



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO NUMÉRICO DE ISLAS MAGNÉTICAS EN
EXPERIMENTOS DE FUSIÓN NUCLEAR CONTROLADA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

ILYA ORSON SANDOVAL CÁRDENAS



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. JULIO JAVIER MARTINELL BENITO**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Sandoval
Cárdenas
Ilya Orson
442 146 17 12
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
412005581

2. Datos del tutor

Dr
Julio Javier
Martinell
Benito

3. Datos del sinodal 1

Dr
José Julio Emilio
Herrera
Velázquez

4. Datos del sinodal 2

Dr
Alejandro
Lara
Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dr
Luis
Benet
Fernández

6. Datos del sinodal 4

Dr
Martín de Jesús
Nieto
Pérez

7. Datos del trabajo escrito.

Estudio numérico de islas magnéticas en experimentos de fusión nuclear controlada
68 p.
2017

Dedicatoria

A ti, mamá. Tu incondicional e incesante apoyo fue, sin lugar a duda, el mejor impulso que he tenido durante toda la vida. Espero que esta tesis sirva como ícono de tu esfuerzo, aunque sobra decir que se queda corta por mucho.

Y a ti, papá, por tu confianza total e impetuoso respaldo, siempre me ayudaron a seguir avanzando. La vivida memoria que tienes de lo que es ser joven es algo que sólo un sabio sabe preservar, gracias por mostrarme que es posible.

A mi hermana, por brindarme un amor inmenso desde antes de llegar a este mundo. Gracias por compartir conmigo tu alegría y jovialidad en cada momento.

Agradecimientos

Le agradezco al Dr. Julio Martinell su apoyo, su paciencia y su meticuloso cuidado en la revisión de este trabajo.

Gracias al proyecto de supercómputo SC16-1-IR-70 por permitir el uso del cluster Miztli y por apoyar rápidamente con las dificultades técnicas o dudas de uso que se presentaron.

Gracias al proyecto Conacyt 152905 por su apoyo económico durante la duración de este trabajo, ciertamente logró su objetivo.

1. Introducción	1
1.1. Fusión nuclear	1
1.2. Interés en la fusión nuclear controlada	2
1.3. Organización	3
2. Física de Plasmas	5
2.1. El estado de plasma	5
2.2. Magnetohidrodinámica MHD	6
2.2.1. Promedios macroscópicos	7
2.2.2. Balance de fuerzas	8
2.2.3. Ley de Ohm	9
2.2.4. Conservación de Masa y Carga	10
2.2.5. Ecuación de estado	11
2.2.6. Ecuaciones de Maxwell	12
2.2.7. Principio de Energía MHD	12
3. Fusión Nuclear Controlada	14
3.1. Confinamiento magnético	14
3.1.1. Transformada rotacional	15
3.2. Experimentos modernos	17
3.2.1. Tokamaks	17
3.2.2. Stellarators	18
3.2.3. Perspectivas futuras	20
3.3. Coordenadas magnéticas	20
3.3.1. Coordenadas de Boozer	23
3.4. Corriente de plasma	24
3.4.1. Problemas en superficies racionales	25
4. Islas magnéticas	26
4.1. Reconexión magnética	26
4.2. Islas Magnéticas	27
4.2.1. Modelo bidimensional	28

4.2.2.	Representación general	29
5.	Códigos de equilibrio magnetohidrodinámico	32
5.1.	El código VMEC	32
5.1.1.	Ecuaciones relevantes	33
5.1.2.	Métodos numéricos	34
5.2.	El código SIESTA	35
5.2.1.	Coordenadas de flujo	36
5.2.2.	Parámetros variacionales	36
5.2.3.	Discretización	37
5.2.4.	Método iterativo	38
5.2.5.	Modificaciones para el estudio de islas	39
6.	Resultados numéricos	41
6.1.	Equilibrio de VMEC	41
6.2.	Perturbaciones con SIESTA	43
6.2.1.	Tokamak DIII-D	45
6.2.2.	Heliac TJ-II	46
7.	Conclusiones	53
7.1.	Estado actual del código	53
7.2.	Futuras perspectivas	54
A.	Modelos de plasmas	55
A.1.	Caracterización de un plasma	55
A.1.1.	Longitud de Debye	55
A.1.2.	Tiempo de respuesta y frecuencia característica	57
A.1.3.	Parámetros de plasma	58
A.2.	Dinámica individual de partículas cargadas	58
A.2.1.	Frecuencia de ciclotrón y radio de Larmor	58
A.2.2.	Derivas del centro guía	60
B.	Coordenadas curvilíneas	61
B.1.	Notación indicial	61
B.2.	Transformaciones	61
B.3.	La métrica	63
B.4.	Diferenciales	64
B.5.	Gradiente, divergencia y rotacional	65
Bibliografía		66

1.1. Fusión nuclear

La *fusión nuclear* se refiere a una reacción nuclear en la que dos átomos se unen para formar otro más pesado y alguna subpartícula. Esta reacción libera energía proporcional a la diferencia de masa entre los productos y los reactivos, según la famosa fórmula de Einstein $E = mc^2$. A la rama de la física aplicada que estudia las maneras de utilizar estas reacciones como fuente de energía se le llama *fusión nuclear controlada*.

A diferencia de la fisión nuclear, que se basa en la separación de un átomo pesado en otros más ligeros, la fusión no se puede generar con una reacción en cadena sin mayores complicaciones. De hecho, la fisión nuclear controlada es utilizada en plantas de energía eléctrica desde la década de los 50s, mientras que aún no existe un reactor de fusión completamente funcional en la actualidad; la fusión nuclear ha mostrado ser mucho más difícil de aprovechar.

Para propiciar la unión de dos átomos ligeros es necesario acercar sus núcleos a una distancia del orden del radio nuclear. A estas escalas, el potencial de Coulomb entre los núcleos cargados positivamente produce una fuerza de repulsión muy fuerte. Es por esto que se requiere una cantidad elevada de energía cinética para superar la repulsión eléctrica, lo que se traduce a calentar los reactivos de fusión a muy altas temperaturas. Para evitar pérdidas de calor se debe reducir el contacto del combustible con su contenedor, lo cual motiva el uso de campos magnéticos como método de confinamiento. Este enfoque se concibió desde los años 50s, cuando se planteó la idea de utilizar mantener un proceso de fusión controlado como método de obtención de energía; se le llama *fusión nuclear magnética*¹.

Las reacciones de fusión nuclear que se plantea utilizar en los primeros reactores funcionales son las asociadas a los isótopos del hidrógeno (deuterio $D = {}^2\text{H}$ y tritio $T = {}^3\text{H}$; ver tabla 1.1) debido a la alta disponibilidad del deuterio², la gran cantidad de energía que produce, y a que alcanzan una tasa de reacción más alta que otros elementos a temperaturas más bajas.

¹Otro enfoque prometedor y moderno es la *fusión nuclear inercial*, que utiliza pequeñas bolas rellenas de combustible y genera la fusión enfocando sobre ellas múltiples láseres.

²El deuterio se encuentra naturalmente en el agua marina, en una concentración aproximada de 1 partícula por cada 6000 moléculas de agua [1].

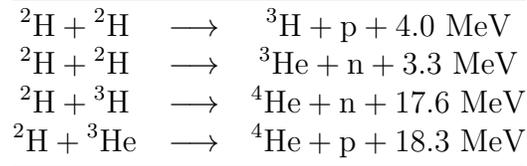


Tabla 1.1: Reacciones de fusión nuclear asociadas con los isótopos de hidrógeno [2].

En los experimentos actuales se utiliza en particular la reacción deuterio-tritio porque es la que requiere menor temperatura para alcanzar una alta tasa de fusión nuclear y porque produce una cantidad de energía considerable. Cabe destacar que la temperatura ideal para esta reacción es del orden de 70keV, temperatura a la cual se excede el potencial de ionización por un factor de 1000 [3]. De esto se concluye que el combustible se encuentra completamente ionizado, en estado de *plasma*, razón por la cual la *física de plasmas* juega un papel crucial en el estudio de la fusión nuclear controlada.

En el futuro lejano se pretende utilizar deuterio-deuterio como combustible, pues el tritio no se encuentra en la naturaleza debido a su corta vida media (4500 ± 8 días [4]); debe sintetizarse artificialmente a partir del litio. Los isótopos de litio presentes en la naturaleza con sus porcentajes de aparición son ${}^6\text{L}$ (7.4 %) y ${}^7\text{L}$ (92.6 %). La reacción más fácil de propiciar es la que involucra al isótopo menos frecuente³ y es una reacción de fisión nuclear: ${}^6\text{L} + \text{n} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H} + 4.8 \text{ MeV}$. Actualmente se introduce en el diseño de reactores una cubierta rica en litio para utilizar los neutrones producidos por la reacción de fusión para generar el tritio, aunque deben frenarse bastante los neutrones altamente energéticos para que se de la reacción. Todas estas consideración complican significativamente el diseño de un reactor de fusión nuclear funcional.

1.2. Interés en la fusión nuclear controlada

El lograr generar energía eléctrica con base en la fusión nuclear ofrece ventajas considerables sobre muchas otras fuentes de energía de la actualidad. Entre sus cualidades se encuentran: residuos poco dañinos, seguridad de operación, capacidad para producir gran cantidad de energía y combustibles prácticamente inagotables, de fácil y barata obtención. Por supuesto, también involucra complicaciones, pero estas no parecen ser insuperables.

La fusión nuclear es una fuente de energía prácticamente inagotable, en el sentido de que la cantidad de combustible que se requiere para abastecer la demanda energética actual, e incluso su proyección de crecimiento futuro, es mucho menor a la disponible en el planeta. Si se utilizara todo el deuterio disponible del océano se podría generar energía para abastecer la demanda actual durante miles de millones de años[3]. Se le puede considerar también como una fuente de energía amigable con el ambiente. El proceso no involucra la liberación de gases de efecto invernadero y aunque sí se generan desechos radioactivos en las reacciones con hidrógeno⁴ estos son 1000 veces menores a los que genera la fisión nuclear para obtener la misma cantidad de energía. Además, tienen una vida media corta, del orden de decenas de años [5]. Por otra parte, es común asociar la imagen de energía nuclear con desastres catastróficos. Esto no puede suceder en un reactor de fusión controlada debido a que, a diferencia de la fisión, el combustible nuclear debe ser constantemente administrado para mantener la generación de energía. Así, la cantidad de combustible contenido

³Aún así, se estima que las reservas geológicas pueden proporcionar este isótopo por más de 10000 años [3].

⁴Los neutrones generados en el proceso vuelven radioactivos a los materiales circundantes.

en el reactor durante la operación es insuficiente para ocasionar una súbita liberación de energía si se llegara a perder el control.

Los aspectos desfavorables de esta fuente de energía son de aspecto técnico y económico. Para la ignición del combustible se requiere una temperatura de $150 \times 10^6 \text{K}$ y mantener confinado al combustible, mientras se propicia la fusión, durante el tiempo necesario para generar más energía de la invertida. El confinamiento es especialmente difícil. No todos los procesos físicos involucrados han sido aclarados y las herramientas de diagnóstico son en general indirectas. Los diseños de reactores involucran desafíos fuertes para la ingeniería y han resultado muy costosos hasta el momento. Algunos de los retos que se enfrentan son: los procesos de calentamiento del combustible, el uso de materiales adecuados y el arreglo intrincado de bobinas superconductoras. Estos y otros factores no han permitido que los resultados actuales sean rentables, ni energética ni económicamente.

Como se ha mencionado, hay muchas motivaciones fuertes para realizar trabajos en el área de fusión nuclear controlada. En realidad, el hecho de que los problemas asociados a esta fuente de energía sean técnicos y no fundamentales permite mantener fuertes esperanzas de éxito. La visión de una fuente de energía sustentable y limpia incluye la solución a problemas relacionados con el uso excesivo de hidrocarburos y nuestra actual dependencia de estos como fuente principal de energía. Entre estos problemas se encuentra el calentamiento global, la contaminación en zonas industrializadas y el futuro desabasto energético. El análisis de estos problemas nos aleja demasiado del tema específico de este trabajo como para incluirlos aquí con detalle; baste decir que son lo suficientemente influyentes para nuestro futuro como para justificar los esfuerzos realizados y los que faltan. También hay que tener en cuenta que, bajo el esquema de trabajo actual, se proyecta que alcanzar la meta de construir una planta de energía funcional y rentable tomará no menos de 50 años [5]. Acelerar este proceso es posible pero requiere de una gran inversión en el tema y es poco probable que suceda. Aún así, esta constituye una de las únicas fuentes de energía limpia que parecen capaces de solventar la demanda energética de futuras generaciones.

Este trabajo se enfoca en un fenómeno que modifica las configuraciones magnéticas de equilibrio, y cuyos efectos en la estabilidad del confinamiento del combustible pueden ser indeseados en general. La generación de islas magnéticas se debe a la reconexión magnética, un fenómeno no comprendido por completo aún. El estudio de sus características es importante debido a que su aparición es inevitable. Además de los tratamientos analíticos, es importante un enfoque numérico para el estudio de las configuraciones con islas reales en reactores experimentales, donde la geometría de los reactores puede llegar a complicar bastante el análisis.

1.3. Organización

El tema principal de esta tesis es el estudio numérico de *islas magnéticas* en un reactor de fusión nuclear. Para obtener una presentación congruente del tema se incluyen algunos conceptos básicos relevantes de la física de plasmas. En el **segundo capítulo** se explica la derivación del modelo de magnetohidrodinámica ideal y resistivo en términos sencillos y se concluye con una derivación variacional de un principio de mínima energía muy útil para fines computacionales. En el **tercer capítulo** se hace una introducción a la fusión nuclear controlada en su versión actual. Incluye una pequeña descripción de las reacciones de fusión y experimentos de confinamiento más prometedores para evolucionar en un reactor funcional. También incluye una presentación de las coordenadas normalmente utilizadas en el estudio de fusión nuclear, incluido este trabajo. Finaliza con un problema relacionado con la aparición de islas magnéticas. El **cuarto capítulo** describe el fenómeno de reconexión magnética, aún no entendido por completo, y su relación

con la aparición de islas magnéticas. Posteriormente se expone la relación entre el tamaño de estas con la amplitud de la perturbación que las produce. Los procesos dinámicos involucrados se omiten, pues en este trabajo solo nos concentramos en situaciones de equilibrio. Al final se mencionan algunos fenómenos interesantes que florecen bajo la interacción de distintas islas. El **quinto capítulo** describe a grandes rasgos los códigos utilizados, VMEC y SIESTA, desarrollados en el Laboratorio Nacional de Oak Ridge. Estos se instalaron en la supercomputadora Miztli de la UNAM, donde su programación en paralelo se podía explotar. Ambos pertenecen a una familia de códigos más grande llamada STELLOPT, que tiene como objetivo futuro analizar experimentos de fusión controlada modernos, especialmente stellarators, mediante simulaciones en tiempo real, es decir, simultáneamente con el experimento. El **sexto capítulo** presenta algunos resultados de las simulaciones realizadas para el tokamak DIII-D y el heliac TJ-II. Las conclusiones finales del trabajo se exponen en el **septimo capítulo**. Se incluyen un par de apéndices auxiliares: el primero relacionado con la física de plasmas en la aproximación de una partícula y el segundo con las herramientas matemáticas necesarias para utilizar coordenadas curvilíneas.

La física de plasmas juega un papel crucial para lograr el confinamiento del combustible en un reactor nuclear debido a que las altas temperaturas involucradas inducen que el combustible se encuentre ionizado casi por completo. En esta sección se describe brevemente lo que se considera un plasma y el modelo de este que se utiliza en las siguientes secciones. Los detalles asociados a otros modelos y la caracterización del plasma se encuentran en el apéndice A.

2.1. El estado de plasma

Un plasma es un gas ionizado *cuasineutral* que presenta *fenómenos colectivos*. Se considera *cuasineutral* debido a que las fluctuaciones de carga solo son notorias a escalas microscópicas, a escalas mayores parece ser un material neutro. Los *fenómenos colectivos* se refieren a aquellos que aparecen debido a que los campos eléctricos y magnéticos generan fuerzas de largo alcance que dominan sobre las colisiones de corto alcance entre partículas. Un gas puede encontrarse parcialmente ionizado, pero solo cuando se presentan dichos fenómenos se le puede considerar un plasma. Debido a la fenomenología asociada a esto, se llega a considerar al estado de plasma como el cuarto estado de la materia.

$e + A \rightarrow A^+ + 2e$	Ionización por colisión
$h\nu + A \rightarrow A^+ + e$	Fotoionización
$A^+ + 2e \rightarrow A + e$	Recombinación de tres cuerpos
$A^+ + e \rightarrow A + h\nu$	Recombinación de dos cuerpos

Tabla 2.1: Procesos de ionización y recombinación en un plasma [2].

Los procesos que estimulan la ionización pueden ser asociados a colisiones o interacciones radiación-materia. La tabla 2.1 muestra sus expresiones simbólicas y las de los procesos contrarios (de recombinación). En una condición de equilibrio termodinámico los procesos de ionización y los de recombinación se generan en la misma tasa. Hay múltiples modelos para describir el estado de plasma y caracterizarlo.

2.2. Magnetohidrodinámica MHD

El modelo de partículas individuales (descrito en el apéndice A.2) no considera que la dinámica de las partículas también genera campos electromagnéticos, en este sentido no es *autoconsistente*. Por otro lado, obtener la solución a las ecuaciones de movimiento para N partículas en un sistema macroscópico es impracticable, por lo que para el estudio MHD se utiliza el mismo enfoque que en la dinámica de fluidos clásica, es decir, se considera al plasma como un sistema continuo y se analiza la dinámica de un pequeño volumen de este. El comportamiento microscópico entra en escena con análisis más complicados que incluyen, por ejemplo, coeficientes de transporte y de momento, pero estos no se utilizan en este trabajo.

Los electrones e iones se pueden considerar como dos fluidos distintos que ocupan el mismo espacio al tomar en cuenta que la frecuencia de interacción entre partículas de la misma especie es mayor que la de interacción entre iones y electrones¹. Por esta misma razón se suele asociar una temperatura distinta a los electrones T_e y a los iones T_i , o una presión distinta a cada especie p_e y p_i . Aún así, este enfoque debe considerar la interacción entre los dos fluidos, lo que lo vuelve un enfoque más completo pero también más complicado del que es necesario en este trabajo y en general para los análisis de estabilidad y equilibrio en confinamiento de plasma.

La *magnetohidrodinámica (MHD)* se refiere al modelo fluido en el que se considera que una sola especie de partículas constituye el plasma al promediar la dinámica del fluido de electrones y del de iones. El modelo de *MHD ideal* es el modelo fluido más sencillo, aún así es capaz de describir las propiedades macroscópicas de equilibrio y estabilidad en confinamiento de plasma, lo cual lo vuelve muy valioso para el estudio de reactores de fusión nuclear. No se pueden describir muchos fenómenos (entre ellos los asociados con las islas magnéticas) importantes con este modelo sin mayores consideraciones, pero el simple hecho de describir a grandes rasgos la geometría necesaria para el confinamiento es un gran avance. De hecho, las ecuaciones del modelo se tornan complicadas para resolverlas analíticamente conforme se altera la geometría de confinamiento bajo estudio, por lo que se vuelve necesario utilizar métodos numéricos. Resolver los problemas equivalentes en modelos más completos se vuelve muy complicado, incluso al buscar soluciones numéricas. Cabe destacar que se debe utilizar el modelo para estudiar fenómenos con distancias características mayores al radio de Larmor de los iones $\lambda_{\text{MHD}} \gg r_L$ y escalas de tiempo mayores al periodo de ciclotrón $\tau_{\text{MHD}} \gg 1/\omega_L$. Usualmente se utilizan como cota de referencia al radio y al periodo asociados a los iones, pues estos son mayores a los de los electrones.

Para obtener las ecuaciones que rigen a este modelo se supone un plasma dominado por las colisiones de Coulomb, es decir, interacciones electromagnéticas de corto alcance, no las ocasionadas por campos externos. Esto no se cumple en general². A pesar de esta simplificación, casi todos los fenómenos analizados por este modelo no están influenciados directamente por las características de las colisiones, por lo que las predicciones son correctas en un amplio rango. Por otra parte, está restringido a escalas de tiempo lo suficientemente grandes como para suponer equilibrio térmico y poder utilizar una única temperatura.

Las colisiones mantienen a las partículas de un fluido clásico confinadas parcialmente en un volumen con radio característico aproximadamente igual al camino libre medio. En un plasma, el confinamiento parcial equivalente lo proporciona el radio de Larmor en la dirección perpendicular

¹La relación real es $\nu_{ee} \sim \nu_{ei} \gg \nu_{ii} \gg \nu_{ie}$, donde ν_{ei} es la frecuencia de colisión del electrón con el ion.[6]

²La suposición entra implícitamente al utilizar la distribución de Maxwell o la presión clásica [1, 3]. En este aspecto es notoria la *paradoja de Langmuir*: la función de distribución de los electrones se asemeja a la distribución de Maxwell más de lo explicable por frecuencia de colisiones. Este fenómeno se presenta en otro contexto pero muestra que el problema no es tan grave o al menos que es bastante sutil.

al campo³, por lo que el plasma se comporta como un fluido clásico solo en esta dirección. En la dirección paralela al campo se debe utilizar un modelo cinético más completo. Se puede concluir que la dinámica de un plasma es mucho más influenciada por su interacción con campos magnéticos que por colisiones, razón por la cual los modelos fluidos representan una simplificación muy fructífera.

2.2.1. Promedios macroscópicos

Para el estudio del modelo se utilizan funciones del tiempo y del espacio que representan cantidades físicas relevantes como la velocidad, la temperatura y la presión. Estas están asociadas a volúmenes δV los suficientemente pequeños como para considerarse infinitesimales y lo suficientemente grandes como para contener un número grande de partículas ($N \sim 10^5$); se busca una descripción macroscópica del sistema. La densidad se define como el número de partículas $N = N_e + N_i$ por unidad de volumen: $n_k = N_k/\delta V$, donde k representa electrones o iones. La densidad en el modelo de un fluido cuasineutral es entonces

$$n := n_i \approx n_e. \quad (2.1)$$

La densidad de masa es la cantidad de masa por unidad de volumen. Considerando la masa de los elementos del fluido como $m = m_i + m_e \approx m_i$, pues $m_e/m_i \sim 10^{-3}$, tenemos

$$\rho = mn. \quad (2.2)$$

La densidad de carga es la carga eléctrica por unidad de volumen. Al considerar solo un fluido, formado por iones y electrones, adquiere la forma

$$\sigma = e(n_i - n_e). \quad (2.3)$$

En fusión nuclear controlada se trabaja con gases inicialmente neutros que se encuentran casi completamente ionizados por las altas temperaturas. Se puede suponer que dentro de fluctuaciones pequeñas el plasma es cuasineutral, por lo que $n_e \approx n_i$ y por ende $\sigma \approx 0$. La velocidad media es la media vectorial de las velocidades de cada partícula contenida en el volumen analizado, y se puede asignar a cada especie ($k = i, e$):

$$\vec{u}_k(\vec{r}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{ik}.$$

Considerando la cuasineutralidad podemos expresar la densidad de corriente como

$$\vec{J} = e(n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e) \approx en(\vec{u}_i - \vec{u}_e). \quad (2.4)$$

La velocidad \vec{u} representa la velocidad del centro de masa:

$$\vec{u} = \frac{m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e}{m_e + m_i} \approx \vec{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \vec{u}_e, \quad (2.5)$$

donde claramente la velocidad de los iones es mucho más determinante que la de los electrones. El momento promedio por unidad de volumen es

$$\rho \vec{u} \approx n_e m_e \vec{u}_e + n_i m_i \vec{u}_i \approx n(m_e \vec{u}_e + m_i \vec{u}_i), \quad (2.6)$$

³Debido a esto, la intensidad del campo B determina también hasta que grado la fenomenología se asemeja a un fluido clásico con colisiones frecuentes.

por lo que la segunda ley de Newton (por unidad de volumen) es

$$\vec{F} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right). \quad (2.7)$$

Cabe notar la diferencia entre ambos lados de la ecuación anterior: la derivada $d\vec{u}/dt$ denota la aceleración de una partícula del fluido conforme este se mueve por el espacio, mientras que su desarrollo $(\partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ está asociado a un volumen fijo en el espacio [7].

2.2.2. Balance de fuerzas

Si se aplica la segunda ley de Newton a un volumen pequeño del fluido se puede obtener la ecuación de movimiento asociada. Para esto, se deben considerar las fuerzas electromagnéticas además de las consideradas en un fluido clásico. Bajo la suposición de un medio isotrópico, se puede representar la presión como una unidad escalar e ignorar los efectos de la viscosidad⁴. La fuerza que esta aplica sobre el volumen δV se puede expresar como

$$- \oint p d\vec{A} = - \int \nabla p dV.$$

Esto significa que la fuerza por unidad de volumen que ejerce el volumen circundante de plasma sobre cualquier punto es $-\nabla p$. La fuerza electromagnética por unidad de volumen, asociadas a campos externos o fenómenos colectivos, está dada por la fuerza de Lorentz: $\sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$, mientras que la fuerza de gravedad es: $nm\vec{g}$.

Al sumar la acción de todas las fuerzas obtenemos la ecuación de movimiento del fluido a partir de la ecuación (2.7)

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = nm \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla p + nm\vec{g}. \quad (2.8)$$

Es usual despreciar la fuerza de gravedad $nm\vec{g} \approx \vec{0}$ debido a la baja densidad del plasma. La fuerza eléctrica es también despreciable respecto a las otras fuerzas si se considera un plasma cuasineutral [6, 8], como los que se utilizan en fusión nuclear. Para el confinamiento magnético es de sumo interés obtener el balance de fuerzas necesario para determinar un estado de equilibrio mecánico y sin flujo, el cual queda determinado por

$$\begin{aligned} \partial \vec{u} / \partial t &= \vec{0}, \\ \vec{u} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Las consideraciones anteriores son aplicables a la ecuación (2.8). Así, obtenemos la ecuación crucial que expresa el equilibrio *magnetohidrostático*:

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla p. \quad (2.9)$$

De aquí se observa que los vectores \vec{B} y \vec{J} yacen en superficies de presión constante:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = \vec{0}, \quad (2.10a)$$

$$\vec{J} \cdot \nabla p = \vec{0}. \quad (2.10b)$$

⁴Estos son bastante difíciles de estudiar y pueden estar relacionados con la vorticidad u otros efectos colisionales. Pueden afectar la estabilidad de un reactor de manera complicada, por ejemplo, sus efectos son apreciables en las fronteras de las islas magnéticas, lo cual es actualmente un tema de investigación.

Ya que las líneas de campo magnético y de corriente están contenidas en superficies isóbaras, a estas se les llama también *superficies magnéticas*.

2.2.3. Ley de Ohm

Como se aprecia en la definición de la corriente (2.4), esta se debe a que los iones y electrones se mueven a distintas velocidades, por lo que se debe recurrir al modelo de dos fluidos para estudiarla con más detalle. En este modelo se estima la interacción entre ambas especies con una expresión de transferencia de momento por colisiones, la cual debe ser simétrica por conservación de momento: $\vec{R}_{ei} = -\vec{R}_{ie}$. Si se considera el balance de fuerzas en este modelo se debe incluir también la transferencia de momento entre ambas especies, lo que resulta en el sistema de ecuaciones:

$$\rho_e \frac{d\vec{u}_e}{dt} = -en(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + \rho_e \vec{g} + \vec{R}_{ei}, \quad (2.11a)$$

$$\rho_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = en(\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i + \rho_i \vec{g} + \vec{R}_{ie}. \quad (2.11b)$$

La ecuación (2.8) se puede obtener sumando las ecuaciones anteriores y utilizando $p = p_i + p_e$. La transferencia de momento debería depender de la diferencia de velocidades entre las especies y ser proporcional a la densidad de ambas y a la carga de estas, pues las interacciones son colisiones de Coulomb. Tomando η como una constante de proporcionalidad⁵ es razonable expresarla como

$$\vec{R}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\vec{u}_i - \vec{u}_e) = mn\nu_{ei}(\vec{u}_i - \vec{u}_e), \quad (2.12)$$

donde ν_{ei} es un parámetro de frecuencia media de colisiones, cuyo valor es [6]

$$\nu_{ei} = \frac{ne^2}{m}\eta. \quad (2.13)$$

La transferencia de momento se puede reescribir utilizando la ecuación (2.4) como

$$\vec{R}_{ei} = \eta ne \vec{J}. \quad (2.14)$$

Si se toma en cuenta que la movilidad de los electrones es mucho mayor a la de los iones se puede asociar exclusivamente a estos la corriente eléctrica generada cuando se considera un plasma solo bajo la influencia de un campo eléctrico. En este caso el sistema (2.11a) en estado estático se reduce a

$$en\vec{E} = \vec{R}_{ei}. \quad (2.15)$$

Al comparar las dos ecuaciones anteriores se deduce que

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\eta}, \quad (2.16)$$

que no es más que la ley de Ohm común, lo que permite interpretar a η como la resistividad clásica. Una expresión más general se puede obtener si se multiplica la ecuación (2.11a) por m_i y se resta a la ecuación (2.11b) multiplicada por m_e para obtener

$$m_i m_e n \frac{d}{dt} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) = en(m_i + m_e)\vec{E} + en(m_e \vec{u}_i + m_i \vec{u}_e) \times \vec{B} \\ - m_e \nabla p_i + m_i \nabla p_e - (m_i + m_e)\vec{R}_{ei}.$$

⁵A esta simple elección se le llama resistividad escalar. Es una simplificación con reparos pues en un plasma magnetizado la resistividad depende de la dirección del campo magnético, donde su magnitud difiere por un factor de 2 entre la dirección paralela y perpendicular al campo.

El segundo término del lado derecho de la igualdad se puede simplificar utilizando (2.4) y (2.6):

$$m_e \vec{u}_i + m_i \vec{u}_e = m_i \vec{u}_i + m_e \vec{u}_e + (m_e - m_i)(\vec{u}_i - \vec{u}_e) = \frac{\rho}{n} \vec{v} - \frac{m_i - m_e}{ne} \vec{J}.$$

Con esto y (2.12) se obtiene

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \eta \vec{J} = \frac{1}{e\rho} \left[\frac{m_i m_e}{e} \frac{d}{dt} \vec{J} + (m_i - m_e) \vec{J} \times \vec{B} + m_e \nabla p_i - m_i \nabla p_e \right].$$

En una condición estática y considerando que $m_i \gg m_e$ se obtiene finalmente

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J} + \frac{1}{en} (\vec{J} \times \vec{B} - \nabla p_e), \quad (2.17)$$

conocida como la *ecuación de Ohm generalizada*. El lado izquierdo de esta ecuación representa el campo eléctrico en un sistema de referencia que se mueve con el plasma. El segundo y tercer término del lado derecho son llamados corriente de Hall y diamagnética, y son usualmente despreciables⁶. Sin estos términos se obtiene la ley de Ohm clásica:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J}. \quad (2.18)$$

El término de resistividad se vuelve pequeño conforme aumenta la temperatura⁷, sin embargo, es importante pues es el único término disipativo de las ecuaciones involucradas en el modelo MHD. Es la única expresión que presenta una manera transformar la energía almacenada en el campo magnético, y por consecuencia, alterar la topología de este. En particular, es muy útil al analizar la aparición de islas magnéticas por medio de reconexión magnética. En el caso $\eta = 0$ se obtiene la ley de Ohm ideal:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \vec{0}. \quad (2.19)$$

2.2.4. Conservación de Masa y Carga

Aquí se deduce la ecuación de continuidad, que en nuestro caso expresa básicamente la conservación de la masa en el cuerpo del plasma o de la carga total. Esto es algo contradictorio si se toma en cuenta que justamente la masa no se conserva en las reacciones de fusión nuclear, pero por desgracia este proceso es lo suficientemente infrecuente como para despreciarlo en una primera aproximación. Por otro lado, normalmente el plasma se encuentra prácticamente ionizado por completo a la temperatura de operación de un reactor, por lo que se pueden despreciar los efectos de ionización y recombinación y se puede aplicar el siguiente análisis a los iones y electrones por separado.

Consideramos un volumen V contenido por completo en el cuerpo del plasma. Si $n_i(\vec{r}, t)$ es la densidad de partículas, la cantidad total de partículas contenida en el volumen es $N = \int_V n dV$ y el flujo de partículas que pasa por la frontera $A = \partial V$ es $\oint_A n \vec{u} \cdot d\vec{A}$. La conservación de partículas requiere que $dN/dt = 0$, lo que implica

$$\frac{d}{dt} \int_V n dV = - \oint_A n \vec{u} \cdot d\vec{A}.$$

⁶Ambas son del orden r_{L_i}/a , por lo que es llamada la aproximación de giroradio pequeño. [6, 3]

⁷Tras un análisis de las colisiones de Coulomb presentes en un plasma se obtiene la llamada *resistividad de Spitzer*, que escala como $\eta \sim T^{-3/2}$. Así, el plasma es un gran conductor a altas temperaturas. [6]

Al ser la frontera fija, la derivada temporal actúa directamente sobre el integrando. Tras utilizar el teorema de Gauss obtenemos la expresión

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}) dV = 0,$$

que al ser válida para cualquier volumen dentro del plasma se concluye que el integrando debe ser nulo en cualquier punto de este, resultando en la *ecuación de continuidad*:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}) = 0. \quad (2.20)$$

Como ya se mencionó, la ecuación anterior es válida para iones y electrones por igual. Si a esta ecuación se le multiplica por la masa de la especie: $\partial(m_k n_k)/\partial t + \nabla \cdot (m_k n_k \vec{u}) = 0$ con $k = i, e$, se suman ambas ecuaciones y se utilizan las definiciones (2.1) y (2.2) se obtiene la ecuación de *continuidad de masa*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.21)$$

Tras multiplicar las ecuaciones de continuidad de cada especie por la carga de la especie correspondiente ($q_i = -q_e \equiv e$), sumar ambas ecuaciones y considerar las definiciones (2.3) y (2.4) se obtiene la ecuación de *continuidad de carga*:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Como parte de la aproximación de cuasineutralidad, se puede despreciar el primer término de la ecuación anterior, por lo que la divergencia del campo de corriente debe ser prácticamente nula:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.22)$$

Esta propiedad no se considera explícitamente como una ecuación del modelo, pues se puede derivar a partir de la versión de las ecuaciones de Maxwell que se utilizan en MHD ideal, en particular, al considerar la divergencia de la ley de Ampère (2.26b).

2.2.5. Ecuación de estado

Es necesario utilizar una relación termodinámica para completar el sistema de ecuaciones por resolver. Una aproximación sencilla del transporte de calor es de la forma

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C, \quad (2.23)$$

para alguna constante C . La potencia γ varía dependiendo de las consideraciones termodinámicas. En el caso de un proceso adiabático, donde se supone que el volumen infinitesimal bajo análisis se encuentra térmicamente aislado del resto del volumen, lo cual es válido para procesos suficientemente rápidos, γ es de la forma

$$\gamma = \frac{N + 2}{N},$$

donde N es el número de grados de libertad. En el caso de un gas ideal tridimensional, equivalente aquí a un plasma de fusión nuclear, se tiene $N = 3$, por lo que la ecuación de estado es

$$p \propto \rho^{5/3}. \quad (2.24)$$

2.2.6. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell modelan los campos producidos por una configuración de cargas y corrientes. El sistema de ecuaciones completo es

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.25a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.25b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.25c)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.25d)$$

El régimen MHD introduce aproximaciones de orden[8]. La aproximación cuasineutral [6], que resulta ser equivalente a considerar fenómenos no relativistas (escalas de tiempo lentas) [3, 9], permite despreciar el último término de la ecuación (2.25d), la corriente de desplazamiento, para conservar solo la ley de Ampère. Por otra parte, la ecuación de Gauss es válida pero solo es útil para determinar la densidad de carga σ , la cuál es por hipótesis muy pequeña y no está acoplada a otra ecuación, por lo que usualmente no se considera primordial en el modelo y se omite. Por lo tanto, la versión simplificada de las ecuaciones anteriores que es utilizada en MHD es⁸

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.26a)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.26b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.26c)$$

2.2.7. Principio de Energía MHD

Es posible demostrar que las soluciones a la ecuación de equilibrio (2.9) son estados que, bajo las restricciones de conservación de masa y flujo magnético, vuelven estacionaria la siguiente expresión [10, 11, 12]

$$W = \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) dV. \quad (2.27)$$

Esta ecuación representa la energía MHD de un plasma estacionario, donde el primer término representa la energía magnética y el segundo la energía térmica. Si se supone un proceso adiabático $p \sim \rho^\gamma$ (2.23), la conservación de masa (2.20) es equivalente a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t},$$

de donde se puede encontrar la variación temporal de la presión⁹:

$$\begin{aligned} \partial_i(\rho v^i) &= p^{\frac{1}{\gamma}} \left(\partial_i v^i + \frac{1}{\gamma p} v^i \partial_i p \right), \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\gamma p \partial_i v^i - v^i \partial_i p = -\gamma \partial_i(\rho v^i) + (\gamma - 1) v^i \partial_i p, \end{aligned}$$

⁸El sistema completo debe incluir alguna versión de la ley de Ohm 2.17 para determinar el campo eléctrico.

⁹Utilizamos la convención de suma de Einstein por simplicidad (ver apéndice B).

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\gamma - 1)\vec{v} \cdot \nabla p - \gamma \nabla \cdot (p\vec{v}). \quad (2.28)$$

Al utilizar la ley de Faraday (2.26a) y la ley de Ampère (2.26b) se sigue que

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

Se asocia una variable nueva al vector de Poynting y al flujo cinético:

$$\vec{S} := \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\vec{v}, \quad (2.29)$$

se utiliza el teorema de Gauss

$$\int \nabla \cdot \vec{S} dV = \oint \vec{S} \cdot dA,$$

y se utiliza la ecuación (2.28) para obtener una expresión útil para la variación de la energía:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} \right) dV = \int (\vec{v} \cdot \nabla p - \vec{E} \cdot \vec{J}) dV - \oint \vec{S} \cdot dA.$$

Al usar la ley de Ohm (2.18) y las condiciones de frontera¹⁰ $\oint \vec{S} \cdot dA = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int \left[\vec{v} \cdot (\vec{J} \times \vec{B} - \nabla p) + \eta J^2 \right] dV. \quad (2.30)$$

Para resistividad baja $\eta \approx 0$ se puede ignorar el último término en el integrando anterior. En este límite resulta que el balance de fuerzas MHD ideal (2.9) es la condición para minimizar la energía definida en (2.27):

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p = 0. \quad (2.31)$$

¹⁰Debido a que el plasma se encuentra confinado, el flujo de energía sobre la frontera de este debe anularse. Estas condiciones equivalen a asumir una pared conductora en la frontera del plasma. En su implementación actual, SIESTA (sección 5.2) solo contempla este caso.

Fusión Nuclear Controlada

En esta sección se exponen brevemente las ideas detrás del diseño de reactores nucleares modernos, así como algunos problemas que estos presentan y que son descritos correctamente a primera aproximación por el modelo expuesto en la sección anterior. También se presentan las coordenadas que se utilizan para analizar los fenómenos en las geometrías complicadas de los stellarators y se analizan con estas problemas relacionados con la corriente.

3.1. Confinamiento magnético

Desde la concepción de la fusión nuclear controlada han aparecido muchas ideas sobre como podría ser un reactor de confinamiento magnético funcional. Hasta ahora los contendientes más prometedores comparten la propiedad de tener la topología de un toro.

Una forma elegante de mostrar que esto no es mera coincidencia se sigue de las ecuaciones de estabilidad MHD ideal (2.9) y del teorema de Poincaré-Hopf, que restringe la forma que puede tener una superficie compacta si esta es tangencial a un campo vectorial sin singularidades. En nuestro caso, si se busca que el campo magnético y el de corriente sean no nulos y no singulares en un volumen finito, y que a la vez sean tangenciales a una superficie de presión constante, dicha superficie debe tener la topología de un toro [10].

La utilidad de utilizar un toro también se puede intuir físicamente al tratar de evitar fugas de combustible en reactores con topología cilíndrica. Es lógico querer unir los puntos de fuga para evitar este problema, y la topología tridimensional resultante tras unir los extremos de un cilindro es la del toro.

Consecuentemente, debido a las condiciones encontradas en (2.10), una línea de campo magnético o de corriente se mantiene sobre la misma superficie de presión constante. Estas superficies en conjunto forman toros anidados sobre un eje magnético circular. La situación se muestra en la figura 3.1.

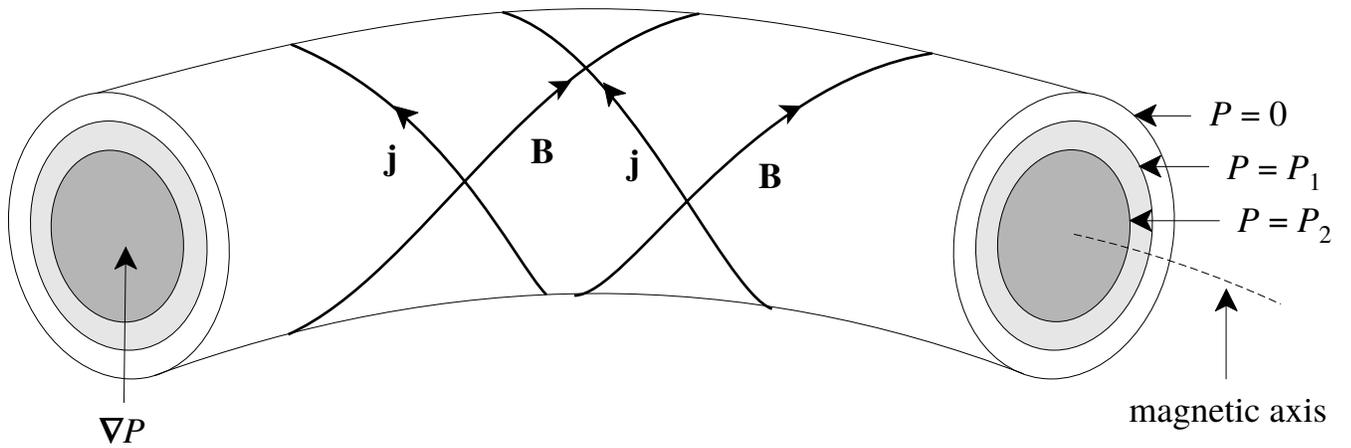


Figura 3.1: Las líneas de campo magnético se mantienen sobre la misma superficie de presión constante. [9]

3.1.1. Transformada rotacional

Una consecuencia práctica de utilizar un toro es que la magnitud del campo magnético tiende a ser mayor cerca del ojo de la dona, lo que ocasiona que el radio de Larmor varíe en función del espacio. Por otra parte, la curvatura de las líneas de campo introduce una fuerza centrífuga que afecta la dinámica de las partículas, pues estas tienden a seguir las líneas de campo. El resultado es una deriva media en las trayectorias de iones y electrones, en sentidos opuestos. Esta polarización produce a su vez un campo eléctrico que genera otra deriva, perpendicular a ambos campos, que empuja a ambas partículas a la región externa del toro con una velocidad proporcional a la magnitud de los campos. Los detalles se exponen en el apéndice A.2.

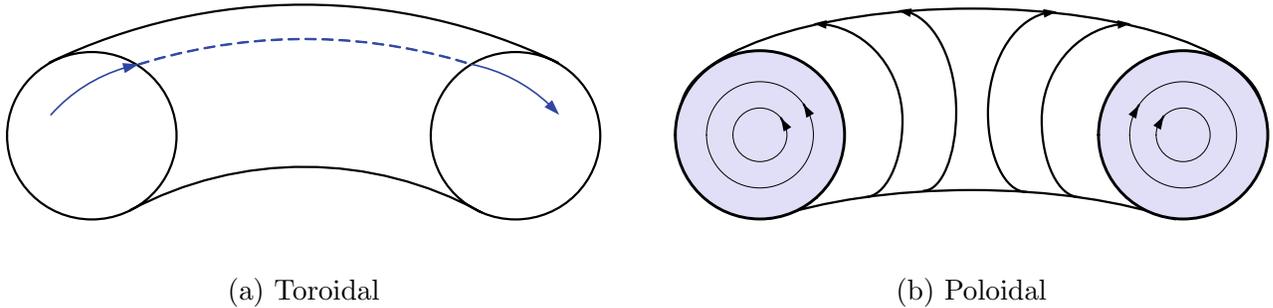


Figura 3.2: Direcciones angulares en un toro axisimétrico. [5]

Se pueden reducir estos efectos si se altera el campo magnético para que el sentido de las derivas cambie a lo largo de las trayectorias de las partículas de modo que, en la media, se anule o al menos se reduzca bastante la deriva neta. Esto se logra al utilizar un campo magnético tal que las líneas de campo tengan torsión, en el sentido de que al dar una vuelta toroidal (camino largo a través del toro) también haya un desplazamiento poloidal (camino corto) de las líneas de campo (figura 3.2).

Para cuantificar dicha torsión se define la *transformada rotacional* como el ángulo poloidal promedio que se desplaza, por revolución toroidal, la intersección de una línea de campo magnético sobre una sección transversal del toro (mapa de Poincaré). Si el ángulo entre la vuelta toroidal k

y $k + 1$ es $\Delta\theta_k$, la transformada es el promedio en el límite de infinitas revoluciones toroidales¹ (figura 3.3):

$$\iota := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Delta\theta_k. \quad (3.1)$$

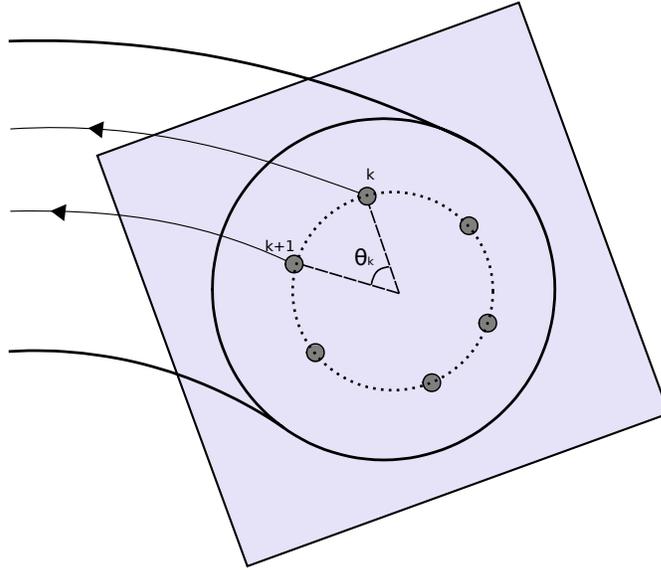


Figura 3.3: Definición de la transformada rotacional. [5]

La transformada rotacional no tiene porque ser la misma sobre distintas superficies magnéticas. De hecho, usualmente varía respecto a la distancia al eje magnético (figura 3.4b); a su razón de cambio se le llama *cizalla magnética*, y es también un factor importante en cuanto a la estabilidad del confinamiento. Su perfil radial se puede ajustar para contrarrestar los efectos adversos de la deriva por campo eléctrico [13].

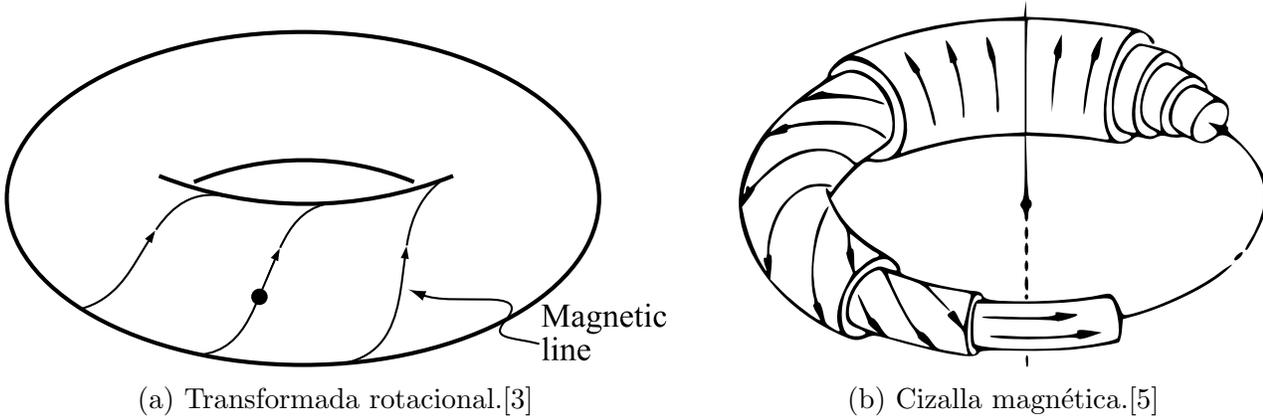


Figura 3.4: Torsión en las líneas de campo magnético.

¹Cuando se trabaja con tokamaks, se acostumbra a utilizar el recíproco: $q \equiv 2\pi/\iota$, llamado *factor de seguridad* por su relación con la estabilidad en esos aparatos. También es común utilizar las correspondientes variables adimensionales: $\iota \rightarrow \iota/2\pi$.

3.2. Experimentos modernos

Al momento de escribir este trabajo, dos diseños experimentales se presentan como los más prometedores para convertirse en reactores de fusión nuclear funcionales y rentables: el *tokamak* y el *stellarator*. Su diferencia más grande radica en la manera en la que producen la transformada rotacional, pues muchas de sus otras diferencias derivan de esta elección. Existen tres maneras de propiciar la torsión en las líneas de campo[14]:

1. Una corriente toroidal dentro del plasma genera una componente poloidal del campo magnético.
2. Rotar la sección transversal de las superficies magnéticas, suponiendo claro que estas no son círculos concéntricos.
3. Modificar el eje magnético para que sea imposible encontrar un solo plano que lo contenga.

El tokamak utiliza la primer opción mencionada, mientras que el stellarator prefiere alguna combinación de las otras opciones. A continuación se describen sus características a grandes rasgos, con base en la exposición más general en [14] y el análisis detallado de [15].

3.2.1. Tokamaks

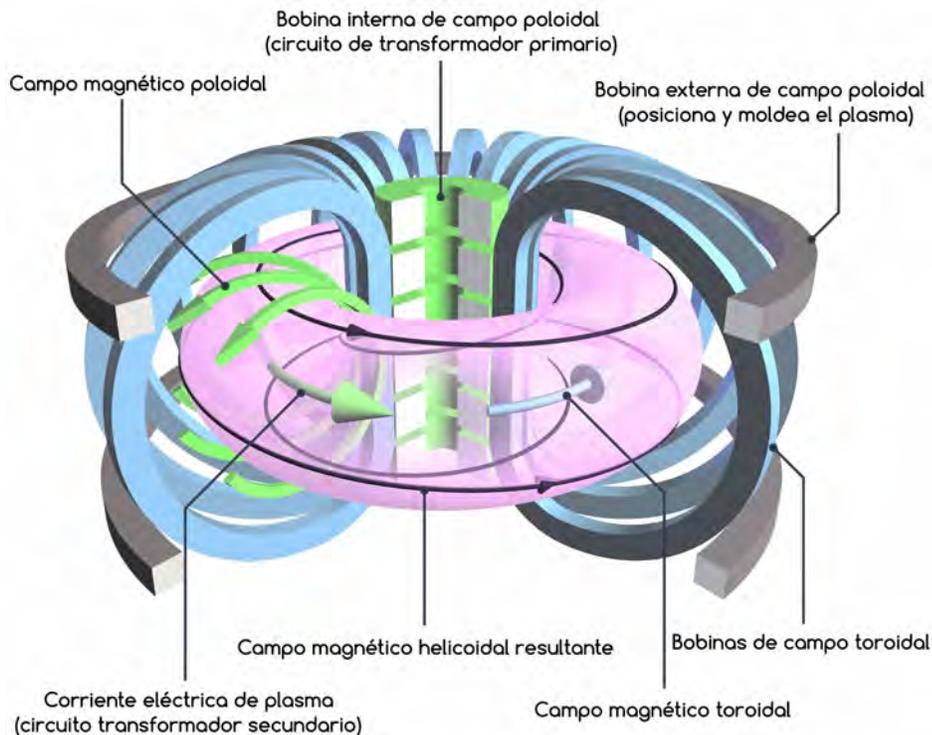


Figura 3.5: Principio de funcionamiento de un tokamak.[16]

El *tokamak*² fue concebido en los 50s por científicos de la ex-Unión Soviética como un posible reactor de fusión. Es un aparato axisimétrico³ que genera el campo magnético toroidal con bobinas

²Acrónimo del ruso: *toroidalnaya kamera magnitnaya katushka* (cámara toroidal con bobinas magnéticas).

³Simétrico respecto a rotaciones alrededor del eje central.

externas que rodean al toro poloidalmente, mientras que el campo magnético poloidal se genera indirectamente mediante una corriente toroidal inducida por un transformador externo. Todos los tokamaks operan pulsadamente debido a que la corriente toroidal se debe inducir con un campo magnético variable. El control de la corriente inducida no es muy fino, pues la forma de esta es difícil de predecir. Además, la corriente da lugar a inestabilidades del plasma que limitan el tiempo de confinamiento, pues se relacionan con rupturas súbitas del equilibrio que pueden incluso ocasionar daños severos a los materiales cercanos al plasma.

Estos aparatos han sido los más estudiados, teórica y experimentalmente, desde el inicio del programa de fusión nuclear controlada. Su axisimetría es su mayor beneficio, facilita todas las áreas de estudio: diseño, simulación computacional, teoría de inestabilidades, recopilación de datos, etc. Aunque aún presentan problemas, la fenomenología del combustible confinado es la más entendida, y se han logrado muchos avances para combatir los problemas mencionados anteriormente. Existen varias clases de tokamaks. Las diferencias entre ellos se relacionan a distintas elecciones para la *razón de aspecto*, definida como la razón entre el radio que va del eje central del toro al eje magnético (radio mayor R^4) y el radio del eje magnético a la frontera del plasma (radio menor a).

3.2.2. Stellarators

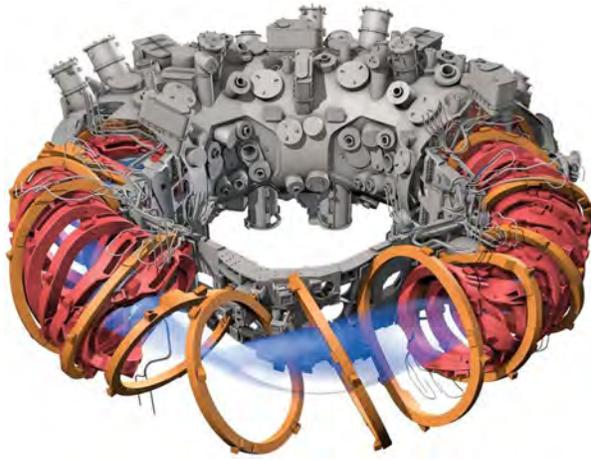
El *stellarator* fue concebido por Lyman Spitzer, un famoso astrofísico estadounidense, también en la década de los 50s[22]. Sólo utiliza corrientes externas para inducir los campos magnéticos requeridos. Generar una transformada rotacional con este enfoque implica un arreglo complicado de las bobinas o una torsión de la cámara de confinamiento. En ambas situaciones es imposible mantener la axisimetría. La idea original de Spitzer utilizaba la segunda solución, pero los experimentos modernos también utilizan la primera, pues incrementa la flexibilidad al poder controlar la corriente externa.

Existen muchas variantes del stellarator bajo estudio (ver figura 3.6); las diferencias entre ellas radican principalmente en la manera en la que se diseñan las bobinas. En la mayoría de ellas se utilizan bobinas helicoidales, es decir, que rodean a la cámara de confinamiento poloidal y toroidalmente al mismo tiempo, pero también es posible utilizar bobinas con diseños tridimensionales optimizados que sólo rodean al toro poloidalmente. El *heliotron* utiliza una serie de cables que rodean al toro helicoidalmente y la corriente fluye en la misma dirección en cada uno. El *heliac* modifica la estructura del eje magnético con una serie de bobinas circulares que rodean poloidalmente al toro y cuyos centros siguen al eje magnético. También cuenta con un anillo toroidal alrededor del cual se enrosca la cámara de confinamiento. El *helias* utiliza una serie de anillos tridimensionales (modulares) que envuelven poloidalmente a la cámara. Se aplica el concepto de *cuasi-axisimetría*⁵ (poloidal en W7-X) para mejorar el confinamiento de las partículas. El diseño de los anillos modulares es optimizado por computadora para reducir los efectos del *transporte neoclásico*⁶ que afectan a los stellarators en general. El *stellarator compacto* utiliza también anillos modulares de corriente y la cuasi-simetría (toroidal en el NCSX). En este caso, esta ocasiona de-

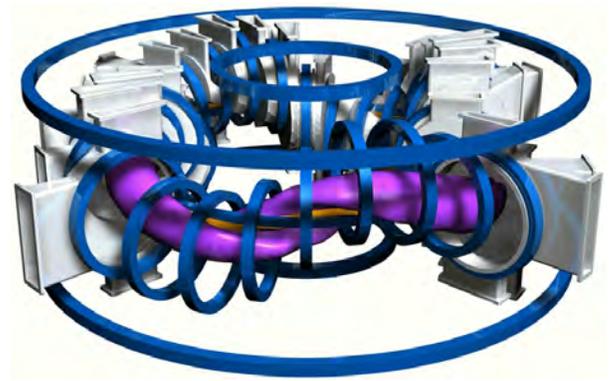
⁴El corrimiento de Shafranov usualmente evita que el eje magnético coincida realmente con R_0 [17].

⁵El campo es cuasi-simétrico cuando la dependencia espacial del campo magnético se reduce aproximadamente a una función bidimensional gracias al diseño de las bobinas. Dependiendo de la variable cuya dependencia disminuya se habla de *cuasi-poloidal*, *cuasi-toroidal* o *cuasi-helical*. La simetría se asocia a la conservación de un momento canónico que resulta en órbitas mejor confinadas.[3]

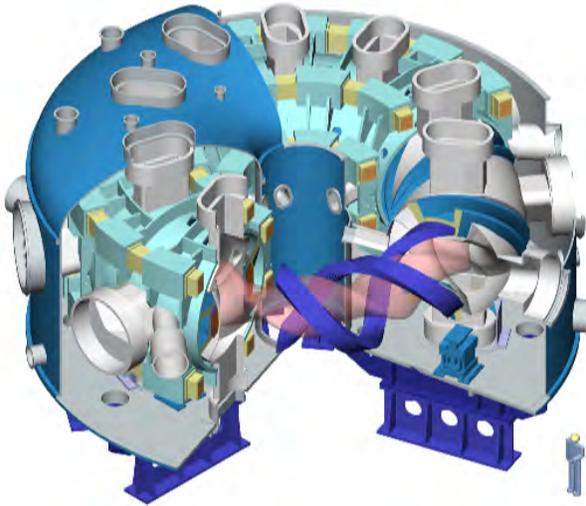
⁶El *transporte clásico* se refiere al transporte que se presenta en un campo magnético uniforme y homogéneo. El *transporte neoclásico* se refiere a las modificaciones que ocasionan la curvatura y el gradiente de intensidad en los campos toroidales utilizados para el confinamiento magnético toroidal [9].



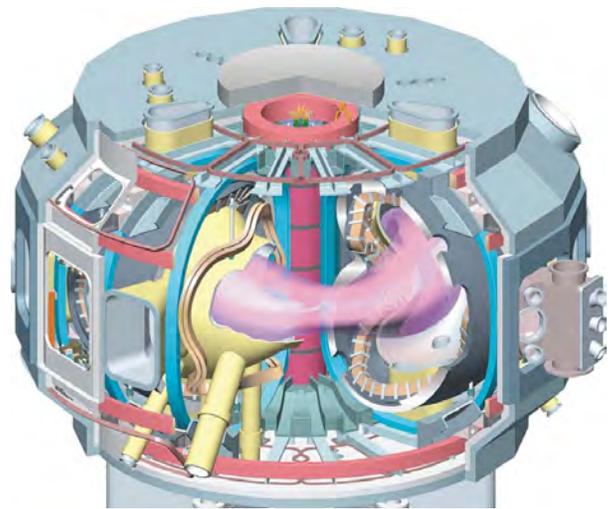
(a) Helias W7-X (Alemania). [18]



(b) Heliac flexible TJ-II (España). [19]



(c) Heliotron LHD (Japón). [20]



(d) Stellarator compacto NCSX (USA). [21]

Figura 3.6: Variantes de stellarator.

rivas toroidales y la aparición de una corriente de bootstrap importante. Se considera un híbrido con un tokamak.

Las complicaciones de construcción relacionadas con la forma y posicionamiento de las bobinas dejaron al stellarator en rezago respecto al tokamak durante varias décadas. Sin embargo, gracias a las optimizaciones permitidas por los avances en ingeniería y el incremento de poder computacional ⁷ hoy en día se presenta como una fuerte alternativa. De hecho, al eliminar la necesidad de una corriente dentro del plasma, permite mayores tiempos de descarga que el tokamak. Se plantea incluso la capacidad de mantenerlo en operación continua, como es deseable para un reactor en el futuro. La geometría intrincada ocasiona también un reducido control del confinamiento en relación a fenómenos como el transporte neoclásico. Además, la cantidad de plasma que maneja en proporción a su tamaño es menor.

⁷ Determinar el arreglo óptimo de las bobinas es un problema con muchos grados de libertad (50 a 4 respecto al tokamak[20]) lo que complica mucho el hallar la mejor solución.

3.2.3. Perspectivas futuras

En un notable esfuerzo internacional, se ideó ITER (en construcción aún), el tokamak más grande de la historia, que planea ser el primer experimento de fusión nuclear que logre obtener más energía de la que requiere para su operación⁸. Este proyecto no es rentable para ser un reactor real, pero se planea que sea el último paso antes de poder dar el salto a lo que sería energía sustentable a base de fusión nuclear. Por otra parte, no existe un proyecto internacional de las dimensiones de ITER enfocado en el stellarator, pero las extrapolaciones de experimentos actuales son optimistas y predicen resultados similares a esa escala[14]. Ambas perspectivas tienen que superar problemas relacionados con el manejo de la temperatura en la frontera del contenedor, el manejo de neutrones energéticos que activen los materiales circundantes y el control de inestabilidades. El tokamak es más benévolo desde el punto de vista de la ingeniería, mientras que el stellarator presenta condiciones físicas más favorables. En el futuro se tendrá que determinar que enfoque es preferible (o hasta un punto intermedio entre ambos) para lograr un reactor rentable.

3.3. Coordenadas magnéticas

Como se detalló en la sección 2.2.2, en una situación de equilibrio mecánico los vectores de campo magnético \vec{B} y de corriente \vec{J} se encuentran en superficies de presión constante:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (3.2a)$$

$$\vec{J} \cdot \nabla p = 0, \quad (3.2b)$$

lo que se sigue de la ecuación de equilibrio magnetohidrostático en el régimen MHD ideal:

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla p. \quad (3.3)$$

Para manejar esta situación es conveniente introducir *coordenadas magnéticas*, donde una coordenada sea constante sobre las curvas de nivel de la presión y las líneas de campo magnético sobre estas superficies sean funciones lineales en términos de las coordenadas angulares. Esta sección está basada en la exposición de [23]. En el apéndice B se resumen los elementos importantes para trabajar con coordenadas curvilíneas como las utilizadas en este trabajo; una presentación completa de coordenadas magnéticas se puede consultar en [24].

Sean (p, ϑ, φ) coordenadas generales para describir la topología toroidal (ver figura 3.7)⁹. En este caso, la presión p es semejante a una coordenada radial con centro en el interior del toro y ϑ y φ son coordenadas angulares tales que ϑ es periódica en la dirección *poloidal* (circuito corto a través del toro) y φ en la dirección *toroidal* (circuito largo), ambas con periodo 2π (ver la figura 3.2). El jacobiano es (ver apéndice B)

$$\mathcal{J} = J^{-1} = 1/\sqrt{g} = \nabla p \cdot \nabla \vartheta \times \nabla \varphi \neq 0. \quad (3.4)$$

Para satisfacer la ecuación (3.2a) directamente, se parte de la expresión del campo magnético

$$\vec{B} = B_1(p, \vartheta, \varphi) \nabla p \times \nabla \vartheta + B_2(p, \vartheta, \varphi) \nabla \varphi \times \nabla p, \quad (3.5)$$

⁸Aproximadamente, se esperan producir 500MW del proceso de fusión con una inversión de 50MW durante un periodo de 7 minutos[14].

⁹La coordenada $\psi = \psi(p)$ se puede considerar como una reparametrización de la presión: $\nabla \psi = \psi'(p) \nabla p$.

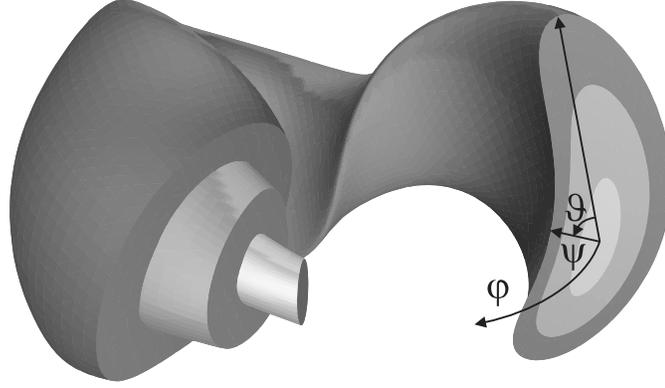


Figura 3.7: Coordenadas generales para un toro. [23]

y se impone $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (2.25a) para obtener¹⁰

$$\nabla B_1 \cdot (\nabla p \times \nabla \vartheta) + \nabla B_2 \cdot (\nabla \varphi \times \nabla p) = \left(\frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} \right) \nabla p \cdot \nabla \vartheta \times \nabla \varphi = 0,$$

donde (3.4) implica

$$\frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} = 0.$$

Al integrar la ecuación anterior, notamos que $B_2(\phi = 0) = B_2(\phi = 2\pi)$ y utilizando la regla de Leibniz tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{2\pi} B_1 d\vartheta = 0,$$

para toda p y φ . Esto implica que, para una función $g(p)$ adecuada, se puede expresar

$$\int_0^{2\pi} B_1 d\vartheta = g(p).$$

Un desarrollo análogo para B_2 y alguna función $h(p)$ permite expresar los coeficientes como

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{g(p)}{2\pi}, \\ B_2 &= -\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{h(p)}{2\pi}, \end{aligned}$$

para alguna función $f(p, \vartheta, \varphi)$. Al usar funciones auxiliares $\psi(p)$, $\chi(p)$ y $\lambda(p, \vartheta, \varphi)$ tales que

$$\begin{aligned} \psi'(p) &:= g(p)/2\pi, \\ \chi'(p) &:= h(p)/2\pi, \\ \lambda(p, \vartheta, \varphi) &:= f(p, \vartheta, \varphi)/\psi'(p), \end{aligned}$$

¹⁰ Se utilizan las identidades

$$\nabla u \vec{A} = u \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla u, \quad \nabla B_i(p, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial B_i}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial B_i}{\partial \vartheta} \nabla \vartheta + \frac{\partial B_i}{\partial \varphi} \nabla \varphi.$$

los coeficientes magnéticos se reducen a

$$B_1 = \psi'(p) \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \right), \quad (3.6)$$

$$B_2 = \chi'(p) - \psi'(p) \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}. \quad (3.7)$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (3.5) se obtiene

$$\vec{B} = \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \right) \nabla \psi \times \nabla \vartheta + \nabla \varphi \times \nabla \chi - \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \nabla \varphi \times \nabla \psi,$$

donde al sustituir una nueva variable angular

$$\theta := \vartheta + \lambda(p, \vartheta, \varphi), \quad (3.8)$$

resulta finalmente la expresión

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \nabla \theta + \nabla \varphi \times \nabla \chi. \quad (3.9)$$

Esta es la representación de \vec{B} en *coordenadas magnéticas*. Los términos del lado derecho son la componente toroidal y la componente poloidal, respectivamente. Por construcción, se ha considerado a χ sólo como función de ψ ; su derivada se define como la *transformada rotacional*¹¹

$$\iota(\psi) := \frac{d\chi}{d\psi}, \quad (3.10)$$

cuya importancia se aprecia notando lo siguiente

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \theta}{\vec{B} \cdot \nabla \varphi} = \frac{(\nabla \varphi \times \nabla \chi) \cdot \nabla \theta}{(\nabla \psi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi} = \frac{(\nabla \theta \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \chi}{(\nabla \theta \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \psi} = \iota(\psi). \quad (3.11)$$

Así, la transformada rotacional indica cuantas vueltas poloidales gira alrededor del eje magnético una línea de campo magnético por cada giro toroidal. Si la transformada es racional $\iota = n/m$, cada línea de campo regresa a su punto de partida (módulo 2π) tras m vueltas toroidales:

$$\theta(m) = \theta_0 + 2\pi m \iota = \theta_0 + 2\pi n. \quad (3.12)$$

Si ι es irracional, las líneas no se cierran sobre si mismas y recorren ergódicamente toda la superficie. Al ser la transformada rotacional constante sobre una superficie magnética se deduce que las líneas de campo magnético son rectas en términos de las coordenadas magnéticas. El jacobiano de las nuevas coordenadas es

$$1/J = (\nabla \psi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi = \vec{B} \cdot \nabla \varphi. \quad (3.13)$$

Notando que $\vec{B} \cdot \nabla \theta = \nabla \chi \cdot (\nabla \theta \times \nabla \varphi)$ y $\nabla \psi = \nabla \chi \, d\psi/d\chi$ se obtiene:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^\psi \int_0^{2\pi} J \vec{B} \cdot \nabla \varphi \, d\bar{\psi} \, d\theta = 2\pi \psi, \quad (3.14a)$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^\psi \int_0^{2\pi} J \vec{B} \cdot \nabla \theta \, d\bar{\psi} \, d\varphi = 2\pi \chi. \quad (3.14b)$$

¹¹La definición (3.1) es equivalente bajo la suposición $\iota = \iota(\psi)$. Esto se muestra en [3, 12] para casos simples.

Con esto es posible dar una interpretación física a estas coordenadas: representan el flujo magnético en dirección toroidal y poloidal contenido hasta cierta superficie magnética, etiquetada por ψ . Por ende, a las superficies magnéticas se les llama *superficies de flujo*. A las funciones que son constantes sobre estas superficies se les llama *funciones de flujo*, como hemos supuesto a la transformada rotacional.

Debido a la similitud de las ecuaciones (3.2), se pueden aplicar los argumentos anteriores a la corriente también, en específico, para algunas funciones $I(\psi)$, $G(\psi)$ y $K(\psi, \theta, \varphi)$, la corriente tiene la siguiente representación:

$$\mu_0 \vec{J} = J_1 \nabla \psi \times \nabla \theta + J_2 \nabla \varphi \times \nabla \psi, \quad (3.15a)$$

$$J_1 = -\frac{\partial K}{\partial \theta} + I'(\psi), \quad (3.15b)$$

$$J_2 = \frac{\partial K}{\partial \varphi} - G'(\psi). \quad (3.15c)$$

También debe ser posible obtener 3.15 de la ley de Ampère (2.26b): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, entonces debe ser válida la siguiente expresión para el campo magnético:

$$\vec{B} = I \nabla \theta + G \nabla \varphi + K \nabla \psi + \nabla H. \quad (3.16)$$

donde $H(\psi, \theta, \varphi)$ es una constante de integración.

3.3.1. Coordenadas de Boozer

En la sección anterior se utilizaron coordenadas generales ϑ y φ , y se introdujo $\theta = \vartheta + \lambda$ para simplificar la expresión final (3.9). De hecho, es posible modificar el ángulo toroidal original φ a conveniencia y redefinir el ángulo poloidal final θ acordemente para volver a obtener (3.9). Sea $\omega = \omega(\psi, \theta, \varphi)$ una función periódica en las variables angulares. Sustituyendo las variables originales por

$$\theta = \tilde{\theta} + \iota \omega, \quad (3.17a)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \omega, \quad (3.17b)$$

la representación (3.16) mantiene su forma $\vec{B} = I \nabla \tilde{\theta} + G \nabla \tilde{\varphi} + \tilde{K} \nabla \psi + \nabla \tilde{H}$ con

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H + (\iota I + G)\omega, \\ \tilde{K} &= K - \omega \frac{d}{d\psi} (\iota I + G). \end{aligned}$$

Las *coordenadas de Boozer* [25] eliminan \tilde{H} con la elección apropiada de ω :

$$\omega = -\frac{H}{\iota I + G}, \quad (3.18)$$

de modo que, al considerar las variables con tilde como las nuevas coordenadas se tiene

$$\vec{B} = I \nabla \theta + G \nabla \varphi + K \nabla \psi. \quad (3.19)$$

El Jacobiano asociado se obtiene del producto escalar entre la representación contravariante y covariante del campo, las ecuaciones (3.9) y (3.19), respectivamente:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = (\nabla \psi \times \nabla \theta) \times \nabla \varphi = \frac{B^2}{\iota I + G}. \quad (3.20)$$

3.3.1.1. Deriva radial

Cabe destacar que el denominador de (3.20) depende de ψ , de modo que el jacobiano únicamente es función de la superficie magnética y la magnitud del campo:

$$J = f(\psi)B^2. \quad (3.21)$$

Esto es útil al analizar la difusión radial de una partícula. Para esto se descompone la derivada direccional en componentes perpendiculares y paralelas al campo magnético:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_g + v_{\parallel}\vec{b}. \quad (3.22)$$

En estado de equilibrio, se puede demostrar que la ecuación radial del centro guía en coordenadas de Boozer es

$$\frac{d\psi}{dt} = (\dot{\vec{r}}_g + v_{\parallel}\vec{b}) \cdot \nabla\psi = \dot{\vec{r}}_g \cdot \nabla\psi = \left(\frac{2E - \mu B}{eB} \right) \left[\frac{I}{\iota I + G} \frac{\partial B}{\partial \varphi} - \frac{G}{\iota I + G} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right], \quad (3.23)$$

donde $E = m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/2$ y $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ son constantes de trayectoria [3]. Así, la deriva no depende de la naturaleza vectorial del campo. Es esta propiedad la razón por la que se puede optimizar el confinamiento con las configuraciones cuasi-axisimétricas mencionadas antes.

3.4. Corriente de plasma

Debido a la ecuación (3.3), en el régimen magnetohidrostático la densidad de corriente se puede descomponer en una parte paralela y otra perpendicular al campo magnético [23]:

$$\vec{J} = J_{\parallel}\vec{b} + \vec{J}_{\perp}, \quad (3.24)$$

donde $\vec{b} = \vec{B}/|\vec{B}|$. Si se sustituye la expresión anterior en (2.31) y se considera el producto vectorial con el campo se obtiene

$$\vec{B} \times (\vec{J} \times \vec{B}) = \vec{B} \times (\vec{J}_{\perp} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{B})\vec{J}_{\perp} - (\vec{B} \cdot \vec{J}_{\perp})\vec{B} = B^2\vec{J}_{\perp} = \vec{B} \times \nabla p,$$

de donde se observa que una corriente perpendicular de la forma

$$\vec{J}_{\perp} = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2}, \quad (3.25)$$

es suficiente para satisfacer la ecuación de equilibrio. Sin embargo, esta no garantiza la condición (2.22), $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, pues la divergencia de la corriente perpendicular (diamagnética):¹²

$$\nabla \cdot \vec{J}_{\perp} = \frac{1}{B^2} \nabla \cdot (\vec{B} \times \nabla p) + (\vec{B} \times \nabla p) \cdot \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) = (\vec{B} \times \nabla p) \cdot \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) = \vec{B} \cdot \left[\nabla p \times \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) \right],$$

no tiene porqué anularse en general. Por otro lado, las ecuaciones (2.22) y (3.24) implican

$$\nabla \cdot \vec{J}_{\perp} = -\nabla \cdot \left(\frac{J_{\parallel}}{B} \vec{B} \right) = -\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{J_{\parallel}}{B} \right), \quad (3.26)$$

¹²Ya que por (2.10b): $\nabla \cdot (\vec{B} \times \nabla p) = \nabla p \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \nabla p = \mu_0 \nabla p \cdot \vec{J} = 0$.

por lo que se debe cumplir la siguiente condición:

$$\vec{B} \cdot \left[\nabla p \times \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) + \nabla \left(\frac{J_{\parallel}}{B} \right) \right] = 0. \quad (3.27)$$

Al expresar la corriente paralela como

$$J_{\parallel} = u(\psi, \theta, \varphi) p'(\psi) B + \frac{\langle J_{\parallel} B \rangle B}{\langle B^2 \rangle}, \quad (3.28)$$

se satisface la condición (3.27) si $u(\psi, \theta, \varphi)$ cumple la siguiente ecuación diferencial magnética:

$$\vec{B} \cdot \nabla u = -(\vec{B} \times \nabla \psi) \cdot \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right), \quad (3.29)$$

al fijar la condición $\langle u B^2 \rangle = 0$. El primer término del lado derecho de (3.28) es la corriente de *Pfirsch-Schlüter*¹³ mientras que el segundo representa cualquier otra corriente no generada por inducción, *e.g.*, corriente bootstrap o de Ohm. Así, la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} + \left(u(\psi, \theta, \varphi) p'(\psi) + \frac{\langle J_{\parallel} B \rangle}{\langle B^2 \rangle} \right) \vec{B}. \quad (3.30)$$

3.4.1. Problemas en superficies racionales

Las coordenadas de Boozer son de utilidad en este contexto pues permiten notar que bajo la suposición de superficies magnéticas anidadas alrededor de un sólo eje magnético implica una divergencia en la corriente sobre las superficies racionales. Para ver esto, es útil utilizar los desarrollos de Fourier en coordenadas de Boozer del inverso del campo y de la función de corriente:

$$u(\psi, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} u_{mn}(\psi) e^{i(m\theta - b\varphi)}, \quad (3.31a)$$

$$\frac{1}{B^2} = \sum_{m,n} h_{mn}(\psi) e^{i(m\theta - b\varphi)}. \quad (3.31b)$$

Al sustituir estos desarrollos en la ecuación (3.29) con la expresión covariante del campo magnético (3.19) y utilizar las identidades del pie de página 10 se obtiene la ecuación

$$(m\iota - n)u_{mn}(\psi) = -(nI + mG)h_{mn}(\psi), \quad (3.32)$$

cuya solución en el espacio de Fourier es

$$u_{mn}(\psi) = \frac{nI + mG}{m\iota - n} h_{mn}(\psi) + \Delta_{mn} \delta(\psi - \psi_{mn}). \quad (3.33)$$

Lo importante aquí es notar las singularidades que aparecen en los coeficientes encontrados. La aparente singularidad asociada a la delta de Dirac sobre las superficies resonantes ψ_{mn} con $\iota = n/m$ desaparece al estudiar el efecto que tiene la ley de Ohm y sus implicaciones en la difusión [12, 23, 25]. Sin embargo, para estudiar la singularidad en el denominador del primer término de la ecuación anterior es necesario abandonar la suposición de superficies magnéticas anidadas sobre el mismo eje, como se muestra en la sección 4.2.2.

¹³También es llamada corriente de retorno, pues evita la acumulación de carga, mantiene la continuidad de la corriente y se cierra a lo largo de las líneas de campo magnético. Así, fluye sin oposición y no afecta el balance de fuerzas [26].

4.1. Reconexión magnética

La reconexión magnética se refiere al cambio en la topología de las líneas de campo dentro de un plasma. En términos prácticos, estas parecen romperse y re-unirse de manera distinta a la original, formando nuevas configuraciones del campo, como se muestra en la figura 4.1; esto sucede cuando alguna componente del campo magnético se anula. Este fenómeno es causado por procesos internos o alguna perturbación externa.

El fenómeno es importante porque el cambio que se genera en la forma del campo repercute en la configuración de equilibrio e implica una liberación de la energía almacenada en el campo magnético. La re-conexión magnética está relacionada con la dinámica de plasmas en la magnetosfera terrestre y en la corona solar, y también aparece en aparatos de confinamiento para fusión nuclear. En estos últimos, el plasma queda descrito a primera aproximación por un estado de MHD ideal pero, al incluir la resistividad, una perturbación puede romper las superficies de flujo.

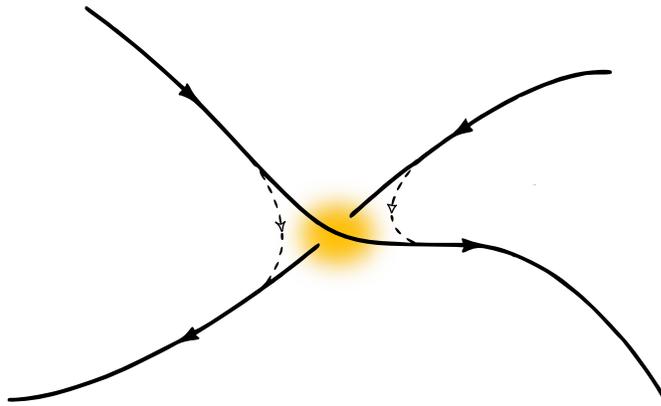


Figura 4.1: Bosquejo del proceso de reconexión magnética. [27]

Este fenómeno aparece considerando MHD con resistividad, pues esta permite disipación en la energía almacenada en el campo. Sin embargo, sus predicciones no siempre coinciden con los datos experimentales, por lo que sólo se le puede considerar como una explicación simple y cualitativa

a un fenómeno en el que participan muchos otros procesos. Un ejemplo de ello es la llamada reconexión rápida, que se asocia a efectos complicados en los modelos de Vlasov y de dos fluidos [28, 29]. Al considerar algunos términos de la ley general de Ohm omitidos en este trabajo también se puede inducir reconexión. Se puede mejorar la aproximación de MHD resistiva si se considera la aparición de una resistividad anómala apropiada¹ y entonces el problema fundamental debe explicar los fenómenos asociados al cumplimiento de dicha hipótesis.

Aunque a primera vista esto parezca un fenómeno local [27], este depende también de aspectos globales como las condiciones a la frontera, aunque estos son menos comprendidos aún [29]. La aparición y dinámica de re-conexión magnética es un tema de investigación actual en el área de física de plasmas².

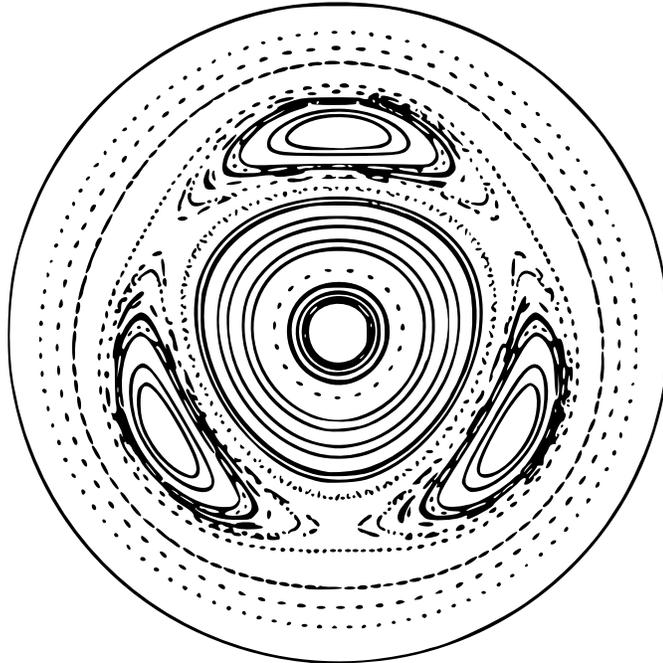


Figura 4.2: Mapa de Poincaré con islas magnéticas. [1]

4.2. Islas Magnéticas

La reconexión ocasiona una desviación inevitable de la topología ideal. En particular, pueden aparecer superficies magnéticas centradas en un eje distinto al eje magnético original, formando superficies toroidales independientes. A dichas estructuras se les llama islas magnéticas, por la forma que trazan, como se muestra en la figura 4.2.

La aparición de islas magnéticas se debe a inestabilidades del plasma o a perturbaciones externas que rompen la simetría, por lo que son inevitables, aunque en un stellarator se puede controlar hasta cierto grado su tamaño con un buen diseño del campo magnético. Estas estructuras presentan fenómenos desfavorables para el confinamiento pues permiten una mayor transferencia de calor y material sobre sus superficies magnéticas independientes y por ende en la dirección radial global. Pueden incluso llevar a la ruptura secuencial de superficies magnéticas centrales. Sin embargo,

¹Este detalle es aprovechado en el código SIESTA, descrito en la sección 5.2.

²Una teoría moderna que pretende explicar el fenómeno se encuentra en [30]

estas características se pueden utilizar en la frontera del plasma como métodos auxiliares para el funcionamiento de la placa diversora.

4.2.1. Modelo bidimensional

Con el fin de ilustrar la naturaleza del fenómeno se considera primero un caso bidimensional sencillo donde una perturbación periódica induce la aparición de islas magnéticas. Supongamos que tenemos un campo magnético de la forma

$$\vec{B} = (0, B_o x), \quad (4.1)$$

el cual se obtiene de un campo escalar:

$$\Psi(x, y, z) = \frac{B_o}{2} x^2, \quad (4.2a)$$

$$\vec{B} = \hat{z} \times \nabla \Psi. \quad (4.2b)$$

El campo escalar representa el flujo magnético que atraviesa una trayectoria ficticia que va del origen al punto (x, y) . A este campo se le añade una perturbación periódica

$$\tilde{\Psi} = A \cos ky, \quad (4.3)$$

donde $A < 0$ y $k > 0$ por conveniencia.

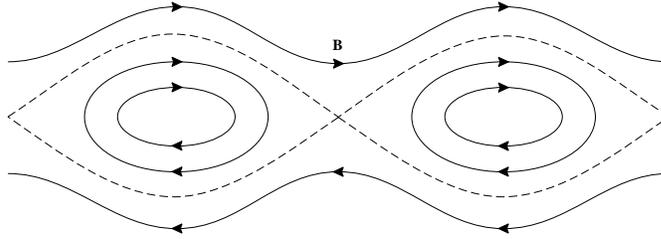


Figura 4.3: Islas magnéticas en un modelo plano. [9]

Las superficies magnéticas son las curvas de nivel del potencial escalar: $\Psi_T = \Psi + \tilde{\Psi} = \gamma$, donde γ es una constante arbitraria. De aquí se obtiene la condición:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{B_o} (\gamma - A \cos ky)}. \quad (4.4)$$

La separatriz³ corresponde a $\gamma = -A$. En el intervalo $y \in [-\pi/k, \pi/k]$ se tiene que $x > 0$ ⁴ y en la frontera $x = 0$ ⁵ El ancho de la separatriz es:

$$\delta_x = 2x_{max} = 4\sqrt{\frac{|A|}{B_o}}, \quad (4.5a)$$

$$\delta_y = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.5b)$$

³Se le llama separatriz a la frontera de las islas magnéticas porque separa líneas de campo cerradas de líneas de campo abiertas; su ancho es considerado el ancho de la isla.

⁴Los centros de estos intervalos son los centros de las islas, llamados puntos O.

⁵A los puntos donde las separatrices de dos islas contiguas se tocan se les llama puntos X.

Se concluye que la forma en la que se perturba el campo modifica las dimensiones de las islas magnéticas resultantes, de manera que la periodicidad de la perturbación corresponde a la periodicidad en la cadena de islas resultante y la amplitud de la perturbación afecta la de las islas como: $\delta_x \sim \sqrt{|A|}$, una relación que se cumple aún en casos más generales.

4.2.2. Representación general

Es posible mantener la expresión (3.9) utilizada hasta ahora para el campo magnético sin utilizar coordenadas de flujo, que suponen la existencia de superficies magnéticas anidadas. Estas coordenadas generales son llamadas *coordenadas canónicas*, y son especialmente útiles para obtener una estimación del ancho de las islas magnéticas que aparecen en una configuración no axisimétricas, así como para estudiar el caos hamiltoniano que puede aparecer en estos sistemas. El análisis que se muestra a continuación se encuentra en [23, 31].

Sean (r, θ, φ) coordenadas generales en cuyos términos se puede expresar el potencial magnético de manera covariante como

$$\vec{A} = A_r \nabla r + A_\theta \nabla \theta + A_\varphi \nabla \varphi. \quad (4.6)$$

Si se introducen los términos

$$\begin{aligned} \sigma(r, \theta, \varphi) &:= \int_{r_o}^r A_r(\bar{r}, \theta, \varphi) d\bar{r}, \\ \psi &:= A_\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}, \\ \chi &:= -A_\varphi + \frac{\partial g}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

donde r_o es arbitrario, se puede reescribir la ecuación (4.6) como

$$\vec{A} = \psi \nabla \theta - \chi \nabla \varphi + \nabla \sigma, \quad (4.7)$$

y entonces se obtiene una representación general para el campo magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \psi \times \nabla \theta + \nabla \varphi \times \nabla \chi. \quad (4.8)$$

Que χ sea función de ψ solamente es la condición para que existan superficies magnéticas, debido a que así se cumpliría la condición $\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0$. Sin embargo, la expresión (4.8) no presupone dicha hipótesis, por lo que es válida aún en la ausencia de superficies magnéticas.

La representación anterior permite notar que las ecuaciones que describen las líneas de campo se comportan como un sistema hamiltoniano⁶:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \psi}{\vec{B} \cdot \nabla \varphi} = \frac{(\nabla \varphi \times \nabla \chi) \cdot \nabla \psi}{(\nabla \psi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi} = \frac{-(\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot \nabla \chi}{(\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot \nabla \theta} = -\frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (4.9a)$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla \theta}{\vec{B} \cdot \nabla \varphi} = \frac{(\nabla \varphi \times \nabla \chi) \cdot \nabla \theta}{(\nabla \psi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi} = \frac{(\nabla \theta \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \chi}{(\nabla \theta \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \psi} = \frac{\partial \chi}{\partial \psi}. \quad (4.9b)$$

⁶Un sistema hamiltoniano semejante se obtiene considerando partículas cargadas con masa despreciable en ausencia de campo eléctrico. Si se considera el teorema del flujo magnético en MHD ideal se puede establecer una conexión cualitativa entre ambos sistemas.

La función $\chi = \chi(\psi, \theta, \varphi)$ se puede desarrollar en una serie de Fourier:

$$\chi(\psi, \theta, \varphi) = \chi_0(\psi) + \sum_{m,n \neq 0} \chi_{mn}(\psi) e^{i(m\theta - n\varphi)}, \quad (4.10)$$

donde el primer término del lado derecho aislado corresponde a una situación carente de perturbaciones (y por lo tanto de islas). Las ecuaciones (4.9) se vuelven:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \iota(\varphi) + \sum_{m,n \neq 0} \chi_{mn}(\psi) e^{i(m\theta - n\varphi)}, \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= -i \sum_{m,n \neq 0} \chi_{mn}(\psi) e^{i(m\theta - n\varphi)}, \end{aligned}$$

donde $\iota(\psi) = d\chi_0/d\psi$ es la transformada rotacional. Si se consideran perturbaciones pequeñas, se cumple que $\chi_{mn} \ll \chi_0$, que representa una situación cercana a tener superficies de flujo bien definidas. En este caso se puede integrar el sistema y obtener:

$$\theta = \theta_0 + \iota(\psi_0)\varphi, \quad (4.11a)$$

$$\psi = \psi_0 + \sum_{m,n \neq 0} \frac{m\chi_{mn}(\psi_0)}{n - m\iota(\psi_0)} e^{i[m\theta_0 + (m\iota(\psi_0) - n)\varphi]}. \quad (4.11b)$$

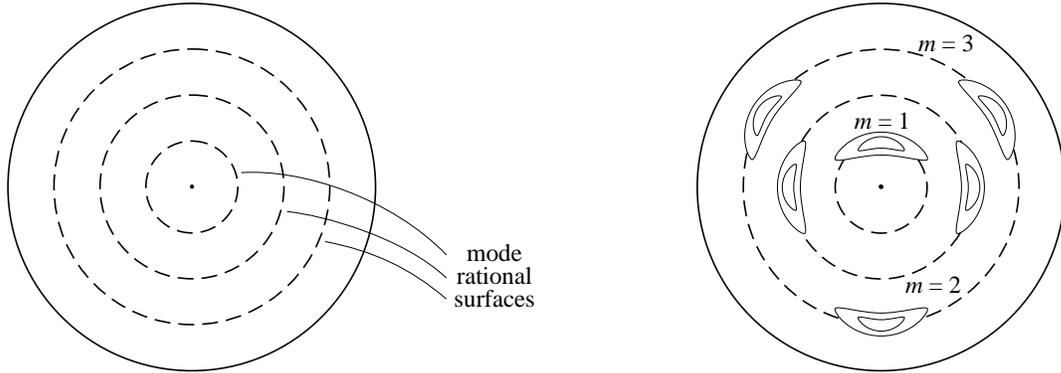


Figura 4.4: Aparición de islas sobre superficies resonantes.[9]

Los coeficientes de Fourier divergen sobre las superficies racionales, es decir, donde se cumple: $\iota(\psi_0) = n/m$. Estos modos deben ser especialmente importantes, por lo que se desprecian todos los demás en el desarrollo (4.10) para el análisis. Entonces:

$$\chi(\psi, \theta, \varphi) = \chi_0(\psi) + f(\psi, \theta, \varphi), \quad (4.12a)$$

$$f(\psi, \theta, \varphi) = \sum_{\iota=n/m} \chi_{mn}(\psi) e^{im(\theta - \iota(\psi)n)}. \quad (4.12b)$$

Es conveniente utilizar una nueva variable $\alpha = \theta - n\iota(\psi)$, que al sustituir en (4.7) resulta en una forma similar:

$$\vec{A} = \psi \nabla \alpha - \chi_H(\psi, \alpha) \nabla \varphi, \quad (4.13)$$

con la función auxiliar

$$\chi_H(\psi, \alpha) = \chi_0(\psi) + f(\psi, \alpha) - \iota(\psi_0)(\psi - \psi_0). \quad (4.14)$$

Este hamiltoniano es integrable, al ser independiente de la variable toroidal φ (equivale a la variable temporal clásica), y describe la formación de islas magnéticas alrededor de las superficies resonantes. Al desarrollar $\chi_0(\psi)$ en serie de Taylor alrededor de ψ_0 hasta segundo orden se obtiene

$$\chi_H(\psi, \alpha) \approx \chi_0(\psi_0) + \frac{\chi_0''(\psi_0)(\psi - \psi_0)^2}{2} + f(\psi_0, \alpha). \quad (4.15)$$

La constante no es importante para el sistema de ecuaciones, por lo que se puede omitir. Las curvas de nivel de este son las líneas de campo magnético en el plano poloidal. Cuando $\chi_H < \text{mín}(f)$ las líneas de campo no tienen restricciones sobre α , y corresponden a superficies magnéticas semejantes a las que se presentan en ausencia de perturbación, sólo distorsionadas. Por otro lado, cuando $\chi_H > \text{mín}(f)$ las líneas están atrapadas, pues sólo toman valores de α restringidos. Las superficies que trazan estas líneas tienen la topología de toros cuyos ejes magnéticos rodean helicilmente el eje magnético original, trazando *islas* sobre mapas de Poincaré a ángulos constantes. La separatriz es la curva de nivel con $\chi_H = \text{mín}(f)$.

La forma de las islas depende del desarrollo $f(\psi_0, \alpha)$, que a primera aproximación resulta

$$\chi_H(\psi, \alpha) \approx \frac{\chi_0''(\psi_0)(\psi - \psi_0)^2}{2} + 2\chi_{mn} \cos m\alpha, \quad (4.16)$$

es decir, un sistema equivalente al péndulo simple. La separatriz de las islas corresponde a $\chi_H = 2\chi_{mn}$, en cuyo caso

$$\psi - \psi_0 = \pm \sqrt{\frac{4\chi_{mn}(1 - \cos m\alpha)}{v'(\psi_0)}}, \quad (4.17)$$

y el ancho de la isla es

$$\Delta r = 2\Delta\psi = \sqrt{\frac{32\chi_{mn}}{v'(\psi_0)}}. \quad (4.18)$$

4.2.2.1. Observaciones

Se puede pensar en que es necesaria una corriente adecuada dentro de cada isla para anular la transformada rotacional de estas y así eliminarla. Este es el origen de la singularidad de corriente mencionada al final del capítulo anterior, donde no se consideró la aparición de estas estructuras [23].

El tratamiento expuesto sólo es válido cuando el ancho de las islas correspondientes a distintas superficies resonantes no están cerca de traslaparse (criterio de Chirikov [32]). En caso contrario, el campo magnético puede tornarse caótico, y la existencia de superficies magnéticas sólo está asegurada para perturbaciones suficientemente pequeñas, como se sigue del teorema KAM [31]. Cuando el campo es caótico surgen también problemas conceptuales, como la aparición de infinitas singularidades en los perfiles de corriente y el gradiente de presión, y las soluciones numéricas se complican pues, bajo la ergodicidad, los fenómenos a escalas pequeñas se deben tomar en cuenta [33]. Además de esto, cerca de las separatrices de las islas, fenómenos no contemplados por MHD resistiva son fuertemente influyentes, como el transporte neoclásico, la turbulencia o la viscosidad, y puede incluso suceder que las islas desaparezcan. Los resultados de MHD resistiva son sólo una primera aproximación al fenómeno; una teoría de equilibrio que incluya todos los fenómenos disipativos aún no está disponible [34].

Códigos de equilibrio magnetohidrodinámico

En la práctica, el diseño final de un reactor de fusión nuclear se vuelve muy complicado debido a todos los fenómenos que deben controlarse de la mejor manera posible. En términos de estabilidad, es crucial un diseño adecuado de las bobinas que generan los campos magnéticos para confinar el plasma, en especial en un stellarator donde los diseños pueden ser muy complicados. Para optimizar el diseño es necesario utilizar códigos numéricos que simulen el comportamiento del plasma bajo diversas configuraciones y así elegir la más adecuada. Por otra parte, también es importante reconstruir el estado de plasma por medio de mediciones experimentales indirectas. Los códigos que se describen a continuación sirven para determinar la forma que adquiere el plasma bajo configuraciones de campo magnético dadas y han sido optimizados para ser capaces de manejar resoluciones muy altas en tiempos razonables.

5.1. El código VMEC

El código VMEC (Variational Moments Equilibrium Code) fue creado en la década de los 80s, principalmente por S.P.Hirshman en el laboratorio nacional de Oak Ridge. Hoy en día es muy popular debido a su fiabilidad y velocidad para determinar configuraciones de equilibrio tridimensionales en experimentos modernos como TJ-II y Wendelstein 7-X, o como ITER en el futuro. Se ha utilizado como una herramienta de análisis posterior a la realización de los experimentos de fusión controlada. Recientemente fue optimizado para ser ejecutado en paralelo [35, 36], pues se busca que en el futuro sea capaz de llevar a cabo diagnósticos en tiempo real.

VMEC utiliza el principio de mínima energía y un método variacional para derivar las ecuaciones de equilibrio en forma conservativa y utiliza un algoritmo modificado de descenso de gradiente para resolverlas. En esta sección describimos sólo a grandes rasgos su funcionamiento; para mayores detalles se deben consultar los artículos originales [37, 38], o visitar el sitio de internet VMECwiki.

El código requiere como parámetros de entrada dos perfiles dados en función de la coordenada de flujo que etiqueta las superficies magnéticas, a saber, el perfil de presión y el de la transformada rotacional o el de corriente. Además, cuenta con dos modos de operación: frontera fija o libre. Para el primer modo se especifica la forma de la superficie externa, mientras que en el último modo la frontera se determina durante el proceso iterativo acorde al campo magnético externo, el cual debe

ser especificado.

Los resultados de VMEC pueden ser utilizados como punto de partida por códigos independientes para análisis de estabilidad, transporte o fenómenos asociados a modelos MHD más generales.

5.1.1. Ecuaciones relevantes

VMEC utiliza las coordenadas magnéticas descritas en la sección 3.3. La representación (3.9) es particularmente importante, pues garantiza las condiciones $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$:

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\varphi \times \nabla\chi = B^\vartheta \hat{e}_\vartheta + B^\varphi \hat{e}_\varphi. \quad (5.1)$$

En el código se utiliza un parámetro $\rho \in [0, 1]$, una biyección al flujo magnético contenido hasta esa superficie¹, para etiquetar las superficies magnéticas, por lo que $p = p(\rho)$. Resulta importante para la convergencia acelerada de VMEC el hecho de que el ángulo θ es una reparametrización (3.8):

$$\theta = \vartheta + \lambda(\rho, \vartheta, \varphi). \quad (5.2)$$

Si se sustituye la representación (5.1) en la ecuación de equilibrio magnetohidrostático (2.9): $\vec{F} \doteq \nabla p - \vec{J} \times \vec{B} = \vec{0}$ y se utiliza la ley de Ampère, se obtiene la fuerza en la forma

$$\vec{F} = F_\rho \nabla p + F_\beta \vec{\beta}, \quad (5.3)$$

con las siguientes definición:

$$F_\rho = \frac{1}{\mu_0} \left(B^\vartheta \frac{\partial B^\vartheta}{\partial \rho} + B^\varphi \frac{\partial B^\varphi}{\partial \rho} - \vec{B} \cdot \nabla B_\rho \right) + \frac{dp}{d\rho}, \quad (5.4a)$$

$$F_\beta = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial B^\vartheta}{\partial \varphi} \right), \quad (5.4b)$$

$$\vec{\beta} = \sqrt{g} (B^\varphi \nabla \theta - B^\vartheta \nabla \varphi). \quad (5.5)$$

Aunque las coordenadas magnéticas $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := (\rho, \vartheta, \varphi)$ son más convenientes para trabajar con las ecuaciones involucradas, para fines de visualización y análisis experimental las coordenadas cilíndricas $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) := (R, \phi, Z)$ son más adecuadas. Utilizando las propiedades de transformación de coordenadas² (apéndice B) se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del campo magnético:

$$|B|^2 = (b_R^2 + R^2 b_\phi^2 + b_Z^2)/g, \quad (5.6)$$

donde $b_i := \sqrt{g} \nabla x_i \cdot \vec{B}$ son las componentes cilíndricas del campo magnético.

Para poder variar la energía (2.27), se supone que tanto las coordenadas cilíndricas \vec{x} como el parámetro de reparametrización λ dependen de una variable temporal ficticia t :

$$\frac{dW}{dt} = \int \left[- \left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} + p \right) \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g}} \left(b_R \frac{db_R}{dt} + R^2 b_\phi \frac{db_\phi}{dt} + b_Z \frac{db_Z}{dt} + b_\phi^2 R \frac{dR}{dt} \right) \right] d\rho d\vartheta d\varphi.$$

¹Puede ser el flujo poloidal o toroidal, pues estos están relacionados por la transformada rotacional.

²Se asume que el jacobiano es no negativo $\sqrt{g} \geq 0$, lo que equivale a asumir que sólo hay un eje magnético.

La variación también se puede expresar en términos de las coordenadas de flujo aplicando la regla de la cadena sobre las componentes del campo y la definición del jacobiano como

$$\frac{dW}{dt} = - \int \left(F_i \frac{dx_i}{dt} - F_\lambda \frac{d\lambda}{dt} \right) d\rho d\vartheta d\varphi - \int_{\rho=1} \sqrt{g} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} + p \right) \frac{dx_i}{dt} d\vartheta d\varphi, \quad (5.7)$$

donde el último término es superficial y las componentes de la fuerza MHD son:

$$F_\lambda = \Phi' \sqrt{g} F_\beta, \quad (5.8)$$

$$F_i = - \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\sqrt{g} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} + p \right) \right] + \frac{\sqrt{g}}{\mu_0} \nabla \cdot [(\Lambda_i \vec{B} \cdot \nabla x_i) \vec{B}] + \delta_{i1} \frac{\sqrt{g}}{R} \left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} + p - \frac{R^2 (\vec{B} \cdot \nabla \varphi)^2}{\mu_0} \right),$$

con $\Lambda_1 = \Lambda_3 = 1, \Lambda_2 = R^2$. En VMEC se elige el ángulo cilíndrico igual al ángulo toroidal de las coordenadas de flujo: $\varphi = \phi$, con el fin de simplificar las ecuaciones, en particular las expresiones de la fuerza, que al definir $P := R(p + |B|^2/2\mu_0)$, son las siguientes:

$$F_R = \frac{\partial}{\partial \rho} (Z_\vartheta P) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (Z_\rho P) + \mu_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (B^\vartheta b_R) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (B^\varphi b_R) \right) + \frac{\sqrt{g}}{R} \left(\frac{P}{R} - \frac{(RB^\varphi)}{\mu_0} \right), \quad (5.9a)$$

$$F_z = - \frac{\partial}{\partial \rho} (R_\vartheta P) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (R_\rho P) + \mu_0^{-1} \left(\frac{d}{d\vartheta} (B^\vartheta b_z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (B^\varphi b_z) \right). \quad (5.9b)$$

Respecto a las condiciones de frontera externa ($\rho = 1$) se consideran dos posibilidades: fija o libre. En el primer caso se especifica la forma de esta a través de los coeficientes de Fourier y en el segundo sólo se busca la continuidad de la presión total y que se anule la componente normal del campo magnético. Para el eje magnético ($\rho = 0$) sólo es necesario asegurar la consistencia de las variables físicas en su cercanía respecto a las coordenadas utilizadas.

5.1.2. Métodos numéricos

Las transformaciones restantes entre ambas coordenadas quedan descritas por

$$\begin{aligned} R &= R_0(\rho) + \sigma_R(\rho, \vartheta, \varphi), \\ Z &= Z_0(\rho) + \sigma_Z(\rho, \vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

para σ_R y σ_Z funciones periódicas de ambos ángulos. Con el ángulo cilíndrico fijo, el parámetro λ es ahora la única cantidad que falta considerar con detalle. Se redefinen entonces $(x_1, x_2, x_3) := (R, \lambda, Z)$ y, aprovechando la periodicidad anteriormente mencionada, se realiza un desarrollo de Fourier³ sobre estas:

$$x_j = \sum_{m,n} X_j^{mn}(\rho) \exp[i(m\vartheta - n\varphi)], \quad (5.10)$$

con la restricción de coeficientes conjugados simétricos $X_j^{mn} = (X_j^{-m-n})^*$ por ser cantidades reales; la periodicidad de λ implica que $X_2^{00} = 0$. Este desarrollo se sustituye en (5.7), ignorando el término superficial, para obtener

$$\frac{dW}{dt} = - \int (F_j^{mn})^* \frac{\partial X_j^{mn}}{\partial t} dV, \quad (5.11)$$

³En la práctica, VMEC supone que se trabaja con simetría de stellarator para reducir el número de ecuaciones por resolver, por lo que el desarrollo se simplifica (ver (5.16)).

donde ahora $(F_1, F_2, F_3) := (F_R, F_\lambda, F_Z)$ y los coeficientes de Fourier dados por

$$F_j^{mn} = \frac{1}{dV/d\rho} \iint F_j \exp[i(m\vartheta - n\varphi)] d\vartheta d\varphi. \quad (5.12)$$

Son justamente estos coeficientes los que se deben anular en equilibrio MHD ideal, por lo que el objetivo principal de VMEC es resolver las ecuaciones

$$F_j^{mn} = 0, \quad (5.13)$$

para $j = 1, 2, 3$ y m, n determinados por la precisión con la que se desee trabajar. Para esto se utiliza un método iterativo que reduce dW/dt de manera más rápida utilizando un esquema de Richardson de segundo orden, que implica resolver

$$\frac{\partial^2 X_j^{mn}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial X_l^{mn}}{\partial t} = F_j^{mn}, \quad (5.14)$$

donde el valor óptimo de τ respecto a la rapidez de la convergencia es: $-[d(\ln \int |F|^2 dV)/dt]^{-1}$.

El proceso iterativo utilizado parte de discretizar la componente temporal ficticia introducida para obtener una versión de (5.14) optimizada para la convergencia:

$$\dot{X}_j^{mn}(t_{n+1/2}) = (1 - b_n) \dot{X}_j^{mn}(t_{n-1/2}) + (1 - b_n/2) \Delta t \dot{F}_j^{mn}(t_n), \quad (5.15a)$$

$$b_n = 1 - y_n(1 - b_{min}). \quad (5.15b)$$

donde $y_n = \min(\langle F^2 \rangle_n / \langle F^2 \rangle_{n-1}, \langle F^2 \rangle_{n-1} / \langle F^2 \rangle_n)$ con $\langle F \rangle = \int |F(t_n)| dV$, $b_{min} = \Delta t / \tau_{max}$. Las variables con punto representan la versión discreta de las derivadas temporales, que hasta un error de segundo orden es: $\dot{X}_j^{mn}(t_{n+1/2}) = [X_j^{mn}(t_{n+1}) - X_j^{mn}(t_n)] / \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$. Este esquema debe llevarse a cabo hasta que la diferencia entre pasos consecutivos sea pequeña, es decir, hasta que los cálculos ya casi no varíen.

Las actualizaciones temporales se realizan sobre cada nodo de una rejilla que representa la discretización espacial, es decir, valores discretos equidistantes de las variables de flujo sobre sus respectivos rangos: $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi]$ y $\rho \in [0, 1]$. La idea general es parecida a la que se describe en la siguiente sección (que es más relevante para este trabajo) aunque el desarrollo es bastante más complicado. Para todos los detalles se pueden consultar los artículos originales sobre VMEC [37, 38, 39].

5.2. El código SIESTA

El código VMEC proporciona aproximaciones muy cercanas a los estados finales de equilibrio reales pero presupone que las superficies magnéticas se encuentran anidadas y utiliza únicamente MHD ideal, por lo que no permite la aparición de regiones caóticas o de islas magnéticas por reconexión magnética. El código SIESTA [40] fue creado en esta década por el mismo autor del código VMEC (entre otros) para solucionar este problema. SIESTA se basa en los resultados de VMEC e introduce perturbaciones pequeñas en el campo magnético, generando *islas semilla*⁴, cuyo crecimiento permite durante el proceso iterativo que lleva a cabo para converger a un estado de mínima energía; esto es posible al considerar la difusión ocasionada por la resistividad del plasma.

⁴Con un fenómeno similar al que se mostró en la sección 4.2.1.

Además, utiliza un método iterativo semejante al método de Newton para hallar las raíces de una función, lo cual se traduce a una rápida convergencia hacia la solución. Así, el código SIESTA permite adaptar el diseño de un aparato de confinamiento toroidal para controlar mejor la aparición de islas magnéticas o incluso regiones de estocasticidad, así como analizar los experimentos en los que se detecten fenómenos asociados a la reconexión magnética y la aparición de islas.

Existen otros códigos que también son capaces de manejar configuraciones con islas magnéticas (HINT y PIES), aunque el método numérico es distinto. Durante el desarrollo de este código se ha procurado que este sea escalable, en el sentido de que puede ser ejecutado en paralelo en una supercomputadora para incrementar su eficiencia. Por ende, SIESTA es especialmente útil en situaciones donde se requiere velocidad de cálculo además de precisión, como la reconstrucción de equilibrio magnetohidrodinámico tridimensional en experimentos como ITER o el estudio del *Neoclasical Tearing Mode* [40].

En esta sección se explicará a grandes rasgos el funcionamiento de SIESTA, por lo que está fuertemente basado en el artículo original[40], el cual se debe consultar para información más detallada. Una descripción más cualitativa se puede encontrar en [11, 41].

5.2.1. Coordenadas de flujo

Se utilizan principalmente las coordenadas de flujo (r, u, ν) , donde r es la coordenada radial, u la poloidal y ν la toroidal, pues son las más naturales para describir al campo magnético. Posteriormente se determinan las coordenadas cilíndricas usuales (R, φ, Z) por medio de desarrollos de Fourier sobre las de flujo, una técnica pseudo-espectral. Bajo la suposición de simetría de stellarator⁵ estas relaciones son de la forma:

$$R = \sum R_{mn}(r) \cos(mu + n\nu), \quad (5.16a)$$

$$Z = \sum Z_{mn}(r) \sin(mu + n\nu), \quad (5.16b)$$

$$\phi = \nu. \quad (5.16c)$$

y el jacobiano de esta transformación es

$$\sqrt{g} = R \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial r} \right). \quad (5.17)$$

La presión y el campo magnético tienen los siguientes desarrollos bajo dicha simetría:

$$P \equiv \sqrt{g}p = \sum p_{mn}(r) \cos(mu + n\nu), \quad (5.18a)$$

$$b^r \equiv \sqrt{g}B^r = \sum b_{mn}^r(r) \sin(mu + n\nu), \quad (5.18b)$$

$$b^u \equiv \sqrt{g}B^u = \sum b_{mn}^u(r) \cos(mu + n\nu), \quad (5.18c)$$

$$b^\nu \equiv \sqrt{g}B^\nu = \sum b_{mn}^\nu(r) \cos(mu + n\nu). \quad (5.18d)$$

5.2.2. Parámetros variacionales

SIESTA introduce un *vector de desplazamiento* a variar sin restricciones (a excepción de las fronteras)

$$\vec{\xi} = \vec{v}\Delta t, \quad (5.19)$$

⁵Una simetría comúnmente impuesta por el diseño del campo magnético: al menos en dos planos toroidales $\phi = 0, \pi$ las superficies magnéticas son simétricas respecto al plano horizontal: $Z(\rho, \vartheta) = -Z(\rho, -\vartheta)$

utiliza la ley de Faraday (2.26a) y la ley de Ohm ideal (2.19)⁶

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}, \quad (5.20)$$

para obtener las ecuaciones *variacionales*; una versión integrada temporalmente de las ecuaciones: (2.25c), (2.28) y (2.30). Así, las variaciones del campo magnético y de la presión son

$$\delta \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} \Delta t = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}), \quad (5.21a)$$

$$\delta p = (\gamma - 1) \vec{\xi} \cdot \nabla p - \gamma \nabla \cdot (p \vec{\xi}), \quad (5.21b)$$

Como ya se mencionó, la fuerza MHD es de la forma

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p, \quad (5.22)$$

al considerar esto y la definición (2.27) se sigue que la variación de la energía se puede expresar de las siguientes maneras:

$$\delta W = - \int \vec{\xi} \cdot \vec{F} dV, \quad (5.23a)$$

$$\delta W = \int (\vec{B} \cdot \delta \vec{B} + \delta p) \frac{\sqrt{g}}{\mu_0} dr du dv. \quad (5.23b)$$

SIESTA utiliza versiones conservativas de las ecuaciones por conveniencia, por lo que las ecuaciones (5.21) y (5.22) se utilizan en la forma⁷

$$\delta b^i = -\epsilon^{ijk} \epsilon_{knm} \frac{\partial(\xi^n b^m)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\xi^i b^j - \xi^j b^i), \quad (5.24a)$$

$$\delta P = -\gamma \frac{\partial P \xi^j}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \sqrt{g} \xi^j \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (5.24b)$$

$$F_i = \epsilon_{ijk} \sqrt{g} J^j B^k - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{B^j}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (5.24c)$$

5.2.3. Discretización

La discretización se lleva a cabo sólo radialmente, pues se aprovecha la periodicidad de las coordenadas angulares para utilizar desarrollos de Fourier y trabajar así sobre los coeficientes de estos, es decir, se utilizan métodos espectrales para la dependencia angular y diferencias finitas para la radial. Los métodos espectrales permiten una convergencia exponencial si se trabaja con un desarrollo lo suficientemente largo. En el caso de SIESTA también presentan *precisión espectral*, pues sus coeficientes decaen exponencialmente conforme aumenta el orden del desarrollo. [42].

En la dirección radial, se divide el rango $[0, 1]$ en una malla de N nodos, indexados por j y separados entre sí por $h = 1/(N - 1)$. Se denota a los valores de cualquier cantidad X en cierto punto discreto r_j como $X_j = X(r_j, u, v)$. Resulta útil considerar artificialmente los puntos

⁶ Durante el proceso iterativo se reintroduce resistividad periódicamente: $\eta \neq 0$, para permitir la aparición y crecimiento de islas magnéticas.

⁷ Se utilizó la identidad $-\epsilon^{ijk} \epsilon_{knm} = \epsilon^{kji} \epsilon_{knm} = \delta_n^j \delta_m^i - \delta_m^j \delta_n^i$ y la ley de Ampère $\mu_0 \sqrt{g} J^i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_j}{\partial x_k}$.

intermedios entre nodos radiales, denotados por $j + 1/2$, de modo que se aplican las siguiente equivalencias:

$$X_{j+1/2} = (X_{j+1} + X_j)/2, \quad (5.25a)$$

$$X_j = (X_{j+1/2} + X_{j-1/2})/2, \quad (5.25b)$$

$$\partial X / \partial r_{j+1/2} = (X_{j+1} - X_j)/h + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.25c)$$

Así, se puede expresar la variación de la energía con errores de segundo orden como

$$\delta W = -h \sum_{j=1}^{N-1} \chi_j \iint \xi^\sigma F_\sigma \sqrt{g} \, du \, d\nu \quad (5.26)$$

donde $\chi_j = 1/2$ en las fronteras $j = 1, N$, en las que se deben imponer algunas condiciones especiales [40], y $\chi_j = 1$ en todos los otros puntos. El valor de la fuerza está dado por la ecuación (5.24c) pero en su versión discreta, es decir, aplicando las equivalencias (5.25).

Lo que logra SIESTA es encontrar la solución al sistema de ecuaciones $F_i(m, n, j) = 0$, donde i representa las componentes en el sistema $\{r, u, \nu\}$, j se refiere a la discretización radial y m y n representan los ordenes del desarrollo de Fourier. Con esto puede determinar el vector de desplazamiento y posteriormente las variaciones de la presión y el campo.

5.2.4. Método iterativo

El objetivo del método numérico es minimizar la energía paulatinamente. En el método de Newton para hallar las raíces de una función $f(x)$ se obtiene una progresión $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ donde, dadas las condiciones adecuadas, cada elemento cumple $|f(x_i)| > |f(x_{i+1})|$, algo característico de los llamados *métodos de descenso*. En el caso multidimensional la progresión es guiada por una dirección de búsqueda \vec{p}_n , de modo que $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{p}_n$, donde normalmente se elige la dirección de búsqueda de la forma ⁸

$$\vec{p}_n = -B_n^{-1} \nabla f,$$

donde B_n es una matriz simétrica y no singular; si esta es positiva definida \vec{p}_n es una dirección descendente, pues así: $\vec{p}_n \cdot \nabla f < 0$. En el método de Newton la elección para B_n es la matriz hessiana $H_n = \nabla^2 f(\vec{x}_k)$, pero esta no siempre es positiva definida, por lo que no se cumple necesariamente $|f(\vec{x}_i)| > |f(\vec{x}_{i+1})|$. Este es el caso usual cuando se comienza el proceso iterativo lejos de la solución.

En SIESTA se busca un vector de desplazamiento ξ que anule la variación de la energía. Esto es posible porque las variaciones de presión y campo magnético son funcionales de ξ (ver las ecuaciones (5.21)) y, por ende, δW también lo es (ver las ecuaciones (5.23)). Si se considera un desplazamiento de la forma

$$\vec{\xi} = P \vec{F} \quad (5.27)$$

donde P es alguna matriz positiva-definida, la ecuación (5.23) se anula exclusivamente cuando la fuerza MHD se anula también, pues

$$\delta W = - \int P^{ij} F_i F_j \, dV \leq 0. \quad (5.28)$$

⁸Una descripción condensada de estos *métodos de búsqueda lineal* se puede encontrar en [43].

La convergencia es optimizada al elegir una matriz P adecuada, llamada *precondicionador*. SIESTA utiliza una aproximación del hessiano \tilde{H} con eigenvalores recorridos por λ_n :

$$P_n = (-\tilde{H}_n + \lambda_n I)^{-1}. \quad (5.29)$$

Conforme converge a la solución, las modificaciones se van anulando paulatinamente para asegurar que se obtiene una solución física realista. De hecho, se debe utilizar un esquema generalizado de (5.27) lejos del equilibrio:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial t} = PF, \quad (5.30)$$

mientras que en iteraciones avanzadas se utiliza el código externo GMRES para resolver (5.27). El cálculo del preconditionador es delicado: involucra un código externo del mismo autor (entre otros), BCYCLIC [44], que trabaja en paralelo con matrices tridiagonales a bloques. Los detalles relacionados al preconditionador se pueden consultar en el artículo de Hirshman [40]. Dado un vector de desplazamiento se pueden calcular los valores del campo y la presión para la siguiente iteración a partir de la iteración actual:

$$\vec{B}_{n+1} = \vec{B}_n + \delta \vec{B}_n(\vec{\xi}), \quad (5.31a)$$

$$p_{n+1} = p_n + \delta p_n(\vec{\xi}). \quad (5.31b)$$

Subsecuentemente se obtiene un nuevo valor de la fuerza:

$$\vec{F}_{n+1} = \vec{F}_n + \delta \vec{J}_{n+1} \times \vec{B}_n + \vec{J}_n \times \delta \vec{B}_{n+1} - \nabla \delta p_{n+1} + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (5.32)$$

Así, al término de las iteraciones se obtiene el campo magnético y la presión de la configuración de equilibrio.

5.2.5. Modificaciones para el estudio de islas

5.2.5.1. Islas semilla

Como ya se mencionó, SIESTA considera a la configuración de equilibrio que arroja VMEC como condición inicial, pero para generar islas magnéticas es necesario alterar la topología estrictamente anidada de esta. Para lograrlo se introduce una perturbación al potencial vectorial (ver sección 4.2.1) alrededor de las superficies magnéticas donde la transformada rotacional toma valores racionales de orden bajo, de modo que al iniciar la ejecución del código se imponen las modificaciones

$$\begin{aligned} \delta B &= \nabla \times (A_{\parallel} \vec{B} / |B|), \\ A_{\parallel} &= a(r) \cos(mu + nv). \end{aligned}$$

5.2.5.2. Resistividad esporádica

La resistencia eléctrica es el único mecanismo de disipación de energía en el modelo MHD con el que trabaja SIESTA, por lo que es crucial considerarlo durante el proceso iterativo para permitir el acceso a estados de menor energía al modificar la estructura del campo y considerar el crecimiento de las islas. Se llevan a cabo varias iteraciones con resistencia tras cada iteración ideal hasta que la variación de la fuerza es muy baja, momento en el que ya sólo se realizan iteraciones

ideales para asegurar la convergencia. La magnitud de la resistividad utilizada es lo suficientemente pequeña para mantener la estabilidad numérica pero mayor a valores realistas, pues de utilizar los valores experimentales el proceso numérico sería más lento y llegaría a los mismos resultados. Los efectos de la resistencia sólo son realmente importantes cerca de las superficies con transformada rotacional fraccionario ya que allí se concentran las corrientes resonantes.

En una configuración de equilibrio, la ley de Ohm clásica (2.18) toma la forma

$$\vec{E} = \eta \vec{J}. \quad (5.33)$$

y entonces, al usar la fórmula (B.31), la variación del campo magnético utilizada en la presencia de resistencia es

$$\delta b^i = -\sqrt{g} (\nabla \times \Delta t \vec{E} ev)^i = -\epsilon^{ijk} \frac{\partial(\Delta t \eta J_k)}{\partial x^j}. \quad (5.34)$$

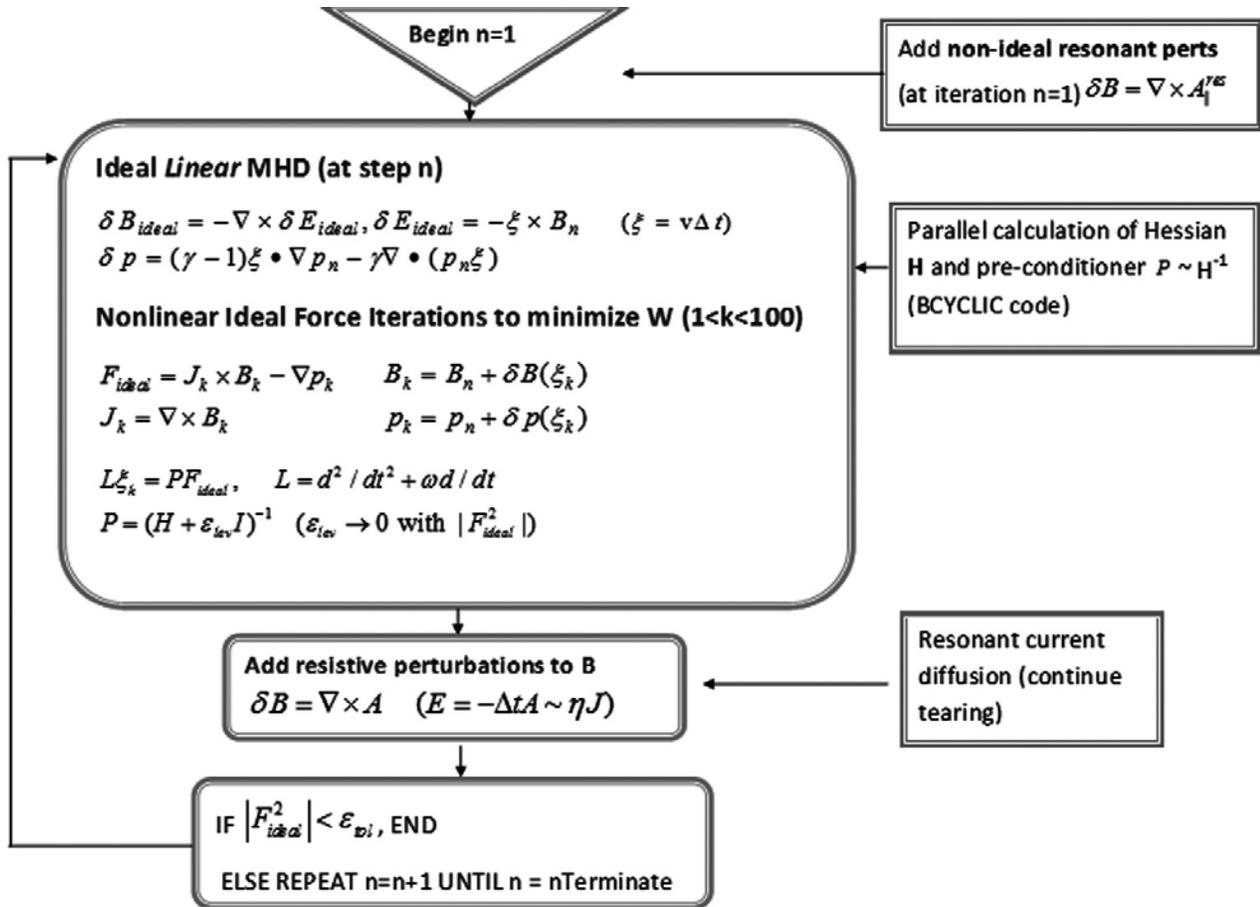


Figura 5.1: Diagrama de flujo de SIESTA. [40]

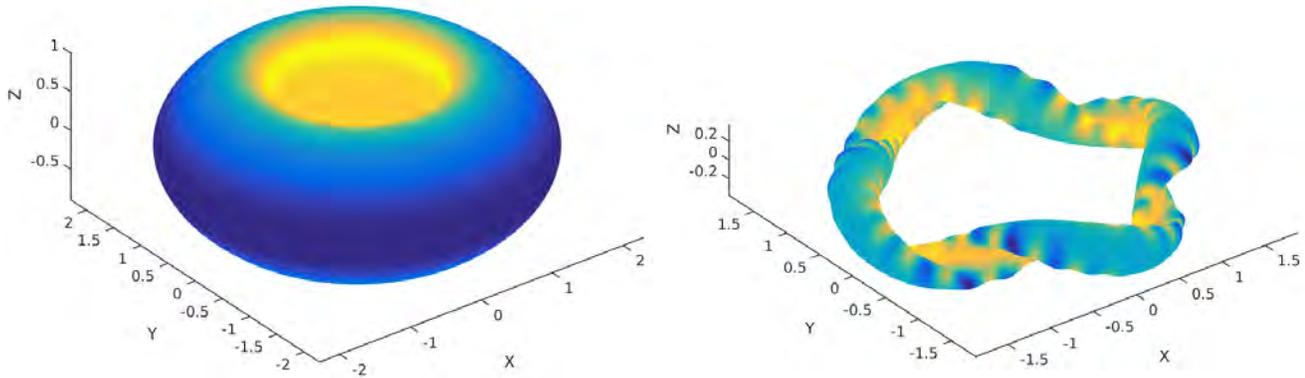
En este capítulo se exponen los resultados más característicos de las pruebas realizadas con los códigos VMEC, SIESTA y POINCARE. Todos fueron instalados en la supercomputadora Miztli de la UNAM. El código VMEC no requiere mucho tiempo de computo y se ejecutó siempre en un sólo procesador. Por otra parte, el Código SIESTA es muy demandante en este sentido, pero gracias a su diseño fue posible ejecutarlo en paralelo hasta con 64 procesadores y así aprovechar la estructura de Miztli para reducir el tiempo de computo. Las pruebas realizadas se basaron en configuraciones realistas del tokamak DIII-D en Estados Unidos y del heliac TJ-II de España.

6.1. Equilibrio de VMEC

El archivo de entrada de VMEC contiene la información característica de la geometría del tokamak o stellarator que se deseé simular; es un archivo cuidadosamente desarrollado por los científicos encargados de los experimentos correspondientes. Tras los cálculos realizados por VMEC se obtiene un archivo que contiene toda la información pertinente al equilibrio magnetohidrodinámico ideal que se puede presentar bajo las condiciones especificadas. Estos datos se pueden visualizar con una interfaz de MATLAB llamada VMECplot, desarrollada por Samuel Lazerson, miembro del Princeton Plasma Physics Laboratory (PPPL). Entre las múltiples opciones disponibles para visualizar con esta extensión se encuentran: perfiles de la transformada rotacional, perfiles de presión, intensidad del campo magnético (versión tridimensional o bidimensional por cortes toroidales), superficies magnéticas, mallas utilizadas, etc.

Se muestran a continuación algunas de estas gráficas, asociadas a las configuraciones utilizadas en este trabajo. La figura 6.1 muestra la intensidad del campo magnético desde una perspectiva tridimensional. Allí es notoria la axisimetría del tokamak, así como la ausencia de esta en el stellarator. Se puede apreciar también que la magnitud del campo siempre es mayor en las regiones internas. En el caso de TJ-II, esto se refiere a la región más cercana a la bobina horizontal central, respecto a la cual se enrosca el plasma (ver figura 3.6b). Una manera más clara de apreciar lo enroscado es utilizar cortes poloidales (ángulo toroidal constante) en el que se grafiquen las superficies magnéticas anidadas, como se aprecia en la figura 6.2. Esta configuración presenta simetría de stellarator de orden 4, en el sentido de que cualquier propiedad es invariante ante rotaciones

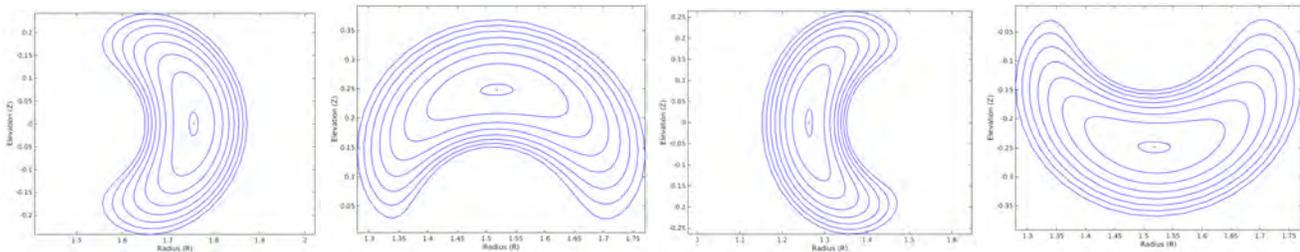
toroidales de ángulos múltiplos de $\pi/2$. En la figura 6.3 se muestra un corte toroidal del tokamak. Sobre este se puede representar toda la información del equilibrio, debido a su axisimetría. Por otra parte, la figura 6.4 muestra los perfiles de presión que maneja cada aparato de confinamiento. Claramente la presión que alcanza el tokamak es mucho mayor a la del stellarator; una de las ventajas prácticas que tiene el primero sobre el segundo.



(a) Tokamak DIII-D.

(b) Helic TJ-II.

Figura 6.1: Intensidad del campo magnético (mayor en las partes amarillas).



(a) $\phi = 0$.

(b) $\phi = \pi/8$.

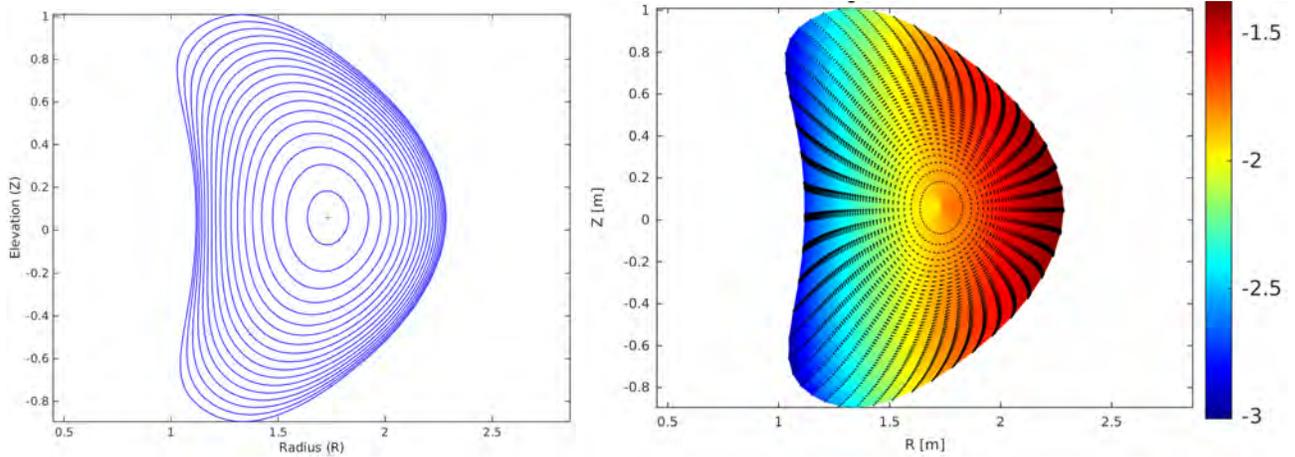
(c) $\phi = \pi/4$.

(d) $\phi = 3\pi/8$.

Figura 6.2: Superficies magnéticas del Helic TJ-II a distintos cortes poloidales.

La importancia del perfil de la transformada rotacional se mencionó en la sección 4.2.2. En la figura 6.5 se muestran los perfiles de las configuraciones utilizadas para estudiar el heliac TJ-II, mientras que en la figura 6.6 se muestra el perfil utilizado para el tokamak DIII-D¹. Cabe destacar que el rango que abarca la transformada es mucho mayor en el caso del tokamak, tiene una mayor cizalla magnética. Esta propiedad ocasiona que se puedan presentar un mayor número de superficies resonantes, es decir, múltiples perturbaciones pueden entrar en resonancia simultáneamente con alguna superficie magnética cuya transformada rotacional corresponda a la periodicidad de la perturbación y generar islas. Que el valor de la transformada rotacional sea negativo para el stellarator TJ-II significa que la dirección del campo magnético respecto a la corriente es inversa.

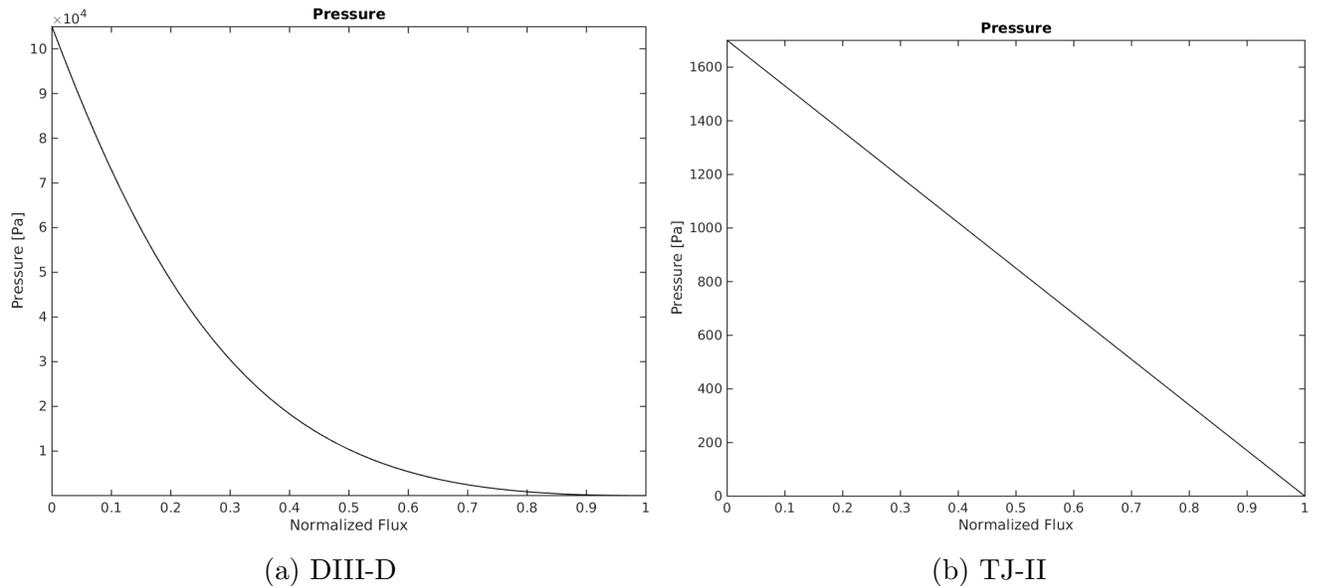
¹En la literatura relacionada a tokamaks se utiliza más el perfil del factor de seguridad: $q = 2\pi/\iota$.



(a) Superficies magnéticas.

(b) Campo magnético.

Figura 6.3: Un corte poloidal del tokamak DIII-D.



(a) DIII-D

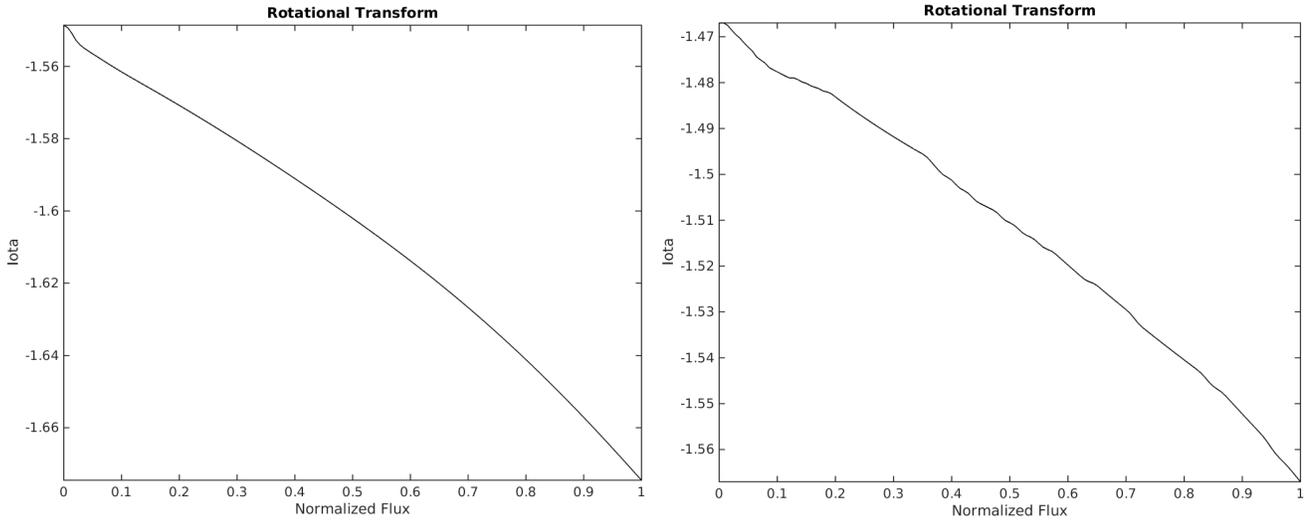
(b) TJ-II

Figura 6.4: Perfiles de presión. La abscisa es la coordenada de flujo normalizada Φ , relacionada con la coordenada radial normalizada s como $\Phi \sim s^2$.

6.2. Perturbaciones con SIESTA

En la versión utilizada de SIESTA (2.3, junio 2014) sólo es posible manejar eficientemente configuraciones con simetría vertical. Esto reduce considerablemente el número de ecuaciones por resolver, razón por la que se implementó así en la fase inicial. Al momento de escribir este trabajo, se está llevando a cabo la extensión del código necesaria para manejar configuraciones más generales con simetría de stellarator. La configuración del tokamak DIII-D utilizada fue modificada para satisfacer esta restricción; se excluyó la asimetría que introducía la presencia del divertor. Por desgracia, las configuraciones del stellarator no cuentan con esta simetría, por lo que presentan mayores problemas de convergencia al utilizar SIESTA.

Como se mencionó en la sección 4.2.2, SIESTA introduce islas semilla por medio de pertur-



(a) Superficie resonante con $\nu = 8/5$.

(b) Superficie resonante con $\nu = 3/2$

Figura 6.5: Perfiles de la transformada rotacional utilizadas para el heliac TJ-II.

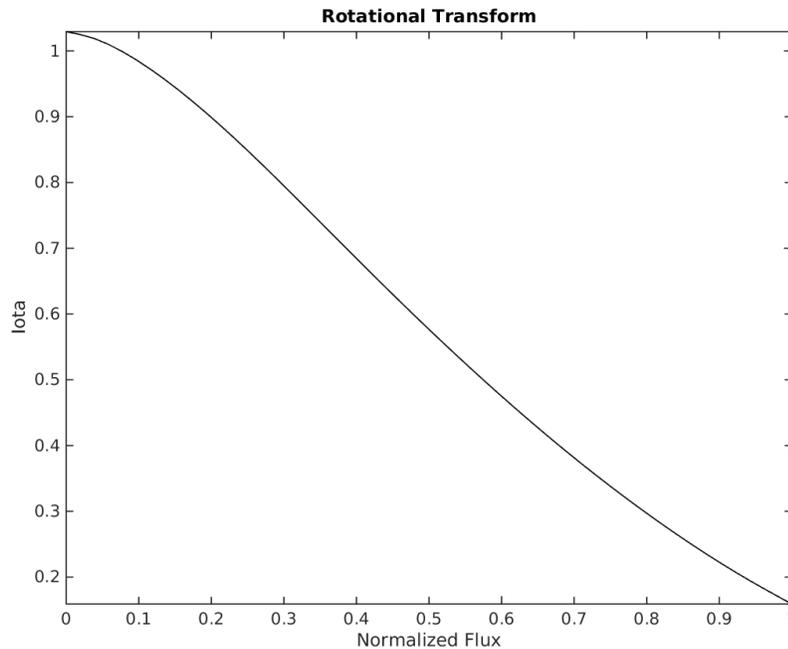


Figura 6.6: Perfil de la transformada rotacional utilizada para el Tokamak DIII-D.

baciones periódicas. Es posible especificar la periodicidad y amplitud de múltiples perturbaciones antes de la ejecución del programa. Por la geometría tridimensional, una perturbación puede tener una periodicidad toroidal y poloidal independiente, no necesariamente iguales. Dada una periodicidad poloidal m , puede haber distintas periodicidades toroidales n para las cuales se tenga una resonancia con las líneas de campo sobre alguna superficie magnética. La condición es que las líneas de campo y la perturbación tengan la misma helicidad, es decir, que n/m sea igual al valor de la transformada rotacional ν . SIESTA calcula automáticamente las componentes toroidales adecuadas para la componente poloidal especificada, de manera que se pueden llegar a introducir múltiples perturbaciones para el perfil de la transformada rotacional de la configuración bajo análisis.

6.2.1. Tokamak DIII-D

La figura 6.7 muestra el mapa de Poincaré² poloidal del campo magnético para el equilibrio alcanzado al especificar una triple periodicidad poloidal en la perturbación introducida. Al comparar los mapas toroidales (figura 6.7b) y poloidales (figura 6.7c) se aprecia que la razón entre periodicidades corresponde a un valor de la transformada rotacional presente en el perfil de la configuración utilizada (figura 6.6); las principales corresponden a $\iota = \{1, 2/3, 1/3\}$. Así, las componentes toroidales adecuadas para la poloidal especificada son justamente las que se relacionan con el valor de la transformada rotacional que se encuentre en el perfil de la configuración con la que se esté trabajando ($\iota = n/m$); sólo así las perturbaciones se asocian a una superficie resonante. En los mapas de Poincaré con ejes radial y angular que se muestran a continuación (figura 6.7b) se puede comprobar que la coordenada radial en la que aparecen las islas tras una perturbación con periodicidad poloidal dada coincide con la superficie de flujo que tiene la transformada rotacional correspondiente a alguna de las razones de bajo orden que se encuentran en el perfil de la transformada del equilibrio bajo estudio (figura 6.6). Si esto no se cumple, el estado de equilibrio final no presentará cambios por dicha perturbación y al considerarla sólo se introducirían cálculos innecesarios en el proceso iterativo del código. Es importante tener en cuenta que la coordenada radial de SIESTA va como la raíz cuadrada del flujo normalizado ($s = \sqrt{\psi}$) para poder apreciar la correspondencia entre los mapas de Poincaré y el perfil de la transformada (como entre las figuras 6.7b y 6.7c y la figura 6.6).

Al inicio de las ejecuciones del programa se especifica la amplitud de cada perturbación que se introducirá. Por otra parte, también se especifica el valor que debe alcanzar el residuo de la fuerza para considerar alcanzado el equilibrio y concluir los cálculos; el proceso iterativo se detiene poco después de que el residuo alcanza un valor más pequeño que este. Cuando se habla de problemas de convergencia, se refiere a que este residuo en realidad no disminuye lo suficiente o incluso diverge. Se puede incrementar la tolerancia con el costo de obtener resultados trunco, en el sentido de que no representen realmente el equilibrio final. En el registro de cada ejecución se detalla el valor del residuo de fuerza en cada iteración. Solía suceder que este disminuyera tras las primeras iteraciones, y comenzara a aumentar sin control en las subsecuentes. Se pueden modificar múltiples parámetros para mejorar la convergencia³, por desgracia, no es clara la manera adecuada de realizar las modificaciones, y estas deben de mejorarse poco a poco con prueba y error. Afortunadamente es posible realizar corridas con nuevos parámetros a partir de un equilibrio previo para intentar mejorar su convergencia. Los desarrolladores siguen trabajando en el código para automatizar este proceso de una manera efectiva pero en la versión actual aún es necesario llevarlo a cabo manualmente.

En la figura 6.8 se muestra como evoluciona el tamaño de una isla conforme incrementa la amplitud de las perturbaciones que la induce. El incremento del tamaño que se observa⁴ coincide cualitativamente con la relación encontrada en la sección 4.2.2. En la figura 6.9c se muestra el

²El código auxiliar POINCARE es el encargado de trazar mapas de Poincaré sobre superficies con coordenadas angulares constantes (toroidal o poloidal) a partir del equilibrio encontrado por SIESTA. Este código determina las trayectorias del campo magnético a partir de los valores dados sobre la malla utilizada por SIESTA, para después mostrar sólo los puntos de intersección de estas con los planos de interés. Por fortuna también fue optimizado para trabajar en paralelo.

³Entre los modificados están: la resistividad ficticia η , la viscosidad paralela μ_{\parallel} y el parámetro Levenberg-Marquardt, relacionado con el método “pseudo-transitorio” utilizado en SIESTA para fomentar la convergencia cuadrática en el método de Newton.

⁴Cabe destacar que el desfaseamiento que aparece en la figura 6.8c no tiene sentido físico y se atribuye a una convergencia trunca. Este tipo de resultados inesperados suelen aparecer en la versión actual de SIESTA.

mismo fenómeno pero para una situación con múltiples superficies resonantes. En este caso se utilizó la misma configuración mostrada en la figura 6.7, solamente se fue alterando la magnitud de las perturbaciones⁵. Cuando el tamaño de estas es lo suficientemente grande (figura 6.9c), series de islas pertenecientes a superficies resonantes distintas interactúan. Se generan islas secundarias y regiones caóticas, como se mencionó al final de la sección 4.2.2.

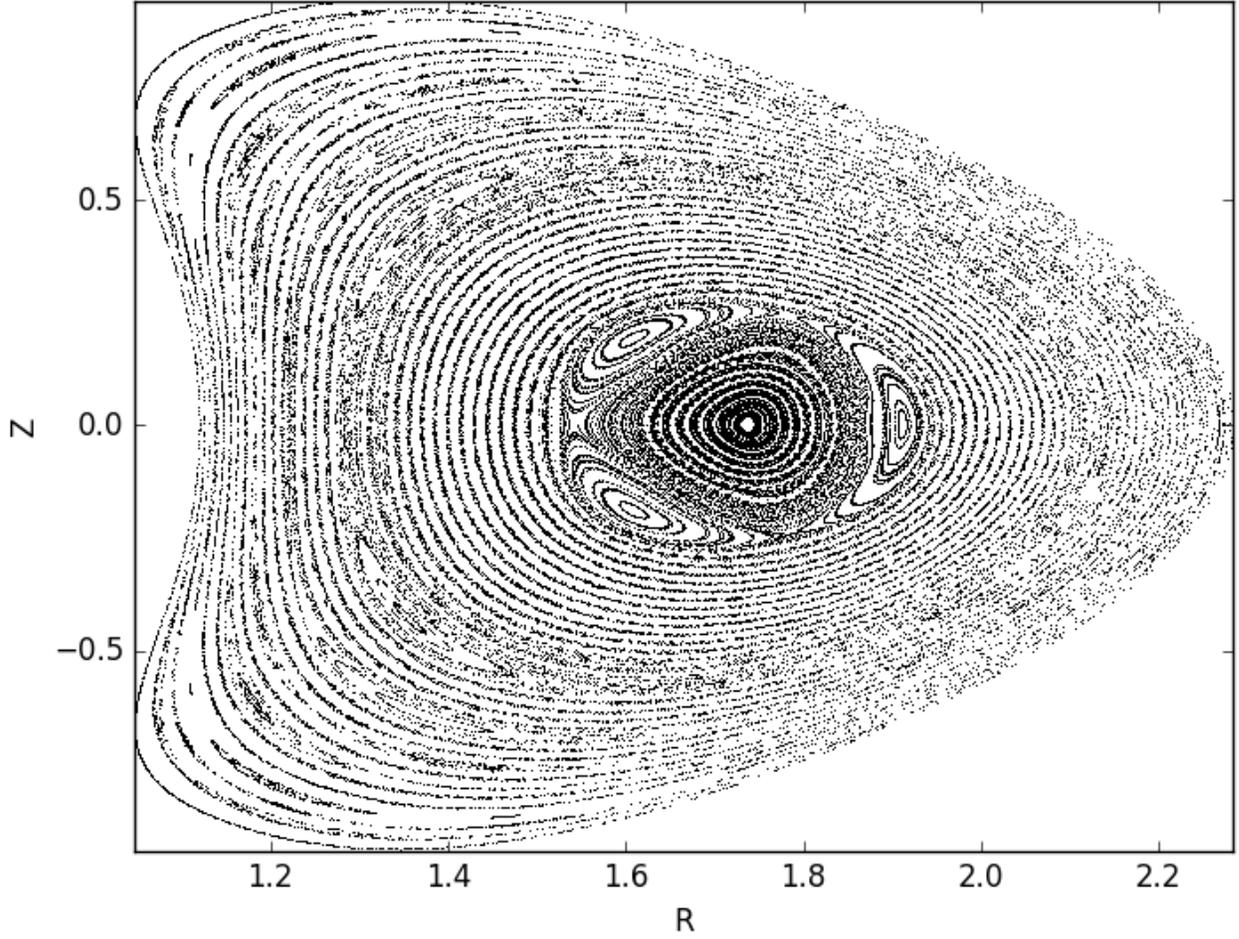
Gráficas correspondientes a varias perturbaciones simultaneas, con periodicidades poloidales de $m = \{1, 2, 3\}$, todas con la misma amplitud (2×10^{-3} respecto a la intensidad del campo magnético original), se muestran en la figura 6.10. En esta figura se muestra como va variando el equilibrio final conforme se afinan los parámetros de la ejecución para obtener fuerzas residuales más pequeñas. En la configuración con menor residuo es evidente la aparición de regiones caóticas por la interacción entre series de islas ajenas. Al ser un mayor número de superficies resonantes simultaneas, estos fenómenos aparecen más fácilmente. Además, esto complica la tarea de encontrar parámetros adecuados para SIESTA y lograr que este converja. Si la tolerancia es muy grande los resultados no representan el equilibrio final, mientras que si es muy pequeña esta no se logra alcanzar debido a los problemas de convergencia mencionados. Por esta razón, se debe tomar con precaución la apariencia del resultado. Aunque creemos que este sí representa a grandes rasgos la estructura del campo en el equilibrio final, las regiones caóticas y las islas secundarias no necesariamente se encuentran en su posición real, o tienen las características reales.

6.2.2. Heliac TJ-II

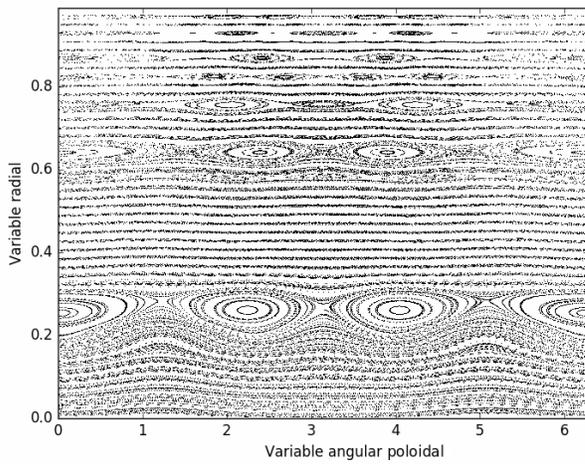
Otro ejemplo de este problema se muestra en la figura 6.11, donde el perfil de la transformada rotacional es el mostrado en la figura 6.5a y la perturbación introducida tiene periodicidad poloidal $m = 5$ ($\iota = 8/5$). En la primera parte (figura 6.11a) se muestra el resultado de corridas iniciales, donde el residuo de fuerza alcanzado fue $F_{residual} \sim 10^{-8}$. Tras repetidas corridas con diversos parámetros se logró alcanzar un resultado con residuo menor: $F_{residual} \sim 10^{-10}$ (figura 6.11b). Al igual que en la figura anterior, múltiples islas desaparecen conforme mejora la convergencia. Por desgracia, fue muy difícil disminuir el residuo final mucho más, por lo que queda algo de incertidumbre respecto a si el equilibrio real verdaderamente es el obtenido. Cabe destacar que el número de armónicos requeridos para representar el campo magnético es mayor en el caso del stellarator en comparación al del tokamak debido a su estructura tridimensional más complicada. Esto influye críticamente en el número de ecuaciones por resolver y dificulta la convergencia.

Por último, en la figura 6.12 se muestra una serie de 8 islas obtenidas para el TJ-II con la configuración con el perfil mostrado en la figura 6.5b. En este caso se presentó un problema más sutil al utilizar SIESTA. Fue necesario especificar una periodicidad poloidal $n = 8$, ya que cuando se utilizaba $n = 2$ no funcionaba, a pesar de que ambas son equivalentes: $\iota = 3/2 = 12/8$. Esto se debe a una optimización algo restrictiva en la que se aprovecha la simetría de stellarator para resolver las ecuaciones en el menor número posible de zonas equivalentes. Debido a que en el caso del heliac TJ-II la simetría de stellarator es de cuarto orden, la optimización actual implica que sólo se pueden manejar perturbaciones cuya periodicidad toroidal sea múltiplo de esta.

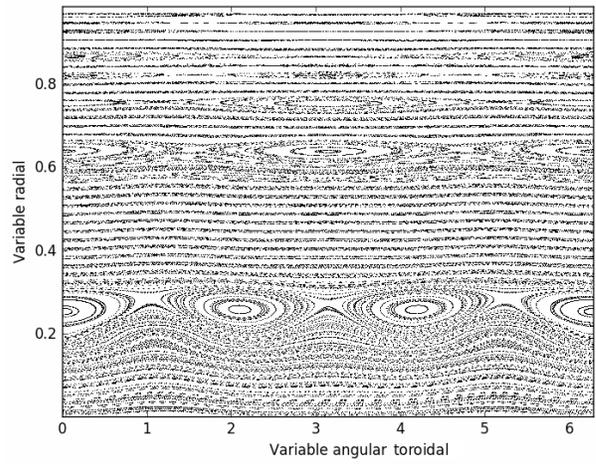
⁵Amplitudes de 2×10^{-4} , 6×10^{-4} y 2×10^{-3} sobre superficies con $\iota = \{1, 2/3, 1/3\}$, todas ellas presentes simultáneamente



(a) Mapa Poincaré de las líneas de campo.

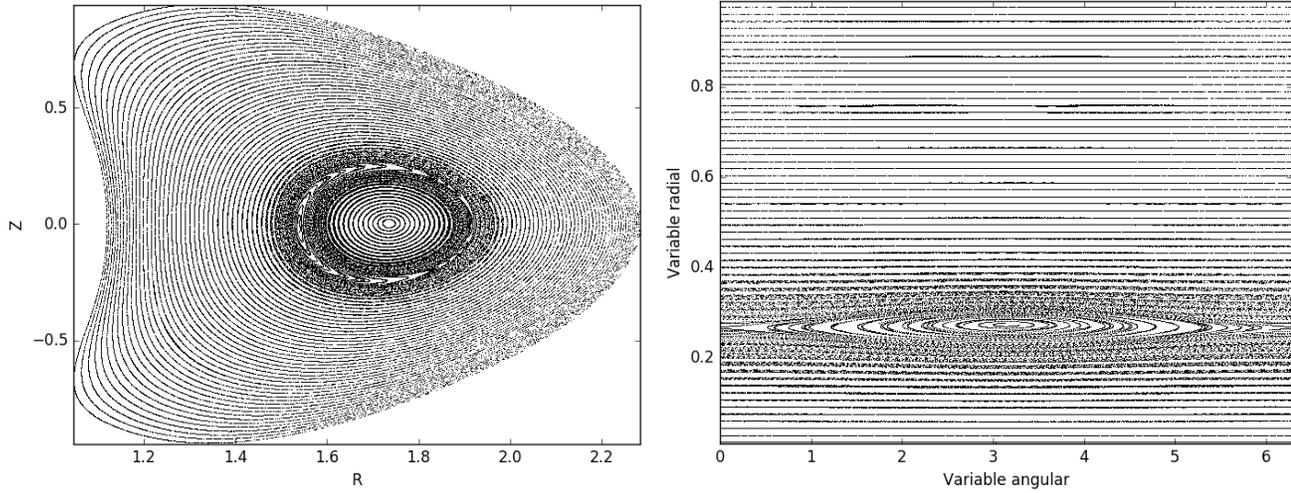


(b) Corte poloidal.

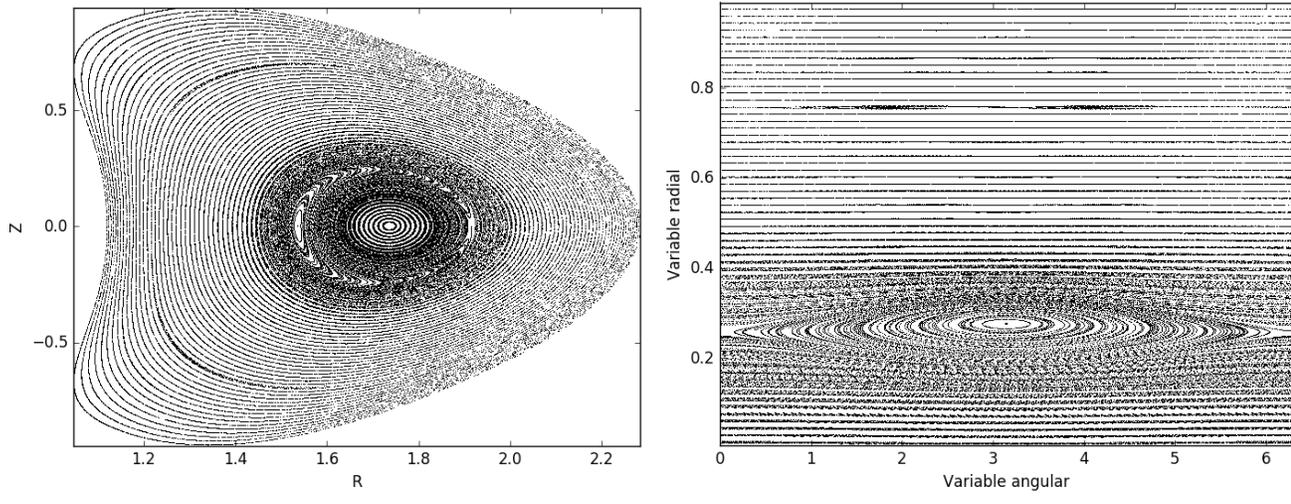


(c) Corte toroidal.

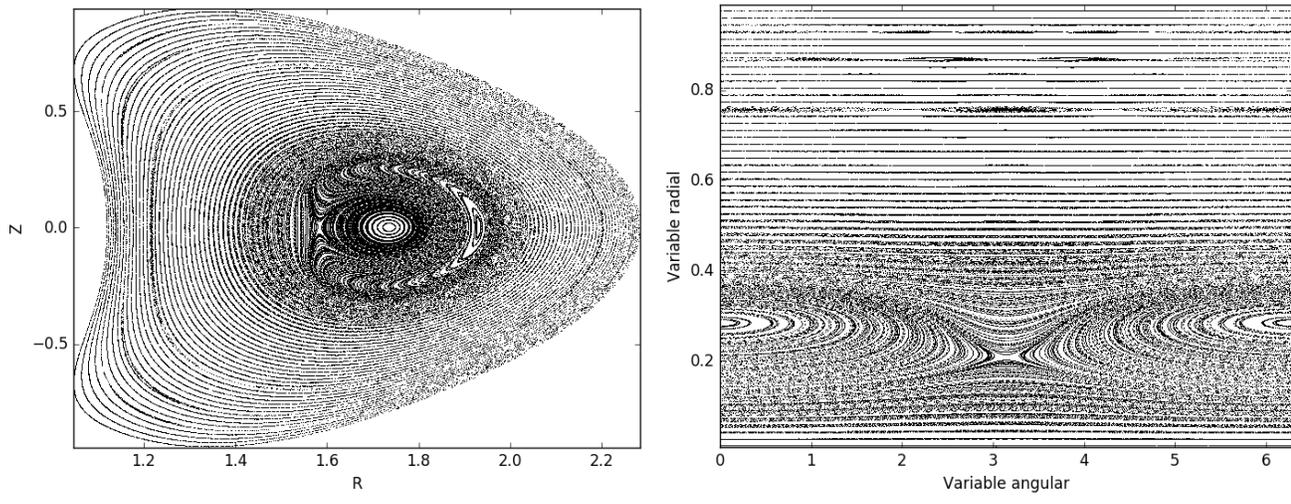
Figura 6.7: Islas magnéticas tras perturbación con periodicidad poloidal triple.



(a) Amplitud $2E-4$.

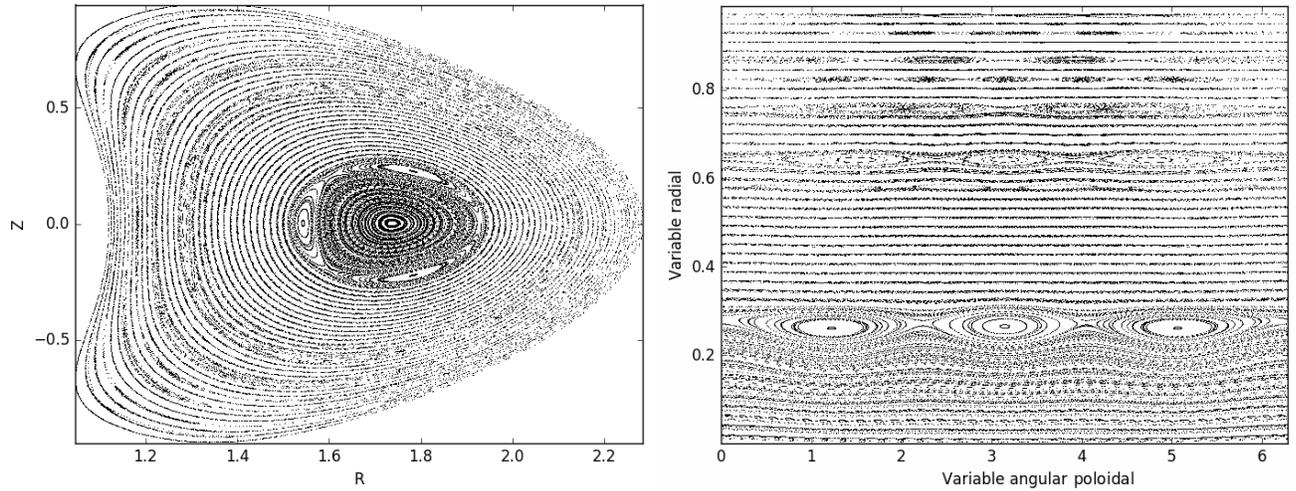


(b) Amplitud $6E-4$.

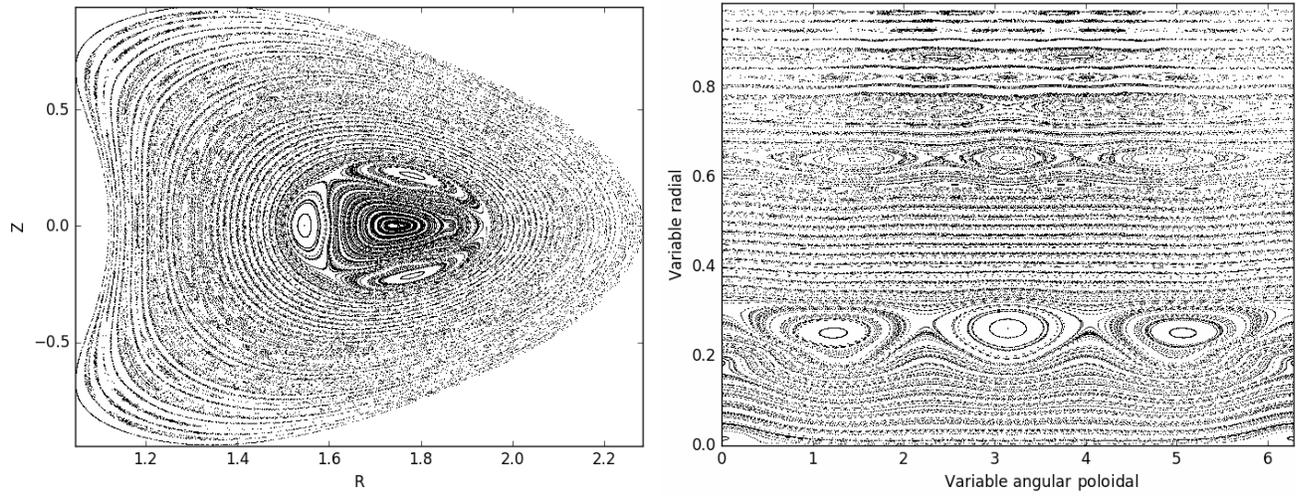


(c) Amplitud $2E-3$.

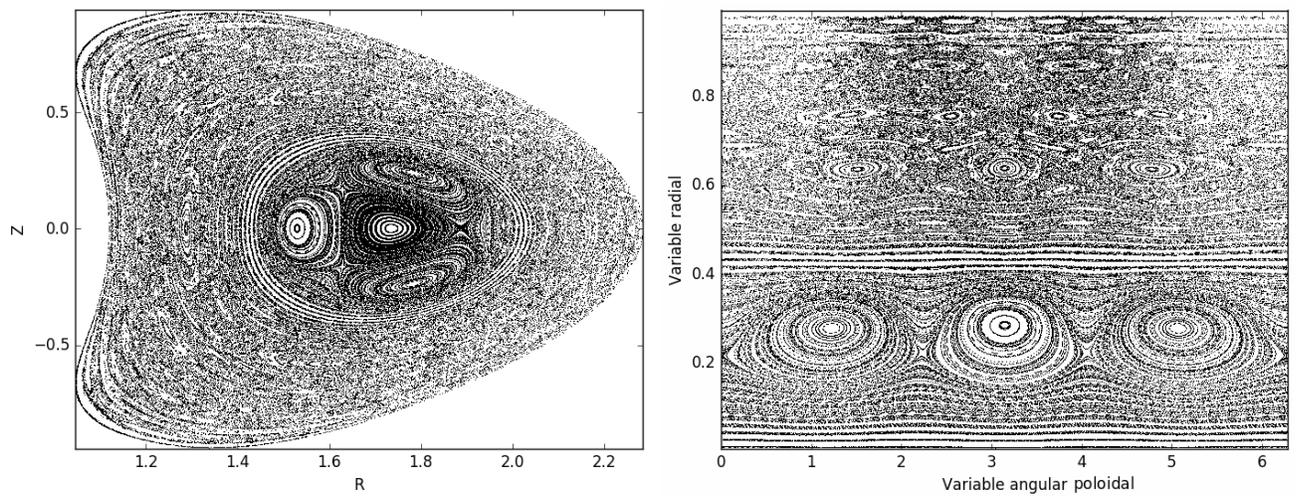
Figura 6.8: Incremento de amplitud en la perturbación y la isla en el tokamak DIII-D



(a) Amplitud $2E-4$.

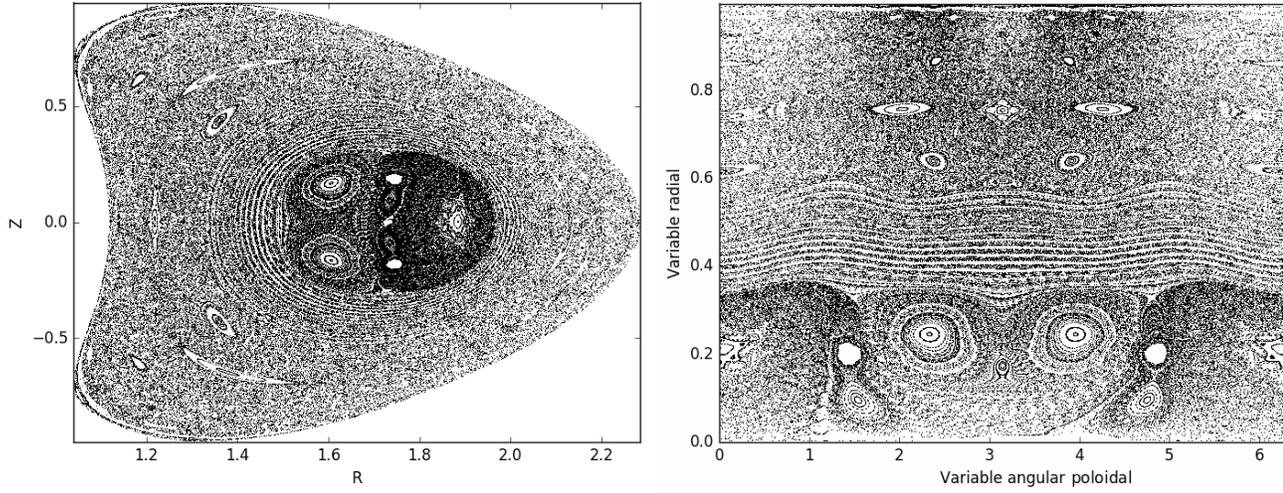


(b) Amplitud $6E-4$.

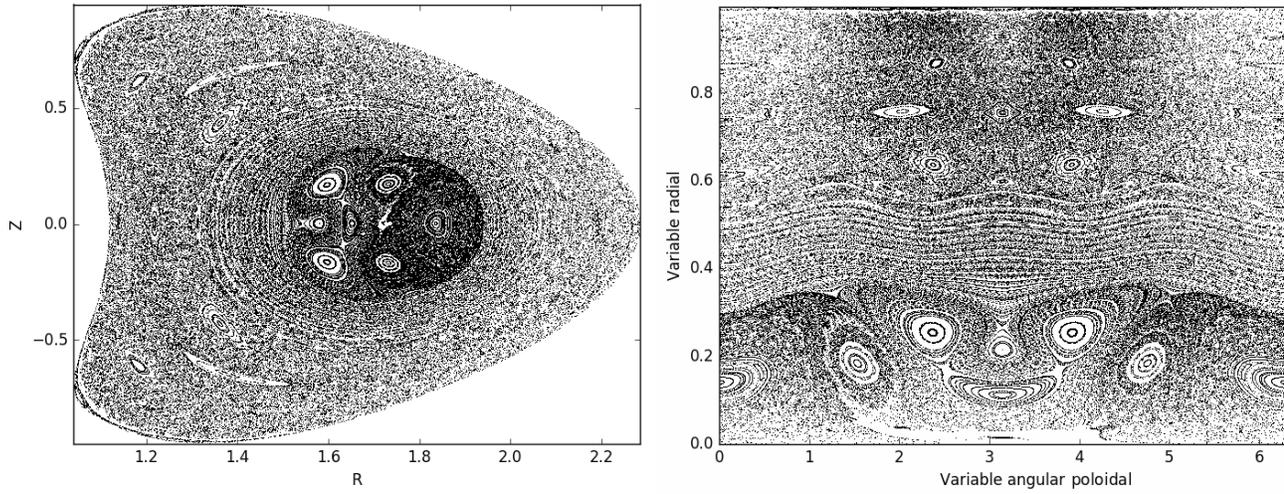


(c) Amplitud $2E-3$.

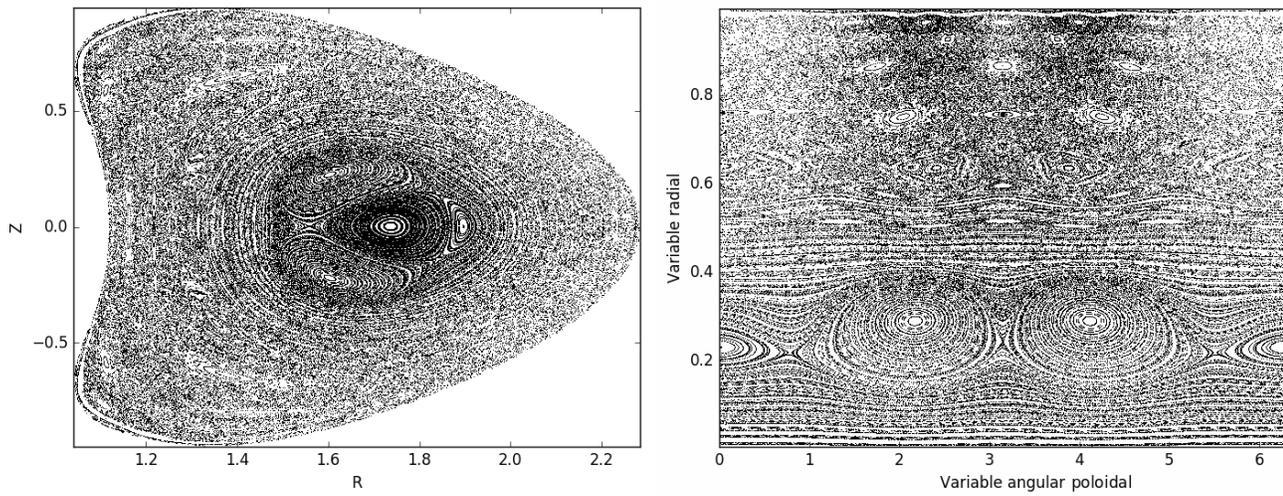
Figura 6.9: Incremento de amplitud en la perturbación y múltiples series de islas en el tokamak DIII-D.



(a) $F_{residual} \sim 1E - 7.$

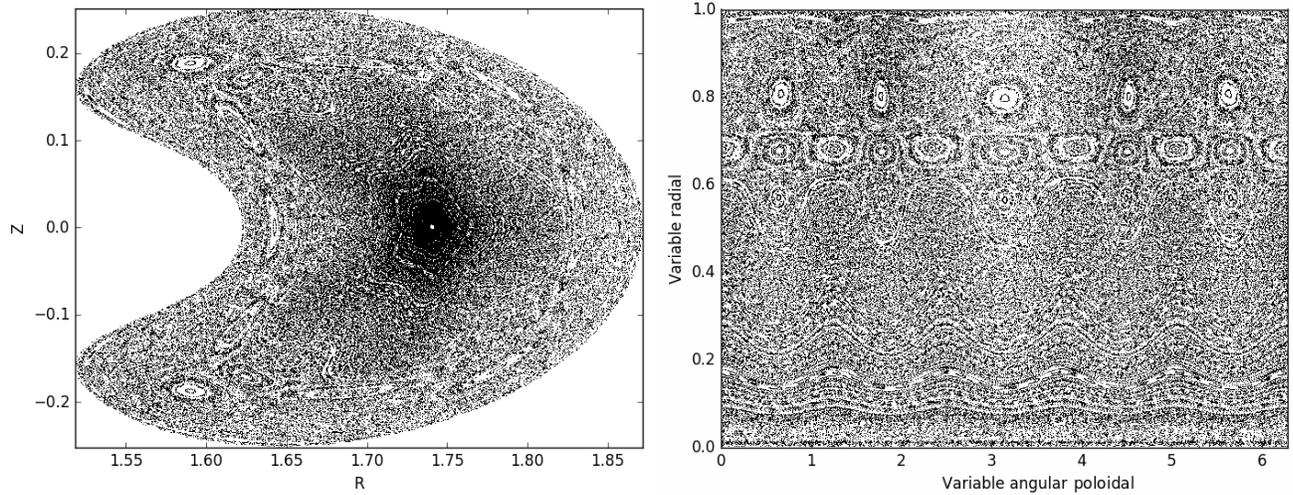


(b) $F_{residual} \sim 1E - 9.$

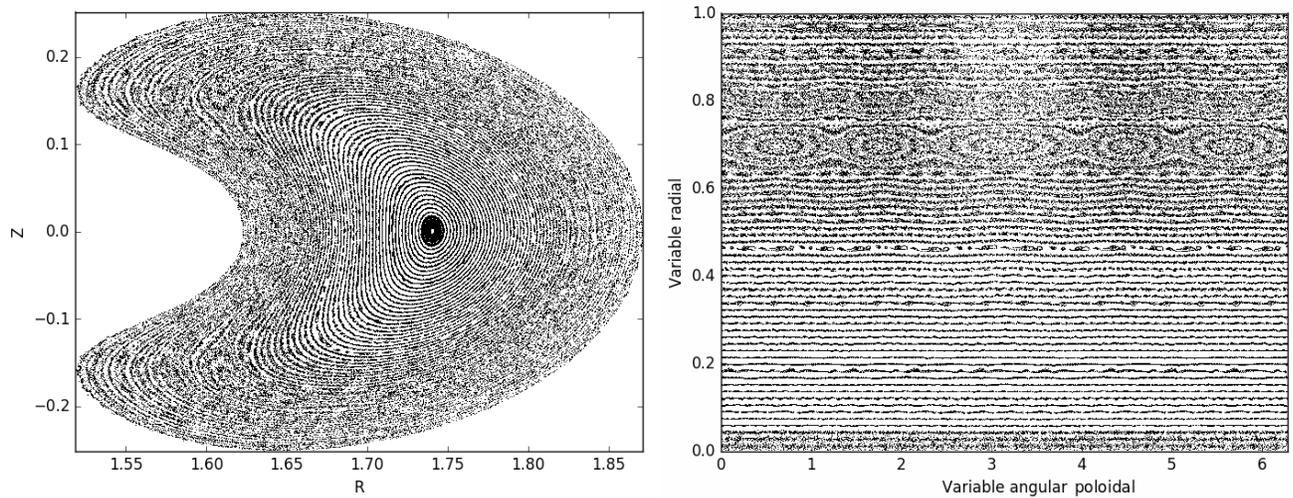


(c) $F_{residual} \sim 1E - 11.$

Figura 6.10: Iteraciones hacia el equilibrio en el tokamak DIII-D.



(a) Convergencia trunca.



(b) Convergencia mejorada.

Figura 6.11: Iteraciones hacia el equilibrio en el stellarator TJ-II con una perturbación resonante en $\iota = 8/5$.

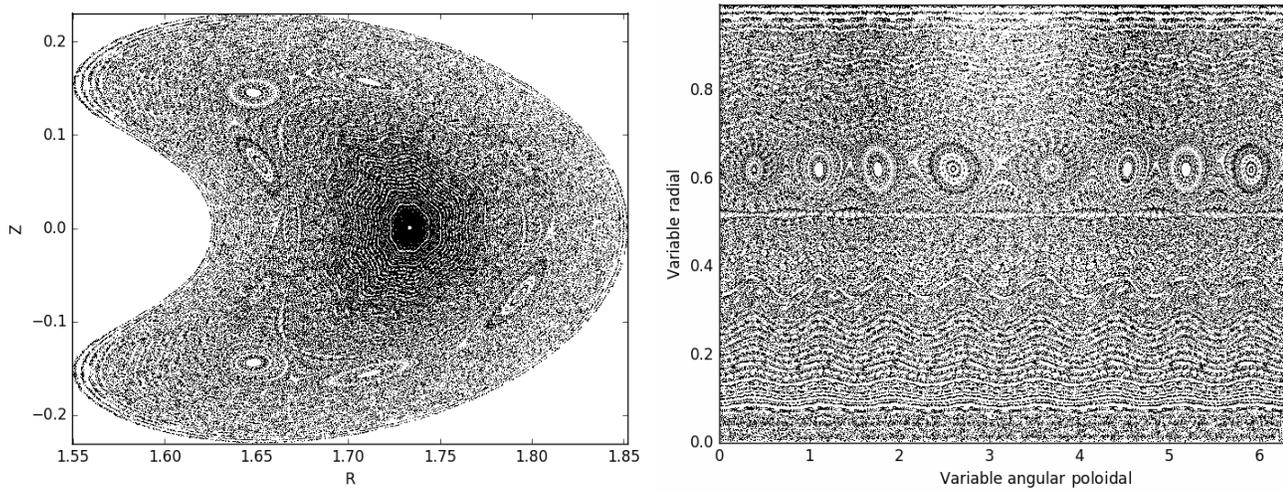


Figura 6.12: Serie de islas para $\nu = 12/8$.

Se expusieron las bases teóricas para describir el modelo MHD ideal y resistivo, utilizados como primera aproximación para describir algunas características de las islas magnéticas en sistemas toroidales de confinamiento de plasma para fusión nuclear. Se describió el principio de energía utilizado por códigos magnetohidrodinámicos para encontrar estados de equilibrio, ideales o incluyendo la aparición de islas por perturbaciones resonantes. También se mostró la relación entre la periodicidad y amplitud de una perturbación con la periodicidad y amplitud de las islas resultantes sobre superficies magnéticas resonantes. Se realizaron simulaciones numéricas sobre algunas configuraciones de reactores experimentales reales con los códigos VMEC, SIESTA y POINCARE, de la familia STELLOPT (desarrollada en el Laboratorio Nacional de Oak Ridge). Con estas se obtuvieron resultados que concuerdan cualitativamente con las expectativas teóricas. Además, se encontraron algunos límites de aplicabilidad en las versiones utilizadas.

7.1. Estado actual del código

El estado actual del código SIESTA limita su rango de aplicación en configuraciones reales. En general, la versión 2014 que se utilizó en este trabajo no se puede considerar una versión lista para el uso por científicos no relacionados directamente con su desarrollo. Aún así, fue posible obtener algunos resultados interesantes y vislumbrar el potencial del código. Bajo algunas restricciones en los equilibrios estudiados y las perturbaciones inducidas, los resultados coinciden cualitativamente con lo que se espera de la teoría. Entre las características observadas se encuentran: la periodicidad de perturbaciones resonantes concuerda con la de las islas que esta genera, la amplitud de las islas incrementa conforme aumenta la amplitud de las perturbaciones (hasta el límite caótico) y la posición radial en las que aparecen las resonancias corresponde al valor de la variable radial en la que la transformada rotacional alcanza el valor de la razón entre periodicidades poloidales y toroidales de la perturbación.

Debido a que las mallas utilizadas por VMEC y SIESTA no son idénticas, suelen aparecer islas pequeñas en lugares inesperados. Las discrepancias asemejan perturbaciones de fondo que evolucionan en pequeñas islas durante la búsqueda de equilibrio. Se debe reconocer su origen inesperado al momento de analizar los resultados. Por el diseño de los stellarators y de los divertores en los

tokamaks, no se cumple la simetría arriba-abajo que el código SIESTA presupone (versión 2014) para simplificar las ecuaciones. Archivos de entrada que no garanticen esta condición presentan fuertes problemas de convergencia, aún para perturbaciones pequeñas. Por otra parte, existen aún dificultades asociadas al método iterativo utilizado en la búsqueda de equilibrio, pues este depende de un preconditionador adecuado que garantice la convergencia del cálculo. Hasta el momento, se deben proporcionar algunos parámetros manualmente para fijar el preconditionador, y los valores adecuados se encuentran solamente con prueba y error. Se está trabajando en la automatización de este proceso para futuras versiones de SIESTA.

Si se desea estudiar los efectos de perturbaciones demasiado grandes, la convergencia del cálculo se ve severamente afectada en algunos casos. En este trabajo fue necesario restringir la magnitud de las perturbaciones para obtener resultados razonablemente cercanos al equilibrio. Solía suceder que durante la iteración, el residuo de la fuerza presente disminuyera sólo hasta cierto punto, tras el cual divergía. Para obtener al menos resultados cercanos al equilibrio, se tuvo que relajar el orden de magnitud tras el cual se consideraba nula la fuerza. Como se muestra en [45]¹, esto significa que los resultados asemejan al equilibrio final, pero no pueden considerarse cuantitativos. Las zonas caóticas representan las diferencias más significativas entre ambos resultados.

7.2. Futuras perspectivas

Teorías más complejas que describan detalladamente la aparición de islas magnéticas están siendo desarrolladas en la actualidad. Una propuesta interesante mezcla la relajación de Taylor con MHD resistiva[46]. La aparición de experimentos modernos de mayor tamaño como ITER y W7-X darán más información para corroborar las predicciones de teorías nuevas. Respecto a las dificultades técnicas reportadas, todas son superables, y seguramente serán solucionadas eventualmente durante el desarrollo de una versión final de este código. El completar un paquete computacional² que permita simular un experimento de fusión nuclear controlada en tiempo real es una visión a mediano plazo. Las propiedades de escalamiento y paralelización llevadas a cabo hasta el momento dan un panorama optimista y resultados aceptables. Aún no se ha considerado la posibilidad de utilizar el poder de los procesadores gráficos modernos en el esquema de cálculo paralelo; un enfoque muy popular de la computación científica en la última década. El uso futuro de GPUs parece un paso en la dirección correcta.

¹En este artículo se reportan resultados con residuos del orden de 10^{-20} con ajustes finos en los parámetros.

²Cabe mencionar que existen otros códigos independientes especializados en islas magnéticas: PIES, HINT y SPEC.

Modelos de plasmas

Rigurosamente, la evolución temporal de un plasma queda determinada por la interacción entre campos electromagnéticos externos y los generados por el plasma mismo; se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas por partícula (ecuaciones de Maxwell), lo cual es impracticable debido al gran número de partículas involucradas en los plasmas de interés para fusión. En la práctica, se recurre a estudiar la dinámica con varios modelos aproximados. Cada modelo es incompleto, pero todos sirven para caracterizar el comportamiento de un plasma a distintas escalas o bajo situaciones diferentes. Los modelos utilizados principalmente son, en orden ascendente de complejidad:

- Modelo de partículas individuales.
- Modelo de un fluido (magnetohidrodinámica MHD).
- Modelo de dos fluidos (iones y electrones).
- Modelo estadístico (ecuación de Boltzmann y Vlasov).

A continuación se describen algunos resultados básicos necesarios para caracterizar el estado de plasma y subsecuentemente obtener las ecuaciones de magnetohidrodinámica.

A.1. Caracterización de un plasma

A.1.1. Longitud de Debye

Un plasma es capaz de apantallar un potencial eléctrico debido a que las partículas cargadas se encuentran libres. Ante la aparición de una perturbación de carga responden hacia ella partículas con carga opuesta, disminuyendo la perturbación y el campo generado por esta. Aún así, cuando la temperatura es no nula es imposible un apantallamiento perfecto debido a las fluctuaciones térmicas de las partículas.

Para analizar el fenómeno supongamos que la energía potencial asociada al campo de la perturbación introducida es despreciable en comparación a la energía térmica (como el producido por

una partícula cargada de prueba): $|e\phi| \ll k_B T$. Podemos expresar la densidad de partículas con la probabilidad de Boltzmann¹:

$$n_e(\vec{r}) = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T_e}\right) \approx n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T_e}\right), \quad (\text{A.1a})$$

$$n_i(\vec{r}) = n_{i0} \exp\left(\frac{-e\phi(\vec{r})}{k_B T_i}\right) \approx n_{i0} \left(1 - \frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T_i}\right). \quad (\text{A.1b})$$

Partiendo de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} [Q\delta(\vec{r}) - en_e(\vec{r}) + en_i(\vec{r})], \quad (\text{A.2})$$

consideramos una situación con simetría esférica y utilizamos las densidades aproximadas anteriores para obtener la ecuación radial

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[Q\delta(r) - en_{e0} \frac{e\phi(r)}{k_B T_e} - en_{i0} \frac{e\phi(r)}{k_B T_i} \right],$$

donde se utilizó la neutralidad del sistema no perturbado: $n_0 = n_{e0} = n_{i0}$. Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(r) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(r), \quad (\text{A.3})$$

si definimos la *distancia efectiva de Debye* (λ_D) como

$$\frac{1}{\lambda_D^2} := \sum_{\sigma=e,i} \frac{1}{\lambda_{D\sigma}^2}, \quad (\text{A.4})$$

donde se utiliza la longitud de Debye de cada especie:

$$\frac{1}{\lambda_{D\sigma}^2} := \frac{n_{\sigma 0} e^2}{\epsilon_0 k_B T_\sigma}. \quad (\text{A.5})$$

La ecuación (A.3) se puede resolver al suponer que: $\phi(r) = f(r)/r$. Así obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\phi(r) + r \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr},$$

por lo que $f(r)$ satisface $f''(r) = f(r)/\lambda_D^2$ y tiene soluciones de la forma: $f(r) = a \exp(\pm r/\lambda_D)$. Sólo la solución negativa tiene sentido físico, pues la otra diverge si $r \rightarrow \infty$ y se debe cumplir que $\phi(r) \rightarrow 0$ en dicho límite. Para determinar la constante a aplicamos la ley de Gauss alrededor de la perturbación, de manera que en el límite $r \rightarrow 0$ sólo se considere la carga extra Q que esta aporta:

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E_r \approx Q/\epsilon_0,$$

pero sabemos que

¹Los iones y los electrones pueden tener distintas temperaturas debido a que la frecuencia de interacciones entre elementos de la misma especie es mucho mayor que entre elementos de distinta especie. [6]

$$E_r(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{f(r) - rf'(r)}{r^2} = \frac{a}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda_D}\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{a}{r^2},$$

por lo que $a = Q/4\pi\epsilon_0$. El resultado final es el potencial de *Debye-Hückel*² :

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (\text{A.6})$$

Este potencial está “apantallado” por el término exponencial, que lo distingue del potencial de carga en el vacío y ocasiona que este decaiga más rápidamente; basta con que se cumpla $r \gg \lambda_D$ para que $\phi(r) \rightarrow 0$. Siendo así, la *distancia de Debye* λ_D representa la distancia del apantallamiento e indica que sólo a escalas L grandes respecto a esta ($L \gg \lambda_D$) se le puede atribuir a un plasma el ser *cuasineutral*³. Cabe resaltar que λ_D es directamente proporcional a la temperatura, mostrando que las fluctuaciones térmicas afectan la capacidad de apantallamiento, como habíamos mencionado. Además, conforme aumenta la densidad de portadores de carga aumenta la capacidad de apantallamiento.

En la deducción del potencial apantallado se supuso implícitamente que había suficientes partículas como para que el tratamiento estadístico fuera válido. Para garantizar dicha hipótesis se requiere que el número de partículas N_D dentro de una esfera de radio λ_D centrada en la fuente de la perturbación, llamada *esfera de Debye*, sea lo suficientemente grande. Entonces

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3, \quad (\text{A.7})$$

donde n representa la densidad de partículas y N_D es llamado el *parámetro de plasma*. Entre más partículas se encuentren dentro de la esfera de Debye se vuelve menos probable que se presenten fuerzas considerables resultantes de interacciones de Coulomb[9]. Siendo así, la condición $N_D \gg 1$ se requiere para que los fenómenos colectivos dominen sobre los asociados a colisiones.

A.1.2. Tiempo de respuesta y frecuencia característica

Otra criterio para establecer la supremacía de fenómenos colectivos es comparar las escalas de tiempo asociadas a colisiones y a la respuesta colectiva ante una perturbación; en este aspecto se considera sólo la respuesta de los electrones, pues al ser mucho más ligeros que los iones esta es mucho más rápida. Considerando una vez más que: $|e\phi| \ll k_B T_e$, la velocidad media es la velocidad térmica⁴: $v_{T_e} \approx \sqrt{k_B T_e / m_e}$. Para establecer un equilibrio, la respuesta ante una perturbación involucra a las partículas dentro de la esfera de Debye, las cuales deben viajar una distancia

²Llamado también *potencial de Yukawa* por su semejanza con el potencial propuesto por Hideki Yukawa en el campo de física de partículas.

³Existen plasmas formados por una sola especie de partículas cargadas llamados *no neutrales* que presentan también el fenómeno de apantallamiento, entre otros fenómenos colectivos, pero no los discutiremos aquí pues no están relacionados con la fusión nuclear controlada.

⁴La velocidad térmica se refiere a la media de la distribución de Maxwell (ver nota 2, sección 2.2):

$$v_T = \frac{1}{n} \int_0^\infty f_M(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

característica de λ_D , por lo que el tiempo de respuesta es: $t \approx \lambda_D/v$. Su inverso se llama *frecuencia de plasma de electrones*:

$$\omega_{pe} = \frac{v_e}{\lambda_{De}} = \sqrt{\frac{n_{e0}e^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (\text{A.8})$$

debido a que resulta ser también la frecuencia con la que oscilan los electrones alrededor de una perturbación de carga debido al campo eléctrico que esta genera y que los electrones tienden a neutralizar. De esta manera, cualquier perturbación en el campo de frecuencia menor a la frecuencia de plasma, $\omega < \omega_{pe}$, es neutralizada en un plasma.

Para que los fenómenos colectivos dominen, se debe cumplir que el *tiempo libre medio* τ entre colisiones sea mayor al tiempo de respuesta, lo que se puede expresar como: $\omega_{pe}\tau > 1$. Una observación sutil pero importante es que el tiempo de vida de plasma T sea mayor al tiempo de respuesta: $T \gg \omega_{pe}^{-1}$. Esto establece un límite inferior al tiempo de confinamiento necesario para que las consideraciones de la teoría sean válidas.

A.1.3. Parámetros de plasma

Resumiremos aquí los cuatro criterios que se encontraron para que un gas de partículas cargadas cumpla con la definición de plasma [3, 1]:

$$\lambda_D \ll L \quad \text{La escala del sistema debe ser mayor a la longitud de Debye.} \quad (\text{A.9a})$$

$$N_D \gg 1 \quad \text{Las partículas dentro de la esfera de Debye deben ser muchas.} \quad (\text{A.9b})$$

$$\omega_{pe}\tau > 1 \quad \text{El tiempo libre medio debe superar el tiempo de respuesta.} \quad (\text{A.9c})$$

$$T \gg \omega_{pe}^{-1} \quad \text{La vida del plasma debe ser mayor al tiempo de respuesta.} \quad (\text{A.9d})$$

A.2. Dinámica individual de partículas cargadas

Este modelo sólo considera la dinámica que resulta de la interacción de una partícula cargada con campos eléctricos y magnéticos externos. Para nuestros propósitos sólo se consideran fenómenos no relativistas y se desprecia la radiación. La evolución temporal es descrita por la ecuación de Lorentz:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (\text{A.10})$$

A.2.1. Frecuencia de ciclotrón y radio de Larmor

Consideramos primero el caso de un campo eléctrico nulo y un campo magnético constante y homogéneo. Tomamos el eje de coordenadas cartesiano de forma tal que $\vec{B} = B\hat{z}$. Se sigue de la ecuación (A.10) que

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{q}{m}v_y B, \\ \dot{v}_y &= -\frac{q}{m}v_x B, \\ \dot{v}_z &= 0. \end{aligned}$$

donde $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Combinando las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.1) obtenemos

$$\ddot{v}_{x,y} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_{x,y},$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico, que al integrar temporalmente y considerar que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ y que $v^2 = v_z^2 + v_\perp^2$ con $v_\perp^2 := v_x^2 + v_y^2$ resulta en:

$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp \cos(\omega_c t + \alpha), & v_y &= v_\perp \sin(\omega_c t + \alpha), \\ r_x - r_{x0} &= r_c \sin(\omega_c t + \alpha), & r_y - r_{y0} &= r_c \cos(\omega_c t + \alpha). \end{aligned}$$

La ecuación de la velocidad paralela al campo magnético representa movimiento rectilíneo uniforme: $r_z = v_z t + r_{z0}$. La trayectoria de la partícula traza un círculo de radio r_c con centro en (r_{x0}, r_{y0}, r_z) sobre el plano perpendicular al campo y con frecuencia ω_L . Se concluye entonces que las órbitas que sigue partículas cargadas en un campo magnético constante y uniforme son helicoidales.

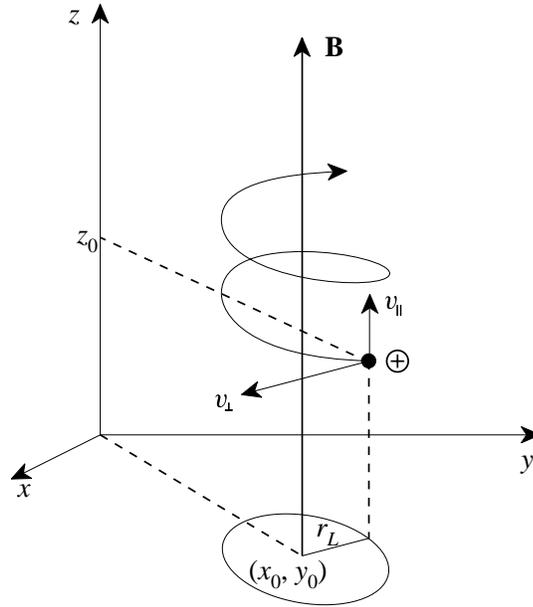


Figura A.1: Trayectoria helicoidal de una partícula cargada en un campo magnético. [9]

La frecuencia característica ω_L se denomina *frecuencia de Larmor* o de *ciclotrón*:

$$\omega_L := \frac{|q|}{m} B. \quad (\text{A.11})$$

Al centro del círculo trazado se le llama *centro guía* y al radio se le llama *radio de Larmor*:

$$r_L := \frac{v_\perp}{\omega_c}. \quad (\text{A.12})$$

Una partícula seguirá la línea de campo con desviaciones más pequeñas si aumenta la intensidad de este: $r_c \sim B^{-1}$. Partículas con carga opuesta giran sobre el círculo en sentido opuesto y a mayor masa es mayor el radio de Larmor, por lo que: $r_{Le} > r_{Li}$, donde se denotó con e a los electrones y con i a los iones.

A.2.2. Derivas del centro guía

La dinámica se complica un poco si se consideran situaciones donde las líneas de campo magnético estén curvadas y cuya magnitud no sea constante. Se puede esperar que el movimiento aún sea parecido al helicoidal, enroscándose sobre las líneas de campo, lo que significa que en un plano perpendicular a la dirección de este, la proyección del movimiento traza órbitas con centro en el punto donde pasa el campo. Si se define el *centro guía* como dicho punto, se puede analizar la dinámica de la partícula con base en la dinámica del centro guía. Con este enfoque es posible deducir que aparecen derivas bajo la acción de un campo eléctrico, la curvatura y el gradiente del campo magnético. Si se denota con \vec{R}_c el radio de curvatura de magnitud R_c , la velocidad de deriva ocasionada por el gradiente y la curvatura del campo es ([2])

$$\vec{v}_R + \vec{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2}, \quad (\text{A.13})$$

mientras que la ocasionada por un campo eléctrico es

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (\text{A.14})$$

Coordenadas curvilíneas

Para describir de la manera más sencilla posible una configuración de confinamiento magnético toroidal, es necesario utilizar un sistema de coordenadas curvilíneo. Debido a que las líneas de campo magnético son especialmente importantes, se da preferencia a sistemas coordenados que se adapten a estas, volviéndolas líneas rectas al utilizarlos. A continuación se resumen algunos resultados importantes de la geometría diferencial que permiten manejar más fácilmente dichas coordenadas. Todo el material de esta sección se encuentra en [24].

B.1. Notación indicial

Supongamos que tenemos una base euclidiana ortonormal: $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\} = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, bajo la cual un vector \vec{V} se puede expresar equivalentemente como

$$\vec{V} = (V^x, V^y, V^z) = V^x \hat{x} + V^y \hat{y} + V^z \hat{z} = \sum_{i=1}^3 V^i \hat{x}_i = V^i \hat{x}_i. \quad (\text{B.1})$$

La *convención de Einstein*, utilizada en la última igualdad, se refiere a que índices repetidos (contraídos)¹ se suman sobre todos sus posibles valores. Esta propiedad implica que no importa cual sea el símbolo asociado al índice, por lo que a los índices contraídos se les llama *índices mudos*. Los índices que no están repetidos se llaman *índices libres* y representan cada posible coordenada del vector, o con más generalidad, al tensor al que se le anexe.

B.2. Transformaciones

Supongamos que pasamos de un sistema euclidiano a un sistema curvilíneo de manera invertible: $\vec{r}(x^1, x^2, x^3) \rightarrow \vec{r}(u^1, u^2, u^3)$. Que el jacobiano de la transformación sea no nulo asegura que esta

¹Al tratar con coordenadas curvilíneas es importante que la repetición sea entre superíndices y subíndices.

sea invertible y que ambos conjuntos sean linealmente independientes:

$$J = J(u^1, u^2, u^3) = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

El jacobiano de la transformación inversa es

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(u^1, u^2, u^3) = \frac{\partial(u^1, u^2, u^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se tiene entonces:

$$J = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3}, \quad (\text{B.2a})$$

$$\mathcal{J} = \nabla u^1 \cdot \nabla u^2 \times \nabla u^3, \quad (\text{B.2b})$$

$$J = \mathcal{J}^{-1} \neq 0. \quad (\text{B.3})$$

Los conjuntos $\{\vec{e}_i\}$ y $\{\vec{e}^i\}$ con $i = 1, 2, 3$ son recíprocos entre sí cuando $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$. Una condición suficiente y necesaria para que esto se cumpla en el caso tridimensional es:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3}. \quad (\text{B.4})$$

El vector $\partial \vec{r} / \partial u^i$ es paralelo a la curva generada al variar solamente la coordenada u^i , con $i = \{1, 2, 3\}$ en tres dimensiones. Con una buena elección de coordenadas se cumple la condición (B.3), por lo que se define rigurosamente a los vectores base *tangenciales* en cada punto del espacio como (base contravariante)

$$\vec{e}_i := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}. \quad (\text{B.5})$$

En general, el gradiente de una función Φ se define de manera que su diferencial en cierta dirección $d\vec{r}$ sea: $\delta\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{r}$. Si se define la base recíproca (base covariante) como

$$\vec{e}^i := \nabla u^i, \quad (\text{B.6})$$

se puede expresar a la diferencial de las coordenadas en términos del gradiente como

$$du^i = \vec{e}^i \cdot d\vec{r}, \quad (\text{B.7})$$

Al considerar: $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2, u^3)$, se sigue de la regla de la cadena que

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i = \vec{e}_i du^i. \quad (\text{B.8})$$

Al combinar estos resultados se concluye que las elecciones (B.6) y (B.5) son acertadas:

$$du^i = \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j du^j \implies \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i. \quad (\text{B.9})$$

Conviene resaltar que las ecuaciones (B.2) son equivalentes a

$$J = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3, \quad (\text{B.10a})$$

$$\mathcal{J} = \vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3, \quad (\text{B.10b})$$

y que, por la ecuación (B.4), para cualquier permutación cíclica $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3\}$ se cumple:

$$\vec{e}^i = (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) / J, \quad (\text{B.11a})$$

$$\vec{e}_i = (\vec{e}^j \times \vec{e}^k) J. \quad (\text{B.11b})$$

Por otra parte, es útil definir el símbolo de Levi-Civita como

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ es una permutación par de } \{1, 2, 3\}, \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ es una permutación impar de } \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

con lo que se puede reescribir la ecuación (B.11) sin restricciones sobre los índices como

$$\vec{e}^i = \epsilon^{ijk} (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) / J, \quad (\text{B.13a})$$

$$\vec{e}_i = \epsilon_{ijk} (\vec{e}^j \times \vec{e}^k) J. \quad (\text{B.13b})$$

B.3. La métrica

Se definen los coeficientes de la métrica como

$$g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j, \quad (\text{B.14a})$$

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad (\text{B.14b})$$

$$g_i^j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}^j, \quad (\text{B.14c})$$

y se relacionan así las coordenadas covariantes y contravariantes de cualquier vector \vec{V} :

$$V_i = g_{ij} V^j, \quad (\text{B.15a})$$

$$V^i = g^{ij} V_j. \quad (\text{B.15b})$$

Al multiplicar las expresiones anteriores se obtiene $V_i V^i = g_{ij} g^{jk} V_k V^j$ por lo que se debe cumplir que $g_{ij} g^{jk} = \delta_j^k$; en el caso particular $i = j$ se obtiene

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_j^k = \delta_k^j = g_k^j. \quad (\text{B.16})$$

El producto interno entre dos vectores cualesquiera se puede representar con una contracción con la métrica:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v^i u_i = v_i u^i = g_{ij} v^i u^j = g^{ij} v_i u_j. \quad (\text{B.17})$$

Entonces, al usar las ecuaciones (B.14b) y (B.5) obtenemos

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j},$$

lo cual equivale a una multiplicación matricial, y el determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes, por lo que

$$g \equiv \det[g_{ij}] = \det \left[\frac{\partial x^k}{\partial u^i} \right] \cdot \det \left[\frac{\partial x^k}{\partial u^j} \right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{vmatrix} = J^2,$$

es decir:

$$J = \sqrt{g}. \quad (\text{B.18})$$

B.4. Diferenciales

El vector diferencial $d\vec{r}$ se puede escribir como

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} du^i = \vec{e}_i du^i. \quad (\text{B.19})$$

La longitud de arco diferencial a lo largo de cualquier curva se define como

$$dl = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{g_{ij} du^i du^j}. \quad (\text{B.20})$$

A lo largo de una curva en la que sólo cambia la coordenada u^i se requiere que $du^j = 0$ para $j \neq i$, por lo que sobre la curva con $i = \kappa$, para alguna constante κ definida², tenemos:

$$d\vec{r}(i = \kappa) = \sqrt{g_{\kappa\kappa}} du^\kappa \hat{e}_\kappa, \quad (\text{B.21})$$

$$dl(i = \kappa) = \sqrt{g_{\kappa\kappa}} du^\kappa, \quad (\text{B.22})$$

que puede expresar en general al utilizar las identidades (B.11) y (B.14) como

$$dl(i) = J |\nabla u^j \times \nabla u^k| du^i, \quad (\text{B.23})$$

para cualquier permutación cíclica $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3\}$. El elemento diferencial de área sobre la superficie con u^i constante es perpendicular a du^i con magnitud igual al área del paralelepípedo formado por du^j y du^k , con $i \neq j \neq k$:

$$dS(i) = |\vec{e}_j \times \vec{e}_k| du^j du^k = |J \vec{e}^i| du^j du^k, \quad (\text{B.24})$$

$$dS(i) = \frac{\nabla u^i}{|\nabla u^i|} dS = \pm J du^j du^k \nabla u^i. \quad (\text{B.25})$$

El elemento diferencial de volumen se define como el volumen del paralelepípedo formado por los vectores diferenciales a lo largo de cada curva coordenada:

$$dV = d^3r = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3) du^1 du^2 du^3 = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3. \quad (\text{B.26})$$

Cabe destacar su relación con el diferencial de área en cierta dirección i :

$$dV = dS \frac{du^i}{|\nabla u^i|}. \quad (\text{B.27})$$

²No aplica la convención de Einstein sobre κ .

B.5. Gradiente, divergencia y rotacional

El operador ∇ se define con base en la identidad

$$\delta\Phi = \partial\Phi/\partial u^i du^i = \partial\Phi/\partial u^i \nabla u^i \cdot \vec{e}_j du^j = \nabla\Phi \cdot d\vec{R}$$

como

$$\nabla \equiv \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad (\text{B.28})$$

por lo que el gradiente es

$$\nabla\Phi = \vec{e}^i \frac{\partial\Phi}{\partial u^i}. \quad (\text{B.29})$$

Si se utiliza la identidad $\nabla u^j \times \nabla u^k = \nabla \times (u^j \nabla u^k)$, se sigue de las ecuaciones (B.11) que $\nabla \cdot (\vec{e}_i/J) = 0$, por lo que al usar (B.28) se obtiene la fórmula general para la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (A^i \vec{e}_i J/J) = \nabla(JA^j) \cdot (\vec{e}_j/J) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} A^i). \quad (\text{B.30})$$

Para el rotacional el análisis es similar. Considerando que $\nabla \times \vec{e}^j = \vec{0}$ se obtiene

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times (A_i \vec{e}^i) = \nabla A_j \times \vec{e}^j = \frac{\partial A_j}{\partial u^i} \vec{e}^i \times \vec{e}^j = \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial A_j}{\partial u^i} \vec{e}_k \quad (\text{B.31})$$

Bibliografía

- [1] F. F. Chen, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. Springer International Publishing, third ed., 2016.
- [2] A. Piel, *Plasma Physics: An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] J. P. Freidberg, *Plasma physics and fusion energy*. Cambridge university press, 2008.
- [4] L. L. Lucas and M. P. Unterweger, “Comprehensive review and critical evaluation of the half-life of tritium,” *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology*, vol. 105, no. 4, p. 541, 2000.
- [5] F. Chen, *An indispensable truth: how fusion power can save the planet*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [6] R. J. Goldston and P. H. Rutherford, *Introduction to plasma physics*. CRC Press, 1995.
- [7] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid mechanics*. Pergamon Press, Oxford, sect, 1987.
- [8] J. P. Goedbloed and S. Poedts, *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge university press, 2004.
- [9] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson, *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] M. D. Kruskal and R. Kulsrud, “Equilibrium of a magnetically confined plasma in a toroid,” *Physics of Fluids*, vol. 1, no. 4, pp. 265–274, 1958.
- [11] S. Hirshman, R. Sanchez, V. Lynch, D’Azevedo, and Hill, “Siesta: an scalable iterative equilibrium solver for toroidal applications,” in *35th EPS Conference on Plasma Physics (ECA, ed.)*, vol. 32D, (Hersonissos), june 2008.
- [12] M. Wakatani, *Stellarator and Heliotron devices*. No. 95, Oxford University Press on Demand, 1998.

- [13] E. Ascasíbar, D. López-Bruna, F. Castejón, V. I. Vargas, V. Tribaldos, H. Maassberg, C. D. Beidler, R. Brakel, A. Dinklage, J. Geiger, *et al.*, “Effect of rotational transform and magnetic shear on confinement of stellarators,” *Plasma and Fusion Research*, vol. 3, pp. S1004–S1004, 2008.
- [14] Y. Xu, “A general comparison between tokamak and stellarator plasmas,” *Matter and Radiation at Extremes*, jul 2016.
- [15] P. Helander, C. Beidler, T. Bird, M. Drevlak, Y. Feng, R. Hatzky, F. Jenko, R. Kleiber, J. Proll, Y. Turkin, *et al.*, “Stellarator and tokamak plasmas: a comparison,” *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 54, no. 12, p. 124009, 2012.
- [16] EUROfusion, “Tokamak principle.” <https://www.euro-fusion.org/2011/09/tokamak-principle-2/>, Sep 2011. Euratom en línea; consultado en noviembre de 2016.
- [17] H. Zohm, *Magnetohydrodynamic stability of tokamaks*. John Wiley & Sons, 2014.
- [18] D. Clery, “Feature: Germany fires up bizarre new fusion reactor,” *Science*, dec 2015.
- [19] National Fusion Laboratory, CIEMAT y Fusenet, “TJ-II.” <http://fusionwiki.ciemat.es/wiki/tj-ii>, Jan 2016. FusionWiki en línea; consultado en noviembre de 2016.
- [20] A. H. Boozer, “Physics of magnetically confined plasmas,” *Reviews of modern physics*, vol. 76, no. 4, p. 1071, 2005.
- [21] Princeton Plasma Physics Laboratory (PPPL), “National compact stellarator experiment.” <http://ncsx.pppl.gov/>, 2006. NCSX Machine en línea; consultado en noviembre de 2016.
- [22] L. Spitzer, “The stellarator concept,” *Physics of Fluids*, vol. 1, no. 4, p. 253, 1958.
- [23] P. Helander, “Theory of plasma confinement in non-axisymmetric magnetic fields,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 77, no. 8, p. 087001, 2014.
- [24] W. D. D’haeseleer, W. N. Hitchon, J. D. Callen, and J. L. Shohet, *Flux coordinates and magnetic field structure: a guide to a fundamental tool of plasma theory*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [25] A. H. Boozer, “Plasma equilibrium with rational magnetic surfaces,” *Physics of Fluids*, vol. 24, no. 11, pp. 1999–2003, 1981.
- [26] J. Wesson and D. J. Campbell, *Tokamaks*, vol. 149. Oxford University Press, 2011.
- [27] D. Biskamp, *Magnetic Reconnection in Plasmas*, vol. 3 of *Cambridge Monographs on Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [28] P. M. Bellan, *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge University Press, 2008.
- [29] M. Yamada, R. Kulsrud, and H. Ji, “Magnetic reconnection,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 1, p. 603, 2010.
- [30] L. Comisso, M. Lingam, Y.-M. Huang, and A. Bhattacharjee, “General theory of the plasmoid instability,” *Physics of Plasmas*, vol. 23, no. 10, p. 100702, 2016.

- [31] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma confinement*. Courier Corporation, 2003.
- [32] B. V. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional oscillator systems,” *Physics reports*, vol. 52, no. 5, pp. 263–379, 1979.
- [33] S. R. Hudson and N. Nakajima, “Pressure, chaotic magnetic fields, and magnetohydrodynamic equilibria,” *Physics of Plasmas*, vol. 17, no. 5, p. 052511, 2010.
- [34] C. Beidler, R. Brakel, R. Burhenn, A. Dinklage, V. Erckmann, Y. Feng, J. Geiger, D. Hartmann, M. Hirsch, R. Jaenicke, *et al.*, “Helical confinement concepts,” in *Fusion Physics*, 2012.
- [35] F. Merz, J. Geiger, and M. Rampp, “Optimization strategy for the VMEC stellarator equilibrium code,” tech. rep., Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 2013.
- [36] S. K. Seal, S. P. Hirshman, A. Wingen, R. S. Wilcox, M. R. Cianciosa, and E. A. Unterberg, “PARVMEC: An efficient, scalable implementation of the variational moments equilibrium code,” in *Parallel Processing (ICPP), 2016 45th International Conference on*, pp. 618–627, IEEE, 2016.
- [37] S. P. Hirshman and J. Whitson, “Steepest-descent moment method for three-dimensional magnetohydrodynamic equilibria,” *Physics of Fluids*, vol. 26, no. 12, pp. 3553–3568, 1983.
- [38] S. P. Hirshman, W. van RIJ, and P. Merkel, “Three-dimensional free boundary calculations using a spectral green’s function method,” *Computer Physics Communications*, vol. 43, no. 1, pp. 143–155, 1986.
- [39] S. P. Hirshman and O. Betancourt, “Preconditioned descent algorithm for rapid calculations of magnetohydrodynamic equilibria,” *Journal of Computational Physics*, vol. 96, no. 1, pp. 99–109, 1991.
- [40] S. P. Hirshman, R. Sanchez, and C. Cook, “Siesta: A scalable iterative equilibrium solver for toroidal applications,” *Physics of Plasmas*, vol. 18, no. 6, p. 062504, 2011.
- [41] C. R. Cook, “The current status and future of the siesta equilibrium code,” Master’s thesis, University of Wisconsin-Madison, 2011.
- [42] S. Jardin, *Computational methods in plasma physics*. CRC Press, 2010.
- [43] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [44] S. P. Hirshman, K. S. Perumalla, V. E. Lynch, and R. Sánchez, “Bcyclic: A parallel block tridiagonal matrix cyclic solver,” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, no. 18, pp. 6392–6404, 2010.
- [45] S. P. Hirshman, M. W. Shafer, S. K. Seal, and J. M. Canik, “Investigation of island formation due to RMPs in DIII-d plasmas with the SIESTA resistive MHD equilibrium code,” *J. Plasma Phys.*, vol. 82, mar 2016.
- [46] R. L. Dewar, Z. Yoshida, A. Bhattacharjee, and S. R. Hudson, “Variational formulation of relaxed and multi-region relaxed magnetohydrodynamics,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 81, no. 06, p. 515810604, 2015.