Schwarz,

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\|x\| = \|T\|.$$

Sea $K = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Entonces tenemos que $K \leq \|T\|$. Veamos que $K \geq \|T\|$. Si $Tz = 0$ para toda z tal que $\|z\| = 1$, entonces $T = 0$ y terminamos, pues en este caso $\|T\| = 0 \leq K$.

Si $Tz \neq 0$ para toda z tal que $\|z\| = 1$, definimos $v = \|Tz\|^{\frac{1}{2}} z$ y $w = \|Tz\|^{\frac{-1}{2}} Tz$. Entonces se tiene que $\|v\|^2 = \|Tz\|^{\frac{1}{2}^2}\|z\|^2 = \|Tz\|$ y también $\|w\|^2 = \|Tz\|^{-1}\|Tz\|^2 = \|Tz\|$, de modo que $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \|Tz\|$. Sean $y_1 = v + w, y_2 = v - w$, entonces usando las propiedades de producto interno tenemos que

$\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle = \langle Tv+Tw, v+w\rangle - \langle Tv-Tw, v-w\rangle = \langle Tv, v+w\rangle + \langle Tw, v+w\rangle - \langle Tv, v-w\rangle + \langle Tw, v-w\rangle = \langle Tv, v\rangle + \langle Tv, w\rangle + \langle Tw, v\rangle + \langle Tw, w\rangle - \langle Tv, v\rangle + \langle Tv, w\rangle + \langle Tw, v\rangle - \langle Tw, w\rangle = 2(\langle Tv, w\rangle + \langle Tw, v\rangle)$, donde $\langle Tv, w\rangle = \langle \|Tz\|^{\frac{1}{2}} Tz, \|Tz\|^{\frac{-1}{2}} Tz\rangle = \langle Tz, Tz\rangle$, y también $\langle Tw, v\rangle = \langle \|Tz\|^{\frac{-1}{2}} T^2 z, \|Tz\|^{\frac{1}{2}} z\rangle = \langle T^2 z, z\rangle = \langle Tz, Tz\rangle$, donde la última igualdad es porque T es un operador autoadjunto. Entonces

$$\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle = 2(\langle Tv, w\rangle + \langle Tw, v\rangle) = 2(\langle Tz, Tz\rangle + \langle Tz, Tz\rangle) = 4\|Tz\|^2.$$

Por otro lado, para todo $y \neq 0$ y $x = \|y\|^{-1} y$ tenemos que $y = x\|y\|$, y entonces

$$|\langle Ty, y\rangle| = \|y\|^2 |\langle Tx, x\rangle| \leq \|y\|^2 \sup_{\|\overline{x}\|=1} |\langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle| = K\|y\|^2,$$

de manera que si aplicamos la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$|\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle| \leq |\langle Ty_1, y_1\rangle| + |\langle Ty_2, y_2\rangle| \leq K(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2)$$

$$= 2K(\|v\|^2 + \|w\|^2) = 2K(2\|Tz\|) = 4K\|Tz\|.$$

Así, $4\|Tz\|^2 = \langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle \leq |\langle Ty_1, y_1\rangle - \langle Ty_2, y_2\rangle| \leq 4K\|Tz\|$, por lo que

$$4\|Tz\|^2 \leq 4K\|Tz\|,$$

y entonces $\|Tz\| \leq K$, y tomando supremo sobre todas las z tales que $\|z\| = 1$, obtenemos que $sup_{\|z\|=1}\|Tz\| \leq sup_{\|z\|=1} K$, es decir, $\|T\| \leq K$. Entonces $K = \|T\|$, y esto termina la demostración de este teorema.

□

Ahora veremos un teorema que también habla sobre los valores m y M, y nos dice que el intervalo en el cual vive el el espectro $\sigma(T)$ no puede ser más pequeño que lo que ya tenemos, pues m y M son de hecho valores espectrales de T.

Teorema 2.1.9. *Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert H, con $H \neq \{0\}$. Entonces $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ y $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ son valores espectrales de T.*

Demostración. Probaremos que $M \in \sigma(T)$. Por el teorema 1.1.5 el espectro de $T + kI$, donde k es una constante real, se obtiene como el espectro de T trasladado, y entonces $M \in \sigma(T)$ si y solo si $M + k \in \sigma(T + kI)$. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \leq m \leq M$. Entonces por el teorema 2.1.8 tenemos que $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.

Por la definición de supremo, existe una sucesión (x_n) tal que $\|x_n\| = 1$ y $\langle Tx_n, x_n\rangle = M - \delta_n$, donde $\delta_n \geq 0$, y $\delta_n \to 0$. Luego

$$\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\| = \|T\| = M,$$

y como T es autoadjunto, tenemos que $\|Tx_n - Mx_n\|^2 = \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n\rangle = \langle Tx_n, Tx_n - Mx_n\rangle - \langle Mx_n, Tx_n - Mx_n\rangle = \langle Tx_n, Tx_n\rangle - \langle Tx_n, Mx_n\rangle - \langle Mx_n, Tx_n\rangle + \langle Mx_n, Mx_n\rangle = \|Tx_n\|^2 - \langle Tx_n, Mx_n\rangle - \langle Tx_n, Mx_n\rangle + M^2\|x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle + M^2\|x_n\| \leq M^2 - 2M(M - \delta_n + M^2 = 2M\delta_n \to 0$.

Lo anterior quiere decir que no existe un valor $c > 0$ tal que

$$\|T_M x_n\| = \|Tx_n - Mx_n\| \geq c = c\|x_n\|$$

(pues $\|x_n\| = 1$), y por el teorema 2.1.5, sabemos que $\lambda = M \notin \rho(T)$, por lo que $M \in \sigma(T)$. La demostración para $\lambda = m$ es análoga. □

Recordemos que el espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal acotado cualquiera se puede dividir en tres conjuntos: el espectro puntual $\sigma_p(T)$, el espectro residual $\sigma_r(T)$, y el espectro contínuo $\sigma_c(T)$. Ya sabemos que en el caso en que el espacio en el cual está definido el operador es de dimensión finita, los conjuntos $\sigma_r(T)$ y $\sigma_c(T)$ son vacíos. Algo similar pasa en el caso en que el operador T es autoadjunto, pues se tiene que el espectro residual $\sigma_r(T)$ es vacío, como probaremos a continuación.

Teorema 2.1.10. *El espectro residual $\sigma_r(T)$ de un operador autoadjunto $T : H \to H$ definido en un espacio de Hilbert complejo H es un conjunto vacío.*

Demostración. Supongamos que $\sigma_r(T) \neq \emptyset$, y sea $\lambda \in \sigma_r(T)$. Recordemos que un valor λ pertenece al conjunto $\sigma_r(T)$ si T_λ^{-1} existe pero está definida en un conjunto que no es denso en H, es decir, $Dom(T_\lambda^{-1})$ no es denso en H.

Por el teorema 2.1.3 existe un $y \in H, y \neq 0$ tal que $y \perp Dom(T_\lambda^{-1})$. Pero $Dom(T_\lambda^{-1}) = Ran(T_\lambda)$, de modo que $\langle T_\lambda x, y\rangle = 0$, para toda $x \in H$. Como $\lambda \in \mathbb{R}$ por el teorema 2.1.6, y como T es autoadjunto, tenemos que

$\langle T_\lambda x, y\rangle = \langle x, T_\lambda y\rangle = 0$, para toda x.

Tomando $x = T_\lambda y$, obtenemos que $\|T_\lambda y\|^2 = 0$, de manera que $T_\lambda y = Ty - \lambda y = 0$. Como $y \neq 0$, tenemos que λ es un eigenvalor de T, y esto es una ccontradicción al hecho de que $\lambda \in \sigma_r(T)$. Así, tenemos que $\sigma_r(T) = \emptyset$, que es lo que buscábamos. $\square$

Este teorema termina la sección de propiedades básicas de los operadores autoadjuntos, y con esto estamos listos para empezar con el tema de proyecciones, que será muy útil de aquí en adelante.

2.2. Proyecciones

Las proyecciones son operadores bastante sencillos y con propiedades muy intuitivas, como veremos en esta sección. Sin embargo, juegan un papel central en el objetivo de encontrar una representación espectral, pues su simplicidad nos permite representar operadores más complicados en términos de proyecciones. La representación que surge de lo anterior es la llamada representación espectral, que obtendremos en la siguiente sección, pero antes de hacerlo necesitamos familiarizarnos con las proyecciones y trabajar con sus propiedades básicas.

El teorema del cual se desprende la teoría de proyecciones ya lo hemos utilizado, y es el teorema 2.1.3, que afirma que cualquier espacio de Hilbert H se puede representar como suma directa de un subespacio cerrado Y con su complemento ortogonal, es decir, si $x \in H$, entonces hay una manera única de representar al elemento x como

$$x = y + z,$$

donde $y \in Y$ y $z \in Y^\perp$.

Este teorema define implícitamente un operador lineal $P : H \to H$ dado por

$$Px = y.$$

El operador P se llama proyección sobre H. Más específicamente, P se llama la proyección de H en Y. Así, un operador $P : H \to H$ es una proyección en H si existe un subespacio cerrado Y de H tal que $Y = Ran(P)$ y $Y^\perp = Nuc(P)$, y la restricción de P a Y es el operador identidad en Y.

Aunque esta es la manera formal de obtener las proyecciones, hay una caracterización que permite saber de forma más simple cuando un operador es una proyección.

Teorema 2.2.1. *Un operador lineal $P : H \to H$ definido en un espacio de Hilbert H es una proyección si y sólo si P es autoadjunto e idempotente, es decir, $P^2 = P$.*

Demostración. **Necesidad**: Supongamos que P es una proyección en H, y sea $P(H) = Y$. Entonces para todo $x \in H$ y $Px = y \in Y$ se tiene que $P^2x = Py = y = Px$, por tanto $P^2 = P$, y se tiene que P es idempotente.

Sean $x_1 = y_1 + z_1$ y $x_2 = y_2 + z_2$, donde $y_1, y_2 \in Y$ y $z_1, z_2 \in Y^\perp$. Entonces $\langle y_1, z_2\rangle = \langle y_2, z_1\rangle = 0$, pues $Y \perp Y^\perp$. Tomando en cuenta esto, veamos que P es autoadjunto.

$$\langle Px_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle + \langle y_1, z_2\rangle$$

$$= \langle y_1, y_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle + \langle z_1, y_2\rangle$$

$$= \langle y_1 + z_1, y_2\rangle = \langle x_1, Px_2\rangle.$$

Suficiencia: Supongamos que $P^2 = P$ y que P es autoadjunto, y sea $P(H) = Y$. Entonces para todo $x \in H$ se tiene que $x = Px + (I - P)x$. Queremos probar que $Y = P(H) \perp (I - P)(H)$, y esto pasa porque

$$\langle Px, (I - P)v\rangle = \langle x, P(I - P)v\rangle = \langle x, Pv - P^2v\rangle = \langle x, Pv - Pv\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Ahora queremos probar que $Y = Nuc(I - P)$, lo cual pasa porque

$$Y \subseteq Nuc(I - P),$$

pues si $y \in Y = P(H)$, entonces $y = Px$, por lo que $(I-P)Px = Px-P^2x = 0$, y entonces $y = Px \in Nuc(I - P)$. Para ver que $Nuc(I - P) \subseteq Y$, tomemos $x \in Nuc(I - P)$, entonces $(I - P)x = x - Px = 0$, de donde podemos concluir que $x = Px \in Y = P(H)$. Por tanto, $Y = Nuc(I - P)$. Así, tenemos que Y es cerrado, pues el núcleo de cualquier operador lineal es un subespacio cerrado.

Finalmente, la restricción de P a Y denotada por $P|_Y$ es el operador identidad en Y, pues si $y = Px$, entonces $Py = P^2x = Px = y$. Así, P es una proyección, y esto termina la demostración. □

Ahora que ya tenemos una nueva forma de saber cuando un operador es una proyección, presentamos el plan para lo que resta de este capítulo. En primer lugar, necesitamos estudiar las propiedades de las proyecciones. Una vez que tengamos esto, necesitaremos adaptar la definición de proyección de tal manera que sirva a nuestro propósito, y lo que haremos será formar familias de proyecciones a las que llamaremos familias espectrales. Después de esto tendremos que asociar una familia espectral de manera única con un operador autoadjunto T dado. A esto lo llamaremos la familia espectral asociada a T. Al llegar a este punto ya no será tan complicado encontrar la representación que buscamos.

Teorema 2.2.2. *Para cualquier proyección P en un espacio de Hilbert H se tiene que*

1. $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$.
2. $P \geq 0$, *es decir,* $\langle Px, x\rangle \geq 0$, *para toda* $x \in H$.
3. $\|P\| \leq 1$, *donde* $\|P\| = 1$ *si* $P(H) \neq \{0\}$.

Demostración. Tenemos que $\langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0$, esto por el teorema 2.2.1. Sólo nos falta probar 3. Por la desigualdad de Schwarz, tenemos que $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \|Px\|\|x\|$, de modo que $\frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1$ para todo $x \neq 0$, y entonces $\|P\| \leq 1$. Además $\frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$ si $x \in P(H)$, y $x \neq 0$. Esto prueba 3. $\square$

Es importante mencionar que la composición de proyecciones no siempre resulta ser una proyección, y la suma de proyecciones tampoco es siempre una proyección, sin embargo, como lo dicen los siguientes teoremas, se pueden obtener resultados cercanos a ésto.

Teorema 2.2.3. *La composición de dos operadores lineales autoadjuntos T y S definidos en un espacio de Hilbert H es un operador autoadjunto si y sólo si los operadores conmutan, es decir, $TS = ST$.*

Demostración. Sabemos que $(ST)^* = T^*S^*$, y por hipótesis ambos operadores son autoadjuntos, de modo que tenemos

$$(ST)^* = T^*S^* = TS.$$

Entonces $ST = (ST)^*$ si y sólo si $ST = TS$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sean P_1 y P_2 proyecciones en un espacio de Hilbert H. Las dos siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. *$P = P_1P_2$ es una proyección si y sólo si las proyecciones P_1 y P_2 conmutan, es decir, $P_1P_2 = P_2P_1$. Entonces P proyecta H sobre $Y = Y_1 \cap Y_2$, donde $Y_i = P_i(H)$.*
2. *Dos subespacios cerrados Y y V de H son ortogonales si y sólo si las proyecciones correspondientes satisfacen $P_YP_V = 0$.*

Demostración. 1. Supongamos que $P_1P_2 = P_2P_1$. Por el teorema 2.2.3, sabemos que la composición de dos operadores lineales T y S es autoadjunto si y sólo si los operadores conmutan, es decir, $TS = ST$. Entonces tenemos que P es autoadjunto.

Además P es idempotente, pues $P^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P$. Por el teorema 2.2.1, tenemos que P es una proyección. Probaremos que P

proyecta H sobre $Y = Y_1 \cap Y_2$, donde $Y_i = P_i(H)$. Sea $y \in Y$, entonces $y \in Y_1, y \in Y_2$, y tenemos que $Py = P_1P_2y = P_1y = y$.

Supongamos ahora que $P = P_1P_2$ es una proyección en H, entonces por el teorema 2.2.1, tenemos que P es autoadjunto, y por el teorema 2.2.3, tenemos que entonces $P_1P_2 = P_2P_1$.

2. Si $Y \perp V$, entonces $Y \cap V = \{0\}$, y $P_Y P_V x = 0$ para toda $x \in H$ (por 1), de manera que $P_Y P_V = 0$. Ahora supongamos que $P_Y P_V = 0$, entonces para toda $y \in Y, v \in V$ tenemos que $\langle y, v\rangle = \langle P_Y y, P_V v\rangle = \langle y, P_Y P_V v\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$, de manera que $Y \perp V$. □

Teorema 2.2.5. *Sean P_1 y P_2 proyecciones en un espacio de Hilbert H. Entonces se tiene que:*

1. *La suma $P = P_1 + P_2$ es una proyección si y sólo si $Y_1 = P_1(H)$ y $Y_2 = P_2(H)$ son ortogonales.*

2. *Si $P = P_1 + P_2$ es una proyección, entonces P proyecta H sobre $Y = Y_1 \oplus Y_2$.*

Demostración. 1. Supongamos que $P = P_1 + P_2$ es una proyección. Necesitamos probar que $Y_1 \perp Y_2$, donde $Y_1 = P_1(H), Y_2 = P_2(H)$. Como P es una proyección, por el teorema 2.2.1, tenemos que $P = P^2$, de modo que

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2. \tag{2.2}$$

Sabemos que $P_1 = P_1^2$ y que $P_2 = P_2^2$, pues P_1 y P_2 son proyecciones, de modo que de la ecuación (2.2) obtenemos que

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0.$$

Aplicando P_2 (por la izquierda) obtenemos que $P_2P_1P_2 + P_2P_1 = 0$, y aplicando P_2 (por la derecha) obtenemos que $2P_2P_1P_2 = 0$, de manera que $P_2P_1P_2 = 0$, pero ya sabemos que $P_2P_1P_2 + P_2P_1 = 0$, así que $P_2P_1 = 0$.

Por el inciso 2 del teorema 2.2.4 sabemos que los subespacios Y_1 y Y_2 de H son ortogonales si y sólo si las proyecciones correspondientes satisfacen $P_1P_2 = 0$, y esto es lo que acabamos de probar, así que podemos concluir que $Y_1 \perp Y_2$.

Supongamos ahora que $Y_1 \perp Y_2$. Entonces $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, nuevamente por el inciso 2 del teorema 2.2.4. Entonces

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0, \tag{2.3}$$

y como P_1 y P_2 son proyecciones, entonces $P_1 = P_1^2$ y $P_2 = P_2^2$, por lo que la ecuación (2.3) se convierte en

$$P_1 + P_2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2,$$

lo que implica que $P_1 + P_2 = P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2 = (P_1 + P_2)^2$, y esto significa que $P = P^2$.

P_1 y P_2 son operadores autoadjuntos por ser proyecciones y por el teorema 2.2.1, por lo que $P = P_1 + P_2$ también lo es. Así, tenemos que $P = P_1 + P_2$ es un operador autoadjunto e idempotente, de modo que, usando de nuevo el teorema 2.2.1 tenemos que P es una proyección.

2. Para probar que P proyecta H sobre $Y_1 \oplus Y_2$, tomaremos un subespacio Y de H y supondremos que P proyecta H sobre Y, y después notaremos que forzosamente $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Sea $y \in Y$, entonces para todo $x \in H$ se tiene que

$$y = Px = P_1x + P_2x,$$

donde $P_1x \in Y_1$ y $P_2x \in Y_2$. Así, $y \in Y_1 \oplus Y_2$, de modo que $Y \subseteq Y_1 \oplus Y_2$.

Sea $v \in Y_1 \oplus Y_2$, entonces $v = y_1 + y_2$, donde $y_1 \in Y_1$ y $y_2 \in Y_2$. Aplicando P obtenemos que

$$Pv = P_1(y_1 + y_2) + P_2(y_1 + y_2) = P_1y_1 + P_1y_2 + P_2y_1 + P_2y_2.$$

Notemos que $P_1y_2 = P_2y_1 = 0$, pues $P = P_1 + P_2$ es proyección, y por el inciso 1 tenemos que $Y_1 \perp Y_2$, por lo que usando el inciso 2 del teorema 2.2.4, $P_1P_2 = 0$, y como P_1 y P_2 son proyecciones, entonces $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

Así, tenemos que $Pv = P_1y_1+P_1y_2+P_2y_1+P_2y_2 = P_1y_1+P_2y_2 = y_1+y_2 = v$. Entonces $v \in Y$, pues Y es el subespacio sobre el cual proyecta P, de modo que $Y_1 \oplus Y_2 \subseteq Y$, y entonces $Y = Y_1 \oplus Y_2$, lo que termina la demostración. □

El siguiente teorema será una herramienta esencial para poder estudiar la familia espectral asociada a un operador autoadjunto, y por tanto, la representación espectral de éste. Aunque es un teorema un poco tedioso y largo de enunciar, será muy importante y por eso lo probaremos.

Primero necesitamos definir $P_1 \leq P_2$, que es a través de una relación de orden parcial. Si T es un operador autoadjunto $\langle Tx, x\rangle$ es real, por lo que podemos considerar el conjunto de todos los operadores lineales autoadjuntos y ponerle un orden parcial $\leq$ dado por $T_1 \leq T_2$ si y sólo si $\langle T_1x, x\rangle \leq \langle T_2x, x\rangle$, para todo $x \in H$.

Para probar este importante teorema, necesitamos el siguiente lema, cuya demostración se puede consultar en [5].

Lema 2.2.6. *Sea H un espacio de Hilbert. Si Y es un subespacio cerrado de H y P es la proyección de H sobre Y, entonces $Y^\perp = Nuc(P)$.*

Teorema 2.2.7. *Sean P_1 y P_2 proyecciones definidas en un espacio de Hilbert H. Sean $Y_1 = P_1(H)$ y $Y_2 = P_2(H)$ los subespacios sobre los cuales se proyecta H bajo P_1 y P_2 respectivamente, y por último sean $Nuc(P_1)$ y $Nuc(P_2)$ los núcleos de estas proyecciones. Entonces son equivalentes:*

1. $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$.

2. $Y_1 \subseteq Y_2$.

3. $Nuc(P_2) \subseteq Nuc(P_1)$.

4. $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$, *para todo* $x \in H$.

5. $P_1 \leq P_2$.

Demostración. $1 \Rightarrow 4$

Supongamos que $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$. Sabemos por el teorema 2.2.2 que $\|P\| \leq 1$, para cualquier proyección P definida en un espacio de Hilbert H. Entonces

$$\|P_1x\| = \|P_1P_2x\| \leq \|P_1\|\|P_2x\| \leq \|P_2x\|.$$

$4 \Rightarrow 5$

Supongamos que $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$, Por el teorema 2.2.2 se cumple $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$. De estas dos cosas entonces tenemos que

$$\langle P_1x, x\rangle = \|P_1x\|^2 \leq \|P_2x\|^2 = \langle P_2x, x\rangle.$$

Luego por definición, $P_1 \leq P_2$.

$5 \Rightarrow 3$

Supongamos que $P_1 \leq P_2$, y sea $x \in Nuc(P_2)$. Entonces $P_2x = 0$, por lo que obtenemos

$$\|P_1x\|^2 = \langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle = 0.$$

Entonces $\|P_1x\|^2 = 0$, y por ser norma tenemos que $P_1x = 0$, de modo que $x \in Nuc(P_1)$.

$3 \Rightarrow 2$

Supongamos que $Nuc(P_2) \subseteq Nuc(P_1)$. Por el lema 2.2.6 sabemos que $Y_j^{\perp} = Nuc(P_j)$, por lo que $Y_2^{\perp} \subseteq Y_1^{\perp}$, de modo que $Y_1 \subseteq Y_2$.

$2 \Rightarrow 1$

Supongamos que $Y_1 \subseteq Y_2$, y sea $x \in H$, entonces $P_1 x \in Y_1 \subseteq Y_2$, por lo que $P_1 x \in Y_2$, y entonces $P_2 P_1 x = P_1 x$, para toda $x \in H$, de modo que $P_2 P_1 = P_1$. Sabemos que la composición de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si y solo si los operadores conmutan, y como P_1 es autoadjunto por ser proyección, entonces $P_1 = P_2 P_1 = P_1 P_2$. Esta implicación termina la demostración del teorema. □

Ya tenemos un teorema que nos dice en qué caso la suma de proyecciones vuelve a ser una proyección, y con ayuda del teorema 2.2.7 proporcionaremos condiciones necesarias para afirmar que la diferencia de proyecciones es una proyección.

Teorema 2.2.8. *Sean P_1 y P_2 proyecciones en un espacio de Hilbert H. Entonces:*

1. *$P = P_2 - P_1$ es una proyección si y sólo si $Y_1 \subseteq Y_2$, donde $Y_j = P_j(H)$.*

2. *Si $P = P_2 - P_1$ es una proyección, entonces P proyecta H sobre Y, donde Y es el complemento ortogonal de Y_1 en Y_2.*

Demostración. 1. Supongamos que $P = P_2 - P_1$ es una proyección, entonces $P = P^2$, por lo que

$$P_2 - P_1 = (P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_2 P_1 - P_1 P_2 + P_1^2, \tag{2.4}$$

y como P_1 y P_2, son proyecciones, tenemos que $P_1 = P_1^2$ y $P_2 = P_2^2$, de manera que la ecuación (2.4) se convierte en $-P_1 = -P_2 P_1 - P_1 P_2 + P_1$, es decir,

$$2P_1 = P_2 P_1 + P_1 P_2. \tag{2.5}$$

Aplicando P_2 (por la derecha y por la izquierda) a la ecuación (2.5) obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$2P_2 P_1 = P_2 P_1 + P_2 P_1 P_2, \tag{2.6}$$

$$2P_1 P_2 = P_1 P_2 + P_2 P_1 P_2. \tag{2.7}$$

De la ecuación (2.6) obtenemos $P_2 P_1 P_2 = P_2 P_1$ y de la ecuación (2.7) obtenemos $P_2 P_1 P_2 = P_1 P_2$, y como $2P_1 = P_2 P_1 + P_1 P_2$ por la ecuación (2.5), entonces $2P_1 = 2P_2 P_1$ y $2P_1 = 2P_1 P_2$, de modo que

$$P_1 = P_2 P_1 = P_1 P_2.$$

Del teorema 2.2.7, tenemos que $P_1 = P_2 P_1 = P_1 P_2$ es equivalente a $Y_1 \subseteq Y_2$ cuando P_1 y P_2 son proyecciones sobre $Y_1 = P_1(H)$ y $Y_2 = P_2(H)$ respectivamente, que es el caso en el que estamos.

Supongamos ahora que $Y_1 \subseteq Y_2$. Demostraremos que P es idempotente y autoadjunto, de modo que por el teorema 2.2.1 podremos concluir que P es una proyección. Por el teorema 2.2.7, tenemos $P_1 = P_2P_1 = P_1P_2$, y entonces

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_1. \tag{2.8}$$

Como $P_1 = P_1^2$ y $P_2 = P_2^2$, de la ecuación (2.8) se sigue que

$$P_2 - P_1 = P_2^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_1^2 = (P_2 - P_1)^2,$$

por lo que P es idempotente. Para probar que P es autoadjunto, notemos que P_1 y P_2 son autoadjuntos, de manera que $P_2 - P_1$ es autoadjunto.

2. Supongamos que $P = P_2 - P_1$ proyecta H sobre un subespacio Y. Probaremos que entonces $Y = V := Y_2 \cap Y_1^\perp$. El subespacio $Y = P(H)$ está formado por todos los vectores de la forma

$$y = Px = P_2x - P_1x, \tag{2.9}$$

donde $x \in H$. Como $P = P_2 - P_1$ es una proyección, entonces $Y_1 \subseteq Y_2$ por el inciso 1, de modo que por el teorema 2.2.7 tenemos $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$, y entonces usando la ecuación (2.9) y aplicando P_2 obtenemos $P_2y = P_2^2x - P_2P_1x = P_2x - P_1x = y$. Esto prueba que $y \in Y_2$.

Ahora repetimos el proceso pero aplicando P_1 en lugar de P_2, y obtenemos

$$P_1y = P_1P_2x - P_1^2x = P_1x - P_1x = 0,$$

lo que prueba que $y \in Nuc(P_1)$, y por el lema 2.2.6, $Nuc(P_1) = Y_1^\perp$. Así, $y \in V$, por lo que $Y \subseteq V = Y_2 \cap Y_1^\perp$.

Probemos que $V = Y_2 \cap Y_1^\perp \subseteq Y$. Sabemos que la proyección de H sobre $Y_1^\perp$ es $I - P_1$. Entonces si $v \in V$ tenemos que $v = (I - P_1)y_2$, donde $y_2 \in Y_2$. Como $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$ y $P_2y_2 = y_2$, entonces aplicando P a la expresión $v = (I - P_1)y_2$ obtenemos

$$Pv = (P_2-P_1)(I-P_1)y_2 = (P_2-P_2P_1-P_1+P_1^2)y_2 = (P_2-P_1)y_2 = y_2-P_1y_2 = v.$$

Esto prueba que $v \in Y$, pues P proyecta H sobre Y por hipótesis, de modo que $V \subseteq Y$, y así concluimos que $V = Y$. □

Nos falta solamente un teorema para terminar con las proyecciones, y este teorema es importante porque nos habla del límite de una sucesión de proyecciones, además, en su demostración volvemos a usar fuertemente el teorema 2.2.7, combinado con el teorema 2.2.8. Es importante mencionar que demostraremos el teorema para una sucesión creciente de proyecciones, pero se cumple lo análogo para una sucesión decreciente.

Teorema 2.2.9. *Sea (P_n) una sucesión monótona creciente de proyecciones P_n, definidas en un espacio de Hilbert H. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *La sucesión (P_n) es convergente, es decir, existe un operador P tal que $P_n x \to Px$, para toda $x \in H$, y el operador P es una proyección definida en H.*
2. *La proyección P proyecta H sobre $P(H) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$.*
3. *El núcleo de P es $Nuc(P) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.*

Demostración. 1. Sean $m < n$. Sabemos por hipótesis que (P_n) es monótona creciente, por lo que $P_m \leq P_n$, y entonces por el teorema 2.2.7 $P_m(H) \subseteq P_n(H)$, por lo que aplicando el teorema 2.2.8, $P_n - P_m$ es una proyección. Así, para todo $x \in H$ se tiene que

$$\|P_n x - P_m x\|^2 = \langle (P_n - P_m)x, x\rangle = \langle P_n x, x\rangle - \langle P_m x, x\rangle = \|P_n x\|^2 - \|P_m x\|^2.$$

Recordemos que $\|P_n\| \leq 1$ por el teorema 2.2.2, de manera que $\|P_n x\| \leq \|x\|$, para toda n. Entonces $(\|P_n x\|)$ es una sucesión acotada, y también tenemos por el teorema 2.2.7 que $\|P_m\| \leq \|P_n\|$, de modo que $(\|P_n x\|)$ es una sucesión monótona creciente. Así, $(\|P_n x\|)$ converge por ser una sucesión monótona y acotada.

Como $\|P_n x - P_m x\|^2 = \|P_n x\|^2 - \|P_m x\|^2$ y $(\|P_n x\|)$ converge, entonces $(P_n x)$ es una sucesión de Cauchy. Como H es completo, $(P_n x)$ converge, supongamos que $P_n x \to Px$. Probaremos que el operador P es una proyección. Como $P_n x \to Px$ y los operadores P_n son acotados para todo n, autoadjuntos e idempotentes, entonces P también es acotado, autoadjunto e idempotente. Así, P es una proyección.

2. Sea $P(H)$ el espacio sobre el cual proyecta P. Comprobaremos que $P(H) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$.

Sean $m < n$, entonces $P_m \leq P_n$, esto es, $P_n - P_m \geq 0$, y por definición $\langle (P_n - P_m)x, x\rangle \geq 0$. Si hacemos $n \to \infty$ obtenemos que $\langle (P - P_m)x, x\rangle \geq 0$, pues el producto interno es una función continua. Entonces $\langle Px, x\rangle \geq \langle P_m x, x\rangle$, y esto es $P_m \leq P$ por definición. Por el teorema 2.2.7 esto es equivalente a $P_m(H) \subseteq P(H)$, para toda m (porque P se proyecta sobre $P(H)$ y P_m se proyecta en $P_m(H)$). Entonces

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} P_n(H) \subseteq P(H).$$

Por otro lado, tenemos que

$$P_m x \in P_m(H) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m(H)$$

para toda m y para toda $x \in H$. Como $P_m x \to Px$, entonces $Px \in \overline{\bigcup P_m(H)}$. Así, $P(H) \subseteq \overline{\bigcup P_m(H)}$. De esta manera tenemos que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m(H) \subseteq P(H) \subseteq \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m(H)}.$$

Por el lema 2.2.6, si Q proyecta H sobre $Y^{\perp}$ tenemos que $Y = Nuc(Q)$. Sabemos que si P proyecta H sobre Y, entonces $(I - P)$ proyecta H sobre $Y^{\perp}$, de manera que $Y = Nuc(I - P)$. Traduciendo esto al caso que tenemos en esta demostración, nos queda que $P(H) = Nuc(I - P)$, donde $Nuc(I - P)$ es un conjunto cerrado por ser el núcleo de un operador. Ya sabemos que $\bigcup P_m(H) \subseteq P(H) \subseteq \overline{\bigcup P_n(H)}$, por lo que podemos concluir que

$$P(H) = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m(H)}.$$

3. Usando nuevamente el lema 2.2.6, tenemos que

$$Nuc(P) = P(H)^{\perp} \subseteq P_n(H)^{\perp},$$

pues $P_n(H) \subseteq P(H)$, por el inciso 2. Así,

$$Nuc(P) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(H)^{\perp} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Nuc(P_n).$$

Por otro lado, si $x \in \bigcap Nuc(P_n)$, tenemos que $x \in Nuc(P_n)$, para toda n por lo que $P_n x = 0$, y como $P_n x \to Px$, tenemos que $Px = 0$, lo que quiere decir que $x \in Nuc(P)$, y por tanto tenemos que $\bigcap Nuc(P_n) \subseteq Nuc(P)$, de modo que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Nuc(P_n) = Nuc(P).$$

□

Con este teorema finalizamos la sección de proyecciones, y ahora estamos listos para empezar a trabajar con el concepto de familia espectral, que es una herramienta básica para llegar al objetivo de este capítulo.

2.3. Teorema de representación espectral

Recordemos que el objetivo de este capítulo es una representación para los operadores autoadjuntos, en términos de proyecciones, que como vimos en la sección anterior, tienen propiedades sencillas e intuitivas. Tal representación será llamada representación espectral. Dado un operador autoadjunto $T : H \to H$, con H un espacio de Hilbert, obtendremos su representación espectral haciendo uso de una familia de proyecciones adecuada, llamada familia espectral.

Para obtener la familia espectral, consideremos el caso de dimensión finita. Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto definido en el espacio de Hilbert $H = \mathbb{C}^n$. Entonces T es un operador acotado, y podemos elegir una base para H y obtener la representación de T como una matriz autoadjunta T. El espectro de T está formado simplemente por los valores propios de la matriz autoadjunta T, y esos valores propios son reales (ya lo probamos).

Supongamos que la matriz T tiene n valores propios distintos, y sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sus valores propios. Por el inciso 2 del teorema 2.1.1, tenemos que los vectores propios $x_1, ..., x_n$ correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ forman un conjunto ortonormal. El conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ forma una base para H, de manera que cada $x \in H$ tiene una representación única de la forma

$$x = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j, \tag{2.10}$$

y como x_j es un vector propio, se tiene que $Tx_j = \lambda_j x_j$. Aplicando T a la ecuación (2.10), obtenemos que $Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_j x_j$. Notemos que podemos definir un operador $P_j : H \to H$ dado por $P_j x = \gamma_j x_j$, donde P_j es la proyección sobre el espacio propio de T correspondiente al valor propio λ_j. De esta manera, podemos escribir $x = \sum_{j=1}^{n} P_j x$, o equivalentemente,

$$I = \sum_{j=1}^{n} P_j.$$

Como $Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_j x_j$, tenemos que $Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x$, de modo que

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.$$

Hemos encontrado de forma simple una representación para T en el caso de dimensión finita usando su espectro (que consta únicamente de los valores propios de T), en términos de operadores que ya conocemos y que además son bastante accesibles. Desafortunadamente, las ecuaciones que acabamos de obtener para el caso de dimensión finita no las podríamos obtener en general para el caso de dimensión infinita, pues para empezar, puede ser que el operador no tenga valores propios.

Para solucionar este problema, en lugar de las proyecciones $P_1, ..., P_n$ consideramos su suma, es decir, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} P_j.$$

Ésta es una familia de proyecciones de un parámetro, donde el parámetro es λ. Además, si $V_\lambda := \langle \{x_j : \lambda_j \leq \lambda\} \rangle$, entonces E_λ es la proyección de H sobre V_λ. Por el teorema 2.2.7 tenemos que si $\lambda \leq \mu$, entonces $V_\lambda \subseteq V_\mu$.

Recordemos de la sección de proyecciones que a los operadores les podemos asociar un orden parcial, es decir, si T_1 y T_2 son operadores lineales, podemos definir una relación de orden entre ellos como $T_1 \leq T_2$ si y sólo si $\langle T_1 x, x \rangle \leq \langle T_2 x, x \rangle$, para toda $x \in H$.

Definición 2.3.1. Sea $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ una familia de proyecciones definidas en un espacio de Hilbert H. Se dice que $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una familia espectral real si se cumplen las siguientes condiciones.

$$E_\lambda \leq E_\mu, \quad \textit{ent.} \quad E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda \qquad (\lambda < \mu). \tag{2.11}$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0. \tag{2.12}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x. \tag{2.13}$$

$$E_{\lambda+0} x = \lim_{\mu \to \lambda+0} E_\mu x = E_\lambda x. \tag{2.14}$$

Podemos notar de esta definición que una familia espectral real se puede ver como una función de $\mathbb{R}$ en $B(H, H)$, donde a cada valor λ le corresponde una proyección $E_\lambda \in B(H; H)$. Notemos además que $E_\lambda \leq E_\mu$ si y sólo si $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$, para $\lambda < \mu$, por el teorema 2.2.7.

Además, es importante notar que puede darse el caso en que no exista una familia espectral real.

Definición 2.3.2. $\mathcal{E}$ es una familia espectral real en un intervalo $[a, b]$ si es una familia espectral real y se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $E_\lambda = 0$ para $\lambda < a$.
2. $E_\lambda = I$ para $\lambda \geq b$.

Estas familias serán de especial interés para nosotros porque el espectro de un operador autoadjunto es real, y vive en un intervalo de este tipo. Notemos que como $E_\lambda = 0$ para $\lambda < a$ y $E_\lambda = I$ para $\lambda \geq b$, entonces $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0$ y $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x$.

Dado un operador autoadjunto T, encontraremos una forma de asociarle una familia espectral de manera única, y esta familia espectral la usaremos para poder representar al operador T como una integral de Riemann-Stieltjes, que es la representación espectral que buscamos.

Aunque todavía no tenemos las herramientas suficientes para llegar a esta representación en dimensión infinita, sí podemos ver en este momento a qué se reduce la integral en el caso en que el espacio H sea de dimensión finita. Supongamos que un operador autoadjunto $T : H \to H$ definido en un espacio de Hilbert H de dimensión n tiene n valores propios distintos $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$. Entonces por la definición de E_λ tenemos que

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= P_1, \\ E_{\lambda_2} &= P_1 + P_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E_{\lambda_n} &= P_1 + ... + P_n. \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} P_1 &= E_{\lambda_1}, \\ P_2 &= E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ P_j &= E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}, \end{aligned}$$

para $j = 2, ..., n$.

Sabemos[1] que si $\lambda_n, \lambda_m \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, entonces $E_{\lambda_n} = E_{\lambda_m}$, para todas n, m, por lo que podemos escribir[2] $P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}$ y como $x = \sum_{j=1}^{n} P_j x$, pues estamos en dimensión finita, entonces

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_j x = \sum_{j=1}^{n} (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}) x.$$

[1] Para ver una demostración detallada de este hecho, consultar [5]

[2] $E_{\lambda_j - 0} = \lim_{\mu \to \lambda_j - 0} E_\mu$, y donde $\mu \to \lambda_j - 0$ significa que μ tiende a λ_j por la izquierda.

También tenemos que en dimensión finita $Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x$, de manera que

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0})x.$$

Sea $\delta E_\lambda = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}$, entonces tenemos que

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta E_{\lambda_j}.$$

Ésta es la representación espectral del operador T que tiene valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$, en el caso en que T está definido en un espacio de Hilbert H de dimensión finita, y nos muestra que $\langle Tx, y\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta E_{\lambda_j} x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \delta E_{\lambda_j} x, y\rangle$.

Notemos que esto se puede escribir como una integral de Riemann-Stieltjes como

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dw(\lambda),$$

donde $w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y\rangle$.

En este punto solamente nos falta introducir un concepto antes de definir la familia espectral asociada a un operador T, y ese concepto será de vital importancia para nuestro objetivo. Recordemos que de acuerdo a la definición de orden que tenemos para los operadores, un operador T es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, para toda $x \in H$.

Definición 2.3.3. Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto y positivo, definido en un espacio de Hilbert H. Entonces un operador autoadjunto A se llama raíz cuadrada de T si

$$A^2 = T.$$

Si además $A \geq 0$, entonces A se llama raíz cuadrada positiva de T, y se denota por

$$A = T^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación enunciamos el único teorema con respecto a este concepto, que será básico en el camino que nos queda antes de llegar a la representación espectral. Es importante mencionar que en la demostración de este teorema se encuentran argumentos que utilizaremos más adelante en esta sección. Para demostrarlo utilizaremos un lema y un teorema, y aunque no los demostraremos, se pueden consultar en [5].

Lema 2.3.1. *Sean S y T dos operadores positivos y autoadjuntos definidos en un espacio de Hilbert H. Si $ST = TS$, entonces ST es un operador positivo.*

Teorema 2.3.2. *Sea (T_n) una sucesión de operadores autoadjuntos definidos en un espacio de Hilbert H tal que*

$$T_1 \leq T_2 \leq ... \leq T_n \leq ... \leq K,$$

donde K es un operador autoadjunto en H. Supongamos que cualquier T_j conmuta con K y con cualquier T_m. Entonces existe un operador autoadjunto $T : H \to H$ tal que $T_n x \to Tx$, para toda $x \in H$ y el operador T cumple que $T \leq K$.

Teorema 2.3.3. *Todo operador autoadjunto $T : H \to H$ definido en un espacio de Hilbert H tiene una raíz cuadrada positiva A, y es única. El operador A conmuta con cualquier operador lineal que conmute con el operador T.*

Demostración. Haremos la demostración en tres pasos:

1. Probaremos que si el teorema se cumple bajo la hipótesis adicional de que $T \leq I$, entonces también se cumple quitándola.

2. Probaremos la existencia del operador $A = T^{\frac{1}{2}}$, demostrando que $A_n x \to Ax$, donde $A_0 = 0$, y

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2), \tag{2.15}$$

para $n = 0, 1, ...$ Además probaremos la conmutatividad que indica el teorema.

3. Probaremos la unicidad de la raíz cuadrada positiva.

1. Si $T = 0$, tomamos $A = T^{\frac{1}{2}} = 0$. Sea $T \neq 0$. Por la desigualdad de Schwarz, tenemos que

$$\langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2. \tag{2.16}$$

Sea $Q = (\frac{1}{\|T\|})T$. Dividiendo por $\|T\|$ la ecuación (2.16) se convierte en

$$\langle Qx, x \rangle \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x \rangle,$$

es decir, $Q \leq I$. Supongamos que Q tiene una única raíz cuadrada positiva $B = Q^{\frac{1}{2}}$. Entonces $B^2 = Q$, y la raíz cuadrada de $T = \|T\|Q$ es $\|T\|^{\frac{1}{2}}B$, pues

$$(\|T\|^{\frac{1}{2}}B)^2 = \|T\|B^2 = \|T\|Q = T.$$

Además como $Q^{\frac{1}{2}} = B$ es única, y la raíz cuadrada positiva de T está en términos de B, entonces ésta también es única. Así, si el teorema se cumple bajo la hipótesis adicional de que $T \leq 1$, terminamos.

2. Existencia. Consideremos la sucesión de operadores definida recursivamente en la ecuación (2.15), con $A_0 = 0$. Entonces $A_1 = \frac{1}{2}T, A_2 = T - \frac{1}{8}T^2, ...$ Cada A_n es un polinomio en T Entonces todas las A_n's son operadores autoadjuntos y conmutan, y también conmutan con cualquier operador con el que conmute T. Entonces necesitamos probar:

$$A_n \leq I, \qquad\qquad n = 0, 1, ... \tag{2.17}$$

$$A_n \leq A_{n+1}, \qquad\qquad n = 0, 1, ... \tag{2.18}$$

$$A_n x \to Ax, \qquad\qquad A = T^{\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

$$Si \quad ST = TS \quad entonces \quad AS = SA \tag{2.20}$$

donde S es un operador lineal en H.

Demostración de (2.17): Ya sabemos que $A_0 \leq I$. Sea $n > 0$. Como $I - A_{n-1}$ es autoadjunto, $(I - A_{n-1})^2 \geq 0$. Además como $T \leq I$, entonces $I - T \geq 0$. De ésto y la ecuación (2.15) obtenemos

$$0 \leq \frac{1}{2}(I - A_{n-1})^2 + \frac{1}{2}(I - T) = I - A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) = I - A_n.$$

Demostración de (2.18): Por inducción sobre n. De la ecuación (2.15) tenemos que $0 = A_0 \leq A_1 = \frac{1}{2}T$. Mostraremos que si $A_{n-1} \leq A_n$ para cualquier n fija, entonces $A_n \leq A_{n+1}$. De la ecuación (2.15) obtenemos que

$$A_{n+1} - A_n = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) - A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) = (A_n - A_{n-1})[I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1})].$$

Sabemos que $A_n - A_{n-1} \geq 0$ por hipótesis, y por la ecuación (2.17),

$$I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1}) \geq I - \frac{1}{2}(I + I) = 0.$$

Por el lema 2.3.1 tenemos que $A_{n+1} - A_n \geq 0$ y entonces $A_n \leq A_{n+1}$.

Demostración de (2.19): Sabemos que (A_n) es monótona por la ecuación (2.18), y que $A_n \leq I$ por la ecuación (2.17). Entonces por el teorema 2.3.2 existe un operador autoadjunto A tal que $A_n x \to Ax$, para toda $x \in H$. Como $(A_n x)$ converge, de la ecuación (2.15) tenemos que

$$A_{n+1}x - A_n x = \frac{1}{2}(Tx - A_n^2 x) \longrightarrow 0.$$

Así, $Tx - A^2x = 0$ para toda $x \in H$, es decir, $T = A^2$. Además $A \geq 0$, pues $0 = A_0 \leq A_n$ por la ecuación (2.18, es decir, $\langle A_n x, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in H$. Por la continuidad del producto interno tenemos que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in H$.

Demostración de (2.20): Sabemos que si $ST = TS$, entonces $A_nS = SA_n$, es decir, $A_nSx = SA_nx$ para toda $x \in H$. Haciendo $n \to \infty$ obtenemos la ecuación (2.20).

3. Unicidad. Sean A y B raíces cuadradas positivas de T. Entonces $A^2 = B^2 = T$, y además $BT = BB^2 = B^2B = TB$, de manera que $AB = BA$ por la ecuación (2.20). Sean $x \in H$ cualquiera, $y = (A - B)x$. Entonces $\langle Ay, y\rangle \geq 0$ y $\langle By, y\rangle \geq 0$, pues $A \geq 0$ y $B \geq 0$. Como $AB = BA$ y $A^2 = B^2$ obtenemos que

$$\langle Ay, y\rangle + \langle By, y\rangle = \langle (A + B)y, y\rangle = \langle (A^2 - B^2)x, y\rangle = 0.$$

Así, $\langle Ay, y\rangle = \langle By, y\rangle = 0$. Como $A \geq 0$ y A es autoadjunto, entonces A tiene raíz cuadrada positiva C, es decir, $C^2 = A$, con C autoadjunto. De esta manera,

$$0 = \langle Ay, y\rangle = \langle C^2y, y\rangle = \langle Cy, Cy\rangle = \|Cy\|^2.$$

Entonces $Cy = 0$. Además $Ay = C^2y = C(Cy) = 0$. De forma similar conluimos que $By = 0$. Luego, $(A - B)y = 0$. Recordemos que $y = (A - B)x$, por lo que

$$\|Ax - Bx\|^2 = \langle (A - B)^2x, x\rangle = \langle (A - B)y, x\rangle = 0$$

para toda $x \in H$. Así, $Ax - Bx = 0$ para toda $x \in H$, de manera que $A = B$. $\square$

Ya tenemos el teorema que nos permite utilizar el concepto de raíz cuadrada positiva y sus propiedades, por lo que podemos definir los operadores que necesitamos, que es el único ingrediente que nos falta antes de obtener la familia espectral asociada a un operador autoadjunto T definido en un espacio de Hilbert H.

Consideremos entonces los siguientes operadores.

- $T_\lambda = T - \lambda I$.
- $B_\lambda = (T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $T_\lambda^+ = \frac{1}{2}(B + T)$.

Definición 2.3.4. Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto. La familia espectral asociada a T se define como $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, donde E_λ es la proyección de H sobre el núcleo de T_λ^+, $Nuc(T_\lambda^+)$.

Lo que haremos ahora será probar que $\mathcal{E}$ es en efecto una familia espectral, es decir, que cumple las cuatro propiedades de la definición 2.3.1. Aunque esto no será fácil, es necesario hacerlo, pues las demostraciones nos darán una herramienta esencial para poder encontrar la representación espectral que deseamos.

Para probar el primer lema que necesitamos, tenemos que definir nuevamente algunos operadores:

- $B = (T^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $T^+ = \frac{1}{2}(B + T)$.
- $T^- = \frac{1}{2}(B - T)$.
- E, la proyección de H sobre el núcleo de T^+, $Nuc(T^+)$.

Notemos que $T^+ - T^- = \frac{1}{2}(B+T) - \frac{1}{2}(B-T) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}T = T$, y similarmente, $T^+ + T^- = \frac{1}{2}(B+T) + \frac{1}{2}(B-T) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}T = B$. Resumiendo, $T = T^+ - T^-$ y $B = T^+ + T^-$.

Lema 2.3.4. *Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert H. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. *B, T^+ y T^- son operadores acotados y autoadjuntos.*
2. *B, T^+ y T^- conmutan con cualquier operador lineal con el cual conmuta T, en particular, se tiene que $BT = TB$, $T^+T = TT^+$, $T^-T = TT^-$, $T^+T^- = T^-T^+$.*
3. *E conmuta con cualquier operador lineal con el cual conmuta T, en particular, se tiene que $ET = TE$ y $EB = BE$.*
4. *Se cumple que $T^+T^- = 0$ y $T^-T^+ = 0$, $T^+E = ET^+ = 0$ y $T^-E = ET^- = T^-$, $TE = -T^-$ y $T(I - E) = T^+$, $T^+ \geq 0$ y $T^- \geq 0$.*

Demostración. 1. Es claro porque B y T son operadores autoadjuntos.

2. Supongamos que $TS = ST$. Entonces aplicando T tenemos que

$$T^2S = TST = ST^2.$$

Probaremos primero que

$$Si \quad ST = TS \quad entonces \quad ST^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}S, \tag{2.21}$$

y después aplicando la ecuación (2.21) para T^2 obtenemos que si $ST^2 = T^2S$, entonces $BS = SB$. Ya sabemos que $ST^2 = T^2S$, de manera que podremos concluir que $BS = SB$.

Sea (A_n) una sucesión de operadores autoadjuntos definidos como en la ecuación (2.15) de la demostración del teorema 2.3.3, es decir, $A_0 = 0$ y

$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)$. Ya demostramos en el inciso 2 del teorema 2.3.3 que $A_n x \to Ax$, donde $A = T^{\frac{1}{2}}$. En la demostración de la ecuación (2.20) notamos que si $ST = TS$, entonces $A_n S = SA_n$, de manera que si hacemos $n \to \infty$ tenemos que $AS = SA$, o equivalentemente, $T^{\frac{1}{2}}S = ST^{\frac{1}{2}}$.

Ya sabemos entonces que si $ST = TS$ tenemos que $BS = SB$, de manera que $T^+S = \frac{1}{2}(BS + TS) = \frac{1}{2}(SB + ST) = ST^+$. Análogamente, $T^-S = \frac{1}{2}(BS - TS) = \frac{1}{2}(SB - ST) = ST^-$. Esto termina la demostración del inciso 2.

3. Supongamos que $ST = TS$, para un operador lineal autoadjunto S. Queremos probar que entonces $ES = SE$. Para todo $x \in H$ se cumple que

$$y = Ex \in Y = Nuc(T^+).$$

Entonces $y \in Nuc(T^+)$, por lo que $T^+y = 0$ y aplicando S obtenemos que $ST^+y = S0 = 0$. Como $ST = TS$, por el inciso 2 tenemos que $ST^+ = T^+S$, de donde

$$T^+SEx = T^+Sy = ST^+y = 0.$$

Entonces $SEx \in Nuc(T^+)$. Como E proyecta H sobre $Nuc(T^+)$, tenemos que $ESEx = SEx$, para todo $x \in H$, es decir, $ESE = SE$. Es bien sabido que $(ST)^* = T^*S^*$, de manera que

$$ES = E^*S^* = (SE)^* = (ESE)^* = E^*S^*E^* = ESE = SE.$$

4. Queremos probar:

$$T^+T^- = 0,$$
$$T^-T^+ = 0.$$

Demostración: Como $B = (T^2)^{\frac{1}{2}}$, entonces $B^2 = T^2$, y además un caso particular del inciso 2 nos dice que $BT = TB$ y $T^+T^- = T^-T^+$, por lo que tenemos

$$T^+T^- = T^-T^+ = \frac{1}{2}(B - T)\frac{1}{2}(B + T) = \frac{1}{4}(B^2 + BT - TB + T^2) = 0.$$

Queremos probar:

$$T^+E = ET^+ = 0, \tag{2.22}$$
$$T^-E = ET^- = T^-. \tag{2.23}$$

Demostración (2.22): Sabemos por definición que $Ex \in Nuc(T^+)$, por lo que $T^+Ex = 0$, para toda $x \in H$. Sabemos que T^+ es autoadjunto, y además por un caso particular del inciso 2 sabemos que $T^+T = TT^+$, de manera que el inciso 3 nos dice que E conmuta con T^+ (porque T^+ es autoadjunto y conmuta con T), es decir, $ET^+x = T^+Ex = 0$, y como esto se cumple para toda $x \in H$, tenemos $ET^+ = T^+E = 0$.

Demostración (2.23): Ya sabemos que $T^+T^-x = 0$, por lo que $T^-x \in Nuc(T^+)$. Entonces $ET^-x = T^-x$. Como T^- es autoadjunto (por el inciso 1) y conmuta con T (por un caso particular del inciso 2, el inciso 3 nos dice que T^- conmuta con E, es decir, $T^-Ex = ET^-x = T^-x$, para toda $x \in H$, lo que significa que $T^-E = ET^- = T^-$.

Queremos probar

$$TE = -T^-,$$
$$T(I - E) = T^+.$$

Demostración: Ya probamos que $T = T^+ - T^-$, que $T^+E = 0$ y que $T^-E = T^-$, por lo que

$$TE = (T^+ - T^-)E = T^+E - T^-E = -T^-E = -T^-.$$

Ahora usando esto podemos obtener que $T(I - E) = T - TE = T + T^- = T^+$.

Por último, necesitamos probar que $T^+ \geq 0$ y $T^- \geq 0$. Ya probamos que $T^- = ET^-$ y que $ET^+ = 0$. Sabemos además que E y B son autoadjuntos, y por un caso particular del inciso 2 conmutan. Además por el teorema 2.2.2 (por ser E proyección), $E \geq 0$, y por definición $B \geq 0$. Entonces por el lema 2.3.1 tenemos que

$$T^- = ET^- + ET^+ = E(T^- + T^+) = EB \geq 0.$$

De manera similar, y usando de nuevo el lema 2.3.1, tenemos que

$$T^+ = B - T^- = B - EB = (I - E)B \geq 0,$$

pues $I - E \geq 0$ por el teorema 2.2.2 (por ser $(I - E)$ proyección). Así queda probado este lema. $\square$

Ahora probaremos el equivalente de este lema, pero para $T_\lambda = T - \lambda I$. Además, en lugar de B, T^+ y T^- usaremos $B_\lambda = (T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$, $T_\lambda^+ = \frac{1}{2}(B_\lambda + T_\lambda)$ y $T_\lambda^- = \frac{1}{2}(B_\lambda - T_\lambda)$ respectivamente. En lugar de usar la proyección $E : H \to Y = Nuc(T^+)$, usaremos la proyección $E_\lambda : H \to Y_\lambda = Nuc(T_\lambda^+)$, que proyecta H sobre el núcleo de T_λ^+, $Nuc(T_\lambda^+)$.

Lema 2.3.5. *El lema 2.3.4 se cumple si reemplazamos T, B, T^+, T^- y E por T_λ, B_λ, T_λ^+, T_λ^- y E_λ respectivamente. Además, para cualesquiera $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \tau$ reales, los siguientes operadores conmutan entre ellos: $T_\kappa, B_\lambda, T_\mu^+, T_\nu^-, E_\tau$.*

Demostración. La parte que afirma que el lema anterior se cumple reemplazando los operadores es análoga y omitiremos su demostración. Para demostrar la segunda parte, notemos que $SI = IS$, y

$$T_\lambda = T - \lambda I = T - \mu I + (\mu - \lambda)I.$$

Así, se tiene $ST = TS \Rightarrow ST_\mu = T_\mu S \Rightarrow ST_\lambda = T_\lambda S \Rightarrow SB_\lambda = B_\lambda S, SB_\mu = B_\mu S$, etc. Si usamos T_κ en lugar de S en lo anterior obtenemos que $T_\kappa B_\lambda = B_\lambda T_\kappa$, y las demás conmutaciones se obtienen de la misma manera. $\square$

Una vez que hemos obtenido estas herramientas, ya estamos listos para obtener la familia espectral asociada a un operador lineal autoadjunto, y este teorema es el último ingrediente que nos hace falta antes de poder enunciar el teorema que nos da la representación espetral que hemos estado buscando.

Teorema 2.3.6. *Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado y autoadjunto definido en un espacio de Hilbert H. Sea E_λ la proyección de H sobre el núcleo $Y_\lambda = Nuc(T_\lambda^+)$ de la parte positiva T_λ^+ de $T_\lambda = T - \lambda I$. Entonces $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es una familia espectral en el intervalo $[m, M] \subset \mathbb{R}$, donde $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ y $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$.*

Demostración. Según las definiciones 2.3.2 y 2.3.1, necesitamos probar que las siguientes propiedades se cumplen:

(a) $\lambda < \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu$.

(b) $\lambda < m \Rightarrow E_\lambda = 0$.

(c) $\lambda \geq M \Rightarrow E_\lambda = I$.

(d) $\mu \to \lambda + 0 \Rightarrow E_\mu x \to E_\lambda x$, para toda $x \in H$.

Para probar las propiedades anteriores necesitaremos algunas de las propiedades que proporciona el lema 2.3.5. Utilizaremos en particular las siguientes ecuaciones.

$$T_\mu^+ T_\mu^- = 0, \tag{2.24}$$

$$T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^-, T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+, T_\mu E_\mu = -T_\mu^-, \tag{2.25}$$

$$T_\lambda^+ \geq 0, T_\lambda^- \geq 0, T_\mu^+ \geq 0, T_\mu^- \geq 0. \tag{2.26}$$

Procedamos entonces a demostrar las cuatro cosas que necesitamos para ver que en efecto $\mathcal{E}$ es una familia espectral en $[m, M]$.

(a) Sea $\lambda < \mu$. Como $-T_\lambda^- \leq 0$ por (2.26), tenemos que $T_\lambda = T_\lambda^+ - T_\lambda^- \leq T_\lambda^+$. Entonces

$$T_\lambda^+ - T_\mu \geq T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda)I \geq 0,$$

pues $\lambda < \mu$ por hipótesis. Tenemos entonces que $T_\lambda^+ - T_\mu \geq 0$, $T_\lambda^+ - T_\mu$ es autoadjunto, además conmuta con T_μ^+ por el lema 2.3.5, y $T_\mu^+ \geq 0$ por (2.26). Aplicando el lema 2.3.1 obtenemos que

$$T_\mu^+(T_\lambda^+ - T_\mu) = T_\mu^+(T_\lambda^+ - T_\mu^+ + T_\mu^-) \geq 0.$$

Notemos que $T_\mu^+ T_\mu^- = 0$ por (2.24), de modo que tenemos $T_\mu^+ T_\lambda^+ - (T_\mu^+)^2 \geq 0$, por lo que $T_\mu^+ T_\lambda^+ \geq (T_\mu^+)^2$ lo que quiere decir que para toda $x \in H$ se tiene $\langle T_\mu^+ T_\lambda^+ x, x\rangle \geq \langle (T_\mu^+)^2 x, x\rangle$, y como T_μ^+ es un operador autoadjunto, se tiene que

$$\langle (T_\mu^+)^2 x, x\rangle = \langle T_\mu^+ x, T_\mu^+ x\rangle = \|T_\mu^+ x\|^2,$$

de manera que $\langle T_\mu^+ T_\lambda^+ x, x\rangle \geq \|T_\mu^+ x\|^2 \geq 0$.

Así, se tiene que si $T_\lambda^+ x = 0$, entonces $\langle (T_\mu^+)^2 x, x\rangle = 0$, pues $\langle T_\mu^+ T_\lambda^+ x, x\rangle \geq \langle (T_\mu^+)^2 x, x\rangle$, por lo que $\|T_\mu^+ x\|^2 = 0$, y entonces $T_\mu^+ x = 0$. Esto nos dice que $Nuc(T_\lambda^+) \subseteq Nuc(T_\mu^+)$, y como 2 es equivalente a 5 en el teorema 2.2.7, tenemos que $E_\lambda \leq E_\mu$.

(b) Sea $\lambda < m$, y supongamos que $E_\lambda \neq 0$. Entonces $E_\lambda z \neq 0$ para alguna z. Sea $x = E_\lambda z$, luego $E_\lambda x = E_\lambda^2 z = E_\lambda z = x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\|x\| = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda E_\lambda x, x\rangle &= \langle T_\lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx - \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2 \\ &= \langle Tx, x\rangle - \lambda \geq \inf_{\|\overline{x}\|=1} \langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle - \lambda = m - \lambda > 0, \end{aligned}$$

de modo que $\langle T_\lambda E_\lambda x, x\rangle > 0$, lo que significa que $T_\lambda E_\lambda > 0$ por definición. Sin embargo, (2.25) nos dice que $T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^-$, y (2.26) nos dice que $T_\lambda^- \geq 0$, por lo que $-T_\lambda^- \leq 0$, y entonces $T_\lambda E_\lambda \leq 0$, y entonces $T_\lambda E_\lambda > 0$ es una contradicción. Así, podemos concluir que $E_\lambda = 0$.

(c) Supongamos que $\lambda > M$, y supongamos que $E_\lambda \neq I$, de modo que $I - E_\lambda \neq 0$. Entonces $(I - E_\lambda)x = x$ para alguna x tal que $\|x\| = 1$. Luego

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda (I - E_\lambda)x, x\rangle &= \langle T_\lambda x, x\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2 \\ &= \langle Tx, x\rangle - \lambda \leq \sup_{\|\overline{x}\|=1} \langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle - \lambda \\ &= M - \lambda < 0, \end{aligned}$$

de modo que $\langle T_\lambda(I - E_\lambda)x, x\rangle < 0$, lo que significa que $T_\lambda(I - E_\lambda) < 0$ por definición. Sin embargo, (2.25) nos dice que $T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+$, y (2.26) nos dice que $T_\lambda^+ \geq 0$, por lo que $T_\lambda(I - E_\lambda) \geq 0$, y entonces $T_\lambda(I - E_\lambda) < 0$. Así, podemos concluir que $E_\lambda = I$.

(d) Al intervalo $\Delta = (\lambda, \mu]$ le asociaremos el operador $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$. Como $\lambda < \mu$, tenemos que $E_\lambda \leq E_\mu$ por el inciso (a), de modo que usando el teorema 2.2.7 obtenemos $E_\lambda(H) \subseteq E_\mu(H)$, y además $E(\Delta)$ es una proyección por el teorema 2.2.8 pues $E_\lambda(H) \subseteq E_\mu(H)$. Como $E(\Delta)$ es proyección, por el teorema 2.2.2 $E(\Delta) \geq 0$.

Usando que $E_\mu^2 = E_\mu$ y $E_\lambda^2 = E_\lambda$ (por el teorema 2.2.1) y que $E_\mu E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\lambda$ (por el teorema 2.2.7) obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$E_\mu E(\Delta) = E_\mu(E_\mu - E_\lambda) = E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta)$$

$$(I - E_\lambda)E(\Delta) = E(\Delta) - E_\lambda(E_\mu - E_\lambda) = E(\Delta) - E_\lambda E_\mu + E_\lambda^2 = E(\Delta).$$

Notemos que $E(\Delta), T_\mu^-$ y T_λ^+ son positivos y conmutan por el lema 2.3.5, por lo que $T_\mu^- E(\Delta)$ y $T_\lambda^+ E(\Delta)$ son positivos aplicando el lema 2.3.1. Usando que $T_\mu E_\mu = -T_\mu^-$ y $T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+$ por (2.25), tenemos que

$$T_\mu E(\Delta) = T_\mu E_\mu E(\Delta) = -T_\mu^- E(\Delta) \leq 0. \tag{2.27}$$

$$T_\lambda E(\Delta) = T_\lambda(I - E_\lambda)E(\Delta) = T_\lambda^+ E(\Delta) \geq 0. \tag{2.28}$$

De la ecuación (2.27) tenemos que $T_\mu E(\Delta) = TE(\Delta) - \mu E(\Delta) \leq 0$, de modo que

$$TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta).$$

De la ecuación (2.28) tenemos que $T_\lambda E(\Delta) = TE(\Delta) - \lambda E(\Delta) \geq 0$, de modo que

$$TE(\Delta) \geq \lambda E(\Delta).$$

Juntando estas desigualdades se tiene que

$$\lambda E(\Delta) \leq TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta) \tag{2.29}$$

donde $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$. Hagamos $\mu \to \lambda$ por la derecha. Entonces por el teorema equivalente al 2.3.2 pero para una sucesión decreciente, tenemos que $E(\Delta)x \to P(\lambda)x$, donde $P(\lambda)$ es un operador acotado y autoadjunto. Además $P(\lambda)$ es idempotente, pues $E(\Delta)$ lo es. Así, $P(\lambda)$ es una proyección. Por la desigualdad (2.29), $\lambda P(\lambda) = TP(\lambda)$, es decir, $T_\lambda P(\lambda) = 0$. Usando que $T_\lambda^+ = T_\lambda(I - E_\lambda)$ y que T_λ y $I - E_\lambda$ conmutan por el lema 2.3.5, obtenemos que

$$T_\lambda^+ P(\lambda) = T_\lambda(I - E_\lambda)P(\lambda) = (I - E_\lambda)T_\lambda P(\lambda) = 0.$$

Así, $T_\lambda^+ P(\lambda)x = 0$ para toda $x \in H$, es decir, $P(\lambda)x \in Nuc(T_\lambda^+)$. Sabemos por definición que E_λ proyecta H sobre $Nuc(T\lambda^+)$, de modo que $E_\lambda P(\lambda)x = P(\lambda)x$, es decir $E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda)$.

Por otro lado, si hacemos $\mu \to \lambda + 0$ en la igualdad $(I - E_\lambda)E(\Delta) = E(\Delta)$ obtenemos que $(I - E_\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)$, es decir, $P(\lambda) - E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda)$ y como $E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda)$, tenemos que $0 = P(\lambda)$.

Como $E(\Delta)x \to P(\lambda)x$, tenemos que $(E_\mu x - E_\lambda x) \to 0$ cuando $\mu \to \lambda + 0$, es decir, si $\mu \to \lambda + 0$ entonces $E_\mu x \to E_\lambda x$ que es lo que queríamos probar en este inciso. Con esto podemos concluir que $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una familia espectral en el intervalo $[m, M]$. □

Ahora ya estamos listos para enunciar el teorema que era nuestro objetivo en esta sección, y es el que nos muestra la representación espectral de un operador autoadjunto. Demostraremos el inciso (b) haciendo uso de una parte de la demostración del inciso (a), que se puede encontrar completa en [5].

Teorema 2.3.7. *Sea $T : H \to H$ un operador lineal autoadjunto definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces*

(a) T tiene la representación espectral

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda, \tag{2.30}$$

donde $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es la familia espectral asociada a T, y para todo $x, y \in H$,

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{m-0}^{M} \lambda dw(\lambda),$$

con $w(\lambda) = \langle Ex, y\rangle$, y la integral es de Riemann-Stieltjes.

(b) Si p es un polinomio en λ con coeficientes reales, $p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ entonces el operador $p(T)$ dado por $p(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$ tiene la representación espectral

$$p(T) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) dE_\lambda, \tag{2.31}$$

donde para todo $x, y \in H$,

$$\langle p(T)x, y\rangle = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) dw(\lambda), \tag{2.32}$$

con $w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y\rangle$.

Demostración. Sea $(\mathcal{P}_n)$ una sucesión de particiones del intervalo $(a, b]$, donde $a < m$ y $M < b$. Cada $\mathcal{P}_n$ es una partición de $(a, b]$ en intervalos

$$\Delta_{nj} = (\lambda_{nj}, \mu_{nj}] \qquad\qquad j = 1, ..., n$$

de longitud $l(\Delta_{nj}) = \mu_{nj} - \lambda_{nj}$. Notemos que $\mu_{nj} = \lambda_{n,j+1}$ para $j = 1, ..., n-1$.

Empecemos considerando el polinomio $p(\lambda) = \lambda^r$, con $r \in \mathbb{N}$. Sean $\kappa < \lambda \leq \mu < \nu$. De la ecuación (2.11) tenemos que

$$(E_\lambda - E_\kappa)(E_\mu - E_\nu) = E_\lambda E_\mu - E_\lambda E_\nu - E_\kappa E_\mu + E_\kappa E_\nu$$

$$= E_\lambda - E_\lambda + E_\kappa - E_\kappa = 0.$$

Esto muestra que $E(\Delta_{nj})E(\Delta_{nk}) = 0$, para $j \neq k$. Además, como $E(\Delta_{nj})$ es una proyección, $E(\Delta_{nj})^s = E(\Delta_{nj})$ para cada $s = 1, 2, ...$ Así, si $\widehat{\lambda_{nj}} \in \Delta_{nj}$ obtenemos que

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda_{nj}} E(\Delta_{nj})\right]^r = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda_{nj}}^{\,r} E(\Delta_{nj}). \tag{2.33}$$

Suponiendo que es cierto el inciso (a), de su demostración[3] se tiene que la suma en la ecuación (2.33) es muy cercana[4] al operador T, de manera que la expresión $\left[\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda_{nj}}E(\Delta_{nj})\right]^r$ es muy cercana al operador T^r porque la composición de operadores lineales y acotados es continua. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe una N tal que para toda $n > N$ se tiene que

$$\|T^r - \sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda_{nj}}^{\,r}E(\Delta_{nj})\| < \varepsilon.$$

Esto prueba las ecuaciones (2.31) y (2.32) para $p(\lambda) = \lambda^r$. De aquí se siguen inmediatamente las ecuaciones (2.31) y (2.32) para un polinomio arbitrario con coeficientes reales. $\square$

A continuación mostraremos un par de ejemplos para operadores sencillos, en donde verificaremos que tales operadores en efecto se pueden representar de la manera que lo indica el teorema.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos el operador $T = 0$. Verificaremos que en efecto se puede representar como lo indica el teorema 2.3.7. Si $\lambda < 0$ entonces $E_\lambda = 0$, y si $\lambda \geq 0$ entonces $E_\lambda = I$, de manera que tenemos

$$T = \int_{0-0}^{0} \lambda dE_\lambda = 0(E_0 - E_{0-0}) = 0(I - 0) = 0.$$

Ejemplo 2.3.2. Consideremos el operador $T = I$. Nuevamente verificaremos que se cumple el teorema 2.3.7, calculando la familia espectral asociada al operador para distintos valores de λ. Si $\lambda < 1$ entonces $E_\lambda = 0$, y si $\lambda \geq 1$ entonces $E_\lambda = I$, de manera que tenemos

$$T = \int_{1-0}^{1} \lambda dE_\lambda = 1(E_1 - E_{1-0}) = 1(I - 0) = I.$$

---

[3] Ver en [5].

[4] Muy cercana es un término muy vago para decir que dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que para toda $n > N$ se tiene que $\|T - \sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda_{nj}}E(\Delta_{nj})\| < \varepsilon$.

Capítulo 3

Aplicaciones de la teoría espectral

3.1. El problema de Hamburger

El problema clásico de momentos es un problema central en el desarrollo del análisis matemático desde finales del siglo 19 hasta mediados de los años 50. Muchos conceptos y teoremas importantes de esta época, como los de medida, polinomios ortogonales, extensiones de funcionales lineales, el teorema de representación de Riesz, y varios ejemplos más, tienen su origen en el estudio de los problemas de momentos. Un problema de momentos surge en el intento de invertir la función que envía a una medida μ en la sucesión de momentos

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x). \tag{3.1}$$

En los orígenes del problema, μ es una medida real, y en este contexto el problema aparece en probabilidad , pues resuelve la pregunta ¿Existe una medida de probabilidad con media y varianza específicas? Ésta es una de las aplicaciones de este tipo de problemas, pero hay algunas más. Los tres problemas de momentos más conocidos son el de Hamburger, en el cual el soporte de la medida μ es toda la recta real, el de Stieltjes, en el cual es el intervalo $[0, \infty)$, y el de Hausdorff, en el cual es cualquier intervalo acotado.

En esta sección estudiaremos el problema de momentos de Hamburger, y daremos una prueba basada en el teorema de representación espectral que obtuvimos en el capítulo anterior. Aunque no probaremos la unicidad de la solución, sí proporcionaremos condiciones suficientes y necesarias sobre una sucesión (a_n) de números reales para que exista una medida μ que satisfaga la ecuación (3.1). Antes de enunciar la solución al problema de momentos de Hamburger y demostrarla, necesitamos conocer algunos conceptos y teoremas que serán necesarios en ella.

Es importante introducir primero la siguiente notación. Si V es un espacio vectorial y $W \subseteq V$, entonces $v + W = \{v + w : w \in W\}$.

Definición 3.1.1. Sea V un espacio vectorial definido sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea N un subespacio de V.

1. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en V como $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in N$, para todo $x, y \in V$. La clase de equivalencia de x se denota como $[x]$ y está dada por $[x] = \{x + n : n \in N\}$ o equivalentemente, $[x] = x + N$.

2. El espacio cociente V/N es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, y se define como el conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de V, es decir, $V/N = \{[x] : x \in V\} = \{x + N : x \in V\}$.

3. Dados $x, y \in V$, la multiplicación por escalares en el espacio V/N se define como
$$\alpha[x] = [\alpha x],$$
donde $\alpha \in K$, y la suma de dos elementos de V/N (clases de equivalencia) se define como
$$[x] + [y] = [x + y].$$

Una vez que tenemos la definición de espacio cociente, existe una forma natural de definir un operador en este espacio, en términos de otro operador lineal definido en el espacio original. Sin embargo, para poder hacerlo se necesita una condición, como lo indica la siguiente definición.

Definición 3.1.2. Sea V un espacio vectorial definido sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea $W \subseteq V$ un subespacio. Si $T : V \to V$ es un operador lineal tal que $T(W) \subseteq W$, entonces se define al operador $\overline{T} : V/W \to V/W$ como $\overline{T}(v + W) = T(v) + W$.

Aunque tiene sentido definir el operador en el espacio cociente de esta manera, es necesario comprobar que no hay ambiguedad en la definición, para lo cual es clave la condición de invarianza que impone la definición.

Lema 3.1.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea $W \subseteq V$ un subespacio tal que $T(W) \subseteq W$. Entonces el operador $\overline{T} : V/W \to V/W$ dado por $\overline{T}(x + W) = T(x) + W$ está bien definido, es decir, si $x \sim y$ entonces $\overline{T}([x]) = \overline{T}([y])$*

Demostración. Supongamos que $x \sim y$, entonces $x - y \in W$, de modo que $Tx - Ty \in W$, pues $T(W) \subseteq W$. Por tanto, $Tx + W = Ty + W$, de manera que $\overline{T}([x]) = \overline{T}([y])$, que es lo que queríamos probar. □

El primer teorema que necesitaremos para resolver este problema es sobre espacios de Hilbert, y establece la existencia de uno (un espacio de Hilbert), siempre que se tenga un espacio con producto interno. Su demostración se basa fuertemente en el teorema equivalente para espacios de Banach (que se basa a su vez en el teorema equivalente para espacios métricos completos) y en la continuidad del producto interno. Enunciaremos el teorema equivalente para espacios de Banach sin demostrarlo (para consultar su demostración ver [5]), y probaremos la continuidad del producto, para después probar el teorema que necesitamos.

Teorema 3.1.2. *Sea $X = (X, \|\|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\tilde{X}$ y una isometría $A : X \to W$, donde $W \subseteq \tilde{X}$ es un subespacio de $\tilde{X}$ que es denso. El espacio $\tilde{X}$ es único salvo isometrías.*

Lema 3.1.3. *Sea X un espacio con producto interno $\langle , \rangle$. Si (x_n) y (y_n) son dos sucesiones en X tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Demostración. Queremos probar que $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0$. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Notemos que $\|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \longrightarrow 0$, pues $y_n - y \to 0$ y $x_n - x \to 0$ por hipótesis. Así, $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0$, que es lo que queríamos probar. □

Teorema 3.1.4. *Sea X un espacio con producto interno $\langle , \rangle$. Entonces existe un espacio de Hilbert H y un isomorfismo $A : X \to W$, donde $W \subseteq H$ es un subespacio denso. El espacio H es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Por el teorema 3.1.2 existe un espacio de Banach H y una isometría $A : X \to W$, donde $W \subseteq H$ es un subespacio que es denso en H. Por motivos de continuidad, las sumas y multiplicaciones por escalares de elementos en X y W se corresponden, de manera que A es un isomorfismo de X en W, siendo ambos espacios normados.

Para definir en H las dos operaciones algebráicas de un espacio vectorial, sean $\overline{x}, \overline{y} \in H$, y sean $(x_n) \in \overline{x}, (y_n) \in \overline{y}$, es decir, (x_n) es un representante de la clase de equivalencia $\overline{x}$ y (y_n) es un representante de la clase de equivalencia $\overline{y}$. Recordemos que $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en X, donde $(x_n) \sim (x'_n)$ si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x'_n\| = 0$. Entonces por el lema 3.1.3 podemos definir un producto interno en H como

$$\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle,$$

lo que garantiza que H es un espacio de Hilbert. El teorema 3.1.2 también afirma que el espacio H es único salvo isometrías, es decir, si H y $\overline{H}$ son dos compleciones del espacio X, entonces H y $\overline{H}$ están relacionados por una isometría $T : H \to \overline{H}$. De manera similar al caso de la isometría A, podemos colncluir que T es un isomorfismo del espacio de Hilbert H en el espacio de Hilbert $\overline{H}$. □

El último teorema que necesitamos para demostrar la solución al problema de momentos de Hamburger es también el más complejo, y antes de enunciarlo necesitamos un par de definiciones sobre operadores. Este teorema fue probado por primera vez por John von Neumann, y por eso lleva su nombre. Además de ser fundamental para la prueba de esta solución, este teorema tiene muchas otras aplicaciones, por ejemplo, en la física. Su prueba requiere de métodos muy particulares sobre extensiones autoadjuntas, y se puede consultar en [8].

Definición 3.1.3. Sea T un operador lineal y acotado, definido en un espacio de Hilbert H con producto interno $\langle , \rangle$ y tal que $\overline{D(T)} = H$. Se dice que el operador T es simétrico si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, para todo $x, y \in D(T)$.

Definición 3.1.4. Sea $f : V \to W$ una función de un espacio vectorial complejo V en otro. Se dice que f es antilineal si $f(ax + by) = \overline{a}f(x) + \overline{b}f(y)$.

Definición 3.1.5. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador antilineal $C : H \to H$ se llama conjugación si $\|Cx\| = \|x\|$, para toda $x \in H$ y $C^2 = I$.

Teorema 3.1.5. *Sea $A : H \to H$ un operador simétrico definido en un espacio de Hilbert H, y supongamos que existe una conjugación $C : D(A) \to D(A)$ tal que $CA = AC$. Entonces el operador A tiene extensiones autoadjuntas.*

Definición 3.1.6. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es la sucesión de momentos de una medida μ sobre $\mathbb{R}$ si

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x).$$

Ahora ya estamos listos para enunciar y demostrar la solución al problema de Hamburger, y aunque en una de las implicaciones no utilizamos ninguna de las herramientas anteriores, en la otra sí se necesitan y bastante. Lo que haremos será dar condiciones necesarias y suficientes sobre una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales para que exista una medida μ que satisfaga la definición 3.1.6, que es la que nos interesa.

Teorema 3.1.6. *Una sucesión (a_n) de números reales es una sucesión de momentos de una medida positiva μ sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si para toda N y para todos $\beta_0, ..., \beta_N \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\sum_{n,m=0}^{N} \overline{\beta_n}\beta_m a_{n+m} \geq 0. \tag{3.2}$$

Demostración. Supongamos que μ es una medida positiva y se cumple la ecuación (3.1). Entonces tenemos que

$$\sum_{n,m=0}^{N} \overline{\beta_n}\beta_m a_{n+m} = \sum_{n,m=0}^{N} \overline{\beta_n}\beta_m \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+m} d\mu(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,m=0}^{N} \overline{\beta_n} \beta_m x^{n+m} d\mu(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N} \beta_m x^m \sum_{n=0}^{N} \overline{\beta_n} x^n d\mu(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N} \beta_m x^m \overline{\sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n} d\mu(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n|^2 d\mu(x) \geq 0.$$

Así, se cumple la ecuación (3.2).

Ahora supongamos que se cumple la ecuación (3.2), y probaremos con ayuda de las herramientas que obtuvimos anteriormente, que se cumple la ecuación (3.1). Sea P el espacio de todos los polinomios reales con coeficientes complejos. Definimos un producto interno en P como

$$\langle \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n, \sum_{m=0}^{M} \alpha_m x^m \rangle = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \overline{\beta_n} \alpha_m a_{n+m}.$$

Sea $Q = \{p \in P : \langle p, p \rangle = 0\}$, y sea H el espacio de Hilbert que se obtiene al completar el espacio P/Q con el producto interno $\langle , \rangle$ como lo indica el teorema 3.1.4. Sea $A : P \to P$ el operador definido como

$$A(\sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^{n+1}.$$

Entonces A es un operador simétrico según la definición 3.1.3 , pues si $p, q \in P$, $p = \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n$, con $\beta_i \in \mathbb{C}$, para $i = 0, ..., N$ y $q = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m x^m$, con $\alpha_i \in \mathbb{C}$, para $i = 0, ..., M$. Así, tenemos que

$$\langle Ap, q \rangle = \langle \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^{n+1}, \sum_{m=0}^{M} \alpha_m x^m \rangle = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \overline{\beta_n} \alpha_m a_{n+1+m}$$

$$\langle p, Aq \rangle = \langle \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n, \sum_{m=0}^{M} \alpha_m x^{m+1} \rangle = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \overline{\beta_n} \alpha_m a_{n+m+1}.$$

Entonces $\langle Ap, q \rangle = \langle p, Aq \rangle$. Además el conjunto Q es invariante bajo el operador A, es decir, $A : Q \to Q$, pues si $p \in Q$, por la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$\langle Ap, Ap \rangle = |\langle A^2 p, p \rangle| \leq \langle A^2 p, A^2 p \rangle^{\frac{1}{2}} \langle p, p \rangle^{\frac{1}{2}} = 0,$$

y como $\langle Ap, Ap\rangle = \|Ap\|^2 \geq 0$, entonces $Ap \in Q$. Usando el lema 3.1.1 tenemos que existe una transformación $\widehat{A}$ en H con dominio P/Q.

Sea C la conjugación usual en P. Entonces también existe una transformación $\widehat{C} : P/Q \to P/Q$. Notemos que $\widehat{C}$ se puede extender a una conjugación en H.

Ahora solamente nos falta probar que $\widehat{A}\widehat{C} = \widehat{C}\widehat{A}$ para poder aplicar el teorema 3.1.5. Para probarlo necesitamos demostrar primero que $AC = CA$, lo cual es simple, como se puede ver a continuación.

Sea $p \in P$, $p = \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n$, de modo que si le aplicamos A, obtenemos

$$Ap = \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^{n+1},$$

y aplicando C obtenemos que

$$CAp = \sum_{n=0}^{N} \overline{\beta_n} x^{n+1}.$$

Por otro lado, si primero aplicamos C tenemos que

$$Cp = \sum_{n=0}^{N} \overline{\beta_n} x^{n},$$

de modo que aplicando A obtenemos

$$ACp = \sum_{n=0}^{N} \overline{\beta_n} x^{n+1}.$$

Así, $AC = CA$.

Ahora sí procedamos a probar que $\widehat{A}\widehat{C} = \widehat{C}\widehat{A}$. Sea $[x] \in P/Q$, es decir, $[x] = y + Q$. Entonces $\widehat{C}([x]) = \widehat{C}(y + Q) = Cy + Q$ por el lema 3.1.1. Luego, si aplicamos $\widehat{A}$ obtenemos que

$$\widehat{A}(\widehat{C}([x])) = \widehat{A}(Cy + Q) = ACy + Q,$$

nuevamente por el lema 3.1.1. Por otro lado, $\widehat{A}([x]) = \widehat{A}(y + Q) = Ay + Q$ por el lema 3.1.1, de modo que si aplicamos $\widehat{C}$ obtenemos que

$$\widehat{C}(\widehat{A}([x])) = \widehat{C}(Ay + Q) = CAy + Q,$$

y como $AC = CA$, podemos concluir que $\widehat{A}\widehat{C} = \widehat{C}\widehat{A}$.

Resumiendo, tenemos un operador simétrico $\widehat{A}$ definido en un espacio de Hilbert H con dominio P/Q, y tenemos una conjugación $\widehat{C} : D(A) \to D(A)$ tal que $\widehat{A}\widehat{C} = \widehat{C}\widehat{A}$, de manera que por el teorema 3.1.5 el operador $\widehat{A}$ tiene alguna extensión autoadjunta $\overline{A}$.

Por el teorema 2.3.7 sabemos que para todos $y, z \in H$ se tiene que

$$\langle p(T)y, z\rangle = \int_{m-0}^{M} p(\lambda)dw(\lambda),$$

con $w(\lambda) = \langle E_\lambda y, z\rangle$. En particular, para $y = x^0 = z = 1$, considerando el polinomio $p(x) = x^n$ y el operador $T = \overline{A}$ autoadjunto que acabamos de obtener, tenemos que

$$\langle \overline{A}^n 1, 1\rangle = \int_{m}^{M} x^n dw(x),$$

con $w(x) = \langle E_x 1, 1\rangle$, $m = \inf_{\|x\|=1}\langle \overline{A}x, x\rangle$ y $M = \sup_{\|x\|=1}\langle \overline{A}x, x\rangle$. Notemos que

$$\int_{m}^{M} x^n dw(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dw(x),$$

pues $E_x = 0$ para toda $x < m$, por lo que $w(x) = 0$ para toda $x < m$. Además $E_x = I$ para toda $x \geq M$, por lo que $w(x) = \langle 1, 1\rangle = C$, de manera que $dw(x) = 0$ para toda $x \geq M$.

Sea $\mu(x) = w(x)$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x) = \langle \overline{A}^n 1, 1\rangle = \langle x^n, 1\rangle = a_n.$$

□

Así queda solucionado el problema de Hamburger, pues ya tenemos las condiciones bajo las cuales una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una sucesión de momentos.

3.2. La prueba de Weyl del teorema de Bohr

En esta sección exponemos la prueba del teorema de Bohr, utilizando herramientas de análisis de Fourier (específicamente funciones casi periódicas) y teoría espectral. Esta prueba fue realizada inicialmente por el matemático alemán Hermann Weyl alrededor del año 1910. Para realizar esta demostración son necesarios algunos resultados y propiedades de las funciones casi periódicas, los cuales se podrán consultar en la bibliografía que proporcionaremos en cada uno.

Es importante mencionar que el teorema de Bohr es una generalización de la famosa desigualdad de Bessel, la cual afirma que si H es un espacio de Hilbert, y (e_n) es una sucesión ortonormal en H, entonces para todo $x \in H$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{3.3}$$

Teorema 3.2.1. ***(Bohr)*** *Sea f una función casi periódica. Entonces se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = M\{|f(t)|^2\}.$$

Para establecer las bases que nos permitirán hacer esta demostración, utilizaremos el concepto de función casi periódica, el cual fue definido por primera vez por Harald Bohr en el estudio de sistemas planetarios y órbitas. Tiempo después, este concepto fue generalizado por varios matemáticos, entre ellos Besicovitch, Weyl y Stepanov.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio de Banach complejo.
Una función continua $f : \mathbb{R} \to X$ es una función casi periódica si para todo $\varepsilon > 0$ existe $l = l(\varepsilon) > 0$ tal que cada intervalo real de longitud $l(\varepsilon)$ contiene al menos un número τ para el cual

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_X < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Cada τ que cumple la ecuación (3.4) se llama número de traslación.

A partir de esta definición se pueden establecer propiedades básicas de las funciones casi periódicas que utilizaremos más adelante. Algunas de ellas pueden ser probadas directamente de la definición, como veremos. Sin embargo, en otras se necesita de un teorema sumamente útil, el cual ocupa el lugar central en la teoría de funciones casi periódicas, proporcionando una forma de aproximarlas utilizando un polinomio de la forma

$$P(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{i\lambda_k t}. \tag{3.5}$$

Teorema 3.2.2. *Para toda función continua y casi periódica $f : \mathbb{R} \to X$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico*

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{i\lambda_k t} \qquad\qquad (A_k = A_{k,\varepsilon} \in X, \lambda_k = \lambda_{k,\varepsilon} \in \mathbb{R})$$

tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_\varepsilon(t)\| < \varepsilon.$$

Este importante resultado fue probado inicialmente por H. Bohr, y para su demostración se utiliza un método muy particular de análisis armónico. Ésta se puede encontrar en [6].

La siguiente proposición proporciona propiedades básicas de las funciones casi periódicas, demostraremos todas excepto el inciso (e), pues para probarlo se necesitan varias herramientas más de las que no disponemos. Su demostración se puede consultar en [6].

Proposición 3.2.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to X$ una función casi periódica. Entonces las siguientes propiedades son ciertas.*

(a) La función f es compacta, es decir, $\overline{Ran(f)}$ es compacto. En particular, si el espacio X es de dimensión finita, la función f es acotada.

(b) f es una función uniformemente continua en el eje real.

(c) Para toda función casi periódica f existe el valor medio

$$M\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+a}^{T+a} f(t)dt,$$

donde el límite de la derecha es uniforme en a, para $a \in \mathbb{R}$.

(d) El producto y la suma de dos funciones casi periódicas dan como resultado una función casi periódica, respectivamente.

(e) Si f es una función casi periódica tal que $M\{|f(t)|^2\} = 0$, entonces $f(t) = 0$, para toda $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. (a) Supongamos que $Ran(f)$ es totalmente acotado.
Sabemos que X es un espacio completo, así que por el lema 1.2.5 $Ran(f)$ es relativamente compacto, es decir $\overline{Ran(f)}$ es compacto.

Necesitamos probar entonces que $Ran(f)$ es totalmente acotado, es decir, para todo $\varepsilon > 0, Ran(f)$ contiene una ε-red para $Ran(f)$. Para esto, sea $l = l(\varepsilon)$ la distancia cuya existencia garantiza la definición 3.2.1. Definimos

$$Ran_l(f) = \{x \in Ran(f) : x = f(t), -l/2 \leq t \leq l/2\}.$$

Como f es continua, $Ran_l(f)$ es compacto. Probaremos que es de hecho una ε-red para $Ran(f)$. Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, y $\tau = \tau_\varepsilon$ un número de traslación tal que $-l/2 \leq t_0 + \tau \leq l/2$, es decir,

$$-t_0 - l/2 \leq \tau \leq -t_0 + l/2.$$

Entonces

$$\|f(t_0 + \tau) - f(t_0)\| \leq \varepsilon.$$

Como $t_0 + \tau \in [-l/2, l/2]$, por la definición 1.2.3 el conjunto $Ran_l(f)$ es una ε-red para $Ran(f)$, como queríamos probar.

(b) Sean $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ y $l = l(\varepsilon_1)$. La función f es uniformemente continua en el intervalo $[-1, 1 + l]$, es decir, existe $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ tal que

$$|f(s'') - f(s')| < \varepsilon_1 \tag{3.6}$$

siempre que $|s'' - s'| < \delta$, para $s'', s' \in [-1, 1 + l]$. Sean $t', t'' \in \mathbb{R}$ tales que $|t' - t''| < \delta$. Tomamos $\tau = \tau_{\varepsilon_1}$ un número de traslación tal que $0 \leq t' + \tau \leq l$, es decir,

$$-t' \leq \tau \leq -t' + l.$$

Entonces $t'' + \tau \in [-1, 1 + l]$. Sean $s' = t' + \tau$ y $s'' = t'' + \tau$. Usando (3.4), (3.6) y la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$|f(t'') - f(t')| \leq |f(t'') - f(s'')| + |f(s'') - f(s')| + |f(s') - f(t')| < \varepsilon.$$

(c) Para toda $a \in \mathbb{R}$ y para toda $T > 0$ se tiene que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} e^{i\lambda t}dt = \begin{cases} 1 & si \quad \lambda = 0 \\ \\ e^{i\lambda a}\frac{sen(\lambda T)}{T} & si \quad \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Así, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} e^{i\lambda t}dt := \psi(\lambda) = \begin{cases} 1 & si \quad \lambda = 0 \\ \\ 0 & si \quad \lambda \neq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

uniformemente con respecto a a. De la ecuación (3.7) podemos concluir que la propiedad (c) se cumple para cualquier polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k t} \qquad\qquad (a_k \in X),$$

con

$$M\{P(t)\} = \sum_{k=1}^{N} a_k \psi(\lambda_k).$$

Ahora, sea f una función casi periódica. Por el teorema 3.2.2, para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonómetrico $P_\varepsilon(t)$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_\varepsilon(t)\| < \varepsilon.$$

Definimos

$$\frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} f(t)dt := M\{f; T, a\}.$$

Entonces tenemos que

$$\|M\{f;T',a\} - M\{f;T'',a\}\| = \left\|\frac{1}{2T}\int_{-T'+a}^{T'+a} f(t)dt - \frac{1}{2T}\int_{-T''+a}^{T''+a} f(t)dt\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{1}{2T}\int_{-T'+a}^{T'+a}[f(t) - P_\varepsilon(t)]dt\right\|$$

$$+\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T'+a}^{T'+a} P_\varepsilon(t)dt\right\| - \left\|\frac{1}{2T}\int_{-T''+a}^{T''+a} P_\varepsilon(t)dt\right\| + \left\|\frac{1}{2T}\int_{-T''+a}^{T''+a}[f(t) - P_\varepsilon(t)]dt\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{1}{2T}\int_{-T'+a}^{T'+a} P_\varepsilon(t)dt - \frac{1}{2T}\int_{-T''+a}^{T''+a} P_\varepsilon(t)dt\right\| + 2\varepsilon$$

$$= \|M\{P_\varepsilon;T',a\} - M\{P_\varepsilon;T'',a\}\| + 2\varepsilon.$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $T_\varepsilon > 0$ tal que para $T', T'' > T_\varepsilon$, y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|M\{f;T',a\} - M\{f;T'',a\}\| < 3\varepsilon,$$

que es lo que queríamos probar.

(d) Demostraremos únicamente la propiedad de la suma de dos funciones casi periódicas y la otra es muy parecida.

Sean f, g dos funciones casi periódicas. Por el teorema 3.2.2 para todo $\varepsilon > 0$ existen polinomios trigonométricos $P_{\varepsilon/2}, Q_{\varepsilon/2}$ tales que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_{\varepsilon/2}(t)\| < \varepsilon/2,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - Q_{\varepsilon/2}(t)\| < \varepsilon/2.$$

Luego,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) + g(t) - [P_{\varepsilon/2}(t) - Q_{\varepsilon/2}]\| < \varepsilon,$$

de manera que $f + g$ es una función casi periódica. $\square$

Una vez que tenemos estas propiedades básicas, definimos el producto interno

$$\langle f, g\rangle = M\{f(t)\overline{g(t)}\} \tag{3.8}$$

en el espacio de todas las funciones casi periódicas. Es importante notar que las funciones de la forma

$$e^{-i\lambda t} \tag{3.9}$$

son todas casi periódicas, de manera que si f es una función casi periódica y tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$, usando el inciso (d) de la proposición 3.2.3 tenemos que la función $f(t)e^{-i\lambda t}$ es también casi periódica, y por lo tanto, para cada función casi periódica f, la función

$$\alpha(\lambda; f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\lambda t}dt = M\{f(t)e^{-i\lambda t}\} = \langle f, e^{i\lambda t}\rangle$$

está bien definida. Esta función se llama comunmente transformada de Bohr.

A continuación enunciamos un lema que es básico en la teoría de funciones casi periódicas, y proporciona una propiedad importante sobre los valores λ en los cuales está evaluada la función α.

Lema 3.2.4. *Para cada función casi periódica f existe solamente una cantidad numerable de valores del parámetro λ tales que $\alpha(\lambda; f) \neq 0$. Estos valores se llaman comunmente exponentes de Fourier de la función f.*

Demostración. Sea (P_k) una sucesión de polinomios trigonométricos que aproximan a la función f tales que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_k(t)\| \leq 1/k \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Supongamos que

$$P_k(t) = \sum_{m=1}^{n_k} a_{k,m}e^{i\lambda_{k,m}t} \tag{3.10}$$

y

$$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto $\{\mu_n\}$ es a lo más numerable, pues la sucesión (P_k) es numerable. Además la suma en (3.10) es finita, por lo que la cantidad de $\lambda_{k,m}$ es a lo más numerable. Probaremos que

$$\alpha(\lambda; f) = 0$$

para $\lambda \neq \mu_n$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|\alpha(\lambda; f)\| &= \|\alpha(\lambda; P_k) + \alpha(\lambda; f - P_k)\| \\ &= \|\alpha(\lambda; f - P_k)\| \leq 1/k \qquad (k = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

Como k puede tomarse arbitrariamente grande, podemos conluir que

$$\alpha(\lambda; f) = 0$$

para $\lambda \neq \mu_n$. □

Dada una función casi periódica f, el lema 3.2.4 garantiza que solamente existe una cantidad numerable de exponentes de Fourier, así que los denotaremos por $\lambda_1, \lambda_2, ...$ A los correspondientes valores $\alpha(\lambda_k; f)$ los denotaremos por C_k, y los llamaremos coeficientes de Fourier de la función f, es decir, $C_k = \alpha(\lambda_k; f)$, $k = 1, 2, ...$ Así, a cada función casi periódica f le corresponde una serie de Fourier, de modo que

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{i\lambda_k t}.$$

De la desigualdad (3.3) se sigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leq M\{|f(t)|^2\} \tag{3.11}$$

Utilizaremos un teorema fuerte para probar el teorema de Bohr, que es el motivo de esta sección. Este teorema fue probado inicialmente por Cesare Arzelà y Giulio Ascoli, y por eso lleva sus nombres. Para entender este importante teorema primero necesitamos una definición. Este teorema es bastante conocido y su prueba no es nada simple, por lo que la omitiremos. Una demostración bastante detallada se puede consultar en [2].

Definición 3.2.2. Sean M y N espacios métricos y E un conjunto de funciones $f : M \to N$. Se dice que el conjunto E es equicontinuo en el punto $a \in M$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, a) < \delta$, entonces

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

para cada $f \in E$. Si E es equicontinuo en todo punto de M, se dice que E es equicontinuo.

Teorema 3.2.5. ***(Arzelà-Ascoli)*** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de variable real. Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge unifromemente en el eje real.*

La prueba que expondremos del teorema de Bohr fue hecha por primera vez por Hermann Weyl, y se basa en la teoría de operadores compactos, que estudiamos en el capítulo 1. Este teorema es fundamental en la teoría de Bohr, y afirma que se tiene igualdad en la ecuación (3.11).

Teorema 3.2.6. ***(Bohr)*** *Sea f una función casi periódica. Entonces se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = M\{|f(t)|^2\}.$$

Demostración. Sea R el espacio formado por todas las funciones casi periódicas, equipado con el producto interno definido en (3.8)[1].

Para poder hacer la prueba con base en la teoría de operadores completamente continuos, necesitamos involucrar un operador lineal con dependencia en la función que conocemos, es decir, f. Para esto, sea

$$v(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)u(t)dt = M_t\{f(s-t)u(t)\}.$$

Esta ecuación le asocia a cada función $u \in R$ una función v que pertenece[2] a R. Entonces tenemos un operador lineal determinado por la función f, que manda a u en v. Denotemos a este operador por A, es decir,

$$Au = v.$$

Probaremos que A es un operador normal. Para esto definimos un operador B, de tal forma que $Bu = w$ donde

$$w(s) = M_t\{\overline{f(t-s)}u(t)\}.$$

Necesitamos probar:

(a) $\langle Au_1, u_2\rangle = \langle u_1, Bu_2\rangle$, para $u_1, u_2 \in R$.

(b) $AB = BA$.

Para la propiedad (a), tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Au_1, u_2\rangle &= M_s\{M_t[f(s-t)u_1(t)]\overline{u_2(s)}\}\\ &= M_t\{u_1(t)M_s[f(s-t)\overline{u_2(s)}]\}\\ &= M_t\{u_1(t)\overline{M_s[\overline{f(s-t)}u_2(s)]}\} = \langle u_1, Bu_2\rangle.\end{aligned}$$

Es importante notar que el intercambio en el orden de las operaciones M_t y M_s es válido, pues el valor medio es un límite uniforme por el inciso (c) de la proposición 3.2.3.

Ahora veamos que se cumple la propiedad (b). Primero notemos que

$$\begin{aligned}ABu &= M_t\{f(s-t)M_\tau[\overline{f(\tau-t)}u(\tau)]\}\\ &= M_\tau\{u(\tau)M_t[f(s-t)\overline{f(\tau-t)}]\}.\end{aligned}$$

[1]Notemos que los polinomios de la forma (3.10) pertenecen a este espacio, al ser las funciones $e^{-i\lambda t}$ casi periódicas

[2]Para comprobarlo, consultar [6]

Dejando esto por un momento, definimos ahora la función de s y τ dada por

$$\varphi(s,\tau) = M_t[f(s-t)\overline{f(\tau-t)}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\overline{f(\tau-t)}dt.$$

Hacemos el cambio de variable indicado por $\tau - t = \sigma - s$ y obtenemos

$$\varphi(s,\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{\tau+s-T}^{\tau+s+T} f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}d\sigma$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}d\sigma = M_\sigma[f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}].$$

Así,

$$\begin{aligned} ABu &= M_\tau\{u(\tau)M_\sigma[f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}]\} \\ &= M_\sigma\{\overline{f(\sigma-s)}M_\tau[f(\sigma-\tau)u(\tau)]\} = BAu, \end{aligned}$$

de manera que queda probada la propiedad (b).

Ahora ya estamos listos para probar que A es un operador compacto. Recordemos de la definición 1.2.1 que un operador lineal $T : X \to Y$ entre espacios normados es compacto si para todo subconjunto acotado M de X, se tiene que $T(M)$ es relativamente compacto, es decir, la cerradura $\overline{T(M)}$ de $T(M)$ es un conjunto compacto. Usando el teorema 1.2.2, vemos que la definición 1.2.1 es equivalente a probar que para toda $(x_n) \subseteq X$ sucesión acotada, la sucesión $(T(x_n))$ contiene una subsucesión uniformemente convergente. Sea

$$G = \{u \in R : \|u\|^2 = M\{|u(t)|^2\} \leq 1\}.$$

Necesitamos probar que para toda $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$, la sucesión correspondiente $(v_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ (donde $v_n = Au_n$) contiene una subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente. Para esto, sea $u \in G$. Entonces $Au = v$, donde

$$v(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)u(t)dt, \tag{3.12}$$

de manera que

$$|v(s)| \leq \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(s-t)|^2 dt}\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt},$$

y como $u \in G$ entonces $\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt} = \|u\| \leq 1$, de manera que

$$|v(s)| \leq \sqrt{M_t\{|f(t)|^2\}} = C_f.$$

Entonces podemos concluir que la función v es uniformemente acotada. Por otro lado, de la ecuación (3.12) se sigue que

$$v(s_1) - v(s_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [f(s_1-t) - f(s_2-t)]u(t)dt,$$

de donde

$$|v(s_1) - v(s_2)| \leq \sqrt{M_t\{|f(s_1 - t) - f(s_2 - t)|^2}. \tag{3.13}$$

Afirmamos que de la desigualdad (3.13) se sigue que la función v es uniformemente continua. La función f es uniformemente continua, por lo cual para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s_1 - s_2| \leq \delta$ entonces $|f(s_1 - t) - f(s_2 - t)| \leq \varepsilon$. Luego, usando la desigualdad (3.13) obtenemos que si $|s_1 - s_2| \leq \delta$ entonces

$$|v(s_1) - v(s_2)| \leq \sqrt{M\{\varepsilon^2\}} = \varepsilon.$$

Entonces la función v es uniformemente continua, de manera que si denotamos por E al conjunto de todas las funciones v, tenemos que E es equicontinuo. Por el teorema 3.2.5, E contiene una subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente en el eje real. Sea V la función límite de la subsucesión que garantiza el teorema 3.2.5. Entonces la función V satisface la desigualdad (3.13), es decir,

$$|V(s_1) - V(s_2)| \leq \sqrt{M_t\{|f(s_1 - t) - f(s_2 - t)|^2}.$$

Luego, si τ es un número de traslación de la función f correspondiente a ε, y si $s_1 - s_2 = \tau$ tenemos que

$$|V(s_1) - V(s_2)| \leq \varepsilon,$$

de donde es evidente que V es una función casi periódica. Así, el operador A es compacto.

Como el operador A es compacto, entonces la forma de todos los vectores propios (funciones propias) del operador A es

$$e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, ..., e^{i\lambda_n},$$

la demostración de esto se puede consultar en [3].

Recordemos que la función $\alpha(\lambda)$ se define como

$$\alpha(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\lambda t}dt = M\{f(t)e^{-i\lambda t}\} = \langle f, e^{i\lambda t}\rangle,$$

de modo que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)e^{i\lambda_r t}dt = e^{i\lambda_r s} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)e^{i\lambda_r(t-s)}dt = e^{i\lambda_r s}\alpha(\lambda_r).$$

Notemos que hemos probado que el vector propio (función propia) $e^{i\lambda_r}$ es el correspondiente al valor propio dado por la constante de Fourier

$$\alpha(\lambda_r) = M\{f(t)e^{-i\lambda_r t}\}.$$

Sea $e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \ldots$ la sucesión de todos los vectores propios del operador A y sean $C_1 = \alpha(\lambda_1), C_2 = \alpha(\lambda_2), \ldots$ los valores propios correspondientes.

Dado $\phi \in R$, consideramos entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \langle \phi, e^{i\lambda_k t}\rangle e^{i\lambda_k t}. \tag{3.14}$$

Como

$$\sum_{k=m}^{\infty} |C_k \langle \phi, e^{i\lambda_k t}\rangle| \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |C_k|^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |\langle \phi, e^{i\lambda_k t}\rangle|^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |C_k|^2} \sqrt{M\{|\phi(t)|^2\}},$$

entonces la serie (3.14) converge uniformemente en t.

Ya probamos que el operador A es normal y compacto, así que la función $M_s\{f(t-s)\overline{f(-s)}\}$ puede ser representada[3] por la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k M_s\{\overline{f(-s)} e^{-i\lambda_k s}\} e^{i\lambda_k t}, \tag{3.15}$$

que converge en la norma de R. Sabemos que la serie en (3.14) converge uniformemente, de modo que si hacemos $\phi(s) = \overline{f(-s)}$ tenemos que la serie en (3.15) converge uniformemente. Así,

$$M_s\{f(t-s)\overline{f(-s)}\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k M_s\{\overline{f(-s)} e^{-i\lambda_k s}\} e^{i\lambda_k t}.$$

En particular, para $t = 0$,

$$M\{|f(-s)|^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k M_s\{\overline{f(-s)} e^{-i\lambda_k s}\},$$

es decir,

$$M\{|f(t)|^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2,$$

lo que prueba el teorema. □

[3] La demostración del hecho de que $M_s\{f(t-s)\overline{f(-s)}\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k M_s\{\overline{f(-s)} e^{-i\lambda_k s}\} e^{i\lambda_k t}$ se puede consultar en [3].

3.3. Conclusiones

Hemos expuesto en este trabajo un abanico de herramientas sobre la teoría espectral para operadores acotados, logramos obtener resultados centrales en esta teoría, algunos de los cuales fueron útiles para las aplicaciones que mostramos. Aunque únicamente tomamos en cuenta los operadores acotados (continuos) para la realización de este trabajo, existen herramientas poderosas en la teoría espectral para operadores no acotados, que permiten la generalización de varios de los resultados presentes. Una extensa exposición de tales herramientas se puede encontrar en [8].

Así pues, la aportación principal de esta tesis es la solución de dos problemas clásicos de la matemática, haciendo uso de las herramientas y técnicas mencionadas anteriormente. Las implicaciones de los dos problemas solucionados por medio de la teoría espectral para operadores acotados son numerosas e importantes en el estudio de la teoría de probabilidad y en el análisis matemático.

Es importante notar que aunque solamente proporcionamos dos aplicaciones de esta importante teoría, hay muchas más no solo en matemáticas, sino también en diversas áreas de la ciencia, especialmente en la física, donde las aplicaciones a la mecánica cuántica no solamente son numerosas, sino muy importantes.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw.Hill, 1979.

[2] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, 1976.

[3] James Brom, *The theory of almost periodic functions in constructive mathematics*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 70, pp. 67-81, 1977.

[4] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence *Linear algebra*, Pearson, 1979.

[5] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley, 1978.

[6] B.M. Levitan, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press, 1982.

[7] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2001.

[8] M. Reed y B. Simon *Methods of modern mathematical physics, II: Self-adjointness and Fourier theoretic techniques*, Academic Press, 1980.

[9] B. O. Turesson, *Functional Analysis: The adjoint operator*, 2015.