UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE SOLUCIONES NODALES DE UN PROBLEMA DE EXPONENTE CRÍTICO QUE SURGEN DE CONCENTRACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

OMAR CABRERA CHÁVEZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

CUIDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2017

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Nos proponemos hallar soluciones de energía finita del problema

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{en } \mathbb{R}^N \tag{$\wp_\infty$}$$

donde $N \geq 3$ y $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.
Una solución de energía finita del problema ($\wp_\infty$) es un punto crítico $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ del funcional

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}.$$

Este problema ha sido extensamente estudiado. Una solución ya conocida es la llamada burbuja estándar

$$U(x) = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Se sabe que, salvo traslaciones y dilataciones, la burbuja estándar es la única solución positiva del problema ($\wp_\infty$) (ver [10]).
Soluciones para ($\wp_\infty$) distintas de la burbuja estándar fueron encontradas por W. Ding en [8]. Para obtenerlas llevó el problema a la esfera S^{N-1} en $\mathbb{R}^N$ mediante la proyección estereográfica y ahí hizo actuar al grupo $O(k) \times O(m)$, donde $k + m = N$ y $2 \leq m \leq k$. Así, produjo una infinidad de soluciones que cambian de signo y que no son equivalentes, en el sentido de que ninguna se puede obtener de otra mediante traslaciones y dilataciones.
Más adelante, del Pino, Musso, Pacard y Pistoia construyeron en [6] una familia de soluciones del problema ($\wp_\infty$) que asintóticamente se aproximan a la suma de una burbuja estándar positiva con k copias negativas de la burbuja estándar con dilataciones apropiadas y distribuidas simétricamente en un polígono regular de radio 1.

En este trabajo seguiremos el enfoque dado por M. Clapp en [3]. Consideraremos la acción de un grupo de simetrías en $\mathbb{R}^N$ y una familia de soluciones simétricas del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\wp_p$}$$

donde $p \in (2, 2^*)$ y Ω es un dominio acotado, suave e invariante bajo la acción de este grupo. La parte fundamental será analizar detalladamente qué sucede con esta familia cuando p tiende a 2^*. Veremos que estas soluciones tienen dos posibilidades: o bien convergen a una solución de $(\wp_{2^*})$, o bien éstas se concentran y explotan alrededor de un número finito de puntos con simetrías determinadas por el grupo.
Mientras que en [8] se usan órbitas de dimensión positiva, el uso de puntos fijos será fundamental para los resultados de existencia que obtendremos en la parte final. De esta manera, exhibiremos soluciones que cambian de signo y que no son ni burbujas estándar ni sumas de burbujas estándar reescaladas y con diferentes signos. Estas surgirán como perfiles asintóticos de soluciones del problema subcrítico mediante el fenómeno de concentración.

En el Capítulo 2 estableceremos el problema de forma variacional, haciendo antes una revisión de los espacios de Sobolev y remarcando algunas de sus propiedades más importantes. Ya con estos preliminares, dedicaremos el Capítulo 3 al Teorema 3.12, el cual describe con precisión al fenómeno de concentración. Analizaremos el papel que juegan las simetrías y como éstas influyen en la concentración y en las soluciones que este fenómeno produce. Finalmente, en el Capítulo 4 veremos algunas aplicaciones del teorema de concentración usando dos tipos particulares de grupos de isometrías en $\mathbb{R}^N$. Primero, con acciones donde todas las órbitas son o bien homeomorfas al grupo mismo, o bien puntos fijos; llevaremos al teorema de concentración a una forma que establece más concretamente cómo ocurre la concentración. Después, haciendo actuar grupos cuyas órbitas son infinitas o puntos fijos, produciremos explosión en un único punto. Con estos resultados a la mano, en un ejemplo concreto exhibiremos una solución del problema límite $(\wp_\infty)$ que cambia de signo y que, por el tipo de simetrías, difiere de aquellas en [8, 6].
Incluimos al final un par de apéndices. Ambos serán sumamente importantes al trabajar con el Teorema 3.12. En el primero de ellos damos la demostración del Lema 3.15. Este lema permite, dado un grupo cerrado Γ de isometrías lineales en $\mathbb{R}^N$, cambiar a cualquier sucesión en $\mathbb{R}^N$ por otra sucesión, cuyos elementos son puntos fijos de algún subgrupo de índice finito en Γ.
En el segundo apéndice presentamos un resultado de no existencia para el problema

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{en } \mathbb{H},$$

donde $\mathbb{H}$ es un semiespacio en $\mathbb{R}^N$ que contiene al origen. Este resultado es consecuencia de un criterio más general que también demostraremos en ese apéndice.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introduciremos a los espacios de Sobolev, los cuales proporcionan el ambiente adecuado para plantear nuestro problema de manera formal. Enunciaremos, sin incluir demostraciones, algunas de las principales propiedades de estos espacios.
Después procederemos a interpretar nuestro problema de manera variacional. Los ingredientes principales de este método son el funcional de energía y la variedad de Nehari. Veremos cómo se relacionan estos conceptos con la ecuación diferencial que nos proponemos estudiar y hablaremos sobre la existencia de soluciones del problema subcrítico. Terminaremos dando la variante simétrica del problema y observaremos que en este caso tenemos resultados de existencia análogos al problema sin simetrías.

2.1. Los espacios de Sobolev

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Como es usual, para $p \in [1, \infty]$, denotaremos por $L^p(\Omega)$ a los espacios de Lebesgue, que equipados con la norma

$$|u|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < \infty,$$
$$|u|_\infty := \text{ínf}\{c \in \mathbb{R} : |u(z)| \leq c \text{ p.c.t. } z \in \Omega\},$$

son espacios de Banach. En el espacio $L^2(\Omega)$, además podemos definir un producto interior como

$$\langle u, v \rangle_2 := \int_\Omega uv,$$

y, con éste, $L^2(\Omega)$ tiene estructura de espacio de Hilbert, cuya norma inducida es precisamente la norma $|\cdot|_2$.

Definición 2.1. Un subconjunto $\omega \subset \Omega$ está compactamente contenido en Ω, denotado $\omega \subset\subset \Omega$, si ω está acotado y $\overline{\omega} \subset \Omega$. Definimos

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u 1_\omega \in L^p(\Omega) \text{ para todo abierto } \omega \subset\subset \Omega\}.$$

Definición 2.2. Diremos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω si existen funciones $v_1, \ldots, v_N \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v_i \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \tag{2.1}$$

para todo $i = 1, \ldots, N$. Las funciones $v_1, \ldots, v_N$ son únicas y les llamamos las derivadas débiles de u, denotadas por $D_i u$. Escribiremos

$$\nabla u := (D_1 u, \ldots, D_N u)$$

para referirnos al gradiente (débil) de u.

Es fácil comprobar que si una función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, también es débilmente diferenciable y $\frac{\partial u}{\partial x_i} = D_i u$ para todo $i = 1, \ldots, N$.

Si $N \geq 3$ definimos

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : u \text{ es débilmente diferenciable y } D_i u \in L^2(\mathbb{R}^N) \\ \text{para todo } i = 1, \ldots, N\}$$

donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Definición 2.3. Sean $f \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. La convolución de f y g es la función $f * g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) g(y) dy.$$

Una propiedad importante de la convolución $(f * g)$ es que hereda tanto las propiedades de regularidad de f, como las propiedades de integrabilidad de g.

Lema 2.4. *Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g$ es de clase C^k. Más aún, si $f \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ se cumple la siguiente identidad*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Demostración. Ver [2, Corolario 14.39]. ■

Lema 2.5. *Si $f \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, \infty)$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y*

$$|f * g|_p \leq |f|_1 |g|_p.$$

Demostración. Ver [2, Proposición 14.40]. ■

Definición 2.6. Una sucesión de funciones (ρ_k) se llama una sucesión regularizante si, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \qquad \rho_k \geq 0, \qquad \mathrm{sop}(\rho_k) \subset \overline{B}_{\frac{1}{k}}(0), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho_k = 1.$$

Las sucesiones regularizantes nos permiten aproximar cualquier función en $L^p(\mathbb{R}^N)$ por funciones suaves mediante la convolución.

Lema 2.7. *Si $p \in [1, \infty)$ entonces, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y para toda sucesión regularizante (ρ_k), se cumple que*

$$\rho_k * f \to f \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Ver [2, Teorema 14.45]. ■

El lema anterior da lugar al siguiente resultado de aproximación en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.8. *Dado $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, existe una sucesión φ_k en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ y $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \to D_i u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $i = 1, \cdots, N$.*

Demostración. Sea (ρ_k) una sucesión regularizante. Como u es débilmente diferenciable, para todo $k \in \mathbb{N}$, para toda $z \in \mathbb{R}^N$ y para toda $i = 1, \ldots, N$, poniendo a $\rho_k(z - \cdot)$ en la ecuación (2.1) obtenemos

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(y) \left[-\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i}(z-y) \right] dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_i u(y) \rho_k(z-y) dy = -(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} * u)(z) + (\rho_k * D_i u)(z).$$

Así, de la igualdad anterior y del Lema 2.4 obtenemos la identidad

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) = \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} * u = \rho_k * D_i u.$$

Por lo tanto, usando el Lema 2.7, concluimos que

$$\rho_k * u \to u \text{ en } L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u) \to D_i u \text{ en } L^2(\mathbb{R}^N) \quad \forall i = 1, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Ahora, escogemos una función $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi(z) = 1$ si $|z| \leq 1$, $\psi(z) = 0$ si $|z| \geq 2$ y $0 \leq \psi \leq 1$. Definimos $\psi_k(z) := \psi(\frac{z}{k})$. Esta función cumple que $\psi_k(z) = 1$ si $|z| \leq k$, $\psi_k(z) = 0$ si $|z| \geq 2k$ y $0 \leq \psi_k \leq 1$.
Es inmediato ver, usando el teorema de convergencia monótona, que

$$|v - v\psi_k|_p \to 0 \qquad \forall v \in L^p(\mathbb{R}^N),\ p \in [1, \infty).$$

Definimos $\varphi_k := (\rho_k * u)\psi_k$. Entonces $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y tenemos los siguientes límites

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u\psi_k - (\rho_k * u)\psi_k|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u - (\rho_k * u)|^{2^*} |\psi_k|^{2^*} \leq |u - (\rho_k * u)|_{2^*}^{2^*} \to 0,$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left|(D_i u)\psi_k - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u)\psi_k\right|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|D_i u - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u)\right|^2 |\psi_k|^2 \\ &\leq \left|D_i u - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u)\right|_2^2 \to 0.\end{aligned}$$

De lo anterior y de la desigualdad del triángulo, concluimos que

$$|u - \varphi_k|_{2^*} \to 0 \quad \text{y} \quad \left|D_i u - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u)\right]\psi_k\right|_2 \to 0.$$

Sólo falta demostrar que $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \to D_i u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$.
El teorema de cambio de variable asegura que

$$\left|\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|_N = \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|_N.$$

Consideremos a los conjuntos

$$A_k := \{z \in \mathbb{R}^N : k \leq |z| \leq 2k\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, según los límites en (2.2) podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{A_k} |\rho_k * u - u|^{2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_k * u - u|^{2^*} < \left(\frac{\varepsilon}{2\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|_N}\right)^{2^*} \quad \forall k > k_0. \tag{2.3}$$

Además, como $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $k_1 \geq k_0$ para el cual

$$\int_{A_k} |u|^{2^*} < \left(\frac{\varepsilon}{2\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|_N}\right)^{2^*} \quad \forall k \geq k_1. \tag{2.4}$$

Nótese que $\text{sop}(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}) \subset A_k$ y que $(\rho_k * u) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ por el Lema 2.5. Luego, usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad del triángulo y las estimaciones en (2.3) y

(2.4), vemos que, si $k > k_1$

$$\left|(\rho_k * u)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|_2 \leq \left(\int_{A_k} |\rho_k * u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \left|\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|_N$$
$$\leq \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|_N \left[\left(\int_{A_k} |\rho_k * u - u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} + \left(\int_{A_k} |u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}\right] < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $(\rho_k * u)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \to 0$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Concluimos observando que

$$\left|D_i u - \frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho_k * u)\psi_k]\right|_2 = \left|D_i u - (\rho_k * u)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u)\psi_k\right|_2$$
$$\leq \left|D_i u - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * u)\psi_k\right|_2 + \left|(\rho_k * u)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|_2 \to 0.$$

■

Los siguientes resultados serán importantes adelante:

Teorema 2.9. *(Desigualdad de Sobolev). Existe una constante $C > 0$ que depende únicamente de N tal que*

$$|u|_{2^*}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Ver [2, Proposición 17.4 (a)]. ■

Lema 2.10. *$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio vectorial y*

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v$$

es un producto interior en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. La estructura de espacio vectorial de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ se hereda, mediante la linealidad de la derivada débil, de las estructuras en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. La linealidad en cada entrada de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ también se sigue de la linealidad de la derivada débil y la conmutatividad es clara, así que resta demostrar que es positivo definido. En efecto, sea $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\langle u, u\rangle = 0$, entonces, del Teorema 2.9 se sigue que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{C}|u|_{2^*}^2.$$

pero $|\cdot|_{2^*}$ es norma, lo cual implica que $u = 0$. ■

Denotamos por

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

a la norma inducida por el producto interior del lema anterior.

Teorema 2.11. *$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea (u_k) una sucesión de Cauchy en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. De la desigualdad de Sobolev (Teorema 2.9) se sigue que (u_k) también es de Cauchy en $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Más aún, tenemos que $|D_i u_k|_2 \leq \|u_k\|$, para todo $i = 1, \ldots, N$. Entonces cada una de las sucesiones $(D_i u_k)$ también es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $L^p(\mathbb{R}^N)$ es de Banach se cumple que

$$\begin{aligned} u_k &\to u \qquad \text{en } L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \\ D_i u_k &\to v_i \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R}^N), \forall i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Veremos que $u_k \to u$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para esto queremos probar que u es débilmente diferenciable y que $D_i u = v_i$ pues, en tal caso,

$$\|u_k - u\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |D_i u_k - D_i u|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} |D_i u_k - v_i|_2^2 \to 0, \text{ cuando } k \to \infty.$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{2^*} = 1$. La desigualdad de Hölder implica que, para todo $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}^N} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u - u_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq |u - u_k|_{2^*} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_q, \\ \left| \int_{\mathbb{R}^N} v_i \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} D_i u_k \varphi \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (v_i - D_i u_k) \varphi \right| \leq |v_i - D_i u_k|_2 \, |\varphi|_2 . \end{aligned}$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$ en las desigualdades anteriores concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^N} v_i \varphi = \lim_{k \to \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^N} D_i u_k \varphi \right) = 0.$$

Por lo tanto, u es débilmente diferenciable y $D_i u = v_i$. ∎

Teorema 2.12. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $u \in D^{1,2}(\Omega)$, tomamos una sucesión (φ_k) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ como en el Lema 2.8 y se cumple que

$$\|u - \varphi_k\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| D_i u - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right|^2 \to 0 \text{ cuando } k \to \infty,$$

es decir, $\varphi_k \to u$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. ∎

Definición 2.13. Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, el espacio de Sobolev $D_0^{1,2}(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Éste es un subespacio de Hilbert de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, podemos considerar los espacios de Banach

$$W^{1,2}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable y } D_i u \in L^2(\Omega) \\ \text{para toda } i = 1, \dots, N\}.$$

dotados con la norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} := \left(|u|_2^2 + \sum_{k=1}^{N} |D_i u|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Imitando la construcción de los espacios $D_0^{1,2}(\Omega)$, definimos $W_0^{1,2}(\Omega)$ como la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,2}(\Omega)$.

Enunciaremos dos resultados clásicos para estos espacios que acabamos de introducir. El primero de estos resultados es consecuencia de las desigualdades de Hölder y Sobolev.

Teorema 2.14. *(Desigualdad de Poincaré). Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$. Si $p \in [1, 2^*]$, existe una constante que depende únicamente de N y p, tal que*

$$|u|_p \le C|\Omega|^{\frac{2^*-p}{2^*p}} \|u\| \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

En otras palabras, el encaje $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continuo.

Demostración. Ver [2, Teorema 17.8]. ∎

Bajo las hipótesis del teorema anterior, el encaje $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ tiene la propiedad de ser compacto para p en el intervalo $[1, 2^*)$, es decir, toda sucesión acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$ contiene una subsucesión convergente en $L^p(\Omega)$. A esto se le conoce como el Teorema de Rellich-Kondrashov y lo enunciamos a continuación.

Teorema 2.15. *(Rellich-Kondrashov). Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y $p \in [1, 2^*)$, entonces la inclusión $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ es compacta.*

Demostración. Ver [2, Teorema 17.12]. ∎

Es importante mencionar que las hipótesis del Teorema 2.15 son esenciales, pues éste falla si Ω no es acotado o si $p = 2^*$. La compacidad se pierde en conjuntos no acotados por la invariancia bajo traslaciones de la integral. Más adelante hablaremos de la causa de la pérdida de compacidad del encaje con el exponente crítico.

Cuando Ω es un conjunto acotado, es fácil observar que $\|\cdot\|$ también define una norma en $W_0^{1,2}(\Omega)$, la cual, en virtud de la desigualdad de Poincaré, es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ restringida al espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$. Por lo tanto, los espacios $W_0^{1,2}(\Omega)$ y $D_0^{1,2}(\Omega)$ coinciden y los dos resultados anteriores también son válidos en $D_0^{1,2}(\Omega)$.

Recordemos la noción de convergencia débil en un espacio de Hilbert.

Definición 2.16. Sea (u_k) una sucesión en un espacio de Hilbert H, con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Decimos que u_k converge débilmente a u en H, denotado $u_k \rightharpoonup u$, si

$$\lim_{k\to\infty}\langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle \qquad \forall v \in H.$$

Una consecuencia bastante útil del Teorema 2.15 es la siguiente.

Corolario 2.17. *Si $p \in [2, 2^*)$, entonces toda sucesión acotada (u_k) en $D_0^{1,2}(\Omega)$ cumple que, pasando a una subsucesión,*

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u && \textit{débilmente en } D_0^{1,2}(\Omega),\\ u_k &\to u && \textit{en } L^p_{loc}(\Omega),\\ u_k &\to u && \textit{c. d. en } \Omega. \end{aligned}$$

Demostración. Como (u_k) está acotada, después de pasar a una subsucesión, podemos suponer que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Tenemos dos casos:

Caso 1: Ω acotado.
Por el teorema de Rellich-Kondrashov, (u_k) contiene una subsucesión tal que $u_k \to w$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, a su vez, esta subsucesión contiene otra subsucesión que converge puntualmente a w casi donde sea en Ω. Por la unicidad de los límites en cada caso, tenemos que $u = w$. Entonces, esta última subsucesión es la que buscamos.

Caso 2: Ω arbitrario.
Definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \omega_m &:= \{x \in \Omega : |x| < m,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{m}\} && \text{si } \partial\Omega \neq \emptyset,\\ \omega_m &:= B_m(0) && \text{si } \Omega = \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Todos éstos son subconjuntos abiertos y acotados de Ω. Un número finito de ellos son son posiblemente vacíos, en tal caso consideramos m suficientemente grande de tal forma que $\omega_m \neq \emptyset$. Entonces, aplicando el caso 1 a la restricción de u_k a ω_1, existe una subsucesión $(u_{1,j})$ de (u_k) tal que

$$\begin{aligned} u_{1,j} &\rightharpoonup u && \text{débilmente en } D_0^{1,2}(\omega_1),\\ u_{1,j} &\to u && \text{en } L^p(\omega_1),\\ u_{1,j} &\to u && \text{c. d. en } \omega_1. \end{aligned}$$

cuando $j \to \infty$.
Procediendo de forma recursiva, tomamos una subsucesión $(u_{l,j})$ de $(u_{l-1,j})$ que cum-

pla

$$\begin{aligned} u_{l,j} &\rightharpoonup u && \text{débilmente en } D_0^{1,2}(\omega_l), \\ u_{l,j} &\to u && \text{en } L^p(\omega_l), \\ u_{l,j} &\to u && \text{c. d. en } \omega_l. \end{aligned}$$

cuando $j \to \infty$.
Consideremos a la sucesión diagonal: $v_k := u_{k,k}$. Por construcción, (v_k) satisface las tres condiciones que buscábamos. ■

Mencionamos antes que el teorema de Rellich-Kondrashov no es válido para el encaje con el exponente crítico. Para justificar esto requerimos hablar de dilataciones. Si $w \in D^{1,2}(\Omega)$, para $\zeta \in \mathbb{R}^N$ y $\varepsilon > 0$, definimos la ε-dilatación de w como

$$w_\varepsilon(x) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Con un cambio de variable, es sencillo comprobar que

$$\|w_\varepsilon\| = \|w\| \quad \text{y} \quad |w_\varepsilon|_{2^*} = |w|_{2^*}.$$

El fenómeno que describen estas identidades se le suele llamar invariancia bajo dilataciones. Con ésto podemos ver que la inclusión $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ no es compacta para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado.
En efecto, supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \Omega$. Elegimos $w \in C_c^\infty(B_r(0))$ tal que $w \neq 0$ y definimos $w_k := w_{\frac{1}{k}}$, la $\frac{1}{k}$-dilatación de w. De esta forma (w_k) está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$, pues $\|w_k\| = \|w\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. También se cumple que $\operatorname{sop}(w_k) \subset B_{\frac{r}{k}}(0)$, esto implica que $w_k(z) \to 0$ para $z \neq 0$.
Sin embargo, si alguna subsucesión (w_{k_j}) de (w_k) fuera convergente, digamos a u en $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, el Corolario 2.17 implicaría que alguna subsucesión de (w_{k_j}) converge a u c.d. en Ω. Al ser (w_{k_j}) una subsucesión de (w_k), tendríamos que $u = 0$. Por otra parte

$$|u|_{2^*} = \lim_{j\to\infty} |w_{k_j}|_{2^*} = |w|_{2^*} \neq 0,$$

y esto es una contradicción.

2.2. La formulación variacional del problema

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado. Para $2 < p < 2^*$, consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u, \\ \quad u \in D_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{$\wp_p$}$$

Usando la fórmula de Green vemos que, si $v \in D_0^{1,2}(\Omega)$ es solución de $(\wp_p)$ -llamada solución clásica de $(\wp_p)$-, entonces satisface la ecuación

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega |v|^{p-2} v\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

La densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ nos permite extender la identidad anterior a todo $D_0^{1,2}(\Omega)$ y al sustituir φ por v obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |v|^p = \|v\|^2 - |v|_p^p = 0. \tag{2.6}$$

Usualmente, a una función que satisface (2.5) se le llama solución débil al problema $(\wp_p)$. La razón es que (2.5), en general, no es una condición suficiente para ser una solución de $(\wp_p)$. Sin embargo, en dominios suaves, cualquier solución débil también es una solución clásica del problema $(\wp_p)$. Una referencia para este tipo de resultados es [11], o bien, se puede consultar la discusión en [14, Teorema B.3].
De modo que a una función que satisfaga (2.5) le llamaremos simplemente una solución de $(\wp_p)$. Por esta razón nos concentraremos exclusivamente en buscar soluciones en el sentido débil.

Definimos un funcional en $D_0^{1,2}(\Omega)$ como sigue

$$J_p(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

El Teorema 2.14 asegura que J_p está bien definido para p en el intervalo $[2, 2^*]$. Nos referiremos a éste como el funcional de energía, el cual es de clase C^2 y sus puntos críticos corresponden a soluciones de $(\wp_p)$. Mirar al problema desde esta perspectiva nos da mucha flexibilidad, pues nos permite introducir herramientas de distintas áreas para demostrar la existencia de soluciones y obtener resultados sobre sus propiedades. Nótese que un punto crítico v de J_p cumple que

$$0 = J_p'(v)[v] = \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega |v|^p = \|v\|^2 - |v|_p^p,$$

Entonces los puntos críticos de J_p satisfacen la ecuación (2.6), lo cual sugiere buscar soluciones en el conjunto

$$\mathcal{N}_p := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|^2 = |u|_p^p,\ u \neq 0\}.$$

Este conjunto es una variedad de Hilbert de clase C^2 y se le conoce como la variedad de Nehari. La variedad de Nehari contiene a todos los puntos críticos no triviales de J_p y es una restricción natural de este funcional, es decir, todo punto crítico de la restricción $J_p|_{\mathcal{N}_p}$ también es un punto crítico de J_p. Además, se cumple que para todo $u \neq 0$ existe un único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_p$. De hecho, $t_u = \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$. De esta expresión se sigue que $\mathcal{N}_p$ es radialmente difeomorfa a la esfera unitaria de $D_0^{1,2}(\Omega)$. Para más detalles sobre la variedad de Nehari se puede consultar [16].

Sea
$$c_p := \inf_{u\in\mathcal{N}_p} J_p(u).$$
Como $D_0^{1,2}(\Omega)$ es de dimensión infinita se sigue que $\mathcal{N}_p \neq \emptyset$ y en consecuencia $c_p < \infty$. Si este ínfimo se alcanza, obtenemos una solución no trivial de $(\wp_p)$. Para $p \in (2, 2^*)$ y Ω acotado, usando métodos estándar, donde el teorema de Rellich-Kondrashov juega un papel importante, se puede demostrar que c_p siempre se alcanza. Una exposición muy completa de este resultado de existencia se puede consultar en [14, Teorema 2.1]. Por lo tanto, el problema subcrítico siempre tiene una solución de energía mínima en dominios acotados.

2.2.1. El problema simétrico

Sea Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$, el grupo de isometrías lineales en $\mathbb{R}^N$. Para todo $z \in \mathbb{R}^N$, denotamos por $\Gamma z = \{\gamma z : \gamma \in \Gamma\}$ a la órbita de z y por $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$ al grupo de isotropía de z. Se cumple que Γ/Γ_z es homeomorfo a la órbita de z. Esto implica que $\#\Gamma z = |\Gamma/\Gamma_z|$, el índice de Γ_z en Γ.
Si $A \subset \mathbb{R}^N$, decimos que A es Γ-invariante si $\Gamma z \subset A$ para todo $z \in A$. Por ejemplo, la bola unitaria con centro en el origen es Γ-invariante.
Sea $\phi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2$ un homomorfismo continuo de grupos. Si es Ω Γ-invariante, por medio de este homomorfismo podemos construir una acción de Γ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ como sigue
$$\gamma u(x) := \phi(\gamma)u(\gamma^{-1}x).$$
El conjunto de puntos fijos de esta acción es
$$D_0^{1,2}(\Omega)^\phi := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : \gamma u = u,\ \forall \gamma \in \Gamma\}.$$
Equivalentemente, u es un punto fijo si y sólo si
$$u(\gamma x) = \phi(\gamma)u(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma,\ \forall x \in \Omega. \tag{2.7}$$
Tomemos un punto fijo u de esta acción. Si ϕ es el homomorfismo trivial, la ecuación (2.7) se traduce en que u es Γ-invariante. Por otro lado, si ϕ es suprayectiva, la misma ecuación significa en este caso que u si no se anula, cambia de signo y es K-invariante, donde $K = \ker(\phi)$.
Nótese que 0 siempre es un punto fijo de esta acción, sin embargo, ésta podría ser la única función en $D_0^{1,2}(\Omega)^\phi$.

Ejemplo 2.18. Sean $\Gamma = O(N)$, $\phi = \det$ y u un punto fijo. Para $z \in \Omega$, elegimos una reflexión α respecto a algún hiperplano que contenga a z. Si ponemos a z y α en la identidad (2.7), dado que z queda fijo respecto a α y $\phi(\alpha) = -1$, concluimos que $u(z) = 0$. Así que u debe anularse en todo Ω.

Por esta razón, vamos a suponer que existe $\zeta \in \Omega$ tal que $\Gamma_\zeta \subset \ker(\phi)$. Esto es suficiente para asegurar que el espacio $D_0^{1,2}(\Omega)^\phi$ tiene dimensión infinita (ver [4]).

Estamos listos para plantear el problema simétrico

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \\ u(\gamma x) = \phi(\gamma)u(x) & \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{$\wp_p^\phi$}$$

donde $2 < p < 2^*$ y Ω es un dominio suave, acotado y Γ-invariante. Como en el problema sin simetrías, tenemos la variedad de Nehari asociada

$$\mathcal{N}_p^\phi := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi : \|u\|^2 = |u|_p^p;\ u \neq 0\}.$$

Si queremos proceder como antes, debemos asegurarnos de que los puntos críticos de la restricción $J_p|_{\mathcal{N}_p^\phi}$ también lo sean del funcional J_p que está definido en todo $D_0^{1,2}(\Omega)$. En efecto, esto ocurre. A este resultado se le conoce como el principio de criticalidad simétrica.

Teorema 2.19. *(Principio de criticalidad simétrica.) Sean G un subgrupo cerrado de $O(N)$ y H un G-espacio de Hilbert (esto es, H es un espacio de Hilbert equipado con una acción de G) y $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional G-invariante de clase C^1. Denotamos por H^G al espacio de puntos fijos de esta acción. Si $u \in H^G$ es un punto crítico de la restricción $J|_{H^G}$, entonces u es un punto crítico de J.*

Demostración. Ver [13]. ■

En virtud de este principio, las soluciones de $(\wp_p^\phi)$ corresponden a puntos críticos del funcional $J_p|_{\mathcal{N}_p^\phi}$. Las no triviales pertenecen a la variedad de Nehari.
Definimos

$$c_p^\phi(\Omega) := \inf_{u \in \mathcal{N}_p^\phi} J_p(u).$$

Para facilitar la notación, escribiremos J_*, $\mathcal{N}_*^\phi$ y $c_*^\phi(\Omega)$ en vez de J_{2^*}, $\mathcal{N}_{2^*}^\phi$ y $c_{2^*}^\phi(\Omega)$, respectivamente; y si el contexto lo permite, escribiremos c_p^ϕ sin especificar el dominio. Como consecuencia del Teorema 2.19 y de que $D_0^{1,2}(\Omega)^\phi$ es de dimensión infinita, de forma completamente análoga al problema sin simetrías, se demuestra que $(\wp_p^\phi)$ admite una solución no trivial de energía mínima si $p \in (2, 2^*)$ y Ω es un dominio acotado. Por otra parte, es posible que c_*^ϕ no se alcance en $\mathcal{N}_*^\phi$. En el próximo capítulo daremos ejemplos donde esto ocurre.

Capítulo 3

El teorema de concentración

Como discutimos en el capítulo anterior, el problema ($\wp_p^\phi$) admite una solución no trivial de energía mínima, siempre que Ω sea un dominio acotado y suave y p sea menor que el exponente crítico. Ahora nos preguntamos ¿qué sucede con estas soluciones cuando $p \to 2^*$? Dedicaremos este capítulo a dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta.

3.1. El teorema de concentración

Sean $N \geq 3$ Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$, Ω un dominio suave, acotado y Γ-invariante de $\mathbb{R}^N$ y $\phi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2$ un homomorfismo continuo de grupos. Para toda $p \in (2, 2^*)$, sea $u_p \in \mathcal{N}_p^\phi$ un mínimo del funcional de energía J_p sobre la variedad de Nehari. También, sea $t_p > 0$ tal que $\hat{u}_p := t_p u_p \in \mathcal{N}_*^\phi$. Recordemos que

$$t_p = \left(\frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_{2^*}^{2^*}} \right)^{\frac{1}{2^*-2}} = \left(\frac{|u_p|_p^p}{|u_p|_{2^*}^{2^*}} \right)^{\frac{1}{2^*-2}}. \tag{3.1}$$

Consideremos al número

$$S_p^\phi(\Omega) := \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2}.$$

La desigualdad de Poincaré (Teorema 2.14) nos permite concluir que $S_p^\phi(\Omega) > 0$, siempre que $p \in [2, 2^*]$. Escribiremos $S_*^\phi(\Omega)$ en vez de $S_{2^*}^\phi(\Omega)$ y cuando sea claro en que dominio estamos trabajando escribiremos solamente S_p^ϕ.
A continuación veremos cómo se relacionan las constantes S_p^ϕ y c_p^ϕ.

Proposición 3.1. *Sea $p \in (2, 2^*]$. Se cumple que*

$$c_p^\phi = \frac{p-2}{2p} (S_p^\phi)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Demostración. Para cada $u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \setminus \{0\}$ sea $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_p^\phi$. Entonces, según la identidad (3.1), podemos describir a la variedad de Nehari como

$$\mathcal{N}_p^\phi = \left\{ \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} u : u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi, u \neq 0 \right\}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\inf_{w \in \mathcal{N}_p^\phi} J_p(w) &= \inf_{w \in \mathcal{N}_p^\phi} \frac{p-2}{2p} \|w\|^2 = \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \\ u \neq 0}} \frac{p-2}{2p} \left\| \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}} u \right\|^2 \\
&= \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \\ u \neq 0}} \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \|u\|^2 = \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \\ u \neq 0}} \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} \right)^{\frac{p}{p-2}}.
\end{aligned}$$

Recordando que $S_p^\phi = \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2}$, concluimos la demostración. ■

Esta proposición muestra que el funcional de energía J_p alcanza su mínimo si y sólo sí el ínfimo S_p^ϕ se alcanza en $D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \setminus \{0\}$. En particular, $S_p^\phi = \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_p^2}$ para $p \in (2, 2^*)$. El siguiente lema asegura, entre otras cosas, que $(\hat{u}_p)$ es una sucesión minimizante para J_*.

Lema 3.2. *Se tiene que*

$$\lim_{p \to 2^*} c_p^\phi = c_*^\phi, \qquad \lim_{p \to 2^*} t_p = 1, \qquad \lim_{p \to 2^*} J_*(\hat{u}_p) = c_*^\phi.$$

Demostración. Ya que Ω es acotado, si $p < q$, se sigue de la desigualdad de Hölder que

$$|u|_p \leq |\Omega|^{\frac{q-p}{pq}} |u|_q.$$

Si $u \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \setminus \{0\}$, de la desigualdad anterior obtenemos, para $p \in (2, 2^*)$

$$|\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^* p}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} \leq |\Omega|^{\frac{(p-2)}{p}} \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2}. \tag{3.2}$$

Tomando ínfimos sobre $D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \setminus \{0\}$, la desigualdad anterior se transforma en

$$|\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^* p}} S_*^\phi \leq S_p^\phi \leq |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} S_2^\phi$$

y haciendo $p \to 2^*$, para alguna constante $C > 0$ tenemos

$$S_*^\phi \leq \liminf_{p \to 2^*} S_p^\phi \leq \limsup_{p \to 2^*} S_p^\phi \leq C < \infty.$$

Afirmamos que $\limsup_{p\to 2^*} S_p^\phi \leq S_*^\phi$. Argumentando por contradicción, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_*^\phi + \varepsilon < \limsup_{p\to 2^*} S_p^\phi$. Tomamos $v \in D_0^{1,2}(\Omega)^\phi \setminus \{0\}$ tal que

$$\frac{\|v\|^2}{|v|_{2^*}^2} < S_*^\phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como la función $p \mapsto |v|_p$ es continua por la izquierda, existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\left| \frac{\|v\|^2}{|v|_p^2} - \frac{\|v\|^2}{|v|_{2^*}^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } p \in (q, 2^*].$$

Entonces

$$S_p^\phi \leq \frac{\|v\|^2}{|v|_p^2} < \frac{\|v\|^2}{|v|_{2^*}^2} + \frac{\varepsilon}{2} < S_*^\phi + \varepsilon.$$

Luego, cuando $p \to 2^*$ obtenemos

$$\limsup_{p\to 2^*} S_p^\phi \leq S_*^\phi + \varepsilon.$$

Esto es una contradicción, por lo tanto $\lim_{p\to 2^*} S_p^\phi = S_*^\phi$, y por la Proposición 3.1, también tenemos que $\lim_{p\to 2^*} c_p^\phi = c_*^\phi$. Poniendo a u_p en la desigualdad (3.2) obtenemos que

$$|\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^* p}} S_*^\phi \leq |\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^* p}} \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_{2^*}^2} \leq \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_p^2} = S_p^\phi$$

y, tomando límites cuando $p \to 2^*$,

$$\lim_{p\to 2^*} \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_{2^*}^2} = \lim_{p\to 2^*} \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_p^2} = S_*^\phi.$$

Como $c_p^\phi = \frac{p-2}{2p}\|u_p\|^2$ y $\lim_{p\to 2^*} c_p^\phi$ existe, la igualdad de arriba implica que los límites $\lim_{p\to 2^*} |u_p|_{2^*}$ y $\lim_{p\to 2^*} |u_p|_p$ también existen y son iguales, y de (3.1) concluimos que $\lim_{p\to 2^*} t_p = 1$. Terminamos la demostración notando que

$$\lim_{p\to 2^*} J_*(\hat{u}_p) = \lim_{p\to 2^*} \frac{2^* - 2}{22^*} \|t_p u_p\|^2 = \lim_{p\to 2^*} \frac{p-2}{2p} {t_p}^2 \|u_p\|^2 = \lim_{p\to 2^*} {t_p}^2 c_p^\phi = c_*^\phi.$$

■

Pensemos ahora en el problema límite

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u, \\ \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u(\gamma x) = \phi(\gamma) u(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\wp_\infty^\phi$}$$

Como antes, tenemos el funcional de energía, la variedad de Nehari y el ínfimo asociados a este problema:

$$J_\infty(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*},$$

$$\mathcal{N}_\infty^\phi := \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)^\phi : \|u\|^2 = |u|_{2^*}^{2^*}, u \neq 0\},$$

$$c_\infty^\phi := \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty^\phi} J_\infty(u).$$

Ahora demostraremos algunos lemas que serán útiles más adelante.
Recordemos que la ε-dilatación de una función $w \in D_0^{1,2}(\Omega)$ está definida como

$$w_\varepsilon(x) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

donde $\varepsilon > 0$.

Lema 3.3. *Sea $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, (ξ_k) en $\mathbb{R}^N$ y (ε_k) en $(0, \infty)$ tales que $\xi_k \to \xi$ y $\varepsilon_k \to \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Definimos $u_k(x) := v_{\varepsilon_k}(x - \xi_k)$ y $u(x) = v_\varepsilon(x - \xi)$. Entonces $u_k \rightharpoonup u$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, como $\|u_k\| = \|v\| = \|u\|$, se sigue que $u_k \to u$ fuertemente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Consideremos dos casos:

CASO 1: $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Es suficiente demostrar que cualquier subsucesión de (u_k) contiene una subsucesión que converge débilmente a u en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Sea pues, (u_{k_j}) una subsucesión de (u_k). Como v es continua, de la definición de (u_k) es claro que $u_k \to u$ puntualmente en $\mathbb{R}^N$, propiedad que también satisface (u_{k_j}). Luego, (u_{k_j}) está acotada ya que (u_k) lo está y, por el Corolario 2.17, pasando a una subsucesión, se cumple que

$$\begin{aligned} u_{k_j} &\rightharpoonup w \qquad \text{débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ u_{k_j} &\to w \qquad \text{c. d. en } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

De la segunda afirmación y la unicidad de los límites, se sigue que $w = u$. Por lo tanto, esta es la sucesión buscada.

CASO 2: $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ arbitraria.
Sea $\delta > 0$, como $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 2.12), existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|v - \psi\| < \delta$. Definimos $w_k(x) := \psi_{\varepsilon_k}(x - \xi_k)$ y $w(x) = \psi_\varepsilon(x - \xi)$. De la invariancia bajo dilataciones de la norma $\|\cdot\|$ se sigue que $\|u - w\| = \|u_k - w_k\| = \|v - \psi\| < \delta$.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz concluimos que

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k \cdot \nabla\varphi - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla\varphi\right| &\le \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_k - w_k) \cdot \nabla\varphi\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla\varphi - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla\varphi\right| \\ &\le \|u_k - w_k\|\|\varphi\| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(w_k - u) \cdot \nabla\varphi\right| \\ &\le \delta\|\varphi\| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(w_k - u) \cdot \nabla\varphi\right|.\end{aligned}$$

Por otra parte, el Caso 1 asegura que $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(w_k - u) \cdot \nabla\varphi\right| &\le \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla\varphi - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla\varphi\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(w - u) \cdot \nabla\varphi\right| \\ &\le \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla\varphi - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla\varphi\right| + \|w - u\|\|\varphi\| \\ &\to \|w - u\|\|\varphi\| \le \delta\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k \cdot \nabla\varphi - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla\varphi\right| \to 2\delta\|\varphi\|.$$

Como lo anterior es válido para cualquier $\delta > 0$, concluimos el lema. ■

Lema 3.4. *Sea $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y (ξ_k) en $\mathbb{R}^N$ tal que $|\xi_k| \to \infty$. Definimos $u_k(x) := u(x + \xi_k)$, entonces $u_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $X := \mathrm{sop}(\varphi)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y haciendo $z = x + \xi_k$, para alguna constante $C > 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k \cdot \nabla\varphi\right| = \left|\int_X \nabla u(x + \xi_k) \cdot \nabla\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_{X+\xi_k} \nabla u(z) \cdot \nabla\varphi(z - \xi_k)dz\right| \\ \le C\left(\int_{X+\xi_k} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$, ya que $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. ■

Usaremos el siguiente resultado, cuya demostración puede hallarse en [7] y en [16, Apéndice A].

Proposición 3.5. *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $p, r \in [1, \infty)$ y $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Si existe $c > 0$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq c(|s|^{\frac{p}{r}} + 1) \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces el operador de Nemytskii

$$f_{\#} : L^p(\Omega) \to L^r(\Omega), \quad f_{\#}(u)(x) := f(x, u(x)),$$

está bien definido y es continuo.

Lema 3.6. *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(V)$, donde V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ (posiblemente no acotado) entonces, pasando a una subsucesión,*

$$\lim_{k \to \infty} \int_V |u_k|^{2^*-2} u_k \varphi = \int_V |u|^{2^*-2} u \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(V).$$

Demostración. Dividimos la demostración en dos casos:

Caso 1: V es acotado.

Sea $p \in (2^* - 1, 2^*)$, el teorema de Rellich-Kodrashov asegura que, pasando a una subsucesión, $u_k \to u$ en $L^p(V)$. Luego, sea $g : \overline{V} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(x,s) = |s|^{2^*-2} s.$$

Esta cumple la desigualdad

$$|g(x,s)| = ||s|^{2^*-2} s| \leq (|s|^{2^*-1} + 1) \quad \forall (x,s) \in \overline{V} \times \mathbb{R}.$$

Por la Proposición 3.5, el operador

$$\begin{aligned} L^p(V) &\to L^{\frac{p}{2^*-1}}(V) \\ v &\mapsto |v|^{2^*-2} v \end{aligned}$$

está bien definido y es continuo, por lo tanto

$$|u_k|^{2^*-2} u_k \to |u|^{2^*-2} u \qquad \text{en } L^{\frac{p}{2^*-1}}(V).$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(V)$, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_V |u_k|^{2^*-2} u_k \varphi - \int_V |u|^{2^*-2} u \varphi \right| &\leq \int_V |(|u_k|^{2^*-2} u_k - |u|^{2^*-2} u) \varphi| \\ &\leq \left| |u_k|^{2^*-2} u_k - |u|^{2^*-2} u \right|_{\frac{p}{2^*-1}} |\varphi|_{\frac{p}{p-(2^*-1)}}, \end{aligned}$$

esta última expresión tiende a 0 cuando $k \to \infty$.

Caso 2: V arbitrario.

En este caso, procedemos de forma similar al Corolario 2.17. Definimos, para $k \in \mathbb{R}^N$

$$V_k := \{x \in V : |x| < k \text{ y } \operatorname{dist}(x, \partial V) < \frac{1}{k}\},$$

todos estos subconjuntos de V son abiertos y acotados. Así, por el Caso 1, aplicado a la restricción de u_k a V_1, existe una subsucesión $(u_{1,j})$ de (u_k) que cumple

$$\lim_{j\to\infty} \int_{V_1} |u_{1,j}|^{2^*-2} u_{1,j}\varphi = \int_{V_1} |u|^{2^*-2} u\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(V_1).$$

Continuamos recursivamente, tomando una subsucesión $(u_{k,j})$ de $(u_{k-1,j})$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{V_k} |u_{k,j}|^{2^*-2} u_{k,j}\varphi = \int_{V_k} |u|^{2^*-2} u\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(V_k).$$

Definimos $v_k := u_{k,k}$. De esta manera, sean $\varphi \in C_c^\infty(V)$ y $\varepsilon > 0$. Como $\operatorname{sop}(\varphi) \subset V$ es compacto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subset V_k$ para todo $k > k_0$.
Luego, por construcción, existe $j_0 > k_0$ tal que

$$\left| \int_{V_{k_0}} |u_{k_0,j}|^{2^*-2} u_{k_0,j}\varphi - \int_{V_{k_0}} |u|^{2^*-2} u\varphi \right| < \varepsilon \quad \forall j > j_0.$$

Así, para $k > j_0$, como $(u_{k,j})$ es subsucesión de $(u_{k_0,j})$, concluimos que

$$\left| \int_V |u_{k,k}|^{2^*-2} u_{k,k}\varphi - \int_V |u|^{2^*-2} u\varphi \right| = \left| \int_{V_{k_0}} |u_{k,k}|^{2^*-2} u_{k,k}\varphi - \int_{V_{k_0}} |u|^{2^*-2} u\varphi \right| < \varepsilon,$$

esto demuestra el lema. ∎

En lo que sigue, si K es un subgrupo de Γ, escribiremos $\phi|K$ para denotar a la restricción del homomorfismo ϕ a K. Como $\mathcal{N}_\infty^\phi \subseteq \mathcal{N}_\infty^{\phi|K}$, tenemos la desigualdad $c_\infty^{\phi|K} \leq c_\infty^\phi$.
Requeriremos el siguiente lema técnico.

Lema 3.7. *Sean $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^N$, $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{r}{2}$ y $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq r$. Definimos $\hat{w}_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x-\zeta)\chi(x-\zeta)$, entonces*

$$|\hat{w}_\varepsilon|_{2^*}^{2^*} \to |w|_{2^*}^{2^*} \qquad y \qquad \|\hat{w}_\varepsilon\|^2 \to \|w\|^2 \qquad \textit{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Para motivar este lema, posponemos la demostración y lo aplicamos primero para demostrar la siguiente desigualdad.

Lema 3.8. *Se tiene la siguiente estimación*

$$c_*^\phi \leq \inf_{\xi\in\Omega} |\Gamma/\Gamma_\xi| c_\infty^{\phi|\Gamma_\xi}.$$

Demostración. Si Ω no contiene órbitas finitas la desigualdad se da trivialmente. Supongamos entonces que existe $\zeta \in \Omega$ tal que $|\Gamma/\Gamma_\zeta| < \infty$ y sea $w \in \mathcal{N}_\infty^{\phi|\Gamma_\zeta}$. Elegimos $r \in (0, \mathrm{dist}(\zeta, \partial\Omega))$ tal que $|\alpha\zeta - \beta\zeta| > 2r$ si $\alpha^{-1}\beta \notin \Gamma_\zeta$. Para w, r y ζ, tomamos $\hat{w}_\varepsilon$ como en el Lema 3.7. Nótese que $\mathrm{sop}(\hat{w}_\varepsilon) \subset \Omega$, por la elección de r. Sea

$$t_\varepsilon = \left(\frac{\|\hat{w}_\varepsilon\|^2}{|\hat{w}_\varepsilon|_{2^*}^{2^*}} \right)^{\frac{1}{2^*-2}},$$

entonces $t_\varepsilon \hat{w}_\varepsilon \in \mathcal{N}_\infty^\phi$. Este mismo lema asegura que $t_\varepsilon \to 1$ cuando $\varepsilon \to 0$, pues $w \in \mathcal{N}_\infty^\phi$. Definimos la siguiente función

$$u_\varepsilon(x) := \sum_{[\alpha]\in\Gamma/\Gamma_\zeta} \phi(\alpha) t_\varepsilon \hat{w}_\varepsilon(\alpha^{-1}x) = \begin{cases} \phi(\beta) t_\varepsilon \hat{w}_\varepsilon(\beta^{-1}x) & \text{si } x \in B_r(\beta\zeta), \beta \in \Gamma, \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup\limits_{\beta\in\Gamma} B_r(\beta\zeta). \end{cases}$$

Por construcción, es claro que $u_\varepsilon(\gamma x) = \phi(\gamma) u_\varepsilon(x)$, para toda $\gamma \in \Gamma$, $x \in \Omega$ y $u_\varepsilon \in \mathcal{N}_*^\phi$. Más aún, si $\varepsilon \to 0$

$$c_*^\phi \le J_*(u_\varepsilon) = \frac{1}{N}\|u_\varepsilon\|^2 = |\Gamma/\Gamma_\zeta| \frac{1}{N} t_\varepsilon^2 \|\hat{w}_\varepsilon\|^2 \to |\Gamma/\Gamma_\zeta| \frac{1}{N}\|w\|^2 = |\Gamma/\Gamma_\zeta| J_\infty(w)$$

Se sigue que $c_*^\phi \le |\Gamma/\Gamma_\zeta| c_\infty^{\phi|\Gamma_\zeta}$ y, luego de tomar ínfimo sobre Ω en esa desigualdad, obtenemos la estimación. ■

Ahora sí, calculamos los límites.

Demostración del Lema 3.7. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N : \frac{r}{2\varepsilon} < |x| < \frac{r}{\varepsilon}\}$. Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$, entonces

$$\int_{A_\varepsilon} |u|^p \to 0 \;\text{ y } \int\limits_{B_{\frac{r}{2\varepsilon}}(0)} |u|^p \to |u|_p^p \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

De esta observación, haciendo el cambio de variable $y = \frac{x-\zeta}{\varepsilon}$ y eligiendo una constante $C > 0$ tal que $|\chi|^{2^*} \le C$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\hat{w}_\varepsilon|^{2^*} &= \int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(\zeta)} |w_\varepsilon(x-\zeta)|^{2^*} dx + \int\limits_{\frac{r}{2}<|x-\zeta|<r} |w_\varepsilon(x-\zeta)\chi(x-\zeta)|^{2^*} dx \\
&= \int\limits_{B_{\frac{r}{2\varepsilon}}(0)} |w(y)|^{2^*} dy + \int\limits_{A_\varepsilon} |w(y)\chi(\varepsilon y)|^{2^*} dy \\
&\le \int\limits_{B_{\frac{r}{2\varepsilon}}(0)} |w(y)|^{2^*} dy + C\int\limits_{A_\varepsilon} |w(y)|^{2^*} dy \to |w|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Y también

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{w}_\varepsilon|^2 = \int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(\zeta)} |\nabla w_\varepsilon(x-\zeta)|^2 dx$$
$$+ \int\limits_{\frac{r}{2}<|x-\zeta|<r} |w_\varepsilon(x-\zeta)\nabla\chi(x-\zeta) + \chi(x-\zeta)\nabla w_\varepsilon(x-\zeta)|^2 dx$$

El primer sumando tiende a $\|w\|^2$. Por otra parte, haciendo el mismo cambio de variable, y usando que $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ para $p \geq 1$,

$$\int\limits_{\frac{r}{2}<|x-\zeta|<r} |w_\varepsilon(x-\zeta)\nabla\chi(x-\zeta) + \chi(x-\zeta)\nabla w_\varepsilon(x-\zeta)|^2 dx$$
$$\leq 4\left(\varepsilon^2 \int\limits_{A_\varepsilon} w(y)^2|\nabla\chi(\varepsilon y)|^2 dy + \int\limits_{A_\varepsilon} |\chi(\varepsilon y)|^2|\nabla w(y)|^2 dy\right)$$

Como con el primer límite, también tenemos que $\int_{A_\varepsilon} \chi(\varepsilon y)|\nabla w(y)|^2 dy \to 0$. Además, por la desigualdad de Hölder, haciendo $z = \varepsilon y$ y para alguna constante $C > 0$, se cumple que

$$\varepsilon^2 \int\limits_{A_\varepsilon} w(y)^2|\nabla\chi(\varepsilon y)|^2 dy \leq \varepsilon^2 \left(\int_{A_\varepsilon} |w(y)|^{2^*} dy\right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\varepsilon^{-N} \int\limits_{A_1} |\nabla\chi(z)|^N dz\right)^{\frac{2}{N}}$$
$$= C\left(\int_{A_\varepsilon} |w(y)|^{2^*} dy\right)^{\frac{2}{2^*}} \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Esto concluye la demostración. ∎

La desigualdad del lema anterior nos da un criterio bastante sencillo para descartar la existencia de soluciones de energía mínima para el problema de exponente crítico.

Teorema 3.9. *Si Ω contiene un punto fijo de Γ, entonces $c_\infty^\phi = c_*^\phi$ y este ínfimo no se alcanza en $\mathcal{N}_*^\phi$ por J_**

La demostración requiere un resultado conocido como el principio de continuación única cuya prueba se puede consultar en [12, 9].

Teorema 3.10. *(Principio de continuación única). Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $V \in C^0(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ satisface*

$$-\Delta u + V(x)u = 0$$

y $u = 0$ en un subconjunto abierto y no vacío de Ω, entonces $u = 0$ en Ω.

Demostración del Teorema 3.9. Si $w \in D_0^{1,2}(\Omega)$, denotamos por $\overline{w}$ a la extensión trivial de w a todo $\mathbb{R}^N$. Como el funcional de energía está definido en términos de integrales, se sigue que $J_*(w) = J_\infty(\overline{w})$. Más aún, si $w \in \mathcal{N}_*^\phi$, entonces $\overline{w} \in \mathcal{N}_\infty^\phi$. Por lo tanto, tenemos la desigualdad $c_\infty^\phi \leq c_*^\phi$.
Sea ζ un punto fijo de Γ, entonces $\Gamma_\zeta = \Gamma$ y del Lema 3.8

$$c_*^\phi \leq \inf_{\xi \in \Omega} |\Gamma/\Gamma_\xi| c_\infty^{\phi|\Gamma_\xi} \leq |\Gamma|\Gamma_\zeta| c_\infty^{\phi/\Gamma_\zeta} = c_\infty^\phi \leq c_*^\phi.$$

Ahora, supongamos que u es un mínimo de J_* sobre $\mathcal{N}_*^\phi$. Entonces, se cumple que $J_\infty(\overline{u}) = J_*(u) = c_*^\phi = c_\infty^\phi$, por lo que $\overline{u}$ es solución no trivial del problema $(\wp_\infty^\phi)$ y $\overline{u}|_{\mathbb{R}^N \smallsetminus \overline{\Omega}} = 0$, lo cual contradice al principio de continuación única. ■

Ejemplo 3.11. Comentamos antes que el problema $(\wp_{2^*}^\phi)$ no necesariamente admite soluciones no triviales de energía mínima. Por ejemplo, si Ω contiene al origen, automaticamente se satisface la hipótesis del Teorema 3.9 y, por lo tanto, J_* no alcanza su mínimo sobre la variedad de Nehari.

A continuación enunciamos el teorema de concentración.

Teorema 3.12. *Sean $p_k \in (2, 2^*)$ tales que $p_k \to 2^*$ y sea u_k mínimo de J_{p_k} en $N_{p_k}^\phi$. Entonces, pasando a una subsucesión, una de las siguientes posibilidades ocurre: o bien (u_k) converge fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)^\phi$ a un mínimo de J_* sobre $\mathcal{N}_*^\phi$, o existen un subgrupo cerrado K de índice finito en Γ, una sucesión (ε_k) en $(0, \infty)$, una sucesión (ζ_k) en Ω y una solución no trivial w del problema $(\wp_\infty)$ con las siguientes propiedades:*

(i) $\Gamma_{\zeta_k} = K$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\varepsilon_k^{-1} \mathrm{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \to \infty$ *y* $\varepsilon_k^{-1} |\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k| \to \infty$ *cuando* $k \to \infty$ *para todo* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *con* $\alpha^{-1}\beta \notin K$.

(iii) $w(\gamma z) = \phi(\gamma) w(z)$ *para cualesquiera* $\gamma \in K, z \in \mathbb{R}^N$; *y* $J_\infty(w) = c_\infty^{\phi|K}$.

(iv) $$\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \sum_{[\alpha]\in\Gamma/K} \phi(\gamma) \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} (w \circ \alpha^{-1}) \left(\frac{\cdot - \alpha\zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\| = 0.$$

(v) $$\lim_{p\to 2^*} c_p^\phi = c_*^\phi = \min_{\xi\in\Omega} |\Gamma/\Gamma_\xi| c_\infty^{\phi|\Gamma_\xi} = |\Gamma/K| c_\infty^{\phi|K}.$$

Antes de iniciar con la demostración conviene hacer algunos comentarios sobre este teorema. En primer lugar, hay que destacar que éste es un resultado de existencia, pues sin importar cuál de las dos posibilidades ocurra, obtenemos una solución de un problema de exponente crítico. Sin embargo, el caso más interesante es aquel donde (u_k) no converge.

Cuando (u_k) no converge, obtenemos una solución de energía mínima w del problema límite $(\wp_\infty^{\phi|K})$, cuyas simetrías están descritas por (iii). Si ϕ es no trivial, éstas

aseguran que w cambia de signo y no es radial. En particular, no es la burbuja estándar.
El resto de las propiedades nos ayudan a entender por qué no converge la sucesión (u_k). No hay convergencia porque (u_k) se concentra y explota alrededor de un número finito de puntos. Según la afirmación (iv), el perfil asintótico de (u_k) está dado por

$$\sum_{[\alpha]\in\Gamma/K} \phi(\gamma)\varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}}(w\circ\alpha^{-1})\left(\frac{\cdot-\alpha\zeta_k}{\varepsilon_k}.\right)$$

Esta suma consiste de $|\Gamma/K|$ dilataciones de w con signos determinados por ϕ, centradas en los puntos de la Γ-órbita de ζ_k. Cuando $k\to\infty$, éstas se concentran y explotan en el punto correspondiente de la Γ-órbita de ζ y que, por (i), es un punto fijo de K.
Geométricamente, la afirmación (ii) nos dice que al hacer el reescalamiento mediante ε_k^{-1}, la órbita de ζ_k se separa cada vez más de la frontera de Ω y los puntos que la conforman también se separan unos de otros. De esta manera, cuando k es suficientemente grande, alrededor de cada punto en la órbita de ζ_k, esencialmente sólo vemos un reescalamiento de w. Esto se ve reflejado en el hecho de que la energía de (u_k) tiende a $|\Gamma/K|$ veces la energía de w, como muestra el límite en (v).

De la afirmación en (v), se desprende de inmediato el siguiente resultado de existencia.

Corolario 3.13. *Sean $p_k\in(2,2^*)$ tales que $p_k\to 2^*$ y u_k es solución minimizante del problema $(\wp_{p_k}^{\phi})$. Si*

$$c_*^{\phi} < \min_{\xi\in\Omega}|\Gamma/\Gamma_\xi|c_\infty^{\phi|\Gamma_\xi},$$

entonces, pasando a una subsucesión, (u_k) converge fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ a una solución no trivial de energía mínima del problema $(\wp_{2^*}^{\phi})$.

Ejemplo 3.14. Tomemos $R>0$ y sea $\Omega:=\{x\in\mathbb{R}^N : R<|x|<2R\}$, $\Gamma=O(N)$ y ϕ el homomorfismo trivial. Para este caso, todas las Γ-órbitas son infinitas, entonces el Corolario 3.13 asegura que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u=|u|^{2^*-2}u & \text{en } \Omega,\\ u=0 & \text{en } \partial\Omega.\end{cases}$$

tiene una solución radial no trivial de energía mínima entre todas las funciones $O(N)$-invariantes (es decir, funciones radiales). Vale la pena hacer contraste con el Ejemplo 3.11, donde exhibimos un tipo de problemas que no admiten soluciones no triviales de energía mínima.

Dedicaremos la sección que sigue a la demostración del Teorema 3.12.

3.2. Demostración del teorema de concentración

El siguiente lema será sumamente importante en la demostración del teorema de concentración.

Lema 3.15. *Dadas sucesiones* (ε_k) *en* $(0,\infty)$ *y* (ξ_k) *en* $\mathbb{R}^N$*, existe una sucesión* (ζ_k) *en* $\mathbb{R}^N$ *y un subgrupo cerrado* K *de* Γ *tales que, pasando a una subsucesión, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *La sucesión* $(\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\Gamma\xi_k,\zeta_k))$ *es acotada.*

(b) $\Gamma_{\zeta_k} = K$ *para todo* $k\in\mathbb{N}$.

(c) *Si* $|\Gamma/K|<\infty$ *entonces* $\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k-\beta\zeta_k|\to\infty$ *para cualesquiera* $\alpha,\beta\in\Gamma$ *con* $\alpha^{-1}\beta\notin K$.

(d) *Si* $|\Gamma/K|=\infty$ *entonces existe un subgrupo cerrado* K' *de* Γ *tal que* $K\subseteq K'$, $|\Gamma/K'|=\infty$ *y* $\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k-\beta\zeta_k|\to\infty$ *para todo* $\alpha,\beta\in\Gamma$ *con* $\alpha^{-1}\beta\notin K'$.

La demostración del lema enunciado arriba es bastante técnica y para no distraer la atención la separaremos de este capítulo. La retomaremos en el Apéndice A.
También usaremos el principio variacional de Ekeland, lo enunciamos a continuación (ver [14]).

Teorema 3.16. *(Principio variacional de Ekeland). Sean* $\mathcal{M}$ *una subvariedad de Hilbert de clase* C^2 *de un espacio de Hilbert* H, $J:H\to\mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *y* $\nabla_{\mathcal{M}}J$ *el gradiente de* J *sobre* $\mathcal{M}$*, esto es, la proyección ortogonal del gradiente* ∇J *sobre el espacio tangente a* $\mathcal{M}$*. Si* J *está acotada inferiormente en* $\mathcal{M}$ *y* $v\in\mathcal{M}$, $c\in\mathbb{R}$ *y* $\varepsilon>0$ *son tales que*

$$J(v)\leq \inf_{\mathcal{M}} J+\varepsilon$$

entonces, dado $\delta>0$*, existe* $u\in\mathcal{M}$ *tal que*

$$\begin{aligned} J(u)&\leq \inf_{\mathcal{M}} J+2\varepsilon,\\ |\nabla_{\mathcal{M}}J(u)|&\leq \frac{8\varepsilon}{\delta},\\ |u-v|&\leq 2\delta. \end{aligned}$$

Ya tenemos todo listo para el teorema principal.

Demostración del Teorema 3.12. Sean $t_k\in(0,\infty)$ tales que $\hat{u}_k := t_k u_k \in N_*^{\phi}$. Por el Lema 3.2, $t_k\to 1$ y $(\hat{u}_k)$ es una sucesión minimizante de J_* en N_*^{ϕ}. Luego, por el principio variacional de Ekeland, existe una sucesión (v_k) en N_*^{ϕ} tal que

$$J_*(v_k)\to c_*^{\phi},\qquad \nabla_{\mathcal{N}_*^{\phi}}J_*(v_k)\to 0,\qquad \|u_k-v_k\|\to 0.$$

Como $v_k\in N_*^{\phi}$, $J_*(v_k)=\frac{1}{N}\|v_k\|^2$ y entonces (v_k) es acotada. Así, pasando a una subsucesión, $v_k\rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y $v_k\to u$ c. d. en Ω. Distinguimos dos casos:

Caso 1: $u \neq 0$.

Por el Lema 3.6, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos, tras pasar a una subsucesión

$$\begin{aligned} J_*'(u)\varphi &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega |u|^{2^*-2} u\varphi \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla v_k \cdot \nabla \varphi + \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |v_k|^{2^*-2} v_k\varphi = \lim_{k\to\infty} J_*'(v_k)\varphi = 0, \end{aligned}$$

de modo que u es solución de $(\wp_*^\phi)$ y entonces $u \in N_*^\phi$, pues $u \neq 0$. Así, como la norma es débilmente semicontinua inferiormente,

$$c_*^\phi \leq J_*(u) = \frac{1}{N}\|u\|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{N}\|v_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} J_*(v_k) = c_*^\phi.$$

De esto se sigue que $\|v_k\|^2 \to \|u\|^2$ y, junto con la convergencia débil, concluimos que $v_k \to u$ fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Como $\|u_k - v_k\| \to 0$, también tenemos que $u_k \to u$ fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. En resumen, $u \in N_*^\phi$, $J_*(u) = c_*^\phi$ y $u_k \to u$ fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, lo cual demuestra que, en este caso, ocurre la primera posibilidad del enunciado.

Caso 2: $u = 0$.

En este caso la demostración es larga. Para facilitar su seguimiento la dividiremos en partes:

Parte 1. Sea $\delta \in (0, \frac{N}{2}c_*^\phi)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la siguiente función

$$Q_k(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(x)} |v_k|^{2^*}.$$

Ésta es continua, $Q_k(0) = 0$ y $Q_k(r) = |v_k|_{2^*}^{2^*} \geq Nc_*^\phi$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $r > R$, donde $R = \operatorname{diam}(\Omega)$. Entonces existen sucesiones (ε_k) y (ξ_k) en $(0,\infty)$ y $\mathbb{R}^N$, respectivamente, tales que

$$\delta = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{\varepsilon_k}(x)} |v_k|^{2^*} = \int_{B_{\varepsilon_k}(\xi_k)} |v_k|^{2^*}. \tag{3.3}$$

Como $\delta > 0$ y por las propiedades de Q_k, se sigue que $\varepsilon_k \leq R$ y $\operatorname{dist}(\xi_k, \Omega) < \varepsilon_k$. Estas dos desigualdades, junto con el hecho de que Ω está acotado, implican que la sucesión (ξ_k) está acotada.

Para las sucesiones (ε_k) y (ξ_k) tomamos K y (ζ_k) dados por el Lema 3.15. De este modo, las condiciones (i) y (ii) del Teorema se satisfacen automáticamente. El Lema 3.15 también asegura que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Gamma_{\zeta_k} = K$ y $\operatorname{dist}(\Gamma\xi_k, \zeta_k) < C\varepsilon_k$ donde $C > 0$ es alguna constante. Entonces, (ζ_k) está acotada y, como $|v_k|$ es Γinvariante, tenemos la siguiente estimación

$$\delta = \int_{B_{\varepsilon_k}(\xi_k)} |v_k|^{2^*} = \int_{B_{\varepsilon_k}(\gamma\xi_k)} |v_k|^{2^*} \leq \int_{B_{(C+1)\varepsilon_k}(\zeta_k)} |v_k|^{2^*} \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Parte 2. Sea $\Omega_k := \{z \in \mathbb{R}^N : \varepsilon_k z + \zeta_k \in \Omega\}$ y, para $z \in \Omega_k$ definimos

$$w_k(z) = \varepsilon_k^{\frac{N-2}{2}} v_k(\varepsilon_k z + \zeta_k).$$

Haciendo el cambio de variable $y = \varepsilon_k z + \zeta_k$ obtenemos la identidad

$$\int_{B_{\varepsilon_k}(x)} |v_k(y)|^{2^*} dy = \int_{B_1(\frac{x-\zeta_k}{\varepsilon_k})} |w_k(z)|^{2^*} dz.$$

Entonces, las ecuaciones (3.3) y (3.4) dan lugar a lo siguiente

$$\delta = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} |w_k|^{2^*} = \int_{B_1(\frac{\xi_k-\zeta_k}{\varepsilon_k})} |w_k|^{2^*} \leq \int_{B_{C+1}(0)} |w_k|^{2^*}. \tag{3.5}$$

Además, $\|w_k\| = \|v_k\|$, así que (w_k) también es acotada y pasando a una subsucesión, $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $w_k \to w$ fuertemente en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $w_k \to w$ c. d. en $\mathbb{R}^N$ por el Corolario 2.17.

En adelante, usaremos $o(1)$ para denotar un término que tiende a 0, cuando $k \to \infty$. Para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definimos $\varphi_k(z) = \varphi(\frac{z-\zeta_k}{\varepsilon_k})$. Es fácil comprobar que $\|\varphi^2 w_k\| = \|\varphi_k^2 v_k\|$, si se hace el cambio de variable $y = \varepsilon_k z + \zeta_k$. Entonces $(\varphi_k^2 v_k)$ está acotada en $D^{1,2}(\Omega)$ y, como $\nabla_{\mathcal{N}_*^\phi} J_*(v_k) \to 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \nabla w_k \cdot \nabla(\varphi^2 w_k) - \int_{\Omega_k} \varphi^2 |w_k|^{2^*} &= \int_\Omega \nabla v_k \cdot \nabla(\varphi_k^2 v_k) - \int_\Omega \varphi_k^2 |v_k|^{2^*} \\ &= J_*'(v_k)[\varphi_k^2 v_k] = o(1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Afirmamos que $w \neq 0$. Vamos a suponer lo contrario para llegar a una contradicción. Entonces, $w_k \to 0$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $\varphi \in C_c^\infty(B_1(x))$. Por la identidad (3.6) y las desigualdades de Hölder, (3.5), de Sobolev y la Proposición 3.1

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 &= \int_{\Omega_k} |\varphi \nabla w_k + w_k \nabla \varphi|^2 \\
&= \int_{\Omega_k} \varphi^2 |\nabla w_k|^2 + 2\int_{\Omega_k} \varphi w_k \nabla w_k \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_k} w_k^2 |\nabla \varphi|^2 \\
&= \int_{\Omega_k} \nabla w_k \cdot \nabla(\varphi^2 w_k) + o(1) = \int_{\Omega_k} \varphi^2 |w_k|^{2^*} + o(1) \\
&= \int_{\Omega_k \cap B_1(x)} |w_k|^{2^*-2} (\varphi w_k)^2 + o(1) \\
&\leq \left(\int_{B_1(x)} |w_k|^{2^*} \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \left(\int_{\Omega_k} |\varphi w_k|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1) \\
&\leq \delta^{\frac{2}{N}} S_*^{-1} \int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 + o(1) \\
&< \left(\frac{N}{2} c_*^{\phi} \right)^{\frac{2}{N}} (N c_*^{\phi})^{-\frac{2}{N}} \int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 + o(1) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{N}} \int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 + o(1).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $S_* |\varphi w_k|_{2^*}^2 \leq \|\varphi w_k\|^2 = o(1)$. En consecuencia, $|\varphi w_k|_{2^*}^{2^*} = o(1)$ para toda $z \in \mathbb{R}^N$ y $\varphi \in C_c^{\infty}(B_1(z))$. De esto concluimos que $w_k \to 0$ fuertemente en $L^{2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, lo cual es falso, por la cota que dimos en (3.5). Por lo tanto, $w \neq 0$
Como $\Gamma_{\zeta_k} = K$ para toda $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $w_k(\gamma z) = \phi(\gamma) w_k(z)$ para $\gamma \in K$ y $z \in \Omega_k$. Lo anterior implica que $w(\gamma z) = \phi(\gamma) w(z)$ casi donde sea en $\mathbb{R}^N$ porque $w_k \to w$ c.d. en $\mathbb{R}^N$.

Parte 3. Como (ζ_k) y (ε_k) están acotadas, pasando a una subsucesión, $\zeta_k \to \zeta$ y $\varepsilon_k \to \varepsilon$. De hecho, $\varepsilon = 0$. Argumentando por contradicción, supongamos que $\varepsilon > 0$. Definimos $v(z) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} w(\frac{z-\zeta}{\varepsilon})$ y $\hat{v}_k(z) := \varepsilon_k^{\frac{N-2}{2}} v(\varepsilon_k z + \zeta_k)$, entonces $w(z) = \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} v(\varepsilon z + \zeta)$.
Observemos que $v \in D_0^{1,2}(\Omega)$, pues $v_k(z) = 0$ si $z \notin \Omega$ y, entonces, $w_k(z) = 0$ si $z \notin \Omega_k$. Luego, como $w_k \to w$ c.d. en $\mathbb{R}^N$ se sigue que $w(z) = 0$ p.c.t. $z \notin \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x + \zeta \in \Omega\}$, por lo tanto, $v = 0$ c.d. en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.
Concluimos del Lema 3.3 que $\|\hat{v}_k - w\| \to 0$ y, como $v_k \rightharpoonup 0$ y $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, respectivamente. Haciendo $y = \varepsilon_k x + \zeta_k$ obtenemos

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_k \cdot \nabla v &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla \hat{v}_k \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla w + \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla(\hat{v}_k - w) = \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Pero en la parte anterior vimos que $w \neq 0$. Concluimos que $\varepsilon = 0$.

Parte 4. Denotemos por ν_z a la normal unitaria en $z \in \partial\Omega$ que apunta hacia dentro de Ω. Como $\partial\Omega$ es suave y compacta, existe $r_0 > 0$ tal que

$$B_{r_0}(z + r_0\nu_z) \subseteq \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad B_{r_0}(z - r_0\nu_z) \subseteq \mathbb{R}^N \smallsetminus \overline{\Omega} \qquad \forall z \in \partial\Omega$$

Definimos $d_k := \varepsilon_k^{-1}\operatorname{dist}(\zeta_k, \partial\Omega)$, entonces $d_k \to d$ en $[0, \infty]$, para alguna subsucesión de (d_k).
Veremos que, si (d_k) está acotada, entonces $w \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$, donde $\mathbb{H}$ es un semiplano que contiene al origen; y si $d_k \to \infty$, entonces $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. En ambos casos, también probaremos que si $X \subset \mathbb{H}$ (o $X \subset \mathbb{R}^N$, según el caso) y X es compacto, entonces $X \subset \Omega_k$, para k suficientemente grande. Adicionalmente, demostraremos que, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\zeta_k \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Primero, supongamos que $d \in [0, \infty)$, como $\varepsilon_k \to 0$ se sigue que $\operatorname{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \to 0$, entonces $\zeta \in \partial\Omega$ y, para k suficientemente grande, existe un único punto $\eta_k \in \partial\Omega$ que satisface $|\zeta_k - \eta_k| = \operatorname{dist}(\zeta_k, \partial\Omega)$.
Ahora, alguna subsucesión de (ζ_k) está contenida, o bien en $\overline{\Omega}$, o en $\mathbb{R}^N \smallsetminus \overline{\Omega}$. En la primera situación, $\zeta_k - \eta_k = d_k\varepsilon_k\nu_{\eta_k}$ y, respecto a la función $x \mapsto \frac{x - \zeta_k}{\varepsilon_k}$, la imagen del semiespacio que contiene a $\nu_{\eta_k} + \eta_k$ cuya frontera es el espacio tangente a $\partial\Omega$ sobre el punto η_k, es el semiespacio

$$\mathbb{H}_k := \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_{\eta_k} \cdot z > -d_k\}.$$

Denotemos por $\mathbb{H}$ al conjunto $\{z \in \mathbb{R}^N : \nu_\zeta \cdot z > -d\}$. Sea $X \subseteq \mathbb{H}$ compacto y $r > 0$ tal que

$$X \subseteq B_{d_k + r}(r\nu_{\eta_k}) \qquad \text{para k suficientemente grande.}$$

La imagen de esta bola bajo la función $z \mapsto \varepsilon_k z + \zeta_k$ es la bola $B_{\varepsilon_k(d_k+r)}(\varepsilon_k(d_k + r)\nu_{\zeta_k} + \eta_k)$.
Como $\varepsilon_k \to 0$ y (d_k) está acotada, para k suficientemente grande se cumple que $\varepsilon_k(d_k + r) < r_0$, para alguna $r_0 > 0$. Entonces,

$$B_{\varepsilon_k(d_k+r)}(\varepsilon_k(d_k + r)\nu_{\eta_k} + \eta_k) \subseteq B_{r_0}(r_0\nu_{\eta_k} + \eta_k) \subseteq \overline{\Omega}.$$

Por lo tanto, $X \subseteq \Omega_k$ para k suficientemente grande.
Procediendo de manera análoga, si $X \subseteq \mathbb{R}^N \smallsetminus \overline{\mathbb{H}}$ y X es compacto, concluimos que $X \subset \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega_k$ para k suficientemente grande.
Luego, si alguna subsucesión de (ζ_k) está contenida en $\mathbb{R}^N \smallsetminus \overline{\Omega}$, obtenemos las mismas conclusiones que en la situación anterior, adaptando el argumento con los semiespacios

$$\mathbb{H}_k = \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_{\eta_k} \cdot z > d_k\},$$
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_{\eta_k} \cdot z > d\}.$$

Sin importar el caso, como $w_k \to w$ c.d. en $\mathbb{R}^N$ y $w_k|_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_k} = 0$, concluimos que $w = 0$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}}$ y, entonces, $w \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$, como afirmamos.

Ahora, si $d_k \to \infty$, entonces para cada $r > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \geq \varepsilon_k(r+1)$ para todo $k \geq k_0$. En la Parte 1 observamos que $\operatorname{dist}(\zeta_k, \Omega) < \varepsilon_k \leq R$. Entonces, $\zeta_k \in \Omega$ y, por lo tanto, $B_{\varepsilon_k(r+1)}(\zeta_k) \subseteq \Omega$, para todo $k \geq k_0$. Además, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\zeta_k \in \Omega$ para toda $k \in \mathbb{N}$.
La bola $B_{\varepsilon_k(r+1)}(\zeta_k)$ es la imagen, bajo la transformación $z \mapsto \varepsilon_k z + \zeta_k$, de la bola $B_{r+1}(0)$. De esta forma, si $X \subset \mathbb{R}^N$ es compacto, elegimos r tal que $X \subset B_{r+1}(0)$. Lo anterior muestra que $X \subset \Omega_k$ para $k \geq k_0$. Esto prueba la afirmación.

Parte 5. En esta parte demostraremos que w es solución débil del problema $(\wp_\infty^\phi)$. Recordemos que por el resultado de regularidad que mencionamos en el Capítulo 2 ([11], o [14, Teorema B.3]) w será una solución clásica del problema $(\wp_\infty^\phi)$.
Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subset \Omega_k$ para k suficientemente grande. Definimos $\varphi_k(z) := \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \varphi(\frac{z-\zeta_k}{\varepsilon_k})$, entonces $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$. Como (φ_k) está acotada, $\nabla_{\mathcal{N}_*^\phi} J_*(v_k) \to 0$, $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y por el Lema 3.6,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-2} w\varphi &= \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^{2^*-2} w_k \varphi\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_k \cdot \nabla \varphi_k - \int_{\mathbb{R}^N} |v_k|^{2^*-2} v_k \varphi_k\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} J_*'(v_k)\varphi_k = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Por lo tanto, si (d_k) fuera una sucesión acotada, en virtud de las conclusiones de la parte anterior y la ecuación (3.7), w sería una solución no trivial del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u; \\ \quad u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H}). \end{cases}$$

Sin embargo, esto no es posible, pues, como $\mathbb{H}$ es estrictamente estrellado, la única solución de este problema es la trivial. En el Apéndice B daremos un argumento más detallado de esto.
Así que, $d_k \to \infty$. En este caso, (3.7) se cumple para todas las funciones del espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, lo que muestra que w es solución de $(\wp_\infty)$.

Parte 6. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \Gamma$ tales que $\varepsilon_k^{-1}|\alpha_i\zeta_k - \alpha_j\zeta_k| \to \infty$ para $i \neq j$. Entonces, si $j < m$, como $\phi(\alpha_j)(w_k \circ \alpha_j^{-1}) \rightharpoonup \phi(\alpha_j)(w \circ \alpha_j^{-1})$ débilmente, se sigue del Lema 3.4 que

$$\phi(\alpha_j)(w_k \circ \alpha_j^{-1}) - \sum_{i=j+1}^{m} \phi(\alpha_j)(w \circ \alpha_j^{-1}) \left(\cdot + \frac{\alpha_j\zeta_k - \alpha_i\zeta_k}{\varepsilon_k}\right) \rightharpoonup \phi(\alpha_j)(w \circ \alpha_j^{-1}).$$

Es sencillo comprobar que si $h_k \rightharpoonup h$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ entonces $\|h_k - h\|^2 + \|h\|^2 + o(1) = \|h_k\|^2$. De esto obtenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \|\phi(\alpha_m)(w_k \circ \alpha_m^{-1})\|^2 &= \|\phi(\alpha_m)(w_k \circ \alpha_m^{-1}) - \phi(\alpha_m)(w \circ \alpha_m^{-1})\|^2 \\ &\quad + \|w\|^2 + o(1); \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \phi(\alpha_j)(w_k \circ \alpha_j^{-1}) - \sum_{i=j+1}^{m} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\cdot + \frac{\alpha_j \zeta_k - \alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \phi(\alpha_j)(w_k \circ \alpha_j^{-1}) - \sum_{i=j}^{m} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\cdot + \frac{\alpha_j \zeta_k - \alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 \\ &\quad + \|w\|^2 + o(1) \quad \text{para } j < m. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definimos $\hat{w}_k(y) = w_k\left(y - \frac{\zeta_k}{\varepsilon_k}\right) = \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} v_k(\varepsilon_k y)$. Como $v_k \in N_*^{\phi}$, se cumple que $\hat{w}_k(\gamma y) = \phi(\gamma)\hat{w}_k(y)$, así, haciendo el cambio de variable $z = y - \frac{\alpha_m \zeta_k}{\varepsilon_k}$ en la ecuación (3.8) da como resultado

$$\|\hat{w}_k\|^2 = \left\| \hat{w}_k - \phi(\alpha_m)(w \circ \alpha_m^{-1}) \left(\cdot - \frac{\alpha_m \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 + \|w\|^2 + o(1),$$

y para (3.9) hacemos $z = y - \frac{\alpha_j \zeta_k}{\varepsilon_k}$ para obtener

$$\begin{aligned} &\left\| \hat{w}_k - \sum_{i=j+1}^{m} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\cdot - \frac{\alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \hat{w}_k - \sum_{i=j}^{m} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\cdot - \frac{\alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 + \|w\|^2 + o(1). \end{aligned}$$

Iterando la segunda de estas identidades en la primera, obtenemos

$$\begin{aligned} \|v_k\|^2 = \|\hat{w}_k\|^2 &= \left\| \hat{w}_k - \sum_{i=1}^{m} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\cdot - \frac{\alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 \\ &\quad + m\|w\|^2 + o(1) \geq m\|w\|^2 + o(1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

y, como $\frac{1}{N}\|v_k\|^2 \to c_*^{\phi}$, pasando al límite cuando $k \to \infty$

$$c_*^{\phi} \geq \frac{m}{N}\|w\|^2 = mJ_\infty(w) \geq mc_\infty^{\phi|K}. \tag{3.11}$$

Por lo tanto m no puede ser arbitrariamente grande. De modo que no se satisface (d) del Lema 3.15. Recordemos que $\zeta_k \in \Omega$ y $K = \Gamma_{\zeta_k}$. Así, haciendo $m = |\Gamma/K|$, del

Lema 3.8 y la desigualdad (3.11) concluimos que

$$|\Gamma/K|c_\infty^{\phi|K} \leq |\Gamma/K|J_\infty(w) \leq c_*^\phi \leq \inf_{\xi\in\Omega} |\Gamma/\Gamma_\xi|c_\infty^{\phi|\Gamma_\xi} \geq |\Gamma/K|c_\infty^{\phi|K}$$

Las desigualdades anteriores muestran que $\inf_{\xi\in\Omega} |\Gamma/\Gamma_\xi|c_\infty^{\phi|\Gamma_\xi}$ se alcanza en cada uno de los puntos ζ_k, lo cual junto con el Lema 3.2 prueba la afirmación (v) del teorema. También de esas desigualdades se concluye 3.5.
Para finalizar la demostración, como $\|u_k - v_k\| \to 0$ y por (3.10),

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\frac{\cdot - \alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\| v_k - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\frac{\cdot - \alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\| \hat{w}_k - \sum_{i=1}^{m} \phi(\alpha_i)(w \circ \alpha_i^{-1}) \left(\cdot - \frac{\alpha_i \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Aplicaciones

El Teorema 3.12 da una descripción detallada del comportamiento en el límite de una familia de soluciones minimizantes del problema $(\wp_p^\phi)$ cuando $p \to \infty$. Esta descripción se hizo en un contexto muy general. En este capítulo trabajaremos con dos tipos particulares de grupos. Esto nos permitirá hacer un análisis más fino y exhibir un ejemplo de existencia concreto.

Como antes, sean Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$ y $\phi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2$ un homomorfismo continuo de grupos. Queremos hallar funciones que satisfagan

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(\gamma x) = \phi(\gamma)u(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N; \forall \gamma \in \Gamma, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{$\wp_\infty^\phi$}$$

Ejemplo 4.1. Si ϕ es el homomorfismo trivial, la burbuja estándar U, dado que es radial, satisface $(\wp_\infty^\phi)$. Como además es de energía mínima en $\mathcal{N}_\infty$ y por la desigualdad $c_\infty \leq c_\infty^\phi$, también cumple que $J_\infty(U) = c_\infty^\phi$.

Si nuestra intención es mostrar soluciones distintas de la burbuja estándar, el ejemplo anterior sugiere concentrarnos en homomorfismos suprayectivos pero, en contraste el problema ahora podría no tener soluciones no triviales.

Ejemplo 4.2. Sea τ la reflexión tal que $\tau(x_1, x_2, \cdots, x_N) = (-x_1, x_2, \cdots, x_N)$; $\Gamma = \{id, \tau\}$ y ϕ el homomorfismo tal que $\phi(\tau) = -1$. Si v resuelve $(\wp_\infty^\phi)$, sus simetrías implican que $v(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^{N-1}$. Por lo tanto, si $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} : x < 0\}$, entonces la restricción $v|_{\mathbb{H}}$ satisface

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } \mathbb{H} \\ u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H}). \end{cases}$$

y esto sólo es posible si u se anula en $\mathbb{H}$ (ver Apéndice B).

4.1. Un caso particular del teorema de concentración

Supongamos que Γ tiene la siguiente propiedad:

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}^N, \text{ o bien } \Gamma_x = \Gamma, \text{ o bien } \Gamma_x = \{id\} \text{ y ambos casos ocurren.} \quad (H)$$

Esto se traduce en que sólo hay dos tipos de Γ-órbitas en $\mathbb{R}^N$: puntos fijos, o subespacios homeomorfos a Γ. Recordemos que el grupo K, cuya existencia está dada por el Teorema 3.12, coincide con el grupo de isotropía de una cierta sucesión de puntos. Con la adición de la hipótesis (H), las posibilidades de K quedan restringidas a ser Γ o el grupo trivial. De esta manera, el teorema de concentración se transforma en lo que sigue.

Corolario 4.3. *Supongamos que Γ satisface (H) y sean $p_k \in (2, 2^*)$ y u_k un mínimo de $J^\phi_{p_k}$ en $\mathcal{N}^\phi_{p_k}$. Entonces, pasando a una subsucesión, ocurre alguna de las siguientes posibilidades:*

- *(u_k) converge fuertemente en $D^{1,2}_0(\Omega)$ a una solución de energía mínima de $(\wp^\phi_{2^*})$.*
- *Existen sucesiones (ε_k) en $(0, \infty)$ y (ζ_k) en Ω tales que $\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \to \infty$ y*

  (A) *O bien $\Gamma_{\zeta_k} = \{id\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, Γ es finito, $\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k| \to \infty$ si $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$; y*

  $$\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi(\gamma)\varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{\cdot - \gamma\zeta_k}{\varepsilon_k}\right)\right\| = 0.$$

  (B) *O bien $\Gamma_{\zeta_k} = \Gamma$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y existe una solución w de $(\wp^\phi_\infty)$ tal que $J_\infty(w) = c^\phi_\infty$ y*

  $$\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} w\left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k}\right)\right\| = 0.$$

Demostración. Supongamos que (u_k) no converge fuertemente en $D^{1,2}_0(\Omega)$ y sean (ε_k), (ζ_k), K y w como en el Teorema 3.12. Como discutimos antes, K sólo puede ser el grupo trivial o Γ.
Cuando ocurre lo primero, entonces la afirmación (iii) implica que w es un mínimo no trivial de J_∞ sobre $\mathcal{N}_\infty$ así que, en realidad $w = U$ (o alguna dilatación de U, pues la burbuja estándar es esencialmente la única función con esta propiedad). Además, cómo K es de índice finito en Γ y $|\Gamma/K| = |\Gamma/\{id\}| = \#\Gamma$, concluimos que Γ es finito. La expresión en (iv) toma la siguiente forma

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi(\gamma)\varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{\cdot - \gamma\zeta_k}{\varepsilon_k}\right)\right\| = 0.$$

Por otra parte, si $K = \Gamma$, entonces, de la afirmación (iii), vemos que w es Γ-invariante y $J_\infty(w) = c_\infty^\phi$ y tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u_k - \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} w\left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k}\right)\right\| = 0,$$

también como consecuencia de la afirmación en (iv). Esto concluye la demostración. ■

Hagamos algunas observaciones importantes del corolario anterior. Cuando (u_k) no converge fuertemente, la sucesión tiene un número finito de singularidades, alrededor de las cuales se concentra y explota. Las simetrías y la cantidad de estos puntos queda determinada por el grupo Γ. Cuando Γ es finito, el perfil asintótico de (u_k) es una suma de burbujas estándar, apropiadamente reescaladas y distribuidas simétricamente con distintos signos alrededor de las $\#\Gamma$ singularidades. Entonces, trabajar con simetrías inducidas por un grupo finito no arroja soluciones nuevas. En cambio, cuando Γ es infinito y ϕ es un epimorfismo, las simetrías de la solución aseguran que esta no es una burbuja estándar. Además, la concentración y el fenómeno de explosión se dan alrededor de un único punto. Esta discusión da pie al siguiente resultado de existencia.

Teorema 4.4. *Si Γ es infinito y cumple (H), el problema $(\wp_\infty^\phi)$ admite una solución no trivial de energía mínima sobre $\mathcal{N}_\infty^\phi$. En particular, si ϕ es un epimorfismo, esta solución no es radial y cambia de signo.*

Demostración. Sea $\Omega = B_1(0)$. Como éste es un dominio acotado, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un mínimo u_k del funcional J_{p_k}, donde $p_k \to 2^*$. Como observamos en el Ejemplo 3.11, dado que $0 \in \Omega$, c_*^ϕ no se alcanza y, como Γ es infinito, necesariamente se cumple (B) del segundo caso en el Corolario 4.3. ■

4.2. Explosión en un único punto

Daremos una condición para conseguir que nuestra familia de soluciones minimizantes se concentre y explote alrededor de un único punto.

Teorema 4.5. *Supongamos que ϕ es un epimorfismo, que todas las órbitas de Γ son infinitas o consisten de un solo punto y que ambos casos ocurren en Ω. Sean $p_k \in (2, 2^*)$ y u_k un mínimo de $J_{p_k}^\phi$ en $\mathcal{N}_{p_k}^\phi$. Entonces, pasando a una subsucesión, existen sucesiones (ζ_k) en Ω, (ε_k) en $(0,\infty)$ y una solución no trivial w de $(\wp_\infty^\phi)$, tales que $\varepsilon_k^{-1} dist(\zeta_k, \partial\Omega) \to \infty$, $\lim_{k\to\infty} c_{p_k}^\phi = c_\infty^\phi = J_\infty(w)$ y el perfil asintótico de u_k está dado por*

$$\left\| u_k - \varepsilon_k^{-1} w\left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k}\right)\right\| \to 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Más aún, w cambia de signo y no es radial.

Demostración. Por hipótesis, Ω contiene un punto fijo de Γ, entonces, el Teorema 3.9 asegura que c_*^ϕ no se alcanza en $\mathcal{N}_*^\phi$. De esta manera, la segunda posibilidad del

Teorema 3.12 debe ocurrir. Como $K = \Gamma_\xi$ para algún $\xi \in \Omega$ y K tiene índice finito en Γ, de la hipótesis concluimos que $\Gamma = K$. De esto se siguen todas las afirmaciones del teorema. En particular, el fenómeno de explosión de (u_k) se da en un único punto. El cambio de signo y las simetrías de w, se siguen de que ϕ es un epimorfismo. ■

El ejemplo que damos enseguida es una aplicación concreta del teorema anterior que exhibe una solución para $(\wp_\infty)$ distinta de la burbuja estándar.

Ejemplo 4.6. Si $N \geq 4$, expresamos a $\mathbb{R}^N$ como $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}^{N-4}$. De esta forma, escribimos a todo punto en $\mathbb{R}^N$ como (z, x), donde $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Sea $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$, el grupo de los números complejos unitarios, actuando sobre $\mathbb{R}^N$ como $e^{i\theta}(z_1, z_2, x) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2, x)$.
Afirmamos que existe $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que es solución no trivial del problema límite $(\wp_\infty)$ tal que, para todo $(z, x) \in \mathbb{R}^N$ y para toda $\theta \in \mathbb{R}$, cumple

$$\begin{aligned} w(e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2, x) &= w(z_1, z_2, x) \\ w(-\overline{z}_2, \overline{z}_1, x) &= -w(z_1, z_2, x). \end{aligned}$$

Además, w tiene energía mínima entre todas las soluciones del problema $(\wp_\infty)$ con las mismas propiedades. Nótese que con estas simetrías, necesariamente w cambia de signo y no es radial.
En efecto, definimos τ tal que $\tau(z_1, z_2, x) = (-\overline{z}_2, \overline{z}_1, x)$. El grupo Γ será el generado por $\mathbb{S}^1$ y $\{\tau\}$. Consideramos al homomorfismo $\phi : \Gamma \to \mathbb{Z}/2$ tal que $\phi(e^{i\theta}) = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y $\phi(\tau) = -1$. Si $z \neq 0$, la órbita de (z, x) está formada por un par de círculos ortogonales en $\mathbb{C}^2 \times \{x\}$ y todos los puntos de la forma $(0, x)$ son fijos. Esto muestra que las hipótesis del Teorema 4.5 se cumplen, por ejemplo, aplicándolo a $B_1(0)$. La solución w que obtenemos con este resultado tiene las propiedades que mencionamos. Además, w cumple que, cuando $z \neq 0$, es constante cuando se restringe a cada uno de los dos círculos que conforman la órbita de (z, x) y tiene signos opuestos en cada uno de ellos.

Apéndices

Apéndice A

La prueba del Lema 3.15

La demostración que presentaremos del Lema 3.15 en este apéndice se basa en la prueba que se encuentra en [5]. Iniciaremos mencionando algunos hechos básicos de acciones de grupos, un par de referencias para estos resultados son [1, 15].
Sea Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$ actuando sobre $\mathbb{R}^N$. Todos los grupos de isotropía cumplen que $\Gamma_{\gamma x} = \gamma\Gamma_x\gamma^{-1}$. De esta manera, cualquier subgrupo K de Γ que es conjugado del grupo de isotropía de algún punto, digamos $x \in \mathbb{R}^N$, cumple que $K = \Gamma_{\gamma x}$ para algún $\gamma \in \Gamma$. A una clase de conjugación (Γ_x) de un grupo de isotropía Γ_x se le llama Γ-clase de isotropía de $\mathbb{R}^N$. El conjunto de Γ-clases de isotropía de $\mathbb{R}^N$ es finito. Hay un orden definido en el conjunto de clases de conjugación dado por

$$(K_1) \leq (K_2) \iff \text{existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma K_1 \gamma^{-1} \subset K_2. \tag{A.1}$$

Denotaremos por $(\mathbb{R}^N)^K$ al grupo de puntos fijos bajo K, es decir,

$$(\mathbb{R}^N)^K := \{x \in \mathbb{R}^N : \gamma x = x \text{ para todo } \gamma \in K\}.$$

Lema. *Dadas sucesiones (ε_k) en $(0,\infty)$ y (ξ_k) en $\mathbb{R}^N$, existe una sucesión (ζ_k) en $\mathbb{R}^N$ y un subgrupo cerrado K de Γ tales que, pasando a una subsucesión, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) *La sucesión $(\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\Gamma\xi_k, \zeta_k))$ es acotada.*

(b) $\Gamma_{\zeta_k} = K$ *para todo $k \in \mathbb{N}$.*

(c) *Si $|\Gamma/K| < \infty$ entonces $\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k| \to \infty$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Gamma$ con $\alpha^{-1}\beta \notin K$.*

(d) *Si $|\Gamma/K| = \infty$ entonces existe un subgrupo cerrado K' de Γ tal que $K \subseteq K'$, $|\Gamma/K'| = \infty$ y $\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k| \to \infty$ para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$ con $\alpha^{-1}\beta \notin K'$.*

Demostración. Definimos

$$V := \{x \in \mathbb{R}^N : \#\Gamma x < \infty\}.$$

Claramente V es un subespacio vectorial Γ-invariante de $\mathbb{R}^N$. Más aún, $V^\perp$ también es Γ-invariante, pues, si $v \in V$ y $w \in V^\perp$, entonces

$$\langle v, \gamma w\rangle = \langle \gamma^{-1}v, \gamma^{-1}\gamma w\rangle = \langle \gamma^{-1}v, w\rangle = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Consideramos dos casos:

Caso 1: La sucesión $(\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, V))$ no está acotada.

Pasando a una subsucesión, se cumple que $\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, V) \to \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, dado que el conjunto de Γ-clases de isotropía de $\mathbb{R}^N$ es finito, pasando a una subsucesión, de ser necesario, podemos suponer que existe K, un subgrupo de Γ, y un punto $\zeta_k \in \Gamma\xi_k$ tal que $\Gamma_{\zeta_k} = K$. De esta manera, se cumplen las partes (a) y (b) del lema.

Como $\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, V) \to \infty$, debe cumplirse que $\mathrm{dist}(\xi_k, V) \neq 0$ para una infinidad de índices. Entonces, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\xi_k \notin V$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\zeta_k \notin V$. Como $\zeta_k \notin V$, se cumple que $|\Gamma/K| = \infty$, así que sólo hace falta verificar (d).

Sea $\zeta_k^\perp \in V^\perp$ la proyección ortogonal de ζ_k sobre $V^\perp$. Como $\zeta_k \notin V$, se cumple que $\zeta_k^\perp \neq 0$. Así, tiene sentido definir $v_k := \frac{\zeta_k^\perp}{|\zeta_k^\perp|}$. Claramente (v_k) es una sucesión acotada, de modo que, pasando a una subsucesión

$$v_k \to v \in V^\perp.$$

Nótese que $|v| = 1$, por lo tanto $v \neq 0$. Definimos $K' := \Gamma_v$. Como V y $V^\perp$ son Γ-invariantes y $\mathbb{R}^N = V \oplus V^\perp$, se tiene que $K \subset K'$ y, como $v \notin V$, tenemos que $|\Gamma/K'| = \#\Gamma v = \infty$. Ahora, tomemos $\alpha, \beta \in K'$ tales que $\alpha^{-1}\beta \notin K'$. Entonces $|\alpha v - \beta v| > 0$, y sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|v_k - v| < \frac{1}{4}|\alpha v - \beta v| \quad \forall k \geq k_0.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}|\alpha v - \beta v| &\leq |\alpha v - \alpha v_k| + |\alpha v_k - \beta v_k| + |\beta v_k - \beta v| \\ &= |\alpha v_k - \beta v_k| + 2|v_k - v| \leq |\alpha v_k - \beta v_k| + \frac{1}{2}|\alpha v - \beta v| \quad \forall k \geq k_0.\end{aligned}$$

Luego, de la definición de v_k y de la desigualdad anterior obtenemos

$$\frac{1}{2}|\alpha v - \beta v||\zeta_k^\perp| \leq |\alpha\zeta_k^\perp - \beta\zeta_k^\perp| = |(\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k)^\perp| \leq |\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k| \quad \forall k \geq k_0.$$

Multiplicando esta desigualdad por ε_k^{-1}, dado que $|\zeta_k^\perp| = \mathrm{dist}(\zeta_k, V)$, tenemos

$$\frac{1}{2}|\alpha v - \beta v|\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\zeta_k, V) \leq \varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k| \quad \forall k \geq k_0.$$

Para concluir este caso, veamos que $\mathrm{dist}(\zeta_k, V) = \mathrm{dist}(\xi_k, V)$. Con esta igualdad a la mano, la desigualdad de arriba y recordando que $\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, V) \to \infty$ concluimos la afirmación (d). En efecto, sea $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma\xi_k = \zeta_k$, entonces

$$|\xi_k - v| = |\gamma\xi_k - \gamma v| = |\zeta_k - \gamma v| \quad \forall v \in V.$$

Como V es Γ-invariante, tomando ínfimos sobre V obtenemos la igualdad.

CASO 2: La sucesión $(\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, V))$ es acotada.

Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de Γ-clases de isotropía (Γ_x) con $x \in V$ tales que la sucesión $(\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\Gamma\xi_k, (\mathbb{R}^N)^{\Gamma_x}))$ contiene una subsucesión acotada. Afirmamos que $\mathfrak{F}$ es no vacío. En efecto, sea x_k la proyección ortogonal de ξ_k sobre V. Como el conjunto de Γ-clases de isotropía de $\mathbb{R}^N$ es finito, pasando a una subsucesión, podemos suponer que existe un subgrupo cerrado L de Γ tal que $\Gamma_{x_k} = L$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, si $x \in (\mathbb{R}^N)^L$, se tiene que $L \subset \Gamma_x$ y, como todas las Γ-órbitas de V son finitas, $\#\Gamma x = |\Gamma/\Gamma_x| \leq |\Gamma/L| = \#\Gamma x_k < \infty$, por lo tanto $(\mathbb{R}^N)^L \subset V$. Como x_k minimiza la distancia de ξ_k a V y $x_k \in (\mathbb{R}^N)^L$, se sigue que

$$\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, (\mathbb{R}^N)^L) \leq \varepsilon_k^{-1}|\xi_k - x_k| = \varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\xi_k, V)$$

y, por hipótesis, el lado derecho de la desigualdad está acotado y entonces $(L) \in \mathfrak{F}$.

Como $\mathfrak{F}$ es finito y no vacío, podemos escoger algún $(K) \in \mathfrak{F}$ que sea máximo respecto al orden que define (A.1). Pasando a una subsucesión, existen $z_k \in \Gamma\xi_k$ y $c > 0$ tales que

$$\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(z_k, (\mathbb{R}^N)^K) < c \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definimos ζ_k como la proyección ortogonal de z_k sobre $(\mathbb{R}^N)^K$. De esta manera, se sigue (a), pues

$$\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\Gamma\xi_k, \zeta_k) \leq \varepsilon_k^{-1}|z_k - \zeta_k| = \varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(z_k, (\mathbb{R}^N)^K) < c \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{A.2}$$

Por definición de $\mathfrak{F}$, $(\mathbb{R}^N)^K \subset V$ y como $\zeta_k \in (\mathbb{R}^N)^K$, se sigue que $K \subset \Gamma_{\zeta_k}$. La desigualdad anterior implica que $(\Gamma_{\zeta_k}) \in \mathfrak{F}$, pero, por la elección de K, concluimos que $\Gamma_{\zeta_k} = K$.

Como $\zeta_k \in V$, se cumple que $|\Gamma/K| < \infty$, así que hay que demostrar (c). Argumentando por contradicción, supongamos que existen $\alpha, \beta \in K$ tales que $\alpha^{-1}\beta \notin K$ pero $(\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k|)$ está acotada. Sean $\delta := \alpha^{-1}\beta$, L el grupo que está generado por $K \cup \{\delta\}$, $W_1 := (\mathbb{R}^N)^L$ y W_2 el complemento ortogonal de W_1 en $(\mathbb{R}^N)^L$. Así, podemos expresar a ζ_k como

$$\zeta_k = \zeta_k^1 + \zeta_k^2 \quad \text{donde } \zeta_k^i \in W_i,\ i = 1, 2.$$

Como $\delta \notin K = \Gamma_{\zeta_k}$, tenemos que $\delta\zeta_k \neq \zeta_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\zeta_k \notin W_1$ y de esto tenemos que $\zeta_k^2 \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Alguna subsucesión cumple que

$$\frac{\zeta_k^2}{|\zeta_k^2|} \to \zeta \in W_2 \smallsetminus W_1$$

Si la sucesión $(\varepsilon_k^{-1}\zeta_k^2)$ no fuera acotada, como estamos suponiendo que $(\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k|)$ está acotada, tendríamos, después de pasar a una subsucesión, que

$$\left|\frac{\delta\zeta_k^2}{|\zeta_k^2|} - \frac{\zeta_k^2}{|\zeta_k^2|}\right| = \frac{\varepsilon_k^{-1}|\delta\zeta_k - \zeta_k|}{\varepsilon_k^{-1}|\zeta_k^2|} = \frac{\varepsilon_k^{-1}|\alpha\zeta_k - \beta\zeta_k|}{\varepsilon_k^{-1}|\zeta_k^2|} \to 0$$

así, tenemos que $\delta\zeta = \zeta$, lo cual es una contradicción. De modo que $(\varepsilon_k^{-1}\zeta_k^2)$ debe ser acotada. Después de pasar a una subsucesión, podemos suponer que existe un subgrupo cerrado L_1 de Γ tal que $\Gamma_{\zeta_k^1} = L_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\zeta_k^1 \in W_1$ tenemos que $K \subset L \subset L_1$. Más aún, la desigualdad en (A.2) implica que

$$\varepsilon_k^{-1}\mathrm{dist}(\Gamma\xi_k, (\mathbb{R}^N)^{L_1}) \leq \varepsilon_k^{-1}|z_k - \zeta_k^1| \leq \varepsilon_k^{-1}|z_k - \zeta_k| + \varepsilon_k^{-1}|\zeta_k^2| < c_1$$

para alguna constante c_1. Esto muestra que $(L_1) \in \mathfrak{F}$, pero, de nuevo por la elección de K, concluimos que $K = L = L_1$. Esto contradice que $\delta \notin K$. Con esto queda demostrado (c) y terminamos la demostración. ■

Apéndice B

Un resultado de no existencia

Aquí daremos un criterio de no existencia para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{en } \Omega, \\ \quad u \in D_0^{1,2}(\Omega), \end{cases} \tag{$\wp$}$$

donde suponemos que $N \geq 3$, Ω es un dominio suave contenido en $\mathbb{R}^N$ (posiblemente no acotado) y $g \in C^1(\mathbb{R})$ cumple que $g(0) = 0$.
Sea

$$G(t) := \int_0^t g(s)ds.$$

Las soluciones de ($\wp$) satisfacen la siguiente identidad, cuya demostración se puede consultar en [16, Teorema B.3].

Lema. *(Identidad de Pohozhaev). Si $u \in C^2(\Omega)$ es solución del problema ($\wp$) y es tal que $G(u) \in L^1(\Omega)$, entonces u satisface la identidad*

$$\frac{1}{2^*}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(u) + \frac{1}{2N}\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial \nu}{\partial \nu}\right|^2 \sigma \cdot \nu d\sigma = 0,$$

donde ν es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

Definición. Un dominio suave Ω es estrellado respecto al origen si $\sigma \cdot \nu \geq 0$ para todo $\sigma \in \partial\Omega$ y es estrictamente estrellado respecto al origen si $\sigma \cdot \nu > 0$ para todo $\sigma \in \partial\Omega$. En general, Ω es estrellado (estrictamente estrellado) si alguna traslación de Ω es estrellado (estrictamente estrellado).

A partir de la identidad de Pohozhaev obtenemos el siguiente teorema.

Teorema. *Si Ω es estrictamente estrellado respecto al origen, entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \textit{en } \Omega, \\ \quad u \in D_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{$\wp^*$}$$

no tiene soluciones no triviales.

Demostración. Sea u una solución de $(\wp^*)$. Como Ω es un dominio suave, se sigue que $u \in C^2(\Omega)$ (ver [14, Teorema B.3]). Definimos $g(s) := |s|^{2^*-2}s$, entonces $G(s) = \frac{1}{2^*}|t|^{2^*}$. Dado que $u \in \mathcal{N}_* = \{w \in D_0^{1,2}(\Omega) : \|w\|^2 = |w|_{2^*}^{2^*},\ w \neq 0\}$ y de la identidad de Pohozhaev, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2^*}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2^*}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2^*}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(u) = -\frac{1}{2N}\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \sigma \cdot \nu d\sigma \end{aligned}$$

pero $\sigma \cdot \nu > 0$, pues Ω es estrictamente estrellado, así que $\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = 0$ sobre $\partial\Omega$ y, por el principio de continuación única, necesariamente se debe cumplir que $u = 0$. ■

El teorema anterior se extiende a dominios que sean estrictamente estrellados respecto a cualquier otro punto en $\mathbb{R}^N$ haciendo una traslación de tal forma que el origen esté en el dominio trasladado. Así, obtenemos un problema equivalente, donde el teorema anterior es válido.
Enunciamos como corolario el caso particular que usamos en la demostración del teorema de concentración.

Corolario. *Sea $\mathbb{H}$ un semiespacio en $\mathbb{R}^N$ que contiene al origen, entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } \mathbb{H}, \\ \quad u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H}), \end{cases}$$

sólo admite la solución trivial.

Demostración. Es claro que $\mathbb{H}$ es estrictamente estrellado respecto al origen. Concluimos aplicando el teorema anterior. ■

Bibliografía

[1] G.E. Bredon. Introduction to Compact Transformation Groups, Pure and Applied Mathematics, vol. 46. Academic, New York. London. 1972.

[2] M. Clapp. Análisis Matemático, Colección Papirhos, Serie Textos Num. 2. Instituto de Matemáticas de la UNAM, México. 2015.

[3] M. Clapp. Entire nodal solutions to the pure critical exponent problem arising from concentration, J. Differential Equations 261 (6) (2016) 3042-3060.

[4] M. Clapp, J. Bracho y W. Marzantowicz. Symmetry breaking solutions of nonlinear elliptic systems, Topol. Methods Nonlinear Anal. 26 (2005) 189-201.

[5] M. Clapp y J. Faya. Multiple solutions to antisotropic critical and supercritical problems in symmetric domains, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 86 (2015) 99-128.

[6] M. del Pino, M. Musso, F. Pacard y A. Pistoia. Large energy solutions for the Yamabe equation, J. Differential Equations 251 (9) (2011) 2568-2597.

[7] Z. Denkowski, S. Migórski y N.S. Papageorgiou. An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory. Springer US. 2003.

[8] W. Ding. On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^N$, Comm. Math. Phys. 107 (2) (1986) 331-335.

[9] N. Garofalo y F.-H. Lin. Unique continuation for elliptic operators: a geometric-variational approach, Comm. Pure Appl. Math. 40 (3) (1987) 347-366.

[10] B. Gidas, W.-M. Ni y L. Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. 68 (1979) 19-30.

[11] D. Gilbarg y N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. 2001.

[12] D. Jerison y C.E. Kenig. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators, Annals of Math. 121 (3) (1985) 463-494.

[13] R.S. Palais. The principle of symmetric criticality, Comm. Math. Phys. 69 (1) (1979) 19-30.

[14] M. Struwe. Variational Methods. Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. 1996.

[15] T. tom Dieck. Transformation Groups, De Gruyer Studies in Mathematics, vol. 8. Walter de Gruyer, Berlin. New York. 1987.

[16] M. Willem. Minimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 24. Birkhäuser, Boston. 1996.

Agradecimientos

No llegamos a donde vamos solos.
Este trabajo culmina una etapa muy significativa de mi vida. He tenido la fortuna de conocer a personas muy especiales que de una u otra manera me acompañaron y ayudaron a llegar aquí. Muchas gracias.
A mi tutora Mónica Clapp por todo el apoyo que me brindó para la realización de este trabajo. Además tuve la oportunidad de ser su alumno y esas clases fueron mi inspiración para trabajar en el análisis.
A mis sinodales Juan Carlos Fernández, Ernesto Rosales, Judith Campos y Julián Chagoya por el tiempo que dedicaron a la revisión de mi trabajo. En especial a Juan Carlos, pues desde dos años atrás, mientras fui su alumno, ya andaba aprendiendo cosas de él.
A mis amigos Edher, José, Rodrigo, Laura, Santiago, Fernanda, Eduardo, Jonathan y Rocío. Todos representan partes muy importantes de vida y muchas cosas las he logrado gracias a ustedes.
A mis padres y a mi hermano. Está de más decir que sin ustedes nada de esto hubiera sido posible.