



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

RADIACIÓN DE TRANSICIÓN DE LOS NEUTRINOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JOSÉ ANTONIO LOZA ROMÁN

TUTOR PRINCIPAL
DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JOSÉ ANTONIO RAFAEL GARCÍA ZENTENO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

DR. AXEL RICARDO DE LA MACORRA PETTERSSON
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. DE MÉXICO ABRIL 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por los valiosos recursos concedidos y que fueron parte fundamental para la culminación de este trabajo. En particular, a la DGAPA-UNAM por el apoyo financiero otorgado a través de los proyectos PAPIIT IN117210 y PAPIIT IN112213.

Al Instituto de Ciencias Nucleares por permitirme utilizar su infraestructura y por el apoyo brindado por el personal que ahí labora.

A mi comité tutor formado por los doctores: José Antonio García Zenteno del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, y Axel Ricardo de la Macorra Pettersson del Instituto de Física, UNAM, por sus valiosas observaciones y consejos. Especialmente quiero agradecer a mi maestro, Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez por el compromiso y el rigor científico con los cuales dirigió mi trabajo de tesis.

A los miembros del jurado examinador por la escrupulosa revisión del borrador de la tesis y por los comentarios que, ciertamente, redundaron en una mejor versión final.

A la Red de Física de Altas Energías por los recursos financieros otorgados para la presentación de los resultados de mi investigación en los simposios latinoamericanos de física de altas energías celebrados en Viña del Mar, Chile (2010) y San Pablo, Brasil (2012).

Finalmente, deseo expresar mi mayor agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el soporte financiero brindado para la realización de mis estudios de doctorado.

Dedicatoria

A Rosa María, Bernardo y Bruno, como todos mis afanes.

A mi madre y mi abuela, por su inagotable amor.

¡Amigo! Ya que te encuentro a ti antes que a nadie en este lugar.
Dime con verdad para que yo me entere: ¿Qué tierra es esta?
¿Qué pueblo? ¿Qué hombres hay en la comarca? ¿Estoy en una
isla que se ve a distancia o en la ribera de un fértil continente
que hacia el mar se inclina?

Homero, *La odisea*

Resumen

Cuando los neutrinos se propagan en la materia, sus propiedades cambian sustancialmente con respecto al vacío. En particular, debido a la interacción débil con los nucleones y leptones cargados presentes en un medio, los neutrinos adquieren un acoplamiento efectivo al campo electromagnético, el cual, puede caracterizarse como un radio de carga que, en determinadas condiciones, se reduce a una carga. Esto permite la ocurrencia de diversos procesos radiativos. En particular, demostramos que, cuando atraviesan la interfase entre dos medios con índices de refracción distintos, los neutrinos emiten radiación de transición (RT).

En este trabajo estudiamos dicho fenómeno usando un método perturbativo original, fundamentado en la electrodinámica clásica, y un cálculo cuántico que emplea técnicas de la teoría de campos a temperatura finita. En ambos casos, derivamos fórmulas para la emisión diferencial y para la energía radiada por interfase. Probamos que la RT generada por el vértice neutrino-fotón en la materia resulta cien veces más intensa que la debida a un momento toroidal intrínseco; mientras que, para dar lugar a una emisión con una intensidad equivalente, el momento magnético del neutrino tendría que ser cinco órdenes de magnitud mayor al predicho por el modelo estándar extendido de forma mínima para acomodar neutrinos masivos. De nuestro análisis, concluimos que efectos como el examinado en esta tesis pueden ser lo suficientemente intensos como para encubrir fenómenos radiativos asociados con propiedades electromagnéticas intrínsecas de los neutrinos.

Por otro lado, el formalismo clásico desarrollado resulta particularmente adecuado para tratar problemas de la RT cuando la frontera entre los medios no es abrupta. Aprovechando esta cualidad, aplicamos el método al análisis de la RT que genera un haz electrónico con microestructura que atraviesa una interfase difusa, problema que no es sencillo de tratar con otros formalismos.

Abstract

As is now well known, the basic properties of neutrinos that propagate through a medium can be substantially different compared to their properties in vacuum. Because of their weak interactions with the charged leptons and nucleons in a background, neutrinos acquire an effective coupling to the electromagnetic field. While this coupling can be characterized as a charge radius, under particular conditions it reduces to an effective charge. This fact can give rise to several electromagnetic processes. In particular, we demonstrated that these particles emit transition radiation (TR) when go across the boundary between two media with different indexes of refraction.

In this work, we studied this phenomenon using an original perturbative method, based on classical electrodynamics, and performed quantum calculations using standard techniques of the real time formalism of the thermal field theory. We derived formulae, both quantum and classical, for the differential emission and the energy radiated by neutrinos per interface. We proved that the TR energy produced by the neutrino-photon vertex in matter, would be at least two order of magnitude larger than that generated by an intrinsic toroidal moment; furthermore, in order to produce equal TR energy, neutrino magnetic moment should have a value five orders of magnitude larger than the one predicted by standard model, minimally extended to accommodate neutrino masses. These results, allowed us to conclude that the intensity of the electromagnetic effects generated by the neutrino photon-coupling induced by matter could overshadow similar effects associated to some intrinsic neutrino electromagnetic property.

Besides, the classical formalism we have devised is specially well suited to treat problems of TR arising from fuzzy boundaries. Taking advantage of this, we were able to treat the problem of the coherent TR due to an electron bunch with microstructure crossing a diffuse interface.

Índice general

1. Introducción	1
2. Radiación de transición	7
2.1. Introducción	7
2.2. Formalismo básico.	8
2.3. TR con polarización transversal eléctrica TE	13
2.4. TR con polarización transversal magnética TH	17
2.5. Aplicaciones	19
2.6. Radiación de transición coherente	27
3. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos	39
3.1. Introducción	39
3.2. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos en el vacío . .	41
3.3. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos en un medio .	48
3.4. El radio de carga de los neutrinos en un medio	56
4. Radiación de transición de los neutrinos	63
4.1. Introducción	63
4.2. Cálculo clásico	64
4.3. Cálculo cuántico	68
4.3.1. El campo electromagnético.	68
4.3.2. Resultados y discusión.	75
5. Conclusiones	79
A. Función de Green	83
B. Principio de aplicaciones contraídas	87

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo de tesis se reúnen dos temas que han atraído el interés de los físicos desde mediados del siglo pasado. Por un lado, la radiación de transición (RT), y por el otro, la física de los neutrinos. A continuación, nos referiremos a cada uno de ellos por separado.

En primer lugar nos ocuparemos de la RT. *Una partícula que se mueve con velocidad uniforme no puede emitir radiación electromagnética.* En esta frase se resume, tal vez, una de las primeras lecciones que se enseña en los cursos elementales de electrodinámica. Sin embargo, ello es cierto si la partícula se mueve en el vacío. Si se propaga en un medio y su velocidad supera a la velocidad de la luz en dicho medio, entonces emite radiación Cherenkov.

Existe otro fenómeno radiativo, denominado radiación de transición, que puede presentarse sin necesidad de aceleración y que, del modo más simple, se describe como el proceso mediante el cual una partícula cargada moviéndose a velocidad constante emite radiación al atravesar la interfase entre dos medios diferentes. Esta noción puede generalizarse, y llamar por dicho nombre, a la emisión producida por una partícula que se desplaza a través, o en la cercanía, de un medio no homogéneo. No obstante, debemos advertir que en la literatura frecuentemente se entiende por RT exclusivamente a la radiación producida en la interfase entre dos medios. Por otra parte, existe una amplia gama de fenómenos estrechamente relacionados que, en rigor, deberían constituir ejemplos de la RT y que se designan de diferentes maneras. Ejemplo de estos procesos son la radiación emitida en medios que presentan una variación periódica, espacial o temporal, de la permitividad (radiación por dispersión) y, la emitida por una partícula al desplazarse, en el vacío o en un medio material, cerca de diversos obstáculos (esferas metáli-

cas, diafragmas, rejillas, etc). Resulta pertinente, por lo tanto, establecer de una manera más precisa lo que, en este trabajo, entenderemos por RT: la parte de la radiación que se produce cuando una partícula se mueve a velocidad constante en un medio y que está ausente si el medio es homogéneo. De este modo, los procesos antes descritos son distintas manifestaciones de la RT.

El origen de la RT puede visualizarse, usando consideraciones muy generales, mediante el siguiente argumento enunciado por Frank y Ginzburg. Imaginemos una partícula cargada que inicialmente viaja con velocidad constante en un medio que posee determinados parámetros electromagnéticos (permitividad eléctrica y/o magnética). Supongamos ahora que la partícula incide sobre la superficie que marca la frontera entre dos medios, abandona el primero y se interna en el segundo; una vez que la carga se encuentra suficientemente lejos de la frontera, los campos adquieren características que son propias del segundo medio. Aunque el movimiento de la partícula sea uniforme, es claro que las características del campos electromagnético en un medio y en otro difieren. Es precisamente, la reorganización del campo, conforme la partícula parte del primer medio, atraviesa la frontera y se interna en el segundo medio, lo que da lugar a la RT. Aunque en tal concepción está presente un cambio espacial evidente, de manera más profunda, podemos entender que la RT surge debido a la reestructuración experimentada por el campo electromagnético al pasar de un cierto estado inicial, que puede sustentar el primer medio, a un determinado estado final propio del segundo medio.

La emisión de la RT se desprende directamente de las ecuaciones de Maxwell formuladas de manera definitiva ya en el siglo XIX. Por ello, no deja de sorprender que recién fuese planteada teóricamente por Ginzburg y Frank, en 1944, ya bien entrado el siglo XX [31]. No fue sino hasta 1959, o sea, tres años después del descubrimiento de los neutrinos, cuando, en experimentos realizados con protones, P. Goldsmith y V. Jelley observaron el fenómeno por vez primera en la región visible del espectro [33]. A pesar del interés inicial que despertó la utilización de la RT como un posible método para la identificación de partículas cargadas, el entusiasmo pronto decayó debido a que la RT es de muy baja intensidad si se le compara con otros mecanismos de emisión como, por ejemplo, la radiación Cherenkov. Demostraremos más adelante que, en general, la intensidad obtenida es proporcional a la constante de estructura fina α . Sin embargo, en trabajos posteriores [27, 28], Garibian probó que, para partículas relativistas, el espectro de la RT puede extenderse mucho más allá de la región óptica e incluir los rayos X. Adicionalmente, estableció firmemente un par de características de esta emisión

que hacen de ella un fenómeno idóneo para su utilización en dispositivos detectores de partículas: la intensidad de la emisión es proporcional a la energía de la partícula incidente y la mayor parte de la radiación se concentra en un estrecho cono con el eje paralelo al movimiento de la partícula. La detección de la RT producida por partículas relativistas en la región de los rayos X verificó casi de inmediato las predicciones teóricas [72, 2], lo cual estimuló el desarrollo de detectores de partículas basados en este tipo de radiación. Posteriormente, la idea de apilar múltiples superficies emisoras en arreglos periódicos, con espaciado optimizado, permitió la construcción de detectores muy eficientes [16, 3]. En la actualidad, la teoría que sustenta el diseño de este tipo de detectores ha sido ampliamente desarrollada y existen excelentes monografías que el lector interesado puede consultar [18, 26, 5].

Por último, es necesario hacer notar que la RT es un fenómeno que ocurre en ondas de naturaleza diversa. Mencionemos aquí, como ejemplo, el estudio de la RT producida como ondas acústicas por el movimiento uniforme de fuentes de calor y masa en medios gaseosos con inhomogeneidades en la densidad [67]. Otros estudios relacionados, en el campo de la acústica, tratan con el problema de la emisión de sonido debida a una dislocación que se desplaza a lo largo de un medio no homogéneo.

En lo que sigue, hablaremos sobre los neutrinos, los cuales han jugado un rol esencial en el entendimiento de las fuerzas y propiedades de las partículas subatómicas que gobiernan los fenómenos que observamos en la naturaleza. Desde el descubrimiento de que, en el decaimiento beta, el electrón tiene un espectro continuo, hasta la confirmación de las oscilaciones de los neutrinos, el estudio de estas partículas ha producido no pocas sorpresas que han conducido directamente a nuevos derroteros en la física.

La existencia de los neutrinos fue postulada por Wolfgang Pauli, en 1930, en una famosa carta dirigida a *las damas y caballeros radioactivos*, como un intento desesperado para salvar la conservación de la energía en el decaimiento beta. Esta hipotética partícula debía tener una masa muy pequeña comparada con la del electrón, ser neutra y con espín 1/2. Al describir el decaimiento beta dentro de su modelo de cuatro campos fermiónicos asociados con el neutrino, el electrón, el protón y el neutrón, Fermi estableció, en 1933, la primera teoría de la interacción débil. En 1956, Fred Reines y Clyde Cowan detectaron por primera vez los neutrinos mediante un experimento realizado en las cercanías de un reactor nuclear ubicado en Savannah River, Carolina del Sur. Con el descubrimiento de un número creciente de partículas que participaban en procesos de la interacción débil, se reconoció en ella a una fuerza fundamental de la naturaleza. Tras décadas de enorme esfuerzo de físicos experimentales y teóricos, a finales de la década de

1960, Glashow, Salam y Weinberg consiguieron describir los procesos electromagnéticos y débiles con una teoría unificada, llamada ahora modelo electrodébil, que transcurridos unos pocos años condujo a la formulación del Modelo Estándar (ME) de la física. Las observaciones de procesos en los que interviene los neutrinos han jugado un rol esencial para el entendimiento de la física de la interacción débil.

El interés por las posibles propiedades electromagnéticas de los neutrinos surgió tan tempranamente como su concepción. Al proponer su existencia, Pauli especuló con la idea de que el neutrino pudiera tener un momento dipolar magnético. En tal caso, su valor podría ser medido por sus efectos ionizantes al desplazarse en un medio. El cálculo teórico de dicho poder ionizante fue elaborado por Bethe [11], en 1935. Ese mismo año, usando un contador de partículas Geiger, Nahmias determinó la tasa de ocurrencia de eventos en presencia y ausencia de una fuente radioactiva. En dicho trabajo el autor concluyó: Puesto que el límite impuesto por el experimento es mucho menor al magnetón de Bohr, *parece probable que el neutrino carezca de momento dipolar magnético* [53]. En 1963, Adams, Ruderman y Woo estudiaron el decaimiento de un fotón longitudinal (plasmón) en un par neutrino-antineutrino en el interior de un plasma estelar [1]. Demostraron que, para un amplio rango de temperaturas y densidades, este es el proceso dominante en la emisión de neutrinos. La observación, en la década de 1970, de los primeros neutrinos solares en el experimento Homestake, avivó el interés por las propiedades electromagnéticas de los neutrinos. La existencia de un momento dipolar magnético con determinadas características se invocó para explicar el déficit observado de neutrinos provenientes del Sol, así como, la aparente correlación entre las variaciones del flujo de neutrinos con la actividad solar. Aunque esta explicación no fue la correcta, desde entonces, las propiedades electromagnéticas de los neutrinos han recibido una atención constante puesto que su acoplamiento al campo electromagnético abre las puertas a una serie de procesos de gran relevancia en física y astrofísica. El ME, en su formulación original, no contempla neutrinos masivos, por lo cual, es imposible que tengan un momento dipolar magnético. Sin embargo, diferentes extensiones teóricas del ME predicen momentos magnéticos no nulos para estas partículas, con valores mucho mayores a los obtenidos en el ME ampliado mínimamente para acomodar neutrinos masivos del tipo de Dirac. Dado que la observación de un valor del momento dipolar mayor al predicho constituiría una clara evidencia de física más allá del ME, existe un gran interés en su medición experimental.

Las propiedades de los neutrinos se ven alteradas cuando se propagan en la materia a consecuencia de sus interacciones con las partículas presen-

tes en el medio: las relaciones de dispersión de los neutrinos se modifican y adquieren un acoplamiento efectivo al campo electromagnético. Aunque la interacción débil de los neutrino con los electrones es de corto alcance, al propagarse dentro de un plasma perturban la densidad electrónica, lo que da lugar a una interacción efectiva de largo alcance. Por esta razón, incluso en ausencia de un momento magnético o alguna otra propiedad electromagnética intrínseca, los neutrinos sin masa del ME, propagándose en un medio, adquieren un acoplamiento efectivo al fotón. De esta forma, una serie de procesos electromagnéticos inducidos por el medio se agregan a los que podrían ocurrir en el vacío. De todos ellos, tal vez, el más familiar sea el decaimiento de los plasmones en un par neutrino-antineutrino que, como ahora sabemos, tiene un impacto observable en la pérdida de energía en las enanas blancas y en el núcleo de gigantes rojas de masa moderada. Otros procesos que pueden tener lugar son: la emisión y absorción, de radiación Cherenkov, el decaimiento radiativo de un neutrino a un fotón y un neutrino de menor masa, la dispersión de neutrinos por leptones o por núcleos.

Con base a lo antes expuesto, es posible imaginar que un neutrino propagándose en un medio con inhomogeneidades pueda emitir RT. En este trabajo estudiaremos la RT emitida por los neutrinos debida a la interacción con los fotones inducida por un medio material. Hasta ahora, este fenómeno no había sido considerado a pesar de que su existencia se desprende directamente del ME. Adicionalmente, podría tener impacto en ciertos procesos físicos como, por ejemplo, el enfriamiento estelar o la pérdida de energía por neutrinos en una supernova. El estudio a detalle de las condiciones en las que se emite RT por los neutrinos, así como la magnitud de sus posibles efectos, fue la principal motivación del trabajo desarrollado a lo largo de esta tesis. En él restringimos nuestra atención a la RT generada por el vértice electromagnético en un gas de electrones de naturaleza diversa (clásico, relativista y degenerado). Antes de presentar el cálculo de la RT, haremos una revisión del vértice electromagnético de los neutrinos en un medio. Demostraremos que en un proceso físico en el que intervienen los fotones, estos se acoplan a los neutrinos mediante un radio de carga, que depende de las propiedades del medio y que puede ser mucho mayor a su valor en el vacío. Para determinados regímenes de temperatura y densidad probaremos que dicho acoplamiento se reduce a una carga efectiva. Además de clarificar cierta ambigüedad sobre este concepto existente en la literatura, este resultado permite calcular de manera simplificada la energía emitida en diversos procesos electromagnéticos en los que participen los neutrinos, en particular, la RT.

Aprovechando el hecho de que el vértice electromagnético de los neutrinos adopta, en una amplia gama de condiciones, la forma de una carga, como primera aproximación al problema, estudiaremos las características de la RT de los neutrinos mediante un método perturbativo basado en la electrodinámica clásica. Este procedimiento es un desarrollo totalmente original y permite tratar la RT en una gran variedad de condiciones, para distintas fuentes del campo electromagnético. Mediante su aplicación, no sólo es posible recuperar resultados conocidos, sino que pueden abordarse otros casos que no son sencillos de tratar por otros métodos, tales como la RT de cualquier tipo de partícula relativista en situaciones en las que la frontera entre dos medios cambia de manera gradual o, como en el caso de los neutrinos, cuando la corriente se extingue al pasar de un plasma al vacío. Este formalismo también nos ha permitido abordar de manera consistente el problema de la RT coherente emitida por un puñado (“bunch”) de electrones localizado, y con estructura interna, que atraviesa una frontera difusa. Hasta donde sabemos, otros tratamientos de este problema han requerido de consideraciones que no se derivan directamente del método empleado.

Por último, aplicamos el formalismo de la teoría de los campos térmica (también llamada a veces: *teoría de los campos a temperatura finita*) para realizar un cálculo cuántico de la RT de los neutrinos tomando en consideración el vértice electromagnético completo en un medio. Comparamos nuestros resultados con los de otros autores que calcularon la RT de los neutrinos debida a momento dipolar o toroidal anómalo. Como vemos, de nuestros resultados se desprende que tales efectos son considerablemente menores a los inducidos por el medio.

La organización de la tesis es la siguiente. En el capítulo 2 se estudian los aspectos esenciales de la RT y presentamos el formalismo perturbativo antes mencionado; adicionalmente, aplicamos el método a diversos casos y, en particular, a la RT coherente producida por un bunch de electrones que atraviesa una frontera difusa. Hacemos notar que en este capítulo, a diferencia del resto del texto, utilizamos el sistema gaussiano de unidades electromagnéticas. El capítulo 3 consta de dos partes, en la primera, discutimos las propiedades electromagnéticas de los neutrinos y revisamos los límites derivados de observaciones tanto astronómicas como experimentales; en la segunda, estudiamos el acoplamiento de los neutrinos a los fotones en un gas de electrones. Seguidamente, en el capítulo 4 presentamos los resultados de los cálculos de la RT de los neutrinos, debida a su interacción con la materia. En el capítulo final expondremos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Radiación de transición

2.1. Introducción

La teoría de la RT se ha desarrollado ampliamente desde el trabajo pionero de Ginzburg y Frank. Los datos experimentales obtenidos durante décadas demuestran una excelente congruencia con la teoría. Sin embargo, el estudio de la RT producida en ámbitos astrofísicos, de manera más general en condiciones naturales, ha recibido relativamente poco interés. Probablemente, el primer intento de explorar la importancia del fenómeno en tales condiciones fue hecho en 1971 por Johansson [41]. En este trabajo el autor sugiere que la RT de electrones que atraviesan el polvo interestelar podría contribuir de manera importante a la radiación observada, en el rango de los rayos X suaves, emitida por el disco galáctico. Sin embargo, cálculos posteriores [71, 62] demostraron que menos del 0.3% de la emisión difusa de rayos X por el disco galáctico es atribuible a este efecto. En tiempos más recientes, se han realizado estudios de la RT debida a una cascada (*shower*) de partículas, inducida por neutrinos ultra energéticos, que atraviesa la interfase entre el suelo y la atmósfera [60].

Dos obstáculos surgen al estudiar la teoría de la RT que se produce en condiciones naturales. El primero radica en el hecho de que en la mayoría de los casos difícilmente puede considerarse abrupta la interfase entre los dos medios. Ello compromete la utilización del formalismo tradicional, que está basado en el procedimiento de empujar soluciones en ambos lados de la frontera abrupta entre dos medios. Por otro lado, como demostraremos en este capítulo la RT requiere que la partícula recorra una distancia mínima en el material a fin de que la radiación pueda formarse. Con ello en mente, desarrollamos un procedimiento para tratar diversos problemas de la RT en

donde se considera desde un comienzo el tamaño finito de la inhomogeneidad en la permitividad eléctrica. Esto permite examinar con mayor detalle las condiciones bajo las cuales la emisión pueda tener lugar en interfaces difusas.

En este capítulo presentamos dicho procedimiento, el cual usa la teoría electrodinámica clásica y está bien adaptado al tratamiento de la RT emitida por partículas ultra relativistas en los casos en los que la permitividad eléctrica del medio cambia de manera gradual. Una extensión inmediata permite la utilización de nuestro formalismo para tratar problemas en los que la permitividad eléctrica cambia de manera arbitraria en una región localizada espacialmente.

En nuestro método escribimos ecuaciones integrales para los campos eléctrico y magnético por separado y mediante un procedimiento perturbativo encontramos el campo de radiación. A partir de este resultado, derivamos fórmulas que permiten calcular la distribución angular y espectral de la emisión y la potencia radiada en la dirección en la que se mueve la partícula. A manera de ilustración de la versatilidad del método, discutimos una variedad de problemas y contrastamos las diferencias entre los casos de la RT producida en una interfase abrupta y una difusa. Por último, dedicamos una especial atención a la radiación de transición coherente y se estudia el caso de la emisión de RT coherente por un pulso de electrones, con microestructura, que atraviesa una interfase difusa. La aplicación de este método al problema de la RT de los neutrinos se pospone hasta el capítulo 4.

2.2. Formalismo básico.

Consideremos una partícula que incide de manera perpendicular sobre la interfase, difusa, que separa dos medios con propiedades electromagnéticas distintas. Para tratar el problema que nos ocupa, nuestro punto de partida serán las ecuaciones de Maxwell en unidades gaussianas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.4)$$

y la relación constitutiva que relaciona al vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} con el campo eléctrico \mathbf{E} . Restringiremos nuestra atención a los casos en los cuales la permeabilidad magnética es uno, por lo que $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Sustituyendo la ecuación (2.4) en el rotor de (2.3), y viceversa, obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \nabla \epsilon \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}. \quad (2.6)$$

A partir de ahora nos concentraremos en medios para los cuales la permitividad eléctrica ϵ cambia solo en la dirección z y la partícula se desplaza desde la izquierda con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$. Supongamos que la función dieléctrica cambia en una pequeña región de tamaño ς centrada en $z = 0$. A la izquierda, lejos de la interfase, el medio se caracteriza por la constante dieléctrica ϵ_1 , mientras que la derecha, fuera de la región en donde el cambio tiene lugar, la función dieléctrica se reduce a ϵ_2 . Podemos, por tanto, escribir para todo el eje z (véase la figura 2.1)

$$\epsilon(z) = \epsilon_2 - \Delta\epsilon h(z), \quad (2.7)$$

donde $\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$ y $h(z)$ es una función que describe el perfil de cambio de la función dieléctrica. Aquí $h(z)$ será una función monótona decreciente¹ en el intervalo $(-\varsigma/2, \varsigma/2)$ centrado en $z = 0$, que toma los valores de uno y cero para $z \ll \varsigma/2$ y $z \gg \varsigma/2$, respectivamente. En la figura 2.1 mostramos una representación esquemática de ϵ . En el caso de una variación abrupta en las propiedades electromagnéticas del medio $h(z) = 1 - \theta(z)$, donde $\theta(z)$ es la función escalón de Heaviside.

Puesto que el problema es homogéneo respecto al tiempo y a las coordenadas transversales al movimiento de la partícula, es conveniente tomar las transformadas de Fourier de los campos con respecto a t y las variables x y y , de tal modo que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega d\boldsymbol{\kappa} \mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) \exp i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega d\boldsymbol{\kappa} \mathcal{B}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) \exp i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega d\boldsymbol{\kappa} \mathcal{J}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) \exp i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t), \quad (2.10)$$

en donde $\boldsymbol{\kappa} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ y $\boldsymbol{\rho} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}$ son vectores ortogonales al movimiento de la partícula. De manera general, en lo que sigue las cantidades

¹Más adelante, mostraremos como una pequeña modificación del método puede usarse para tratar una serie de problemas diferentes a los que involucran la situación de una sola interfase.

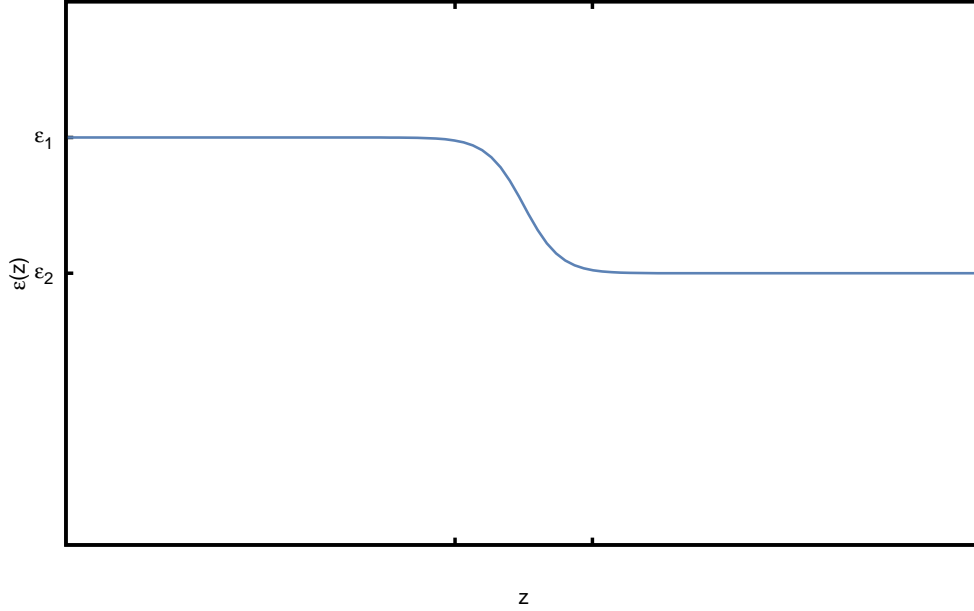


Figura 2.1: Representación esquemática de la función dieléctrica en todo el eje z . El cambio en la permitividad eléctrica, al pasar de ϵ_1 a ϵ_2 , toma lugar en una región de ancho ς .

que dependan de ω , $\boldsymbol{\kappa}$ y z serán escritas con letra cursiva y, por brevedad, omitiremos escribir la dependencia explícita en sus argumentos.

Para propósitos futuros es conveniente introducir la tríada de vectores independientes $\{\hat{z}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}\}$, con $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (-k_y \hat{\boldsymbol{x}} + k_x \hat{\boldsymbol{y}})/\kappa$. En términos de ellos escribimos $\boldsymbol{B} = \mathcal{B}_z \hat{z} + \mathcal{B}_\kappa \hat{\boldsymbol{\kappa}} + \mathcal{B}_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, y de manera similar para \boldsymbol{E} y la densidad de corriente \boldsymbol{J} . Si la corriente $\boldsymbol{J}(\mathbf{r}, t)$ depende de z y t sólo a través de la combinación $z - vt$, entonces su transformada inversa de Fourier es de la forma

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) e^{i\omega z/v}. \quad (2.11)$$

Tomando la transformada de Fourier de las dos primeras ecuaciones de Maxwell obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{D}_z}{\partial z} + i\kappa \mathcal{D}_\kappa = -\frac{4\pi i}{\omega} \left(\frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial z} + i\kappa \mathcal{J}_\kappa \right), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} + i\kappa \mathcal{B}_\kappa = 0. \quad (2.13)$$

En la ley de Gauss (2.1), usamos la conservación de la carga para escribir el lado derecho de (2.12). Necesitaremos también la componente de z las ecuaciones (2.3)-(2.6):

$$\mathcal{E}_\varphi - \frac{\omega}{c\kappa}\mathcal{B}_z = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{B}_\varphi + \frac{\omega\epsilon}{c\kappa}\mathcal{E}_z = -\frac{4\pi i}{c\kappa}\mathcal{J}_z, \quad (2.15)$$

$$-i\kappa\frac{\partial\mathcal{E}_\kappa}{\partial z} + \left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right)\mathcal{E}_z = -\frac{4\pi i}{c^2}\omega\mathcal{J}_z, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{B}_z}{\partial z^2} + \left(\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right)\mathcal{B}_z = -\frac{4\pi i}{c}\kappa\mathcal{J}_\varphi. \quad (2.17)$$

Demostremos abajo que el campo electromagnético que constituye la solución al problema se separa de manera natural en dos componentes. Por un lado, los *campos de partícula*, que denotaremos como \mathbf{B}^P and \mathbf{E}^P , y por el otro, los *campos de radiación* denotados por \mathbf{B}^R and \mathbf{E}^R . Esta notación está motivada por el hecho de que para $z \gg \varsigma$, los campos de partícula corresponden a los que produciría una partícula que se desplaza por un medio con permitividad ϵ_2 . Por su parte, los campos de radiación satisfacen la ecuación de onda homogénea para el segundo medio. Dicha radiación está polarizada a lo largo del vector $\hat{\varphi}$ que es normal al *plano de radiación*, el cual, de acuerdo con [13], hemos definido como el plano determinado por \hat{z} y el vector de onda $\mathbf{k}_2 = \kappa\hat{\kappa} + k_{2z}\hat{z}$, donde

$$k_{2z} = \sqrt{\epsilon_2\omega^2/c^2 - \kappa^2}. \quad (2.18)$$

Para distancias mucho mayores al ancho de la inhomogeneidad de la permitividad, examinando las ecuaciones (2.13) y (2.14), advertimos que las componentes del campo electromagnético están relacionadas del siguiente modo:

$$\mathcal{B}_\kappa^R = \frac{i}{\kappa}\frac{\partial\mathcal{B}_z^R}{\partial z}, \quad \mathcal{E}_\varphi^R = \frac{\omega}{c\kappa}\mathcal{B}_z^R. \quad (2.19)$$

Expresiones similares se pueden obtener a partir de (2.12) y de (2.15):

$$\mathcal{E}_\kappa^R = \frac{i}{\kappa}\frac{\partial\mathcal{E}_z^R}{\partial z}, \quad \mathcal{B}_\varphi^R = -\epsilon_2\frac{\omega}{c\kappa}\mathcal{E}_z^R. \quad (2.20)$$

Supongamos ahora que, empleando algún procedimiento, resolvemos (2.17), entonces podemos tomar la parte de radiación \mathcal{B}_z^R y calcular \mathcal{B}_κ^R y \mathcal{E}_φ^R mediante las fórmulas (2.19). Por otro lado, eliminando \mathcal{E}_κ usando las ecuaciones (2.12) y (2.16), obtenemos una ecuación diferencial de segundo grado para

\mathcal{E}_z . Una vez resuelta esta ecuación, la parte de radiación \mathcal{E}_z^{R} puede ser identificada y $\mathcal{E}_\kappa^{\text{R}}$ y $\mathcal{B}_\varphi^{\text{R}}$ determinadas por las relaciones en (2.20). De este modo, notamos que los distintos componentes del campo de radiación se separan de manera natural en dos grupos independientes. Para designarlos, en este trabajo usaremos una nomenclatura similar a la dada en [13]². A continuación describimos ambos grupos de campos, los cuales, corresponden a los distintos estados de polarización que puede tener la TR.

- Polarización transversal eléctrica (TE) $\{\mathcal{B}_z^{\text{R}}, \mathcal{B}_\kappa^{\text{R}}, \mathcal{E}_\varphi^{\text{R}}\}$

En este caso, las componentes del campo electromagnético se determinan por la cantidad \mathcal{J}_φ . Poniendo $\mathcal{J}_\varphi = 0$ y $\epsilon = \epsilon_2$ in (2.17) vemos que \mathcal{B}_z^{R} y por tanto $\mathcal{E}_\varphi^{\text{R}}$ and $\mathcal{B}_\kappa^{\text{R}}$, obedecen la ecuación de onda en el segundo medio. En conclusión, las componentes del campo que pertenecen a este grupo describen ondas para las cuales el vector magnético está contenido completamente en el plano de radiación, mientras que el vector eléctrico es perpendicular a dicho plano. Notemos de paso que el vector eléctrico también es perpendicular a la dirección del movimiento de la partícula.

- Polarización transversal magnética (TH) $\{\mathcal{E}_z^{\text{R}}, \mathcal{E}_\kappa^{\text{R}}, \mathcal{B}_\varphi^{\text{R}}\}$

En este grupo, las componentes del campo se determinan a partir de las cantidades \mathcal{J}_z y \mathcal{J}_κ . Como en el caso previo, estas componentes satisfacen la ecuación de onda. El vector eléctrico está contenido en el plano de radiación mientras que el vector magnético es perpendicular a dicho plano y al movimiento de la partícula.

En las dos siguientes secciones calcularemos la TR asociada a cada una de estas polarizaciones. Nos restringiremos al caso de que las propiedades electromagnéticas del medio no cambien demasiado a lo largo de la trayectoria de la partícula. De manera más precisa imponemos la condición $|\Delta\epsilon| \ll \epsilon_{1,2}$, lo que nos permitirá utilizar un procedimiento perturbativo para resolver el problema de la TR. En adelante, supondremos que $\mathcal{J}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z)$ es de la forma dada en (2.11).

²Señalemos que esta nomenclatura difiere de la que aparece en [30].

2.3. TR con polarización transversal eléctrica TE

Combinando (2.7) y (2.11), podemos reescribir la ecuación diferencial (2.17) como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa_{2z}^2\right)\mathcal{B}_z = -4\pi i \frac{\kappa}{c} \mathcal{J}_\varphi + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} h(z)\mathcal{B}_z, \quad (2.21)$$

Suponiendo que el campo magnético se anula en el infinito, la ecuación (2.21) puede transformarse en la ecuación integral

$$\mathcal{B}_z(z) = \mathcal{B}_{2z}(z) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' G_+(z, z'; k_{2z}) h(z') \mathcal{B}_z(z'), \quad (2.22)$$

en donde $\mathcal{B}_{2z}(z)$ es la componente z del campo magnético correspondiente a un medio homogéneo caracterizado por la constante dieléctrica ϵ_2 y en donde $G_+(z, z'; k_{2z})$ es la función de Green del operador diferencial en el miembro izquierdo de (2.21). Como se muestra en el apéndice A:

$$G_+(z, z'; k_{2z}) = \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) \theta(z - z'), \quad (2.23)$$

donde $\theta(z - z')$ es la función escalón unitario y hemos definido

$$\mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) = \frac{1}{k_{2z}} \sin[k_{2z}(z - z')]. \quad (2.24)$$

Usando explícitamente el resultado $\mathcal{J}_\varphi(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \mathcal{J}_\varphi(\boldsymbol{\kappa}, \omega) e^{i\omega z/v}$ y la fórmula (A.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2z}(z) &= -4\pi i \frac{\kappa}{c} \mathcal{J}_\varphi \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) e^{i\omega z'/v} \\ &= 4\pi i \mathcal{J}_\varphi \frac{\kappa v^2 e^{i\omega z/v}}{c(\omega^2 - v^2 k_{2z}^2)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dada su dependencia en z , podemos interpretar esta última expresión como una perturbación que se propaga hacia la izquierda con velocidad v . La información referente a las propiedades del medio está contenida en k_{2z} .

Para resolver la ecuación (2.22) de manera aproximada usando un esquema perturbativo, necesitamos reemplazar la función $\mathcal{B}_z(z)$, en el integrando del lado derecho, por una aproximación conveniente. A fin de determinar la examinemos antes la situación de una partícula que viaja en un medio homogéneo caracterizado por una constante dieléctrica ϵ_1 . Escribiendo $\epsilon_1 = \epsilon_2 - \Delta\epsilon$, podemos transformar la ecuación (2.21) que satisface \mathcal{B}_{1z} , en

una ecuación integral muy similar a (2.22) pero con $h(z) = 1$ para todo z . Dicha ecuación se escribe

$$\mathcal{B}_{1z}(z) = \mathcal{B}_{2z}(z) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) \mathcal{B}_{1z}(z'), \quad (2.26)$$

Regresemos a la situación de un medio con propiedades electromagnéticas variables. Imponemos la condición de que en los límites $\epsilon(z) \rightarrow \epsilon_1$ y $\epsilon(z) \rightarrow \epsilon_2$ (esto es, $h(z) \rightarrow 1$ y $h(z) \rightarrow 0$) el campo $\mathcal{B}_z(z)$ tienda a $\mathcal{B}_1(z)$ y $\mathcal{B}_2(z)$, siendo estas las soluciones apropiadas al primer y segundo medio, respectivamente. Tomando este requerimiento como guía y comparando (2.22) y (2.26) observamos que la elección adecuada para la aproximación inicial a $\mathcal{B}_z(z)$ corresponde a reemplazar \mathcal{B}_z por \mathcal{B}_{1z} en el integrando de (2.22). Consecuentemente, a primer orden en $\Delta\epsilon$ obtenemos

$$\mathcal{B}_z(z) \simeq \mathcal{B}_{2z}(z) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}_2(z, z') h(z') \mathcal{B}_{1z}(z'), \quad (2.27)$$

donde \mathcal{B}_{1z} es dado por la fórmula (2.25) con k_{2z} reemplazado por $k_{1z} = \sqrt{\epsilon_1 \omega^2 / c^2 - \kappa^2}$. Insertando esta expresión en (2.27) e integrando según (A.13), obtenemos el resultado:

$$\mathcal{B}_z(z) = \mathcal{B}_z^{\text{P}}(z) + \mathcal{B}_z^{\text{R}}(z), \quad (2.28)$$

con las partes de radiación y de partícula dados por

$$\mathcal{B}_z^{\text{P}}(z) = 4\pi i \mathcal{J}_\varphi \frac{\kappa v^2}{c(\omega^2 - v^2 k_{2z}^2)} \left(1 - \Delta\epsilon h(z) \frac{\beta^2 \omega^2}{\omega^2 - v^2 k_{1z}^2} \right) e^{i\omega z/v}, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{B}_z^{\text{R}}(z) = 2\pi i \mathcal{J}_\varphi \frac{\Delta\epsilon \kappa \beta^2 \omega^2}{c k_{2z} (\omega^2 - v^2 k_{1z}^2)} \left(\frac{\mathcal{I}_-(z) e^{ik_{2z}z}}{\omega/v - k_{2z}} - \frac{\mathcal{I}_+(z) e^{-ik_{2z}z}}{\omega/v + k_{2z}} \right), \quad (2.30)$$

donde $\beta = v/c$ y hemos definido las funciones

$$\mathcal{I}_\pm(z) = \int_{-\infty}^z dz' \frac{dh}{dz'} \exp(iz'/\ell_\pm). \quad (2.31)$$

con

$$\ell_\pm^{-1} \equiv \left(\frac{\omega}{v} \pm k_{2z} \right). \quad (2.32)$$

Estas expresiones son válidas en todo el espacio y determinan la aproximación a primer orden en $\Delta\epsilon$ para la componente z del campo magnético.

En la región a la izquierda, suficientemente lejos de la frontera, tomando $h(z) \rightarrow 1$ en (2.29) y recordando que $k_{2z}^2 = \Delta\epsilon \omega^2 / c^2 + k_{1z}^2$, es fácil verificar

que $\mathcal{B}_z^P(z) = \mathcal{B}_{1z}(z)$. Análogamente, a la derecha y suficientemente lejos de la interfase $h(z) \rightarrow 0$, por lo que $\mathcal{B}_z^P(z) = \mathcal{B}_{2z}(z)$. Esto es, fuera de la región de transición $\mathcal{B}_z^P(z)$ se reduce de manera apropiada a \mathcal{B}_{1z} , o \mathcal{B}_{2z} y, por tanto, adopta las características del campo de una partícula que se mueve en un medio homogéneo con constante dieléctrica ϵ_1 , o ϵ_2 . Por otro lado, dentro de la región de transición, $\mathcal{B}_z^P(z)$ está constituido por una superposición de $\mathcal{B}_{1z}(z)$ y de $\mathcal{B}_{2z}(z)$ que se interpola de uno a otro de forma continua a medida que $h(z)$ decrece de 1 a 0 y $\epsilon(z)$ cambia de ϵ_1 a ϵ_2 .

Supongamos ahora que el cambio de la función $\epsilon(z)$ ocurre de ϵ_1 a ϵ_2 dentro de un pequeño intervalo de anchura ς centrado en la interfase. Esto significa que $h(z)$ se comporta como una función escalón continua cuyo valor va de 1 a 0 en una vecindad de $z = 0$. Por tanto, su derivada dh/dz posee un pico muy pronunciado alrededor del origen y prácticamente se anula fuera del intervalo $-\varsigma/2 \lesssim z \lesssim \varsigma/2$. Los valores de $\mathcal{I}_+(z)$ e $\mathcal{I}_-(z)$ son despreciables para $z \lesssim -\varsigma/2$. Por tanto el campo total $\mathcal{B}_z(z)$ se reduce a $\mathcal{B}_z^P(z) = \mathcal{B}_{1z}(z)$ en la región a la izquierda de la interfase. Por otro lado, para $z \gg \varsigma/2$ estas integrales son prácticamente constantes y pueden aproximarse por los valores

$$\mathcal{I}_\pm = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{I}_\pm(z). \quad (2.33)$$

De esta forma, a la derecha de la interfase cada término del campo de radiación $\mathcal{B}_z^R(z)$ representa una onda libre cuyo vector de propagación es \mathbf{k}_2 . El primero de estos términos corresponde a una onda que viaja hacia la derecha mientras que el segundo a una que viaja hacia la izquierda, lo que es fácil de verificar sustituyendo las respectivas expresiones en (2.17), para $\mathcal{J}_\varphi = 0$.

Examinando las integrales (2.31) es posible entender el origen del campo de radiación como el resultado de la superposición coherente dentro de la región de transición de ondas caracterizadas por la fase $\exp(iz/\ell_\pm)$ y la amplitud dh/dz' . Dentro de la región en donde la derivada de $h(z)$ es apreciablemente distinta de cero, la coherencia se mantiene sólo si $|z| \lesssim \ell_\pm$; de lo contrario rápidas oscilaciones de los integrandos darían como resultado la cancelación entre las distintas contribuciones a la integral. Por ello, resulta natural identificar a las funciones ℓ_\pm como las longitudes de la *zona de formación*. Como se ve, nuestro tratamiento deja en claro el hecho de que la RT se origina principalmente en una pequeña región cercana a la frontera, hecho que tiende a ser sobreentendido en los métodos que empatan soluciones en una frontera discontinua. Tal idealización corresponde al límite en el cual $\mathcal{I}_\pm = -1$, como puede comprobarse fácilmente tomando $h(z) = 1 - \theta(z)$ y, sustituyendo $dh/dz = -\delta(z)$ en (2.33).

De nuestro resultado se desprenden algunas importantes características de la RT. En primer lugar, como la amplitud de las ondas radiadas depende linealmente en $\Delta\epsilon$ (véase (2.30)), si sólo existe un medio, no tiene lugar la RT y esta es tanto más intensa cuanto más difieren las características electromagnéticas de los medios. En segundo lugar, notemos que la amplitud de la onda radiada también es proporcional a \mathcal{I}_\pm por lo que, como se ha discutido antes, la radiación se forma en una región cercana a la interfase, resultado que confirma la aseveración de [40]. Por último, si el tamaño de la inhomogeneidad en la permitividad es considerablemente mayor a la longitud de formación, y si la función $h(x)$ decrece de manera monótona, entonces las oscilaciones en la fase de (2.31) suprimen de manera importante la intensidad de la radiación.

Calcularemos ahora la potencia radiada por la RT. Dado que estamos interesados únicamente en la radiación que se propaga hacia adelante consideraremos solo el segundo medio. Por esta razón, nos concentraremos en la onda que se propaga hacia la derecha, con lo cual

$$\mathcal{B}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \mathcal{B}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) e^{ik_{2z}z}, \quad (2.34)$$

con

$$\mathcal{B}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = -2\pi i \mathcal{J}_\varphi \frac{\Delta\epsilon \kappa \omega^2 \mathcal{I}_-}{c^3 k_{2z} (\omega/v - k_{2z}) (\omega^2/v^2 - k_{1z}^2)}. \quad (2.35)$$

La energía radiada en el segundo medio I por una onda, en este caso con polarización TE, está dada por

$$I = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \left[(B_z^{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t))^2 + (B_\kappa^{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t))^2 + (E_\varphi^{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t))^2 \right]. \quad (2.36)$$

Puesto que el campo magnético es real, en el integrando de la ecuación previa, $(B_z^{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t))^2$ puede reemplazarse por $B_z^{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) B_z^{\mathbf{R}*}(\mathbf{r}, t)$. Los otros dos términos pueden expresarse en función de $B_z^{\mathbf{R}}$ mediante las expresiones en (2.19). De esta manera, obtenemos

$$\int_V d^3r [B_z^{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)]^2 = (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa} \frac{c}{\epsilon_2} \sqrt{\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} |\mathcal{B}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega)|^2. \quad (2.37)$$

Mediante las relaciones en (2.19) los dos términos restantes en (2.36) pueden expresarse en términos de $B_z^{\mathbf{R}}$. Procediendo de este modo finalmentar arribamos a

$$I = \frac{2\pi^2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa} \frac{\omega^2}{\kappa^2} \sqrt{\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} |\mathcal{B}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega)|^2. \quad (2.38)$$

Esta fórmula es extremadamente útil porque permite calcular la energía total emitida conociendo solamente \mathcal{B}_z^R .

2.4. TR con polarización transversal magnética TH

Eliminando $\partial\mathcal{E}_\kappa/\partial z$ entre las ecuaciones (2.12) y (2.16) obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{2z}^2\right) \mathfrak{D}_z(z) = 4\pi i \frac{\kappa}{\omega} \left(\frac{\omega}{v} \mathcal{J}_\kappa - \kappa \mathcal{J}_z\right) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} h(z) \mathfrak{D}_z - i \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial\epsilon}{\partial z} \kappa \mathcal{D}_\kappa, \quad (2.39)$$

donde $\mathcal{J}_{z,\kappa}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \mathcal{J}_{z,\kappa}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) e^{i(\omega/v)z}$ y por brevedad escribimos

$$\mathfrak{D}_z \equiv \mathcal{D}_z + \frac{4\pi i}{\omega} \mathcal{J}_z. \quad (2.40)$$

En la ecuación (2.39) podemos reemplazar \mathcal{D}_κ en favor de \mathfrak{D}_κ , proceder como en el caso de \mathcal{B}_z y convertir (2.39) en la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_z(z) = & \mathfrak{D}_{2z}(z) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) h(z') \mathfrak{D}_z(z') \\ & - \Delta\epsilon \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z'} - \frac{4\pi}{\omega} \kappa \mathcal{J}_\kappa \right) \frac{dh}{dz'}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

con

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{2z} = & \mathcal{D}_{2z} + \frac{4\pi i}{\omega} \mathcal{J}_z \\ = & 4\pi i \frac{\kappa}{\omega} \left(\frac{\omega}{v} \mathcal{J}_\kappa - \kappa \mathcal{J}_z \right) \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) e^{i(\omega/v)z'} \end{aligned} \quad (2.42)$$

que es la solución de (2.39) para $\epsilon = \epsilon_2$.

Con el fin de encontrar una solución perturbativa para $\mathfrak{D}(z)$ procederemos de manera muy similar a la sección anterior. Reemplazaremos el campo $\mathfrak{D}_z(z)$ en el lado derecho de (2.41) por la solución apropiada a un medio homogéneo con función dieléctrica ϵ_1 y lo mismo para la derivada $\partial\mathfrak{D}_z/\partial z$. Adicionalmente, a primer orden en $\Delta\epsilon$, es válido reemplazar ϵ con ϵ_1 en la segunda integral. De este modo, a primer orden en $\Delta\epsilon\omega^2/c^2$ tenemos

$$\mathfrak{D}_z(z) = \mathfrak{D}_z^P(z) + \mathfrak{D}_z^R(z), \quad (2.43)$$

donde

$$\mathfrak{D}_z^{\text{P}}(z) = 4\pi i \frac{\kappa}{\omega} \left(\kappa \mathcal{J}_z - \frac{\omega}{v} \mathcal{J}_\kappa \right) \left(1 - \Delta \epsilon h(z) \frac{\beta^2 \omega^2}{\omega^2 - v^2 k_{1z}^2} \right) \ell_+ \ell_- e^{i\omega z/v} \quad (2.44)$$

y

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_z^{\text{R}}(z) &= 2\pi i \frac{\Delta \epsilon \kappa v}{\epsilon_1 k_{2z} (\omega^2 - v^2 k_{1z}^2)} \\ &\times \left\{ \ell_+ \mathcal{I}_+(z) \left[\kappa \mathcal{J}_z \left(\frac{\omega}{v\gamma_1^2} + k_{2z} \right) - \mathcal{J}_\kappa \left(\frac{v}{\omega} k_{2z} k_{1z}^2 + \kappa^2 \right) \right] e^{-ik_{2z}z} \right. \\ &\quad \left. - \ell_- \mathcal{I}_-(z) \left[\kappa \mathcal{J}_z \left(\frac{\omega}{v\gamma_1^2} - k_{2z} \right) - \mathcal{J}_\kappa \left(\frac{v}{\omega} k_{2z} k_{1z}^2 - \kappa^2 \right) \right] e^{ik_{2z}z} \right\} \quad (2.45) \end{aligned}$$

son los campos de partícula y de radiación, respectivamente. Aquí hemos introducido la cantidad $\gamma_1 \equiv 1/\sqrt{1 - \epsilon_1 \beta^2}$.

Partiendo de las ecuaciones (2.40) y (2.43) obtenemos $\mathcal{D}_z^{\text{P}} = \mathfrak{D}_z^{\text{P}} - 4\pi i \mathcal{J}_z/\omega$ y $\mathcal{D}_z^{\text{R}} = \mathfrak{D}_z^{\text{R}}$. Del mismo modo que \mathcal{B}_z^{P} en el caso de la polarización TE, el campo \mathcal{D}_z^{P} se interpola de manera continua entre las soluciones en uno y otro medio. El campo eléctrico radiado en la dirección del movimiento de la partícula, que obtenemos dividiendo por ϵ_2 el segundo término del lado derecho en (2.45), es dado por

$$\mathcal{E}_z^{\text{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \mathcal{E}_z^{\text{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) e^{ik_{2z}z}, \quad (2.46)$$

donde

$$\mathcal{E}_z^{\text{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \frac{-2\pi i \Delta \epsilon \kappa v \mathcal{I}_- \ell_-}{\epsilon_1 \epsilon_2 k_{2z} (\omega^2 - v^2 k_{1z}^2)} \left[\kappa \mathcal{J}_z \left(\frac{\omega}{v\gamma_1^2} - k_{2z} \right) - \mathcal{J}_\kappa \left(\frac{v}{\omega} k_{2z} k_{1z}^2 - \kappa^2 \right) \right]. \quad (2.47)$$

La potencia radiada puede calcularse siguiendo un procedimiento similar al caso de la RT con polarización transversal H y es dada por

$$I_2 = \frac{2\pi^2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa} \frac{\omega^2}{\kappa^2} \sqrt{\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \epsilon_2 |\mathcal{E}_z^{\text{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega)|^2. \quad (2.48)$$

Un ejemplo concreto se dará más adelante en donde trataremos la RT de una carga.

2.5. Aplicaciones

A fin de ilustrar la utilidad de nuestro procedimiento y compararlo con otros métodos, en esta sección lo aplicaremos al estudio de la RT emitida por una partícula que pasa del vacío a un medio dieléctrico. Esto implica poner en nuestras fórmulas $\epsilon_1 = 1$ y $\epsilon_2 = \epsilon$. Como hemos establecido desde un principio, supondremos que la partícula incidente se mueve, perpendicularmente a una interfase difusa, a lo largo del eje z con velocidad constante v . Por último, estudiaremos el caso de una partícula que atraviesa un bloque de material dieléctrico.

A continuación tanto para una partícula cargada como para un momento dipolar magnético, la corriente es de la forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}) f(z - vt), \quad (2.49)$$

en donde f es una función escalar del argumento. Adicionalmente, en ambos casos $\mathbf{J}(\boldsymbol{\rho})$ exhibe simetría axial alrededor del eje z . Consecuentemente, su transformada de Fourier posee la misma simetría por lo que su dependencia en k_x y k_y ocurre solo a través de $\kappa^2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. De este modo, podemos efectuar la integración sobre el ángulo azimutal mediante el cambio de variable $\kappa = \omega/c \sin \theta_2$ y escribir

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{d^2 I}{d\omega d\theta}, \quad (2.50)$$

donde θ es el ángulo que forman el vector onda del campo de radiación \mathbf{k}_2 y la velocidad de la partícula. Naturalmente la forma explícita de $d^2 I/d\omega d\theta$ depende del problema específico en consideración.

Estos casos ejemplifican situaciones, particularmente simples, en las que radiación emitida posee un modo de polarización puro, TH y TE, respectivamente. Para ellos se tiene

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = \frac{4\pi^3}{c} \omega^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \times \begin{cases} \epsilon^{1/2} |\mathcal{B}_z^{\text{R}}(\theta, \omega)|^2, & (\text{TE}) \\ \epsilon^{3/2} |\mathcal{E}_z^{\text{R}}(\theta, \omega)|^2, & (\text{TH}) \end{cases} \quad (2.51)$$

con $\mathcal{B}_z^{\text{R}}(\theta, \omega)$ y $\mathcal{E}_z^{\text{R}}(\theta, \omega)$ dados por las ecuaciones (2.35) y (2.47), respectivamente.

Consideremos una partícula con momento magnético intrínseco $\boldsymbol{\mu} = \mu \hat{\mathbf{z}}$, orientado a lo largo de la dirección de movimiento. Supongamos que en el sistema de referencia K' en el que la partícula está en reposo, el dipolo magnético permanece en el origen y apunta en la dirección z . La densidad

de corriente que origina el momento dipolar en el sistema de referencia K' es dada por

$$\mathbf{J}'(\mathbf{r}') = \mu c \nabla \times [\delta(r') \hat{\mathbf{z}}]. \quad (2.52)$$

La corriente inducida en el sistema de referencia del laboratorio se obtiene mediante una transformación de Lorentz y en el caso en que el momento dipolar es paralelo a la velocidad resulta ser

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = c \frac{\mu}{\gamma} \nabla \times [\delta(x') \delta(y') \delta(z' - vt) \hat{\mathbf{z}}], \quad (2.53)$$

en donde γ es el factor de Lorentz de la partícula.

La transformada de Fourier de esta corriente es $\mathcal{J}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \mathcal{J}_\varphi(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\omega z/v} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ con

$$\mathcal{J}_\varphi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\mu \boldsymbol{\kappa}}{\beta \gamma}. \quad (2.54)$$

Dado que las componentes de $\mathcal{J}(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z)$ a lo largo de z y $\boldsymbol{\kappa}$ se anulan, la TR que emite un dipolo magnético está polarizada linealmente y constituye un ejemplo de radiación en el modo TE puro.

De las ecuaciones (2.35), (2.51) y (2.54) obtenemos

$$\left[\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} \right]_\mu = \left(\frac{\mu^2 \beta^4}{\pi c^3 \gamma^2} \right) \epsilon \omega^2 R(\theta, \omega), \quad (2.55)$$

donde

$$R(\theta, \omega) = \frac{\sqrt{\epsilon} (\epsilon - 1)^2 \sin^3 \theta \mathcal{I}_-^2}{2(1/\gamma^2 + \beta^2 \epsilon \sin^2 \theta)^2 (1 - \beta \sqrt{\epsilon} \cos \theta)^2}. \quad (2.56)$$

Al escribir esta expresión incluimos un factor extra de 2 a fin de restringir la integral angular, como es usual, a valores positivos de ω .

Como una segunda aplicación evaluaremos la RT originada por una carga q . Esta vez la densidad de corriente se escribe como

$$\mathbf{J} = v q \delta(z - vt) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.57)$$

mientras que el campo de radiación se obtiene a partir de (2.47) haciendo $\mathcal{J}_z = q/(2\pi)^3$ y $\mathcal{J}_\kappa = 0$:

$$\mathcal{E}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \frac{i q \omega \kappa^2 (\epsilon - 1) \mathcal{I}_- \ell_-}{(2\pi)^2 \epsilon v^2 k_{2z} (\omega^2/v^2 - k_1^2)} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{v}{\omega} k_{2z} \right). \quad (2.58)$$

Mediante un procedimiento análogo al que usamos previamente para el dipolo magnético, tenemos

$$\left[\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} \right]_q = \left(\frac{q^2 \beta^2}{\pi c} \right) (1/\gamma^2 - \beta \sqrt{\epsilon} \cos \theta)^2 R(\theta, \omega). \quad (2.59)$$

Los resultados que escribimos arriba se simplifican para partículas ultra relativistas. En este regimen, $1/\gamma^2 \ll 1$ y, debido a la presencia del factor $(1/\gamma^2 + \beta^2 \epsilon \sin^2 \theta)^2$ en el denominador, la radiación emitida está fuertemente concentrada en ángulos pequeños, es decir, para $\sin \theta \simeq \theta \ll 1$. Adicionalmente notamos que, para todo ángulo $\theta < \pi/2$, el factor $(1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta)^2$ en el denominador alcanza su valor mínimo cuando ϵ es cercano a uno. Para frecuencias altas, una muy buena aproximación para la permitividad eléctrica es $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ y, por tanto, la emisión más intensa ocurre para frecuencias que satisfacen la condición $\omega^2 \gg \omega_p^2$. Bajo estas condiciones, en (2.55) podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} 2(1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta) &\simeq 1/\gamma^2 + \omega_p^2/\omega^2 + \theta^2, \\ 1/\gamma^2 + \beta^2 \epsilon \sin^2 \theta &\simeq 1/\gamma^2 + \theta^2, \end{aligned} \quad (2.60)$$

que sustituidas en (2.55) nos dan

$$\left[\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} \right]_{\mu} \simeq \frac{2\mu^2}{\pi c^3 \gamma^2} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \frac{\omega^2 \theta^3 \mathcal{I}_-^2}{(1/\gamma^2 + \theta^2)^2 (1/\gamma^2 + \omega_p^2/\omega^2 + \theta^2)^2}. \quad (2.61)$$

Si la permitividad cambia de manera abrupta en la interfase, entonces $\mathcal{I}_-^2 = 1$, y la fórmula (2.61) coincide el resultado obtenido previamente para una partícula ultra relativista, provista de un momento dipolar magnético, y que atraviesa una frontera discontinua (véase, por ejemplo [30, 65]). No obstante debemos advertir que hasta la fecha no ha sido posible observar experimentalmente la RT, o algún otro tipo de radiación de polarización, originada por un dipolo magnético [39]. En cualquier caso, integrando (2.61) sobre los ángulos, llegamos al resultado

$$\left[\frac{dI}{d\omega} \right]_{\mu} = \frac{\mu^2 \omega^2}{\pi c^3 \gamma^2} \left[\left(1 + \frac{2\omega^2}{\gamma^2 \omega_p^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2} \right) - 2 \right]. \quad (2.62)$$

En un modo por completo análogo, concluimos que para una partícula relativista cargada la RT se emite principalmente en altas frecuencias y la distribución angular está fuertemente concentrada, hacia el frente, en un estrecho cono. En este límite la expresión (2.59) se reduce a

$$\left[\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} \right]_q = \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \frac{\theta^3 \mathcal{I}_-^2}{(1/\gamma^2 + \theta^2)^2 (1/\gamma^2 + \omega_p^2/\omega^2 + \theta^2)^2}. \quad (2.63)$$

Notemos que la distribución angular es idéntica a la de un dipolo magnético. En ambos casos, en el caso especial de una interfase abrupta, resulta sencillo

probar que el ángulo de máxima emisión es dado, aproximadamente, por $\theta_M = \gamma^{-1}$. Usando el resultado en (2.62), podemos escribir la distribución espectral de la RT producida por una carga en una interfase abrupta como

$$\left[\frac{dI}{d\omega} \right]_q = \frac{q^2}{\pi c} \left[\left(1 + \frac{2\omega^2}{\gamma^2 \omega_p^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2} \right) - 2 \right]. \quad (2.64)$$

En el caso de la RT originada por una carga, efectuando la integral restante calculamos la energía total emitida en una interfaz que cambia de manera abrupta:

$$I_q = \int_0^\infty d\omega \frac{dI}{d\omega} = \frac{Z^2 \alpha}{3} \gamma \hbar \omega_p, \quad (2.65)$$

donde $\alpha = e^2/\hbar c$ es la constante de estructura fina y hemos escrito $q = Ze$. El hecho de que la energía emitida sea proporcional al factor de Lorentz de la partícula incidente, aunado a la fuerte concentración de la emisión, ha convertido a los detectores de partículas basados en la RT en herramientas muy útiles en la física experimental de altas energías.

Resulta pertinente en este punto comparar la RT que se obtiene en una interfase difusa y una abrupta. La diferencia fundamental entre ellas es la presencia del factor \mathcal{I}_\pm^2 en la emisión diferencial para el caso de una interfase difusa. Examinaremos solamente el caso de la RT producida por una carga; conclusiones similares se desprenden para el caso de un dipolo. Nuestra siguiente tarea consiste en evaluar de manera explícita las integrales que aparecen (2.33). Podemos hacerlo fácilmente si modelamos la función escalón continua mediante una distribución tipo Fermi $h(z) = 1/(e^{z/\zeta} + 1)$. Hablando estrictamente, una frontera modelada de esta manera tiene un ancho infinito dado que alcanza sus valores límite, uno y cero, solamente de manera asintótica. No obstante, podemos definir una anchura efectiva mediante el intervalo que determinan las intersecciones de las asíntotas con la recta que pasa por $(0, 1/2)$ y tiene pendiente $h'(z = 0)$. Escogiendo el parámetro por medio de este criterio y usando la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-au}}{(1 + e^{-u})^2} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a^*)}{\Gamma(a + a^*)}, \quad (2.66)$$

obtenemos

$$\mathcal{I}_\pm = -\frac{\pi\zeta}{4\ell_\pm} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi\zeta}{4\ell_\pm} \right), \quad (2.67)$$

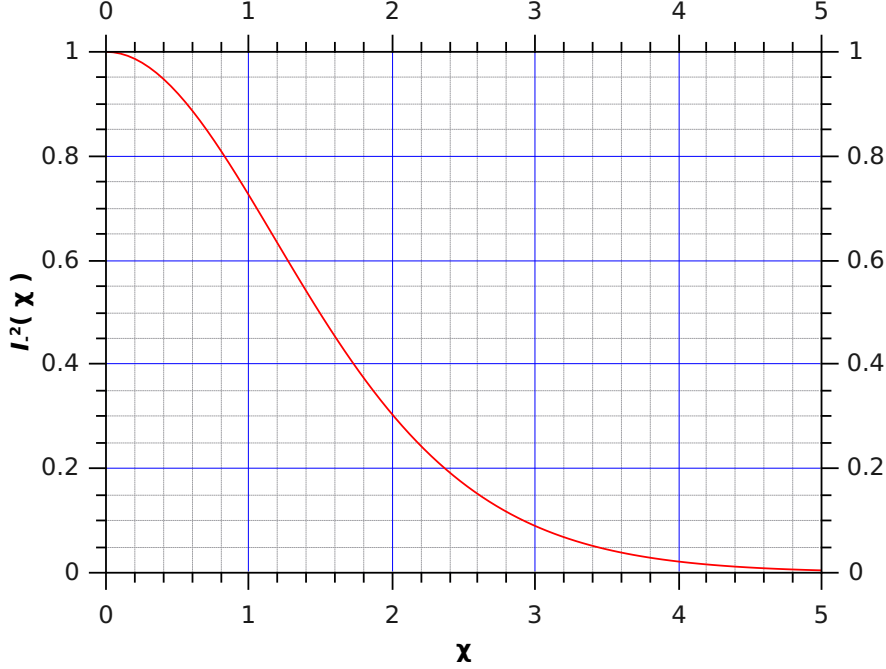


Figura 2.2: Amplitud \mathcal{I}_{\pm}^2 de la RT.

con $\operatorname{csch} \pi s = 1/\sinh \pi s$. En la última línea hemos tomado en cuenta la igualdad $\Gamma(1-is)\Gamma(1+is) = \pi s/\sinh \pi s$. En el caso de que $\varsigma \ll 4\ell_{\pm}$, tenemos

$$\mathcal{I}_{\pm} = -1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\varsigma}{4\ell_{\pm}} \right)^2 - \frac{7\pi^4}{360} \left(\frac{\varsigma}{4\ell_{\pm}} \right)^4 + \dots, \quad (2.68)$$

en donde usamos el desarrollo de $\operatorname{csch} x$ en serie de potencias para si $0 < |x| < \pi$. En el caso de que $|x| > \pi$, podemos hacer la aproximación $\mathcal{I}_{\pm} \approx 2\pi\varsigma/\ell_{\pm} \exp(-\pi\varsigma/\ell_{\pm})$. Es claro que resulta válido usar el límite de una interfase discontinua ($\mathcal{I}_{\pm} = -1$) siempre que la longitud de formación sea mucho mayor al tamaño de la región en donde la permitividad cambie (ver [46]); de manera más precisa, si $\ell_{\pm} \gg \varsigma$, entonces podemos tomar $\mathcal{I}_{-} = -1$ en todas las fórmulas previas y recuperar los resultados familiares de la RT en interfases difusas. En el caso contrario, \mathcal{I}_{\pm} decae exponencialmente. En lo que sigue, nos concentraremos solamente en la radiación que escapa hacia el frente. Por tanto, nos ocuparemos sólo de \mathcal{I}_{-} , que depende de la frecuencia y del ángulo de emisión a través de la combinación $\chi = \pi\varsigma/4\ell_{-}$.

Examinando la gráfica 2.2 notamos que $\mathcal{I}_-^2(\chi)$ alcanza su máximo valor en $\chi = 0$, que corresponde al límite ideal de una frontera modelada por una función escalón. A partir de su máximo, $\mathcal{I}_-^2(\chi)$ disminuye rápidamente conforme el argumento crece. Usando consideraciones muy similares a las que hemos hecho antes para partículas relativistas, podemos expresar χ de manera aproximada como

$$\chi = \frac{\pi \zeta \omega_p}{8 \gamma c} \left[\frac{\gamma \omega_p}{\omega} + \frac{\omega}{\gamma \omega_p} (1 + \gamma^2 \theta^2) \right]. \quad (2.69)$$

Esta expresión nos permite encontrar un criterio, válido para toda ω , que determina si una frontera puede considerarse abrupta o difusa. En efecto, la función entre corchetes posee un mínimo cuyo valor es 2. Por tanto, si

$$\frac{\zeta \omega_p}{\gamma c} \ll 1, \quad (2.70)$$

pueden utilizarse todos los resultados obtenidos para interfases discontinuas. Para hacerse una idea de las magnitudes involucradas, consideremos una partícula con factor de Lorentz $\gamma = 10^3$ que atraviesa la frontera entre polypropileno ($\omega_p/c \approx 10^8 \text{ m}^{-1}$) y aire. Para este caso, si el ancho de la región en la que cambia la permitividad es cercano a 10^{-5} m los efectos del cambio gradual en la permitividad serán muy notorios. Recordemos que en un detector de RT el ancho total de las hojas de material dieléctrico usadas es de aproximadamente 10^{-5} m , de aquí concluimos que en las condiciones controladas de laboratorio la RT producida es descrita correctamente tomando $\mathcal{I}_-^2(\chi) = 1$. De la expresión anterior también se desprende que para partículas suficientemente energéticas la interfaz siempre puede considerarse abrupta.

Dado que $\mathcal{I}_-^2(\chi)$ es una función monótona decreciente, observamos que la intensidad de la radiación se corta para frecuencias bajas ($\omega \ll \gamma \omega_p$) y para frecuencias altas ($\omega \gg \gamma \omega_p$). Este hecho contrasta con la RT proveniente de una frontera abrupta, para la cual la emisión espectral diverge de manera logarítmica a bajas frecuencias. Notamos también que, para frecuencias altas, la amplitud de emisión en el caso de la frontera difusa disminuye más rápido que en el caso discontinuo (véanse las figs. 2.3 y 2.4). Los resultados que enunciamos aquí, principalmente la forma analítica de $\mathcal{I}_-(\chi)$, dependen de la función que usamos para modelar el perfil de cambio en la permitividad. Sin embargo, estos resultados poseen un carácter muy general y pueden entenderse como una consecuencia directa de la disminución de la longitud de formación con respecto al tamaño de la inhomogeneidad, para frecuencias muy altas (o muy bajas), lo que conduce a fuertes oscilaciones en la fase del

integrando en (2.31). Finalmente, debemos notar que en una interfase difusa la emisión no desaparece completamente. Una inspección a la Fig. (2.2) nos permite concluir que para $\chi \approx 1,5$, la energía radiada mantiene un valor cercano al 50 % del caso de una frontera abrupta. Así mismo, podemos establecer que, a partir de este valor del argumento, la intensidad de la radiación decae de forma aún más rápida; en efecto, al duplicar el argumento y tomar $\chi \approx 3$ la intensidad de la radiación disminuye casi un orden de magnitud y será notoriamente menor ($< 10\%$) que en el caso de una frontera abrupta.

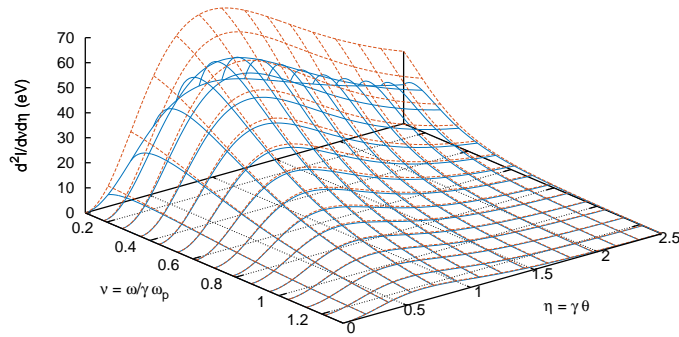


Figura 2.3: Emisión diferencial por ángulo y por frecuencia para una partícula relativista ($\gamma = 7 \times 10^3$) que atraviesa: a) una interfase difusa polypropilenoaire con un ancho 10^{-5} m (líneas azules sólidas); b) una interfase abrupta (líneas rojas punteadas).

Nuestro formalismo puede adaptarse fácilmente para tratar problemas de índole más general. Principalmente los casos de la RT producida cuando la función dieléctrica presenta una inhomogeneidad localizada en una región de longitud característica ς . Supondremos que dicha variación se da solamente sobre el eje z y que la partícula viaja con velocidad constante $\mathbf{v} = v\hat{z}$. Ilustraremos el procedimiento en el caso simple de que la partícula atravesase un bloque de material dieléctrico con constante ϵ . La función dieléctrica para todo z puede modelarse como

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z \in [-\varsigma/2, \varsigma/2], \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.71)$$

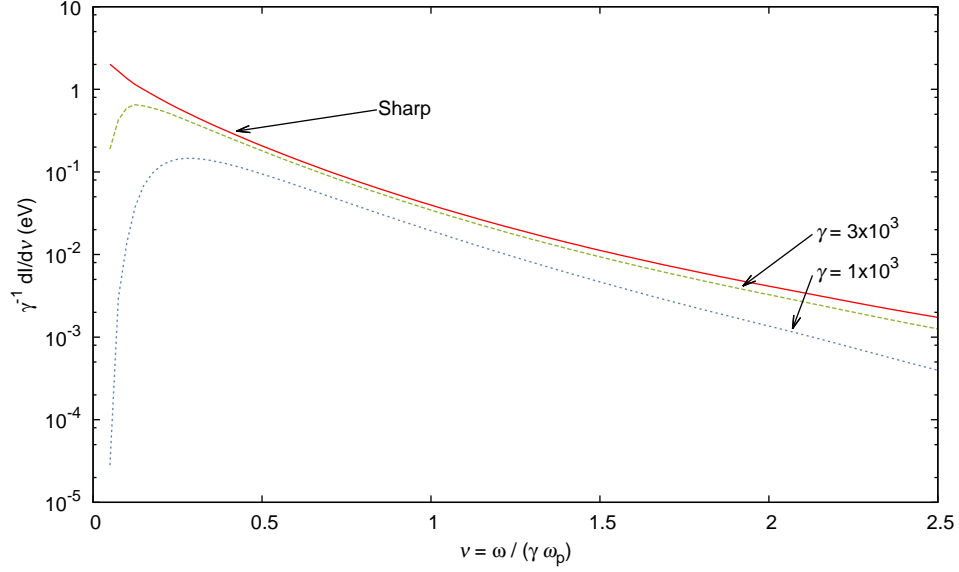


Figura 2.4: Distribución espectral normalizada $\gamma^{-1}dI/d\nu$, para distintos valores del factor de Lorentz, de la RT originada en una interfase difusa (líneas discontinuas) y en una abrupta (línea roja sólida) como función de $\nu = \omega/\gamma\omega_p$.

En lugar de (2.41), la ecuación integral que satisface $\mathfrak{D}_z(z)$ será

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_z(z) = & \mathfrak{D}_{2z}(z) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) h(z') \mathfrak{D}_z(z') \\ & - \Delta\epsilon \int_{-\infty}^z dz' \mathcal{G}(z, z'; k_{2z}) \frac{\kappa \partial \mathcal{E}_\kappa}{\epsilon \partial z'} [\delta(z' - \varsigma/2) - \delta(z' + \varsigma/2)]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Recordemos que en la expresión anterior escribimos $\kappa \mathcal{E}_\kappa$ en función de $\mathfrak{D}_z(z)$. Como hemos argumentado antes, al orden más bajo en $\Delta\epsilon$, obtenemos la solución reemplazando en las integrales del lado derecho $\mathfrak{D}(z)$ por el campo \mathfrak{D}_{1z} , que es la solución de (2.39) para el material dieléctrico con constante ϵ . Las integrales en la ecuación anterior se evalúan fácilmente y el campo de radiación resulta ser $[\mathcal{E}_z^R(\kappa, \omega)]_{slab} \exp(ik_2z)$, con

$$[\mathcal{E}_z^R(\kappa, \omega)]_{slab} = 2i\mathcal{E}_z^R(\kappa, \omega) \sin(\varsigma/2\ell_-), \quad (2.73)$$

donde $\ell_- = (\omega/v - k_{2z})^{-1}$ y $\mathcal{E}_z^R(\kappa, \omega)$ es la amplitud del campo de radiación para una interfase sencilla que presentamos en (2.58).

De manera similar, para un dipolo magnético la ecuación análoga a (2.22) es ahora

$$\mathcal{B}_z(z) = \mathcal{B}_{2z}(z) + \Delta\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^z dz' G_2(z, z') h(z') \mathcal{B}_z(z'), \quad (2.74)$$

de la cual obtenemos

$$[\mathcal{B}_z^R(\kappa, \omega)]_{slab} = 2\mathcal{B}_z^R(\kappa, \omega) \sin(\varsigma/2\ell_-), \quad (2.75)$$

donde $\mathcal{B}_z^R(\kappa, \omega)$ es la amplitud de la radiación emitida cuando un dipolo magnético atraviesa una sola interfase (cf. (2.35)).

Dado que la energía radiada hacia la derecha es proporcional al cuadrado de la amplitud de la radiación, escribimos

$$\left[\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} \right]_{slab} = 2 \frac{d^2 I}{d\omega d\theta} [1 - \cos(\varsigma/(\ell_-))], \quad (2.76)$$

con $d^2 I/d\omega d\theta$ dado por (2.61) ó (2.63). Nuestro resultado coincide con el bien conocido para la RT que se origina cuando una partícula atraviesa un bloque de material dieléctrico [23, 6]. El término que contiene el coseno oscila rápidamente para cambios pequeños en ω o θ siempre que el bloque sea suficientemente ancho como para que se cumpla la condición $\varsigma/\ell_- \gg 1$. Esto implica que al integrar (2.76) para calcular la energía radiada, las contribuciones provenientes de valores cercanos se cancelan; en tal caso, dicho término puede despreciarse. De lo contrario, si $\varsigma/\ell_- \ll 1$, la radiación se verá fuertemente atenuada por la interferencia destructiva. En otras palabras, a fin de que se forme la RT es necesario que la partícula atraviese, dentro del material, una distancia superior a ℓ_- . A esto se le conoce como el efecto de longitud de formación. Los resultados anotados en la ecuación anterior, como es de esperar, duplican a los que hemos presentado en el caso de una sola interfase. La diferencia se explica por la circunstancia de que la radiación se emite en las dos interfases.

2.6. Radiación de transición coherente

La emisión coherente de radiación por parte de haces concentrados de electrones es un fenómeno común a las diversas modalidades de radiación producidas por partículas ultra relativistas. Se caracteriza por un incremento, que no se escala linealmente con el número de partículas, en la intensidad de la radiación debido a la suma coherente de las contribuciones de cada uno

de los electrones de un racimo (“bunch” en inglés). En términos generales, el fenómeno tiene lugar para longitudes de onda mayores al tamaño característico del *bunch*. Asimismo, la intensidad de la emisión presenta una dependencia cuadrática en el número de electrones.

Diversos grupos han reportado la observación de radiación de transición coherente (RTC), desde principios de la década de 1990 [36]. Al presente, se han registrado observaciones en un rango muy amplio de longitudes de onda, que pueden ser incluso del orden de milímetros. El estudio del espectro de la RTC se ha utilizado como herramienta de alta resolución en el análisis y diagnóstico de la estructura de haces provenientes de un laser de electrones libres [63, 29].

En lo que sigue, usando el formalismo que hemos presentado en las primeras secciones de este capítulo, estudiaremos la RTC debida a un haz localizado de electrones y derivaremos las principales características de la emisión coherente. La discusión sobre la RTC que sigue a continuación sigue de cerca los razonamientos expuestos en el trabajo [37].

Consideremos la situación simple en la que un tren de N electrones se mueve, sobre el eje z , con una velocidad común v . En este caso, la corriente puede escribirse como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} \sum_{j=1}^N ev\delta(x - x_j)\delta(y - y_j)\delta(z - z_j - vt), \quad (2.77)$$

en donde (x_j, y_j, z_j) denota la posición inicial ($t = 0$) del j -ésimo electrón. Los electrones se mueven inicialmente en el vacío y se internan en un material con una frecuencia de plasma dada por ω_p , el ancho de la interfase es ς y la permitividad cambia de acuerdo a (2.7).

El campo de radiación se obtiene de las fórmulas (2.46) y (2.47). Aquí, la componente z de la transformada de Fourier de la corriente depende de ω y $\boldsymbol{\kappa}$, y es de la forma $\mathcal{J}_z(\boldsymbol{\kappa}, \omega, z) = \mathcal{J}_z(\boldsymbol{\kappa}, \omega)e^{i\omega z/v}$ con

$$\mathcal{J}_z(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j}, \quad (2.78)$$

donde $\phi_j = \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}_j + (\omega/v)z_j$. Por lo cual, la amplitud del campo de radiación producido por el *bunch* será

$$\mathcal{E}_z^{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j} \mathcal{E}_z^0(\boldsymbol{\kappa}, \omega) \quad (2.79)$$

donde $\mathcal{E}_z^0(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ es la expresión correspondiente a un solo electrón. Supongamos adicionalmente que los electrones en el haz se distribuyen de manera que poseen simetría axial. De esta forma, es fácil calcular la energía radiada por el haz de electrones usando (2.63), lo que resulta en

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j} \right|^2 \frac{d^2 I^0}{d\omega d\theta}, \quad (2.80)$$

donde $d^2 I^0/d\omega d\theta$ es la potencia radiada por un solo electrón.

Escribimos el cuadrado de la suma en (2.80) como

$$\sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k} = N + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^N e^{i(\phi_k - \phi_j)} = N + N(N-1)F(\boldsymbol{\kappa}, \omega), \quad (2.81)$$

donde hemos definido

$$F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^N e^{i(\phi_k - \phi_j)}, \quad (2.82)$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = \left[N(1 - F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)) + N^2 F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) \right] \frac{d^2 I^0}{d\omega d\theta}. \quad (2.83)$$

En este punto podemos ver que en el límite para el cual $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = 0$ (radiación incoherente) la potencia radiada es simplemente la suma de las contribuciones individuales de cada electrón. En el caso opuesto $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = 1$ (radiación totalmente coherente), la energía radiada depende cuadráticamente del número de electrones en el haz, si este es suficientemente denso. Si bien esta ecuación es exacta, su utilidad es escasa puesto que la evaluación de $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ depende de manera crítica de las posiciones z_j de cada electrón; sin embargo, es posible interpretar la (2.81) como un promedio estadístico y, de este modo, puede emplearse en condiciones muy generales. Para precisar esta idea, consideremos la distribución electrónica (discreta) en un momento dado, la cual, está dada por

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (2.84)$$

que depende de las condiciones concretas cada haz. Naturalmente, existe un gran número de distribuciones semejantes a (2.84) que son compatibles con los parámetros macroscópicos bajo los cuales opera la fuente (acelerador de partículas) de electrones. Denotaremos de manera genérica mediante $f_1(\mathbf{x})$ cualquier elemento del conjunto de distribuciones electrónicas que pueden obtenerse bajo idénticas condiciones macroscópicas. De ahora en adelante, entenderemos a la (2.81) como el promedio estadístico tomado sobre el ensemble de un número grande de copias de $f_1(\mathbf{x})$. Escribimos entonces

$$\left\langle \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k} \right\rangle = N(1 - F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)) + N^2 F(\boldsymbol{\kappa}, \omega), \quad (2.85)$$

en donde los corchetes angulares denotan la operación de promediar sobre el ensemble de distribuciones $f_1(\mathbf{x})$

Adicionalmente, supongamos que para un número suficientemente grande de electrones presentes en el haz, la función $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ es independiente de N . En este caso, dividiendo por N^2 obtenemos

$$F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left| \int d^3x f_1(\mathbf{x}) e^{-i\phi} \right|^2 \right\rangle. \quad (2.86)$$

Notemos que al calcular $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ de este modo, para N grande, solo retenemos la contribución del término cuadrático en N . Por ello, al sustituir (2.86) en (2.80) estamos despreciando la parte incoherente de la RT frente a su parte coherente. Para tener una idea de las magnitudes involucradas, mencionemos aquí que, típicamente, el número de electrones presentes en el haz que se produce en un laser de electrones libres es del orden de 10^9 [61].

Consideremos ahora la distribución continua $f(\mathbf{x})$, que definimos como el promedio del ensemble de una serie de distribuciones $f_1(\mathbf{x})$. Por ejemplo, $f(\mathbf{x})$ podría describir un racimo electrónico con forma gaussiana, sinusoidal, etc. Si la integral de $f(\mathbf{x})$ sobre todo el espacio está normalizada a uno, la probabilidad de encontrar un electrón en la posición \mathbf{x} es dada por $N f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Usando esta distribución efectiva (promedio), podemos aproximar la integral (2.86) mediante la expresión

$$F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \left| \int d^3x f(\boldsymbol{\rho}, z) \exp[-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - i(\omega/v)z] \right|^2. \quad (2.87)$$

Hemos arribado al importante resultado de que el factor $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ es proporcional a la norma cuadrada de la transformada de Fourier de la densidad

electrónica. Esto se desprende de la obvia relación $f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/N$, donde $\rho(\mathbf{x})$ denota la distribución espacial macroscópica de los electrones en el racimo. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = N^2 \left| \int d^3 x f(\boldsymbol{\rho}, z) \exp[-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - i(\omega/v)z] \right|^2 \frac{d^2 I^0}{d\omega d\theta}, \quad (2.88)$$

Recordemos que derivamos este resultado a partir de la densidad de corriente dada en (2.77). Es interesante notar que podemos obtener la fórmula anterior, determinando directamente la densidad de corriente de la distribución de los electrones en el racimo. En este caso, si el haz de electrones posee simetría axial y si la distribución espacial electrónica está especificada por la función $\rho(\mathbf{x}) = Ng(\rho)F(z)$, la densidad de corriente es dada por

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\rho}, z) = Nevg(\rho)F(z - vt)\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.89)$$

Aquí, hemos supuesto que el racimo se desplaza rígidamente, paralelo al eje z , con velocidad v . Tomando la transformada de Fourier a la expresión anterior (véase (2.10)), podemos usar las fórmulas (2.47) y (2.63) para obtener el campo de radiación y la energía emitida, respectivamente. Procediendo de este modo, el resultado es idéntico a (2.88) con $f(\mathbf{x}) = g(\rho)F(z)$.

En virtud de que una función acotada y localizada dentro un intervalo de longitud finita es absolutamente integrable, su transformada de Fourier tiende a cero conforme su argumento se incrementa, este hecho es consecuencia del Lema de Riemman-Lebesgue [44]. Por esta razón, la amplitud de la RTC producida por un *bunch* decae rápidamente conforme ω crece.

Para ilustrar estas ideas consideremos dos ejemplos. En primer lugar un *bunch* donde la carga se distribuye de manera uniforme en un cilindro de radio R y longitud $2L$ que se mueve paralelamente a su eje. La distribución espacial de la carga es

$$\rho(\mathbf{r}) = Ne g(\rho)F(z), \quad (2.90)$$

en donde

$$g(\rho) = \begin{cases} 1/\pi R^2, & \|\boldsymbol{\rho}\| \leq R \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.91)$$

y

$$F(z) = \begin{cases} 1/2L, & |z| \leq L \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.92)$$

Calculando la transformada de Fourier de la densidad electrónica podemos obtener fácilmente la amplitud de la RTC

$$F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = 4v^2 J_1^2(\boldsymbol{\kappa}R) \sin^2(\omega L/v)/(\omega L), \quad (2.93)$$

donde $J_1(x)$ es la función Bessel de orden 1.

Como un segundo ejemplo estudiaremos la RTC producida por un *bunch* gaussiano de tal manera que la distribución de la carga es dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Ne}{(2\pi)^{3/2}LR^2} \exp(-\rho^2/2R^2) \exp\left(-\frac{z^2}{2L^2}\right), \quad (2.94)$$

en cuyo caso la amplitud de la RTC resulta

$$F(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \exp(-\kappa^2 R^2) \exp\left(-\frac{\omega^2}{v^2} L^2\right) \quad (2.95)$$

En ambos casos, es claro el hecho de que el prefactor $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ en la amplitud de la RTC disminuye conforme la frecuencia de la radiación aumenta. En particular, en el caso del *bunch* gaussiano se deduce que la radiación coherente ocurre solamente para las frecuencias que cumplen $\omega \lesssim v/L$, o en términos de la longitud de onda $\lambda \gtrsim 2\pi L/\beta$. El argumento de la función exponencial transversal es $\kappa^2 R^2 = \omega^2/c^2 R^2 \sin^2 \theta$ lo que produce una distribución angular de la radiación más intensa hacia el frente.

Una vez calculado el factor $F(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$, es sencillo hallar la emisión diferencial de la RTC usando la fórmula (2.88). Recordemos que el campo de radiación deberá incluir el factor $\mathcal{I}_-(\chi)$ dado en (2.67); por lo cual, escribiendo explícitamente dicho factor obtenemos

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = \frac{2q^2 N^2}{\pi c} F(\omega, \theta) \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4 \frac{\theta^3 \mathcal{I}_-^2(\chi)}{(1/\gamma^2 + \omega_p^2/\omega^2 + \theta^2)^2}, \quad (2.96)$$

en donde, recordemos, $\chi = \pi\sigma(\omega/v)(1 - \beta \cos \theta)$.

Un caso de mayor interés consiste en el estudio de la RTC producida por un racimo electrónico con microestructura que emerge del undulador (en inglés *undulator*) de un láser de electrones libres (FEL por sus siglas en inglés). Antes de pasar por el undulador, el haz tiene una distribución espacial descrita por una función gaussiana con dispersión radial y longitudinal σ_R y σ_z , respectivamente. Al salir del undulador, mediante un proceso que le confiere una microestructura periódica con frecuencia ω_r , la distribución final se describe como

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{A(2\pi)^{3/2}\sigma_z\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_R^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) [1 + b_1 \cos(k_r z)], \quad (2.97)$$

Aquí, $A = 1 + b_1 \exp(-\sigma_z^2 k_r^2/2)$ es un factor de normalización, $k_r = \omega_r/c$ es el número de onda asociado a la frecuencia de operación del aparato; mientras

que b_1 es un número entre cero y uno llamado *bunching factor* que, en principio, está expresado como función de la potencia de operación del FEL. En rigor, la distribución electrónica resultante presenta picos para todas las componentes de Fourier con $k_n = nk_r$; sin embargo, armónicos más altos solo contribuyen de manera significativa cuando el FEL se encuentra cerca de su punto de saturación y en este análisis los ignoramos³. Sustituyendo (2.97) en la fórmula (2.87), mediante un cálculo simple encontramos que

$$F(\omega, \theta) = \frac{\exp(-\kappa^2 \sigma_R^2)}{A^2} \times \left[\exp\left(-\frac{\omega^2}{2v^2} \sigma_z^2\right) + b_1 \exp\left(-(\omega/v - k_r)^2 \sigma_z^2/2\right) + b_1 \exp\left(-(\omega/v + k_r)^2 \sigma_z^2/2\right) \right]^2. \quad (2.98)$$

Si $b_1 = 0$, recuperamos la situación examinada antes de un haz con distribución gaussiana sin estructura interna. Si b_1 no es demasiado pequeño, a causa del segundo término entre corchetes, la emisión se incrementa drásticamente para frecuencias cercanas a $\omega^* = \beta c k_r$. Este es un efecto de la microestructura y permite obtener radiación de una longitud de onda mucho más corta que la obtenida de un haz sin estructura interna. La energía radiada puede calcularse de manera inmediata y es dada por

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = \frac{2N^2 e^2 b_1^2}{A^2 \pi c} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4 \frac{\mathcal{I}_-^2 \theta^3 \exp[-(\omega^2/c^2) \sigma_R^2 \theta^2] \exp[-(\omega/v - k_r)^2 \sigma_z^2]}{(1/\gamma^2 + \omega_p^2/\omega^2 + \theta^2)^2 (1/\gamma^2 + \theta^2)^2}. \quad (2.99)$$

Observemos que el intervalo de frecuencias está muy restringido por el segundo factor exponencial. Por ello, podemos integrar la distribución gaussiana sobre un intervalo, centrado en ω_r , suficientemente grande comparado con el ancho de la emisión. Con lo cual, obtenemos⁴

$$\frac{dI}{d\eta} = \frac{\beta N^2 b_1^2}{A^2} \frac{2\alpha \hbar \omega_r}{\sqrt{\pi} k_r \sigma_z} \left(\frac{\gamma \omega_p}{\omega_r}\right)^4 \frac{\mathcal{I}_-^2 \eta^3 \exp[-(k_r \sigma_R / \gamma)^2 \eta^2]}{(1 + \gamma^2 \omega_p^2 / \omega_r^2 + \eta^2)^2 (1 + \eta^2)^2}, \quad (2.100)$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma del radiador y hemos introducido la variable angular $\eta = \gamma \theta$. Es claro que salvo algunos factores numéricos, este resultado es esencialmente la distribución angular-espectral de la RT en una interfase abrupta evaluada en ω_r y modulada por dos factores: a) $\mathcal{I}_-^2(\chi)$

³Una excelente revisión histórica del apasionante tema de los láseres de electrones libres puede encontrarse en [61]

⁴Puesto que estamos considerando partículas ultra relativistas hemos tomado $\omega^* = \omega_r$.

que está asociado al tamaño finito de la región en la que la permitividad cambia y, b) la función $\exp(-\kappa^2\sigma_R^2)$ que corta rápidamente la intensidad de la radiación conforme el ángulo se aparta de la dirección $\theta = 0$. En el límite en que la frontera sea abrupta, $\mathcal{I}_- = -1$ y se recupera el resultado para la radiación coherente de rayos X por un haz electrónico con microestructura [29, 38].

Consideremos ahora un haz de partículas relativistas ($\gamma > 10^3$) con microestructura que atraviesa una interfaz difusa. Supongamos que el tamaño de la inhomogeneidad en la permitividad ς , es similar a la dispersión de la distribución del haz σ_z . En condiciones experimentales similares a las que se tienen en el presente, la razón ω_p^2/ω_r^2 es casi un orden de magnitud mayor a $1/\gamma^2$. Supongamos, por ejemplo⁵, que el FEL opera a la frecuencia $\hbar\omega_r = 8,3 \text{ keV}$ y que el haz incide del vacío al polypropileno $\hbar\omega_p = 20 \text{ eV}$. La presencia de la exponencial en el numerador de (2.100), tiene la importante consecuencia de que la forma global de la distribución angular está relativamente poco afectada por $\mathcal{I}_-^2(\chi)$. Para convencernos de ello, regresemos momentáneamente a la variable θ y escribimos

$$\chi = \frac{\pi k_r \varsigma}{8\beta} (\omega_p^2/\omega_r^2 + \gamma^{-2} + \theta^2), \quad (2.101)$$

donde $x = \varsigma/\sigma_z$. Como se verá más abajo, el ángulo de máxima emisión es, cuando mucho, de orden $1/\gamma$. De ello resulta que la mayor parte de la radiación está confinada a un cono aún más estrecho que en el caso de la RT incoherente. Esto implica que la contribución de θ^2 a la suma en (2.101) puede despreciarse frente a ω_p^2/ω_r^2 . En otras palabras, mientras que $\mathcal{I}_-^2(\chi)$ y $\exp[-(k_r\sigma_R\theta)^2]$ cortan la intensidad de la radiación para ángulos grandes, este último factor lo hace de una manera mucho más rápida, de tal modo que $\mathcal{I}_-^2(\chi)$ nunca se aparta demasiado de su valor en $\theta = 0$.

El comportamiento de la distribución angular de la intensidad depende principalmente del factor de Lorentz de los electrones incidentes. Para valores suficientemente pequeños para satisfacer $\gamma \ll k_r\sigma_r$, el ángulo de máxima emisión θ_C , ocurre cuando $\eta \approx \sqrt{3/2}\gamma/k_r\sigma_r$ (véase fig. 2.5) lo que resulta en un valor que es significativamente menor al ángulo de máxima emisión θ_M que se obtendría en una interfase abrupta para la RT incoherente. En el límite opuesto, si $\gamma \gg k_r\sigma_r$, y conforme γ crece, θ_C se aproxima asintóticamente al valor determinado por $\eta \approx \sqrt{3}$ (véase la fig. 2.6). Para valores intermedios del factor de Lorentz, θ_C siempre se mantiene por abajo del

⁵Las dimensiones del racimo de electrones pueden tomarse como: $\sigma_z = 9 \times 10^{-6} \text{ m}$ y $\sigma_R = 6,12 \times 10^{-6} \text{ m}$; el número de electrones presentes en el haz $N = 1,5 \times 10^9$ y el parámetro $b_1 = 1$ [38].

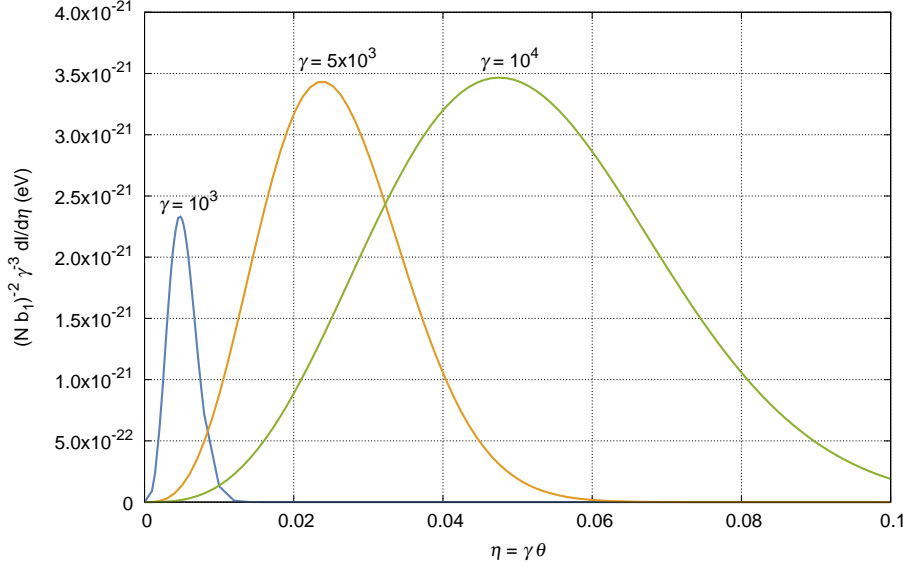


Figura 2.5: Distribución angular de la intensidad para valores moderados del factor de Lorentz normalizadas por $(Nb_1)^{-2}\gamma^{-3}$.

pico angular característico de la TR incoherente, cuyo valor, recordemos es $\theta_M = \gamma^{-1}$.

Como el argumento de $\mathcal{I}_-^2(\chi)$ está determinado prácticamente por el cuadrado de la razón ω_p/ω_r , en el caso bajo consideración podemos en (2.100) evaluar dicha función en $\eta = 0$ y sacarla de la integral sobre los ángulos para obtener la energía emitida. El resultado se expresa en términos de la función integral exponencial $E_1(x)$ como sigue:

$$I = \frac{N^2 b_1^2}{A^2} \frac{\alpha \hbar \omega_r}{\sqrt{\pi} k_r \sigma_z} \left(\frac{\gamma \omega_p}{\omega_r} \right)^4 \frac{\mathcal{I}_-^2(\chi_0) \left[e^{\tau^2} E_1(\tau^2) (\tau^2 + 1) - 1 \right]}{(1 + \gamma^2 \omega_p / \omega_r^2)^2}, \quad (2.102)$$

donde $\tau^2 = (k_r^2 \sigma_R^2) / \gamma^2$ y mediante χ_0 indicamos que el argumento de \mathcal{I}_-^2 debe evaluarse en $\eta = 0$. Con esta aproximación escribimos

$$\chi_0 \approx \frac{\pi k_r \zeta \omega_p^2}{8 \omega_r^2}. \quad (2.103)$$

En la Fig. 2.7 presentamos una gráfica en escala logarítmica de la energía radiada como función de γ . En general observamos un incremento en la energía conforme γ aumenta. Sin embargo se aprecia claramente que para

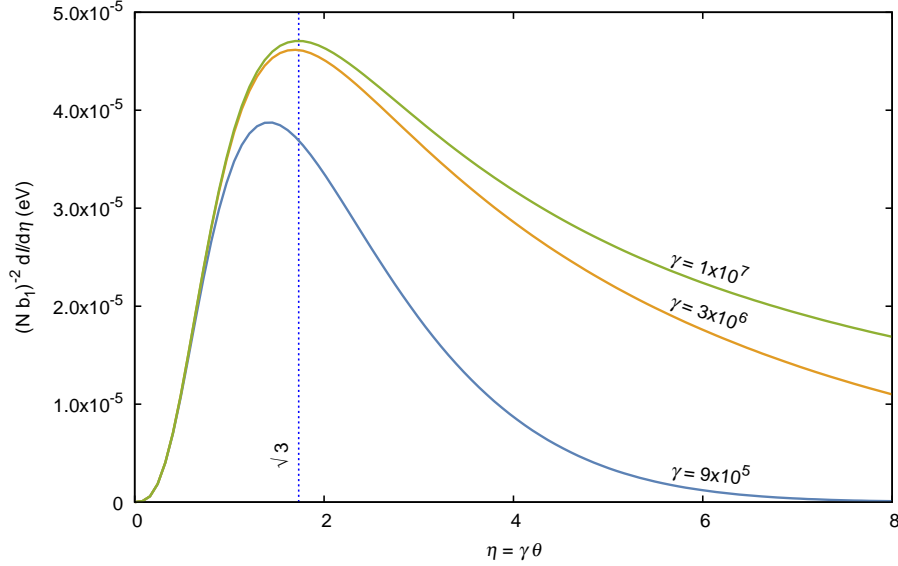


Figura 2.6: Distribución angular de la intensidad para valores grandes del factor de Lorentz normalizada por $(Nb_1)^{-2}$.

valores extremadamente grandes del factor de Lorentz ($\gamma > 10^6$) la intensidad muestra un crecimiento logarítmico con γ , este resultado se desprende de la representación en serie de potencias para $E_1(x)$ cuando el argumento es pequeño.

Con los parámetros numéricos enlistados arriba nos percatamos de que $\chi_0 \approx 0,8\varsigma/\sigma_z$, por cual, consultando la fig. 2.2 podemos estimar, que cuando $\varsigma \sim \sigma_z$ el factor $\mathcal{I}_-^2(\chi) \sim 0,8$. De aquí concluimos que, si el *bunch* electrónico y la inhomogeneidad son de tamaño similar, la intensidad de la RT en la interfase difusa es apenas ligeramente menor al caso ideal en donde $\mathcal{I}_-^2(\chi_0) = 1$. Sin embargo, en caso de que el tamaño de la inhomogeneidad sea mayor a las dimensiones del racimo de electrones ($\varsigma > \sigma_z$), la energía emitida resultará más atenuada cuanto más difusa sea la frontera. Por otro lado, cuando el ancho del racimo exceda ampliamente a las dimensiones de la inhomogeneidad en la permitividad ($\varsigma \ll \sigma_z$), se recupera el caso de la RT coherente de un haz de electrones en una frontera abrupta. Es interesante notar que χ_0 depende cuadráticamente de ω_p/ω_r , por lo que el valor concreto de esta razón afectará la intensidad de la RT en mayor medida que el ancho del haz.

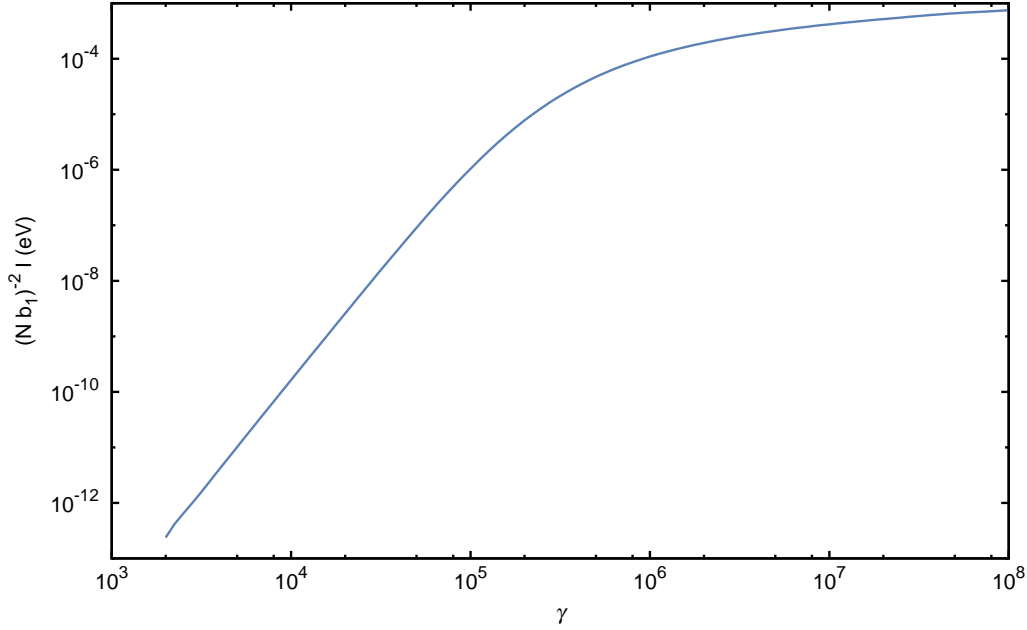


Figura 2.7: Intensidad total de la RT en una interfase difusa como función del factor de Lorentz, normalizada por $(N b_1)^{-2}$.

En lo que sigue, presentaremos las conclusiones a este capítulo. En primer lugar, cabe mencionar que la determinación del campo en el interior de la región en la que ocurre el cambio en la permitividad reviste un gran interés. Si bien, en este trabajo no hemos hecho esfuerzo alguno en este sentido, demos mencionar que usando el método presentado en este capítulo esto es posible. Por ejemplo, si la RT tuviese un modo de polarización TE, la componente z del campo magnético se obtendría evaluando las expresiones (2.29) y (2.30) para puntos dentro de la región en la que cambia la permitividad. Mediante un procedimiento similar podemos hallar la componente z del campo eléctrico en los casos de RT con modo de polarización TH.

En segundo lugar, deseamos enfatizar que utilizando nuestro formalismo pueden tratarse problemas no triviales de la RT. Concretamente, aquellos que conciernen a interfaces difusas o para los cuales el tamaño de la inhomogeneidad en la función dieléctrica está espacialmente acotada. Así mismo, se pueden manejar problemas de la RT producida por fuentes distintas a una carga.

Finalmente, para los casos en los cuales la permitividad cambia de manera continua, el modo específico en el que dicho cambio toma lugar se refleja en la función $\mathcal{I}_-^2(\chi)$, la cual, es relativamente simple y mediante su examen es posible extraer información relevante sobre las características de la RT.

Capítulo 3

Propiedades electromagnéticas de los neutrinos

3.1. Introducción

La relevancia de las propiedades electromagnéticas de los neutrinos difícilmente puede exagerarse dada la gran variedad de contextos físicos, principalmente en cosmología y astrofísica, donde tiene profundas implicaciones. Desde el punto de vista experimental, hasta ahora, no existe evidencia que confirme un valor distinto de cero para alguna de estas propiedades [32]. Cualquier desviación de las predicciones del ME, con una extensión mínima para acomodar neutrinos masivos, tendrá importantes consecuencias en las investigaciones en la frontera de la física [10, 58].

En la teoría cuántica de los campos, las propiedades electromagnéticas de cualquier fermión se determinan por su interacción con el campo electromagnético. Dicha interacción se describe por el vértice que acopla al fermión con los fotones y diagramáticamente se ilustra en la fig. 3.1.

A diferencia de los fermiones cargados, que se acoplan al campo electromagnético incluso a nivel de diagramas de árbol, las contribuciones al vértice electromagnético de los neutrinos provienen de correcciones radiativas. De este modo, el neutrino puede tener en el vacío un momento dipolar magnético anómalo o un radio de carga ¹. Esto posibilita la interacción de los

¹En rigor, hablamos de la media cuadrática (rms por sus siglas en inglés) de la distribución de carga.

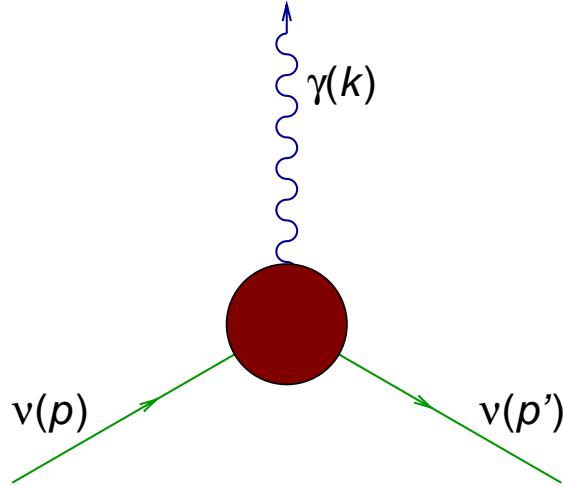


Figura 3.1: Vértice electromagnético de un fermión genérico.

neutrinos con el campo electromagnético, dando lugar a una gran variedad de fenómenos de relevancia física.

En un medio material, las propiedades de los neutrinos y del campo electromagnético se modifican drásticamente, produciendo efectos de mayor intensidad que los que podrían ocurrir en el vacío. Al propagarse en un medio con partículas cargadas, el neutrino adquiere un acoplamiento al campo electromagnético en donde los electrones y positrones presentes en el baño térmico hacen las veces de intermediarios. Esta situación es completamente distinta al caso del vacío, en cuyo caso, el acoplamiento es inducido por partículas virtuales.

En la primera sección de este capítulo estudiaremos la estructura del vértice electromagnético en el vacío y las diferencias entre neutrinos de Majorana y Dirac. Haremos también, una breve revisión de los límites experimentales de estas cantidades.

En la segunda sección de este capítulo discutiremos las propiedades electromagnéticas de los neutrinos haciendo énfasis en los efectos que induce el medio. Utilizando técnicas de la teoría térmica de campos, calcularemos a primer orden en la constante de Fermi G_F (o de forma equivalente: a primer orden en $1/M_W^2$) el vértice electromagnético de los neutrinos en un gas de electrones y positrones en un fondo uniforme de carga positiva, de tal modo, que la carga total se anula. Demostraremos que el vértice puede

descomponerse en dos partes: la primera, que es proporcional al tensor electromagnético $\Pi_{\mu\nu}(\omega, k)$ del medio y que se anula para ν_μ o ν_τ ; y, la segunda, distinta de cero para todas las especies de neutrinos, pero que, como probaremos, puede despreciarse frente a la primera parte en los límites clásico, degenerado y relativista del plasma. Finalmente demostraremos que el acoplamiento de los neutrinos al campo electromagnético en un medio consiste en un radio de carga.

3.2. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos en el vacío

El elemento de matriz de la corriente electromagnética de los neutrinos entre dos estados caracterizados por espín s (s') y cuadrivector p (p') se puede escribir como

$$\langle p', s' | J^\lambda | p, s \rangle = \bar{u}(p', s') \Gamma^\lambda(p', p) u(p, s), \quad (3.1)$$

en donde denotamos con $\Gamma^\lambda(p', p)$ al vértice electromagnético de los neutrinos. Dado que, bajo transformaciones de Lorentz, el vértice se comporta como un cuadrivector, tiene que ser una combinación lineal de los vectores p'_μ , p_μ y las matrices de Dirac γ_μ . A fin de formar cantidades escalares, o pseudoscalares, pueden estar presentes contracciones de los vectores antes mencionados con cualquiera de las 16 matrices linealmente independientes de 4×4 , que enlistamos a continuación: \mathbf{I} , γ_μ , $\gamma_\mu \gamma_5$, γ_5 , y el tensor $\sigma_{\mu\nu}$ dado por

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Por conveniencia, se suelen utilizar las combinaciones $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$ y $l_\mu = p'_\mu + p_\mu$. Sin embargo, usando la descomposición de Gordon de la corriente, se acostumbra sustituir los términos donde aparece l_μ en favor de otros que involucran solo q_μ .

La conservación de la corriente electromagnética $\partial_\mu J^\mu = 0$, impone la restricción

$$q_\lambda \bar{u}(p', s') \Gamma^\lambda(p', p) u(p, s) = 0. \quad (3.2)$$

Por tanto, la estructura más general del vértice electromagnético de los neutrinos, consistente con la invariancia de Lorentz y la conservación de la carga, tiene la forma:

$$\Gamma_\lambda(p', p) = f_Q(q^2) \gamma_\lambda + (q^2 \gamma_\lambda - q_\lambda \not{q}) f_A(q^2) \gamma_5 + \sigma^{\lambda\nu} q_\nu [f_M(q^2) + i f_E(q^2) \gamma_5], \quad (3.3)$$

en donde $f_Q(q^2)$, $f_A(q^2)$, $f_M(q^2)$ y $f_E(q^2)$ son los factores de forma de carga, anapolar, dipolo magnético y dipolo eléctrico, respectivamente. Notemos que q^2 es la única cantidad escalar, no trivial, a nuestra disposición; en consecuencia, los factores de forma son funciones solo de q^2 . Debemos hacer notar que existen otras formas de parametrizar el vértice (véase por ejemplo [52]), aquí escogimos aquella que es la más usual en la literatura.

A partir del hecho de que la corriente debe ser hermítica, lo que se expresa en la condición $\langle p, s | J^\lambda | p', s' \rangle = \langle p', s' | J^\lambda | p, s \rangle^*$, se deduce que $\Gamma^\lambda(p', p)$ debe satisfacer la condición

$$\gamma_0 \Gamma^{\mu\dagger}(p', p) \gamma_0 = \Gamma^\mu(p', p). \quad (3.4)$$

Usando esta ecuación y las relaciones $\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu$ y $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ podemos mostrar que, f_Q , f_M y f_A son reales. Adicionalmente, si suponemos la invariancia de la corriente bajo conjugación de carga y paridad, puede comprobarse que $f_E = 0$ [54, 42].

Para entender el sentido físico de los factores de forma, es útil acoplar el término correspondiente de la corriente a un campo externo A_μ , el cual supondremos que varía lentamente en el tiempo [66, 12]. A partir de ahí se puede derivar la ecuación de Dirac para el campo fermiónico Ψ con masa m ; tomando la aproximación no relativista para las soluciones, obtenemos la energía de interacción de los neutrinos con el campo A_μ en el límite en el que el momento transferido es cero, es decir, para $q^2 = 0$. Por ejemplo, para el factor de los momentos dipolares magnético y eléctrico, encontramos que el operador hamiltoniano es

$$\mathbf{H} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta [m + (f_M + if_E \gamma_5) (i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B})], \quad (3.5)$$

aquí, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, $\Sigma^i = \epsilon^{ijk} \sigma_{jk}$ y $\beta = \gamma_0$. La ecuación resultante será

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H} \psi. \quad (3.6)$$

En la representación de Dirac de las matrices γ_μ , tenemos

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En el límite no relativista, la masa en reposo de la partícula m supera ampliamente a las energías cinética y potencial. Por esta razón, escribimos las soluciones de energía positiva como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad (3.8)$$

en donde ϕ y χ son funciones que varían lentamente en el tiempo. Sustituyendo (3.8) en (3.6) encontramos que

$$\chi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} - f_Q \mathbf{A})}{2m} \phi,$$

donde hemos escrito explícitamente el potencial electromagnético $A^\mu(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}(x))$. De este modo, nos percatamos, de que en el límite no relativista, χ se puede ignorar frente a ϕ . En el sistema en el que la partícula permanece en reposo

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = [(\mu \mathbf{B}_0 + d_E \mathbf{E}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma} + Q\varphi] \phi, \quad (3.9)$$

donde $\mu_\nu = f_M(q^2 = 0)$, $d_E = f_E(q^2 = 0)$ y $q_\nu = f_Q(q^2 = 0)$; con el subíndice cero denotamos a los campos eléctrico y magnético en el sistema de referencia comóvil. Queda patente entonces, que podemos identificar a μ y d_E con los momentos dipolar magnético y eléctrico de la partícula, respectivamente.

Hasta ahora hemos supuesto implícitamente que el neutrino es una partícula de Dirac. A continuación, discutiremos las particularidades de los factores de forma en el caso de que el neutrino fuese una partícula de Majorana. Antes de proceder, revisaremos brevemente la operación de conjugación de carga, que puede definirse para cualquier fermión de Dirac como ²:

$$\psi^{(c)} = \gamma^0 C \psi^*, \quad (3.10)$$

en donde C es una matriz unitaria por definir, tal que satisfaga

$$\gamma_0 C \sigma_{\mu\nu}^* = -\sigma_{\mu\nu} \gamma_0 C. \quad (3.11)$$

La definición dada arriba está motivada por el hecho de que en la representación de Majorana de las matrices de Dirac, podemos escoger $C = \gamma^0$; en cuyo caso, la conjugación de carga se reduce a $\psi(x) = \psi^*(x)$. La condición (3.11) garantiza que la definición de conjugación de carga que hemos dado arriba es covariante bajo transformaciones de Lorentz. De la expresión anterior se sigue fácilmente $C \sigma_{\mu\nu}^* C^\dagger = -\gamma_0 \sigma_{\mu\nu} \gamma_0$. Esta ecuación se satisface si tomamos

$$C^\dagger \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \quad (3.12)$$

como la relación que define a C . Partiendo del requerimiento de que $(\psi^{(c)})^{(c)} = \psi$, se puede demostrar que $CC^* = -1$. Naturalmente, la forma explícita de C depende de la representación específica de las matrices γ_μ .

²Para una discusión mas detallada y didáctica puede revisarse el trabajo [59].

Decimos que ψ es un fermión de Majorana si satisface

$$\psi^{(c)}(x) = \psi(x). \quad (3.13)$$

Usando esta condición, no es difícil obtener la superposición en ondas planas del operador de un campo de Majorana [52]. Esta resulta ser

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^{s\dagger} u_s(p) e^{-ipx} + a_p^s v_s(p) e^{ipx} \right), \quad (3.14)$$

donde $a_p^{s\dagger}$ crea el estado de una partícula con espín s y cuadrimomento p . Los espinores $u_s(p)$ y $v_s(p)$ satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} u_s(p) &= \gamma_0 C v_s(p)^*, \\ v_s(p) &= \gamma_0 C u_s(p)^*. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es claro, si examinamos las relaciones previas, que la conjugación de carga transforma un espinor con un espín determinado, al correspondiente a la antipartícula en el mismo estado de espín.

Estudiaremos ahora las diferencias que existen entre los factores de forma de los neutrinos de Majorana y Dirac. Sea F , cualquiera de las formas bilineales que aparecen en (3.3). Si la partícula es de Dirac, el elemento de matriz puede escribirse como

$$\langle p', s' | \bar{\psi} F \psi | p, s \rangle = \bar{u}_{s'}(p') F u_s(p). \quad (3.16)$$

En el caso de un neutrino de Majorana la situación es diferente, dado que, cualquiera de los operadores ψ y $\bar{\psi}$ puede crear (o aniquilar) los estados de una partícula en la ecuación anterior. Consecuentemente, para el caso de Majorana tenemos

$$\langle p', s' | \bar{\psi} F \psi | p, s \rangle = \bar{u}_{s'}(p') F u_s(p) - \bar{v}_s(p) F v_{s'}(p'). \quad (3.17)$$

El signo negativo en el segundo término aparece debido al hecho que los operadores que figuran en el desarrollo del campo ψ anticonmutan. Esta expresión puede simplificarse usando las relaciones entre los espinores dadas en (3.15) y la condición (3.12). Obtenemos finalmente:

$$\langle p', s' | \bar{\psi} F \psi | p, s \rangle = \bar{u}_{s'}(p') \left(F + (C F^T C^\dagger) \right) u_s(p). \quad (3.18)$$

No cuesta trabajo demostrar que, si F es cualquiera de los siguientes términos: γ_μ , $\sigma_{\mu\nu}$ ó $\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}$, entonces

$$F = -C F^T C^\dagger, \quad (3.19)$$

por lo cual, concluimos que para neutrinos de Majorana, los factores de forma de carga, magnético dipolar y eléctrico dipolar se anulan,

$$f_Q = f_M = f_E = 0. \quad (3.20)$$

Por tanto, para un neutrino de Majorana el único factor que es distinto de cero es el anapolar.

El hecho de que tanto el momento dipolar magnético como el eléctrico, para un neutrino de Majorana, se anulen, se desprende, sin demasiada elaboración, demandando solamante invariancia bajo *CPT*. En efecto, supongamos que los neutrinos de Majorana tienen momento dipolar magnético y eléctrico. Entonces, en el sistema de reposo del neutrino, la energía de interacción con el campo electromagnético estático es, como hemos visto antes:

$$-d_E \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_0 - \mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0.$$

Al efectuar la transformación del estado inicial bajo *CPT*, los campos \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 permanecen sin cambio alguno; no ocurre lo mismo con un neutrino de Majorana en reposo, puesto que en tal caso, el efecto de la transformación consiste en la inversión del espín. Por tanto, si suponemos que la invariancia bajo *CPT* es válida los momentos dipolares deben ser cero.

Hasta ahora, hemos discutido los factores de forma diagonales, es decir aquellos para los que el estado inicial es el mismo al estado final; sin embargo es posible considerar factores de forma, en los cuales, los estados iniciales y finales involucren distintas generaciones o masas. Es posible mostrar que si suponemos invariancia bajo *CP*, entonces los factores de forma $f_Q(q^2)$, $f_M(q^2)$, $f_E(q^2)$ y $f_A(q^2)$ son reales entre sí.

A continuación haremos una breve revisión de las cotas actuales que experimentos u observaciones astronómicas imponen a los factores de forma de los neutrinos. Antes debemos mencionar que, para neutrinos sin masa, es posible demostrar que el vértice electromagnético puede escribirse en términos de un sólo factor de forma $f_D(q^2)$ (ver por ejemplo [52]):

$$\bar{u}(p') \Gamma_\lambda(q) u(p) = f_D(q^2) \bar{u}(p') \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u(p), \quad (3.21)$$

de manera tal que los factores de forma de carga y anapolar están relacionados con $f_D(q^2)$ de la siguiente manera

$$f_Q(q^2) = f_D(q^2), \quad f_A(q^2) = f_D(q^2)/q^2. \quad (3.22)$$

A pesar del hecho claro de que las correcciones radiativas no deben alterar la neutralidad de la carga de los neutrinos, solo unos cuantos años posteriores a la formulación del ME, se llevaron a cabo los primeros cálculos para

determinar el factor de forma de carga; en 1972, Bardeen, Gastmans y Lautrup [7] usando la norma unitaria en sus cálculos demostraron que el factor de forma $f_Q(q^2)$, al evaluarse en $q^2 = 0$ arroja una carga nula. Este resultado fue confirmado en los trabajos Rosado y Martínez [50], y Sirlin [17], utilizando distintos esquemas, a nivel de un rizo del vértice electromagnético en el contexto del ME. Por otro lado, en [24, 25] se estudia el vértice electromagnético de los neutrinos, usando el ME con extensión mínima para dar acomodo a neutrinos masivos. En estos trabajos, los cálculos se hacen usando una norma arbitraria R_ξ . En ellos, los autores obtienen expresiones cerradas para los factores de forma de los neutrinos y demuestran que para neutrinos masivos, al menos a nivel de un rizo, la carga de los neutrinos, es decir $f_Q(q^2 = 0)$, es independiente de la norma elegida y se anula.

Probablemente, la carga de los neutrinos es la propiedad electromagnética con la cota experimental más restrictiva. En experimentos que involucran procesos como el decaimiento beta $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$ y en los cuales se da por sentada la conservación de la carga, se obtiene

$$q_\nu < 10^{-21}e, \quad (3.23)$$

este límite se deriva al considerar la cota para la carga del neutrón dada por $q_n = (-0,4 \pm 1,1) \times 10^{-21}e$ [8], donde e es la carga del electrón; también se obtiene un resultado similar al suponer la neutralidad de la materia [49].

Incluso si el neutrino careciera de masa, es posible extraer información relevante de las propiedades estáticas, a partir del factor de forma $f_Q(q^2)$. En general, una partícula neutra puede contener dos distribuciones de carga opuesta con el mismo centro pero con distinta extensión espacial. Al considerar la dispersión elástica de electrones por el potencial producido por una densidad de carga, con simetría esférica, dada por $\rho(r)$, se demuestra que la sección eficaz es de la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_p |f(q^2)|, \quad (3.24)$$

en donde el primer factor en el miembro derecho representa la sección eficaz que corresponde a una partícula puntual, mientras que $f(q^2)$ es un factor de forma dado por

$$\begin{aligned} f(q^2) &= 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr. \\ &= 1 - q^2 \frac{\langle r^2 \rangle}{6} + \dots \end{aligned}$$

Por analogía, para los neutrinos, se puede definir el radio de carga como

$$\langle r_\nu \rangle = -6 \frac{df_Q(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}. \quad (3.25)$$

Inicialmente, el concepto del radio de carga aplicado a los neutrinos, produjo no poca confusión. Por ejemplo, en los primeros estudios se concluía que el radio de carga, calculado en el contexto del ME, resultaba divergente y dependiente de la norma, por tanto, se consideraba como una cantidad no observable. Para solventar el problema, A. Rosado, J. L. Lucio y A. Zepeda [47], concibieron en su lugar la noción de *un radio de carga electrodébil* asociado a los neutrinos. Algunos años más tarde, Sirlin y Marciano, estudiando la amplitud de la dispersión elástica neutrino-leptón, fueron capaces de demostrar que, en determinado esquema de renormalización, dicha amplitud puede separarse en dos partes finitas e independientes de la norma. Una parte, que no depende del leptón involucrado en el proceso de dispersión considerado, puede interpretarse como el factor de forma electromagnético. La expresión derivada para dicho radio de carga es

$$\langle r_{\nu_L}^2 \rangle \sim \frac{G_F}{\sqrt{2}\pi^2} \ln \left(\frac{m_W}{m_L} \right) \quad L = e, \mu, \tau, \quad (3.26)$$

los valores numéricos para las distintas especies de neutrinos se enlistan a continuación

$$\begin{aligned} \langle r_{\nu_e}^2 \rangle &\simeq -1,34 \times 10^{-33} \text{ (cm}^2\text{)} \\ \langle r_{\nu_\mu}^2 \rangle &\simeq +1,85 \times 10^{-33} \text{ (cm}^2\text{)} \\ \langle r_{\nu_\tau}^2 \rangle &\simeq +3,5 \times 10^{-33} \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Es interesante notar que, en términos numéricos la estimación en [47] es muy similar a las cantidades dadas arriba. El radio de carga de los neutrinos representa sólo una corrección de la interacción débil a nivel árbol, y como tal, se puede analizar mejor en experimentos en aceleradores de partículas. Es interesante, contrastar las predicciones teóricas con los límites impuestos por resultados experimentales. Usando los datos colectados de la observación de la supernova SN 1987A, para el neutrino derecho del electrón Grifols y Masso [34] estimaron una cota para el radio de carga dada por:

$$\langle r_{\nu_e}^2 \rangle \lesssim 2 \times 10^{-33} \text{ cm}^2. \quad (3.28)$$

La colaboración Kamiokande II encontró, analizando los datos de neutrinos provenientes del sol, que

$$\langle r_{\nu_e}^2 \rangle < 2 \times 10^{-32} \text{ cm}^2. \quad (3.29)$$

Podemos apreciar que los límites experimentales difieren, como máximo, un orden de magnitud con las predicciones teóricas. Es razonable suponer que la precisión experimental pueda pronto refinarse al punto de ser capaz de explorar el radio de carga del neutrino.

Desde su propuesta inicial, Pauli especuló con la idea de que los neutrinos tuviesen un momento magnético no nulo. Aunque hasta la fecha las observaciones experimentales o astronómicas no han conseguido medirlo, debemos subrayar el hecho de que la observación de un valor no nulo para el momento magnético diagonal de los neutrinos, automáticamente nos llevaría a concluir que los neutrinos son fermiones de Dirac. En la formulación original del ME el neutrino carece de masa, por tanto, no puede tener un momento dipolar magnético; sin embargo, una extensión mínima, que admita neutrinos masivos, conduce a la predicción de que un neutrino de Dirac posea un momento dipolar magnético dado por [48, 45]:

$$\mu_\nu = \frac{3G_F m_e m_\nu}{4\sqrt{2}\pi^2} \simeq 3,2 \times 10^{-19} \mu_B \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ ev}} \right), \quad (3.30)$$

donde $\mu_B = e/2m_e$ es el magnetón de Bohr, m_e y m_ν las masas del electrón y del neutrino, respectivamente. En un trabajo más reciente [24], se demuestra que el factor de forma magnético, evaluado en $q^2 = 0$, da un valor finito e independiente de la norma. Hasta ahora, límites de μ_ν se han obtenido en experimentos de dispersión de antineutrinos por electrones al analizar el espectro de energía del retroceso de los electrones. Los primeros experimentos de este tipo se llevaron a cabo, hace casi ya cuarenta años, en el laboratorio de Savannah River y permitieron establecer una cota dada por: $\mu_\nu \leq 10^{-10} \mu_B$. Sin embargo, a partir de experimentos llevados a cabo recientemente en reactores, se ha podido obtener un nuevo límite más restrictivo [9] en el orden de $\mu_\nu \leq 2,9 \times 10^{-11} \mu_B$.

3.3. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos en un medio

Al considerar los factores de forma inducidos por la materia debemos tener en cuenta que, en la estructura del vértice, interviene ahora la cuadri-velocidad del medio v^μ . Se añaden nuevas contribuciones a las que discutimos en la sección anterior. Los propios factores de forma dependen en el presente caso de los escalares $q_\mu v^\mu$ y q^2 . Estos nuevos términos se denominan factores de forma inducidos por el medio. En general, para el vértice habrá dos contribuciones: una inducida por el medio y otra proveniente del vacío. Esto

es:

$$\Gamma^\lambda(k', p) = \Gamma_{(V)}^\lambda(k', k) + \Gamma_{(M)}^\lambda(k', k, u) \quad (3.31)$$

En los sucesivos nos ocuparemos solamente de las contribuciones al vértice inducidas por la interacción de los neutrinos con la materia, por lo tanto en lo que sigue omitiremos, por brevedad, el subíndice (M).

A continuación presentaremos el cálculo de la parte del vértice que depende del medio. Consideraremos el caso en el cual, el medio está constituido por un gas de electrones. Supondremos también que este gas de electrones está inmerso en un fondo uniforme de iones positivos. El cálculo de $\Gamma^\lambda(k', k, u)$ en el ME involucra los diagramas que se encuentran en la figura 3.3. Nos concentraremos solamente en situaciones en las que la temperatura es suficientemente baja como para no permitir la presencia de bosones W en el medio. Esto implica que, solamente en el propagador de los electrones tienen que incluirse los efectos inducidos por la densidad de electrones. En caso de que el medio se caracterice por la temperatura $T = 1/\beta$ y el potencial químico μ , los propagadores en los lazos de electrones $S_F(p)$ se escriben como:

$$S_F(p, \mu, \beta) = (\not{p} + m_e) \left[\frac{1}{p^2 - m_e^2} + i 2\pi \delta(p^2 - m_e^2) \eta(u \cdot p, \mu, \beta) \right], \quad (3.32)$$

en donde m_e es la masa del electrón y η es una función que involucra las funciones de distribución térmica de electrones y positrones dada por

$$\eta(x) = \frac{\theta(x)}{e^{\beta(x-\mu)} + 1} + \frac{\theta(-x)}{e^{-\beta(x-\mu)} + 1} \quad (3.33)$$

Notemos que en las integrales que aparecen en el cálculo de $\Gamma_\lambda(k', k, u)$, los valores de la variable de integración están restringidos por la presencia de la distribución de Fermi de los electrones y positrones. Debido a ello, la contribución del diagrama fig. 3.3 (b) tiene una potencia extra del factor $1/M_W^2$ relativa a los dos diagramas restantes. Por tanto, en un cálculo a primer orden en $1/M_W^2$, podemos ignorar la contribución de este diagrama y concentrarnos sólo en el cálculo de los diagramas restantes. En lo que sigue³, seguiremos de cerca el procedimiento utilizado en [21]. Un sencillo cálculo

³Es interesante revisar el trabajo [4] en donde, usando elementos de la teoría cinética, se efectúa el mismo cálculo.

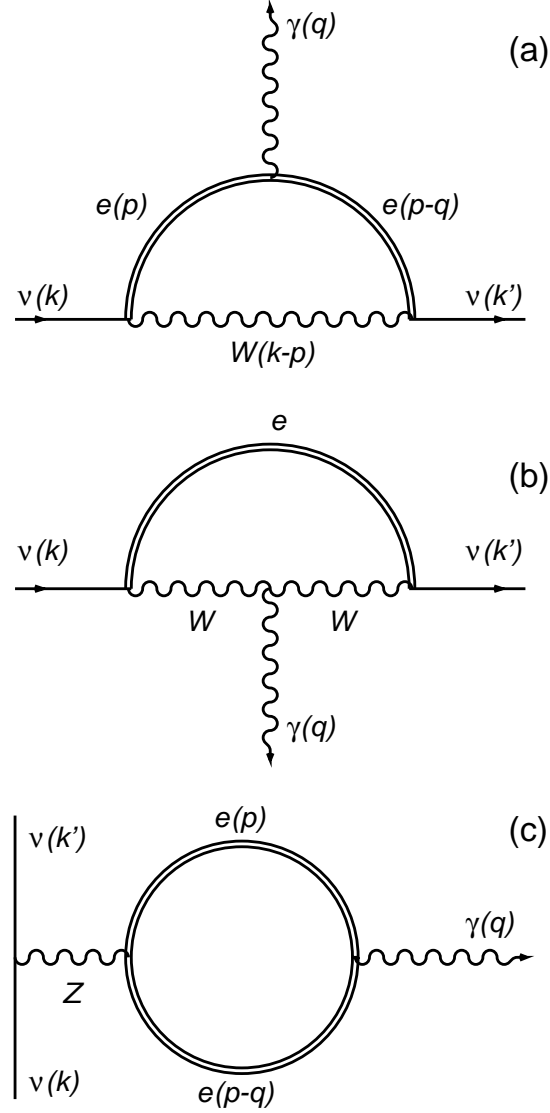


Figura 3.2: Diagramas que contribuyen al vértice electromagnético en un plasma QED. La línea doble representa el propagador térmico. (a) Diagrama W (solo para ν_e). (b) Diagrama con dos propagadores del bosón W . (c) Diagrama Z . Se consideran solo neutrinos izquierdos en todos los casos.

nos permite escribir

$$-i\Gamma_{\lambda}^{(W)} = \frac{eg^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^{\mu} \mathbf{L} iS_F(p-q) \times \gamma_{\lambda} iS_F(p) \gamma_{\mu} \mathbf{L} \frac{1}{(q-p)^2 - M_W^2}, \quad (3.34)$$

para el diagrama en la fig.3.2 (a). Por otro lado, para el diagrama de la parte (c) tenemos

$$-i\Gamma_{\lambda}^{(Z)} = -\frac{eg_Z^2}{q^2 - M_Z^2} \gamma^{\mu} \mathbf{L} \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [iS_F(p-q) \gamma_{\lambda} iS_F(p) \times \gamma_{\mu} (a_Z + b_Z \gamma_5)], \quad (3.35)$$

en donde $q = p' - p$ es el momento transferido al fotón y en el ME, $g_Z = g/(2 \cos \theta_w)$, $a_Z = -1/2 + 2 \sin^2 \theta_w$ y $b_Z = 1/2$, por último $\mathbf{L} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ es el proyector izquierdo. Notemos que para los neutrinos del muon y del tau tan solo es necesario calcular la contribución del diagrama (c), mientras que el vértice de los neutrinos de electrón recibe las contribuciones de los diagramas (a) y (c). Por esta razón consideraremos por separado las expresiones para $\Gamma^{(Z)}$ y $\Gamma^{(W)}$. Adicionalmente, supondremos que las energías de los neutrinos son suficientemente bajas como para ignorar la dependencia de los cuadrimentos en los propagadores de los bosones W y Z .

Notemos que, al sustituir los propagadores de los electrones en la fórmula anterior, junto a los términos que no dependen de la distribución térmica de los electrones aparecen otros que dependen lineal o cuadráticamente en $\eta(p \cdot u)$. Los primeros contribuyen a la parte del vértice que no depende del medio y, que como ya indicamos previamente, los ignoraremos. Por último, los términos cuadráticos en $\eta(u \cdot p)$ contribuyen solo a la parte de absorción de la amplitud.

Utilizando la identidad, estilo Fierz, que escribimos a continuación

$$\gamma^{\alpha} \mathbf{L} A \gamma_{\alpha} \mathbf{L} = -\text{Tr}(A \gamma_{\alpha} \mathbf{L}) \gamma^{\alpha} \mathbf{L}, \quad (3.36)$$

y que es válida para cualquier matriz de 4×4 , podemos reordenar la expresión correspondiente a $\Gamma_{\lambda}^{(W)}$ de tal modo que las dos expresiones en (3.34) pueden escribirse en la forma

$$\Gamma_{\lambda}^{(W,Z)} = \mathcal{T}_{\lambda\rho}^{(W,Z)} \gamma^{\rho} \mathbf{L}, \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda\rho}^{(Z)} &= 2\pi \frac{eg_z^2}{M_z^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\lambda(\not{p} + m)\gamma_\rho(a_Z + b_Z\gamma_5)] \\ &\times \left[\frac{\delta[(p-q)^2 - m^2]\eta[(p-q) \cdot u]}{p^2 - m^2} + \frac{\delta(p^2 - m^2)\eta(p \cdot u)}{(p-q)^2 - m^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Mediante el cambio de variable $p \rightarrow p + q$ en la primera de las integrales y evaluando las trazas en el integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda\rho}^{(Z)} &= \frac{4eg_Z^2}{M_Z^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \\ &\times \left[a_Z(f_- + f_+) \frac{(p \cdot q)(p_\lambda q_\rho + p_\rho q_\lambda) - (p \cdot q)^2 g_{\lambda\rho} - q^2 g_{\lambda\rho}}{(p \cdot q)^2 - (q^2/2)^2} \right. \\ &\quad \left. - b_Z(f_- - f_+) i\epsilon_{\lambda\rho\mu\nu} \frac{p^\mu q^\nu q^2}{(p \cdot q)^2 - (q^2/2)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde la integral se calcula sobre el cuadri-momento $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ de los electrones y positrones con energía y $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. También hemos introducido la funciones de distribución de Fermi para positrones y electrones

$$f_{\mp} = \frac{1}{\exp[(\beta(p \cdot u \mp \mu) + 1)]}. \quad (3.40)$$

Notemos que $p \cdot u$ equivale a la energía del fondo de partículas en el sistema de referencia del medio. En particular, en este sistema de referencia, la densidad de electrones y positrones está dada por

$$n_{\mp} = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{\mp}(p), \quad (3.41)$$

hemos agregado un factor de 2 para tomar en cuenta la degeneración del espín. La expresión para $\mathcal{T}_{\lambda\rho}^{(W)}$ puede obtenerse en cualquier momento, a partir de (3.39), mediante las sustituciones:

$$\frac{g_Z^2}{M_Z^2} \rightarrow \frac{g^2}{2M_W^2}, \quad a_Z = 1/2, \quad b_Z = -1/2. \quad (3.42)$$

Finalmente, tomando en cuenta las dos contribuciones podemos expresar el vértice como:

$$\Gamma_\lambda = -\sqrt{2}G_F \mathcal{T}_{\lambda\rho} \mathbf{L} \gamma^\rho, \quad (3.43)$$

siendo G_F la constante de Fermi y donde definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda\rho} = & 4e\mathcal{A} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_- + f_+) \\ & \times \frac{(p \cdot q)(p_\lambda q_\rho + p_\rho q_\lambda) - (p \cdot q)^2 g_{\lambda\rho} - q^2 g_{\lambda\rho}}{(p \cdot q)^2 - (q^2/2)^2} \\ & - 2ie\epsilon_{\lambda\rho\mu\nu} \mathcal{B} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_- - f_+) \frac{p^\mu q^\nu q^2}{(p \cdot q)^2 - (q^2/2)^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

En el ME $\mathcal{A} = 2 \sin^2 \theta_W \pm \frac{1}{2}$ and $\mathcal{B} = \mp \frac{1}{2}$, en donde el signo de arriba corresponde al ν_e y el de abajo a $\nu_{\mu,\tau}$.

El tensor $\mathcal{T}_{\lambda\rho}$ satisface la condición

$$q^\lambda \mathcal{T}_{\lambda\rho} = 0, \quad (3.45)$$

lo que es una consecuencia directa de la invariancia de norma del electromagnetismo. Adicionalmente, una inspección a las expresiones explícitas revela que también se cumple

$$q^\rho \mathcal{T}_{\lambda\rho} = 0, \quad (3.46)$$

lo que constituye una condición que no aparece a ordenes mayores. La forma más general para $\mathcal{T}_{\lambda\rho}$ consistente con ambas condiciones se puede escribir como [56]:

$$\mathcal{T}_{\lambda\rho} = T_T R_{\lambda\rho} + T_L Q_{\lambda\rho} + T_5 P_{\lambda\rho}, \quad (3.47)$$

en donde

$$R_{\lambda\rho} = g_{\lambda\rho} - \frac{q_\lambda q_\rho}{q^2} - Q_{\lambda\rho}, \quad (3.48)$$

$$Q_{\lambda\rho} = -\frac{Q^2}{q^2} \left(u_\lambda - \frac{\omega}{q^2} q_\lambda \right) \left(u_\rho - \frac{\omega}{q^2} q_\rho \right), \quad (3.49)$$

$$P_{\lambda\rho} = \frac{i}{Q} \epsilon_{\lambda\rho\alpha\beta} q^\alpha v^\beta, \quad (3.50)$$

es un conjunto de tensores ortogonales dos a dos que satisfacen:

$$R_{\lambda\rho} R^{\lambda\rho} = 2, \quad Q_{\lambda\rho} Q^{\lambda\rho} = 1, \quad P_{\lambda\rho} P^{\lambda\rho} = -2. \quad (3.51)$$

Expresaremos las distintas cantidades usando el sistema de referencia del medio, para el cual, $u^\lambda = (1, \mathbf{0})$, y escribiremos $q^\mu = (\omega, \mathbf{Q})$, con $Q = |\mathbf{Q}|$. Sustituyendo (3.39) en (3.1) y teniendo en cuenta (3.47), podemos escribir

el elemento de matriz de la corriente electromagnética de los neutrinos como sigue:

$$\langle k', s' | J_\lambda | k, s \rangle = -\sqrt{2} G_F \bar{u}(k') [(T_T R_{\lambda\rho} + T_L Q_{\lambda\rho} + T_A P_{\lambda\rho}) \gamma^\rho \mathbf{L}] u(k). \quad (3.52)$$

En esta última ecuación se exhibe la estructura del vértice electromagnético, en términos de los factores de forma T_T , T_L y T_5 las cuales son funciones escalares de ω y \mathcal{Q} . Con el fin de hacernos una idea del sentido físico de estas cantidades, notemos que el tensor $\mathcal{T}_{\lambda\rho}$ se descompone en una parte simétrica en los índices λ, ρ , que proviene de evaluar la expresión $\text{Tr} [\gamma^\lambda S_F(p) \gamma^\rho S_F(p - q)]$ en el integrando de (3.39); y en una parte antisimétrica determinada por $\text{Tr} [\gamma^\lambda S_F(p) \gamma^\rho \gamma_5 S_F(p - q)]$. Comparando con la expresión explícita del tensor de polarización en un medio $\Pi_{\mu\nu}(\omega, \mathcal{Q})$ (véase por ejemplo [14]), notamos que $\mathcal{T}_{\lambda\rho}$ es proporcional a la parte simétrica del tensor de polarización del medio. Este hecho puede entenderse examinando la Fig. 3.3. Con las aproximaciones descritas arriba la interacción de los neutrinos con el campo electromagnético puede expresarse, de manera efectiva, mediante una interacción similar a la interacción de cuatro campos de Fermi. En este caso, cuando efectuamos el cálculo, los dos diagramas que consideramos antes se reducen al rizo de electrones que aparece en dicha figura. Si en lugar de un par de neutrinos, imaginamos que conectamos otro fotón al diagrama, estaríamos describiendo la dispersión de fotones en un medio con electrones.

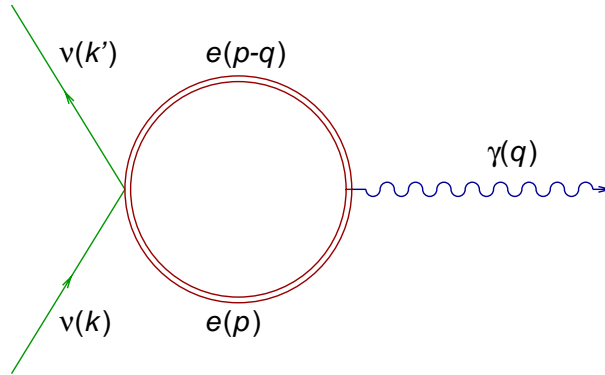


Figura 3.3: Acoplamiento efectivo de un fotón y un neutrino por el tensor de polarización. La línea doble en el rizo de electrones representa el propagador térmico S_F

En este punto, nos permitiremos una digresión para revisar brevemente las propiedades del tensor de polarización en la materia. En primer lugar recordemos que, en un medio material, la relación de dispersión de los fotones es modificada de tal manera, que permite la existencia de modos que se propagan de manera transversal y longitudinal al vector onda. Los primeros son muy similares a los fotones ordinarios en el vacío y por esta razón, en los sucesivos nos referiremos a ellos simplemente como fotones. Para distinguirlos de los modos longitudinales, que no son otra cosa que excitaciones colectivas de la densidad de carga del plasma, nos referiremos a estos últimos como plasmones. Denotaremos con $\epsilon^{(l)}(q)$ a los vectores de polarización, que dependen del cuadri-momento de los fotones (ω, \mathbf{Q}) , con $l = 1, 2$ y $l = 3$ para los dos modos transversales y longitudinal, respectivamente; recordamos también las siguientes relaciones

$$\epsilon_\lambda^{(3)} \epsilon_\rho^{(3)} = Q_{\lambda\rho} \quad (3.53)$$

$$\sum_{l=1,2} \epsilon_\lambda^{(l)} \epsilon_\rho^{(l)} = -R_{\lambda\rho} \quad (3.54)$$

El tensor de polarización contiene toda la información de la respuesta del medio al campo y las corrientes externas. La forma más general que $\Pi_{\lambda\rho}$ puede tener es [56]

$$\Pi_{\lambda\rho} = \pi_T R_{\lambda\rho} + \pi_L Q_{\lambda\rho} + \pi_P P_{\lambda\rho}, \quad (3.55)$$

en donde π_T , π_L y π_P son funciones escalares que dependen de las condiciones físicas del entorno, tales como densidad y temperatura, y de la cuadri-velocidad del medio. Los tensores $R_{\lambda\rho}$, $Q_{\lambda\rho}$ y $P_{\lambda\rho}$ son idénticos a los que hemos definido en las ecuaciones (3.48)-(3.49). Si el medio es isotrópico, y no se consideran procesos en donde se viole la simetría \mathcal{CP} , puede demostrarse que $\pi_P = 0$. En lo que sigue, concentraremos nuestra atención solo en medios para los cuales se cumple esta condición.

En un medio polarizable las funciones de respuesta del medio al campo electromagnético, se relacionan al campo de desplazamiento eléctrico con el campo eléctrico mediante $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, siendo ϵ la permitividad eléctrica; similarmente, la inducción magnética \mathbf{B} , y el campo magnético \mathbf{H} , se relacionan mediante la expresión $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$, siendo μ la permitividad magnética del medio. Si los campos varían en el tiempo y el espacio, las relaciones multiplicativas entre ellos se entienden en términos de integrales de convolución.

Sin embargo, \mathbf{B} y la parte transversal del desplazamiento eléctrico \mathbf{D}_T , la cual se caracteriza por $\mathbf{D}_T \cdot \mathbf{Q} = 0$, no son independientes [43]. Entre otras posibilidades, se puede escoger $\mathbf{D}_T = \epsilon_T \mathbf{E}_T$, $\mathbf{D}_L = \epsilon_L \mathbf{E}_L$, y $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. En este

caso, $\epsilon = \epsilon_L$ es la permitividad longitudinal y la permitividad transversal es dada por $\epsilon_T \equiv \epsilon_L + (1 - \mu^{-1})Q^2/\omega^2$. Las permitividades se relacionan con el tensor de polarización en la forma que escribimos a continuación

$$\epsilon_L = 1 - \pi_L/(\omega^2 - Q^2) \quad \text{y} \quad \epsilon_T = 1 - \pi_T/\omega^2, \quad (3.56)$$

a partir de ellas, pueden derivarse fácilmente las relaciones de dispersión para los modos longitudinales y transversales, las cuales, satisfacen

$$\omega^2 - Q^2 = \pi_{T,L}. \quad (3.57)$$

Los primeros cálculos del tensor de polarización se hicieron determinando las amplitudes en la dispersión de los fotones hacia adelante por las partículas que constituyen el medio. En años más recientes, usando la teoría térmica de los campos, diversos trabajos han confirmado los resultados previos. En el sistema de referencia del medio las funciones π_T y π_L están dadas por

$$\pi_L = (1 - \omega^2/Q^2)\Pi^{00} \quad \text{y} \quad \pi_T = \frac{1}{2}(\text{Tr}\Pi - \pi_L), \quad (3.58)$$

con $\text{Tr}\Pi = g_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}$. Examinando la relación de dispersión dada en (3.57), notamos que los fotones y plasmones adquieren una *masa efectiva* dada por $\pi_{T,L}$; sin embargo, debemos advertir que en general estas funciones dependen de la frecuencia y del número de onda en una forma complicada, que en general, está determinada por el régimen de las partículas del medio. A pesar de ello puede mostrarse, usando consideraciones muy generales[40], que para frecuencias muy arriba de la mayor frecuencia resonante del material, la función π_T es prácticamente una constante. De este modo, los fotones adquieren una masa efectiva $m_T^2 = \pi_T(\omega \rightarrow \infty)$ en el medio.

3.4. El radio de carga de los neutrinos en un medio

En esta subsección analizaremos la importancia relativa de las funciones T_T y T_5 y restringiremos nuestra atención a fotones reales que se propaguen en el medio. Los vectores de polarización transversales satisfacen $\epsilon_\lambda^{(l)}Q^{\lambda\rho} = 0$. De aquí se sigue que para neutrinos sin masa, el acoplamiento a los fotones a se da únicamente mediante la parte *transversal* de la corriente que se escribe a continuación

$$\langle p', s' | j_\lambda^{(t)} | p, s \rangle = \bar{u}(p') [(T_T g_{\lambda\rho} + T_5 P_{\lambda\rho}) \gamma^\rho \mathbf{L}] u(p). \quad (3.59)$$

En efecto, para neutrinos sin masa la ecuación de Dirac ($\bar{u}(k')\gamma^\lambda q_\lambda u(k) = 0$), nos permite omitir el término proporcional a $q_\lambda q_\rho$. Por otro lado, los plasmones se acoplan a los neutrinos con la corriente longitudinal dada por

$$\langle k', s' | j_\lambda^{(l)} | k, s \rangle = T_L \bar{u}(k') Q_{\lambda\rho} \gamma^\rho \mathbb{L} u(k). \quad (3.60)$$

Las funciones T_T y T_5 pueden hallarse a partir del vértice electromagnético del neutrino usando las relaciones $R_{\lambda\rho} R^{\lambda\rho} = 2$ y $P_{\lambda\rho} P^{\lambda\rho} = -2$. Las expresiones integrales resultantes dependen de las condiciones específicas de temperatura y densidad del gas de electrones. No obstante, en los límites de un plasma clásico, degenerado y relativista pueden darse expresiones analíticas explícitas. Siguiendo a Braaten y Segel [14], definimos $v_* = \omega_1/\omega_p$, siendo ω_p la frecuencia del plasma y que es dada a continuación

$$\omega_p^2 = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{E} \left(1 - \frac{1}{3}v^2\right) [\eta_e(E) + \eta_{\bar{e}}(E)], \quad (3.61)$$

en donde $v = p/E$ es la velocidad de los electrones o los positrones. Por otro lado, la frecuencia ω_1 está dada por la integral

$$\omega_1^2 = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{E} \left(\frac{5}{3}v^2 - v^4\right) [\eta_e(E) + \eta_{\bar{e}}(E)]. \quad (3.62)$$

Esta siempre se halla en el intervalo $0 \leq \omega_1 \leq \omega_p$, de donde se deduce que $0 \leq v_* \leq 1$. Como se demuestra en el artículo citado, en los límites clásico, degenerado y relativista las integrales exactas para T_5 y T_T están dominadas por el valor de v_* y pueden obtenerse las expresiones analíticas que, salvo un factor de proporcionalidad común a las dos, damos a continuación

$$T_5(\omega, \mathcal{Q}) = \frac{3\omega_5 \mathcal{Q}}{z} \frac{(\omega^2 - \mathcal{Q}^2)}{\omega^2} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{z}} \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}\right], \quad (3.63)$$

mientras que

$$T_T(\omega, \mathcal{Q}) = \frac{3\omega_p^2}{2z} \left[1 - \frac{(1-z)}{2\sqrt{z}} \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}\right]. \quad (3.64)$$

En las expresiones anteriores hemos definido $z = v_*^2 \mathcal{Q}^2/\omega^2$, mientras que la frecuencia ω_5 es dada por

$$\omega_5 = -\frac{2\alpha}{3\pi} \int_0^\infty dp^2 \frac{p^3}{E^2} \frac{d}{dp} [\eta_e(E) - \eta_{\bar{e}}(E)]. \quad (3.65)$$

Resulta conveniente introducir la función $G(x)$ definida como

$$G(x) = \frac{3}{x} \left[1 - \frac{2x}{3} - \frac{(1-x)}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.66)$$

Notemos que para valores del argumento situados en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ se tiene que $dG(x)/dx > 0$, $0 \leq G(x) \leq 1$, $G(0) = 0$ y $G(1) = 1$.

Para $\mathcal{Q} \gg \omega_p$, el valor de T_T se aproxima a una constante dada por la expresión $(\sqrt{2}g_V G_F/e)m_t^2$ con $m_t^2 = \omega_p^2 [1 + 1/2 G(v_*)]$. Este hecho es por completo análogo al comportamiento de los fotones (transversales) en un medio que exhiben un comportamiento asintótico en el cual se comportan como partículas masivas. Usando la función $G(x)$ definida arriba, T_T puede escribirse de manera muy compacta:

$$T_T(\omega, \mathcal{Q}) = \omega_p^2 \left[1 + \frac{1}{2} G(z) \right]. \quad (3.67)$$

A partir de las ecuaciones (3.63) y (3.64) podemos establecer

$$\frac{T_5(\omega, \mathcal{Q})}{T_T(\omega, \mathcal{Q})} = \frac{\omega_5}{\omega_p} \left(\frac{3x}{\varpi^2 - v_*^2 x^2} \right) \left[1 - \frac{2}{3} (\varpi^2 - x^2) \right], \quad (3.68)$$

en donde hemos definido las cantidades reducidas $x = \mathcal{Q}/\omega_p$ y $\varpi = \omega/\omega_p$. Examinemos el término entre paréntesis cuadrados en la expresión anterior. Notemos primero que

$$1 < \varpi^2 - x^2 < \frac{3 m_t^2}{2 \omega_p^2}, \quad (3.69)$$

por lo que se sigue que

$$G\left(\frac{v_*^2 x^2}{\varpi^2}\right) < G\left(\frac{v_*^2 x^2}{x^2 + m_t^2/\omega_p^2}\right). \quad (3.70)$$

De donde obtenemos finalmente que:

$$1 - \frac{2}{3} (\varpi^2 - x^2) < \frac{1}{3} \left[1 - G\left(\frac{v_*^2 x^2}{x^2 + m_t^2/\omega_p^2}\right) \right] \quad (3.71)$$

Ahora bien, con respecto al denominador, notemos que: $\varpi^2 - v_*^2 x^2 = \varpi^2 - x^2 + (1 - v_*^2)x^2$, de donde es fácil establecer la desigualdad

$$\varpi^2 - v_*^2 x^2 > 1 + \frac{1}{2} G\left(\frac{v_*^2 x^2}{x^2 + m_t^2/\omega_p^2}\right) + (1 - v_*^2)x^2. \quad (3.72)$$

En resumen

$$\frac{T_5(\omega, \mathcal{Q})}{T_T(\omega, \mathcal{Q})} < \frac{\omega_5}{\omega_p} h(x), \quad (3.73)$$

siendo

$$h(x) = \frac{x \left(1 - G \left(\frac{v_*^2 x^2}{x^2 + m_t^2 / \omega_p^2} \right) \right)}{1 + \frac{1}{2} G \left(\frac{v_*^2 x^2}{x^2 + m_t^2 / \omega_p^2} \right) + (1 - v_*^2) x^2} \quad (3.74)$$

En esta última desigualdad los términos a la derecha son independientes de ϖ y la función $h(x)$ nunca supera la unidad como puede apreciarse en la figura 3.4

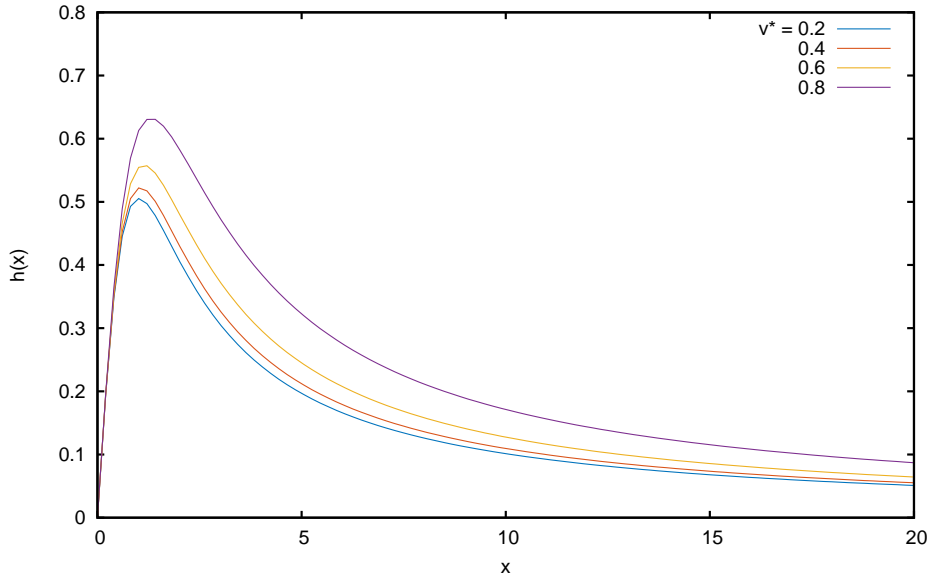


Figura 3.4: Gráfica de la función $h(x)$, para distintos valores de v^* .

Las cantidades ω_p y ω_5 pueden calcularse de manera explícita en los casos límite de un gas clásico, totalmente degenerado y relativista. A continuación escribimos el resultado:

$$\frac{\omega_5}{\omega_p} = \begin{cases} \sqrt{\alpha} \left(\frac{32T}{\pi^3 m_e} \right)^{3/4} & \text{gas clásico} \\ \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} v_F^{3/2} & \text{gas degenerado} \\ \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{1}{3}\pi^2 T^2}} & \text{gas relativista.} \end{cases} \quad (3.75)$$

En donde $\alpha = e^2/4\pi$ es la constante de estructura fina, T la temperatura del baño térmico, m_e la masa del electrón y $v_F = p_F/E_F$, con E_F y p_F la energía y momento de Fermi, respectivamente. Es evidente que en el caso del gas clásico, situación para la cual $T/m_e \ll 1$, la razón $\omega_5/\omega_p \ll 1$. Otro tanto ocurre con los casos degenerado y relativista para los cuales se tiene $\omega_5/\omega_p < \sqrt{\alpha/3\pi} \sim 0,028$. Si junto a estos resultados recordamos que $h(x)$ nunca supera la unidad concluimos que para los casos límite de un gas clásico, degenerado y relativista, en el acoplamiento del neutrino al campo electromagnético, se puede ignorar la contribución de la función T_5 , lo que nos permite escribir la corriente de los neutrinos que se acopla a los fotones como

$$\langle k', s' | J_\mu^{(t)} | k, s \rangle = -\frac{\sqrt{2}G_F \mathcal{A}}{e} \pi_T \bar{u}(k') \gamma_\mu \mathcal{L}u(k). \quad (3.76)$$

En esta última ecuación hemos tomado ventaja del hecho de que la parte simétrica del tensor $\mathcal{T}_{\lambda\rho}$ dado en (3.44), es proporcional a $\Pi_{\lambda\rho}$. Haciendo uso de la relación de dispersión (3.57) escribimos finalmente:

$$\langle k', s' | J_\mu^{(t)} | k, s \rangle = -q^2 \mathcal{A} \left(\frac{\sqrt{2}G_F}{e} \right) \bar{u}(k') \gamma_\mu \mathcal{L}u(k). \quad (3.77)$$

Esta ecuación implica que los neutrinos interactúan con el campo electromagnético como si tuviesen un radio de carga, cuyo valor, es independiente de las propiedades térmicas del medio dado por

$$\langle r_{\nu_e}^2 \rangle = \frac{3G_F}{\sqrt{2}\pi\alpha} \mathcal{A} \sim \mathcal{A} (4,2 \times 10^{-31} \text{ cm}^2) \quad (3.78)$$

Es interesante notar que este valor es cien veces mayor al predicho en el caso del vacío. Por tanto, resulta razonable suponer que en procesos electromagnéticos que involucren a los neutrinos, los efectos inducidos por el medio serán, por mucho, superiores a los que tengan lugar en el vacío.

Notemos que, como se acotó arriba, en el régimen *duro* del plasma, definido por la condición $Q \gg \omega_p$, π_T es prácticamente constante. Por tanto, en este caso la ecuación anterior se reduce a

$$\langle p', s' | j_\mu^{(t)} | p, s \rangle = Q_\nu \bar{u}(k') \gamma_\mu \mathcal{L}u(k). \quad (3.79)$$

Esto significa que, en el límite duro, los neutrinos se acoplan a los fotones como si tuviesen una carga dada por

$$Q_\nu = \frac{G_F \mathcal{A}}{2\sqrt{2}\pi^2\alpha} m_t^2 e. \quad (3.80)$$

Como puede apreciarse, esta carga, en general, depende de las condiciones específicas del gas. Sin embargo, para un gas clásico la expresión es muy simple: $m_i^2 = \omega_p^2$; en el caso del polypropileno $\omega_p = 20$ eV, por tanto, en un medio modelado por un gas clásico esta *milicarga* tendría un valor absoluto de $Q_\nu = 7,1 \times 10^{-20} e$.

Por otro lado, con independencia de la discusión previa, podríamos determinar la carga efectiva de los neutrinos \tilde{Q}_ν tomando el límite estático de

$$\tilde{Q}_\nu \langle p' | p \rangle = \int d^3x \langle p' | \rho(x) | p \rangle, \quad (3.81)$$

en donde $\rho(x)$ es la densidad de carga efectiva, y por conveniencia, hemos tomado estados iniciales y finales con la misma energía. La ecuación anterior nos permite escribir

$$\tilde{Q}_\nu = \frac{1}{2E} \langle p' | \rho(0) | p \rangle. \quad (3.82)$$

Puesto que $\langle p' | \rho(0) | p \rangle = \bar{u}(p') \Gamma_0(p', p) u(p)$, tenemos

$$\tilde{Q}_\nu = \lim_{\mathcal{Q} \rightarrow 0} \frac{1}{2E} \bar{u}(p') \Gamma_0(0, \mathcal{Q}) u(p). \quad (3.83)$$

Reescribiendo el vértice electromagnético de los neutrinos como

$$\Gamma_\lambda(p', p) = -\frac{\sqrt{2}G_F \mathcal{A}}{e} (\pi_T R_{\lambda\rho} + \pi_L Q_{\lambda\rho} + \pi_5 P_{\lambda\rho}) \mathbb{L}\gamma^\rho \quad (3.84)$$

donde introducimos π_5 que explícitamente escribimos como

$$\pi_5 = 8\pi\alpha \frac{q^2}{\mathcal{Q}} b \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (f_- - f_+) \frac{(p \cdot q)\omega - q^2 E}{(p \cdot q)^2 - (q^2/2)^2},$$

tenemos que para los neutrinos izquierdos

$$\tilde{Q}_\nu = -\frac{\sqrt{2}G_F \mathcal{A}}{e} \pi_L. \quad (3.85)$$

Para obtener este resultado, tomamos en cuenta que para $q = (0, \mathcal{Q})$, se tiene $R_{0\rho} = 0$ y $P_{00} = P_{0i} = P_{i0} = 0$. Finalmente, usando el hecho de que $\pi_L(0, \mathcal{Q} \rightarrow 0) = R_D^{-2}$, donde R_D es el radio de apantallamiento de Debye, llegamos a

$$\tilde{Q}_\nu = -\frac{G_F \mathcal{A}}{2\sqrt{2}\pi^2 \alpha R_D^2} e. \quad (3.86)$$

Este resultado ha sido derivado usando distintos enfoques en [57], [51]. Notemos, al igual que en (3.80), sólo los neutrinos del electrón adquieren una

carga efectiva. También es claro que \tilde{Q} se anula en ausencia de materia, puesto que el vacío puede considerarse como un medio con un radio de Debye infinito. Sin embargo, es evidente el hecho de que $\tilde{Q}_\nu \neq Q_\nu$. Por un lado, observamos que la carga efectiva derivada del límite estático no se acopla a los fotones transversales; en efecto, en el límite estático $R_{\mu\nu} = 0$. Por el otro, los plasmones, dada su relación de dispersión, no pueden acoplarse a los neutrinos mediante la carga dada en (3.80). Si bien las consecuencias físicas de estas diferencias deben ser estudiadas con mayor detenimiento, desde un punto de vista práctico, en los cálculos de procesos electromagnéticos en los cuales participen los neutrinos, las expresiones involucradas pueden simplificarse notablemente usando las ecuaciones (3.80) y (3.86).

Capítulo 4

Radiación de transición de los neutrinos

4.1. Introducción

Como se ha visto en el capítulo anterior, el estudio de las propiedades electromagnéticas de los neutrinos ha sido uno de los temas que por mucho tiempo ha suscitado un gran interés en la física de altas energías. Aunado a la posible importancia en sistemas astrofísicos, se agrega el interés por la búsqueda de *nueva física*.

En la actualidad la evidencia es concluyente: los neutrinos son partículas masivas. Ello da lugar a una fenomenología más rica que la del ME. La estructura del vértice electromagnético del neutrino resulta de inicio más complicada con el añadido de un acoplamiento vía momento magnético, el cual, está ausente en el ME. En vista de que la mayoría de los modelos teóricos para dotar de masa a los neutrinos contemplan una mezcla de sabores, es plausible imaginar el decaimiento $\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'} + \gamma$, donde ν_α y $\nu_{\alpha'}$ son neutrinos de distintos sabores; la posibilidad de que dicho proceso tenga relevancia cosmológica ha sido sugerida en varias ocasiones.

Es bien conocido el hecho de que una gran cantidad de neutrinos se producen en medios con temperaturas y densidades elevadas. La interacción de los neutrinos con los fermiones cargados presentes en el medio modifica dos propiedades fundamentales de los neutrinos: el acoplamiento del neutrino al campo electromagnético y su relación de dispersión [68, 21]. La importancia en la evolución estelar del decaimiento de los fotones y plasmones en un par neutrino – antineutrino ha sido reconocida como el principal mecanismo de pérdidas de energía para la estrella. Así mismo, a diferencia del vacío puede

tener lugar la absorción y emisión Cherenkov. En un medio uniforme, el proceso radiativo

$$\nu(p) \rightarrow \nu(p') + \gamma(k) \quad (4.1)$$

está cinemáticamente permitido si $n > 1$ y $v > 1/n$, donde n es el índice de refracción del medio y v la velocidad del neutrino. Existe otro importante proceso que puede ocurrir aun y cuando las condición enunciada arriba no se satisfaga: la RT. El fenómeno puede producirlo también una partícula neutra con momento dipolar magnético ó eléctrico. La TR de los neutrinos originada por un momento dipolar (magnético, eléctrico o toroidal) ha sido estudiada por diversos autores [65, 64, 15] e incluso ha sido propuesta por Sakuda [64] como una técnica para medir el momento magnético de los neutrinos.

Como ha sido sugerido desde hace varios años [22], los neutrinos emiten RT al atravesar la interfase entre dos medios debido a su interacción efectiva con la materia[19]. Este proceso no ha recibido la atención debida, aún y cuando es una predicción novedosa del ME que no precisa de propiedades hipotéticas e interacciones más alla del ME. Por consiguiente, debe ocurrir y ser caracterizado de manera apropiada a fin de poder distinguirla de efectos similares concebidos en la búsqueda de nueva física. En este capítulo presentamos el cálculo de la RT de los neutrinos. En la primera sección usaremos el formalismo clásico del primer capítulo. El cálculo cuántico del fenómeno, usando la teoría térmica de los campos, se discutirá en la segunda sección. Como se mostrará, el efecto bajo consideración puede ser comparable, e incluso mayor, al que produciría un momento dipolar, o toroidal, anómalos.

Por último, en vista de que las propiedades de los neutrinos son muy diferentes si el neutrino es una partícula de Dirac o de Majorana, el estudio de las propiedades electromagnéticas bien podría ayudar a esclarecer la naturaleza del neutrino.

4.2. Cálculo clásico

En el tercer capítulo hemos demostrado que en un plasma QED los neutrinos se acoplan a los modos transversales del campo electromagnético mediante la carga efectiva

$$Q_\nu = e \frac{G_F \mathcal{A}}{(8\pi^2)^{1/2} \alpha} m_T^2, \quad (4.2)$$

en donde, m_T es la masa efectiva de los fotones del medio. Recordemos que en el ME \mathcal{A} es dada por

$$\mathcal{A} = \begin{cases} 2 \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} & \text{for } \nu_e, \\ 2 \sin^2 \theta_W - \frac{1}{2} & \text{for } \nu_\mu, \nu_\tau. \end{cases} \quad (4.3)$$

Puesto que en general m_T^2 es proporcional a la densidad electrónica del medio, la corriente electromagnética del neutrino se desvanecerá al pasar del plasma al vacío, lo que originará RT.

Por otro lado, la carga inducida es para el ν_e es distinta a la de los neutrinos de las otras familias. Ello ocurre porque los neutrinos del electrón interactúan con las partículas del medio vía las corrientes neutra y la cargada mientras que, ν_μ y ν_τ solo lo hacen a través de la corriente neutra. En consecuencia, si originalmente se tiene un estado con mezcla de sabores, al ocurrir las oscilaciones, durante su propagación en el medio, la carga inducida también debe oscilar. Tomando $\sin^2 \theta_W = 0,23$, nos percatamos de que durante una oscilación la carga inducida se diluye de su máximo valor absoluto (para ν_e) a casi cero (para $\nu_{\mu,\tau}$), si el cambio ocurre con suficiente rapidez, este podría ser un mecanismo de radiación de los neutrinos incluso mientras se propaga en un medio uniforme.

A continuación haremos un análisis cuantitativo de la RT de los neutrinos usando el formalismo que se presentó en el segundo capítulo. Notemos que, en esta sección tomaremos como distinta de cero la masa de los neutrinos. En contraste, el tratamiento cuántico de la RT que usamos en la siguiente sección supone neutrinos sin masa. Ello constituye una aproximación razonable puesto que la magnitud de los efectos que se desprecian son proporcionales a la masa de los neutrinos, la cual, por los indicios experimentales actuales es pequeña. Consideremos la situación en que un haz de neutrinos pasa del vacío a un plasma. La corriente efectiva será

$$\mathcal{J}_z = \frac{Q_{\nu_e}}{(2\pi)^3} (1 - h(z)) e^{i(\omega/v)z}, \quad (4.4)$$

que debemos insertar en (2.41). Como antes, $h(z)$ es una función que describe el perfil de cambio de la permitividad eléctrica; y pasa continuamente de la unidad a cero en una región de ancho ς centrada en el origen. Aquí la carga efectiva del neutrino aparece dado que el neutrino adquiere una carga al ingresar en el medio. Obtener la aproximación de orden más bajo en $\Delta\epsilon$ implica resolver (2.41) para el espacio homogéneo, es decir $\partial\epsilon/\partial z = 0$. Usando la fórmula (A.13), es fácil hallar la solución, que escribimos a

continuación

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(z) = & \frac{4\pi i Q_{\nu_e} \kappa^2}{\omega (\omega^2/v^2 - k_{1z}^2)} (1 - h(z)) e^{i(\omega/v)z} h(z) \\ & - \frac{e^{ik_{1z}z} \ell_-}{2k_{1z}} \int_{-\infty}^z dz' \frac{dh}{dz'} \exp \left[i \left(\frac{\omega}{v} - k_{1z} \right) z' \right] \\ & + \frac{e^{-ik_{1z}z} \ell_+}{2k_{1z}} \int_{-\infty}^z dz' \frac{dh}{dz'} \exp \left[i \left(\frac{\omega}{v} + k_{1z} \right) z' \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

El primer término de esta ecuación es sencillo de interpretar puesto que describe el encendido suave del campo electromagnético que origina la carga efectiva de los neutrinos del electrón, conforme esta crece desde cero (carga efectiva en el vacío) hasta Q_{ν_e} . Acompañando a este término aparecen dos expresiones que describen ondas libres, una de ellas se propaga hacia la izquierda y la segunda en la dirección opuesta. Notemos que, para una partícula ultra relativista (i.e., $\gamma \gg 1$), la emisión en la dirección del movimiento de la partícula está fuertemente concentrada hacia el frente, esto se debe a la presencia de $\ell_-^{-1} = (\omega/v - k_{1z})$ en el denominador.

La condición de que la fase en el integrando de la expresión anterior varíe lentamente dentro de la región en la que cambia la carga efectiva, es necesaria para que exista la radiación; de lo contrario las oscilaciones del integrando destruirían la coherencia y la radiación no tendría lugar. Consideraciones por completo análogas a las que hicimos en la sección (2.5), nos permiten concluir que, para este caso, se tendría una emisión significativa si (veáse (2.70))

$$\frac{\varsigma \omega_p}{\gamma c} \lesssim 1. \quad (4.6)$$

Dado que, el campo de radiación es proporcional a la carga efectiva de los neutrinos, resulta razonable pensar que, conforme la densidad de electrones se incrementa ocurre lo mismo con la intensidad de la radiación. Sin embargo, ello no resulta cierto pues el incremento en la densidad de electrones en el medio trae como consecuencia un acortamiento de la longitud de formación, circunstancia que limita de manera drástica el tamaño de la inhomogeneidad en la que es posible una emisión apreciable. Tomemos como ejemplo, un plasma estelar, para el cual, $\omega_p \sim 20 \text{ KeV}$ ($\omega_p/c \sim 10^{11} \text{ m}^{-1}$). Si consideramos neutrinos con una energía $E_\nu = 10 \text{ MeV}$, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\varsigma \lesssim 10^{-4} \text{ m} \left(\frac{1 \text{ eV}}{m_\nu} \right). \quad (4.7)$$

Como se ve, neutrinos con energías típicas de un ambiente estelar podrían emitir RT con intensidad significativa si el tamaño de la inhomogeneidad fuese cercana a 1 mm. Si la longitud de la zona en que cambia la permitividad resulta mayor a este valor, se requieren neutrinos con energía mayor a 10 MeV. Por ejemplo, si $\zeta \simeq 10^3$ m sólo partículas con una energía del orden de $E_\nu \simeq 10^{14}$ eV ($m_\nu/1$ eV) producirían RT de intensidad significativa. Consideramos ahora, la propagación de neutrinos en la atmósfera, para el aire tenemos $\omega_p/c \sim 10^6$ m⁻¹ y podemos tomar $E_\nu = 1$ MeV para neutrinos producidos en un reactor nuclear; por lo cual

$$\zeta \lesssim 1 \text{ m} \left(\frac{1 \text{ eV}}{m_\nu} \right). \quad (4.8)$$

Aquí las condiciones son menos restrictivas y como se ve, para una RT de intensidad significativa, el tamaño de la inhomogeneidad puede llegar a ser tan grande como un metro; sin embargo, la intensidad de la radiación, al ser proporcional al cuadrado de Q_ν , resultaría considerablemente atenuada.

Por otro lado, la energía de los neutrinos que se generan en la atmósfera puede ser $E_\nu > 1$ GeV por lo que, en el caso presente, una inhomogeneidad en la permitividad del orden de un kilómetro puede considerarse abrupta. Por esta razón, en lo que sigue, modelaremos el cambio en la permitividad eléctrica mediante un función escalón. Al orden más bajo en $\Delta\epsilon$ encontramos que el campo de radiación es

$$\mathcal{E}_z^R(\kappa, \omega) = \frac{iQ_\nu \kappa^2 \ell_- \mathcal{I}_+(\chi)}{(2\pi)^2 \omega k_{1z}} e^{ik_{2z}z}, \quad (4.9)$$

en donde solamente hemos considerado la radiación que se escapa hacia el frente.

Usando ahora la fórmula (2.51), tenemos

$$I = \frac{Q_\nu^2}{2\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \beta\epsilon \cos \theta)^2}. \quad (4.10)$$

Este es un patrón típico de *Bremsstrahlung*, con la particularidad de que la emisión sólo ocurre hacia adelante. Efectuando la integral angular llegamos al resultado

$$I = \frac{2Q_\nu^2}{\pi c} \int_0^E [\log \gamma - \beta(2 + \beta) + \log(2)] d\omega. \quad (4.11)$$

El límite superior natural para la integral en la expresión anterior es dado por energía de la partícula, por tanto

$$I \simeq \frac{2Q_\nu^2}{\pi c} E_\nu \log \left(\frac{E_\nu}{m_\nu} \right). \quad (4.12)$$

4.3. Cálculo cuántico

En esta sección presentamos el cálculo de la RT originada por un haz de neutrinos sin masa que interactúa con los fotones (modos transversales del campo) y que emerge del plasma al vacío. Aquí consideramos los casos de un material que puede encontrarse en un dispositivo experimental, el polipropileno, y demostramos que los efectos inducidos por la presencia de electrones es de tres a cuatro órdenes de magnitud más intensa que la RT de los neutrinos debida a su momento dipolar. Esto resulta plausible puesto que los efectos electromagnéticos producidos por momentos de orden superior, por ejemplo el dipolo magnético (que es proporcional a la masa), resultan ser de mucha menor intensidad que aquellos que se originan por efectos monopolares, como el acoplamiento efectivo del neutrino al campo electromagnético. También consideramos el caso de un medio estelar caracterizado por una frecuencia de plasma de 5kV.

4.3.1. El campo electromagnético.

En esta sección consideramos la cuantización del campo en el medio un esquema fenomenológico en oposición a un enfoque microscópico. La presencia de un medio polarizable altera considerablemente las propiedades cuánticas de los campos. A fin de tratar apropiadamente con estas modificaciones han sido desarrolladas diversas generalizaciones de los procedimientos de las técnicas usuales (cuantización del campo electromagnético).

A primer orden en la corriente electromagnética del neutrino la matriz de transición está dada por la fórmula:

$$S_{fi} = \int dx^4 A_\mu^*(x) \langle p', s' | j^\mu(x) | p, s \rangle, \quad (4.13)$$

en donde s, s' denotan los estados iniciales y finales de espín. La solución general de la ecuación de onda en un medio homogéneo es una superposición de ondas planas que cumplen cierta relación de dispersión. La situación es más complicada si consideramos el caso de dos medios semi infinitos. A fin de satisfacer las ecuaciones de Maxwell y las condiciones en la frontera para los campos eléctrico y magnético, la solución básica se compone de tres ondas: una onda incidente, otra reflejada y por ultimo la onda transmitida. La onda transmitida puede desplazarse hacia el lado positivo del eje z o en sentido opuesto; en el primer caso diremos que tenemos una solución en ondas salientes y en el otro una solución de ondas entrantes. Puesto que estamos

interesados en calcular la potencia radiada en la misma dirección del movimiento de la partícula, el potencial electromagnético A^μ puede escribirse como:

$$A_\mu(x) = \theta(z) (\epsilon_\mu \exp(ik' \cdot x) + B\epsilon'_\mu \exp(-ik' \cdot x)) + \theta(-z)C\epsilon''_\mu \exp(ik \cdot x), \quad (4.14)$$

con k y k' el cuadrimento de la onda electromagnética en el medio y el vacío, respectivamente. Los coeficientes B y C se determinan de tal modo que se satisfagan las condiciones a la frontera usuales. El resultado de este cálculo constituye las bien conocidas fórmulas de Fresnel. Adicionalmente, si estamos interesados solo en los fotones que satisfagan $\omega^2 \gg \omega_p^2$, en donde ω_p es la frecuencia del plasma, entonces $B \approx 0$ y $C \approx 1/\sqrt{n}$.

En este capítulo se presenta un cálculo de la RT realizado mediante un procedimiento similar a trabajos previos para partículas cargadas [35].

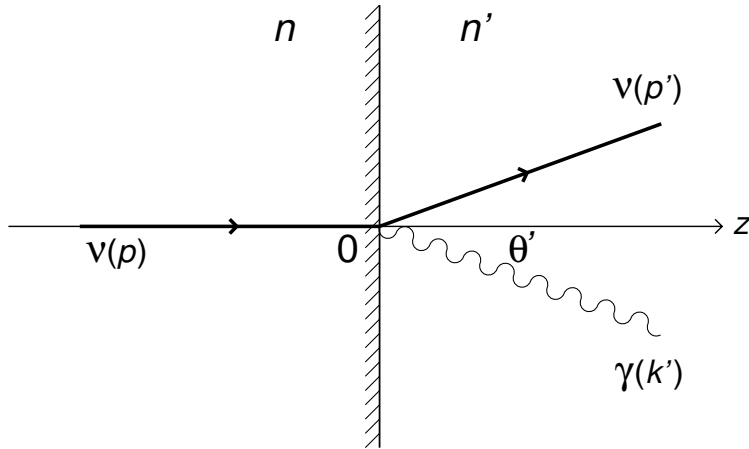


Figura 4.1: Radiación de transición en una interfase entre un medio con índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon}$ y el vacío ($n' = 1$).

Consideremos ahora un haz de neutrinos que cruzan la interfase entre un medio material y el vacío, como se ilustra en la figura 4.1. Para concretar, restringiremos nuestra atención al caso en el que los neutrinos pasan del medio al vacío. Sin embargo un cálculo similar puede hacerse en la situación inversa o en el caso de que el haz de neutrinos atraviese la frontera entre dos medios. Escogeremos el sistema de coordenadas de tal modo que, en el sistema de referencia anclado al medio, la interfase coincide con el plano $z = 0$ y el medio ocupa la región $z < 0$. En este sistema de referencia, $p^\mu = (\mathcal{E}, \boldsymbol{\wp})$ y $p'^\mu = (\mathcal{E}', \boldsymbol{\wp}')$ son los componentes de los cuadrimentos iniciales y finales del neutrino. Supongamos adicionalmente que el haz de

neutrinos se mueve a lo largo del eje z , perpendicularmente a la interfase, esto es, $\wp = \wp \hat{\mathbf{z}}$, con $\wp = |\wp|$. El cuadrimomento del fotón emitido es $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{\kappa})$ en el medio y $k'^\mu = (\omega', \boldsymbol{\kappa}')$ en el vacío, con $\omega = \omega'$. Sin embargo, $\boldsymbol{\kappa} \neq \boldsymbol{\kappa}'$ debido a que el momento no se conserva a lo largo de la dirección de movimiento de los neutrinos. La influencia del medio en la relación entre la energía y el momento de los neutrinos no juega un rol preponderante en nuestro análisis y tomaremos, por simplicidad, $p^2 = p'^2 = 0$. Por el contrario, en general no es apropiado desestimar los efectos inducidos por el medio en la relación de dispersión de los fotones $\omega(\boldsymbol{\kappa})$, mismos que, pueden determinarse a partir de las contribuciones al tensor de polarización $\pi_{\mu\nu}$. Para comodidad del lector, repetimos aquí, algunas expresiones que han sido presentadas en el capítulo anterior. En un medio isotrópico [70, 55]

$$\pi_{\mu\nu}(k) = \pi_T R_{\mu\nu} + \pi_L Q_{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

donde

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - Q_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

$$Q_{\mu\nu} = -\frac{k^2}{\kappa^2} \left(u_\mu - \frac{\omega}{k^2} k_\mu \right) \left(u_\nu - \frac{\omega}{k^2} k_\nu \right), \quad (4.17)$$

son tensores ortogonales entre sí ($R_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = 0$) que satisfacen las relaciones $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 2$ y $Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = 1$. Aquí, $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ es la quadri velocidad del medio, en tanto que los coeficientes $\pi_{T,L}(\omega, \boldsymbol{\kappa})$ son funciones escalares de la cantidades invariantes $\omega = k \cdot u$ y $\kappa = \sqrt{\omega^2 - k^2}$, con $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$. Al escribir (4.15), como se mencionó en el capítulo anterior, omitimos un término proporcional al tensor $P_{\mu\nu} = i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha u^\beta / \kappa$. Puesto que, en un medio en donde se conserva la paridad, este término solo puede surgir mediante las contribuciones a la auto energía del fotón provenientes de las interacciones débiles con las partículas presentes en el medio y, consecuentemente, debe ser pequeño [56].

Dado que los modos longitudinales (plasmones) no se propagan en el vacío, solo los modos transversales (fotones) contribuyen al proceso bajo estudio. La frecuencia de los fotones en el medio está determinada por la relación de dispersión apropiada que ha sido dada en el capítulo 3

$$\omega^2(\boldsymbol{\kappa}) - \kappa^2 = \pi_T(\omega(\boldsymbol{\kappa}), \boldsymbol{\kappa}). \quad (4.18)$$

Es práctica común expresar $\omega(\boldsymbol{\kappa})$ usando el índice de refracción que se define como $n \equiv \kappa / \omega(\boldsymbol{\kappa})$. La cantidad que nos interesa es la energía radiada \mathcal{S} en la

dirección del movimiento de la partícula incidente, es decir al vacío. Esta se calcula a partir de la probabilidad de transición \mathcal{W} para el proceso en (4.1)

$$d\mathcal{W} = \frac{V d^3 \varphi' V d^3 \kappa'}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} |S_{fi}|^2, \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= \frac{\pi^3}{vV^2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{\mathcal{E}\mathcal{E}'\omega} \delta(\varphi_x - \varphi'_x - \kappa_x) \delta(\varphi_y - \varphi'_y - \kappa_y) \\ &\times \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}' - \omega) \left| \int_{-\ell/2}^0 dz \exp[i(\varphi - \varphi'_z - \kappa_z)z] \right|^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aquí, $V = \ell^3$ denota el volumen de la región de transición y $v = \ell/\tau$ es la velocidad del neutrino expresada en términos del intervalo de tiempo τ en el que el proceso transcurre. Al escribir (4.20) hemos usado el hecho de que, para la interacción neutrino-fotón en el medio, el elemento de matriz S_{fi} se anula fuera del medio ($z > 0$).

El fotón emitido es descrito por una onda monocromática con un vector de polarización (transverso) $\epsilon_\mu(k, \lambda) = (0, \boldsymbol{\epsilon}(k, \lambda))$ ($\lambda = 1, 2$), que satisface $\boldsymbol{\epsilon}(k, \lambda) \cdot k = \boldsymbol{\epsilon}(k, \lambda) \cdot u = 0$ y $\boldsymbol{\epsilon}(k, \lambda) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$. De esta forma, para la amplitud $\nu\nu\gamma$ tenemos

$$\mathcal{M} = -i\sqrt{\mathcal{N}} \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) \epsilon_\mu(k, \lambda), \quad (4.21)$$

en donde $u(p)$ representa un espinor de Dirac con momento p^μ . El factor $\sqrt{\mathcal{N}}$ tiene que ser incluido debido a que la normalización de la función de onda del fotón en el medio difiere de la del vacío [73].

El vértice electromagnético Γ^μ se refiere a las contribuciones del medio y depende no solamente de los momentos iniciales y finales del neutrino sino también de la cuadrivelocidad u^μ del medio. La expresión general del vértice para un medio constituido por un gas de electrones fue derivada, al orden más bajo en la constante de Fermi G_F , en el capítulo anterior. Sin embargo, el mismo resultado puede encontrarse en la referencias [68] y [69]. En esta primera aproximación, podemos ignorar las contribuciones de los protones y neutrones, presentes en el medio, al vértice electromagnético de los neutrinos. Si bien en la mayoría de las situaciones la contribución de los electrones al vértice es dominante, los efectos de los nucleones deben ser incorporados en un tratamiento más general del problema [20]. Usando los resultados presentados en el capítulo anterior

$$\Gamma_\mu = -\sqrt{2} \frac{G_F}{e} (\mathcal{A} \pi_{\mu\nu} + \mathcal{B} \pi_{\mu\nu}^A) \gamma^\nu L, \quad (4.22)$$

donde $L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ y e es la carga eléctrica del electrón. Recordemos que en el ME $\mathcal{A} = 2 \sin^2 \theta_W \pm \frac{1}{2}$ and $\mathcal{B} = \mp \frac{1}{2}$, en donde el signo de arriba corresponde ν_e y el de abajo a $\nu_{\mu, \tau}$. La fórmula para $\pi_{\mu\nu}$ es la dada en en (4.15) y puede verificarse de inmediato que $k^\mu \pi_{\mu\nu} = 0$, lo que a su vez implica $k^\mu \Gamma_\mu = 0$, como es requerido por la invariancia de norma.

Efectuando las integrales sobre $d^3 \wp'$ la energía radiada en el vacío resulta ser

$$\frac{d^2 \mathcal{S}}{d\omega d\theta'} = \omega \frac{d^2 \mathcal{W}}{d\omega d\theta'} = \frac{1}{32\pi^2 v} \frac{\omega^2 |\overline{\mathcal{M}}|^2 \sin \theta'}{\mathcal{E} \wp'_z (\kappa_z + \wp'_z - \wp_z)^2}, \quad (4.23)$$

con $\kappa_z = \kappa \cos \theta$ y

$$\wp'_z = \sqrt{\wp^2 - 2\mathcal{E}\omega + \omega^2 \cos^2 \theta'}. \quad (4.24)$$

Aquí, θ y θ' son los ángulos que el momento del fotón forma con el eje z dentro y fuera del medio, respectivamente. Estos ángulos se relacionan por la ley de Snell $\sin \theta' = n \sin \theta$ ($n' = 1$), como resultado de la conservación del momento transversal del fotón ($\kappa_{x,y} = \kappa'_{x,y}$). Si el índice de refracción del medio n es cercano a uno la distinción entre θ y θ' puede parecer artificial dado que numéricamente son muy cercanos. Sin embargo, esta distinción debe mantenerse a fin de evitar singularidades espurias en la integral angular. Dedse el punto de vista físico esto tiene estrecha relación con el hecho de que el fotón emitido al vacío nunca puede ser emitido paralelamente a la superficie que separa ambos medios.

La cantidad $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ se calcula promediando sobre los estados de espín iniciales y sumando sobre los estados finales de espín de los neutrinos y sobre las dos polarizaciones de los fotones. Las funciones de polarización transversal y axial π_T y π_A se evalúan en la relación de dispersión del fotón en el medio¹. Estas funciones están dadas por integrales sobre los momentos de los electrones y positrones presentes en el medio. En el trabajo de Braaten y Segel [14], se presentan de manera exhaustiva expresiones analíticas para ellas. A partir de estos resultados, en el capítulo anterior hemos mostrado que $\pi_s/\pi_T \lesssim \sqrt{\alpha/3\pi}$ en los límites clásico, degenerado y relativista. En consecuencia, descartamos las contribuciones a $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ provenientes de la parte axial en Γ_μ . Lo que nos lleva a

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \cong \mathcal{N} \frac{G_F^2}{\pi \alpha} \mathcal{A}^2 |\pi_T|^2 (\mathcal{E} \mathcal{E}' - \wp \wp'_z \cos^2 \theta + \kappa \wp \cos \theta \sin^2 \theta), \quad (4.25)$$

¹Aunque el momento en el proceso completo no se conserva, notemos que en el vértice de la interacción este es conservado. Cuando los fotones se emiten, parte del momento es absorbido por el medio.

en donde hemos tomado en consideración el hecho de que $Q^{\mu\rho}\epsilon_\mu(k, \lambda) = 0$ y hemos usado la relación $\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu(k, \lambda)\epsilon_\nu(k, \lambda) = -R_{\mu\nu}$ que es válida para los vectores de polarización del medio.

El espectro de energía se determina sustituyendo (4.25) en (4.23) e integrando sobre la variable angular. Observemos que el límite superior de la integral angular depende de la energía. Este límite se obtiene al exigir que la expresión bajo el radical en 4.24 sea mayor a cero. Resulta más cómodo integrar sobre el ángulo que forma el fotón con el eje z en el medio. Por consiguiente, usando $d\theta'/d\theta = n \cos \theta / \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}$, para un neutrino relativista ($\mathcal{E} \cong \wp$) encontramos que

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\omega} = \frac{\mathcal{N}}{v} \frac{G_F^2}{32\pi^3\alpha} \omega^2 \mathcal{A}^2 |\pi_T|^2 \mathcal{F}(\omega), \quad (4.26)$$

donde $\alpha = e^2/4\pi$ y

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_0^1 \frac{d\zeta \zeta}{\sqrt{1 - n^2(1 - \zeta^2)}} \left[\frac{\wp - \omega - \wp'_z \zeta^2 + \kappa \zeta(1 - \zeta^2)}{\wp'_z(\wp'_z + \kappa \zeta - \wp)^2} \right], \quad (4.27)$$

con $\zeta = \cos \theta$. Al escribir (4.27) hemos tomado en cuenta la ley de Snell y que, en el vacío, $\kappa' = \omega$. Usando las expresiones explícitas para \mathcal{N} como función de ω [14] es posible demostrar que este factor permanece por debajo de la unidad y muy cercano a ella, por simplicidad en los cálculos numéricos hemos tomado $\mathcal{N} = 1$.

Esta última integral no puede ser expresada en forma cerrada, sin embargo es posible obtener una buena expresión analítica aproximada para $\mathcal{F}(\omega)$ tomando $\sqrt{1 - n^2(1 - \zeta^2)}$ igual a uno. La validez de esta aproximación se justifica si observamos que para ángulos pequeños y n cercano a uno, el denominador del integrando toma valores extremadamente reducidos, por tanto el factor entre corchetes exhibe un máximo muy pronunciado que disminuye rápidamente conforme el ángulo crece. En otras palabras, las contribuciones a la integral provienen principalmente de la emisión bajo ángulos pequeños. Por tanto, podemos evaluar el factor $\sqrt{1 - n^2(1 - \zeta^2)}$ en $\zeta = 1$ en todo el rango de integración, sin incurrir en un error muy grande. El resultado puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) \cong & \frac{1}{2\kappa^2} \left[\left(1 - \frac{\omega}{\wp}\right) \mathcal{I}(s) + \frac{\wp^2}{2\kappa^2} \left(\frac{\kappa^2}{\wp^2} - \frac{1}{2} + \frac{\varrho}{2} \right) \mathcal{J}(s) \right. \\ & \left. + \frac{\wp^2}{2\kappa^2} \left(\mathcal{L}(s) - \frac{s^2}{4} + \varrho \ln s + \frac{\varrho^2}{4s^2} \right) \right]_{s_0}^{s_1}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

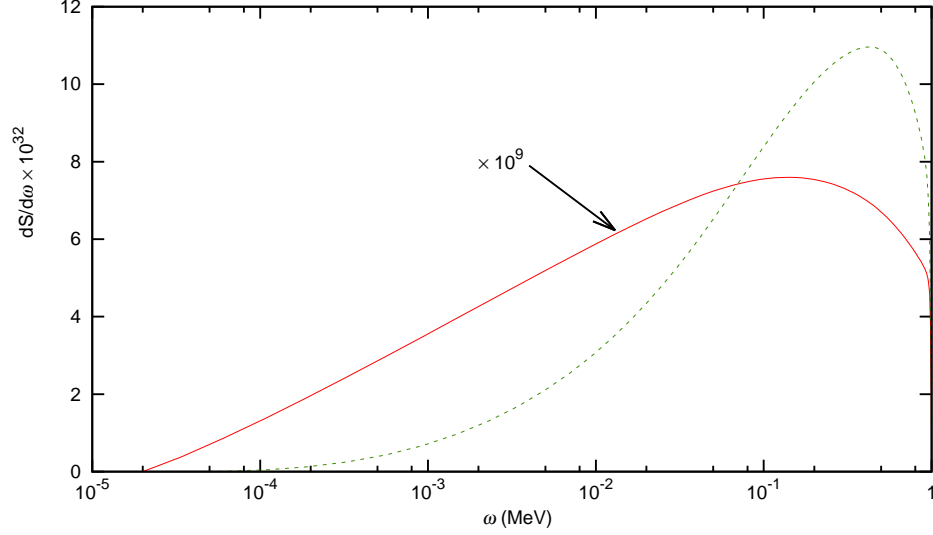


Figura 4.2: Espectro de energía para la RT debida al acoplamiento neutrino-fotón en un medio. El neutrino incide sobre la interfase con una energía $\mathcal{E} = 1\text{MeV}$. Las líneas roja y verde corresponden a un gas clásico de electrones $\omega_p = 20\text{eV}$ y a un gas degenerado con $\omega_p = 5\text{KeV}$, respectivamente.

donde $\varrho = [(\wp - \omega)^2 - \kappa^2]/\wp^2$, $s_1 = (\wp - \omega + \kappa)/\wp$, $s_0 = |\varrho|^{1/2}$, y las funciones $\mathcal{I}(s)$, $\mathcal{J}(s)$, y $\mathcal{L}(s)$ están dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}(s) &= \frac{1 - \varrho}{1 - s} + \frac{\varrho}{s} + 2\varrho \ln(1 - s) - 2\varrho \ln s, \\
 \mathcal{J}(s) &= \frac{(1 - \varrho)^2}{1 - s} - \varrho^2 \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{2s^2} \right) \\
 &\quad + (3\varrho + 1)(1 - \varrho) \ln(1 - s) + (3\varrho - 2)\varrho \ln s, \\
 \mathcal{L}(s) &= -s - \varrho^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2} \right) - (1 - \varrho)^2 \ln(1 - s) \\
 &\quad + (\varrho - 2)\varrho \ln s.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Es importante notar que en la fórmula (4.26) con $\mathcal{F}(\omega)$ dada por (4.28) ha sido derivada sin haber formulado ninguna suposición acerca del medio. Por consiguiente, podemos aplicarla en el cálculo de la energía emitida por un neutrino relativista que atraviesa la interfase entre el vacío y un gas de electrones de cualquier tipo.

Aún tenemos que expresar el momento del fotón κ en términos de su energía resolviendo (4.18). De acuerdo a los resultados de [14] esto implica

resolver la ecuación trascendental

$$\omega^2 - \kappa^2 = \omega_p^2 \left[1 + \frac{1}{2} G(v_*^2 \kappa^2 / \omega^2) \right], \quad (4.30)$$

donde $0 \leq v_* \leq 1$ es la velocidad “típica” de los electrones en el plasma y la función $G(x)$ definida por

$$G(x) = \frac{3}{x} \left[1 - \frac{2x}{3} - \frac{(1-x)}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right], \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.31)$$

En lugar resolver (4.30) para κ directamente, resulta conveniente calcular el índice de refracción puesto que k y ω se relacionan del siguiente modo $k(\omega) = n\omega$. Reescribimos (4.30) en términos del índice de refracción como

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{1}{2} G(v_*^2 n^2) \right]. \quad (4.32)$$

En el apéndice B, mostramos que dado un valor de ω esta ecuación puede resolverse para n , usando el método de iteraciones. Para cada valor de ω usamos $n^2 = \kappa^2 / \omega^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / (\omega^2 + \frac{1}{5} v_*^2 \omega_p^2)$ como aproximación inicial. Dicho valor corresponde a la primera corrección relativista y puede obtenerse de (4.30) conservando el primer término en la serie potencias de $G(x)$. Con esta primera aproximación el proceso iterativo converge rápidamente para casi todo el rango de frecuencias en el intervalo de integración. La integral se realizó numéricamente sobre el intervalo (ω_p, \wp) que resulta ser el apropiado para calcular la energía emitida al vacío.

4.3.2. Resultados y discusión.

En la figura 4.2 hemos graficado la energía total emitida por un neutrino con energía inicial de 1 MeV al pasar de un plasma al vacío. Se han considerado dos situaciones límite. El medio en el que se propaga inicialmente el neutrino es: (i) un gas clásico de electrones (polypropileno) con $\omega_p = 20$ a temperatura ambiente ($v_* = \sqrt{5T/m_e} \cong 0$) y (ii) un gas degenerado ($v_* = v_F = 0,3$) con $\omega_p = 5 \text{ KeV}^2$. Podemos observar en la figura que la intensidad de la energía radiada y la forma general del espectro dependen en gran medida de las propiedades del medio. En el caso de un gas degenerado, la energía emitida es mucho más intensa y el espectro está desplazado hacia energías más altas que en el caso del límite clásico. Para el gas clásico la

²Para un gas degenerado tenemos $\omega_p = (4\alpha/3\pi)p_F^2 v_F$ y $n_e = p_F^3/3\pi$, donde $v_F = p_F/E_F$ y n_e es la densidad electrónica.

energía radiada en una interfase es $\mathcal{S} \cong 6,6 \times 10^{-35}$ eV, la cual es al menos dos ordenes de magnitud mayor al valor obtenido en el caso de la RT producida por neutrinos con momento toroidal [15]. Es interesante relacionar nuestro resultado con el que se obtiene al considerar la RT originada por neutrinos con momento magnético μ_ν . A partir de la ecuación (13b) de la referencia [64] obtenemos

$$\mu_\nu = 1,5 \times 10^6 \mu_B \sqrt{\frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{E}}}, \quad (4.33)$$

en donde μ_B es el magnetón de Bohr y \mathcal{S}_m denota la energía total emitida. Cuando se evalúa en $\mathcal{S}_m = 6,6 \times 10^{-35}$ eV y $\mathcal{E} = 1$ MeV, es decir en la energía radiada en la RT, por el acoplamiento efectivo al medio, la fórmula de arriba implica $\mu_\nu \cong 1,4 \times 10^{-14} \mu_B$, que excede por varios ordenes de magnitud la predicción del modelo estándar con extensión mínima $\mu_\nu \approx 3 \times 10^{-19} [m_\nu/1\text{eV}]$.

Está claro que la energía que emite un neutrino con momento magnético intrínseco aumenta, y eventualmente supera a la acotada aquí, en la medida en que se tomen valores cercanos al límite experimental de μ_ν . Sin embargo, no debemos perder de vista dos hechos fundamentales: i) tales límites pueden ser muy pobres, tal como los argumentos astrofísicos indican, y ii), el proceso descrito aquí, es real en el sentido de que es una predicción que depende solamente de la física incluida en el ME. Mas aún, $\mu_\nu \sim 10^{-14}$ resulta ser del mismo orden de magnitud de la cota superior que se obtiene al considerar física por encima de la escala del rompimiento de simetría [10]. Finalmente, debemos subrayar que la energía emitida se incrementa enormemente si, en lugar de un gas clásico consideramos un plasma de electrones degenerado similar a los que se encuentran en objetos estelares.

En este punto es conveniente elaborar una estimación numérica a fin de tener una idea de la posibilidad de observar la radiación de transición de los neutrinos. Un detector de RT consiste básicamente en una serie de radiadores en cuyo interior se apilan hojas de material dieléctrico, dichas hojas producen fotones que serán detectados en una cámara de gas. En los cálculos de las referencias [64, 15], los autores consideran un detector de 10 m^2 de área y que consta de diez radiadores y cámaras de xenon. Cada radiador se compone de 10^4 hojas de polypropileno. En nuestro caso, considerando un dispositivo experimental similar y un flujo de $10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ de antineutrinos provenientes de un reactor nuclear, obtenemos

$$W = 2,1 \times 10^{-4} [\mathcal{T}/\text{año}] \text{ eV}, \quad (4.34)$$

siendo W la energía total depositada durante el intervalo de tiempo \mathcal{T} . Este valor tan pequeño de la energía radiada nos obliga a considerar de manera pesimista la observación directa del fenómeno. Sin embargo, la factibilidad de la detección experimental puede incrementarse, por ejemplo, aumentando el número de hojas de material dieléctrico en los radiadores del detector. Por último, notemos que (véanse (4.26) y (4.30)) que la energía radiada depende en la frecuencia de plasma como ω_p^4 , y como hemos indicado previamente se incrementa enormemente si en lugar de un gas clásico de electrones hubiésemos considerado un gas de electrones con mayor densidad, situación común en ambientes estelares.

Capítulo 5

Conclusiones

La investigación de las propiedades de los neutrinos, es uno de los temas que despiertan mayor interés en la física actual. En particular es de gran importancia, la determinación de sus masas, esclarecer su naturaleza (Dirac o Majorana), y precisar sus propiedades electromagnéticas. En este trabajo hemos demostrado que los neutrinos en un medio, debido a la interacción con las partículas cargadas, se acoplan a los fotones mediante un radio de carga. Esta propiedad les permite participar en distintos procesos radiativos, en particular la RT. En los siguientes párrafos elaboramos con detalle las conclusiones.

En el capítulo 2, hemos tratado la RT mediante un método original formulado en el ámbito de la electrodinámica clásica. Este formalismo, perturbativo, está adaptado para lidiar con los problemas de la RT en el caso de fronteras difusas y puede extenderse fácilmente para atacar problemas que involucren situaciones más generales, distintas al caso de una interfase sencilla. Hemos derivado prácticamente todas las propiedades importantes de la RT producida por partículas relativistas y hemos podido resolver con relativa facilidad, problemas de índole muy diversa. En particular, todos los resultados previos que pueden encontrarse en la literatura, se obtienen de nuestras expresiones tomando el límite apropiado de una interfaz abrupta. Estudiamos también, la emisión coherente de RT por un racimo de electrones con microestructura atravesando una frontera difusa, problema que, a nuestro entender, no había podido tratarse de manera directa mediante otros formalismos. Adicionalmente, en nuestro método ponemos de manifiesto, mediante la integral en (2.31), que el campo de radiación se genera como una superposición coherente de ondas en una región cercana a la frontera. Al examinar esta integral, que depende del caso concreto a tratar, hemos

podido determinar las condiciones bajo las cuales la RT puede emitirse en una frontera difusa y sus características, lo que constituye un herramienta muy poderosa en el estudio de la RT que se puede emitir en condiciones naturales. Por lo que resulta promisorio, la aplicación de este formalismo a la RT que se produce en condiciones naturales, en oposición a las observaciones en laboratorio. Como un valor añadido, la discusión y compilación de resultados incluida en la primera parte del capítulo, puede servir como texto introductorio para quien se acerca por primera vez al tema o como referencia para futuros estudios.

En el capítulo 3, revisamos las propiedades electromagnéticas de los neutrinos. Discutimos las particularidades que dichas propiedades exhiben dependiendo de que los neutrinos sean partículas de Majorana o Dirac. Hicimos un breve resumen de los límites empíricos actuales que las observaciones y experimentos de laboratorio imponen a las propiedades electromagnéticas de los neutrinos. Estudiamos el cálculo del vértice electromagnético de los neutrinos para el caso de un plasma de electrones. Demostramos que los neutrinos muon y del tau, poseen un acoplamiento que recibe contribuciones únicamente de la corriente neutra. Por otro lado, el neutrino del electrón se acopla a los fotones de una manera que está determinada principalmente por la corriente cargada. Esto es así, porque la contribución de la corriente neutra puede despreciarse frente a la anterior en los regímenes de densidad y temperatura del gas de electrones correspondientes a los límites clásico, degenerado y relativista. Este vértice efectivo resultante es similar en todo punto, salvo una constante de proporcionalidad, al tensor electromagnético del medio. Por tanto, tomando ventaja de este hecho, concluimos que los neutrinos del electrón se acoplan a los fotones mediante un radio de carga que resulta ser al menos dos órdenes de magnitud superior a las predicciones teóricas del radio de carga del neutrino en el vacío. Esto nos lleva a concluir que los efectos que induce el medio pueden llegar a ser tan intensos que pueden llegar a opacar los fenómenos producidos por cualquiera de las propiedades intrínsecas.

Finalmente, hemos demostrado que, debido a su acoplamiento efectivo con la materia, los neutrinos emiten radiación de transición cuando atraviesan la interfase entre dos medios con propiedades electromagnéticas distintas. Este fenómeno no había sido tomado en consideración previamente y se añade a una variedad de procesos radiativos en los cuales participan los neutrinos. A pesar de que, sobre la base de los cálculos semiclásicos RT de los neutrinos, concluimos que en un medio con densidad electrónica alta, por ejemplo un plasma estelar, las condiciones de emisión de fotones por la RT en una interfase sencilla restringen de manera importante la canti-

dad de neutrinos que podrían emitir RT, debemos tener en consideración que los sistemas naturales difícilmente puede considerarse homogéneos. En ellos, la permitividad, tanto eléctrica como magnética, y/o la densidad de partículas cargadas exhiben inhomogéneas que podrían dar lugar a procesos relacionados con la RT. En lo que respecta a la observación directa de RT debida a los neutrinos en detectores instalados en laboratorios, su observación parece poco probable con las técnicas actuales. A pesar de ello, y en vista de la importancia que tiene una mejor comprensión de los procesos electromagnéticos inducidos por el medio, en particular el papel que juega la RT, consideramos que bien vale la pena repetir nuestro cálculo cuántico, con las generalizaciones apropiadas, tomando en cuenta escenarios mas realistas en los procesos relacionados con la RT. Dado que la naturaleza de los neutrinos, sean fermiones de Majorana o Dirac, está estrechamente relacionada con sus propiedades electromagnéticas de estas partículas, ello debería refelejarse en los distintos procesos radiativos en los cuales participan. Los cálculos presentados en esta tesis son un primer paso hacia una mejor comprensión de este proceso radiativo de los neutrinos y proveen de un marco de referencia para estudios de las posibles implicaciones del fenómeno en ambientes astrofísicos.

Apéndice A

Función de Green

Deseamos encontrar la función de Green para una ecuación del tipo

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + K^2\right) \mathcal{A}(z) = I(z), \quad (\text{A.1})$$

en donde $-L \leq z \leq L$ y K es una constante real. La función de Green a encontrar obedece (A.1) con $I(z) = \delta(z, z')$ y debe satisfacer ciertas condiciones de frontera. A fin de determinar $G(z, z')$ resulta conveniente pasar al espacio recíproco. Si las dimensiones típicas en donde ocurre el proceso son muy grandes podemos suponer que L es prácticamente infinito, y, puesto que estamos tratando con un problema homogéneo la función de Green solo puede depender de $z - z'$ y es dada por

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{K^2 - \alpha^2}. \quad (\text{A.2})$$

Para obtener la función de Green en el espacio de coordenadas debemos efectuar la integral

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\alpha(z-z')}}{\alpha^2 - K^2} d\alpha, \quad (\text{A.3})$$

como es bien sabido, esta integral es ambigua a no ser que especifiquemos la manera de rodear los polos del integrando. En caso de usar el contorno (a) de la figura A.1 obtenemos

$$G(z, z') = \frac{1}{K} \sin K(z - z') \theta(z - z'), \quad (\text{A.4})$$

que es la expresión que usamos para derivar nuestros resultados, mientras que para el contorno (b) tenemos

$$\tilde{G}(z, z') = -\frac{1}{K} \sin K(z - z') \theta(z' - z). \quad (\text{A.5})$$

Consideremos ahora las ecuaciones involucradas en el cálculo del campo \mathcal{B} , en donde aparecen las dos integrales que escribimos a continuación

$$L_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z') e^{i\frac{\omega}{v}z'} e^{-\delta|z'|} dz' \quad (\text{A.6})$$

$$L_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z') e^{i\frac{\omega}{v}z'} e^{-\delta|z'|} h(z') dz', \quad (\text{A.7})$$

con $\delta > 0$. Notése que hemos incluido el factor $\exp(-|z'|)$ a fin de asegurar la convergencia de las integrales. Como es usual, a final de los cálculos haremos tender δ a cero.

Si definimos

$$F(z, z', \alpha) = \frac{1}{i\alpha \left(1 - \frac{K^2}{\alpha^2}\right)} \left[\sin K(z - z') + \frac{K}{i\alpha} \cos K(z - z') \right],$$

y notamos que

$$\frac{d}{dz'} \left(F(z, z', \alpha) e^{i\alpha z'} \right) = \sin K(z - z') e^{i\alpha z'},$$

podemos calcular fácilmente L_1 y L_2 .

Consideremos primero L_1 . Si $z < 0$, tenemos

$$L_1 = \frac{1}{K} F(z, z'; \alpha) e^{i\alpha z'} \Big|_{z'=-\infty}^{z'=z}, \quad (\text{A.8})$$

con $\alpha = \frac{\omega}{v} - i\delta$ y tomando el límite $\delta \rightarrow 0$ nos queda simplemente

$$L_1 = -\frac{e^{i(\omega/v)z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - K^2}. \quad (\text{A.9})$$

Para $z > 0$

$$L_1 = F(z, z'; \alpha) e^{i\alpha z'} \Big|_{z'=-\infty}^{z'=0} + F(z, z'; \alpha^*) e^{i\alpha^* z'} \Big|_{z'=0}^{z'=z}, \quad (\text{A.10})$$

y al tomar el límite $\alpha \rightarrow 0$ las contribuciones en $z' = 0$ se cancelan, de tal forma que obtenemos el mismo resultado que en el caso de $z < 0$, por lo tanto, el resultado en (A.9) es válido para todo z .

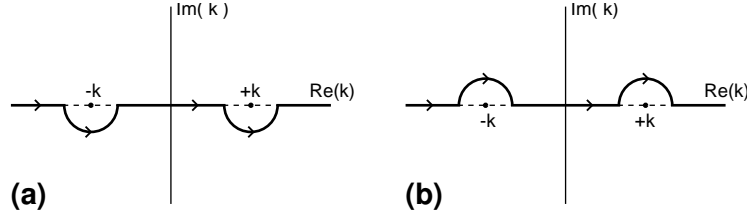


Figura A.1: Posibles contornos de integración para obtener la función de Green

Puede demostrarse fácilmente que el valor de la integral L_1 no cambia si en lugar $G(z, z')$ hubiésemos utilizado $\tilde{G}(z, z')$. No ocurre lo mismo con $L_2(z, z')$, la cual resulta ser dependiente de la función de Green que elijamos como mostraremos a continuación.

Para la integral $L_2(z)$, si $z > 0$ se tiene

$$L_2(z) = \frac{1}{K} F(z, z'; \alpha) e^{i\alpha z'} h(z') \Big|_{z'=-\infty}^{z'=0} - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^0 F(z, z'; \alpha) e^{i\alpha z'} h'(z') dz' \\ + \frac{1}{K} F(z, z'; \alpha^*) e^{i\alpha^* z'} h(z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \frac{1}{K} \int_0^z F(z, z'; \alpha^*) e^{i\alpha^* z'} h'(z') dz'. \quad (\text{A.11})$$

Lo mismo que en el caso de L_1 , las contribuciones de $z' = 0$ los términos primero y tercero se anulan. Por otro lado, notemos que podemos poner $\delta = 0$ con seguridad en las integrales de la expresión anterior porque en $z' = \pm\infty$ la derivada de $h(z')$ se anula. Ello nos conduce al resultado válido para todo z

$$L_2(z) = -\frac{1}{K} \frac{K e^{i\frac{\omega}{v}z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - K^2} h(z) - \int_{-\infty}^z F(z, z') e^{i\frac{\omega}{v}z'} h'(z') dz', \quad (\text{A.12})$$

mismo que puede reescribirse como

$$L_2 = -\frac{e^{i\frac{\omega}{v}z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - K^2} h(z) + \frac{e^{iKz}}{2K \left(\frac{\omega}{v} - K\right)} \int_{-\infty}^z dz' \exp \left[\left(\frac{\omega}{v} - K\right) z' \right] h'(z') \\ - \frac{e^{-iKz}}{2K \left(\frac{\omega}{v} + K\right)} \int_{-\infty}^z dz' \exp \left[\left(\frac{\omega}{v} + K\right) z' \right] h'(z'). \quad (\text{A.13})$$

Si la interfase cambia de manera suficientemente rápida con respecto a z entonces podemos aproximar

$$L_2(z) = -\frac{e^{i\frac{\omega}{v}z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - K^2} \theta(z) + \frac{1 - \theta(z)}{2K} \left(\frac{e^{-iKz}}{\frac{\omega}{v} + K} - \frac{e^{iKz}}{\frac{\omega}{v} - K} \right). \quad (\text{A.14})$$

Notemos que este resultado es exacto en el caso de que $h(z)$ sea la función escalón de Heaviside.

Por otro lado, si usamos $\tilde{G}(z, z')$ en vez de $G(z, z')$, es necesario calcular la integral

$$\tilde{L}_2(z) = -\frac{1}{K} \int_{-\infty}^{\infty} \sin K(z - z') e^{i\frac{\omega}{v}z'} h(z') \theta(z' - z) dz',$$

Procediendo de manera similar al cálculo de $L_2(z)$, escribimos para todo z

$$\tilde{L}_2(z) = \frac{1}{K} \frac{K e^{i\frac{\omega}{v}z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - K^2} h(z) - \int_z^{\infty} F(z, z') e^{i\frac{\omega}{v}z'} h'(z') dz'. \quad (\text{A.15})$$

En caso de que la interfase cambie suficientemente rápido podemos aproximar \tilde{L}_2 por

$$\tilde{L}_2(z) = \left[\frac{e^{i\frac{\omega}{v}z}}{\frac{\omega^2}{v^2} - K^2} + \frac{1}{2K} \left(\frac{e^{-iKz}}{\frac{\omega}{v} + K} - \frac{e^{iKz}}{\frac{\omega}{v} - K} \right) \right] \theta(z) \quad (\text{A.16})$$

Mostraremos a continuación que los términos proporcionales a $e^{i\pm Kz}$ satisfacen la ecuación de onda homogénea en el medio caracterizado por la constante ϵ . Para ello necesitamos restaurar la dependencia espacial y temporal. Denotando con $\phi(\mathbf{x}, t)$ a la transformada inversa de Fourier de dichos términos, escribimos

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega d\boldsymbol{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}_\perp} e^{-i\omega t} \frac{e^{i\mp Kz}}{2K \left(\frac{\omega}{v} \pm K \right)} \quad (\text{A.17})$$

Aplicamos el operador $\nabla^2 - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ a ambos lados de la ecuación anterior y recordando que $K^2 = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2$, es fácil ver que $\Phi(\mathbf{x}, t)$ satisface la ecuación de onda.

Notemos que si usamos $G(z, z')$ el campo resultante que aparece en la región $z > 0$ difiere de aquel en $z < 0$. En la primera región se tienen ondas libres mientras que para $z < 0$ el campo resultante es el de una partícula que se propaga en un medio homogéneo con constante dieléctrica ϵ .

Por otro lado, si usamos $\tilde{G}(z, z')$, el campo está constreñido a la región $z < 0$.

Sin embargo, en este caso los términos proporcionales a $e^{\pm iKz}$ que aparecen en esta región no pueden identificarse con ondas libres porque no satisfacen la relación de dispersión adecuada.

Apéndice B

Principio de aplicaciones contraídas

En este apéndice presentamos, para beneficio del lector, el llamado *principio de aplicaciones contraídas*. La exposición sigue de cerca a la referencia [44]. En este trabajo se ha usado en un par de ocasiones. En primer lugar, en el procedimiento iterativo para obtener los campos de radiación de la RT; y, en segundo lugar, como se describe más adelante en este apéndice, para resolver numéricamente la ecuación (4.32). Este teorema, además de su utilidad práctica, representa un instrumento muy conveniente para la demostración de diferentes teoremas de existencia y unicidad.

Sea R un espacio métrico. La aplicación \mathbf{A} del espacio R en si mismo se llama *contraída*, cuando existe un número $\alpha < 1$ tal que para cualesquiera dos puntos $x, y \in R$ se verifica la desigualdad

$$\rho(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y) \leq \alpha\rho(x, y), \quad (\text{B.1})$$

en donde la distancia entre los dos elementos x y y de R se denota como $\rho(x, y)$.

Diremos que la sucesión $x_{n \in \mathbf{N}}$ es fundamental, ó de Cauchy, si para todo número real $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todos los $m, n > N$ se verifica la desigualdad $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$. Recordemos que en un espacio completo toda sucesión fundamental converge.

Teorema 1. (*Principio de las aplicaciones contraídas*) *Toda aplicación contraída, definida en un espacio métrico completo R , tiene un punto fijo, y sólo uno (es decir, la ecuación $\mathbf{A}x = x$ tiene solución y solamente una).*

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario en R . Formemos la sucesión $x_1 = \mathbf{A}x_0$, $x_2 = \mathbf{A}x_1 = \mathbf{A}^2x_0$, etcétera. En general, $x_n = \mathbf{A}x_{n-1} = \mathbf{A}^n x_0$.

Mostraremos primero que la sucesión $\{x_n\}$ así formada, es fundamental. En efecto, suponiendo, para concretar que $m > n$, tenemos

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &= \rho(\mathbf{A}^n x_0, \mathbf{A}^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leq \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}\} \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \alpha}.\end{aligned}$$

Puesto que $\alpha < 1$, esta cantidad resulta tan pequeña como se quiera, siempre que n sea suficientemente grande. Debido a que R es un espacio completo, la sucesión $\{x_n\}$, que es fundamental, tiene límite. Es decir

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Consideremos ahora la sucesión $\{y_n = \mathbf{A}x_n\}$, mostraremos que ella tiene el límite $y = \mathbf{A}x$. Notemos primero que

$$\rho(y, y_n) = \rho(\mathbf{A}x, \mathbf{A}x_n) \leq \alpha \rho(x, x_n).$$

De esta desigualdad y de la convergencia de $\{x_n\}$, se desprende que para cualquier número $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que para todo $n > N$ se cumple $\rho(y, y_n) < \epsilon$. Hemos demostrado entonces que

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

por ello

$$\mathbf{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Por consiguiente, queda demostrada la existencia del punto fijo. Probemos ahora que es único. Si

$$\mathbf{A}x = x, \quad \mathbf{A}y = y,$$

la desigualdad (B.1) nos da

$$\rho(x, y) < \alpha \rho(x, y),$$

puesto que $\alpha < 1$, de aquí se deduce que

$$\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

□

Como una primera aplicación del principio de aplicaciones contraídas consideremos la ecuación integral

$$f(z) = \phi(z) + \lambda \int_a^z dz' f(z') G(z', z) \quad (\text{B.2})$$

en la que el extremo superior de la integral es la variable z y $f(z)$ esta definida en el intervalo $a \leq z \leq b$. A tales ecuaciones integrales se les llama de Volterra. Demostraremos ahora que para cualquier valor del parámetro λ , estas tienen una única solución y para hallarla podemos emplear el método de aproximaciones sucesivas. En primer lugar presentamos una generalización inmediata del principio de aplicaciones contraídas.

Teorema 2. *Sea \mathbf{A} una aplicación continua del espacio métrico completo R en sí mismo tal que la aplicación \mathbf{A}^n es contraída para algún n . En este caso la ecuación*

$$\mathbf{A}x = x \quad (\text{B.3})$$

tiene una solución, y solo una.

Demostración. Como la aplicación $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^n$ es contraída, la sucesión $\{x_k = \mathbf{B}^k x_0\}$ converge. Pongamos

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k,$$

afirmamos que

$$\mathbf{A}x = x.$$

Notemos que por ser \mathbf{A} continua podemos escribir

$$\mathbf{A}x = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}(\mathbf{B}^k x_0).$$

Por otro lado, puesto que \mathbf{B}^n es contraída, tenemos

$$\rho(\mathbf{B}^k x_0, \mathbf{B}^k \mathbf{A}x_0) \leq \alpha^k \rho(\mathbf{B}x_0, \mathbf{B}\mathbf{A}x_0),$$

lo que implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{A}^{kn} x_0, \mathbf{A}(\mathbf{A}^{kn} x_0)) = 0,$$

es decir, $\mathbf{A}x = x$.

Demostraremos la unicidad del punto fijo. Como todo punto fijo respecto a \mathbf{A} también será fijo respecto a la aplicación \mathbf{A}^n , y esta es a su vez, contraída, este punto fijo es único. \square

Probemos ahora que cierta potencia de la aplicación

$$\mathbf{A}f(z) = \phi(z) + \lambda \int_a^z dz' f(z') G(z', z) \quad (\text{B.4})$$

es una aplicación contraída.

Sean f_1 y f_2 dos funciones definidas en el intervalo (a, b) . Por simplicidad, definimos la distancia entre f_1 y f_2 como $\rho(f_1, f_2) = \text{máx}\|f_1(z) - f_2(z)\|$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 f(z) &= \phi(z) + \lambda \int_a^z dz_1 \phi(z_1) G(z_1, z) + \\ &\quad + \lambda^2 \int_a^z dz_1 \int_a^{z_1} dz_2 f(z_2) G(z_2, z_1) G(z_1, z) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}f_1(z) - \mathbf{A}f_2(z)\| &= \left\| \lambda \int_a^z dz' (f_1(z') - f_2(z')) G(z', z) \right\| \\ &\leq |\lambda| M(z-a) \text{máx}\|f_1(z) - f_2(z)\|. \end{aligned}$$

Donde $M = \text{máx}\|G(z', z)\|$, y de aquí

$$\|\mathbf{A}^2 f_1(z) - \mathbf{A}^2 f_2(z)\| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(z-a)^2}{2} \text{máx}\|f_1(z) - f_2(z)\|$$

y, en general

$$\|\mathbf{A}^n f_1(z) - \mathbf{A}^n f_2(z)\| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(z-a)^n}{n!} m \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} m,$$

donde $m = \text{máx}\|f_1(z) - f_2(z)\|$. Cualquiera que sea el valor de λ , podemos escoger n tan grande que

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1,$$

es decir, la aplicación \mathbf{A}^n será contraída para n suficientemente grande. Por consiguiente, la ecuación de Volterra (B.2) tiene una única solución para cualquier valor de λ .

Como una segunda aplicación de este teorema demostraremos que la ecuación (4.32) puede resolverse usando un procedimiento iterativo. Definamos la variable $x = n^2$ y la función

$$\phi(x) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{1}{2} G(v_*^2 x) \right],$$

entonces (4.32) es equivalente a $x = \phi(x)$. Sean x_1 y x_2 dos valores cercanos de la variable x , tenemos entonces que

$$|\phi(x_1 - x_2)| \approx v_*^2 \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left| \frac{dG(v_*^2 x)}{dx} \right|_{x=x_1} |(x_2 - x_1)|. \quad (\text{B.5})$$

La aplicación $\phi(x)$ será contraída si

$$v_*^2 \left| \frac{dG(v_*^2 x)}{dx} \right|_{x=x_1} < 2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2}, \quad (\text{B.6})$$

y en este caso, la sucesión $x_0, x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), \dots$, converge a la única raíz de la ecuación $x = \phi(x)$. El argumento de $dG(x)/dx$ es mayor a cero y menor a v_* . Si el valor de v_* no es muy cercano a la unidad ($v_* \lesssim 0,95$) el valor de $dG(x)/dx < 1$ (véase la fig. B.1). Para el ejemplo que consideramos en el texto, un gas de electrones degenerado, $v_* = v_f \simeq 0,3$ y puesto que $\omega > \omega_p$ concluimos que podemos resolver (4.32) usando un proceso iterativo.

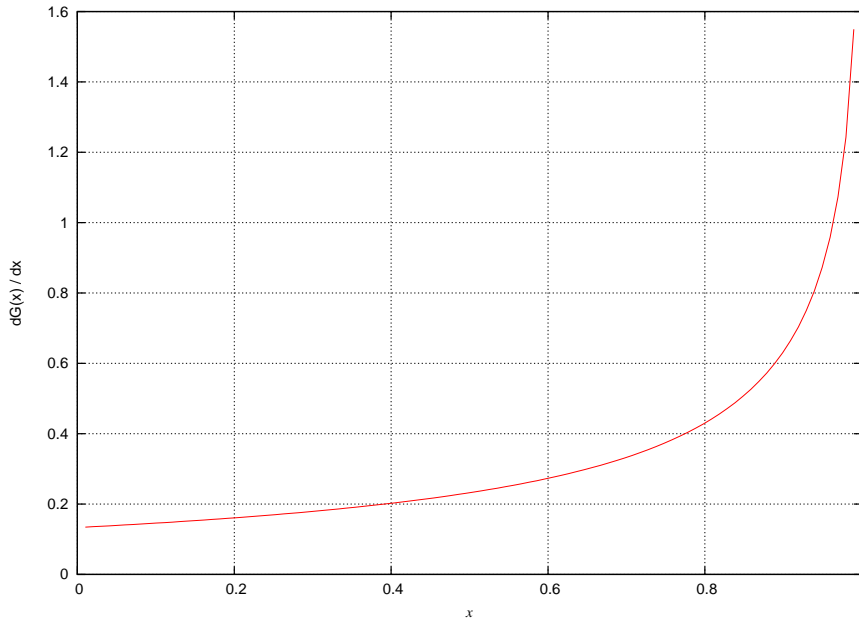


Figura B.1: Gráfica de la función $dG(x)/dx$.

En caso de tratar con un un gas extremadamente relativista, para el cual v_* es muy cercano a uno, el método no es aplicable para bajas frecuencias, sin embargo, no cuesta trabajo encontrar un umbral de frecuencias a partir del cual se cumple la condición (B.6).

Bibliografía

- [1] Adams, J. B., Ruderman, M. A., y Woo, C. H. *Phys. Rev.* **129** (1963) 1383.
- [2] Alikhanian, A. I., Avakina, K. M., Garibian, G. M. et al. *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 635.
- [3] Alikhanian, A. I., Kankanian, S. A., Oganessian, A. G. et al. *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 109.
- [4] Altherr, T. y Salati, P. *Nucl. Phys. B* **421** (1994) 662 .
- [5] Andronic, A. y Wessels, J. P. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A* **666** (2011) 130.
- [6] Artru, X., Yodh, G. B., y Mennessier, G. *Phys. Rev. D* **12** (1975) 1289.
- [7] Bardeen, W. A., Gastmans, R., y Lautrup, B. *Nucl. Phys. B* **46** (1972) 319 .
- [8] Baumann, J., Gähler, R., Kalus, J. et al. *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3107.
- [9] Beda, A. G., Brudanin, V. B., y Egorov, V. G. *Advances in High Energy Physics* **2012** (2012) 350150.
- [10] Bell, N. F., Cirigliano, V., Ramsey-Musolf, M. J. et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 151802.
- [11] Bethe, H. A. *Math. Proc. Cambridge* **31** (1935) 108.
- [12] Bjorken, J. D. y Drell, S. D., *Relativistic quantum mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [13] Born, M. y Wolf, E. *Principles of Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999) 7.^a ed.

- [14] Braaten, E. y Segel, D. *Phys. Rev. D* **48** (1993) 1478.
- [15] Bukina, E. N., Dubovik, V. M., y Kuznetsov, V. E. *Phys. Lett. B* **435** (1998) 134 .
- [16] Cherry, M. L., Hartmann, G., Müller, D. et al. *Phys. Rev. D* **10** (1974) 3594.
- [17] Degrassi, G., Sirlin, A., y Marciano, W. J. *Phys. Rev. D* **39** (1989) 287.
- [18] Dolgoshein, B. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A* **326** (1993) 434.
- [19] D’Olivo, J. C. y Loza, J. A. *Phys. Rev. D* **85** (2012) 011303.
- [20] D’Olivo, J. C. y Nieves, J. F. *Phys. Rev. D* **56** (1997) 5898.
- [21] D’Olivo, J. C., Nieves, J. F., y Pal, P. B. *Phys. Rev. D* **40** (1989) 3679.
- [22] D’Olivo, J. C., Nieves, J. F., y Pal, P. B. *Physics Letters B* **365** (1996) 178 .
- [23] Durand, L. *Phys. Rev. D* **11** (1975) 89.
- [24] Dvornikov, M. y Studenikin, A. *Phys. Rev. D* **69** (2004) 073001.
- [25] Dvornikov, M. y Studenikin, A. *JETP* **99** (2004) 288.
- [26] Favuzzi, C., Giglietto, N., Mazziotta, M. N. et al. *La Rivista del Nuovo Cimento* **24** (2001) 1.
- [27] Garibyan, G. M. *Sov. Phys. JETP* **6** (1958) 1079.
- [28] Garibyan, G. M. *Sov. Phys. JETP* **10** (1958) 372.
- [29] Gazazian, E. D., Ispirian, K. A., Ispirian, R. K. et al. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B* **173** (2001) 160.
- [30] Ginzburg, V. L. y Tsytoovich, V. N., *Transition Radiation and Transition Scattering* (Adam Hilger, 1990).
- [31] Ginzburg, V. L. y Frank, I. M. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **16** (1946) 15.
- [32] Giunti, C. y Studenikin, A. *Rev. Mod. Phys.* **87** (2015) 531.
- [33] Goldsmith, P. y Jelley, J. V. *Philos. Mag.* **4** (1959) 836.
- [34] Grifols, J. A. y Massó, E. *Phys. Rev. D* **40** (1989) 3819.

-
- [35] Grimus, W. y Neufeld, H. *Phys. Lett. B* **344** (1995) 252 .
- [36] Happek, U., Sievers, A. J., y Blum, E. B. *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2962.
- [37] Hirschmugl, C. J., Sagurton, M., y Williams, G. P. *Phys. Rev. A* **44** (1991) 1316.
- [38] Ispirian, K. A. e Ispiryan, M. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **16** (2013) 020702.
- [39] Ivanov, I. P. y Karlovets, D. V. *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 264801.
- [40] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, New York, 1999) 3.^a ed.
- [41] Johansson, S. A. E. *Astrophys. Lett.* **9** (1971) 143.
- [42] Kayser, B. *Phys. Rev. D* **26** (1982) 1662.
- [43] Kirzhnits, D. A. *Soviet Physics Uspekhi* **30** (1987) 575.
- [44] Kolmogorov, A. N. y Fomin, S. V., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional* (MIR, Moscú, 1972).
- [45] Lee, B. W. y Shrock, R. E. *Phys. Rev. D* **16** (1977) 1444.
- [46] Lepore, J. V. y Riddell, R. J. *Phys. Rev. D* **13** (1976) 2300.
- [47] Lucio, J. L., Rosado, A., y Zepeda, A. *Phys. Rev. D* **31** (1985) 1091.
- [48] Marciano, W. J. y Sanda, A. I. *Phys. Lett. B* **67** (1977) 303 .
- [49] Marinelli, M. y Morpurgo, G. *Phys. Lett. B* **137** (1984) 439 .
- [50] Martínez, J. L. L., Rosado, A., y Zepeda, A. *Phys. Rev. D* **29** (1984) 1539.
- [51] Mendonca, J. T., Serbeto, A., Shukla, P. et al. *Phys. Lett. B* **548** (2002) 63 .
- [52] Mohapatra, R. N. y Pal, P. B., *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics* (World Scientific, Singapore, 2004) 3.^a ed.
- [53] Nahmias, M. E. *Math. Proc. Cambridge* **31** (1935) 99.
- [54] Nieves, J. F. *Phys. Rev. D* **26** (1982) 3152.

- [55] Nieves, J. F. y Pal, P. B. *Phys. Rev. D* **40** (1989) 1693.
- [56] Nieves, J. F. y Pal, P. B. *Phys. Rev. D* **39** (1989) 652.
- [57] Nieves, J. F. y Pal, P. B. *Phys. Rev. D* **49** (1994) 1398.
- [58] Novales-Sánchez, H., Rosado, A., Santiago-Olán, V. et al. *Phys. Rev. D* **78** (2008) 073014.
- [59] Pal, P. B. *Am. J. Phys.* **79** (2011) 485.
- [60] Pavel Motloch, P. P., Jaime Alvarez-Muñiz y Zas, E. *Phys. Rev. D* **93** (2016) 043010.
- [61] Pellegrini, C. *Eur. Phys. J. H* **37** (2012) 659.
- [62] Ramaty, R. y Bleach, R. D. *Astrophys. Lett.* **11** (1972) 35.
- [63] Rosenzweig, J., Travish, G., y Tremaine, A. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A* **365** (1995) 255.
- [64] Sakuda, M. *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 804.
- [65] Sakuda, M. y Kurihara, Y. *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 1284.
- [66] Sakurai, J. J., *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1967).
- [67] Tamoikin, V. V. *Radiophysics and Quantum Electronics* **38** (1995) 30.
- [68] V. B. Semikoz, Y. A. S., V. N. Oraevskii *JETP Lett.* **43** (1986) 709.
- [69] V. N. Oraevskii, V. B. S., A. Yu. Plakhov y Smorodinskii, Y. A. *JETP* **66** (1987) 890.
- [70] Weldon, H. A. *Phys. Rev. D* **26** (1982) 1394.
- [71] Yodh, G. B., Artru, X., y Ramaty, R. *Astrophys. J.* **181** (1973) 725.
- [72] Yuan, L. C. L., Wang, C. L., y Prunster, S. *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 496.
- [73] Zaidi, M. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* **40** (1965) 502.