



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Caracterización de las digráficas núcleo imperfectas críticas  
localmente semicompletas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Lilia Araceli del Carmen Guinea Domínguez

TUTORA

Dra. Hortesia Galeana Sánchez

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de Datos del Jurado.

## 1. Datos del alumno

Guinea  
Domínguez  
Lilia Araceli del Carmen  
52 54 58 29  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
308593329

## 2. Datos del tutor

Dra  
Hortensia  
Galeana  
Sánchez

## 3. Datos del sinodal 1

Dr  
Alejandro  
Contreras  
Balbuena

## 4. Datos del sinodal 2

Mat  
Laura  
Pastrana  
Ramírez

## 5. Datos del sinodal 3

M en C  
Germán  
Benítez  
Bobadilla

6. Datos del sinodal 4

M en C

Loiret Alejandría

Dosal

Trujillo

7. Datos del trabajo escrito

Caracterización de las digráficas núcleo imperfectas críticas localmente semicompletas

83 p

2017



*« Con prudencia, aplomo y mucha destreza,  
se consiguen grandes fines y se allanan todos los obstáculos;  
de otra manera nada se logra. »*  
*Napoleón Bonaparte.*

# Agradecimientos.

A Dios, a mis padres Lilia y Eduardo, a mi abuela Elena y mi perrito Jack ; en resumen; a mi familia, por acompañarme en esta travesía; curiosa etapa de mi vida que ahora está por concluir; porque con su apoyo, consejos y, sobretodo, palabras de aliento, o el simplemente estar ahí... Sin ustedes, nada de esto sería posible.

A Hortensia, por haberme aceptado como su tesista, por haberme compartido sus conocimientos, gracias por la paciencia, el apoyo, por haberme enseñado no sólo matemáticas; el ejemplo habla más que mil palabras. Gracias por este bonito trabajo que ha llegado a su fin.

A Alberto por tu gran corazón, por tu calidad humana, por toda la ayuda que me has brindado. Me siento muy afortunada porque estás conmigo.

A Hugo Corrales, por brindarme tu amistad, por impulsarme con tu alegría y sinceridad; por apoyarme en los momentos más difíciles de mi carrera.

A Menchu y a Manolo, por la amistad, la calidez, el afecto y el apoyo.

A Arturo Robles, pues sin usted, ni sus sabios consejos e indicaciones este sueño no se habría vuelto realidad; simplemente no hubiera logrado mis metas.

De entre mis profesores de ingeniería, a Sandra María Chimal, a José Roberto Bautista y a Martín Cruz; los tres determinaron mi gusto por el álgebra lineal, el cálculo diferencial e integral y en especial, mi pasión por las ecuaciones diferenciales... Fueron una inspiración para mi y sin eso no me encontraría donde me encuentro ahora.

A mis sinodales, Alejandro Contreras, Germán Benítez, Laura Pastrana y Loiret Alejandría Dosal, por el tiempo que emplearon en revisar mi tesis, su trabajo y sus pertinentes correcciones y observaciones.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial a la Facultad de ciencias, de la cual me siento orgullosa de pertenecer.

**Tesis realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). IN104717**  
Caracterización de las digráficas núcleo imperfectas críticas localmente semicompletas. Agradezco a la DGAPA-UNAM por el apoyo y la beca recibida.

# Introducción.

El objetivo del presente trabajo es dar una caracterización detallada de las digráficas núcleo imperfectas críticas, basándonos en el trabajo de la Dra. Hortensia Galeana Sánchez y de la Dra. Mika Olsen. (Véase [14, 15]).

Como los temas aquí abordados son muy especializados, comenzaremos hablando de algunos conceptos básicos y definiciones que serán utilizados y explicados a detalle a lo largo de este trabajo. Sea  $D = (V(D), F(D))$  una digráfica.

Una digráfica  $D$  es localmente semicompleta si para todo vértice  $x$  se cumple lo siguiente: los vértices dominados por  $x$  inducen una digráfica semicompleta y el conjunto de vértices que domina a  $x$  también induce una digráfica semicompleta. Las digráficas localmente semicompletas fueron caracterizadas en 1997 por J. Bang-Jensen.

Las digráficas localmente semicompletas son una muy interesante generalización de los torneos, recordemos que un torneo es una digráfica en la que para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  existe exactamente una flecha entre ellos. Las generalizaciones de torneos han obtenido mucha atención durante los últimos 25 años, ya que problemas clásicos planteados para digráficas en general, como son el problema de la hamiltonicidad, el problema de encontrar un núcleo o el problema de encontrar una trayectoria de longitud máxima en una trayectoria, han sido exitosamente resueltos en torneos y digráficas semicompletas (recordemos que una digráfica  $D$  es semicompleta si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en  $D$  existe al menos una flecha entre ellos. Este hecho ha animado a muchos autores durante los últimos 25 años a atacar dichos problemas en digráficas un poco más generales que los torneos y que las semicompletas, obteniendo resultados muy interesantes y abarcando clases mucho más amplias de digráficas que lo que son los torneos o las semicompletas. Algunas clases de generalizaciones de torneos preservan estructuras interesantes y propiedades importantes de los torneos. (Véase [3,5]).

Bang-Jensen introdujo las digráficas localmente semicompletas en [2] como una generalización de torneos, y estas fueron caracterizadas en [3].

Un núcleo  $N$  de  $D$  es un conjunto de vértices independiente y absorbente, esto es, un subconjunto  $N$  de vértices tal que no hay flecha entre cualesquiera dos vértices de  $N$  y para todo vértice  $w$  de  $D$  que no pertenece a  $N$  hay una flecha de  $w$  a  $v$  en  $D$  para algún vértice  $v$  en  $N$ .

El concepto de núcleo fue introducido por John von Neumann en 1944. Interesantes trabajos panorámicos sobre resultados de núcleos se pueden encontrar en [4,16]. Los núcleos en digráficas tienen muchas aplicaciones, por ejemplo, en teoría de juegos, lógica e inteligencia artificial por

---

nombrar algunas cuantas [7,10,12]. El problema de decidir si una digráfica  $D$  tiene núcleo es NP-completo [9], y en los últimos 30 años ha habido un gran interés en resolver el problema de la existencia de núcleos en clases amplias de digráficas motivado por su gran cantidad de aplicaciones.

Se dice que una digráfica  $D$  es núcleo imperfecta crítica (N.I.C.) si  $D$  no tiene núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo. Decimos que  $D$  es núcleo perfecta (N.P.) si  $D$  tiene un núcleo, y toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un núcleo. Galeana Sánchez y Neumann Lara probaron en [13] que si una digráfica  $D$  no contiene subdígrafos inducidos N.I.C., entonces  $D$  es N.P. y por lo tanto tiene núcleo; de aquí el gran interés en poder caracterizar clases de digráficas N.I.C., ya que esto nos lleva directamente a saber cuándo dichas digráficas tienen núcleo.

En la primera parte de este trabajo, se expone una caracterización de las digráficas localmente semicompletas N.I.C., lo cual nos lleva directamente de la demostración a un algoritmo que en tiempo polinomial puede decidir si una digráfica localmente semicompleta es una N.I.C. o no.

En [5], Bang-Jensen y Gutin propusieron el problema de decidir si el problema de encontrar un núcleo en una digráfica localmente semicompleta es polinomial o no. Una digráfica  $D$  es localmente in-semicompleta si para cada vértice  $x$ , el conjunto de vértices que dominan a  $x$  induce una digráfica semicompleta. Una digráfica  $D$  es llamada localmente ex-semicompleta si para cada vértice  $x$  de  $D$ , el conjunto de vértices dominados por  $x$  inducen una subdigráfica semicompleta.

Actualmente no se conoce ninguna caracterización de las digráficas localmente in-semicompletas o de las localmente ex-semicompletas, y claramente de la definición podemos ver que las digráficas localmente in-semicompletas (localmente ex-semicompletas) son más generales que las localmente semicompletas. En este trabajo también se da una caracterización de las localmente in-semicompletas N.I.C. y de las localmente ex-semicompletas N.I.C.. Notemos que caracterizar las localmente in-semicompletas N.I.C. y las localmente ex-semicompletas N.I.C. no es el mismo problema, ya que existen digráficas N.I.C. cuya inversa no es N.I.C. (véase [11]). Dada la gran cantidad de aplicaciones que el concepto de núcleo tiene tanto teóricas como prácticas, y dado que las clases de localmente semicompletas, localmente in-semicompletas y localmente ex-semicompletas son clases amplias de digráficas, creemos que la caracterización de las N.I.C. localmente semicompletas, de las N.I.C. localmente in-semicompletas y de las N.I.C. ex-localmente semicompletas será de gran utilidad en aplicaciones.

# Índice general

<b>Agradecimientos.</b>	<b>VI</b>
<b>Introducción.</b>	<b>VII</b>
<b>Índice general</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones básicas. . . . .	1
1.2. Resultados previos. . . . .	13
1.3. Definiciones complementarias. . . . .	19
<b>2. Propiedades básicas de las digráficas localmente semicompletas.</b>	<b>24</b>
2.1. Localmente in-semicompletas y ex-semicompletas. . . . .	24
2.2. Digráficas circulares. . . . .	27
2.3. Digráficas localmente semicompletas conexas. . . . .	29
<b>3. Caracterización de las digráficas N.I.C. localmente semicompletas.</b>	<b>37</b>
3.1. Núcleos y seminúcleos. . . . .	37
3.2. Digráficas localmente semicompletas y digráficas N.I.C. . . . .	46
<b>4. Caracterización de las digráficas N.I.C. localmente in (ex)-semicompletas.</b>	<b>67</b>
4.1. Definiciones. . . . .	67
4.2. Resultados. . . . .	70
4.3. Digráficas N.I.C. localmente in (ex) -semicompletas. . . . .	72
4.4. Digráficas N.I.C. cuasitransitivamente multipartitas y multipartitas localmente semicompletas. . . . .	75
<b>Conclusión.</b>	<b>84</b>

**Bibliografía**

**85**

# Índice de figuras

1.1. Digráfica $D$ . . . . .	2
1.2. Digráfica $D$ y pseudodigráfica dirigida $D'$ . . . . .	3
1.3. Digráfica $D$ 2-regular. . . . .	4
1.4. a) Trayectoria dirigida, b) Semitrayectoria, c) Semitrayectoria no dirigida . . . . .	5
1.5. 4-ciclo dirigido y 2-ciclo dirigido . . . . .	6
1.6. Gráfica $G$ . . . . .	7
1.7. Gráfica orientada. . . . .	7
1.8. Digráfica $D$ , subdigráfica $H$ de $D$ , subdigráfica inducida $H'$ de $D$ . . . . .	8
1.9. a) Digráfica semicompleta $D$ . b) Torneo $T$ . . . . .	9
1.10. Digráfica localmente semicompleta $D$ . . . . .	9
1.11. Digráfica $D$ , componentes fuertemente conexas de $D$ : $A, B, C$ . . . . .	10
1.12. Digráfica $D$ , y digráfica subyacente $G_D$ . . . . .	11
1.13. a) Digráfica $D$ y su condensación $D^*$ . b) Digráfica $H$ y su condensación $H^*$ . . . . .	12
1.14. Levantamiento del semicamino en $D^*$ a $D$ . . . . .	15
1.15. Posibles ciclos de $D$ . . . . .	18
1.16. Diagramas de las semitrayectorias: a) $v_{i-1} \rightarrow v_i \in F(D)$ y $v_{i+1} \rightarrow v_i \in F(D)$ . b) $v_i \rightarrow v_{i-1} \in F(D)$ y $v_i \rightarrow v_{i+1} \in F(D)$ . . . . .	19
1.17. Digráfica $D$ que es localmente ex-semicompleta pero no in-semicompleta. . . . .	20
1.18. a) Digráfica mezclable por trayectorias. b) Digráfica mezclable por in-trayectorias. . . . .	21
1.19. Descomposición circular de $D$ . . . . .	22
1.20. Digráfica circular con etiquetado circular. . . . .	22
1.21. La digráfica $D$ tiene una ex-ramificación con raíz $v$ . $H$ contiene una in-ramificación con raíz $w$ y $L$ no tiene ninguna ramificación. . . . .	23
2.1. . . . . .	30
2.2. Descomposición semicompleta de $D$ . . . . .	36
3.1. Núcleo $K$ de $D$ . . . . .	38
3.2. a) $N.P.$ -digráfica. b) $N.I.C.$ -digráfica. . . . .	38
3.3. a) Digráfica con núcleo $\{v_1, v_4\}$ y seminúcleo $\{v_3\}$ . b) Digráfica con dos núcleos $N_1 = \{v_2\}$ y $N_2 = \{v_3\}$ . . . . .	39
3.4. El vértice $v_1$ es un seminúcleo de la digráfica, pero no es un núcleo de ésta. . . . .	40
3.5. El vértice $v_6$ es un seminúcleo de la digráfica, sin embargo dicha digráfica no posee núcleo. . . . .	40

3.6.	Para $r = 2, q = 8$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_9(1, 2)$ . . . . .	52
3.7.	Para $r = 2, q = 5$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_5(1, 2)$ . . . . .	53
3.8.	Para $r = 2, q = 6$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_7(1, 2)$ . . . . .	53
3.9.	Para $r = 2, q = 5$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_7(1, 2)$ . . . . .	54
3.10.	Para $r = 3, p = 2$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_3(1, 2, 3)$ . . . . .	55
3.11.	Para $r = 3, p = 3$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_5(1, 2, 3)$ . . . . .	56
3.12.	Para $r = 3, m = 1, p = 5$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_7(1, 2, 3)$ . . . . .	56
3.13.	Para $r = 3, m = 2, p = 7$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es $\vec{C}_{11}(1, 2, 3)$ . . . . .	57
3.14.	Suma lexicográfica de $D$ . . . . .	59
3.15.	Conjunto mínimo separador $S$ . Descomposición semicompleta de $D - S$ . $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$ . . . . .	60
3.16.	A partir de la componente $D_i$ , del conjunto separador mínimo $S$ , tenemos dominancia hacia la componente $D'_3$ de la descomposición semicompleta de $D - S$ . Dicha dominancia la marcamos con flechas gruesas. Por otro lado, la componente $D_i$ , del conjunto mínimo separador $S$ , domina a una componente $D_j$ que pertenece a $D'_2$ de la descomposición semicompleta de $D - S$ . Dicha flecha la marcamos punteada. Finalmente, tenemos dominancia de todas las componentes de $D'_3$ hacia todas las componentes $D_{\lambda_2}, \dots, D_j$ que pertenecen a $D'_2$ . . . . .	62
3.17.	Etiquetado circular de $\vec{C}_4(1, \pm 2)$ . . . . .	63
3.18.	$\vec{C}_5(1, \pm 2)$ no es circularmente descomponible. . . . .	63
4.1.	Digráfica cuasi-transitiva. . . . .	67
4.2.	a) Gráfica multipartita completa. b) torneo multipartito semicompleto. . . . .	68
4.3.	Digráfica multipartita localmente semicompleta. . . . .	68
4.4.	a) Trayectoria dirigida. b) Trayectoria anti-dirigida. . . . .	69
4.5.	Gráfica perfecta de orden 9, coloreada con 3 colores. En esta gráfica, así como en sus inducidas, se cumple que $\omega(G[S]) = \chi(G[S])$ . . . . .	70
4.6.	Orientación por pozos de $G$ . . . . .	70
4.7.	Gráfica de comparabilidad. . . . .	71

# 1. Preliminares.

En este capítulo haremos una introducción de los conceptos y resultados de la teoría de digráficas utilizados a lo largo del presente trabajo. Como referencia, recomendamos el libro de Bang-Jensen y Gutin [4].

## 1.1. Definiciones básicas.

Una **digráfica**  $D$  consiste de un par  $V(D), F(D)$ , donde  $V(D)$  es un conjunto finito no vacío de vértices y  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de vértices de  $V(D)$   $(x, y)$  a las cuales llamaremos flechas. Frecuentemente escribiremos  $D = (V, F)$ , lo que significa que  $V$  y  $F$  son el conjunto de vértices y el conjunto de flechas de  $D$ , respectivamente.

El **tamaño** de  $D$  es el número de flechas en  $D$ . El **orden** de  $D$  es el número de vértices en  $D$ ; éste, será denotado por  $|D|$ . Por ejemplo, la digráfica  $D$  en la Figura 1.1 es de orden cinco y tamaño cinco;  $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $A(D) = \{(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_5, v_3)\}$ . El orden y tamaño de una digráfica se denotan por  $n$  y  $m$ , respectivamente.

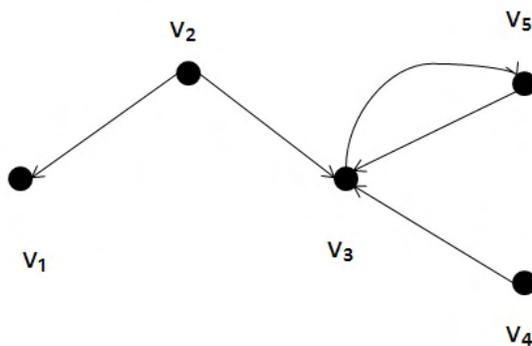


Figura 1.1: Digráfica  $D$ .

Para una flecha  $(x,y)$  el primer vértice  $x$  es su **cola** y el segundo vértice  $y$  es su **cabeza**. También decimos que la flecha  $(x,y)$  sale de  $x$  y entra a  $y$ . La cabeza y la cola de una flecha son sus **vértices finales**; decimos que los vértices finales son **adyacentes**, es decir,  $x$  es adyacente a  $y$  y  $y$  es adyacente a  $x$ . Si  $(x,y)$  es una flecha, también decimos que  $x$  **domina** a  $y$ , o bien,  $y$  **es dominado por**  $x$  y lo denotaremos como  $x \rightarrow y$ . Decimos que un vértice  $x$  es **incidente** a una flecha  $a$  si  $x$  es la cabeza o la cola de  $a$ . Denotaremos una flecha  $(x,y)$  por  $xy$ . Para una pareja  $X,Y$  de conjuntos de vértices de una digráfica  $D$ , definimos:

$$(X,Y)_D = \{xy \in F(D) : x \in X, y \in Y\},$$

Es decir,  $(X,Y)_D$  es el conjunto de flechas con cola en  $X$  y cabeza en  $Y$ . Por ejemplo, para la digráfica  $D$  en la Figura 1.2,  $(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\})_D = \{v_1v_3, v_2v_3, v_1v_4\}$ ,  $(\{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\})_D = \{v_3v_2\}$  y  $(\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\})_D = \{v_1v_2, v_2v_1\}$

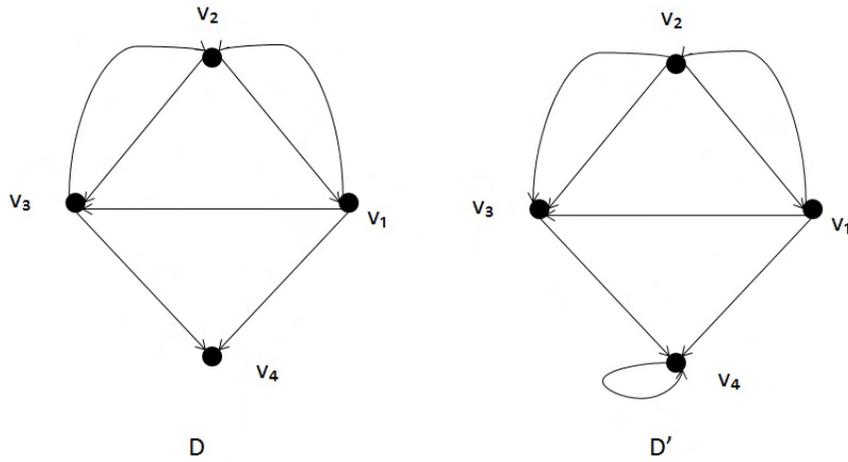


Figura 1.2: Digráfica  $D$  y pseudodigráfica dirigida  $D'$ .

Para  $X$  y  $Y$  subconjuntos ajenos de  $V(D)$ ,  $X \rightarrow Y$  significa que para todo vértice  $x$  en  $X$  y para todo vértice  $y$  en  $Y$  tenemos que  $x \rightarrow y$ . Además,  $X \Rightarrow Y$  significa que  $(Y,X)_D = \emptyset$ . Finalmente,  $X \mapsto Y$  denota que se tiene tanto que  $X \rightarrow Y$  como  $X \Rightarrow Y$ . Por ejemplo, en la digráfica  $D$  de la Figura 1.1,  $v_2 \rightarrow \{v_1, v_3\}$ ,  $\{v_2, v_4\} \Rightarrow \{v_1, v_3\}$  y  $\{v_2, v_4\} \mapsto v_3$ . De esta manera, si  $X$  y  $Y$  son subdigráficas de  $D$  entonces por  $X \rightarrow Y$ ,  $X \Rightarrow Y$  y  $X \mapsto Y$  entenderemos  $V(X) \rightarrow V(Y)$ ,  $V(X) \Rightarrow V(Y)$  y  $V(X) \mapsto V(Y)$ , respectivamente.

La definición anterior de digráfica, implica el hecho de que permitimos la existencia de flechas con los mismos vértices finales (por ejemplo,  $v_1v_2$  y  $v_2v_1$  en la digráfica  $D$  de la Figura 1.2), pero no permitimos la existencia de flechas **paralelas**, (también llamadas **múltiples**), esto es, parejas de flechas con la misma cola y la misma cabeza, o **lazos** (es decir, flechas cuya cabeza y cola coinciden) como en la digráfica  $D'$  de la Figura 1.2. En el caso de que permitamos la existencia de estos objetos, a  $D'$  la llamaremos **pseudodigráfica**.

Sea  $N_D^+(v)$  el conjunto de vértices  $u$  en  $V(D)$  para los cuales  $v \rightarrow u$ , es decir,  $N_D^+(v) = \{u \in V(D) : v \rightarrow u \in F(D)\}$ . A dicho conjunto, se le llama la **exvecindad** de  $v$ . A los vértices pertenecientes a este conjunto los llamamos **exvecinos** de  $v$ . Sea  $N_D^-(v)$  el conjunto de vértices  $w$  en  $V(D)$  para los cuales  $w \rightarrow v$ , es decir,  $N_D^-(v) = \{w \in V(D) : w \rightarrow v \in F(D)\}$ . A dicho conjunto, se le llama la **invecindad** de  $v$ . A los vértices pertenecientes a este conjunto los llamamos **invecinos** de  $v$ . A  $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$  se le llama la **vecindad** de  $v$ . A los vértices pertenecientes a este conjunto los llamamos **vecinos** de  $v$ . En la Figura 1.2,  $N_D^+(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ ,  $N_D^-(v_1) = \{v_2\}$  y  $N_D(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ .

El **exgrado** de  $v$  es la cardinalidad de la exvecindad de  $v$  y se denota por  $d_D^+(v)$ . De forma análoga, el **ingrado** de  $v$  es la cardinalidad de la invecindad de  $v$  y se denota por  $d_D^-(v)$ . Por ejemplo, en la Figura 1.2,  $d_D^+(v_1) = 3$ ,  $d_D^-(v_1) = 1$  y  $d_D(v_1) = 4$ .

Un vértice  $v$  de una digráfica  $D$  es llamado **pozo** si no tiene exvecinos, es decir,  $d_D^+(v) = 0$ . De manera análoga, un vértice  $v$  de una digráfica  $D$  es llamado **fuelle** si no tiene invecinos, es decir,  $d_D^-(v) = 0$ . Por ejemplo en la Figura 1.1, el vértice  $v_1$  es un pozo en  $D$  y el vértice  $v_2$  es un fuele en  $D$ .

Una digráfica es  **$k$ -regular** si todos los vértices de  $D$  tienen ingrado y exgrado  $k$ . Por ejemplo en la Figura 1.3

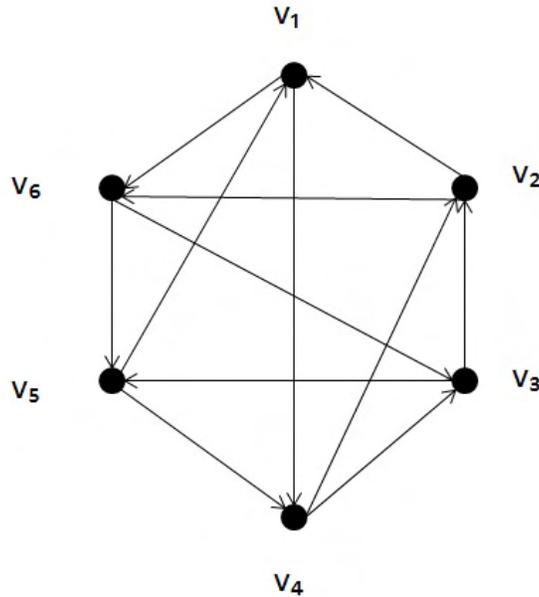


Figura 1.3: Digráfica  $D$  2-regular.

Dada una digráfica  $D$ , un **semicamino** es una sucesión  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de vértices de  $D$  tales que  $x_i$  y  $x_{i+1}$  son adyacentes para todo entero  $i \in 1, 2, \dots, n - 1$ . También se le llama  $(x_1, x_n)$ -semicamino donde  $x_1$  y  $x_n$  son los extremos del semicamino. La longitud de un semicamino  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es  $n$ . Si los extremos del semicamino son diferentes, se dice que es abierto; en otro caso, se dice que es cerrado. Por  $V(W)$  denotaremos al conjunto de vértices del semicamino, es decir, a  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Dado un semicamino  $W$  en una digráfica  $D$ , cualquier arista de  $D$  que no esté en  $W$  y cuyos extremos no sean vértices consecutivos en  $W$  se dice que es una **diagonal** de  $W$ . Una **semitrayectoria** es un semicamino en el que no se repiten vértices. Un **semiciclo** es un semicamino cerrado cuyos extremos son el único par de vértices que se repite.

Una **trayectoria dirigida** es una digráfica con conjunto de vértices  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y conjunto de flechas  $\{x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow, \dots, \rightarrow x_n\}$ , tal que todos los vértices sean distintas. A tal trayectoria dirigida la llamaremos una  $(x_1, x_n)$ - trayectoria y la denotaremos por:  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow, \dots, \rightarrow x_n$ . En lo sucesivo, una  $(x, y)$ - trayectoria siempre significará una trayectoria dirigida de  $x$  a  $y$ , como en la Figura 1.4.

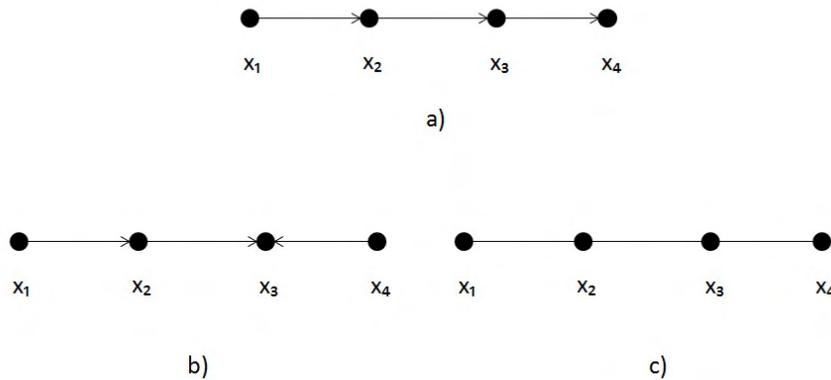


Figura 1.4: a) Trayectoria dirigida, b) Semitrayectoria, c) Semitrayectoria no dirigida

Un **ciclo dirigido** se define como un camino dirigido; la única diferencia radica en que es de longitud al menos dos, y el primer y último vértices son el mismo, como en la Figura 1.5.

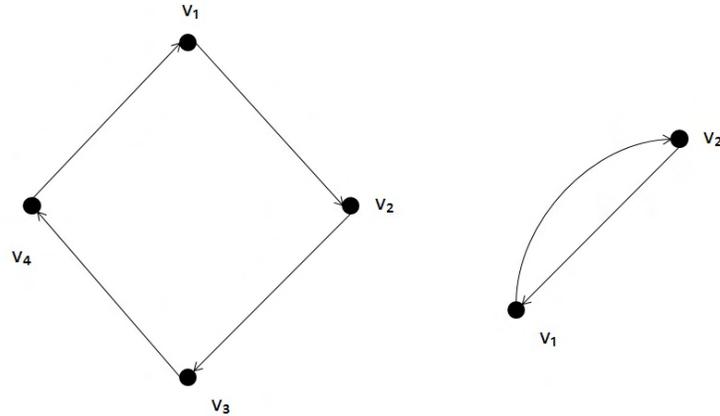


Figura 1.5: 4-ciclo dirigido y 2-ciclo dirigido

Dada una digráfica  $D$  y una trayectoria  $P$  en  $D$ , diremos que  $P$  es una **trayectoria hamiltoniana** si  $P$  recorre todos los vértices de  $D$ . Dada una digráfica  $D$  y un ciclo  $C$  en  $D$ , diremos que  $C$  es un **ciclo hamiltoniano** si  $C$  recorre todos los vértices de  $D$ .

Una **gráfica**  $G$  es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Típicamente, una gráfica se representa como un conjunto de puntos (vértices o nodos) unidos por líneas (aristas). En las gráficas dos vértices pueden ser o no, adyacentes pero la dirección pierde completamente su relevancia. Por ejemplo la Figura 1.6.

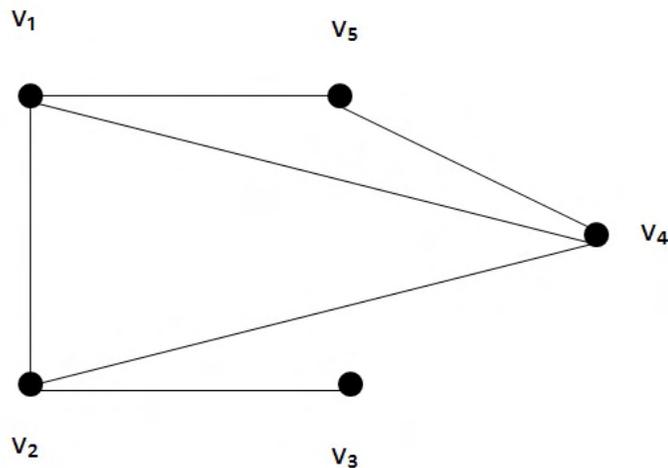


Figura 1.6: Gráfica  $G$ .

Una **gráfica orientada** es una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud dos y sin lazos. Por ejemplo la Figura 1.7.

Una digráfica  $H$  es **subdigráfica** de una digráfica  $D$ , si  $V(H) \subseteq V(D)$ ,  $F(H) \subseteq F(D)$  y toda

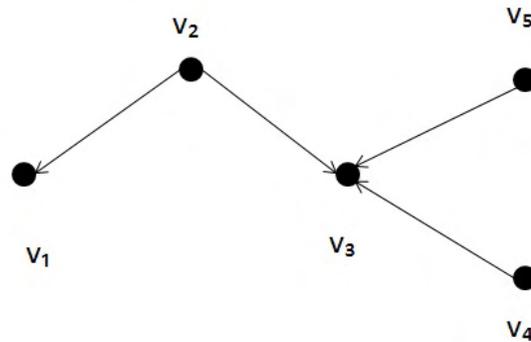


Figura 1.7: Gráfica orientada.

flecha en  $F(H)$  tiene ambos vértices finales en  $V(H)$ . Si toda flecha de  $F(D)$ , con ambos vértices finales en  $V(H)$ , está en  $F(H)$ , decimos que  $H$  es **inducida** por  $X = V(H)$  (escribimos  $H = D(X)$ ) y llamamos a  $H$  una subdigráfica **inducida** de  $D$ . Por ejemplo, en la Figura 1.8, la digráfica  $H$  con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y conjunto de flechas  $\{v_1v_2, v_1v_3, v_3v_2\}$  es subdigráfica inducida de  $D$ . Por otro lado, la subdigráfica  $H'$  con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y conjunto de flechas  $\{v_1v_2, v_1v_3, v_3v_2, v_4v_1\}$  es subdigráfica de  $D$  pero no es una subdigráfica inducida de  $D$ .

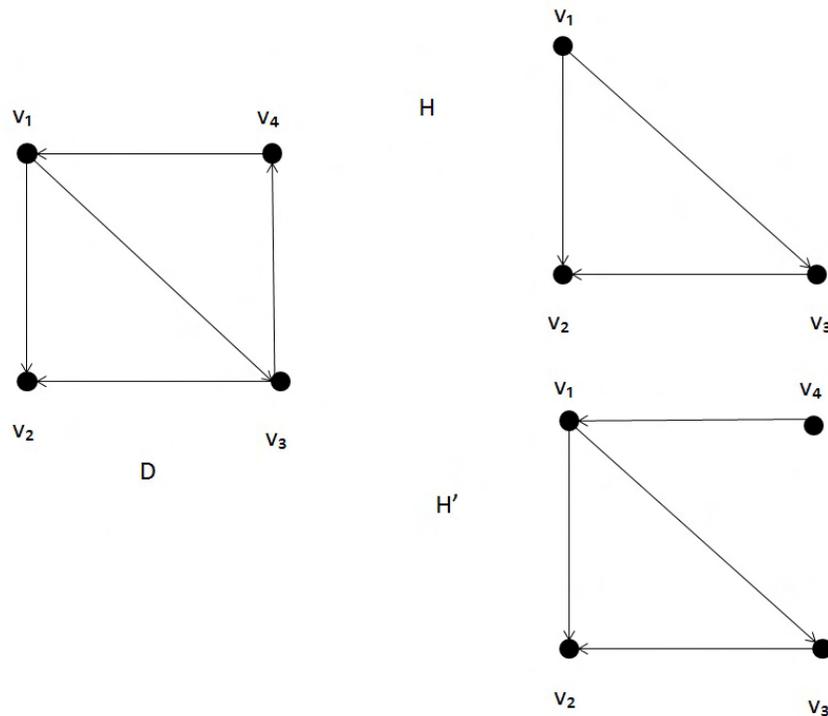


Figura 1.8: Digráfica  $D$ , subdigráfica  $H$  de  $D$ , subdigráfica inducida  $H'$  de  $D$ .

Si  $X$  y  $Y$  son subconjuntos de  $V(D)$ , tales que hay una conexión completa entre  $X$  y  $Y$  y todas las flechas entre vértices de  $X$  y vértices de  $Y$  están todas dirigidas hacia  $Y$ , entonces decimos que  $X$  **domina** a  $Y$  y usamos la notación  $X \rightarrow Y$  para referirnos a este hecho. Por la **conexión** entre dos subdigráficas  $A$  y  $B$  de  $D$ , nos referimos al conjunto de flechas entre dichas subdigráficas en  $D$ .

Una digráfica **semicompleta** es una digráfica sin vértices no adyacentes (o bien, cualesquiera dos vértices son adyacentes). Como en la Figura 1.9, inciso a) Un **torneo** es una gráfica orientada sin vértices no adyacentes (o bien, es una gráfica orientada en donde cualesquiera dos vértices son adyacentes). Como en la Figura 1.9, inciso b) En consecuencia, los torneos son una subclase de las digráficas semicompletas.

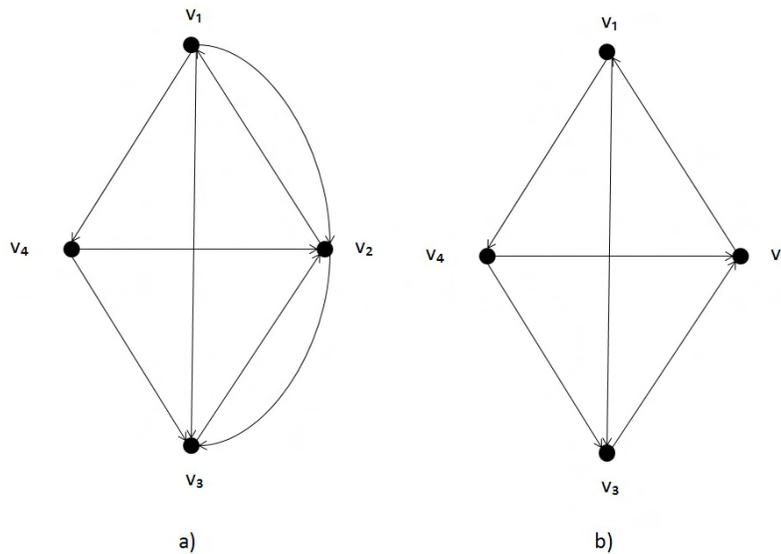


Figura 1.9: a) Digráfica semicompleta  $D$ . b) Torneo  $T$ .

Una **digráfica localmente semicompleta** es una digráfica  $D$  que satisface la siguiente condición: Para todo vértice  $x$  de  $D$ , el conjunto de vértices dominados por  $x$  (y respectivamente, el conjunto de vértices que dominan a  $x$ ) inducen una digráfica semicompleta, es decir,  $N^+(x)$  y  $N^-(x)$  son digráficas semicompletas. Utilizaremos la abreviación *dls* para referirnos a las digráficas localmente semicompletas, Figura 1.10 .

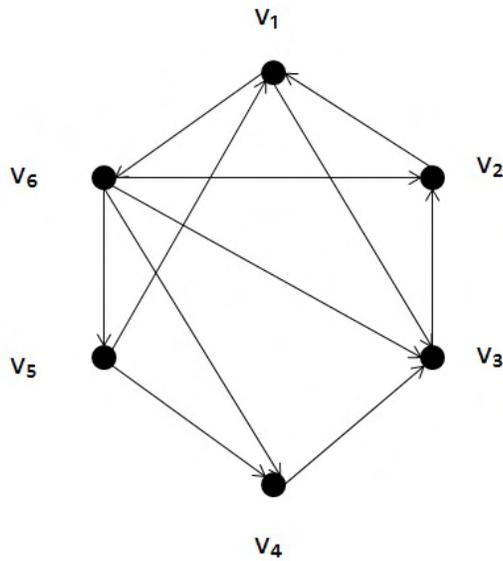


Figura 1.10: Digráfica localmente semicompleta  $D$ .

Una **componente fuertemente conexa**  $K$  de una digráfica  $D$  es la máxima subdigráfica para la cual se cumple que para cualesquiera dos vértices  $x, y \in K$ ,  $K$  contiene una  $(x, y)$ -trayectoria y una  $(y, x)$ -trayectoria. En la Figura 1.11 tenemos una digráfica  $D$  y sus componentes fuertemente conexas. Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si solamente tiene una componente. Nuevamente, notemos que en la Figura 1.11 la digráfica  $A$  es fuertemente conexa.  $D$  es  **$k$ -conexa** si para cualquier conjunto  $E$  de a lo más  $k - 1$  vértices,  $D - E$  es fuertemente conexa. Si  $D$  es fuertemente conexa, y  $S$  es un subconjunto de  $V(D)$  tal que  $D - S$  no es fuertemente conexa, entonces, decimos que  $S$  es un **conjunto separador**. En la Figura 1.11 un conjunto separador de  $D$  es  $\{v_4, v_7\}$ . Un conjunto separador es mínimo si  $D - S$  no es fuertemente conexo, pero  $D - S'$  lo es para cada subconjunto propio  $S'$  de  $S$ , es decir, es el mínimo número de vértices que necesitamos remover para desconectar a la digráfica. En la Figura 1.11 tenemos una digráfica  $D$  y sus componentes fuertemente conexas.

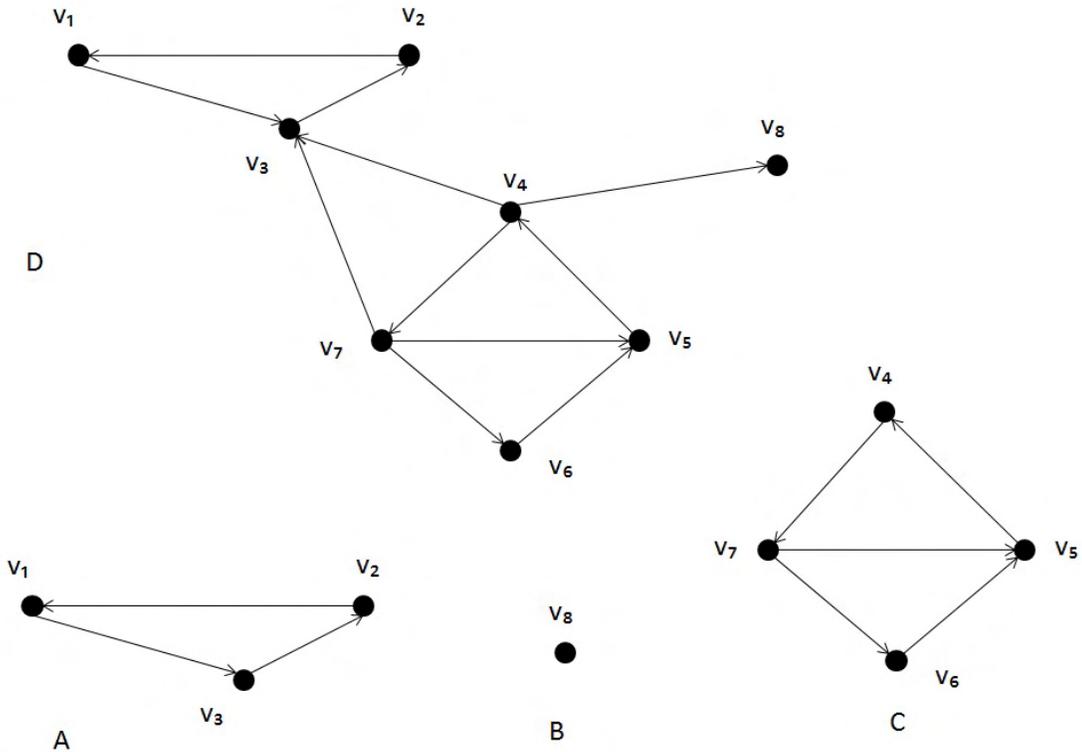


Figura 1.11: Digráfica  $D$ , componentes fuertemente conexas de  $D$ :  $A, B, C$ .

Una digráfica  $D$  es la **biorientación** de  $G$  si  $D$  se obtiene de  $G$  al reemplazar cada arista  $(x, y)$  de  $G$  por  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$  o ambas, exceptuando lazos. La **gráfica subyacente**  $UG(D)$  de una digráfica  $D$  es la única gráfica  $G$  tal que  $D$  es una biorientación de  $G$ . Sea  $D$  una digráfica, y sea  $G_D$  su gráfica subyacente. Supongamos que las flechas de  $D$  son  $\{f_1, \dots, f_n\}$  y que las aristas de  $G_D$  son  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Definimos  $\overleftarrow{G}$  como la **gráfica dual** de  $D$ , tal que  $\overleftarrow{G}$  tiene aristas  $\{\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n\}$ , donde  $\widehat{e}_i$  es dual a  $e_i$ . Así, para construir la **digráfica dual** de  $D$ ,  $\overleftarrow{D}$ , asignamos orientaciones a las aristas, de forma tal que cualquier par de vértices  $(e_i, \widehat{e}_i)$  forme una base en  $\mathbb{R}^2$ , orientada de manera positiva. Cuando  $D$  y  $\overleftarrow{D}$  se dibujen en el plano las flechas de la primera serán opuestas a las de la segunda, es decir, para algún vértice  $x$  de  $D$ :

$$d_D^+(x) = d_{\overleftarrow{D}}^-(x) \text{ y } d_D^-(x) = d_{\overleftarrow{D}}^+(x)$$

Una digráfica  $D$  es **conexa** si su gráfica subyacente es conexa. En la Figura 1.12, podemos ver a la digráfica conexa  $D$  y su gráfica subyacente.

Sean  $D$  una digráfica y  $K_1, K_2, \dots, K_s$  sus componentes fuertemente conexas. Definimos la **condensación** de  $D$  como  $D^* = (V, F)$  tal que:

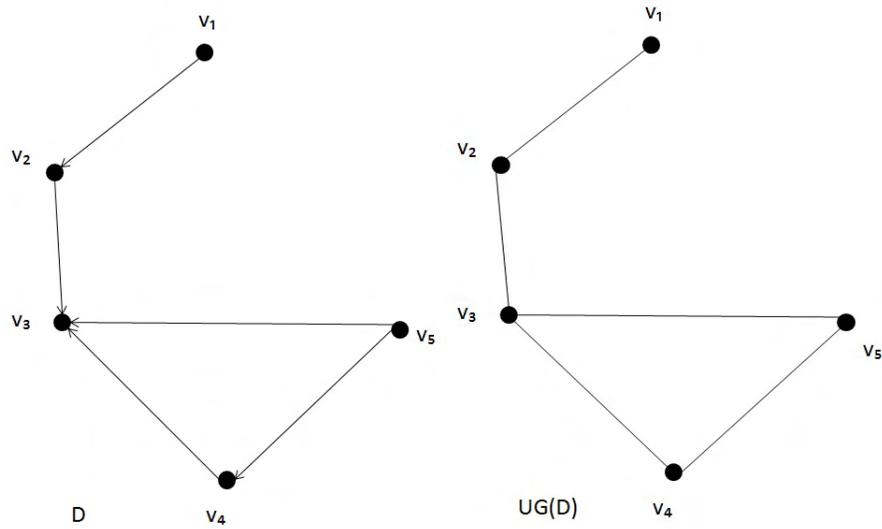


Figura 1.12: Digráfica  $D$ , y digráfica subyacente  $G_D$ .

$V(D^*) = \{K : K \text{ es una componente fuertemente conexa de } D\}$  y  
 $F(D^*) = \{K_1 K_2 : \exists v_1 \in V(K_1) \text{ y } v_2 \in V(K_2), v_1 v_2 \in F(D) \text{ y } K_1 \text{ es distinto de } K_2\}$   
 Además, notemos que  $D^*$  es una gráfica orientada, la cual puede tener ciclos no dirigidos. Por ejemplo, la Figura 1.13.

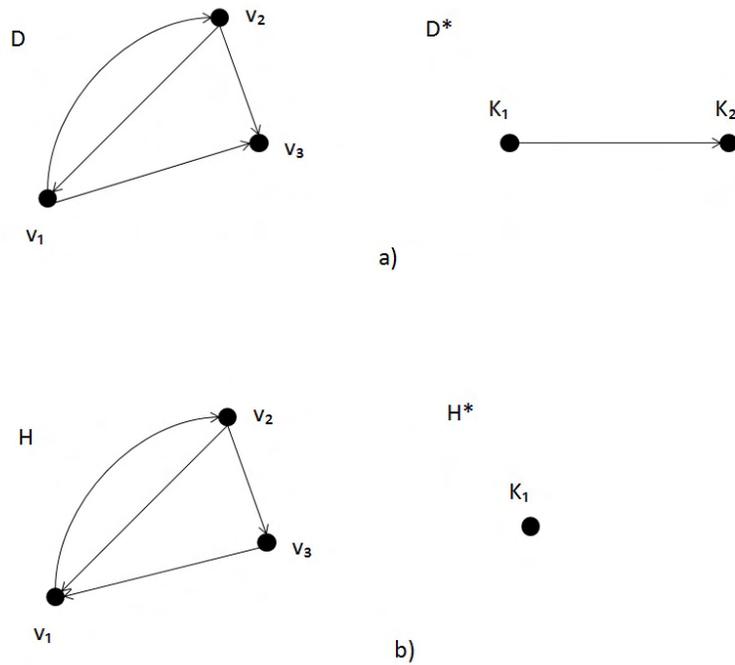


Figura 1.13: a) Digráfica  $D$  y su condensación  $D^*$ . b) Digráfica  $H$  y su condensación  $H^*$ .

## 1.2. Resultados previos.

En esta sección estableceremos algunas propiedades de las digráficas, las cuales nos serán útiles en el siguiente capítulo de este trabajo, en el cual hablaremos sobre algunas propiedades básicas de las digráficas localmente semicompletas.

**Teorema 1.1.** *Sea  $D$  una digráfica con  $V(D)$  como conjunto de vértices y  $m$  flechas. Entonces:*

$$\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v) = m$$

**Demostración.**

Sea  $v \in V(D)$  y  $H_v = \{v \rightarrow w : w \in V(D), v \rightarrow w \in F(D)\}$ .  
 $|H_v| = d^+(v)$ .

$H_v \cap H_{v'} = \emptyset$  si  $v$  y  $v'$  son distintos.

$$F(D) = \bigcup_{v \in V(D)} H(v).$$

$$\text{Entonces, } |F(D)| = \sum_{v \in V(D)} |H_v| = \sum_{v \in V(D)} d^+(v).$$

Análogamente para  $d^-(v)$ . ■

**Teorema 1.2.** *Si en todo vértice  $x$  de una digráfica  $D$ ,  $d^+(x) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene un ciclo.*

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica. Consideremos  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  una trayectoria de longitud máxima en  $D$ . Sabemos que  $d^+(v_i) \geq 1$  para  $1 \leq i \leq k$ , en particular  $d^+(v_k) \geq 1$  entonces, existe un vértice  $w$  tal que  $v_k \rightarrow w$ .

Caso i)  $w$  es un vértice de  $D - P$ .

Entonces  $v_k \rightarrow w$ , lo cual es una contradicción, pues obtenemos una trayectoria de longitud mayor que  $P$ .

Caso ii)  $w$  es un vértice de  $P$ . Entonces  $w$  es algún  $v_i$  tal que  $v_k \rightarrow w = v_i$  para  $1 \leq i \leq k - 1$  entonces  $D$  tiene un ciclo. ■

**Teorema 1.3.** *Si en todo vértice  $x$  de una digráfica  $D$ ,  $d^-(x) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene un ciclo.*

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica. Consideremos  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  una trayectoria de longitud máxima en  $D$ . Sabemos que  $d^-(v_i) \geq 1$  para  $1 \leq i \leq k$ , en particular  $d^-(v_1) \geq 1$  entonces, existe un vértice  $w$  tal que  $w \rightarrow v_1$ .

Caso i)  $w$  es un vértice de  $D - P$ . Entonces  $w \rightarrow v_1$  lo cual es una contradicción, pues obtenemos una trayectoria de longitud mayor que  $P$ .

Caso ii)  $w$  es un vértice de  $P$ . Entonces  $w$  es algún  $v_i$  tal que  $w = v_i \rightarrow v_1$  para  $1 < i \leq k$ , entonces  $D$  tiene un ciclo. ■

**Teorema 1.4.** *Sea  $D$  una digráfica y  $D^*$  su digráfica de condensación.  $D$  es conexa si y sólo si  $D^*$  es conexa.*

**Demostración**

[ $\implies$ ] Supongamos que  $D$  es conexa.

Sean  $\{K, K'\} \subseteq V(D^*)$ . Así,  $K$  y  $K'$  son componentes fuertemente conexas de  $D$ .  $\{K, K'\} \subseteq V(D)$  y ambas son distintas del vacío.

Sean  $\{v, v'\} \subseteq V(D)$  tales que  $v \in K$  y  $v' \in K'$ .

Como  $D$  es conexa, existe un semicamino entre  $v$  y  $v'$ .

Sea  $(v = (v_1, \dots, v_{r-1}, v_r) = v')$  dicho semicamino en  $D$ .

Sea  $K_i$  la componente fuertemente conexa de  $D$  que contiene a  $v_i$ . Así,  $K_1, K_2, \dots, K_r$  se puede refinar a un semicamino, removiendo los posibles lazos.

Luego, este es un semicamino en  $D^*$ .

Ahora, notemos que  $K_1 = K$  y  $K_r = K'$ . Por lo tanto, existe un semicamino en  $D^*$  que une  $K$  y  $K'$ , luego, como  $K$  y  $K'$  son cualesquiera dos vértices de  $D^*$ , se sigue que  $D^*$  es conexa.

[ $\impliedby$ ] Supongamos que  $D^*$  es conexa.

Sean  $\{v, v'\} \subseteq V(D)$ .

Sean  $K, K'$  componentes fuertemente conexas de  $D$ , tales que  $v \in K$  y  $v' \in K'$ .

Si  $K = K'$  entonces  $v$  y  $v'$  están fuertemente conectados, entonces existe una  $(v, v')$ -trayectoria en  $D$ . En particular, existe un semicamino en  $D$  entre  $v$  y  $v'$ .

Si  $K$  es distinta de  $K'$ , por ser  $D^*$  conexa y  $\{K, K'\} \subseteq V(D^*)$ , entonces, existe un semicamino en  $D^*$  entre  $K$  y  $K'$ .

Sea  $K = K_1, \dots, K_{r-1}, K_r = K'$  dicho semicamino (vamos a *levantar* dicho semicamino a  $D$ . Figura 1.14).

Para cada  $i = 1, \dots, r - 1$  sabemos que  $K_i \rightarrow K_{i+1} \in F(D^*)$  o  $K_{i+1} \rightarrow K_i \in F(D^*)$ . Sean  $x_i, y_{i+1} \in V(D)$  tales que:

$x_i \in V(K_i)$ ,  $y_{i+1} \in V(K_{i+1})$ ,  $x_i \rightarrow y_{i+1} \in F(D)$  o  $y_{i+1} \rightarrow x_i \in F(D)$ .

Ahora, para cada  $i = 2, \dots, r - 1$  tenemos que  $y_i, x_i \in V(K_i)$ .

Si  $y_i = x_i$  no hay nada que hacer.

Si  $y_i$  es distinto a  $x_i$ , entonces, existe en  $K_i$  una trayectoria que une  $y_i$  con  $x_i$ , sea esta:

$y_i = z_1^i, \dots, z_{s_i-1}^i, z_{s_i}^i = x_i$ .

Además,  $\{v, x_1\} \subseteq K_1 = K$ , por lo tanto, si  $v$  es distinto de  $x_1$ , existe una trayectoria de  $v$  hacia  $x_1$ .

Sea esta trayectoria:

$v = z_1^1, \dots, z_{s_1}^1 = x_1$  en  $D$ .

Similarmente si  $y_r$  es distinto  $v'$ , existe una trayectoria en  $D$   $y_r = z_1^r, \dots, z_{s_r}^r = v'$ .

Así:  $v = z_1^1, \dots, z_{s_1}^1 = x_1, y_2 = z_1^2, \dots, z_{s_2}^2 = x_2, y_3, \dots, z_{s_{r-1}}^{r-1} = x_{r-1}, y_r = z_1^r, \dots, z_{s_r}^r = v'$  es un semicamino en  $D$ .

Como  $v$  y  $v'$  son cualesquiera dos vértices de  $D$ , se sigue que  $D$  es conexa. ■

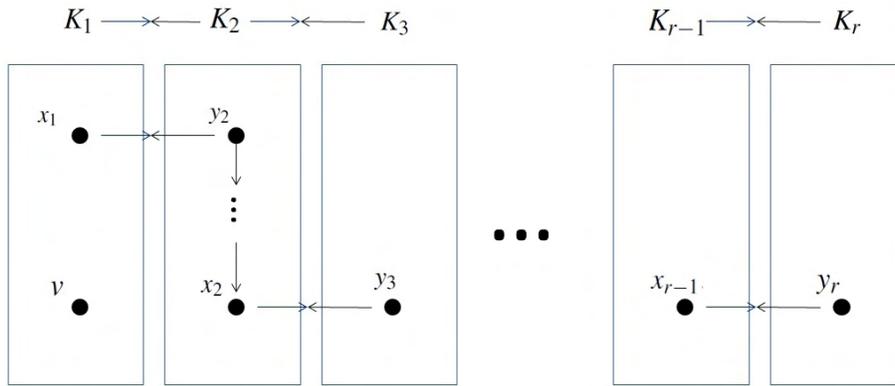


Figura 1.14: Levantamiento del semicamino en  $D^*$  a  $D$ .

**Corolario 1.1.** Sea  $D$  una digráfica y  $D^*$  su digráfica de condensación. Entonces  $D^*$  no tiene ciclos dirigidos.

**Demostración.**

Probemos la afirmación por contradicción.

Supongamos que  $D^*$  si tiene ciclos dirigidos.

Sea  $\gamma = (K_1, \dots, K_r, K_1)$  uno de ellos ( $r \geq 2$ ) donde cada  $K_i$  es una componente fuertemente conexa de  $D$ .

Demostraremos que  $\bigcup_{i=1}^n K_i$  es también una digráfica fuertemente conexa que contiene propiamente a cada  $K_i$ , lo cual es claramente una contradicción.

Recordemos el siguiente teorema que será de utilidad para este propósito.

**Teorema\*.** Una digráfica  $D$  es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición de  $V(D)$  en dos conjuntos ajenos,  $V_1$  y  $V_2$ , existe una  $V_1V_2$ -flecha y existe una  $V_2V_1$ -flecha.

Denotemos  $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$  y sea  $V_1, V_2$  una partición de  $V(K)$ .

Caso 1. Existe  $i \leq i \leq n$  tal que  $V(K_i) \cap V_1 \neq \emptyset$  y  $V(K_i) \cap V_2 \neq \emptyset$ .

Sean  $V'_1 = V(K_i) \cap V_1$  y  $V'_2 = V(K_i) \cap V_2$

Claramente,  $\{V'_1, V'_2\}$  es una partición de  $V(K_i)$  en dos conjuntos. Como  $K_i$  es fuertemente conexa, por **Teorema\***, existe  $V'_1 V'_2$ -flecha en  $K_i$  y existe  $V'_2 V'_1$ -flecha en  $K_i$ , por lo tanto, existe  $V_1 V_2$ -flecha en  $K$ .

Caso 2. Para cada  $k < i \leq n$  se tiene que  $K_i \cap V_1 = \emptyset$  o  $K_i \cap V_2 = \emptyset$ . Es decir,  $K_i \subseteq V_2$  o  $K_i \subseteq V_1$ .

En este caso, sean

$$\overline{V}_1 = \{K_i | K_i \subseteq V_1\}$$

$$\overline{V}_2 = \{K_i | K_i \subseteq V_2\}$$

Claramente,  $\{\overline{V}_1, \overline{V}_2\}$  es una partición de  $V(\gamma)$ , que por ser un ciclo dirigido, es una digráfica fuertemente conexa, y por **Teorema\***, existe  $\overline{V}_1 \overline{V}_2$ -flecha en  $\gamma$ , y existe  $\overline{V}_2 \overline{V}_1$ -flecha en  $\gamma$ .

Por lo tanto, existe  $V_1 V_2$ -flecha en  $K$ , y existe  $V_2 V_1$ -flecha en  $K$ .

Concluimos que  $K$  es fuertemente conexa y contiene propiamente a  $K_i$  que es una componente fuertemente conexa, lo cual es claramente una contradicción. ■.

Similarmente a la prueba del teorema 1.4, podemos *levantar* este ciclo dirigido en  $D^*$  a un ciclo dirigido en  $D$  que pase por al menos un vértice de cada componente  $K_i$ , luego  $K_1 = \dots = K_r$  esto es una contradicción a la definición de condensación. Esto conecta fuertemente a cada  $K_i$ . ■

**Teorema 1.5.** *Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa, no trival, entonces  $D$  tiene un ciclo.*

**Demostración.**

Sean  $x$  y  $x'$  dos vértices distintos de  $D$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, existen  $(x, x')$ -trayectoria y  $(x', x)$ -trayectoria.

Sean:

$$x = x_1, x_2, \dots, x_r = x', r \geq 2$$

$$x' = x'_1, x'_2, \dots, x'_s = x, s \geq 2$$

dichas trayectorias respectivamente.

Analicemos los siguientes casos:

- i) Si  $r = s = 2$  entonces  $x \rightarrow x' \rightarrow x$  y de esta forma obtenemos un 2-ciclo.
- ii) Si  $r > 2, s = 2$  entonces  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_r \rightarrow x_1$  y de esta forma obtenemos un r-ciclo.
- iii) Si  $r = 2, s > 2$  entonces  $x_1 \rightarrow x_r \rightarrow x'_2 \rightarrow x'_3 \rightarrow \dots \rightarrow x'_{s-1} \rightarrow x_1$  y de esta forma obtenemos un s-ciclo.
- iv) Si  $r, s > 2$  entonces consideremos el camino dirigido  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_r \rightarrow x'_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_1$  y de la siguiente forma:

- Si la intersección de los ciclos  $\{x_2, x_3, \dots, x_{r-1}\} \cap \{x'_2, x'_3, \dots, x'_{s-1}\}$  es vacía, obtenemos el siguiente ciclo:

$$x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow, \dots, \rightarrow x_r = x' \rightarrow x'_2 \rightarrow, \dots, \rightarrow x'_s = x$$

- Si dicha intersección es no vacía, sea  $i = 2, 3, \dots, r - 1$  mínima respecto a la propiedad  $x_i \in \{x'_2, x'_3, \dots, x'_{s-1}\}$ .  
Así:  $x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow, \dots, \rightarrow x_i = x'_j \rightarrow x'_{j+1} \rightarrow, \dots, \rightarrow x'_s = x$  obtenemos un ciclo.

Por lo tanto,  $D$  tiene un ciclo. Como en la Figura 1.15. ■

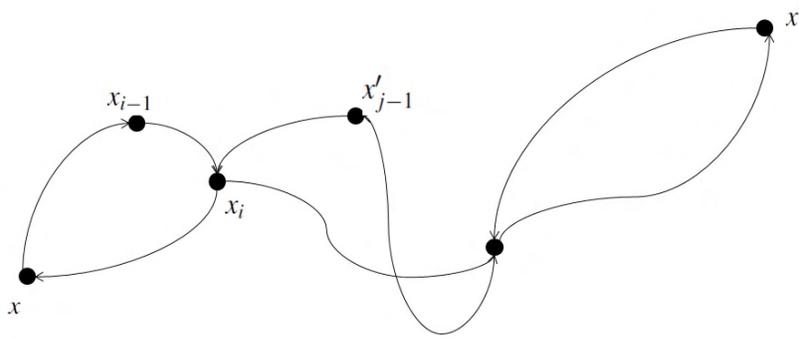


Figura 1.15: Posibles ciclos de  $D$ .

**Teorema 1.6.** *Toda digráfica semicompleta es una digráfica localmente semicompleta.*

**Demostración.**

Sea  $x$  un vértice de  $D$ . (Recordemos que el conjunto de vértices de  $D$  está formado por  $\{x\} \cup \{N^+(x) \cup N^-(x)\}$ ).

Consideremos la subdigráfica de  $D$ , inducida por  $N^+(x)$ , es decir,  $D[N^+(x)]$ .

Sean  $w_1, w_2$  dos vértices en  $D[N^+(x)] \subseteq D$ , entonces  $w_1, w_2$  son vértices en  $D$ , entonces  $w_1$  y  $w_2$  son adyacentes en  $D$  y esto implica que  $w_1 \rightarrow w_2$  en  $D$ , o  $w_2 \rightarrow w_1$  en  $D$ . Pero como  $w_1, w_2 \in N^+(x)$ , entonces  $w_1 \rightarrow w_2$  en  $D[N^+(x)]$ , o  $w_2 \rightarrow w_1$  en  $D[N^+(x)]$ .

Como  $w_1, w_2$  son arbitrarios, entonces todos los vértices en  $D[N^+(x)]$  son adyacentes, es decir,  $D[N^+(x)]$  es semicompleta. (Similarmente para  $D[N^-(x)]$ ).

Como  $x$  es arbitrario, se sigue que  $D$  es localmente semicompleta. ■

**Teorema 1.7. (Goldfeder).** *Una digráfica es localmente semicompleta si y sólo si toda semitraectoria no dirigida tiene una diagonal.*

**Demostración.**

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $D$  una digráfica y supongamos que toda semitrayectoria no dirigida en  $D$  posee una diagonal. Probaremos que  $D$  es localmente semicompleta.

Sea  $v$  un vértice de  $D$  y consideremos  $N^+(v)$ .

Si  $N^+(v) = \emptyset$  entonces,  $N^+(v)$  es semicompleta.

Si  $|N^+(v)| = 1$  entonces,  $N^+(v)$  es semicompleta.

Si  $|N^+(v)| > 1$  entonces, sean  $w_1$  y  $w_2$  dos vértices en  $N^+(v)$ , entonces,  $(w_1, v, w_2)$

posee una diagonal,  $w_1 \rightarrow w_2$  o  $w_2 \rightarrow w_1$

Como  $w_1$  y  $w_2$  fueron arbitrarios,  $N^+(v)$  es semicompleta y de manera análoga, también lo es  $N^-(v)$

Como  $w_1$  y  $w_2$  fueron vértices arbitrarios de  $D$ , se sigue que  $D$  es localmente semicompleta.

[ $\Rightarrow$ ] Ahora supongamos que  $D$  es una digráfica localmente semicompleta.

Sea  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  una semitrayectoria no dirigida. Como  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  es no dirigida, existe  $v_i$  con  $i = 1, 2, \dots, k-1$  tal que:  $v_i \rightarrow v_{i-1} \in F(D)$  y  $v_i \rightarrow v_{i+1} \in F(D)$  o  $v_{i-1} \rightarrow v_i \in F(D)$  y  $v_{i+1} \rightarrow v_i \in F(D)$ . Como en la Figura 1.16.

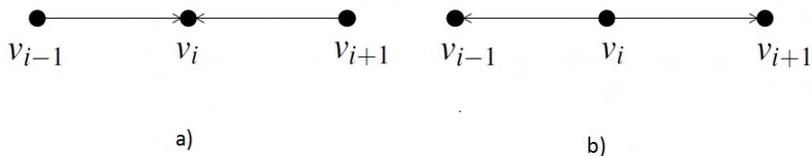


Figura 1.16: Diagramas de las semitrayectorias: a)  $v_{i-1} \rightarrow v_i \in F(D)$  y  $v_{i+1} \rightarrow v_i \in F(D)$ . b)  $v_i \rightarrow v_{i-1} \in F(D)$  y  $v_i \rightarrow v_{i+1} \in F(D)$ .

En el primer caso,  $v_{i-1}, v_{i+1} \in N^-(v_i)$  entonces, como  $D$  es localmente semicompleta, tenemos que  $v_{i-1} \rightarrow v_{i+1}$  o  $v_{i+1} \rightarrow v_{i-1}$  de cualquier forma, obtenemos una diagonal en la semitrayectoria no dirigida.

En el segundo caso,  $v_{i-1}, v_{i+1} \in N^+(v_i)$  entonces, como  $D$  es localmente semicompleta, tenemos que  $v_{i-1} \rightarrow v_{i+1}$  o  $v_{i+1} \rightarrow v_{i-1}$  de cualquier forma, obtenemos una diagonal en la semitrayectoria no dirigida. ■

### 1.3. Definiciones complementarias.

Una digráfica  $D$  es **localmente in-semicompleta** si para todo vértice  $x$  de  $D$ , los invecinos de  $x$  inducen una digráfica semicompleta. De manera análoga, una digráfica  $D$  es **localmente ex-semicompleta** si para todo vértice  $x$  de  $D$ , los exvecinos de  $x$  inducen una digráfica semicompleta.

Una digráfica  $D$  es **localmente semicompleta** si es tanto localmente in-semicompleta como localmente ex-semicompleta. Por ejemplo la Figura 1.17 ilustra estos tipos de digráficas. Una digráfica localmente in-semicompleta sin 2-ciclos es una **digráfica localmente in-torneo**; llamadas con frecuencia como **in-torneos locales**. Similarmente, podemos definir **digráficas localmente ex-torneos**; llamadas con frecuencia como **ex-torneos locales**, y **digráficas localmente torneos**, también llamadas **torneos locales**.

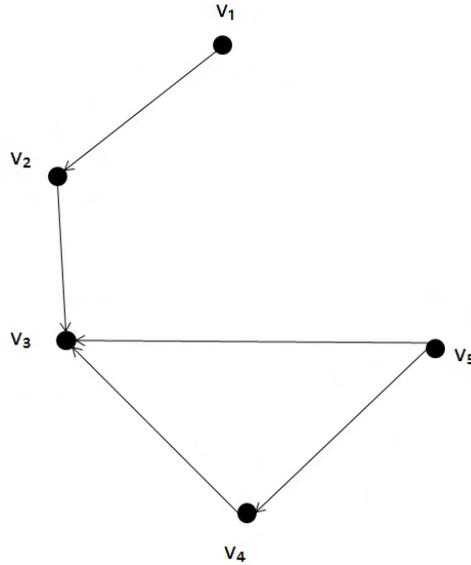


Figura 1.17: Digráfica  $D$  que es localmente ex-semicompleta pero no in-semicompleta.

Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos uv-trayectorias dirigidas. Decimos que  $T_1$  y  $T_2$  son **internamente ajenas** si  $V(T_1) \cap V(T_2) = \{u, v\}$ .

Una digráfica  $D$  es **mezclable por trayectorias**, si para cualquier elección de vértices  $x, y \in V(D)$  y para cualquier par de  $(x, y)$ -trayectorias internamente ajenas,  $P, Q$ , existe una  $(x, y)$ -trayectoria  $R$  en  $D$ , tal que  $V(R) = V(P) \cup V(Q)$ .

La mezclabilidad por trayectorias se puede generalizar de la siguiente manera:

Una digráfica  $D$  es **mezclable por in-trayectorias** si, para todo vértice  $y \in V(D)$  y para toda pareja de trayectorias  $P, Q$ , internamente ajenas con vértice terminal común  $y$ , existe una trayectoria  $R$  tal que  $V(R) = V(P) \cup V(Q)$ , la trayectoria  $R$  termina en  $y$  y comienza en un vértice que es inicial o en  $P$ , o en  $Q$  o en ambas. En consecuencia, toda digráfica mezclable por in-trayectorias es mezclable por trayectorias. Sin embargo, es fácil ver que el converso no es cierto, como en la Figura 1.18.

Una digráfica de  $n$  vértices es **circular** si podemos etiquetar sus vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de forma tal que para cada  $i$ , tenemos que  $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+d^+(v_i)}\}$  y  $N^-(v_i) = \{v_{i-d^-(v_i)}, \dots, v_{i-1}\}$  (todos los subíndices se toman módulo  $n$ ).

Nos referiremos al ordenamiento  $v_1, v_2, \dots, v_n$  como **etiquetado circular** de  $D$ .

Por ejemplo la Figura 1.20  $N^+(1) = \{2\}$ ,  $N^+(2) = \{3, 4, 5\}$ ,  $N^+(3) = \{4, 5, 6\}$ ,  $N^+(4) = \{5, 6\}$ ,  $N^+(5) = \{6\}$ ,  $N^+(6) = \emptyset$  y  $N^-(1) = \emptyset$ ,  $N^-(2) = \{1\}$ ,  $N^-(3) = \{2\}$ ,  $N^-(4) = \{3, 2\}$ ,  $N^-(5) = \{4, 3, 2\}$ ,  $N^-(6) = \{5, 4, 3\}$ .

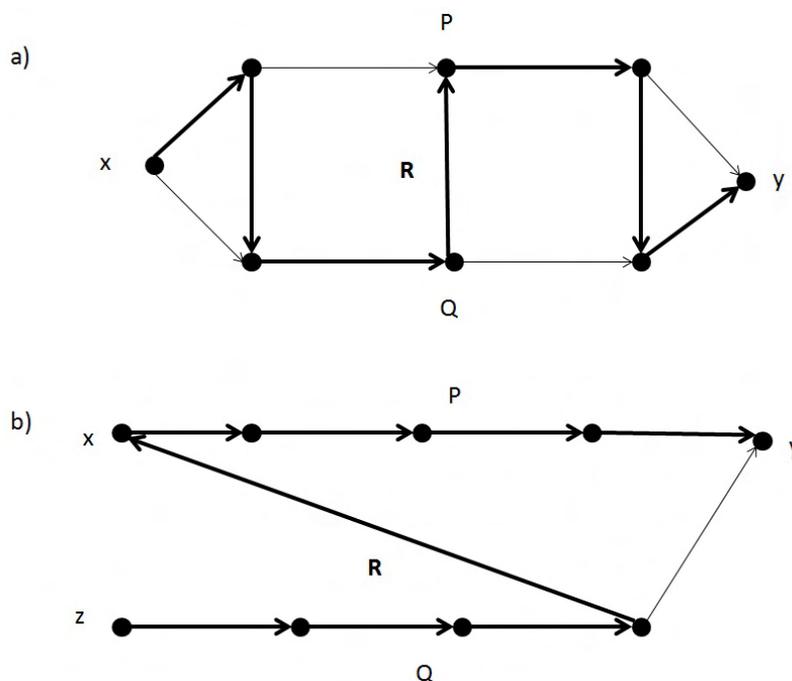


Figura 1.18: a) Digráfica mezclable por trayectorias. b) Digráfica mezclable por in-trayectorias.

Más adelante veremos que las digráficas circulares forman una subclase de digráficas localmente semicompletas.

Una digráfica  $D$  localmente semicompleta es **circularmente descomponible** si existe un torneo local circular  $R$  con  $r$  vértices ( $r \geq 2$ ) tal que  $D = R[S_1, \dots, S_r]$ , donde cada  $S_i$  es una digráfica semicompleta fuertemente conexa. Llamaremos a  $R[S_1, \dots, S_r]$  una **descomposición circular** de  $D$ . En otras palabras, supongamos que  $R$  es un torneo local circular con  $r$  vértices ( $r \geq 2$ ) y que  $S_1, \dots, S_r$  son digráficas semicompletas fuertemente conexas.

Definimos la **composición** de  $S_1, \dots, S_r$  con formato  $R$ , como:

$$V(R) = \{w_1, \dots, w_n\},$$

$$R[S_1, \dots, S_r] = \mathcal{R},$$

$$V(\mathcal{R}) = \sqcup_{i=1}^n V(S_i),$$

$$F(\mathcal{R}) = \{v_i \rightarrow v'_i : v_i, v'_i \in V(S_i) \text{ y } v_i \rightarrow v'_i \in F(S_i)\} \cup \{v_i \rightarrow v_j : v_i \in V(S_i), v_j \in V(S_j) \text{ con } i \text{ distinto de } j \text{ y } w_i \rightarrow w_j \in F(R)\}.$$

Por ejemplo, la Figura 1.19

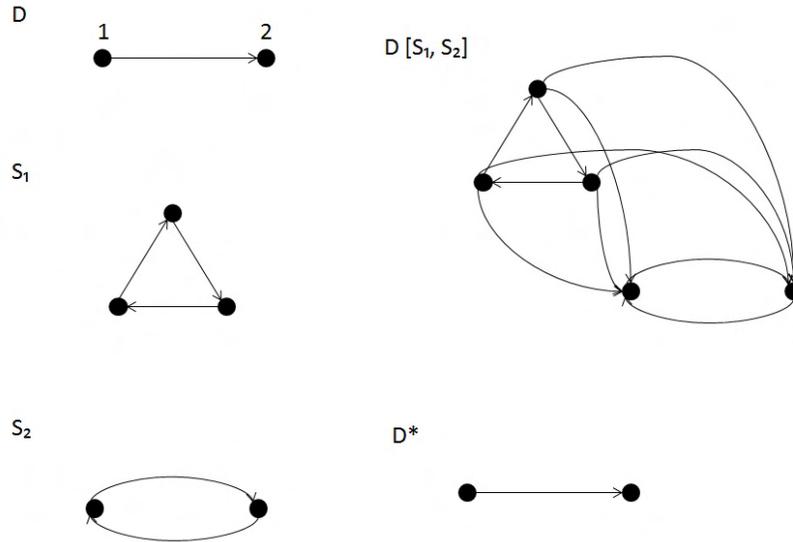


Figura 1.19: Descomposición circular de  $D$ .

Una flecha  $x \rightarrow y$  de una digráfica  $D$  es **ordinaria** si  $y \rightarrow x$  no es flecha en  $D$ . Un ciclo o una trayectoria  $Q$  de una digráfica  $D$  son **ordinarios** si todas las flechas de  $Q$  son ordinarias.

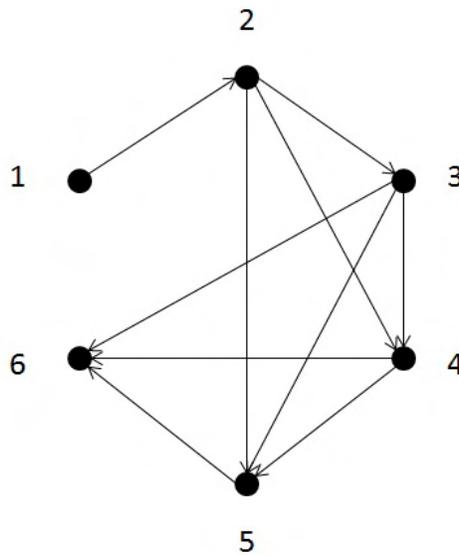


Figura 1.20: Digráfica circular con etiquetado circular.

Una digráfica  $D$  es un **árbol orientado** si  $D$  es una orientación de un árbol. Una digráfica  $T$  es un **ex-árbol** si  $T$  es un árbol orientado con sólo un vértice  $v$  de ingrado cero. Análogamente, Una digráfica  $T$  es un **in-árbol** si  $T$  es un árbol orientado con sólo un vértice  $v$  de exgrado cero. es decir, con una única fuente ó un único pozo, respectivamente.

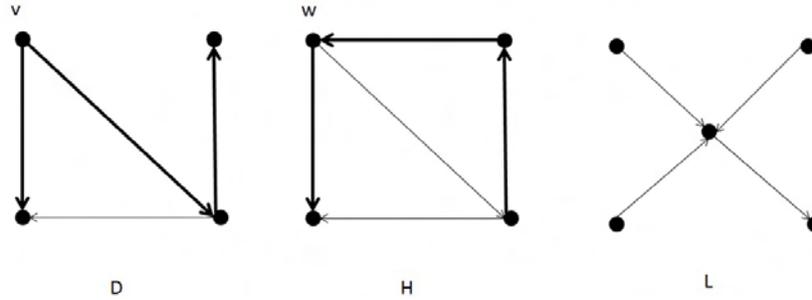


Figura 1.21: La digráfica  $D$  tiene una *ex-ramificación* con raíz  $v$ .  $H$  contiene una *in-ramificación* con raíz  $w$  y  $L$  no tiene ninguna ramificación.

El vértice  $v$  es la **raíz** de  $T$ . Si un *ex-árbol*  $T$  es la subdigráfica generadora de  $D$ , entonces decimos que  $T$  es una **ex-ramificación** y utilizaremos la notación  $B_v^+$  para referirnos a esta. Similarmente, Si un *in-árbol*  $T$  es la subdigráfica generadora de  $D$ , entonces decimos que  $T$  es una **in-ramificación** y utilizaremos la notación  $B_w^-$  para referirnos a esta.

Por ejemplo la Figura 1.21.

## 2. Propiedades básicas de las digráficas localmente semicompletas.

En este capítulo, se estudiarán las relaciones que existen entre las digráficas localmente semicompletas (respectivamente localmente in-semicompletas y localmente ex-semicompletas) con otras clases importantes de digráficas y también se exponen detalladamente propiedades de las digráficas localmente semicompletas que serán usadas en el siguiente capítulo y nos permitirán comprender la caracterización de las localmente semicompletas y de esta manera, obtener la caracterización de las núcleo imperfectas críticas localmente semicompletas.

### 2.1. Localmente in-semicompletas y ex-semicompletas.

**Teorema 2.1.** *Toda digráfica localmente ex-semicompleta (in-semicompleta) es mezclable por trayectorias.*

#### **Demostración.**

Sean  $D$  una digráfica localmente ex-semicompleta,  $\{x, y\} \subseteq V(D)$  y  $P$  y  $Q$   $(x, y)$ -trayectorias tales que  $V(P) \cap V(Q) = \{x, y\}$ . Denotemos a  $P$  y  $Q$  como:

$$P = y_1, y_2, \dots, y_k$$

$$Q = z_1, z_2, \dots, z_l$$

$$x = y_1 = z_1 \text{ y } y_k = y = z_l.$$

Demostremos la afirmación por inducción sobre  $|F(P)| + |F(Q)|$ .

Si  $|F(P)| + |F(Q)| = 2$ , entonces obtenemos una  $(x, y)$ -trayectoria de longitud uno.  
Si  $|F(P)| + |F(Q)| = 3$ , entonces obtenemos una  $(x, y)$ -trayectoria  $R$  de longitud dos.

Así, supongamos que  $|F(P)| + |F(Q)| \geq 4$ . Como  $D$  es ex-semicompleta, ya que  $x \rightarrow y_2 \in F(D)$  y  $x \rightarrow z_2 \in F(D)$  tenemos que  $y_2 \rightarrow z_2$  o  $z_2 \rightarrow y_2$  o ambas. Al remover el vértice inicial  $x$ , obtenemos  $P', Q'$  trayectorias internamente ajenas, tales que  $|F(P')| + |F(Q')| = |F(P)| + |F(Q)| - 1$ .

Supongamos que la afirmación es válida para  $|F(P)| + |F(Q)| - 1$ , así, inductivamente, existe  $R'$ , una  $(x', y)$ -trayectoria en  $D$  con  $x' = y_2$ , tal que  $V(R') = V(P') \cup V(Q')$ .

$$V(P') = V(P) \setminus \{x\}$$

$$V(Q') = V(Q) \setminus \{x\} \cup \{x'\}$$

$$P' = y_2, y_3, \dots, y_k$$

$$Q' = y_2, z_2, \dots, z_l$$

Así,  $R'$  es una trayectoria tal que  $V(R') = V(P') \cup V(Q')$

$R' = w_1, w_2, \dots, w_m$ , donde  $m = |F(P')| + |F(Q')| - 2$ ,  $w_1 = x' = y_2$ ,  $w_m = y$ .

Así,  $R = x, w_1, w_2, \dots, w_m$  es una trayectoria en  $D$  y

$$V(R) = \{x\} \cup V(R') = \{x\} \cup V(P') \cup V(Q') = V(P) \cup V(Q). \blacksquare$$

**Teorema 2.2.** *Toda digráfica localmente in-semicompleta (ex-semicompleta, respectivamente) es mezclable por in-trayectorias (mezclable por ex-trayectorias, respectivamente).*

**Demostración.**

Sean  $y \in V(D)$  y  $P, Q$   $(a, y)$ -in-trayectorias tales que  $V(P^\circ) \cap V(Q^\circ) = \emptyset$ , ( $P^\circ$  entenderemos el interior de la trayectoria),  $a$  es el punto inicial de  $P$  ó  $a$  es el punto inicial de  $Q$ .

$$P = y_1, y_2, \dots, y_k$$

$$Q = z_1, z_2, \dots, z_l$$

$$y_k = y = z_l.$$

Demostremos la afirmación por inducción sobre  $|F(P)| + |F(Q)|$ .

Si  $|F(P)| + |F(Q)| = 2$  obtenemos una  $(x, y)$ -trayectoria de longitud uno.

Como  $D$  es in-semicompleta,  $\{y_1, z_1\} \subseteq N^-(y)$ , tenemos que  $y_1 \rightarrow z_1$  o  $z_1 \rightarrow y_1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $y_1 \rightarrow z_1$ , entonces obtenemos  $R = y_1, z_1, y$ .

Supongamos que la afirmación es válida para  $|F(P)| + |F(Q)| < n$ .

Demostremos que la afirmación es válida para  $|F(P)| + |F(Q)| = n$ .

Notemos que  $\{y_{k-1}, z_{l-1}\} \subseteq N^-(y)$ , entonces  $y_{k-1} \rightarrow z_{l-1}$  o  $z_{l-1} \rightarrow y_{k-1}$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $y_{k-1} \rightarrow z_{l-1}$ .

Sea  $y' = z_{l-1}$ ,  $P' = y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, z_{l-1}$ ,  $Q' = z_1, z_2, \dots, z_{l-1}$ .

Así,  $P', Q'$  son  $(a, y)$ -in-trayectorias y  $|F(P')| + |F(Q')| = |F(P)| + |F(Q)| - 1 = n - 1$ .

Por hipótesis de inducción existe  $R'$  trayectoria en  $D$  tal que:

i)  $V(R') = V(P') \cup V(Q')$ .

ii)  $R'$  termina en  $y'$ .

iii) El inicio de  $R'$  es  $y_1$  o  $z_1$ , es decir, es  $a$ .

Sea  $R' = w_1, w_2, \dots, w_m$  tal que  $w_1 = y_1$  o  $z_1$  y  $w_m = y' = z_{l-1}$ .

Sea  $R = w_1, w_2, \dots, w_m, y$  una trayectoria en  $D$ . Así,  $y$  es vértice terminal de  $R$ , el inicio de  $R$  es un

vértice de  $P$  o de  $Q$  y  $V(R) = V(R') \cup \{y\} = V(P') \cup V(Q') \cup \{y\} = V(P) \cup V(Q)$ . ■

**Lema 2.1.** *Toda digráfica localmente in-semicompleta, conexa, tiene una ex-ramificación.*

**Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica localmente in-semicompleta, conexa. Queremos demostrar que una subdigráfica de  $D$  contiene una única fuente.

Sabemos que  $D^*$  es conexa, pero no fuertemente conexa; entonces  $D^*$  tiene al menos dos componentes fuertemente conexas.

Supongamos que  $K$  y  $K'$  son componentes fuertemente conexas de  $D$  y ambas son fuentes en  $D^*$ .

Como  $D^*$  es conexa, existe una trayectoria  $P$ , no dirigida que une a  $K$  y  $K'$  en  $D^*$ .

Tomemos dicha trayectoria de longitud mínima.

Si  $P = Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  tal que  $Y_1 = K$ ,  $Y_s = K'$  y  $Y_i \rightarrow Y_{i+1}$  o  $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$ .

Como  $Y_1$  y  $Y_s$  son fuentes,  $Y_1 \rightarrow Y_2$  y  $Y_s \rightarrow Y_{s-1}$ .

Por lo tanto, existe un vértice  $Y_t$  tal que  $2 \leq t \leq s-1$ ,  $Y_{t-1} \rightarrow Y_t \leftarrow Y_{t+1}$ .

Pero esto implica que  $\{Y_{t-1}, Y_{t+1}\} \subseteq N^-(Y_t)$  y de esta forma, como  $D$  es localmente in-semicompleta,  $Y_{t-1}, Y_{t+1}$  son adyacentes y así, obtenemos una trayectoria  $P'$  de menor longitud que  $P$ . Pero esto es una contradicción.

Por lo tanto,  $D$  tiene una única fuente. ■

**Teorema 2.3.** *Sea  $D$  una digráfica localmente in-semicompleta.*

(a) *Sean  $A$  y  $B$  dos componentes fuertemente conexas distintas en  $D$ . Si un vértice  $a \in A$  domina a algún vértice en  $B$ , entonces  $a \mapsto B$ .*

(b) *Si  $D$  es conexa, entonces  $D^*$  tiene una ex-ramificación.*

**Demostración.**

(a) Sean  $b \in B$  y  $a \in A$  tales que  $a \rightarrow b$ . Como  $B$  es fuertemente conexa, para todo  $b' \in B$  existe  $(b', b)$ -trayectoria,  $P = y_1, \dots, y_k$  en  $B$ , tal que  $y_1 = b'$ ,  $y_k = b$ .

Entonces,  $\{y_{k-1}, a\} \subseteq N^-(b)$ , luego,  $a \rightarrow y_{k-1}$  o  $y_{k-1} \rightarrow a$ .

Si  $y_{k-1} \rightarrow a$ , entonces  $A \subseteq B$  ( $D^*$  no tiene 2-ciclos).

En consecuencia,  $a \rightarrow y_{k-1}$ , mediante un razonamiento similar, obtenemos que  $a \rightarrow y_{k-2}$  y así sucesivamente hasta  $a \rightarrow b'$ . Como  $b'$  es arbitrario,  $a \mapsto B$ .

(b) Probemos que  $D^*$  es localmente in-semicompleta.

Sea  $K \in V(D^*)$  y supongamos que  $\{K', K''\} \subseteq N^-(K)$  en  $D^*$ .

Como  $K' \in N^-(K)$ , existe  $y \in K'$  tal que  $y \rightarrow x$  con  $x \in K$ ; entonces, por (a), tenemos que  $y \mapsto K$ .

Como  $K'' \in N^-(K)$ , existe  $y' \in K''$  tal que  $y' \rightarrow w$  con  $w \in K$ ; entonces, por (a), tenemos que  $y' \mapsto K$ .

Sea  $x \in V(K)$ , entonces  $\{y, y'\} \subseteq N^-(x)$  en  $D$ , luego,  $y \rightarrow y'$  o  $y' \rightarrow y$  y así,  $K' \rightarrow K''$  o  $K'' \rightarrow K$  en  $D^*$ .

Por lo tanto,  $N^-(K)$  es semicompleta y como  $K$  es arbitrario,  $D^*$  es in-semicompleta. Por el lema 2.1,  $D^*$  tiene una ex-ramificación. ■

## 2.2. Digráficas circulares.

**Observación 2.1.** *Si  $D$  es una digráfica circular, fuertemente conexa, entonces  $D$  tiene un ciclo hamiltoniano.*

### Demostración.

Como  $D$  es fuertemente conexa,  $d^+(v) \geq 1$  para todo  $v \in V(D)$ . Sea  $v_1, \dots, v_n$  el etiquetado circular de  $D$ . Notemos que para  $v_i$ ,  $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+d^+(v_i)}\}$ , así,  $v_{i+1} \in N^+(v_i)$ , por tanto,  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1$  es un ciclo hamiltoniano en  $D$ . ■

**Teorema 2.4.** *Toda digráfica circular es localmente semicompleta.*

### Demostración.

Sean  $D$  una digráfica circular y  $v_1, \dots, v_n$  un etiquetado circular de  $D$ .

Sean  $v_i \in V(D)$  y  $\{x, y\} \subseteq N^+(v_i)$  tales que  $x$  y  $y$  son distintos.

Probaremos que  $x$  y  $y$  son adyacentes.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $v_i, x, y$  aparecen en orden circular en el etiquetado circular  $v_i, v_{i+1}, \dots, x, \dots, y = v_j, \dots, v_{i+d^+(v_i)}$ .

Como  $v_i \rightarrow y$  y los invecinos de  $y$  aparecen consecutivamente precediendo a  $y = v_j$ :

$$N^-(y) = \{v_{j-1}, \dots, v_i, \dots, v_{j-d^-(v_j)}\}.$$

Tenemos que  $x \in N^-(y)$  y por tanto,  $x \rightarrow y$ . Así,  $x, y$  son adyacentes.

En consecuencia,  $N^+(v_i)$  es semicompleta. Análogamente,  $N^-(v_i)$  es semicompleta. ■

**Lema 2.2.** *Si  $D$  es una digráfica circular, entonces, para cada vértice  $x$  de  $D$ , la subdigráfica inducida por  $N^+(x) \cap N^-(x)$  no contiene ciclos asimétricos.*

### Demostración.

CAPÍTULO 2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS DIGRÁFICAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

---

Si  $N^+(x) \cap N^-(x) = \emptyset$  no hay nada que demostrar.

Supongamos que existe  $x \in V(D)$  tal que la digráfica inducida por  $N^+(x) \cap N^-(x)$  contiene un ciclo ordinario  $C$ .

Sea  $v_1, \dots, v_n$  un etiquetado circular de  $V(D)$ .

Como podemos *rotar* dicho etiquetado circular, podemos suponer que  $x = v_1$ .

Como  $N^+(x) = \{v_2, \dots, v_k\}$ ,  $2 \leq k \leq |V(D)|$  y  $N^-(x) = \{v_{n-1}, \dots, v_l\}$ ,  $2 \leq l \leq |V(D)|$ .

Si  $k < l$ ,  $N^+(x) \cap N^-(x) = \emptyset$ , pero asumimos que dicha intersección era distinta del vacío, entonces  $l \leq k$ , pero esto implicaría que si  $l = k$  entonces  $N^+(x) \cap N^-(x) = \{v_k\}$ , pero éste no es un ciclo ordinario. Por tanto,  $l < k$ .

Como  $C$  es ordinario en la digráfica inducida por  $N^+(x) \cap N^-(x)$ , entonces,  $V(C) \subseteq \{v_l, \dots, v_k\}$ . Sea  $i = \max\{j : v_j \in C\}$ . Sea  $v_j \in V(D)$  tal que  $v_i \rightarrow v_j$  está en  $C$ . Como  $v_j$  está en  $C$ , entonces  $j < i$ . Así,  $\{v_i, v_j\} \subseteq C$  y  $C \subseteq N^+(x) \cap N^-(x)$  entonces  $v_1 \in N^-(v_i)$ , pues  $v_i \in N^+(v_1)$  y  $v_j \notin N^-(v_i)$ , pues  $v_j \rightarrow v_i \notin F(D)$ , ya que  $C$  es ordinario.

Esto contradice la suposición de que  $v_1, \dots, v_n$  es un etiquetado circular de  $V(D)$ . Por lo tanto,  $N^+(x) \cap N^-(x)$  no contiene ciclos asimétricos. ■

**Teorema 2.5. (Huang)** *Una digráfica localmente semicompleta conexa  $D$  es circular si y sólo si las siguientes afirmaciones se cumplen para cada vértice  $x$  en  $D$ .*

(a)  $N^+(x) - N^-(x)$  y  $N^-(x) - N^+(x)$  inducen torneos transitivos.

(b)  $N^+(x) \cap N^-(x)$  induce una subdigráfica semicompleta que no contiene ciclos ordinarios.

**Corolario 2.1. (Bang-Jensen)** *Un torneo local  $D$  es circular conexo si y sólo si para cada vértice  $x$  en  $D$ ,  $N^+(x)$  y  $N^-(x)$  inducen torneos transitivos.*

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Supongamos que  $D$  es un torneo local conexo circular. Entonces, por el teorema 2.5,  $N^+(x) - N^-(x)$  y  $N^-(x) - N^+(x)$  inducen torneos transitivos, pues  $N^+(x) - N^-(x) = N^+(x)$  y  $N^-(x) - N^+(x) = N^-(x)$ ; puesto que  $N^+(x) \cap N^-(x) = \emptyset$  ya que  $D$  es torneo y no tiene 2-ciclos. Así,  $N^+(x)$  y  $N^-(x)$  inducen torneos transitivos.

[ $\impliedby$ ] Supongamos que  $D$  es un torneo local conexo y que para cada vértice  $x$  en  $D$ ,  $N^+(x)$  y  $N^-(x)$  inducen torneos transitivos. Como  $N^+(x) - N^-(x) = N^+(x)$  y  $N^-(x) - N^+(x) = N^-(x)$ , ya que  $D$  es torneo, inducen torneos transitivos,  $D$  satisface (a) del teorema 2.5 y trivialmente, se cumple (b) del teorema 2.5 y esto implica que  $D$  sea circular. ■

## 2.3. Digráficas localmente semicompletas conexas.

**Teorema 2.6.** *Si  $D$  es una digráfica localmente semicompleta, conexa, pero no fuertemente conexa, entonces, para  $D$ , se cumple lo siguiente:*

(a) *Si  $A$  y  $B$  son dos componentes fuertemente conexas de  $D$  con al menos una flecha entre ellas, entonces  $A \mapsto B$  ó  $B \mapsto A$ .*

*(es decir: para cada  $x \in A$  y  $y \in B$ ,  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow x$  ó para cada  $y \in B$  y  $x \in A$ ,  $y \rightarrow x$  y  $x \rightarrow y$ ).*

(b) *Si  $A$  y  $B$  son componentes fuertemente conexas de  $D$  tales que  $A \rightarrow B$ , entonces tanto  $A$  como  $B$  inducen digráficas semicompletas.*

### **Demostración.**

(a) Sean  $A$  y  $B$  componentes fuertemente conexas de  $D$  tales que existe al menos una flecha entre  $A$  y  $B$ .

Como  $A \cup B$  no es fuertemente conexa, todas las flechas entre  $A$  y  $B$  van de  $A$  a  $B$  o, de  $B$  a  $A$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las flechas van de  $A$  a  $B$ .

Sean  $x$  en  $A$ ,  $y$  en  $B$  tales que  $x \rightarrow y$  y  $x'$  cualquier vértice en  $A$  tal que  $x'$  sea distinto a  $x$ .

Como  $A$  es una componente fuertemente conexa de  $D$ , existe una  $(x, x')$ -trayectoria dirigida:  $x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_r = x'$  dicha trayectoria en  $A$ .

Entonces,  $x_2$  y  $y$  son exvecinos de  $x$ .

Como  $D(N^+(x))$  es semicompleta, tenemos que:  $x_2 \rightarrow y$  o  $y \rightarrow x_2$ . Si  $y \rightarrow x_2$  entonces  $D(A \cup B)$  sería fuertemente conexa, y ésto es una contradicción. De esta forma,  $x_2 \rightarrow y$ . Siguiendo este razonamiento, obtenemos que:  $x_3 \rightarrow y, x_4 \rightarrow y, \dots, x' \rightarrow y$

Como  $x'$  es arbitrario, entonces tenemos que para todo  $x$  en  $A$ ,  $x \rightarrow y$ , con  $y \in B$ .

Ahora queremos ver que  $A \rightarrow B$ .

Si  $B = y$  entonces  $A \rightarrow B$

Supongamos que  $B$  es distinto a  $y$ , sea  $y'$  en  $B$  tal que  $y$  sea distinto a  $y'$ .

Como  $B$  es fuertemente conexa, existe una  $(x, x')$ -trayectoria dirigida en  $B$ .

Sea  $y' = y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow y_s = y$  dicha trayectoria en  $B$ .

Entonces,  $y_{s-1}$  y  $x$  están en la invecindad de  $y$ .

Como  $N^-(y)$  es semicompleta, pasa que  $x \rightarrow y_{s-1}$  o  $y_{s-1} \rightarrow x$ .

Si  $y_{s-1} \rightarrow x$  entonces  $D(A \cup B)$  sería fuertemente conexa, y ésto es una contradicción. Por

CAPÍTULO 2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS DIGRÁFICAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

tanto  $x \rightarrow y_{s-1}$ , argumentando de esta manera, obtenemos que:  $x \rightarrow y_{s-2}, \dots, x \rightarrow y'$ .

Como  $y'$  es arbitrario, entonces tenemos que para todo  $y$  en  $B$ ,  $x \rightarrow y$ .

Así, para todo  $x$  en  $A$  y para todo  $y$  en  $B$ ,  $x \rightarrow y$  y, por lo tanto,  $A \rightarrow B$ . La prueba se ilustra en la Figura 2.1.

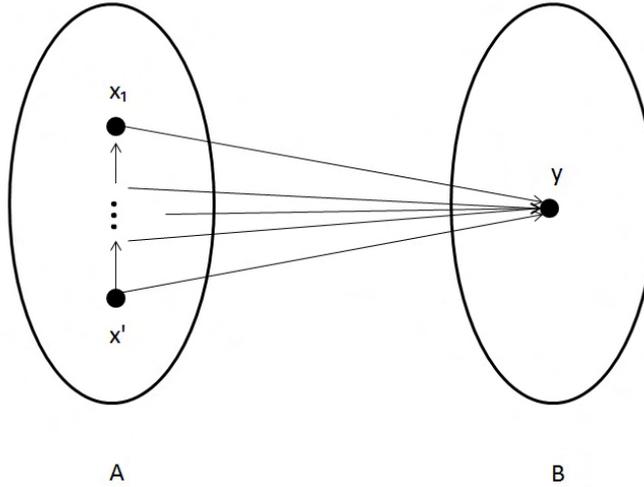


Figura 2.1:

- (b) Sean  $A$  y  $B$  componentes fuertemente conexas de  $D$ , tales que  $A \rightarrow B$ . Consideremos  $D(A)$  la subdigráfica inducida por  $A$ . Sean  $w_1, w_2$  dos vértices en  $D(A)$ . Como  $B$  es distinto del vacío, existe  $y$  en  $B$

Notemos que  $w_1, w_2$  están en la invecindad de  $y$ , entonces,  $w_1 \rightarrow w_2$  o  $w_2 \rightarrow w_1$ , puesto que  $D(N^-(y))$  es semicompleta entonces,  $w_1 \rightarrow w_2$  o  $w_2 \rightarrow w_1$  en  $A$ .

Como  $w_1, w_2$  son arbitrarios, se sigue que  $A$  es semicompleta. Para  $B$  el razonamiento es similar. ■

**Teorema 2.7.** Si  $D$  es una digráfica localmente semicompleta, conexa, pero no fuertemente conexas, entonces  $D^*$  es una digráfica localmente semicompleta conexa.

**Demostración.**

Por el teorema 1.4 sabemos que  $D^*$  es conexa. De esta manera, sólo falta demostrar que  $D^*$  sea localmente semicompleta.

Sea  $K \in V(D^*)$  y consideremos  $N_{D^*}^+(K)$ . Si  $|N_{D^*}^+(K)| \leq 1$ , entonces  $D^*$  es localmente semicompleta.

Supongamos que  $|N_{D^*}^+(K)| \geq 2$ . Sean  $\{L, L'\} \subseteq N_{D^*}^+(K)$ , entonces  $KL, KL' \in F(D^*)$ . Entonces, existen  $x, x' \in K, y \in L, y' \in L'$  tales que  $x \rightarrow y \in F(D)$  y  $x' \rightarrow y' \in F(D)$ .

Así, por el teorema 2.6 a),  $D$  es localmente semicompleta. Entonces,  $K \rightarrow L$  y  $K \rightarrow L'$ . Entonces  $x \rightarrow y \in F(D)$  y  $x' \rightarrow y' \in F(D)$ . De esta manera,  $y, y' \in N_D^+(K)$  y así,  $y, y'$  son adyacentes en  $D$ . Esto implica que  $L, L'$  sean adyacentes en  $D^*$ .

Como  $L, L'$  son arbitrarios,  $N_{D^*}^+(K)$  es semicompleta. (De manera análoga para  $N_{D^*}^-(K)$ ). Como  $K$  es arbitrario,  $D^*$  es localmente semicompleta. ■

**Teorema 2.8.** *Si  $D$  es una digráfica localmente semicompleta conexa, pero no fuertemente conexa y  $D^*$  su condensación, entonces,  $D^*$  tiene una única fuente y un único pozo.*

**Demostación.**

Sólo demostraremos el caso en el que tenemos un único pozo, el caso para una única fuente se deduce del caso para el pozo aplicado a  $\overleftarrow{D}$ . Probemos primero la existencia de pozos.

Supongamos que  $D^*$  no tiene pozos. Entonces,  $d_{D^*}^+(K) \geq 1$  para todo  $K$  en  $V(D^*)$  y entonces, por teorema 1.2  $D^*$  tiene un ciclo dirigido. Esto es una contradicción, pues  $D^*$  es acíclica. Por lo tanto, existen pozos.

Probemos ahora la unicidad. Supongamos que  $D^*$  tiene al menos dos pozos. Sean estos  $K$  y  $K'$  tales que  $K$  y  $K'$  son distintos. Entonces  $\{K, K'\} \subseteq V(D)$ , entonces existe una trayectoria de longitud mínima en  $D^*$ , que une a  $K$  y  $K'$ . Sea ésta:  $K = K_1, K_2, \dots, K_r = K'$ . Como  $K$  y  $K'$  son pozos, dicha trayectoria no es dirigida, por lo tanto, la trayectoria mencionada es una semitrayectoria no dirigida en  $D^*$ .

De manera similar al teorema 1.4 esta semitrayectoria en  $D^*$  a una semitrayectoria en  $D$ . Supongamos que esta es:  $x_1, x_2, \dots, x_s, s \geq r$ .

Aún más, en virtud del teorema 2.6 a) podemos construir un *levantamiento* de  $K_1, K_2, \dots, K_r$  de la forma  $x_1, x_2, \dots, x_r$  con  $x_i \in K_i$  para  $i = 1, \dots, r$ .

Como  $x_1, x_2, \dots, x_r$  es una semitrayectoria no dirigida en  $D$  y  $D$  es localmente semicompleta, se sigue que posee al menos una diagonal, por el teorema 1.7.

Sea esta diagonal  $x_i \rightarrow x_j \in F(D)$  con  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  y  $|i - j| \geq 2$ . Luego,  $K_i \rightarrow K_j \in F(D^*)$  y por lo tanto  $K_1, \dots, K_{\min\{i,j\}}, K_{\max\{i,j\}}, \dots, K_r$  es una semitrayectoria de longitud menor que  $r$ , lo cual contradice el hecho de que la trayectoria  $K_1, K_2, \dots, K_r$  sea mínima.

Por lo tanto,  $D^*$  tiene un único pozo. ■

**Teorema 2.9.** *Si  $D$  es una digráfica localmente semicompleta conexa, pero no fuertemente conexa, entonces, las componentes fuertemente conexas de  $D$  pueden ser ordenadas de manera*

CAPÍTULO 2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS DIGRÁFICAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

única  $K_1, K_2, \dots, K_r$  tal que no existan flechas de  $K_j$  a  $K_i$  para  $j > i$  y  $K_i$  domina a  $K_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, r-1$ .

**Demostración.**

Como  $D$  no es fuertemente conexa entonces, tenemos al menos dos componentes fuertemente conexas. Por inducción sobre  $|V(D^*)|$ .

Si  $|V(D^*)| = 2$ , entonces  $D^*$  es una digráfica conexa en dos vértices sin 2-ciclos. Entonces  $D^*$  es una trayectoria de longitud dos  $K_1 \rightarrow K_2$  (si  $K_2 \rightarrow K_1$  renombramos las componentes). De donde se sigue toda la afirmación.

Supongamos que la afirmación es válida para  $|V(D^*)| = r-1$ , donde  $r > 2$ . Sabemos que  $D^*$  tiene un único pozo, por el teorema 2.8. Al remover de  $D$  los vértices de esta componente, obtenemos una digráfica  $D'$ .

Así:  $D'^* = D^* - \text{pozo}$ ,  $|V(D'^*)| = r-1$ . Además  $D'$  es localmente semicompleta, conexa, pero no fuertemente conexa, por hipótesis de inducción. Las componentes fuertemente conexas de  $D$  pueden numerarse como  $K_1, \dots, K_{r-1}$  de forma tal que:

- i) No hay flechas de  $K_j$  a  $K_i$  si  $j > i$ ,  $1 \leq i, j \leq r-1$ .
- ii)  $K_i \rightarrow K_{i+1}$  para toda  $i = 1, 2, \dots, r-2$ .

Así, las componentes fuertemente conexas de  $D$ , son  $K_1, \dots, K_{r-1}$  y al pozo que removimos llamémosle  $K_r$ .

Como  $K_r$  es un pozo de  $D^*$ , se sigue que  $K_r$  no tiene flechas hacia  $K_1, \dots, K_{r-1}$ . Entonces  $K_j$  no tiene flechas hacia  $K_i$  si  $j > i$ , para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Luego, tan sólo falta demostrar que  $K_{r-1} \rightarrow K_r$ . Como  $D^*$  es conexa, esta  $K_r$  es adyacente a algún  $K_i$  con  $i = 1, \dots, r-1$ . Tomemos  $i$  como el máximo.

Pero como  $K_r$  es un pozo de  $D^*$ , se sigue que  $K_i \rightarrow K_r \in F(D)$  si  $i = r-1$  ya terminamos.

si  $i < r-1$ , entonces  $i+1 \leq r-1$  y por lo tanto,  $K_{i+1}$  y  $K_r$  son exvecinos de  $K_i$ . Entonces  $K_{i+1}$  y  $K_1$  son adyacentes ( $D^*$  es localmente semicompleta). Pero el hecho de que  $K_{i+1}$  y  $K_i$  sean adyacentes es una contradicción, pues  $i$  era máximo.

Por lo tanto  $i = r-1$  y  $K_{r-1} \rightarrow K_r$ . ■

**Corolario 2.2.** Sean  $D$  una digráfica localmente semicompleta conexa, pero no fuertemente conexa, y  $D_1, D_2, \dots, D_p$  las componentes fuertemente conexas de  $D$  etiquetadas según el teorema 2.9.

Entonces existe un torneo local  $R$ , tal que  $D$  tiene una descomposición circular  $D = R[D_1, D_2, \dots, D_p]$ .

Más aún, esta descomposición es única.

**Demostración.**

Sean  $D_1, D_2, \dots, D_p$  componentes fuertemente conexas de  $D$  que satisfacen :  $D_i \rightarrow D_{i+1}$  y  $D_j \not\rightarrow D_i$  si  $j > i$ .

Es decir, se satisfacen los incisos (a) y (b) del teorema 2.6.

Sea  $R$  tal que  $V(R) = \{D_1, D_2, \dots, D_p\}$  y  $F(R) = \{D_i D_j : D_i \rightarrow D_j\}$ .

Así:

- $R$  es digráfica.
  
- $R$  no contiene 2-ciclos, pues si  $D_i D_j \in F(R)$  entonces,  $D_i \rightarrow D_j$  y si  $i < j$ ,  $D_j \not\rightarrow D_i$ , esto implica que  $D_j D_i \notin F(R)$ .
  
- $R$  es localmente semicompleta. Sean  $D_i \in V(R)$ ,  $\{D_{j_1}, D_{j_2}\} \subseteq N^+(D_i)$ . Sean  $v \in V(D_i)$  y  $w_k \in V(D_{j_k})$ ,  $k = 1, 2$ .  
 Por tanto, como  $D_i D_{j_k} \in F(R)$  entonces  $D_i \rightarrow D_{j_k}$ , entonces  $v \rightarrow w_k$  y por lo tanto,  $\{w_1, w_2\} \subseteq N^+(v)$ , en consecuencia,  $w_1$  y  $w_2$  son adyacentes y por el teorema 2.6 (a) ,  $D_{j_1} \rightarrow D_{j_2}$  o  $D_{j_2} \rightarrow D_{j_1}$ .  
 En cualquier caso,  $D_{j_1}$  y  $D_{j_2}$  son adyacentes en  $R$ .  
 Como  $D_{j_1}$  y  $D_{j_2}$  son arbitrarios,  $N^+(D_i)$  es semicompleta. Similarmente para  $N^-(D_i)$ .
  
- $R$  es circular. Consideremos  $N^+(D_i)$ .  
 Si  $N^+(D_i) = \emptyset$  no hay nada que demostrar.  
 Supongamos que  $N^+(D_i)$  es distinta del vacío.  
 Sea  $j = \max\{j \in [i+1, n] : D_i \rightarrow D_j \text{ si y sólo si } (D_i D_j \in F(R))\}$  con  $i < j$  porque  $D_j \not\rightarrow D_i$  si  $j > i$ .  
 Afirmamos que  $N_R^+(D_i) = \{D_{i+1}, \dots, D_j\}$ .  
 Claramente,  $\{D_{i+1}, D_j\} \subseteq N_R^+(D_i)$ .  
 Así:  $D_i \rightarrow D_j$  y  $D_{j-1} \rightarrow D_j$ .  
 Por lo tanto,  $\{D_i, D_{j-1}\} \subseteq N_R^-(D_j)$ .  
 Como  $R$  es semicompleta,  $D_i$  y  $D_{j-1}$  son adyacentes.  $D_i \rightarrow D_{j-1}$  o  $D_{j-1} \rightarrow D_i$ , pero  $i < j$  y esto implica que  $i \leq j-1$ .  
 Si  $i = j-1$ , entonces  $N_R^+(D_i) = \{D_{i+1}\}$  el cual es un etiquetado circular.  
 Si  $i < j-1$ , entonces  $D_j \not\rightarrow D_i$ , por tanto,  $D_i \rightarrow D_{j-1}$  y así,  $D_{j-1} \in N^+(D_i)$ . Continuando de esta forma, obtenemos que  $N_R^+(D_i) = \{D_{i+1}, \dots, D_j\}$  y  $d_R^+(D_i) = j-1$ .  
 Similarmente para  $N^-(D_i)$ .  
 Por lo tanto,  $R$  es circular.

Ahora probemos que  $R$  es único. Si  $R[D_1, D_2, \dots, D_p] = R'[D_1, D_2, \dots, D_p]$ , entonces condensamos y obtenemos que  $R = R'$ . ■

CAPÍTULO 2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS DIGRÁFICAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

**Teorema 2.10.** *Sean  $D$  una digráfica localmente semicompleta conexa, pero no fuertemente conexa y  $D_1, D_2, \dots, D_p$  la ordenación acíclica de sus componentes fuertemente conexas. Entonces  $D$  se puede descomponer en  $r \geq 2$  subdigráficas inducidas  $D'_1, D'_2, \dots, D'_p$  tales que:*

- $D'_1 = D_p$ .
- Sea  $\lambda_1 = p$  y  $\lambda_{i+1} = \text{mín}\{j : N^+(D_j) \cap V(D'_i) \neq \emptyset\}$  con  $i = 1, \dots, r-1$ .
- $D'_{i+1} = D[V(D_{\lambda_{i+1}}) \cup V(D_{\lambda_{i+1}+1}) \cup \dots \cup V(D_{\lambda_i-1})]$  con  $i = 1, \dots, r-1$ .

Las subdigráficas  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  satisfacen las siguientes propiedades:

- (a)  $D'_i$  consiste de ciertas componentes fuertemente conexas de  $D$  y es semicompleta para cada  $i = 1, \dots, r$ .
- (b)  $D'_{i+1}$  domina a la componente inicial de  $D'_i$  y no existen flechas de  $D'_i$  a  $D'_{i+1}$  para cualquier  $i = 1, \dots, r-1$ .
- (c) Si  $r \geq 3$ , entonces no existen flechas entre  $D'_i$  y  $D'_j$ , para  $i, j$  que satisfagan  $|j-i| \geq 2$ .

Para una digráfica localmente semicompleta conexa, pero no fuertemente conexa, la sucesión única  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  definida en este teorema se llama la **descomposición semicompleta** de  $D$ . Veamos cómo funciona:

Sea  $D'_1 := D_p$ ,  $\lambda_1 = p$ .

Ahora: Como  $p-1 \in \{j \in [1, p] : N^+(D_j) \cap V(D'_1) \neq \emptyset\}$ , pues,  $D_{p-1} \rightarrow D_p = D'_1$  y  $N_{D^*}^+(D_{p-1}) = \{D_p\}$ . En la condensación de  $D$ . Por teorema 2.6 (a).

Así, existe :  $\lambda_2 := \text{mín}\{j : N^+(D_j) \cap V(D'_1) \neq \emptyset\}$ .

Sea  $D'_2 = D[V(D_{\lambda_2}) \cup \dots \cup V(D_{\lambda_1-1})]$ .

Si  $\lambda_2 = 1$ , entonces no hay nada que demostrar.

Si  $\lambda_2 \neq 1$ , entonces,  $D_{\lambda_2-1} \rightarrow D_{\lambda_2}$ .

Por lo tanto,  $D_{\lambda_2} \subseteq N^+(D_{\lambda_{i+1}-1}) \cap V(D'_2) \neq \emptyset$  para  $i = 1$ , entonces,

$\{j \in [1, \lambda_2 - 1] : N^+(D_j) \cap V(D'_2) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ .

Así, existe :  $\lambda_3 := \text{mín}\{j : N^+(D_j) \cap V(D'_2) \neq \emptyset\}$ .

Sea  $D'_3 = D[V(D_{\lambda_3}) \cup \dots \cup V(D_{\lambda_2-1})]$ .

Si  $\lambda_3 = 1$ , entonces no hay nada que demostrar.

Si  $\lambda_3 \neq 1$ , entonces,  $D_{\lambda_3-1} \rightarrow D_{\lambda_3}$ .

Por lo tanto,  $D_{\lambda_3} \subseteq N^+(D_{\lambda_{i+1}-1}) \cap V(D'_3) \neq \emptyset$  para  $i = 2$ , entonces,

$\{j \in [1, \lambda_3 - 1] : N^+(D_j) \cap V(D'_3) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ . Existe  $D_{\lambda_3-1}$ . En general, dado  $\lambda_i \neq 1$ , definimos:

$\lambda_{i+1} = \text{mín}\{j : N^+(D_j) \cap V(D'_i) \neq \emptyset\}$  y

$D'_{i+1} = D[V(D_{\lambda_{i+1}}) \cup V(D_{\lambda_{i+1}+1}) \cup \dots \cup V(D_{\lambda_i-1})]$ .

El procedimiento se ilustra en la Figura 2.2.

**Demostración.**

(a) La afirmación es clara, por construcción.

(b) La componente inicial de  $D'_i$  es  $D_{\lambda_i}$  (Por la forma del ordenamiento acíclico de las componentes fuertemente conexas y por construcción).

Sea  $D_j$  componente de  $D'_{i+1}$ , es decir,  $\lambda_{i+1} \leq j \leq \lambda_i - 1$ , entonces:  $D_{\lambda_{i+1}}$  es tal que  $N^+(D_{\lambda_{i+1}}) \cap V(D'_i) \neq \emptyset$ .

Sea  $w \in N^+(D_{\lambda_{i+1}}) \cap V(D'_i)$ , entonces,  $w \in D_s$ ,  $D_s$  componente de  $D'_i$ , con  $\lambda_i \leq s \leq \lambda_{i-1} - 1$ . Así,  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_s$ , puesto que el conjunto de flechas de  $D_{\lambda_{i+1}}$  a  $D_s$  es no vacío. (Por teorema 2.6 (a)).

Si  $\lambda_i = s$ , entonces  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_{\lambda_i}$ .

Si  $\lambda_i \neq s$ , entonces  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_s \leftarrow D_{s-1}$  y  $\lambda_{i+1} \neq s - 1$ , (pues si  $\lambda_{i+1} = s - 1$ , entonces  $\lambda_i = s$ ).

Así,  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_{s-1}$  o  $D_{s-1} \rightarrow D_{\lambda_{i+1}}$ .

Como  $\lambda_i - 1 \leq s - 1 \leq \lambda_{i-1} - 2$  y  $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i - 1$  Esto implica que  $\lambda_{i+1} < s - 1$ , y por tanto  $D_{s-1} \rightarrow D_{\lambda_{i+1}}$ . (Por teorema 2.6 (a).)

En consecuencia,  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_{s-1}$ . Continuando de esta manera, obtenemos  $D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_{\lambda_i}$ .

Si  $j = \lambda_{i+1}$ , entonces  $D_j \rightarrow D_{\lambda_i}$ .

Si  $j \neq \lambda_{i+1}$ , entonces  $D_{\lambda_i} \leftarrow D_{\lambda_{i+1}} \rightarrow D_{\lambda_{i+1}+1}$  y  $\lambda_i \neq \lambda_{i+1} + 1$ , entonces  $D_{\lambda_i} \rightarrow D_{\lambda_{i+1}+1}$  o  $D_{\lambda_{i+1}+1} \rightarrow D_{\lambda_i}$ , pero  $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i - 1$  y esto implica que  $\lambda_{i+1} + 1 \leq \lambda_i$  y de esta manera obtenemos que  $D_{\lambda_i} \rightarrow D_{\lambda_{i+1}+1}$ .

En consecuencia,  $D_{\lambda_{i+1}+1} \rightarrow D_{\lambda_i}$ . Continuando de esta forma, obtenemos  $D_j \rightarrow D_{\lambda_i}$ .

Como  $j$  es arbitrario y tal que  $D_j \rightarrow D_{\lambda_i}$  para toda  $\lambda_{i+1} \leq j \leq \lambda_i - 1$  tenemos que  $D'_{i+1} \rightarrow D_{\lambda_i}$ . (Obsérvese que  $D_{\lambda_i}$  es la componente inicial de  $D'_i$ ).

(c) Probemos esta afirmación por contradicción.

Sean  $D'_i$  y  $D'_j$  con  $|i - j| \geq 2$  y supongamos que hay flechas entre ellas.

Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $i < j$ , de esta forma,  $|i - j| = j - 1 \geq 2$ . Afirmamos que no hay flechas de  $D'_i$  a  $D'_j$ .

Supongamos que si las hay. Entonces hay una flecha entre  $D_s$ , componente de  $D'_i$ , y  $D_t$ , componente de  $D'_j$ . Tales que  $\lambda_i \leq s \leq \lambda_{i-1} - 1$  y  $\lambda_j \leq t \leq \lambda_{j-1} - 1$ , respectivamente.

Pero como  $i < j$ ,  $\lambda_j < \lambda_i$ , entonces  $t < s$  y esto quiere decir que hay flechas de  $D_s$  a  $D_t$ , pero esto es una contradicción.

Luego, no hay flechas de  $D'_i$  a  $D'_j$ .

Supongamos que  $D_s$  es componente de  $D'_j$ , tal que  $D_s$  tiene flechas a  $D'_i$ .

Entonces  $s \in \{j : N^+(D_j) \cap V(D'_i) \neq \emptyset\}$ .

Entonces  $\lambda_{i+1} \leq s \leq \lambda_i - 1$ . Así,  $D_s$  es componente de  $D'_{i+1}$ .

En consecuencia,  $D'_j = D'_{i+1}$  y por tanto  $j = i + 1$ . Lo cual contradice la hipótesis. ■

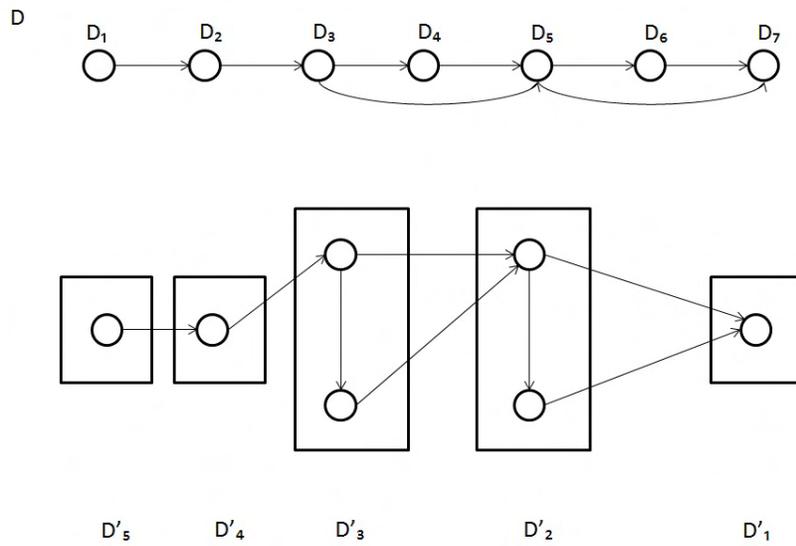


Figura 2.2: Descomposición semicompleta de  $D$ .

## 3. Caracterización de las digráficas N.I.C. localmente semicompletas.

En este capítulo, se introduce el concepto de núcleo en una digráfica, y se estudian cuidadosamente condiciones suficientes para la existencia de núcleos en ciertas clases de digráficas; por ejemplo, las semicompletas, acíclicas, transitivas y finalmente, se obtiene una caracterización de las digráficas núcleo imperfectas críticas localmente semicompletas.

### 3.1. Núcleos y seminúcleos.

Decimos que  $uv \in F(D)$  es una flecha **asimétrica** si  $vu \notin F(D)$ . De manera análoga, decimos que  $uv \in F(D)$  es una flecha **simétrica** si  $vu \in F(D)$ .

$Asym(D)$  es la subdigráfica generada por las flechas asimétricas y todos los vértices de  $D$ . De manera análoga,  $Sym(D)$  es la subdigráfica generada por las flechas simétricas y todos los vértices de  $D$ .

Sea  $D$  una digráfica. Un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  es **independiente** si para cualesquiera dos vértices  $u, v$ , de  $S$ ,  $uv \notin F(D)$  y  $vu \notin F(D)$ .

Sea  $D$  una digráfica. Un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  es **absorbente** si para cada vértice  $v$  que no está en  $S$ , existe una  $vS$  flecha.

Un **Núcleo** (kernel)  $N$  de una digráfica  $D$  es un conjunto independiente y absorbente de  $D$ . Por ejemplo, como se ilustra en la Figura 3.1.

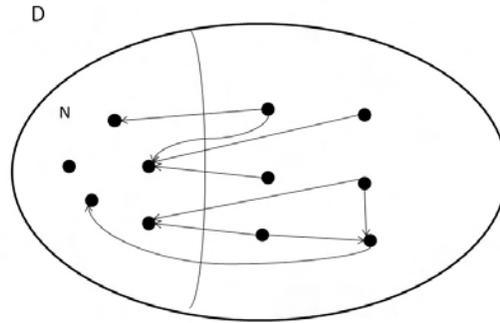


Figura 3.1: Núcleo  $K$  de  $D$ .

**Definición 3.1.** Sea  $D$  una digráfica tal que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene un núcleo; entonces diremos que la digráfica  $D$  es una **digráfica nucleo-perfecta** y lo denotaremos como  $N.P.$ -digráfica, si dicha digráfica tiene un núcleo; y si no lo tiene, diremos que  $D$  es una **digráfica núcleo-imperfecta crítica** y lo denotaremos como  $N.I.C.$ -digráfica. Por ejemplo, en la Figura 3.2. Más adelante probaremos que la digráfica b) es  $N.I.C.$ . Diremos que una digráfica es **núcleo crítica** y lo denotaremos como  $N.C.$ -digráfica cuando no especifiquemos si dicha digráfica tiene núcleo o no, pero todas sus subdigráficas inducidas si lo poseen.

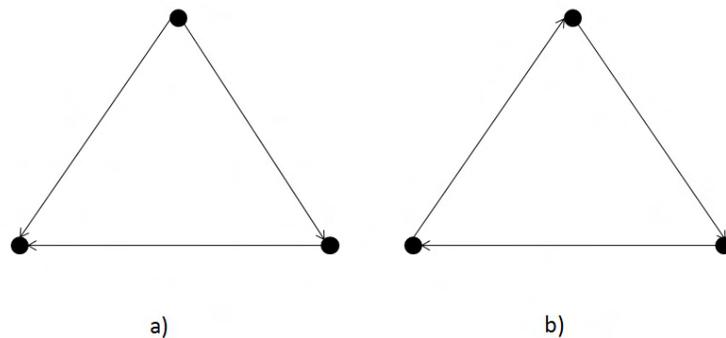


Figura 3.2: a)  $N.P.$ -digráfica. b)  $N.I.C.$ -digráfica.

**Teorema 3.1.** Si  $D$  es una  $N.I.C.$ -digráfica o una  $N.P.$ -digráfica, entonces  $D$  no tiene  $N.I.C.$ -subdigráficas inducidas propias.

**Demostración.**

Por definición de  $N.I.C.$  y de  $N.P.$  digráficas, todas las subdigráficas inducidas propias poseen núcleo; y por definición las  $N.I.C.$ -digráficas no tienen núcleo. ■

**Definición 3.2.** Sea  $D$  una digráfica, decimos que  $S$  es un **seminúcleo** de  $D$  si,  $S$  es independiente y para todo  $z \notin S$ , si existe una  $Sz$ -flecha, entonces existe una  $zS$ -flecha.

Notemos que los núcleos y los seminúcleos no son únicos, es decir, una digráfica puede tener más de un núcleo y más de un seminúcleo; como se ilustra en la Figura 3.3. También notemos que todo núcleo es seminúcleo, sin embargo, no todo seminúcleo es núcleo; lo cual se ilustra en la Figura 3.4. Finalmente, observemos que una digráfica puede tener seminúcleos sin necesariamente poseer núcleo como se ilustra en la Figura 3.5.

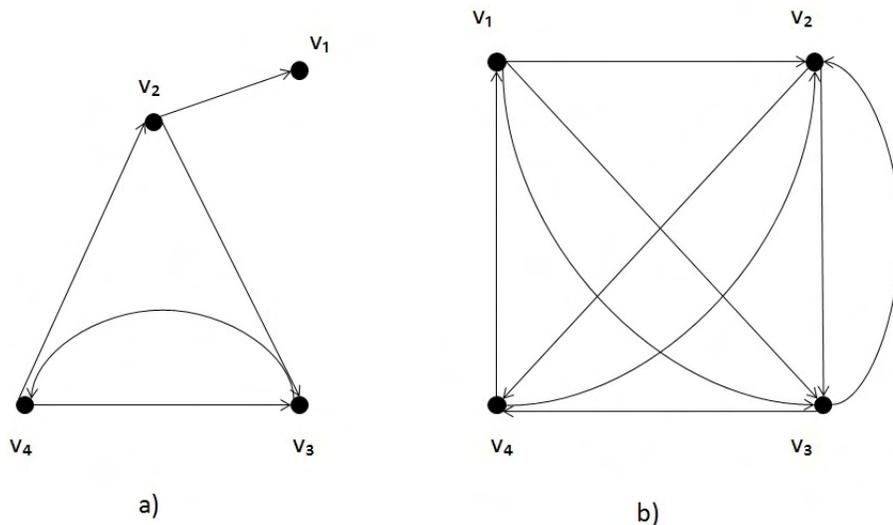


Figura 3.3: a) Digráfica con núcleo  $\{v_1, v_4\}$  y seminúcleo  $\{v_3\}$ . b) Digráfica con dos núcleos  $N_1 = \{v_2\}$  y  $N_2 = \{v_3\}$ .

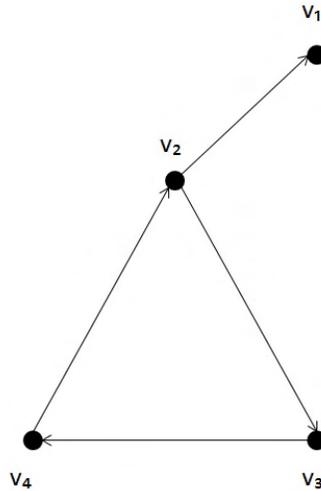


Figura 3.4: El vértice  $v_1$  es un seminúcleo de la digráfica, pero no es un núcleo de ésta.

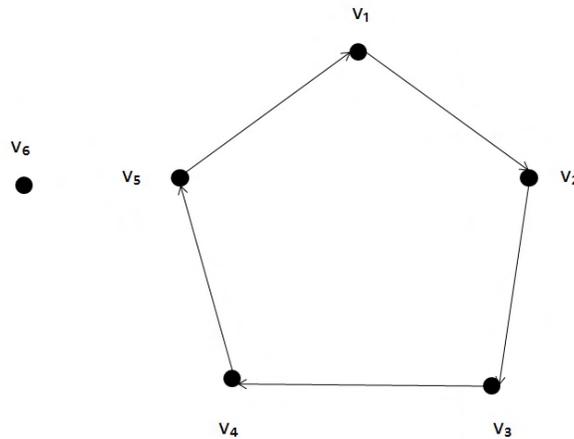


Figura 3.5: El vértice  $v_6$  es un seminúcleo de la digráfica, sin embargo dicha digráfica no posee núcleo.

Una digráfica semicompleta es un **torneo** si  $D = \text{Asym}(D)$ . Una digráfica **acíclica** es aquella que no tiene ciclos dirigidos. Un vértice  $v \in V(D)$  **absorbe** al conjunto de vértices  $S \subset V(D)$  si  $sv \in F(D)$  para todo  $s \in S$ . Un **ordenamiento absorbente** de un conjunto de vértices  $V(D)$  es una sucesión  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , donde  $|V(D)| = n$ ,  $u_1$  es un pozo de  $D$  y  $u_i$  es un pozo de  $D - \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\}$  para todo  $1 < i < n$ . Un torneo con un ordenamiento absorbente es un torneo transitivo y en este caso, dicho ordenamiento es único, pero no necesariamente lo es para una digráfica semicompleta.

Una digráfica **circulante**  $\vec{C}_m(J)$  se define como  $V(\vec{C}_m(J)) = \mathbb{Z}_m$ , donde  $\mathbb{Z}_m$  es el grupo cíclico de enteros módulo  $m$ , ( $m \geq 1$ ) y  $J$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ ,  $F(\vec{C}_m(J)) = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_m, j - i \in J\}$ .

Recordemos que las digráficas circulantes son regulares y son vértice- transitivas, es decir, que para

cualesquiera  $u, v \in V(D)$ , existe un automorfismo  $f$  de  $D$  tal que  $f(u) = v$ .

**Teorema 3.2.** *Si  $D$  es una digráfica acíclica, entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Demostración.**

Por inducción sobre  $|V(D)|$ .

Si  $|V(D)| = 2$ , entonces  $D$  tiene núcleo. Si  $D$  es acíclica, entonces  $D$  tiene al menos un vértice de exgrado cero, es decir, tiene al menos un pozo. Sea  $v$  un pozo de  $D$ . Sea  $U = \{u \in V(D) : u \rightarrow v\}$ . Si  $U = D - \{v\}$ , entonces  $\{v\}$  es núcleo de  $D$  y hemos terminado, así que podemos suponer que  $V(D) - (U \cup \{v\}) \neq \emptyset$  y sea  $D' = D - (U \cup \{v\})$ . Por hipótesis de inducción, tiene núcleo, digamos,  $S'$ . Afirmamos que  $S = S' \cup \{v\}$  es núcleo de  $D$ . Veamos que es independiente. Sean  $\{w_1, w_2\} \subseteq S$  tales que  $w_1 \neq v$  y  $v \neq w_2$ , entonces  $\{w_1, w_2\} \subseteq S'$ , el cual es independiente, por ser núcleo, y por lo tanto  $w_1$  no es adyacente a  $w_2$ . Sean  $w_1, w_2 \in S$  tales que  $w_1 = v$ , pero  $v \neq w_2$ , entonces  $w_2 \in S'$ , entonces  $w_2 \notin N^-(v)$  y  $v = w_1$ , por lo tanto son independientes y análogamente para el caso en que  $w_1, w_2 \in S$  tales que  $w_2 = v$ , pero  $v \neq w_1$ . Veamos que es absorbente. Sea  $w$  tal que  $w \notin S$  entonces  $w \in N^-(v)$  o  $w \notin N^-(v)$ , en el primer caso,  $w$  es absorbido por  $v$  y en el segundo  $w \in D'$  y por lo tanto, es absorbido por  $S'$  ■

**Observación 3.1.** *Si  $D$  es una N.P.-digráfica semicompleta, entonces también lo son sus subdigráficas inducidas.*

**Observación 3.2.** *Si  $D$  es una N.P.-digráfica semicompleta, entonces los conjuntos independientes de  $D$  son formados por un único vértice.*

**Observación 3.3.**  $\vec{C}_3$  es N.I.C..

**Demostración.**

Veamos que  $\vec{C}_3$  no tiene núcleo.

Para esto, consideremos los únicos subconjuntos independientes que tiene  $\vec{C}_3$ , estos son los formados por un vértice.

Claramente, ninguno de ellos es absorbente. Por tanto,  $\vec{C}_3$  no tiene núcleo.

Falta ver que todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.

Notemos que las subdigráficas inducidas de  $\vec{C}_3$  son sólo vértices y trayectorias. En el caso en el que las subdigráficas sean sólo vértices, cada uno es un núcleo.

En el caso en el que las subdigráficas sean trayectorias, cada una de ellas contiene un núcleo, que es un vértice.

Por lo tanto,  $\vec{C}_3$  no tiene núcleo pero todas sus subdigráficas inducidas lo tienen.

En consecuencia,  $\vec{C}_3$  es N.I.C.. ■

**Observación 3.4.**  $\vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  es N.I.C..

**Demostración.**

Probaremos primero que  $D$  no tiene núcleo.

Supongamos que  $D$  tiene núcleo y ya que  $D$  es semicompleta; éste debería ser sólo un vértice y dicho vértice debe absorber a todos los demás, sin embargo, en  $D$ , de cada vértice sale una flecha asimétrica. Por ejemplo, si el vértice es  $u$  y  $uv$  es la flecha asimétrica que sale de  $u$ , entonces  $v$  no puede ser absorbido por  $u$ . Por lo tanto  $D$  no tiene núcleo.

Ahora probaremos que toda subdigráfica inducida propia de  $D$ , digamos  $H$ , tiene núcleo.

Notemos que  $D$  es semicompleta y  $Asym(D)$  es un ciclo dirigido.

En consecuencia, para cualquier subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ ,  $Asym(H)$  tiene vértices de ex-grado cero. Sea  $x_0 \in V(H)$  tal que  $d_{Asym(H)}^+(x_0) = 0$ .

Por lo tanto, toda flecha que sale de  $x_0$  en  $H$  es simétrica y como  $H$  es semicompleta, entonces  $\{x_0\}$  es núcleo de  $H$ . ■

**Observación 3.5.** *Supongamos que  $S$  es un seminúcleo en  $D$  y sea  $D'$  la digráfica inducida en  $D$  por  $S \cup N_D^-(S)$ , entonces  $S$  es un núcleo de  $D'$*

**Demostración.**

Como  $S$  es un seminúcleo en  $D$ ,  $S$  es independiente en  $D$  y también lo es en  $D'$ . Veamos que  $S$  es absorbente en  $D'$ . Sea  $w \in V(D')$  y  $w \notin S$ , entonces  $w \in S \cup N_D^-(S)$  y así,  $w \in N_D^-(S)$ . Por lo tanto,  $S$  es núcleo de  $D'$ . ■

**Teorema 3.3.** *Sea  $D$  una digráfica. Si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo distinto del vacío, entonces  $D$  tiene núcleo. Más aún,  $D$  es N.P.-digráfica.*

**Demostración.**

Probemos el teorema por inducción sobre  $|V(D)|$ .

Si  $|V(D)| = 1$ , es trivialmente cierto.

Supongamos cierto para  $|V(D)| < n$  y demostremos para  $|V(D)| = n$ .

Sea  $D$  una digráfica con  $n$  vértices tal que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío.

Sea  $D'$  una subdigráfica inducida de  $D$ .

Si  $D' \subsetneq D$ , entonces  $|V(D')| < n$  y toda subdigráfica inducida de  $D'$  tiene un seminúcleo no vacío.

Por la hipótesis de inducción,  $D'$  es N.P., en particular  $D'$  tiene núcleo.

Por lo tanto, sólo falta demostrar que  $D$  tiene núcleo.

Como  $D = D[V(D)]$ , entonces  $D$  tiene un seminúcleo no vacío, digamos  $S$  y sea  $D' = D[S \cup N_D^-(S)]$ , entonces  $S$  es núcleo de  $D'$ .

Si  $D' = D$  no hay nada que demostrar.

Asumamos que  $D' \subsetneq D$ , entonces  $S \cup N_D^-(S) \subsetneq V(D)$ .

Sea  $U = V(D) \setminus S \cup N_D^-(S)$ . Como  $D'' = D[U] \subsetneq D$ , entonces  $D''$  tiene núcleo;  $D''$  es N.P..

Sea  $T$  un núcleo de  $D''$ .

Afirmamos que  $S \cup T$  es núcleo de  $D$ .

Como  $S$  y  $T$  son independientes, para que  $S \cup T$  sea independiente sólo debemos ver que no hay  $ST$ -flechas ni  $TS$ -flechas.

Sean  $s \in S$  y  $t \in T$ ; si existe  $s \rightarrow t$  o  $t \rightarrow s$ , entonces  $t \in N_D^-(S)$ , por ser  $S$  seminúcleo de  $D$ , entonces  $t \notin U$ , lo cual es una contradicción, pues  $T \subseteq U = D''$ .

Así,  $S \cup T$  es independiente. Veamos que es absorbente. Sea  $w \in V(D)$  pero  $w \notin S \cup T$ . Si  $w \in D'$ , entonces existe una  $wS$ -flecha y esto implica que existe una  $w(S \cup T)$ -flecha. Si  $w \notin N_D^-(S)$ , entonces  $w \in U$  y  $w \notin T$ , entonces  $w \in D''$  y  $w \notin T$ , entonces existe una  $wT$ -flecha y esto implica que existe una  $w(S \cup T)$ -flecha. Así,  $S \cup T$  es absorbente y por lo tanto es un núcleo de  $D$ . ■

**Corolario 3.1.** *Si  $D$  es una N.I.C.-digráfica, entonces  $D$  no tiene seminúcleos no vacíos.*

**Demostración.**

Si los tuviese entonces toda subdigráfica inducida tendría un seminúcleo, entonces por teorema 3.3  $D$  sería N.P.. lo cual es una contradicción. ■

**Corolario 3.2.**  *$D$  es una N.P.-digráfica si y sólo si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleos no vacíos.*

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Supongamos que  $D$  es una N.P.-digráfica. Entonces  $D$  tiene núcleo así como todas sus subdigráficas inducidas y por el hecho de que todo núcleo es seminúcleo, toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleos no vacíos.

[ $\impliedby$ ] Supongamos que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío. Sea  $D'$  subdigráfica inducida de  $D$ . Afirmamos que  $D'$  tiene núcleo. Toda subdigráfica inducida de  $D'$  tiene seminúcleo no vacío y por el teorema 3.3  $D'$  tiene núcleo. ■

**Teorema 3.4.** *Si  $D$  no es N.P.-digráfica entonces  $D$  contiene una N.I.C.-digráfica inducida.*

**Demostración.**

Si toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo, entonces  $D$  no tiene núcleo pues  $D$  no es N.P.-digráfica, entonces  $D$  es N.I.C.. Si hay alguna subdigráfica inducida propia de  $D$  que no tiene núcleo, ordenamos todas las digráficas inducidas por vértices por contención con los vértices etiquetados, es decir,  $D[U] \preceq D[U']$  si y sólo si  $U \subseteq U'$ . De todas las subdigráficas inducidas, tomemos una mínima con la propiedad de que no tiene núcleo, sea esta  $D' = D[U]$ . Entonces  $D'$  no tiene núcleo y por ser mínima con respecto a no tener núcleo todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo. Así,  $D'$  es N.I.C.. ■

**Teorema 3.5.** *Si  $D$  es una N.I.C.-digráfica, entonces  $Asym(D)$  es fuertemente conexas.*

**Demostración.**

CAPÍTULO 3. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

---

Supongamos que  $Asym(D)$  no es fuertemente conexa.

Entonces  $(Asym(D))^*$ , la condensación de  $Asym(D)$ , es acíclica (por el corolario 1.1). Así, existe un vértice de  $(Asym(D))^*$  con exgrado cero.

Sea  $V_1 \subsetneq V(D)$  una componente fuertemente conexa de  $D$  tal que  $Asym(D[V_1])$  es un pozo de  $(Asym(D))^*$ .

Como  $D' = D[V_1] \subsetneq D$ , entonces, como  $D$  es N.I.C.,  $D'$  tiene un núcleo, digamos  $N$ , núcleo de  $D' = D[V_1]$ . Afirmamos que  $N$  es seminúcleo de  $D$ .

Como  $N$  es núcleo de  $D'$  entonces  $N$  es inducido en  $D' = D[V_1]$  y  $N$  es independiente en  $D$ .

Sea  $z \in V(D)$  con  $z \notin N$  y supongamos que existe una  $Nz$ -flecha.

Demostremos que existe una  $zN$ -flecha.

Si  $z \in D'$  no hay nada que demostrar, pues  $N$  es núcleo de  $D'$ .

Supongamos que  $z \notin V(D')$ .

Afirmamos que  $z \notin V(Asym(D))$ .

Si  $z \in Asym(D)$ , entonces  $Asym(D[V_1])$  no sería un pozo de  $(Asym(D))^*$ . Lo cual es una contradicción. Así,  $z \notin Asym(D)$ . Luego, todas las flechas que salen de  $z$  son simétricas.

Sea  $x \in N$  tal que existe  $x \rightarrow z$ , por lo anterior, existe  $z \rightarrow x$ , es decir, existe una  $zN$ -flecha.

Por lo tanto  $N$  es un seminúcleo no vacío de  $D$ , lo cual es una contradicción al corolario 3.1. ■

**Observación 3.6.** Si  $D$  es N.I.C.-digráfica (respectivamente, si  $D$  es N.P.-digráfica), entonces,  $Asym(D)$  no tiene subdigráficas inducidas isomorfas a  $\vec{C}_3$ , cuando  $D$  tiene al menos 4 vértices.

**Demostración.**

Ya observamos que  $\vec{C}_3$  es N.I.C. y también observamos que si  $D$  es N.I.C., entonces  $D$  no contiene una subdigráfica inducida propia N.I.C.. Por lo tanto, si  $|V(D)| \geq 4$  y  $D$  es N.I.C.,  $D$  no contiene  $\vec{C}_3$  inducido en  $Asym(D)$ . Análogamente si  $D$  es N.P.. ■

**Teorema 3.6.** Sea  $D$  una digráfica semicompleta,  $D$  es N.P si y sólo si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Supongamos que  $D$  es una N.P.-digráfica.

Sea  $C = v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$  un ciclo dirigido en  $D$ .

Como  $D$  es N.P.,  $D[C]$  tiene núcleo, y por hipótesis, es semicompleta.

Entonces los núcleos tienen un sólo vértice (observación 3.2).

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $N = \{v_1\}$  es un núcleo de  $D[C]$ .

Como  $v_2 \notin N$ , existe una  $v_2N$ -flecha, es decir, existe  $v_2 \rightarrow v_1$  y por tanto obtenemos una flecha simétrica entre  $v_1$  y  $v_2$ .

[ $\impliedby$ ] Supongamos que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

Supongamos que  $D$  no es N.P., entonces  $D$  contiene una subdigráfica inducida que es N.I.C. ( por teorema 3.4), digamos  $H$ . Así,  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$  que es N.I.C. y por 3.1,  $H$  no contiene seminúcleos no vacíos.

Sea  $x_1 \in V(H)$ , así,  $S = \{x_1\}$  es independiente.

Como  $H$  no tiene seminúcleos no vacíos, existe  $x_2 \notin S$  tal que existe una  $Sx_2$ -flecha y no existe una  $x_2S$ -flecha. Como  $S = \{x_1\}$ , existe  $x_2 \neq x_1$  tal que  $x_1 \rightarrow x_2$  y  $x_2 \nrightarrow x_1$ .

Tomemos ahora,  $S = \{x_2\}$  y repitiendo el argumento anterior, existe  $x_3 \neq x_2$  tal que  $x_2 \rightarrow x_3$  y  $x_3 \nrightarrow x_2$ . Como  $x_2 \rightarrow x_3$ ,  $x_3 \neq x_1$ .

Tomemos ahora,  $S = \{x_3\}$  y repitiendo el argumento anterior, existe  $x_4 \neq x_3$  tal que  $x_3 \rightarrow x_4$  y  $x_4 \nrightarrow x_3$ .

Si  $x_4 = x_1$ ,  $C = x_1, x_2, x_3, x_1$  que sería un ciclo en  $D$  sin flechas simétricas; lo cual es una contradicción. Por tanto,  $x_4 \neq x_1$ .

Tomemos ahora,  $S = \{x_4\}$  y repitiendo el argumento anterior, existe  $x_5 \neq x_4$  tal que  $x_4 \rightarrow x_5$  y  $x_5 \nrightarrow x_4$ .

Si  $x_5 = x_1$ ,  $C = x_1, x_2, x_3, x_4, x_1$  que sería un ciclo en  $D$  sin flechas simétricas; lo cual es una contradicción.

Si  $x_5 = x_2$ ,  $C = x_2, x_3, x_4, x_1$  que sería un ciclo en  $D$  sin flechas simétricas; lo cual es una contradicción.

Además,  $x_5 \neq x_3$ , pues de lo contrario  $H$  tendría seminúcleos no vacíos.

Por tanto,  $x_5 \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

Tomemos ahora,  $S = \{x_5\}$  y repitiendo el argumento anterior, existe  $x_6 \neq x_4$  tal que  $x_5 \rightarrow x_6$  y  $x_6 \nrightarrow x_5$ .

Si  $x_6 = x_1$ ,  $C = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1$  que sería un ciclo en  $D$  sin flechas simétricas; lo cual es una contradicción.

Si  $x_6 = x_2$ ,  $C = x_2, x_3, x_4, x_5, x_1$  que sería un ciclo en  $D$  sin flechas simétricas; lo cual es una contradicción.

Si  $x_6 = x_3$ ,  $C = x_3, x_4, x_5, x_1$  que sería un ciclo en  $D$  sin flechas simétricas; lo cual es una contradicción.

Además,  $x_6 \neq x_4$ , pues de lo contrario  $H$  tendría seminúcleos no vacíos.

Por tanto,  $x_6 \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ .

Siguiendo el mismo razonamiento, el cual es finito, pues  $|V(H)|$  es finito, existe un ciclo dirigido sin flechas simétricas en  $D$ . Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $D$  es *N.P.*. ■

**Teorema 3.7.** *Si  $D$  es una digráfica semicompleta N.I.C., entonces, o bien,  $D \cong \vec{C}_3$  o bien,  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .*

### **Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica semicompleta *N.I.C.*.

Por teorema 3.6, se sigue que  $D$  tiene un ciclo asimétrico. Consideremos  $C$  un ciclo asimétrico de longitud mínima.

Si  $l(C) = 3$ , entonces  $D$  contiene a  $\vec{C}_3$  como subdigráfica inducida, (asimétrico), y por observación 3.6,  $|V(D)| = 3$  y por tanto,  $D \cong \vec{C}_3$ .

Si  $l(C) \geq 4$ , notemos que por ser  $C$  un ciclo asimétrico de longitud mínima, entonces  $D[V(C)] \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor) = H$ .

Por observación 3.4,  $H$  es *N.I.C.*, y  $H$  es subdigráfica inducida de  $D$ . Por teorema 3.1,  $D$  no contiene

subdigráficas inducidas propias N.I.C..

Por lo tanto,  $D \cong H$  y así  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ . ■

## 3.2. Digráficas localmente semicompletas y digráficas N.I.C.

**Lema 3.1.** Si  $D$  es una N.I.C.-digráfica, entonces para cualquier  $v \in V(D)$ , y un núcleo  $K_v$  de  $D - v$ , el conjunto de flechas  $(K_v, v) \neq \emptyset$  y  $(v, K_v) = \emptyset$ .

### Demostración.

Demostremos el lema por contradicción.

Supongamos que existe  $v \in V(D)$  y un núcleo en  $D - v$ , tal que  $(K_v, v) = \emptyset$  o  $(v, K_v) \neq \emptyset$ .

Si  $(v, K_v) \neq \emptyset$  entonces  $K_v$  es independiente en  $D$ . Veamos que es absorbente en  $D$ , pues sea  $w \in D - K_v$  entonces, si  $w = v$ ,  $w \rightarrow K_v$ ; si  $w \neq v$  y  $w \notin K_v$ , entonces  $w \rightarrow K_v$ , pues  $K_v$  es núcleo de  $D - v$ .

Así,  $K_v$  es un núcleo de  $D$ . Lo cual es una contradicción.

Luego,  $(v, K_v) = \emptyset$  y  $(K_v, v) = \emptyset$  y esto implica que  $v \cup \{K_v\}$  es independiente en  $D$ .

Y además,  $v \cup \{K_v\}$  es absorbente en  $D$ , pues  $K_v$  lo es, por lo tanto  $\{v\} \cup \{K_v\}$  es núcleo de  $D$ , lo cual es una contradicción y por lo tanto el conjunto de flechas  $(K_v, v) \neq \emptyset$  y  $(v, K_v) = \emptyset$ . ■

**Definición 3.3.**  $\vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$  es la digráfica dada por

$$V(\vec{C}_n) = \{1, 2, \dots, n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$F(\vec{C}_n) = \{ij : (j - i) \equiv r \pmod{n}\}$$

**Lema 3.2.** Sea  $D$  una NC-digráfica circular, fuertemente conexa con  $n$  vértices. Si  $D$  no es semicompleta, entonces  $D \cong \vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$  para alguna  $r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . En este caso,  $n \equiv 1 \pmod{r+1}$ .

### Demostración.

Sea  $v_0, v_1, \dots, v_n$  el etiquetado circular de  $V(D)$  tal que  $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+d_i^+}\}$  y  $N^-(v_i) = \{v_{i-1}, \dots, v_{i-d_i^-}\}$ .

Como  $D$  es fuertemente conexa, entonces  $d_i^+ \geq 1$ ,  $(v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$  es un ciclo hamiltoniano.

Sea  $r = d^+(v_0)$ ; demostremos que  $r = d^+(v_1)$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que  $d^+(v_0)$  es máximo entre  $d^+(v_0), \dots, d^+(v_m)$  entonces  $s = d^+(v_1) \leq d^+(v_0) = r$ .

Queremos demostrar que  $s = r$ . Procediendo por contradicción; supongamos que  $s < r$ .

Como  $D$  es NC,  $D - \{v_0\}$  tiene núcleo. Sea éste,  $K$ .

Por el lema anterior, sabemos que  $(K, v) \neq \emptyset$  y  $(v, K) = \emptyset$ , lo cual implica que  $v_1 \notin K$  pues  $v_0 \rightarrow v_1$ , así  $v_1 \rightarrow K$ .

Luego,  $v_1 \rightarrow v_j$ , con  $v_j \in K$ .

Entonces  $2 \leq j \leq s+1$ , pues  $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+d_i^+=s}\}$  y esto implica que  $2 \leq j \leq s+1 \leq r$ , pues  $s < r$ .

Entonces  $v_j \in N^+(v_0)$ ,  $N^+(v_0) = \{v_1, \dots, v_r\}$ .  $v_0 \rightarrow v_j$ ,  $v_0$  es absorbido por  $K$ .

$K$  es un núcleo de  $D$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $s = d^+(v_1) = d^+(v_0) = r$  procediendo así, obtenemos que  $\delta^+(v_i) = r \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Como  $D$  es circular, puede ser dibujada según su ordenamiento circular, es decir, con todas las flechas.

Por lo tanto,  $D \cong \vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$ .

Ahora, sea  $D = \vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$ , si  $r \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , entonces cada vértice tiene un total de  $2r > n$ -vecinos, entonces cada vértice está conectado con todos los demás, por tanto,  $\vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$  es semicompleta. Lo cual es una contradicción.

Así,  $D \cong \vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$  con  $r < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

Ahora  $D - v_0$  tiene núcleo  $K$ , y por el lema anterior,  $\{v_1, \dots, v_r\} \notin K$ .

Supongamos que  $v_{r+1} \notin K$ , entonces  $N^+(v_1) = \{v_2, \dots, v_{r+1}\}$  con  $r = d^+(v_1)$ , pero  $v_2, \dots, v_r \notin K$ , entonces si  $v_{r+1} \notin K$ ,  $v_1 \rightarrow K$  lo cual es una contradicción, pues  $K$  es absorbente. En consecuencia,  $v_{r+1} \in K$ . Supongamos que  $v_{n-1} \notin K$ , entonces  $N^+(v_{n-1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{r-1}\}$  y  $\{v_0, v_1, \dots, v_{r-1}\} \notin K$ , por tanto,  $v_{n-1} \rightarrow K$ . Lo cual es una contradicción, pues  $K$  es absorbente. En consecuencia,  $v_{n-1} \in K$ .

Como  $v_{r+1} \rightarrow v_{r+2}$ , tenemos que  $v_{r+2} \notin K$ , pues  $K$  es independiente.

$N^+(v_{r+1}) = \{v_{r+2}, \dots, v_{2r+1}\} \cap K = \emptyset$  y como  $\{v_{r+2}, \dots, v_{2r+1}\} \notin K$ ,  $v_{r+1} \in K$ ,  $N^+(v_{r+1})$  no es independiente a  $v_{r+1}$ .  $N^+(v_{r+2}) = \{v_{r+3}, \dots, v_{2r+2}\} \cap K = \emptyset$  y como  $v_{r+3}, \dots, v_{2r+1} \notin K$ ,  $v_{2r+2} \in K$ ,  $N^+(v_{r+1})$  no es independiente a  $v_{r+2}$ . Continuando con este razonamiento, obtenemos que:

$K = \{v_{r+1}, v_{2r+2} = v_{2(r+1)}, v_{3(r+1)}, \dots, v_{n-1}\}$ , entonces  $(n-1)$  es múltiplo de  $r+1$ ; por tanto  $n-1 \equiv 0 \pmod{r+1}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{r+1}$ . ■

**Observación 3.7.** *Todo ciclo impar es N.I.C..*

### Demostración.

Primero, demostraremos que los ciclos dirigidos impares no tienen núcleo:

Por reducción al absurdo, supongamos que un ciclo dirigido impar, digamos  $\vec{C}_{2n+1} = (v_1, \dots, v_{2n+1}, v_1)$  tiene núcleo  $N$ , y dada la simetría del ciclo, supongamos sin pérdida de generalidad que  $v_1 \in N$ .

Por la independencia de  $N$ ,  $v_2 \notin N$  y de la misma manera,  $v_{2n+1} \notin N$ .

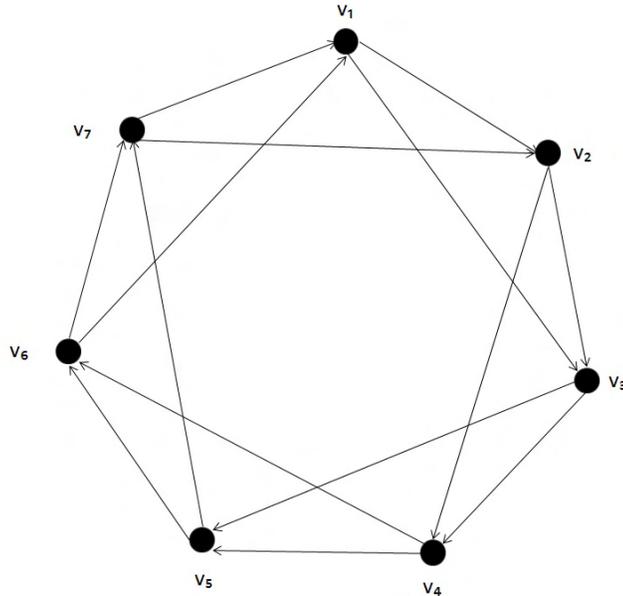
Nos preguntamos por la pertenencia de  $v_3$  a  $N$ . Como  $v_2 \notin N$ , y  $v_2$  únicamente es adyacente hacia  $v_3$ , tenemos que necesariamente  $v_3 \in N$ , ya que en otro caso no podría satisfacerse la absorbencia de  $N$ .

Nuevamente, por la independencia de  $N$ , tenemos que  $v_4 \in N$  y por la absorbencia de  $N$ ,  $v_5 \in N$ ; de esta manera tenemos que si  $m$  es impar, necesariamente tendríamos que  $v_m \in N$  y si  $m$  es par, necesariamente  $v_m \notin N$ , pero ¿qué pasa con  $v_{2n+1}$ ? por ser impar, tendríamos que  $v_{2n+1} \in N$ , pero  $(v_{2n+1}, v_1) \in F(D)$  lo que contradice la independencia de  $N$ .

De esta manera vemos que  $\vec{C}_{2n+1}$  no puede tener núcleo.

A continuación demostraremos que cualquier subgráfica inducida de  $\vec{C}_{2n+1}$  tiene núcleo: Por teorema 3.2 observemos que cualquier subgráfica inducida de  $\vec{C}_{2n+1}$  no contiene ciclos dirigidos y por lo tanto tiene núcleo. ■

**Corolario 3.3.**  $\vec{C}_7(1,2)$  es N.I.C..



**Demostración.**

Primero demostraremos que  $\vec{C}_7(1,2)$  no tiene núcleo:

Por reducción al absurdo, supongamos que  $\vec{C}_7(1,2) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$  sí tiene un núcleo,  $N$ . Dada la simetría de  $\vec{C}_7(1,2)$ , supongamos sin pérdida de generalidad, que  $v_1 \in N$ .

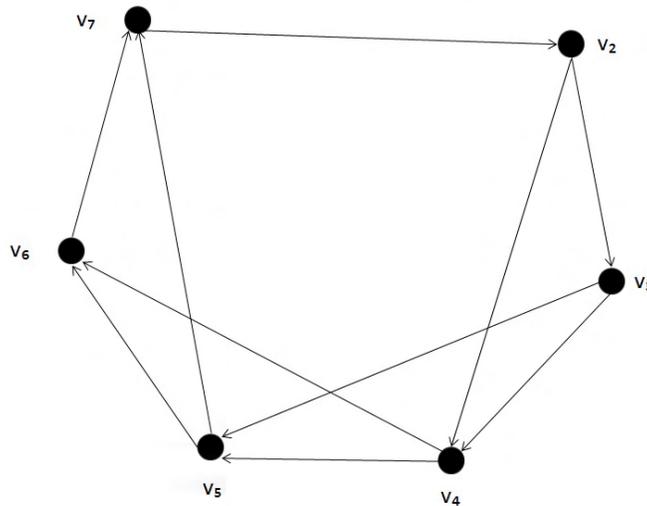
Por la independencia de  $N$ , tenemos que  $v_2, v_3, v_7, v_6 \notin N$ .

Como  $v_3 \notin N$  y  $v_2 \notin N$ , tenemos por absorbencia de  $N$ , que necesariamente  $v_4 \in N$ . De esta manera, por independencia de  $N$ ,  $v_5 \notin N$  pero  $v_5$  no es absorbido por ningún elemento de  $N$ , lo que contradice la absorbencia de  $N$ .

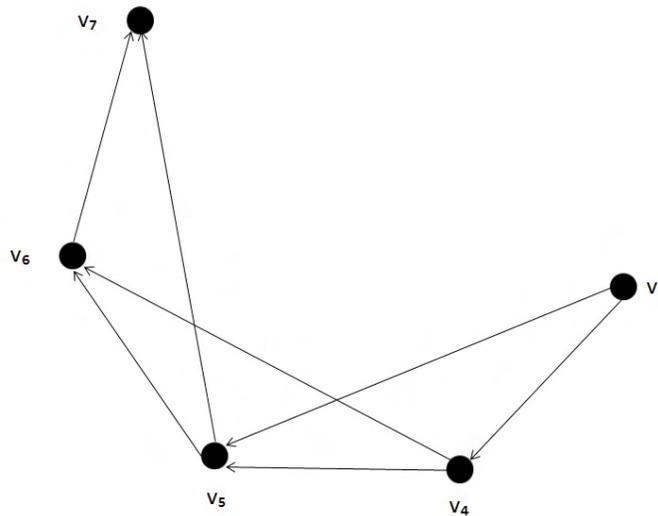
Por lo tanto,  $\vec{C}_7(1,2)$  no tiene núcleo.

Ahora demostramos que cualquier subdigráfica inducida de  $\vec{C}_7(1,2)$  tiene núcleo.

Primero, consideremos la subdigráfica inducida de  $\vec{C}_7(1,2)$  que se obtiene de quitar un vértice, digamos,  $v_1$ .



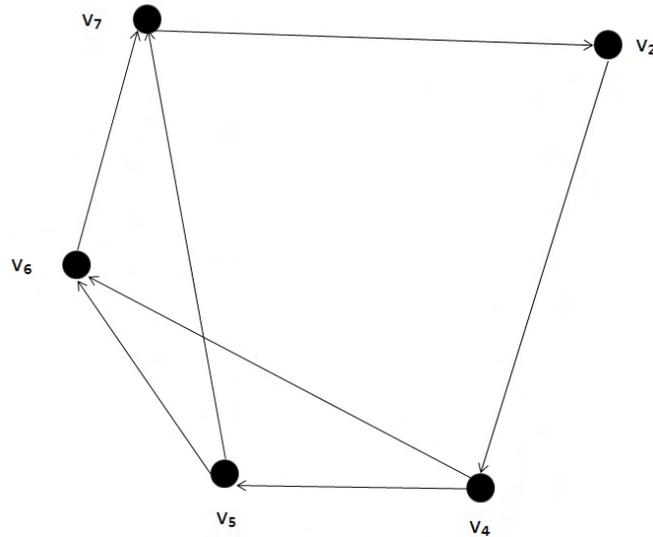
Observemos que en este caso,  $\{v_4, v_7\}$  es un núcleo.



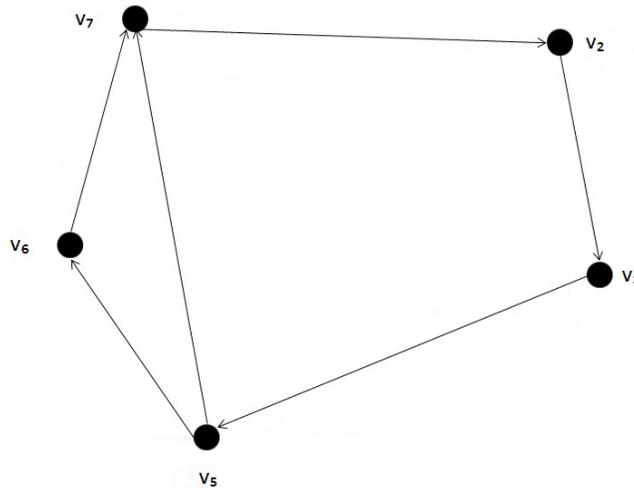
A continuación, consideramos la subdigráfica inducida obtenida al quitar dos vértices consecutivos (a distancia 1), digamos  $v_1$  y  $v_2$ .

Observemos que esta subdigráfica inducida no contiene ciclos dirigidos, y por lo tanto, por teorema, 3.2 sabemos que tiene núcleo.

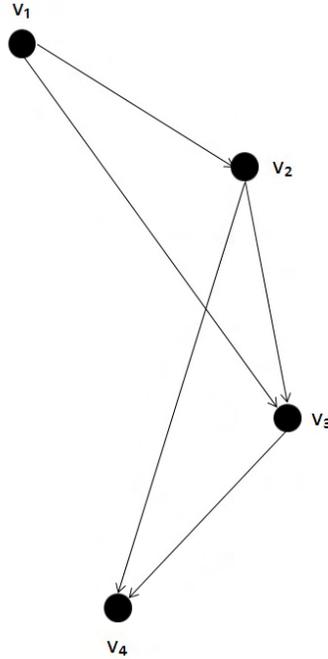
Es importante notar que si quitamos dos vértices consecutivos cualesquiera, rompemos todos los ciclos dirigidos de la gráfica  $\vec{C}_7(1,2)$ , de esta manera, si quitamos 4 o más vértices, estaremos quitando necesariamente dos vértices consecutivos, también, evidentemente si quitamos dos vértices consecutivos y algún otro vértice, estaremos rompiendo todos los ciclos dirigidos de  $\vec{C}_7(1,2)$ , pudiendo de esta manera, mediante el teorema 3.2, encontrar un núcleo.



Continuamos considerando la subdigráfica inducida que se obtiene de quitar dos vértices no consecutivos a distancia 2, digamos  $v_1$  y  $v_3$ . En este caso, tenemos que  $\{v_4, v_7\}$  es núcleo.



Observemos que el último caso que nos falta por considerar (quitando dos vértices en total a  $\vec{C}_7(1,2)$ ) es quitar dos vértices a distancia 3, digamos  $v_1$  y  $v_4$ ; el resto de los casos en que se quitan dos vértices se siguen análogamente de los anteriores por la simetría de  $\vec{C}_7(1,2)$ . En este caso,  $\{v_3$  y  $v_7\}$  es un núcleo.



Observemos que sólo hay una manera de quitar tres vértices a  $\vec{C}_7(1,2)$  de manera que cualesquiera dos no estén a distancia uno, las otras maneras de quitar tres tales vértices son simétricas entre sí, y si quitamos dos vértices que estén a distancia uno, rompemos todos los ciclos pudiendo encontrar según el teorema 3.2 un núcleo. Al quitar tres vértices no consecutivos dos a dos obtenemos un ciclo dirigido de orden 4 cuyo núcleo está dado por  $\{v_1, v_3\}$  o bien, por  $\{v_2, v_4\}$ . Hemos demostrado así que cualquier subdigráfica inducida de  $\vec{C}_7(1,2)$  tiene núcleo. ■

**Teorema 3.1.** *Sea  $D$  una digráfica circular. Entonces  $D$  es N.I.C. si y sólo si  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1,2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .*

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Sea  $D$  una digráfica circular y supongamos que  $D$  es una N.I.C.- digráfica.

Si  $D$  es semicompleta, por teorema 3.7, entonces  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

Supongamos que  $D$  no es semicompleta,  $D$  no es un ciclo impar y  $D$  no es  $\vec{C}_7(1,2)$ . Vamos a demostrar que  $D$  no es N.I.C., probando que  $D$  contiene un ciclo inducido impar (Como los ciclos impares no tienen núcleo,  $D$  no es N.I.C.).

Como  $D$  es N.C., por el lema 3.2,  $D \cong \vec{C}_n(1, 2, \dots, r)$  para alguna  $r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , y  $r > 1$ ,  $n \equiv 1 \pmod{r+1}$ , así,  $2r+1 < n$  y  $n = p(r+1) + 1$ .

Supongamos que  $r = 1$  entonces  $D \cong \vec{C}_n(1)$ ,  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , esto implica que  $n$  es impar y por lo tanto  $D$  es un ciclo impar, contradiciendo la suposición.

Supongamos que  $r \geq 2$  y  $r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , esto implica que  $n > 2r+1$ , como  $n \equiv 1 \pmod{r+1}$  esto implica que  $n = p(r+1) + 1$  con  $p$  un número entero.

Supongamos que  $r = 2$ ,  $D = \vec{C}_n(1, 2)$ .

$n = 3p + 1$  con  $n > 5$ . Los posibles valores de  $n$  son  $n = 7, 10, 13, 16, \dots$

CAPÍTULO 3. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

---

Si  $n = 7$ , entonces  $D \cong \vec{C}_7(1,2)$ , la cual es N.I.C..

Supongamos que  $n \geq 10$ . Para encontrar contradicciones.

Si  $n = 2q$ , entonces  $C_0 = (v_0, v_2, v_4, \dots, v_{2(q-1)}, v_0)$  es un ciclo de longitud  $q$  y  $C_1 = (v_0, v_1, v_3, v_4, v_6, v_8, \dots, v_{2q}, v_0)$  es un ciclo de longitud  $q + 1$ . Claramente al menos uno de ellos es de longitud impar. Esto implica que  $D$  contiene una N.I.C.-digráfica inducida. Lo cual es una contradicción.

En la Figura 3.6 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $q$  par. En la Figura 3.7 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $q$  impar.

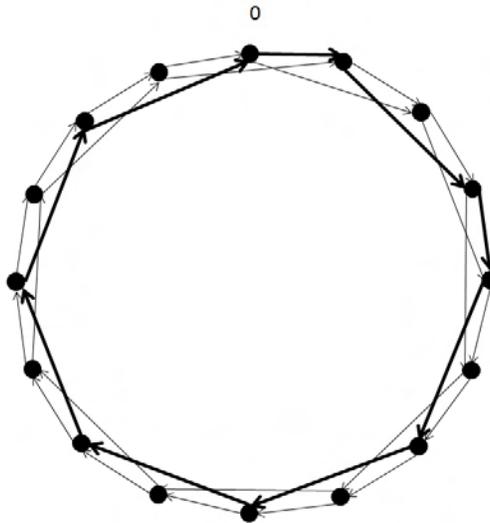


Figura 3.6: Para  $r = 2, q = 8$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_9(1,2)$ .

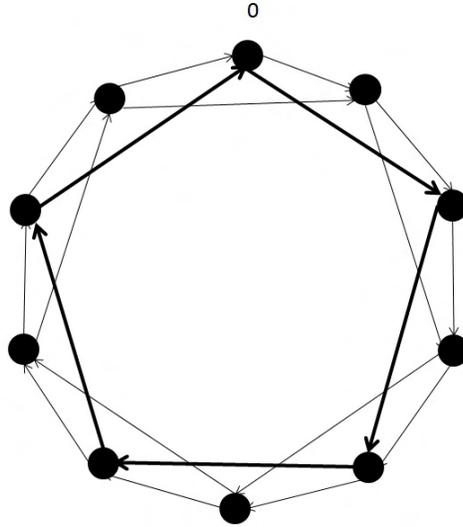


Figura 3.7: Para  $r = 2, q = 5$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_5(1,2)$ .

Si  $n = 2q + 1$ , entonces  $C_0 = (v_0, v_2, v_4, \dots, v_{2q}, v_{2q+1})$  el cual es un ciclo de longitud  $q + 1$  y  $C_1 = (v_0, v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{11}, \dots, v_{2q+1}, v_0)$  el cual es un ciclo de longitud  $q + 2$ . Claramente al menos uno de ellos es de longitud impar. Esto implica que  $D$  contiene una *N.I.C.*-digráfica inducida. Lo cual es una contradicción.

En la Figura 3.8 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $q$  par. En la Figura 3.9 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $q$  impar.

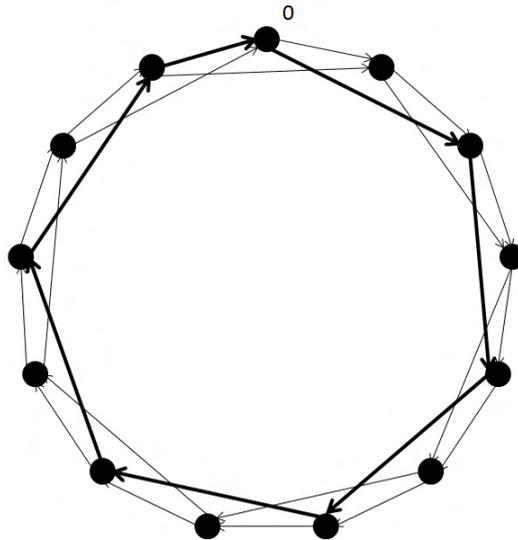


Figura 3.8: Para  $r = 2, q = 6$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_7(1,2)$ .

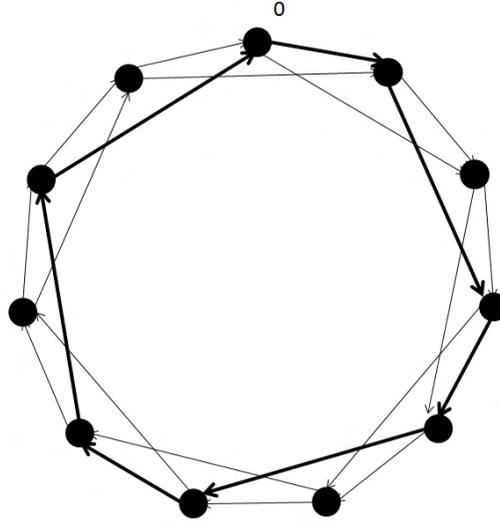


Figura 3.9: Para  $r = 2, q = 5$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_7(1, 2)$ .

Supongamos que  $r \geq 3$ .  $n \equiv 1 \pmod{r+1}$ ,  $n = 3p(r+1) + 1$ .

Si  $p$  es par, sea  $\alpha = 2r + 3$ , entonces  $\alpha + (p-2)(r+1) = (2r+3) + p(r+1) - 2(r+1) = n + (2r+2) - 2(r+1) = n$ .

Sea  $C = (v_0, v_r, v_{r+3}, v_{2r+3} = v_\alpha, v_{\alpha+r}, v_{\alpha+(r+1)}, v_{\alpha+2r+1}, v_{\alpha+2r+2}, \dots$

$, v_{\alpha+(p-3)(r+1)}, v_{\alpha+(p-3)(r+1)+r}, v_{\alpha+(p-2)(r+1)} = v_n, v_0)$  el cual es un ciclo de longitud  $2p-1$  (impar). Esto implica que  $D$  contiene una N.I.C.-digráfica inducida. Lo cual es una contradicción.

En la Figura 3.10 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $p$  par.

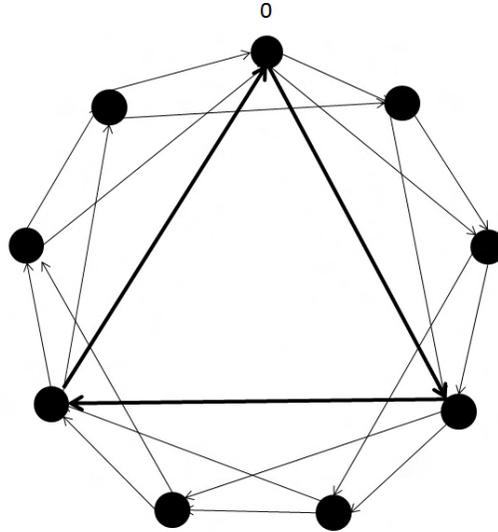


Figura 3.10: Para  $r = 3, p = 2$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_3(1, 2, 3)$ .

Por tanto,  $p$  es impar y  $p \geq 3$ .

Si  $p \leq r$ . Sea  $\alpha = p + r + 1$ .

$\alpha + (p - 1)r = p + r + 1 = p + r + 1 + (p - 1)r = p + r + 1 + pr - r = p + pr + 1 = p(r + 1) + 1 = n$ .  
 Sea  $C = (v_0, v_p, v_{p+r}, v_{p+r+1} = v_\alpha, v_{\alpha+r}, v_{\alpha+2r}, \dots, v_{\alpha+(p-1)r}, v_n, v_0)$  el cual es un ciclo de longitud  $p + 2$  (impar). Esto implica que  $D$  contiene una *N.I.C.*-digráfica inducida. Lo cual es una contradicción. Por tanto,  $p \geq r + 1$ .

En la Figura 3.11 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $p$  impar,  $p \leq r$ .

Sea  $p = mr + t$  con  $0 \leq t \leq r - 1$  y  $m \geq 1$ .

$n = p(r + 1) + 1 = (mr + t)(r + 1) + 1 = mr^2 + mr + tr + t + 1 = r(mr + t) + t + 1 = r(p + m) + t + 1$   
 y  $1 \leq t + 1 \leq r$ .

Si  $m$  es impar. Sea  $C = (v_0, v_r, v_{2r}, \dots, v_{r(p+m)}, v_{r(p+m)+t+1} = v_0)$  el cual es un ciclo de longitud  $p + m + 1$  (impar, pues  $p$  y  $m$  son impares, entonces  $p + m$  es par, y  $p + m + 1$  es impar). Esto implica que  $D$  contiene una *N.I.C.*-digráfica inducida. Lo cual es una contradicción. Por tanto,  $m$  es par.

En la Figura 3.12 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $p$  impar,  $p > r$  y  $m$  impar.

Como  $p = mr + t$ ,  $m$  es par, recordemos que  $p$  es impar, entonces  $t \geq 1$  es impar. Sea  $\alpha = 1 + r + t$ ,  $t < r$ .  $\alpha + (p + m - 1)r = 1 + r + t + (p + m - 1)r = (p + m)r + t + 1 = n$ .

Sea  $C = (v_0, v_1, v_{1+r}, v_{1+r+t} = v_\alpha, v_{\alpha+r}, v_{\alpha+2r}, \dots, v_{\alpha+(p+m-1)r} = v_n, v_0)$  el cual es un ciclo de longitud  $p + m + 2$  (impar, pues  $p$  es impar y  $m + 2$  es par, entonces  $p + m + 2$  es impar). Esto implica que  $D$  contiene una *N.I.C.*-digráfica inducida. Lo cual es una contradicción.

En la Figura 3.13 se ilustra el ciclo inducido impar encontrado, para  $p$  impar,  $p > r$  y  $m$  par.

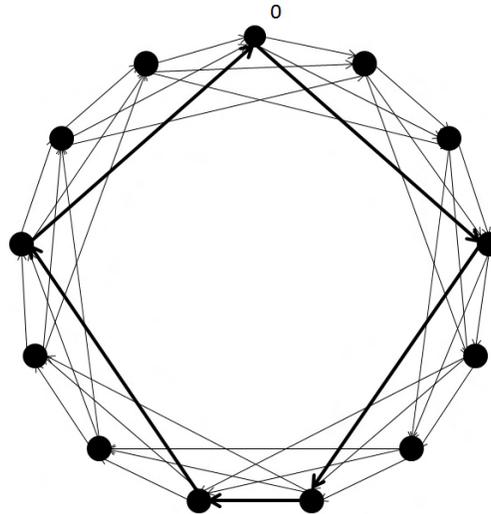


Figura 3.11: Para  $r = 3, p = 3$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_5(1, 2, 3)$ .

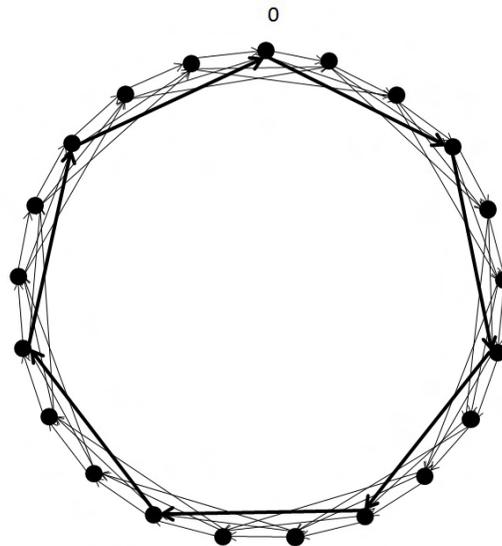


Figura 3.12: Para  $r = 3, m = 1, p = 5$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\vec{C}_7(1, 2, 3)$ .

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $D$  una digráfica circular. Supongamos que  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ . Por corolarios 3.7, 3.3 y observación 3.7 sabemos que  $D$  es N.I.C.. ■

Como lo definimos en la sección 1.3, una digráfica  $D$  localmente semicompleta es **circularmen-**

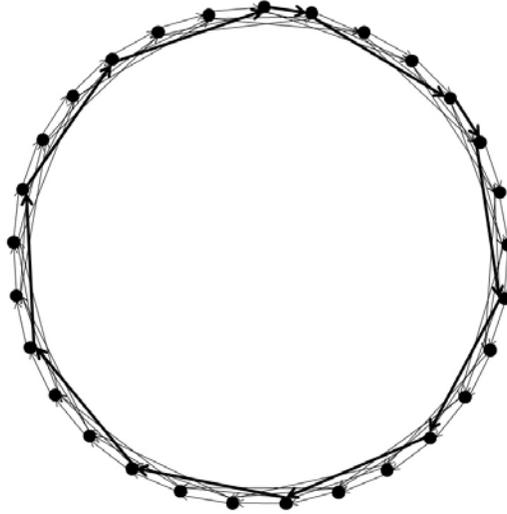


Figura 3.13: Para  $r = 3, m = 2, p = 7$ , el ciclo inducido impar encontrado está marcado con líneas gruesas y es  $\overrightarrow{C_{11}}(1, 2, 3)$ .

**te descomponible** si existe un torneo local circular  $R$  con  $r$  vértices ( $r \geq 2$ ) tal que  $D = R[S_1, \dots, S_r]$ , donde cada  $S_i$  es una digráfica semicompleta fuertemente conexa. y  $R[S_1, \dots, S_r]$  es la **suma lexicográfica** (también llamada la *suma de Zykov*) de la familia  $\{S_i\}$  sobre la digráfica  $R$ . El conjunto de vértices de  $R[S_1, \dots, S_r]$  es  $\{(u, x) : u \in V(R), x \in V(S_i)\}$  y  $((u, x), (v, y))$  es una flecha de  $R[\{S_i\}]$  si y sólo si  $(u, v) \in F(R)$  o  $u = v$  y  $(x, y) \in F(S_i)$ . Consideremos la caracterización de Bang-Jensen sobre las digráficas localmente semicompletas.

**Teorema 3.2.** [14]. *Sea  $D$  una digráfica localmente semicompleta. Exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple.*

- (a)  *$D$  es semicompleta y no es circularmente descomponible.*
- (b)  *$D$  es circularmente descomponible, con descomposición única  $D = R[S_1, S_2, \dots, S_r]$ . donde  $R$  es un torneo local circular con  $r \geq 3$  vértices y cada  $S_i$  es una digráfica semicompleta, fuertemente conexa.*
- (c)  *$\alpha(D) = 2$  y  $D$  no es circularmente descomponible, donde  $\alpha(D)$  denota la cardinalidad de un conjunto independiente máximo.*

**Lema 3.3.** *Si  $D, E_1, E_2, \dots, E_n$  son N.P., entonces  $D[E_1, E_2, \dots, E_n]$  es N.P..*

**Demostración.**

CAPÍTULO 3. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

Sean  $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $D^\circ = D[E_1, E_2, \dots, E_n]$ .

Sea  $S \subseteq V(D[E_1, E_2, \dots, E_n])$  no vacío y  $D' = D^\circ \langle S \rangle = D[E_1, E_2, \dots, E_n] \langle S \rangle$ .

Demostremos que  $D'$  tiene núcleo.

Sea  $S_i = \{(v, x) \in S : v = v_i\}$  con  $i = 1, \dots, m$ . ( $S_i$  es la subdigráfica inducida de  $S$  contenida en el sumando  $E_i$ ).

$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$  y  $S_i \cap S_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

Sea  $T = \{v \in V(D) : (v, x) \in S \text{ para algún } x \in V(E_i)\} = \{v_i : S_i \neq \emptyset\}$ .

Así,  $T \neq \emptyset$  porque algún  $S_i$  es no vacío; por lo tanto  $D \langle T \rangle$  es una subdigráfica inducida propia no vacía de  $D$ . Como  $D$  es N.P.,  $D \langle T \rangle$  tiene núcleo.

Supongamos que  $K = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}$  con  $k \leq m$  es núcleo de  $D \langle T \rangle$ .

Por simplificar la notación, supongamos que  $j_1 = 1, \dots, j_k = k$ , así  $K = \{v_1, \dots, v_k\}$  es núcleo de  $D \langle T \rangle$ . Entonces  $S_1, \dots, S_k$  son distintos del vacío.

$D^\circ \langle S_i \rangle$  con  $i = 1, \dots, k$  es una subdigráfica inducida no vacía de  $E_1 \sqcup E_2 \sqcup \dots \sqcup E_n$  tiene núcleo, digamos  $N_i \subseteq S_i$ .

Afirmamos que  $N = N_1 \sqcup N_2 \sqcup \dots \sqcup N_k$  es un núcleo de  $D^\circ \langle S \rangle$ .

Como cada  $N_i$  es no vacío,  $N$  es no vacío.

Primero probaremos que  $N$  es independiente. Sean  $\{(v, x), (u, y)\} \subseteq N$ .

Si  $v = u$  entonces  $(v, x), (u, y) \in S_i$  con  $i = 1, \dots, k$ . Para  $\{x, y\} \subseteq V(E_j)$  con  $j = 1, \dots, n$ , entonces  $(v, x), (u, y) \in N_j$  como  $N_j$  es núcleo, entonces  $(v, x)$  y  $(u, y)$  no son adyacentes.

Si  $x \in V(E_{j_1})$  y  $y \in V(E_{j_2})$  con  $j_1 \neq j_2$ . Como  $(v, x), (u, y) \in N$ , se sigue de la definición de  $N$  que  $v, u \in K$  y como  $K$  es núcleo de  $D \langle T \rangle$ , se sigue que  $u$  no es adyacente a  $v$  en  $D$  y ahora, por la definición de  $D^\circ$ , se tiene que  $(v, x), (u, y)$  no son adyacentes en  $D^\circ$ .

Así,  $N$  es independiente.

Veamos que  $N$  es absorbente.

Sea  $(v, x) \in D^\circ \langle S \rangle \setminus N$ ,  $(v, x) \in S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ . Si  $v \in S_i$  con  $i > k$ ,  $v \in S_{k+1}$ ,  $v = v_{k+1}$ , entonces  $S_{k+1} \neq \emptyset$ , por lo que  $v_{k+1} \in T$ , lo cual implica que  $v_{k+1} \in D \langle T \rangle$  y  $v_{k+1} \in D \langle T \rangle \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$ .

Así,  $v_{k+1}$  tiene que ser absorbido por  $D \langle T \rangle \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$ . Entonces, existe  $v_{k+1} \rightarrow v_i$  con  $1 \leq i \leq k$ .

Como  $v_i \in T$  entonces  $S_i \neq \emptyset$ , entonces  $N_i \neq \emptyset$  y como existe  $y \in V(E_j)$ ,  $(v_i, y) \in N_i$  y como  $(v_{k+1}, x) \rightarrow (v_i, y) \in N_i \subseteq N$ .

Entonces  $(v, x)$  es absorbido por  $N$ .

Si  $v \in S_i$  con  $i = 1, \dots, k$ . Por simplicidad, sea  $i = 1$ . Entonces  $(v, x) = (v_1, x) \in S \setminus N$ , es decir,  $(v_1, x) \in S_1 \setminus N_1$ , entonces  $(v_1, x) \in D^\circ \langle S_1 \rangle \setminus N_1$ , con  $N_1$  núcleo de  $D^\circ \langle S_1 \rangle$ , entonces existe  $y \in V(E_j)$  y  $(v_1, x) \rightarrow (v_1, y) \in N_1 \subseteq N$ . Por lo tanto,  $(v, x)$  es absorbido por  $N$ . Como se ilustra en la Figura 3.14. ■

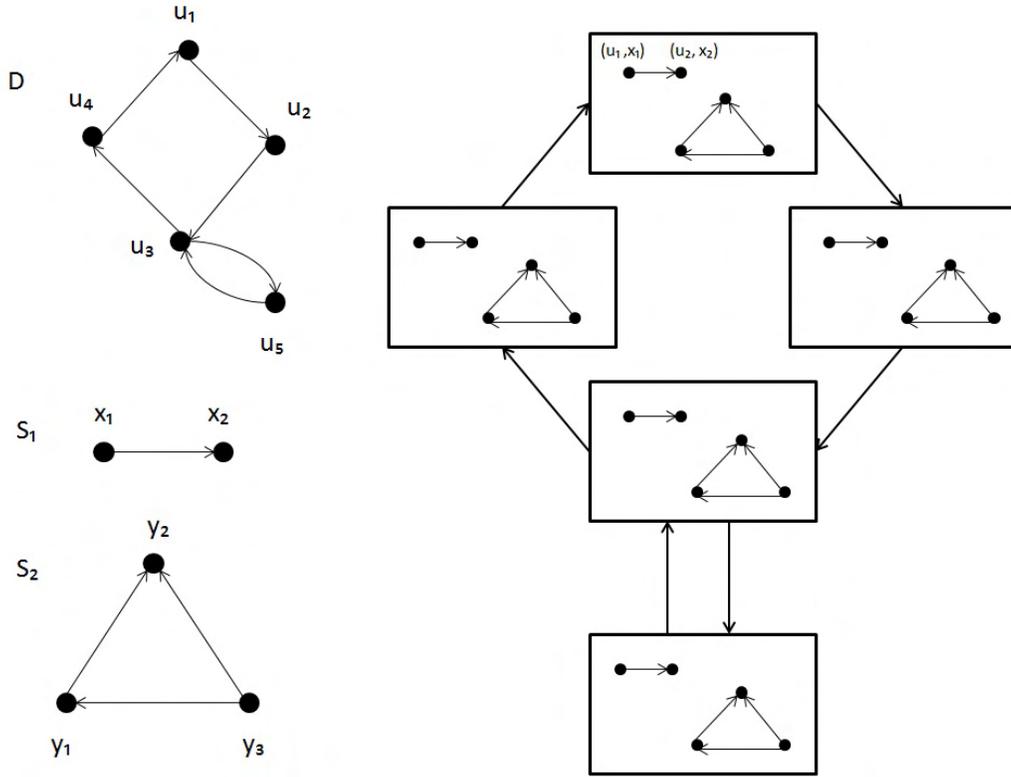


Figura 3.14: Suma lexicográfica de  $D$ .

**Lema 3.4.** Si una digráfica  $D$  fuertemente conexa localmente semicompleta no es semicompleta, entonces existe un conjunto separador mínimo  $S \subseteq V(D)$  tal que  $D - S$  no es semicompleta. Más aún, si  $D_1, D_2, \dots, D_p$  es el ordenamiento acíclico de las componentes fuertemente conexas de  $D - S$  y  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  es la descomposición semicompleta de  $D - S$ , entonces  $r \geq 3$ ,  $D \langle S \rangle$  es semicompleta y tenemos  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$

El lema se ilustra en la Figura 3.15.

**Demostración.**

Supongamos que  $D - S$  es semicompleta para todo conjunto mínimo separador  $S$ , entonces  $D - S$  es semicompleta para todos los conjuntos separadores  $S$ .

Supongamos que  $D$  no es semicompleta, entonces existen  $v, w$  vértices en  $D$  tales que  $v, w$  no son adyacentes. Por tanto, cualquier pareja de vértices no adyacentes puede ser separada por algún conjunto separador  $S$ . En consecuencia,  $D$  es semicompleta. Lo cual es una contradicción.

Luego, existe un conjunto separador mínimo tal que  $D - S$  no es semicompleta.

Sea  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  la descomposición semicompleta de  $D - S$ ,  $r \geq 2$ .

Si  $r = 2$  la descomposición semicompleta de  $D - S$  es  $D'_1 \rightarrow D'_2$  y tanto  $D'_1$  como  $D'_2$  son semicompletas, por tanto  $D - S$  es semicompleta. Lo cual es una contradicción.

Por tanto  $r \geq 3$ .

Sean  $D_1, D_2, \dots, D_p$  las componentes fuertemente conexas de  $D - S$ .

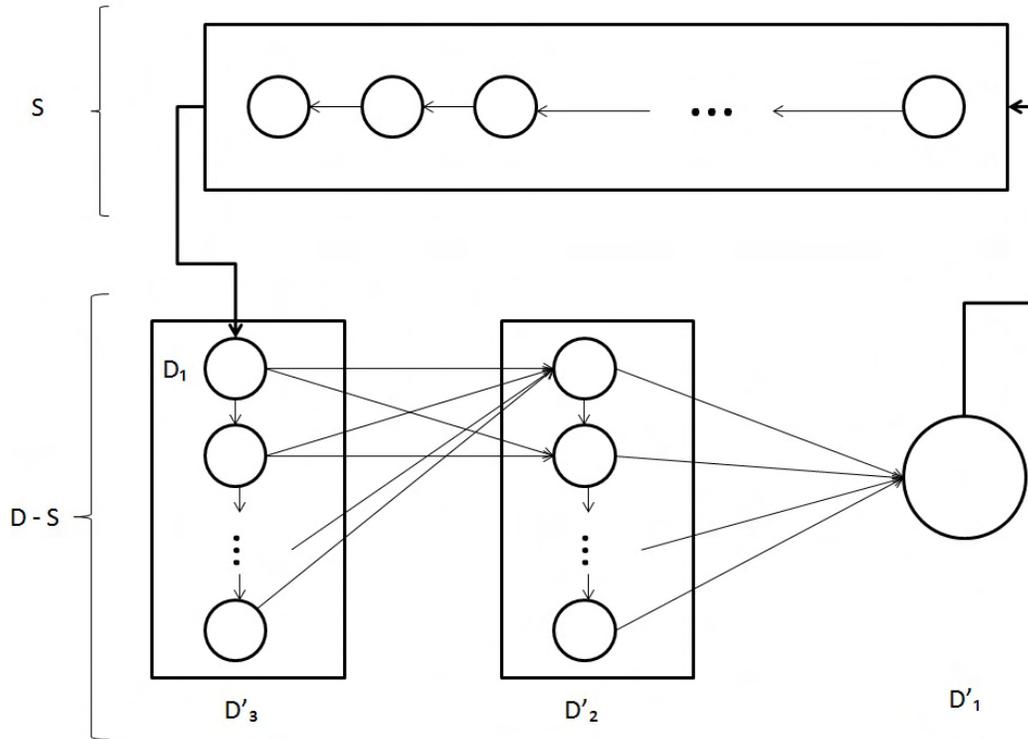


Figura 3.15: Conjunto mínimo separador  $S$ . Descomposición semicompleta de  $D - S$ .  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$ .

Cada  $D'_i$  con  $i = 1, \dots, r$  está formada por algunas  $D_j$  con  $j = 1, \dots, p$ .

Para toda  $v \in S$ , existen  $w_v \in D_1$  y  $z_v \in D_p$  tales que  $v \rightarrow w_v$  y  $z_v \rightarrow v$ .

Supongamos que existe  $x \in D_p$  y  $v \in S$  tal que  $v \rightarrow x$ , entonces  $v \rightarrow w_v \in D_1$  y  $v \rightarrow x \in D_p$ ; como  $D$  es localmente semicompleta,  $x$  y  $w_v$  son adyacentes; esto implicaría que  $D_1 \rightarrow D_p$  lo cual es una contradicción, o bien  $D_p \rightarrow D_1$ , pero  $D_p$  es un pozo. También obtenemos una contradicción.

Luego,  $D_p \rightarrow S$ .

Sean  $\alpha \in D_p$  y  $v \in S$ . Existen  $z_v \in D_p$  tal que  $z_v \rightarrow v$ . Además, como  $D_p$  es fuertemente conexa y  $\alpha, z_v \in D_p$ , existe una trayectoria de  $\alpha$  a  $z_v$ . Por tanto  $\alpha \rightarrow v$  y como  $\alpha$  es arbitrario en  $D_p$  y  $v$  es arbitrario en  $S$ , tenemos que  $D_p \rightarrow S$ . Similarmente  $S \rightarrow D_1$ .

Por lo tanto  $D \setminus S$  es semicompleta. ■

**Lema 3.5 (4).** . Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa, localmente semicompleta que no es semicompleta. Entonces,  $D$  es descomponible circularmente, o bien  $D$  tiene un conjunto separador mínimo  $S$  tal que la descomposición semicompleta de  $D - S$  tiene exactamente tres componentes  $D'_1, D'_2, D'_3$

**Lema 3.6.** [14]. Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa, localmente semicompleta que no es semicompleta. Entonces,  $D$  no es descomponible circularmente si y solamente si las siguientes

condiciones se cumplen.

(a) Existe un conjunto separador mínimo  $S$  tal que  $D - S$  no es semicompleto y para cada  $S$  que cumpla lo anterior,  $D \langle S \rangle$  es semicompleta y la descomposición semicompleta de  $D - S$  tiene exactamente tres componentes  $D'_1, D'_2, D'_3$ .

(b) Existen enteros  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  con  $\lambda_2 \leq \alpha \leq \beta \leq p - 1$  y  $p + 1 \leq \mu \leq \nu \leq p + q$  tales que

$$N^-(D_\alpha) \cap V(D_\mu) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad N^+(D_\alpha) \cap V(D_\nu) \neq \emptyset,$$

$$\text{o} \quad N^-(D_\mu) \cap V(D_\alpha) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad N^+(D_\mu) \cap V(D_\beta) \neq \emptyset,$$

donde  $D_1, D_2, \dots, D_p$  y  $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$  son descomposiciones fuertemente conexas de  $D - S$  y  $D \langle S \rangle$ , respectivamente, y  $D_{\lambda_2}$  es la componente inicial de  $D'_2$ .

**Lema 3.7.** [14]. Sean  $D$  una digráfica fuertemente conexa, localmente semicompleta, no circularmente descomponible y sea  $S$  un conjunto separador mínimo de  $D$  tal que  $D - S$  no es semicompleta. Sean  $D_1, D_2, \dots, D_p$  la descomposición fuertemente conexa de  $D - S$  y  $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$  la descomposición semicompleta de  $D \langle S \rangle$ . Supongamos que existe una flecha  $sv$  de  $S$  a  $D'_2$  con  $s \in V(D_i)$  y  $v \in V(D_j)$ , entonces

$$D_i \cup D_{i+1} \cup \dots \cup D_{p+q} \rightarrow D'_3 \rightarrow D_{\lambda_2} \cup \dots \cup D_j$$

El lema 3.7 se ilustra en la Figura 3.16.

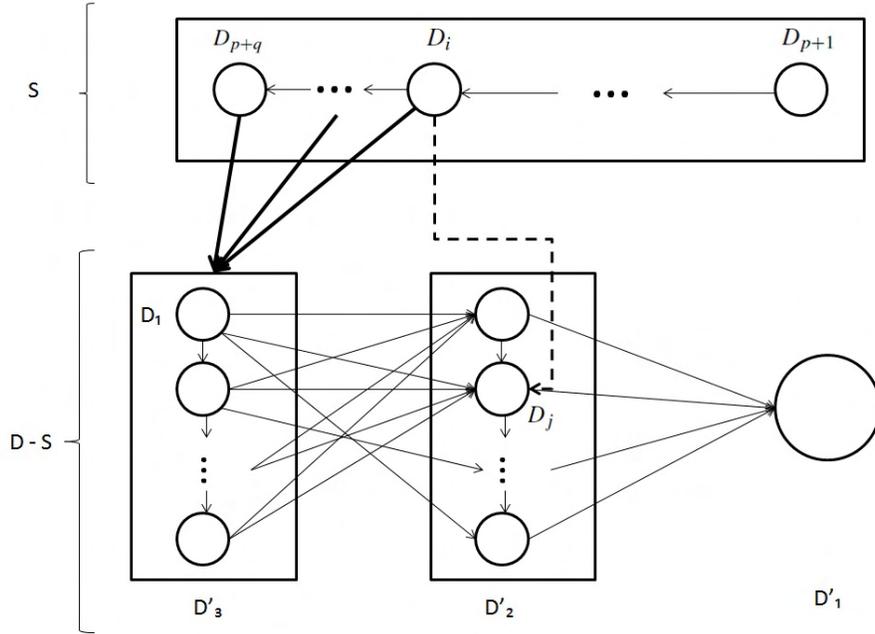


Figura 3.16: A partir de la componente  $D_i$ , del conjunto separador mínimo  $S$ , tenemos dominancia hacia la componente  $D'_3$  de la descomposición semicompleta de  $D - S$ . Dicha dominancia la marcamos con flechas gruesas. Por otro lado, la componente  $D_i$ , del conjunto mínimo separador  $S$ , domina a una componente  $D_j$  que pertenece a  $D'_2$  de la descomposición semicompleta de  $D - S$ . Dicha flecha la marcamos punteada. Finalmente, tenemos dominancia de todas las componentes de  $D'_3$  hacia todas las componentes  $D_{\lambda_2}, \dots, D_j$  que pertenecen a  $D'_2$ .

**Teorema 3.3.** Una digráfica  $D$  localmente semicompleta es N.I.C. si y sólo si  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $\vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ ,  $m \geq 4$ .

**Demostración.**

[ $\implies$ ] Sea  $D$  una N.I.C.-digráfica localmente semicompleta. Por el teorema 3.2, tenemos tres casos:

**Caso 1.** (Teorema 3.2 inciso (a)) Supongamos que  $D$  es semicompleta y no circularmente descomponible. Como  $D$  es semicompleta y N.I.C., por el teorema 3.7  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .  $\vec{C}_3$  es circularmente descomponible, al igual que  $\vec{C}_4(1, \pm 2)$ , pues  $\vec{C}_4(1, \pm 2) = R[S_1, \dots, S_r]$ , donde  $R$  es un torneo local circular y cada  $S_i$  es una semicompleta fuertemente conexa de  $\vec{C}_4(1, \pm 2)$  (la cual consiste de un sólo vértice), además podemos dar el etiquetado circular de dicho ciclo, pues  $d^+(0) = d^+(1) = d^+(2) = d^+(3) = 2$  y  $d^-(0) = d^-(1) = d^-(2) = d^-(3) = 2$ ; también,  $N^+(0) = \{1, 2\}, N^+(1) = \{2, 3\}, N^+(2) = \{3, 0\}, N^+(3) = \{0, 1\}$  y

$N^-(0) = \{3, 2\}, N^-(1) = \{0, 3\}, N^-(2) = \{0, 1\}, N^-(3) = \{2, 1\}$ .  
 En la Figura 3.17 se ilustra el etiquetado circular de  $\vec{C}_4(1, \pm 2)$ .

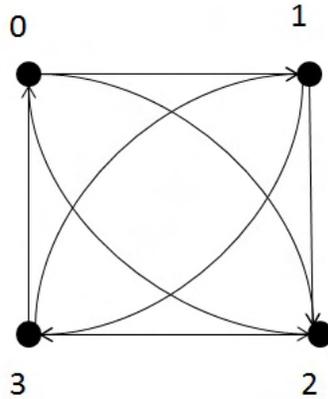


Figura 3.17: Etiquetado circular de  $\vec{C}_4(1, \pm 2)$

Pero  $\vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  no es circularmente descomponible cuando  $m \geq 5$ .

Para  $m = 5$  sean  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  los vértices de  $\vec{C}_5(1, \pm 2)$ . Buscamos la descomposición circular de dicho ciclo.

Como se ilustra en la Figura 3.18,  $v_0, v_2$  inducen un 2-ciclo y esto implica que  $v_0, v_2$  estén en la misma componente fuertemente conexa de  $\vec{C}_5(1, \pm 2)$ .

De manera similar,  $v_2, v_4$  inducen un 2-ciclo y en consecuencia  $v_0, v_2, v_4$  están en la misma componente fuertemente conexa. Siguiendo este razonamiento, obtenemos que  $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  están en la misma componente fuertemente conexa, pero por definición de la descomposición circular, no puede pasar que  $|R| = 1$ .

Por tanto  $\vec{C}_5(1, \pm 2)$  no es circularmente descomponible.

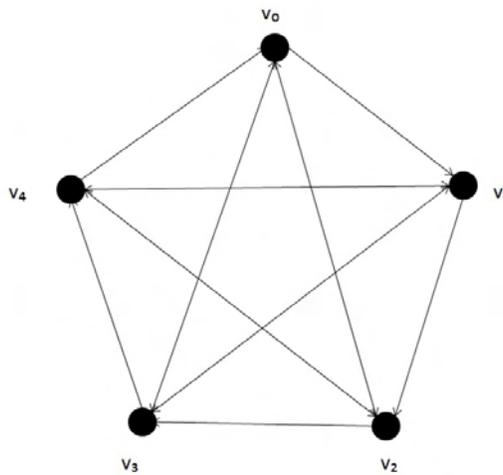


Figura 3.18:  $\vec{C}_5(1, \pm 2)$  no es circularmente descomponible.

En general,  $\vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  no es circularmente descomponible cuando  $m = 2n$ ,

$n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  y tampoco lo es cuando  $m = 2n + 1$ ,  $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

En consecuencia, si  $D$  es una N.I.C.-digráfica, semicompleta que no es circularmente descomponible, entonces  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 5$ .

**Caso 2.** (Teorema 3.2 inciso (b)) Supongamos que  $D$  es circularmente descomponible, con descomposición única  $D = R[S_1, S_2, \dots, S_r]$ . donde  $R$  es un torneo local circular con  $r \geq 3$  vértices y cada  $S_i$  es una digráfica semicompleta, fuertemente conexas.

Como cada  $S_i$  es una subdigráfica inducida de  $R$ , entonces cada  $S_i$  es N.P. y  $S_i \neq D$ .

Supongamos que  $|S_i| > 2$  para alguna  $i$ , entonces  $R$  es una subdigráfica inducida propia de  $D$  y en consecuencia,  $R$  es N.P., lo cual implica, por lema 3.3, que  $D$  es N.P. contradiciendo que  $D$  es N.I.C..

Por lo tanto  $|S_i| = 1$  para toda  $i$ . Entonces  $D = R$  y en consecuencia,  $D$  es un torneo local circular semicompleto.

Por 3.1,  $D$  es un ciclo impar, o  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ ,  $m \geq 4$ .

Pero si  $m = 4$ , entonces  $\vec{C}_4(1, \pm 2)$  si es un torneo local circular, pues, para cualquier  $v \in \vec{C}_4(1, \pm 2)$  tanto  $D[N^+(v)]$ , como  $D[N^-(v)]$  inducen trayectorias de orden dos y esas son semicompletas.

Por lo tanto, se sigue que  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_4(1, \pm 2) = \vec{C}_4(1, 2)$ .

**Caso 3.** (Teorema 3.2 inciso (c)) Supongamos que  $\alpha(D) = 2$  y  $D$  no es circularmente descomponible, donde  $\alpha(D)$  denota la cardinalidad de un conjunto independiente máximo.

Afirmamos que  $D$  es fuertemente conexas, ya que si no lo es,  $D = D^*[K_1, \dots, K_l]$ , donde  $K_1, \dots, K_l$  son las componentes fuertemente conexas de  $D$  y  $D^*$  es la condensación. Ya que  $D$  es N.I.C. (por hipótesis), se sigue que cada  $K_i$  es N.P., además  $D^*$  es acíclica por corolario 1.1 y por teorema 2.8,  $D^*$  también es N.P.. Así, por lema 3.3,  $D$  es N.P., lo cual es una contradicción.

Por el lema 3.6 inciso (a) existe un conjunto separador mínimo  $S$  tal que  $D - S$  no es semicompleto y para cada  $S$  que cumpla lo anterior,  $D \langle S \rangle$  es semicompleta y la descomposición semicompleta de  $D - S$  tiene exactamente tres componentes  $D'_1, D'_2, D'_3$ , y por el lema 3.4 existe un conjunto separador mínimo  $S \subseteq V(D)$  tal que  $D - S$  no es semicompleta. Más aún, si  $D_1, D_2, \dots, D_p$  es el ordenamiento acíclico de las componentes fuertemente conexas de  $D - S$  y  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$  es la descomposición semicompleta de  $D - S$ , entonces  $r \geq 3$ ,  $D \langle S \rangle$  es semicompleta y tenemos  $D_p \rightarrow S \rightarrow D_1$ .

Afirmamos que toda  $SD_1$ -flecha y toda  $D_pS$ -flecha es asimétrica.

Sea  $v \in D_p = E_1$  y  $s \in S$ . Si  $sv \in F(D)$ , entonces  $\{D_p, D_1\} \subseteq N^+(s)$  (por la definición de la descomposición acíclica dada en el teorema 2.10) esto implicaría que  $E_3, E_1$  sean adyacentes. Lo cual es una contradicción.

Sea  $v \in D_1$  y  $s \in S$ . Supongamos que  $vs \in F(D)$ , entonces  $\{D_p, D_1\} \subseteq N^-(s)$  y esto implicaría que  $E_3, E_1$  sean adyacentes. Lo cual es una contradicción.

Notemos que  $E_3, E_1$  son subdigráficas inducidas propias, por tanto, tienen núcleo y como  $\alpha(D) = 2$  entonces los núcleos de  $E_3$  y  $E_1$  tienen un sólo elemento, ya que no hay flechas entre  $E_1$  y  $E_3$ .

Sea  $\{v_1\}$  núcleo de  $E_3$  y sea  $\{u\}$  núcleo de  $E_1$ .

Además, notemos que  $\{v_1, u\}$  es núcleo de  $D - S$ , pues  $E_2, E_1 \rightarrow u$  y  $E_3 \rightarrow v_1$ .

Si  $S \rightarrow v_1$  entonces  $\{v_1, u\}$  sería núcleo de  $D$ , pues  $E_2, E_1 \rightarrow u$  y  $S, E_3 \rightarrow v_1$ . Lo cual es una contradicción, pues  $D$  es N.I.C..

Por lo tanto, existe  $s_1 \in S$  tal que  $s_1 \not\rightarrow v_1$ , por el lema 3.6 existe al menos una flecha de  $S$  hacia  $E_2$ , digamos,  $s_2 v_2$ , es decir,  $s_2 \in S, v_2 \in E_2$  y  $s_2 \rightarrow v_2$ .

Afirmamos que esta flecha es simétrica.

Como  $E_2 \rightarrow E_1$  entonces  $v_2 u \in F(D)$  y como  $E_1 \rightarrow S$ , entonces  $u s_2 \in F(D)$  así,  $\langle \{u, s_2, v_2\} \rangle$  contiene un 3-ciclo dirigido inducido.

Como  $D$  es N.I.C., este 3-ciclo debe tener una flecha simétrica. Pero,  $u v_2 \notin F(D)$  pues  $u \in E_1$  y  $v_2 \in E_2$ .

Si  $s_2 u \in F(D)$ , entonces  $\{u, D_1\} \subseteq N^+(s_2)$  y así,  $E_1$  y  $E_3$  serían adyacentes. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $s_2 u \notin F(D)$ .

Luego,  $v_2 s_2 \in F(D)$ .

Sean  $D_i$  y  $D_j$  tales que  $s_2 \in D_i$  con  $p+1 \leq i \leq p+q$  y  $v_2 \in D_j$  con  $\lambda_2 \leq j \leq p-1$ .

Por el lema 3.7

$$D_i \cup D_{i+1} \cup \dots \cup D_{p+q} \rightarrow D'_3 \rightarrow D_{\lambda_2} \cup \dots \cup D_j \quad (3.2.1)$$

Afirmamos que  $s_1 s_2 \in F(D)$ .

Como  $S$  es semicompleto y  $s_1, s_2 \in S$ , entonces  $s_1 s_2 \in F(D)$  o  $s_2 s_1 \in F(D)$ .

Supongamos que  $s_2 s_1 \in F(D)$ , entonces  $s_1 \in N^+(s_2)$ , entonces  $s_1 \in D_{i+l}$  con  $i \leq i+l \leq p+q$ , y como  $v_1 \in E_3$  entonces  $s_1 \rightarrow v_1$  por 3.2.1, lo cual contradice la elección de  $s_1$ .

Así,  $s_1 s_2 \in F(D)$ .

Afirmamos que  $v_2 s_1$  es una flecha asimétrica de  $D$ .

Primero, notemos que  $s_1, v_2 \in N^-(s_2)$ , entonces  $s_1$  y  $v_2$  son adyacentes.

Supongamos que  $s_1 v_2 \in F(D)$ , entonces  $v_1, s_1 \in N^-(v_2)$  y así,  $v_1$  y  $s_1$  son adyacentes, pero  $s_1 v_1 \notin F(D)$ .

Luego,  $v_1 s_1 \in F(D)$ .

Sea  $w \in V(D_1)$ , como  $E_3$  es semicompleta,  $v_1$  y  $w$  son adyacentes, pero  $w \in D_1$  y  $v_1 \in D_{\lambda_2-1} \neq D_1$ , entonces  $v_1 w \notin F(D)$ , pues  $D_1, \dots, D_{\lambda_2-1}$  es la descomposición acíclica de  $E_3$ .

Entonces  $w v_1 \in F(D)$ , así,  $\{w, v_1, s_1\}$  es un 3-ciclo inducido sin flechas simétricas. lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $v_2 s_1 \in F(D)$  y es asimétrica.

Sea  $w \in V(D_1)$ . Como  $S \rightarrow D_1$  entonces  $s_1 w \in F(D)$  es asimétrico.

Así,  $\{s_1, w, v_2\}$  es un 3-ciclo sin flechas simétricas. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto no existen digráficas N.I.C. que sean localmente semicompletas, no semicompletas, no circularmente descomponibles con  $\alpha(D) = 2$ .

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $\vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ ,  $m \geq 4$ . Consideremos los resultados obtenidos en los tres casos analizados anteriormente y el teorema 3.2.

### CAPÍTULO 3. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

---

La prueba se sigue de los corolarios 3.7 y 3.3 así como de la observación 3.7 y del hecho de que  $\vec{C}_{2n+1}$ ,  $\vec{C}_7(1, 2)$  y  $\vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ ,  $m \geq 4$  son localmente semicompletos. ■

## 4. Caracterización de las digráficas N.I.C. localmente in (ex)-semicompletas.

En este capítulo, se expone una caracterización de las digráficas núcleo imperfectas críticas que son localmente in-semicompletas (respectivamente localmente ex-semicompletas).

### 4.1. Definiciones.

Una digráfica es **cuasitransitiva** si para todo conjunto de tres vértices distintos  $x, y, z$  de  $D$ , tales que  $xy$  y  $yz$  son flechas en  $D$ , existe al menos una flecha entre  $x$  y  $z$ . Como podemos ver en la Figura 4.1.

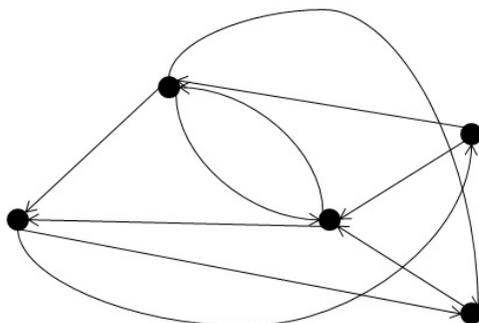


Figura 4.1: Digráfica cuasi-transitiva.

La noción de digráficas semicompletas y sus subclases, en particular, los torneos, pueden extenderse de muchas maneras. Una biorientación de una gráfica  $p$ -partita (multipartita) es una digráfica  $p$ -partita (**multipartita**) **semicompleta**. Un **torneo multipartito** es una orientación de una gráfica multipartita completa. Por ejemplo, la Figura 4.2. Una digráfica semicompleta 2-partita también la llamaremos **digráfica semicompleta bipartita**. Un **torneo bipartito** es una digráfica semicompleta bipartita sin 2-ciclos.

Una digráfica  $D$  es **multipartita localmente semicompletas** si y sólo si  $D$  es multipartita y toda semitrayectoria sin diagonales entre cualquier par de vértices en partes distintas de  $D$  es

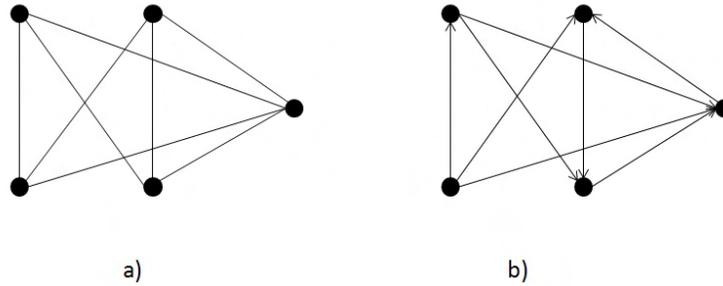


Figura 4.2: a) Gráfica multipartita completa. b) torneo multipartito semicompleto.

dirigida, por ejemplo, la Figura 4.3. Notemos que de aquí se deduce que siempre que exista una semitrayectoria entre dos vértices distintos de la digráfica multipartita localmente semicompleta, en la subdigráfica inducida por los vértices de esa semitrayectoria, hay una trayectoria dirigida entre esos dos vértices, así, la propiedad de ser multipartita localmente semicompleta se hereda a todas las subdigráficas inducidas de  $D$ .

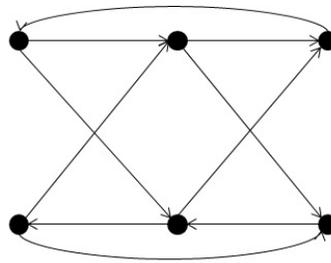


Figura 4.3: Digráfica multipartita localmente semicompleta.

Las digráficas cuasitransitivamente multipartitas son una generalización de las digráficas cuasitransitivas y la definición de esta familia de digráficas está estrechamente relacionada a la familia de digráficas multipartitas localmente semicompletas. Una trayectoria es **anti-dirigida** si no tiene subtrayectorias inducidas de longitud dos. Como se ilustra en la Figura 4.4. Una digráfica con una partición de vértices en conjuntos independientes es una digráfica **cuasitransitivamente multipartita** si y sólo si para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  (no en la misma parte), tales que existe una  $uv$ -trayectoria  $P$  que no es antidirigida, entonces  $P$  tiene una diagonal.

Un **clan**  $C$ , en una gráfica  $G = (V, E)$  es un subconjunto de vértices,  $C \subseteq V$ , tal que cualquier par de vértices distintos son adyacentes. Esto equivale a la condición de que la subdigráfica de  $G$  inducida por  $C$  es una gráfica completa. El orden del máximo clan en una gráfica  $G$  es su *número de clan*, el cual denotaremos por  $\omega(G)$ .

Una **coloración** de una gráfica, a menos de que se especifique otra cosa, es una coloración propia por vértices, es decir, etiquetamos los vértices de la gráfica con colores, de forma tal, que dos vértices que compartan arista no tengan el mismo color. Así, un vértice con un lazo nunca



a)



b)

Figura 4.4: a) Trayectoria dirigida. b) Trayectoria anti-dirigida.

podrá ser coloreado propiamente por vértices, así, las gráficas que estén dentro de este contexto, no contienen lazos. Una coloración que use a lo más  $k$  colores le llamamos una **k-coloración** (propia).

El menor número de colores empleado para colorear a la gráfica  $G$  lo llamamos **número cromático**, y regularmente se denota como  $\chi(G)$ . A un subconjunto de vértices de  $D$  al cual le asignemos el mismo color será llamado **clase de color**, toda clase de esta forma, genera un conjunto independiente. Por lo tanto, un  $k$ -coloreo es lo mismo que una partición del conjunto de vértices en  $k$  conjuntos independientes, y los términos *k-partito* y *k-coloreable* tienen el mismo significado.

Una gráfica **perfecta** es una gráfica en la cual el número cromático de toda subgráfica inducida es igual al tamaño del máximo clan de dicha subgráfica, como se ilustra en la Figura 4.5

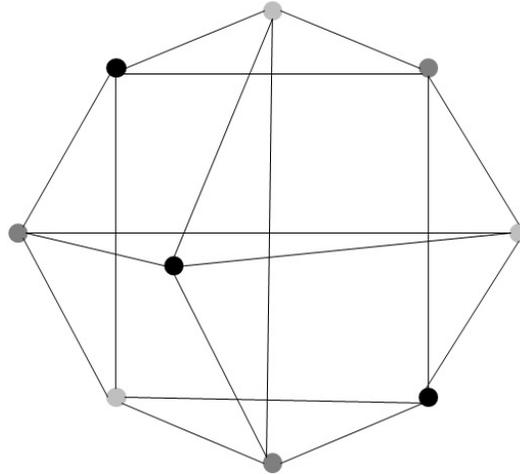


Figura 4.5: Gráfica perfecta de orden 9, coloreada con 3 colores. En esta gráfica, así como en sus inducidas, se cumple que  $\omega(G[S]) = \chi(G[S])$ .

Una digráfica  $D_G$  es una **orientación** de la gráfica  $G$  si  $\{u, v\} \in A(G)$ , (donde  $A(G)$  es el conjunto de aristas de  $G$ ), si y sólo si  $\{uv, vu\} \cap F(D) \neq \emptyset$ , y la orientación  $D_G$  es una **orientación por pozos** si cualquier subgráfica completa de  $G$  tiene un pozo en  $D$ . Por ejemplo, como se ilustra en la Figura 4.6.

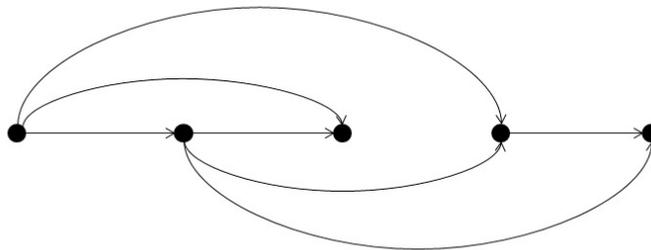


Figura 4.6: Oientación por pozos de  $G$ .

$G$  es una **gráfica de comparabilidad** si tiene una orientación transitiva, esto es, si existe una gráfica transitiva orientada  $T$  tal que  $G_T \cong G$ , como se ilustra en la Figura 4.7.

## 4.2. Resultados.

El siguiente teorema, lo emplearemos para caracterizar las digráficas *N.I.C.* que contengan una gráfica perfecta subyacente. También lo utilizaremos como una herramienta para caracterizar a las familias de torneos generalizados analizadas a lo largo de este trabajo.

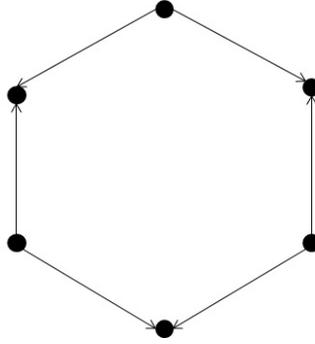


Figura 4.7: Gráfica de comparabilidad.

**Teorema 4.1. (Teorema fuerte de las gráficas perfectas)** [15] Una gráfica  $G$  no es perfecta si y sólo si  $G$  tiene como subgráfica inducida a un ciclo de longitud impar de orden al menos 5, o bien, al complemento de un ciclo inducido de longitud impar de orden al menos 7.

**Teorema 4.2.** [15] Una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si cualquier orientación por pozos de  $G$  es una  $N.P.$ -digráfica.

**Teorema 4.3.** [13, 15] Una digráfica semicompleta  $D$  es una digráfica  $N.I.C.$  si y sólo si  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

Como consecuencia, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.** Sea  $D$  una digráfica tal que  $G_D$  es una gráfica perfecta. Entonces  $D$  es  $N.I.C.$  si y sólo si  $G_D$  es completa,  $D$  es semicompleta y  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

### Demostración.

[ $\implies$ ] Supongamos que  $D$  es una digráfica  $N.I.C.$  con  $G_D$  perfecta.

Si  $D$  no tiene flechas simétricas entonces  $D = O(G_D)$ , como  $G_D$  es perfecta, por teorema 4.2,  $D$  no es una orientación por pozos, ya que si lo fuese,  $D$  sería  $N.P.$ .

Así, existe una digráfica  $H$  completa en  $D$  que no tiene pozo en  $D$ .

Entonces  $H$  es semicompleta y no tiene pozo en  $D$ . Como  $H$  es semicompleta y sin pozo, además, la única posibilidad de núcleo en semicompletas es un pozo, por tanto,  $H$  no tiene núcleo, y así,  $H = D$  (si  $H \subsetneq D$ ,  $H$  es  $N.P.$ ). Entonces  $D$  es semicompleta y  $N.I.C.$  y por Teorema 4.3,  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ . Además, si  $D \cong \vec{C}_3$ ,  $3 = \omega(G_D) = \chi(G_D)$  y si  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ ,  $m = \omega(G_D) = \chi(G_D)$ . En ambos casos,  $G_D = K_m$  para alguna  $m \geq 3$

## CAPÍTULO 4. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE IN (EX)-SEMICOMPLETAS.

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $G_D$  es una gráfica perfecta y completa, que  $D$  es semicompleta y que  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

Por observaciones 3.3 y 3.4  $D$  es N.I.C.. ■

Tenemos el siguiente corolario. Para demostrarlo, enunciaremos los siguientes resultados.

**Teorema 4.5. (Lovász).** *Una gráfica  $G_D$  es perfecta si y sólo  $\overline{G_D}$  es perfecta.*

**Teorema 4.6. [4]** *Una gráfica  $G$  tiene una orientación cuasitransitiva si y sólo si tiene una orientación transitiva.*

**Teorema 4.7. (Dilworth).** *Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado. Entonces existe  $A \subseteq P$  tal que cualesquiera dos elementos en  $A$  no son comparables y existe  $C \subseteq P$  tal que cualesquiera dos elementos en  $C$  son comparables que satisfacen  $|C| = |A|$*

**Corolario 4.1.** *Sea  $D$  una digráfica N.I.C. Si  $D$  es una digráfica multipartita semicompleta o una digráfica cuasitransitiva, entonces  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .*

### **Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica N.I.C. Si  $D$  es multipartita semicompleta, entonces  $G_D = K_{n_1, n_2, \dots, n_l}$ , donde cada  $K_{n_i}$  con  $1 \leq i \leq l$ , es una parte de la gráfica multipartita completa.

Por tanto, tenemos que para  $G_D$ ,  $l = \omega(G_D) = \chi(G_D)$ .

Si  $D$  es cuasitransitiva, entonces por teorema 4.6,  $G_D$  es una gráfica de comparabilidad, la cual es una gráfica perfecta, (la prueba de este último enunciado se sigue de la demostración del teorema 4.7).

Por tanto, en ambos casos, obtenemos que  $G_D$  es perfecta y como por hipótesis  $D$  es N.I.C., por teorema 4.4  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ . ■

## **4.3. Digráficas N.I.C. localmente in (ex) -semicompletas.**

En esta sección caracterizamos las digráficas N.I.C. localmente in-semicompletas.

**Teorema 4.8.** *Si  $D$  es una digráfica N.I.C. localmente in-semicompleta, entonces  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .*

### **Demostración.**

Sea  $D$  una digráfica N.I.C. localmente in-semicompleta. Si  $G_D$  es perfecta, por el teorema 4.4,  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ . Si  $G_D$  no es perfecta, entonces, por el Teorema 4.1,  $G_D$  contiene un ciclo impar inducido de orden mayor o igual que cinco, o contiene

como subdigráfica inducida el complemento de un ciclo impar de orden mayor o igual que siete.

En el primer caso  $C_{2n+1} \subseteq G_D$  para  $n \geq 2$ . Sea  $C_{2n+1} = (v_0, v_1, \dots, v_{2n}, v_0)$  y supongamos que  $v_0 v_1 \in F(D)$ . Si  $\{v_0, v_2\} \subseteq N^-(v_1)$  y como  $v_0$  y  $v_2$  no son adyacentes, tenemos una contradicción, pues  $D$  es localmente in-semicompleta. Siguiendo este razonamiento obtenemos que  $v_0 v_1 \in F(D), v_1 v_2 \in F(D), \dots, v_{2n} v_0 \in F(D)$ . Por lo tanto  $(v_0, v_1, \dots, v_{2n}, v_0) = \overrightarrow{C_{2n+1}}$  en  $D$ . Como  $\overrightarrow{C_{2n+1}}$  es N.I.C., entonces  $D = \overrightarrow{C_{2n+1}}$  para  $n \geq 2$ .

En el segundo caso,  $G_D$  contiene el complemento de un ciclo impar de orden mayor o igual a siete.

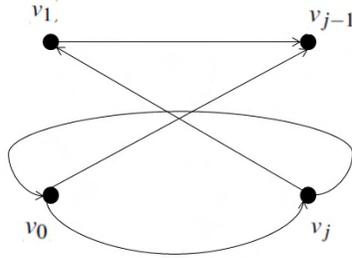
Sea  $C = (v_0, v_1, \dots, v_{2n}, v_0)$  para  $n \geq 3$  tal que induce el complemento de un ciclo impar de orden mayor o igual a siete.

Sea  $w \in N^+(v_0)$ . Si  $w \in N^+(v_1)$ , entonces  $\{v_0, v_1\} \subseteq N^-(w)$  y así,  $v_0, v_1$  serían adyacentes en  $D$  y en consecuencia  $v_0, v_1$  serían adyacentes en  $G_D$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $N^+(v_0) \cap N^+(v_1) = \emptyset$ .

Por lo tanto, para toda  $i$  tal que  $0 \leq i \leq 2n$  tenemos que  $N^+(v_i) \cap N^+(v_{i+1}) = \emptyset$ .

Afirmamos que  $D[V(C)]$  es asimétrica.

Supongamos que  $v_0 v_j$  es una flecha simétrica de  $D$ . Como  $v_0$  y  $v_1$  no son adyacentes en  $G_D$ , podemos suponer que  $0 \leq j \leq 2n$ , pero si  $j = 0$  obtenemos un lazo, si  $j = 1$  obtenemos que  $v_0$  y  $v_1$  son adyacentes y eso no puede pasar, si  $j = 2n$  obtenemos que  $v_0$  y  $v_{2n}$  son adyacentes y eso no puede pasar. Así, supongamos que  $2 < j \leq 2n - 1$  y que  $j \leq n$ , así,  $v_1$  y  $v_j$  son adyacentes y también lo son  $v_1$  y  $v_{j-1}$ .



Como  $v_j \in N^+(v_0)$  entonces  $v_j \notin N^+(v_1)$  y así,  $v_1 v_j \notin F(D)$  y por tanto  $v_j v_1 \in F(D)$ . Como  $v_0 \in N^+(v_j)$  entonces  $v_0 \notin N^+(v_{j-1})$  y así,  $v_{j-1} v_0 \notin F(D)$  y por tanto  $v_0 v_{j-1} \in F(D)$ . Supongamos que  $j \geq 4$ , como  $v_1 \in N^+(v_j)$  entonces  $v_1 \notin N^+(v_{j-1})$ , pero  $v_1$  y  $v_{j-1}$  son adyacentes, entonces  $v_1, v_{j-1} \in N^+(v_1)$  y así,  $v_0, v_1 \in N^-(v_{j-1})$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $j < 4$  y argumentamos de la misma forma considerando  $v_0, v_{2n}, v_j$  y  $v_{j-1}$ . Así,  $D[V(C)]$  es asimétrica.

Supongamos que  $3 \leq k \leq 2n - 3$ , entonces  $v_0$  es adyacente a  $v_k$  y a  $v_{k+1}$ . Supongamos que  $v_2 v_0 \in F(D)$ , entonces  $v_0 v_3 \in F(D)$  pues si  $v_3 v_0$  fuera una flecha en  $D$ , entonces  $v_2$  y  $v_3$  serían adyacentes por ser invecinos de  $v_0$  lo cual sería una contradicción, pues dos vértices consecutivos no pueden ser adyacentes; así, análogamente,  $v_3 v_1 \in F(D)$ , entonces  $v_1 v_4 \in F(D)$  y

CAPÍTULO 4. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE IN (EX)-SEMICOMPLETAS.

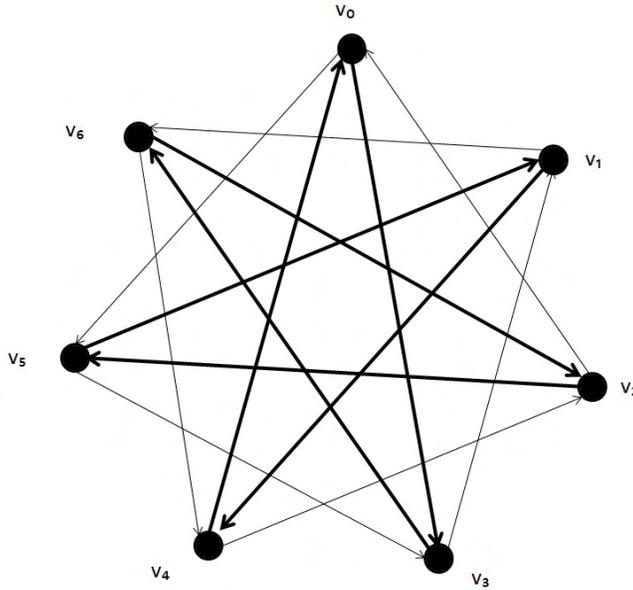
entonces  $v_4v_2 \in F(D)$ , continuando con este razonamiento, obtenemos que para toda  $i$ :

$$v_{i+2}v_i \in F(D) \quad (4.3.1)$$

$$v_iv_{i+3} \in F(D) \quad (4.3.2)$$

4.3.1	4.3.2
$v_2v_0$	$v_0v_3$
$v_3v_1$	$v_1v_4$
·	·
·	·
·	·
$v_{2n}v_{2n-2}$	$v_{2n-2}v_0$
$v_0v_{2n-1}$	$v_{2n-1}v_1$
$v_1v_{2n}$	$v_{2n}v_2$

Como se ilustra en el siguiente ejemplo.



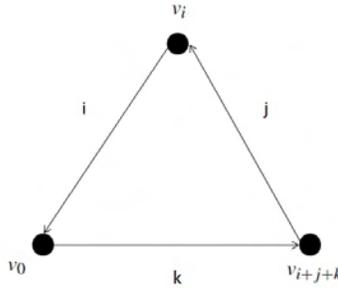
Por lo tanto,  $D[V(C)] \cong \vec{C}_{2n+1}[-2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1}n]$ .  
 Supongamos que  $v_0v_2 \in F(D)$ , re-enumeramos desde  $v_2$ .  
 Entonces  $D[V(C)] \cong \vec{C}_{2n+1}[-2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1}n]$  o  
 $D[V(C)] \cong \vec{C}_{2n+1}[2, -3, 4, \dots, (-1)^n n]$ . En cualquier caso, como el ciclo es impar:  
 $\vec{C}_{2n+1}[-2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1}n] \cong \vec{C}_{2n+1}[2, -3, 4, \dots, (-1)^n n]$ .

Para el caso  $n = 3$   $D[V(C)] \cong \vec{C}_7(2, 3) \cong \vec{C}_7(1, 2)$  el cual es N.I.C..  
 Por tanto  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$ .

Para el caso  $n \geq 4$ , sean  $i, j, k > 1$  enteros impares tales que  $i + j + k = 2n + 1$ . Como  $v_{i+j+k} = v_0$ ,

#### 4.4. DIGRÁFICAS N.I.C. CUASITRANSITIVAMENTE MULTIPARTITAS Y MULTIPARTITAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

obtenemos un  $\vec{C}_3$  inducido propio,  $(v_0, v_i, v_{i+j}, v_0)$ , lo cual es una contradicción, pues  $D$  es N.I.C.. De manera similar sucede para el caso en el que  $n$  es par, tomamos  $i = n - 1$ ,  $j = n - 1$  y  $k = 3$  y en el que  $n$  es impar, tomamos  $i = n - 2$ ,  $j = n - 2$  y  $k = 5$ .



Por lo tanto, si  $D$  es una digráfica N.I.C., localmente in-semicompleta, entonces  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ . ■

El siguiente teorema se prueba mediante una argumentación dual del teorema anterior.

**Teorema 4.9.** *Si  $D$  es una digráfica N.I.C. localmente ex-semicompleta, entonces  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .*

### 4.4. Digráficas N.I.C. cuasitransitivamente multipartitas y multipartitas localmente semicompletas.

Para caracterizar las digráficas N.I.C. cuasitransitivamente multipartitas y las digráficas N.I.C. multipartitas localmente semicompletas, necesitamos los siguientes resultados acerca de la orientación de algunas de sus subdigráficas inducidas.

**Lema 4.1.** *Sea  $D$  una digráfica cuasitransitivamente multipartita (respectivamente para una digráfica multipartita localmente semicompleta.) Si  $P$  es una trayectoria inducida, con al menos 4 vértices, en  $G_D$ , entonces  $P$  es una trayectoria inducida anti-dirigida (respectivamente es una trayectoria inducida dirigida) en  $D$ .*

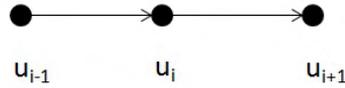
#### **Demostración.**

Sean  $D$  una digráfica cuasitransitivamente multipartita y  $P = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  una trayectoria inducida de la gráfica subyacente  $G_D$  de  $D$ .

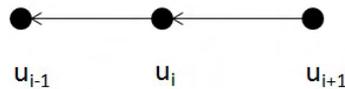
CAPÍTULO 4. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE IN (EX)-SEMICOMPLETAS.

Procedamos por contradicción.

Supongamos que  $P$  no es una trayectoria anti-dirigida en  $D$ . Entonces existe un vértice  $u_i$  en  $P$  con  $0 < i < n$  tal que  $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$  o  $(u_{i+1}, u_i, u_{i-1})$  es una trayectoria dirigida en  $D$ .



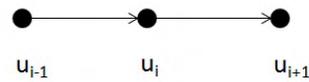
a)



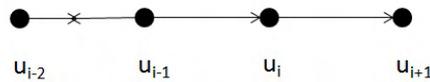
b)

Supongamos que  $u_{i-1}$  y  $u_{i+1}$  son dos vértices de  $D$  que están en partes diferentes, y están unidas por una trayectoria no anti-dirigida, entonces tienen una diagonal, lo cual es una contradicción pues  $P$  no sería inducida en  $G_D$ . Así,  $u_{i-1}$  y  $u_{i+1}$  están en la misma clase.

Ahora, supongamos que  $P$  tiene más de 4 vértices, que  $i \geq 2$  y que  $(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$  o  $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2})$  es una trayectoria que no es anti-dirigida en  $D$  que no tiene diagonal. Supongamos que  $(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$  es una trayectoria que no es anti-dirigida en  $D$  sin diagonal. Además, por definición,  $u_{i-2}$  y  $u_{i+1}$  están en la misma clase. Pero, considerando este hecho y la conclusión anterior, obtenemos que  $u_{i-2}, u_{i+1}$  y  $u_{i-1}$  están en la misma clase. Lo cual es una contradicción, ya que las clases inducen un conjunto independiente de vértices y  $\{u_{i-2}, u_{i-1}\}$  inducen una flecha en  $D$ .



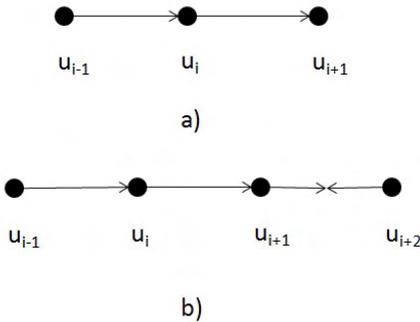
a)



b)

4.4. DIGRÁFICAS N.I.C. CUASITRANSITIVAMENTE MULTIPARTITAS Y MULTIPARTITAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

De manera análoga, para la trayectoria no anti-dirigida  $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2})$  obtenemos que  $u_{i-1}, u_{i+1}$  y  $u_{i+2}$  están en la misma clase. Lo cual es una contradicción, ya que las clases inducen un conjunto independiente de vértices y  $\{u_{i+1}, u_{i+2}\}$  induce una flecha en  $D$ .



En consecuencia, no existe un vértice  $u_i$  en  $P$  con  $0 < i < n$  tal que  $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$  o  $(u_{i+1}, u_i, u_{i-1})$  es una trayectoria dirigida en  $D$ .

Por lo tanto,  $P$  es una trayectoria inducida anti-dirigida en  $D$ .

Si  $D$  es una digráfica multipartita localmente semicompleta, la prueba es análoga intercambiando 'trayectoria anti-dirigida' por 'trayectoria dirigida' y considerando el vértice  $u_i$  en  $P$  con  $0 < i < n$  tal que  $\{u_{i-1}u_i, u_{i+1}u_i\} \subseteq F(D)$  o  $\{u_iu_{i-1}, u_iu_{i+1}\} \subseteq F(D)$ . ■

**Lema 4.2.** *Sea  $H$  una subdigráfica de una digráfica cuasitransitivamente multipartita (respectivamente para una digráfica multipartita localmente semicompleta.) tal que  $\overline{G}_H$  es un ciclo impar inducido de longitud al menos 7. Entonces  $H$  es asimétrica.*

**Demostración.**

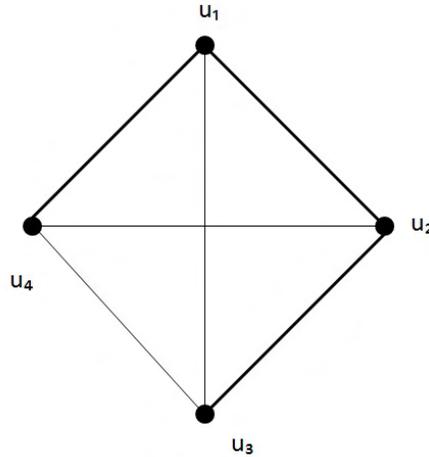
Sea  $H$  una subdigráfica de una digráfica cuasitransitivamente multipartita tal que  $\overline{G}_H$  es un ciclo impar inducido  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$  con  $n \geq 3$ .

Para  $i = 0, \dots, 2n$  consideremos el conjunto  $U_i = \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}$ .

Consideremos el siguiente ejemplo:

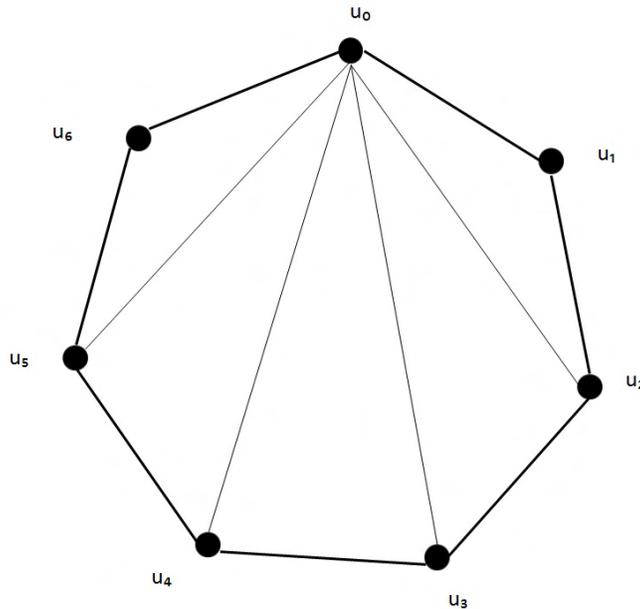
$U_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  y  $H$  es cuasitransitivamente multipartita.

Las aristas marcadas en negritas corresponden a  $\overline{G}_H$ , el resto pertenecen a  $G_H$ , por tanto, la trayectoria  $P = (u_2, u_4, u_3, u_1)$  es inducida en  $G_H[U_1]$  y  $H[U_1]$  es cuasitransitivamente multipartita. Así,  $P = (u_2, u_4, u_3, u_1)$  es antidirigido. Por tanto  $P = H[U_1]$  es asimétrica.



Siguiendo este razonamiento,  $H[U_i]$  es una trayectoria inducida y en consecuencia, por lema 4.1,  $H[U_i]$  es asimétrica, y  $u_0u_k$  es asimétrica para  $k = 2, 3, 3n - 2, 2n - 1$ , pues  $\{u_0u_2, u_0u_3\} \subseteq U_0$  y  $\{u_0u_{2n-2}, u_0u_{2n-1}\} \subseteq U_{2n-2}$ .

Si  $2n + 1 = 7$ , es decir,  $|V(H)| = 7$ . Supongamos que  $H$  no es asimétrica, es decir, tiene al menos una flecha simétrica. Consideremos los conjuntos  $U_0 = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$  y  $U_4 = \{u_4, u_5, u_6, u_0\}$ .



Notemos que las flechas  $\{u_0u_2, u_0u_3\} \subseteq U_0$  y  $\{u_0u_4, u_0u_5\} \subseteq U_4$  son asimétricas, lo cual es una contradicción que viene de suponer que  $H$  tenía al menos una flecha simétrica. En consecuencia,  $H$  es asimétrica.

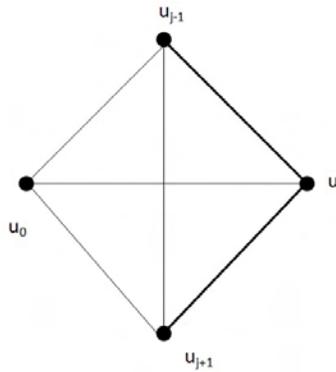
Supongamos que  $2n + 1 \geq 9$ , y supongamos, por contradicción, que  $H$  tiene al menos una flecha simétrica. Enumeramos los vértices en el orden del ciclo. Sean  $u_0$  uno de sus vértices y  $u_j$  el otro. Como  $\vec{G}_H$  es  $\vec{C}_{2n+1}$  entonces  $j \neq 1$  y  $j \neq 2n$ .

4.4. DIGRÁFICAS N.I.C. CUASITRANSITIVAMENTE MULTIPARTITAS Y MULTIPARTITAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

Así,  $u_0u_1 \in \overline{G}_H$  y entonces  $1 < j < 2n$ ; también  $u_0u_{2n} \in \overline{G}_H$  y entonces  $2 \leq j \leq 2n - 1$ . Como  $\{u_0, u_2\} \subseteq H[U_0]$  es asimétrica, entonces  $j \neq 2$  y como  $\{u_0, u_{2n-1}\} \subseteq H[U_{2n-1}]$  es asimétrica, entonces  $j \neq 2n - 1$ . Por tanto,  $3 \leq j \leq 2n - 2$ .

Como  $\{u_0, u_3\} \subseteq H[U_0]$  es asimétrica, entonces  $j \neq 3$  y como  $\{u_0, u_{2n-1}\} \subseteq H[U_{2n-1}]$  es asimétrica, entonces  $j \neq 2n - 2$ .

Por tanto,  $3 < j < 2n - 2$ . Si  $n = 3$ , tenemos que  $3 < j < 4$  lo cual es una contradicción. Consideremos, entonces,  $n \geq 4$ , en este caso, supongamos que tenemos dos trayectorias no anti-dirigidas  $(u_{j-1}, u_0, u_j)$  y  $(u_j, u_0, u_{j+1})$  sin diagonales, en consecuencia, los vértices  $u_{j-1}, u_j$  están en la misma clase y análogamente  $u_j$  y  $u_{j+1}$  están en la misma clase, lo cual es una contradicción, pues  $\{u_{j-1}, u_{j+1}\}$  induce una flecha en  $H$ . En consecuencia,  $H$  es asimétrica.



Si  $D$  es una digráfica multipartita localmente semicompleta, la prueba es análoga al intercambiar "trayectoria anti-dirigida" por "trayectoria dirigida". ■

**Teorema 4.10.** Si  $D$  es una digráfica N.I.C. cuasitransitivamente multipartita, entonces  $D \cong \overrightarrow{C}_3$  o  $D \cong \overrightarrow{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

**Demostración.**

Si  $D$  es una digráfica N.I.C. cuasitransitivamente multipartita.

Si  $G_D$  es perfecta, por el teorema 4.4,  $D \cong \overrightarrow{C}_3$  o  $D \cong \overrightarrow{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ . Supongamos que  $G_D$  no es perfecta, por el teorema 4.1,  $G_D$  o  $\overline{G}_D$  tiene un ciclo impar inducido.

Supongamos que  $G_D$  tiene un ciclo impar inducido,  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$  (con  $n \geq 2$ ).

Como  $C$  tiene una cantidad impar de flechas, hay dos consecutivas en la misma dirección. Entonces  $C$  contiene una trayectoria no anti-dirigida con 4 vértices, lo cual es una contradicción al lema 4.1. Por lo tanto,  $\overline{G}_D$  tiene un ciclo impar inducido de tamaño al menos 5. Como  $\overline{C}_5 = C_5$ , por los mismos argumentos de arriba, llegamos a una contradicción y por lo tanto,  $\overline{G}_D$  tiene un ciclo impar inducido de tamaño al menos 7.

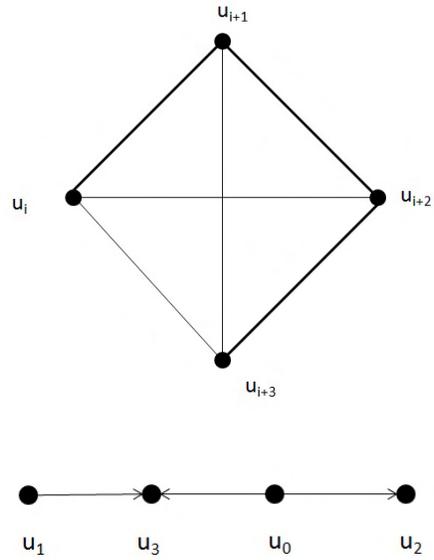
Sea  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$  con  $n \geq 3$  dicho ciclo.

Consideremos el siguiente conjunto de vértices consecutivos en  $C$ ,

$$U_i = \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\} \text{ para } i = 0, \dots, 2n.$$

$(u_{i+1}, u_{i+3}, u_i, u_{i+2})$  es una trayectoria inducida en  $G_H$ , entonces por el lema 4.1 esta trayectoria es anti-dirigida en  $D$ .

Como la numeración de los vértices es circular, podemos suponer que para  $i = 0$ , tenemos:



Para  $i = 1$ , como  $u_1 u_3 \in F(D)$  tenemos:



4.4. DIGRÁFICAS N.I.C. CUASITRANSITIVAMENTE MULTIPARTITAS Y MULTIPARTITAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.

Para  $i = 2$ , como  $u_2u_4 \in F(D)$  tenemos:

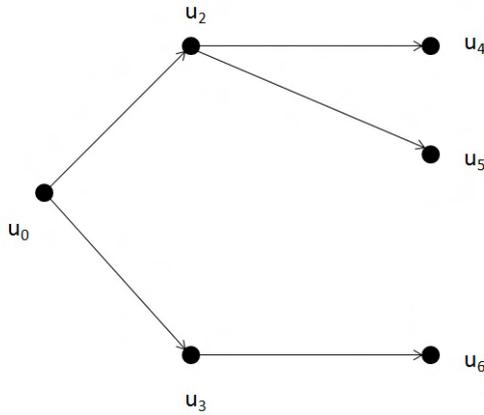


Siguiendo este razonamiento obtenemos que para  $i = 2n$ ,  $\vec{C}_{2n+1}(2,3)$  es una subdigráfica asimétrica de  $D[V(C)]$  con el ordenamiento circular de  $C$  en  $\overline{G}_D$ .

Supongamos que  $2n + 1 = 7$ , entonces  $D[\{u_0, u_2, u_4\}] = \vec{C}_3$  que es N.I.C., lo cual es una contradicción. Así,  $2n + 1 \geq 9$ .

Si  $2n + 1 = 9$ ,  $D[\{u_0, u_3, u_6\}] = \vec{C}_3$  que es N.I.C., lo cual es una contradicción. Así,  $2n + 1 \geq 11$ . Sea  $H = D[V(C)]$ , por tanto,  $H$  es subdigráfica inducida de una digráfica cuasitrasitivamente multipartita tal que  $\overline{G}_H = \overline{G}_{D[V(C)]} = C$  y  $|C| \geq 11$ .

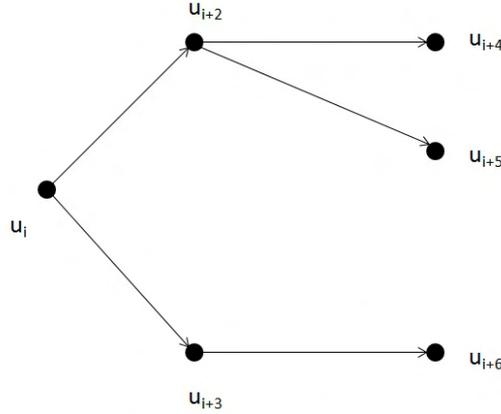
Por el lema 4.2,  $H$  es asimétrica y  $\{u_0, u_4\} \subseteq V(C)$  y  $\overline{G}_H = \vec{C}_{2n+1}$ .



CAPÍTULO 4. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIGRÁFICAS N.I.C. LOCALMENTE IN (EX)-SEMICOMPLETAS.

Entonces  $u_0u_4$  ó  $u_4u_0$  son flechas en  $D$ . Si  $u_4u_0$  es una flecha en  $D$ , entonces obtenemos  $(u_0, u_2, u_4, u_0) = \vec{C}_3$ , lo cual es una contradicción, y por lo tanto,  $u_0u_4 \in F(D)$ . Similarmente, obtenemos que  $u_0u_5$  y  $u_0u_6$  son flechas en  $D$ .

Así, para toda  $i$ ,  $u_iu_{i+4}, u_iu_{i+5}, u_iu_{i+6} \in F(D)$ .



Entonces obtenemos que  $\vec{C}_{2n+1}(2, 3, 4, 5, 6)$  es una subdigráfica asimétrica de  $H = D[V(C)]$  con el ordenamiento circular de  $C$  en  $\overline{G}_D$ .

Siguiendo con este razonamiento obtenemos que

$H \cong \vec{C}_{2n+1}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, n)$ ,  
ya que en este caso  $(u_0, u_{n-1}, u_{n+1}, u_0) = \vec{C}_3$  lo cual es una contradicción.

La prueba para el caso dual (las flechas van en sentido contrario) es análoga. Por lo tanto, la gráfica  $G_D$  es perfecta y por el teorema 4.4 tenemos la conclusión deseada. ■

**Teorema 4.11.** Si  $D$  es una digráfica N.I.C. multipartita localmente semicompleta, entonces  $D$  es un ciclo impar,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

**Demostración.**

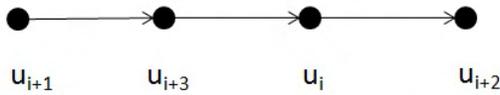
Sea  $D$  una digráfica N.I.C. multipartita localmente semicompleta. Si  $G_D$  es perfecta, entonces por el teorema 4.4  $D \cong \vec{C}_3$  o  $D \cong \vec{C}_m(1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$  para alguna  $m \geq 4$ .

Supongamos que  $G_D$  no es perfecta, entonces por el teorema 4.1  $G_D$  o  $\overline{G}_D$  contiene un ciclo impar de longitud mayor o igual que 5. Supongamos que  $G_D$  contiene un ciclo impar de longitud mayor o igual que 5, sea  $C_{2n+1}$  dicho ciclo con  $n \geq 2$ , por el lema 4.1,  $C_{2n+1}$  es un ciclo dirigido y como  $D$  es una digráfica N.I.C., entonces  $D = C_{2n+1}$  de longitud mayor o igual que 5.

Supongamos que  $\overline{G}_D$  contiene un ciclo impar inducido de longitud mayor o igual que 7, digamos  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$  con  $n \geq 3$  y consideremos el siguiente conjunto de vértices consecutivos en  $C$ ,  $U_i = \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}$  para  $i = 0, \dots, 2n$ , entonces  $(u_{i+1}, u_{i+3}, u_i, u_{i+2})$  inducen una trayectoria en  $G_D[U_i]$ . Como  $D$  es multipartita localmente semicompleta, dicha trayectoria es dirigida. Por el lema 4.2  $H = D[V(C)]$  es asimétrica y por el lema 4.1 todas las trayectorias  $(u_{i+1}, u_{i+3}, u_i, u_{i+2})$  son dirigidas y van en la misma dirección. Reenumerando si es necesario.

Podemos suponer que para  $i = 0$ , tenemos:

4.4. DIGRÁFICAS N.I.C. CUASITRANSITIVAMENTE MULTIPARTITAS Y MULTIPARTITAS LOCALMENTE SEMICOMPLETAS.



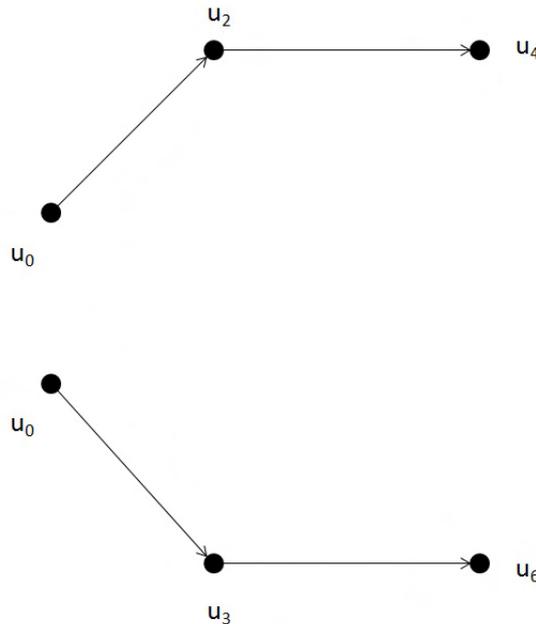
Para  $i = 1$ , como  $u_1u_3$  tenemos:



Siguiendo este razonamiento obtenemos que para  $i = 2n$ ,  $\vec{C}_{2n+1}(2, -3)$  es una subdigráfica asimétrica de  $D[V(C)]$  con el ordenamiento circular de  $C$  en  $\overline{G}_D$ .

Si  $2n + 1 = 7$  tenemos que  $H = D[V(C)] \supseteq \vec{C}_7(2, -3) = \vec{C}_7(1, 2)$  que es N.I.C., por tanto  $H = D = \vec{C}_7(1, 2)$ .

Si  $2n + 1 \geq 9$ ,  $u_0u_4$  son adyacentes y análogamente lo son  $u_0u_6$ , ya que si consideramos tanto  $u_4u_0$  como  $u_6u_0$  obtenemos un  $\vec{C}_3$  inducido, lo cual es una contradicción.



Para el caso en el que la trayectoria  $(u_{i+1}, u_{i+3}, u_i, u_{i+2})$  tenga la dirección contraria, la prueba es análoga. Por lo tanto,  $D$  es un ciclo impar de orden al menos 5,  $D \cong \vec{C}_7(1, 2)$  o  $G_D$  es una gráfica perfecta. ■

# Conclusión.

Iniciamos nuestro trabajo sobre la caracterización de las digráficas N.I.C. localmente semicompletas primeramente, hablando sobre algunos conceptos que nos serían de utilidad para situarnos en el contexto de la descripción de la estructura de la digráfica de condensación y posteriormente, añadiendo propiedades a la digráfica original y viendo qué cosas cumplía y cuáles no. Poco a poco nos fuimos adentrando en el mundo de las digráficas circulares y su descomposición; estudiamos varios resultados concernientes a dicha propiedad y a la de ser localmente semicompleta, de la cual también estudiamos su descomposición. Para finalizar el capítulo 2, describimos el comportamiento de las digráficas localmente semicompletas conexas; todo esto con la finalidad de situarnos en el contexto adecuado para comprender el funcionamiento de las digráficas N.I.C. (el cual fue estudiado minuciosamente en los capítulos 3 y 4 ) y las más recientes caracterizaciones que se han obtenido acerca de este tipo de digráficas.

En el capítulo 3 la curiosidad nos llevó a clasificar algunas digráficas N.I.C. como son  $\vec{C}_3$ ,  $\vec{C}_7(1,2)$ ,  $\vec{C}_{2n+1}$ , etc, y también a explicar bajo qué condiciones una digráfica es N.I.C. localmente semicompleta, cuasitransitivamente multipartita o localmente semicompleta; todo esto en el último capítulo del presente trabajo.

Finalmente, muchos problemas que son *NP*-completos para digráficas en general, tienen algoritmos polinomiales para digráficas semicompletas. Por ejemplo, en este trabajo ya vimos que la parte asimétrica de una digráfica N.I.C. localmente semicompleta es un ciclo dirigido o  $\vec{C}_7(1,2)$ . El decidir si una digráfica es isomorfa a un ciclo dirigido o a  $\vec{C}_7(1,2)$  es polinomial, y para el caso en que la parte asimétrica sea un ciclo, el determinar si dicho ciclo es impar o no, o una digráfica semicompleta o no, es polinomial. En consecuencia, es polinomial determinar si una digráfica localmente semicompleta es N.I.C. y recordemos que si conocemos la caracterización de las digráficas N.I.C. localmente semicompletas podemos saber si una digráfica localmente semicompleta dada contiene o no un tal digráfica, y en caso de no contenerla, sabemos que tiene un núcleo. Recordemos también que saber si una digráfica dada tiene núcleo o no es de mucha utilidad en una gran cantidad de problemas prácticos, como se explicó en la introducción.

# Bibliografía

- [1] C. Balbuena, M. Guevara y M. Olsen, *Structural properties of CKI-digraphs*. AKCE Int. J. Graphs Comb. **11**, 67-80 (2014).
- [2] J. Bang-Jensen, *Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments*. J. Graph Theory. **14**, 371-390 (1990).
- [3] J. Bang-Jensen, Y. Guo, G. Gutin y L. Volkmann, *A classification of locally semicomplete digraphs*. Discrete Math. **167**(168), 101-114 (1997).
- [4] J. Bang-Jensen y G. Gutin, *Digraphs: theory, algorithms, and applications*. Monographs in mathematics. Springer, 2010.
- [5] J. Bang-Jensen y G. Gutin, *Generalizations of tournaments. A Survey*. J. Graph Theory. **28**, 171-202 (1998).
- [6] J. Bang-Jensen y J. Huang, *Quasi-transitive digraphs*. J. Graph Theory. **59**, 257-265 (1986).
- [7] J.M. Le Bars, *Counterexample of the 0 – 1 law for fragments of existential second- order logic; an overview*, Bull. Symbolic Logic, **9** 67-82 (2000).
- [8] C. Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam (1985).
- [9] V. Chvátal, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report no. CRM-300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [10] Y. Dimopoulos, V. Magirou, C.H. Papadimitriou, *On kernels, defaults and even graphs*. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. **20**, 1-12 (1997).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] P. Duchet, H. Meyniel, *A note on kernel-critical graphs*, Discrete Math. **33**, 103-105 (1981).
- [12] A.S. Fraenkel, *Combinatorial game theory foundations applied to digraph kernels*. Electron. J. Combin.**4**, 2 (1997), Research Paper R10.
- [13] H. Galeana y V. Neumann-Lara, *On Kernel-perfect critical digraphs*. Discrete Math.**59**, 257-265 (1986).
- [14] H. Galeana y M. Olsen, *A characterization of locally semicomplete CKI-digraphs*. Graphs and Combinatorics. **32**, 1873-1879 (2016).
- [15] H. Galeana y M. Olsen, *A characterization of locally in- / locally out-semicomplete CKI-digraphs*. (in preparation).
- [16] T. W. Haynes, T. Hedetniemi y P.J. Slater, editors, *Domination in Graphs, Advanced Topics*. Marcel Dekker Inc.,(1998).