Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Dualidad de Poincaré-Verdier

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas

PRESENTA:

Ángel David Ríos Ortiz

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Enrique Javier Elizondo de la Huerta

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2017

México, D.F., 2017

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El propósito de esta Tesis es demostrar, con todo detalle, la dualidad de Poincaré-Verdier. Para esto, se desarrollará el formalismo general de las categorías derivadas, culminando con la definición de los Funtores Derivados, utilizando estas herramientas en la Categoría Derivada de Gavillas, construyendo al funtor derivado $f^!$ como adjunto de $Rf_!$ y demostrando la formula global de la Dualidad de Verdier.

1.1. Organización de la Tesis

La Tesis se divide en dos capítulos principales. El primero es un estudio de las categorías derivadas, respetando el enfoque inicial dado por Verdier y dando los detalles específicos de las construcciones y los Teoremas necesarios, por cuestiones de espacio no se demostraron todos los resultados, pero en el caso de no tener una demostración se da una referencia precisa en la Literatura. En el segundo Capítulo se discutirá la cohomología de Gavillas con este nuevo punto de vista para luego demostar la Dualidad de Verdier.

Al comienzo de cada Capítulo se dará una motivación de la teoría a discutir y un rápido resumen de los contenidos de las secciones que lo componen. En cada Sección habrá, cuando se requiera necesario, un resumen más detallado de la misma. Además, al final de los dos capítulos principales se encontrará una Sección de Notas donde se esbozan complementos y posibles generalizaciones a la teoría discutida.

1.2. Notaciones

A lo largo de la tesis, por variedad algebraica, estamos entendiendo a un esquema irreducible,reducido, separado y de tipo finito sobre un campo. Todos los anillos serán conmutativos y con unidad. Los números naturales incluyen al cero.

1.3. Prerequisitos

Para una buena comprensión de la tesis se requiere del lector familiaridad con teoría de Categorías, al nivel del libro (23). En particular un manejo fluido de adjunciones. Topología General como en (6) es más que suficiente para lo abordado en la tesis, pero para entender mejor la noción de cohomología es recomendable familiaridad con Topología Algebraica al nivel de los primeros capítulos de (11).

El prerequisito más importante es un manejo de la teoría de módulos, haber sido expuesto al Álgebra Homológica y tener cierta familiaridad con la Teoría de Gavillas, para la parte de Álgebra Homológica basta con lo visto en (22) o la segunda sección de (9). La teoría necesaria de gavillas se puede encontrar con todo detalle en (18) y una buena parte en la Sección 1, Capítulo 2 de (14).

En algunos Ejemplos y comentarios a lo largo del trabajo quizá sea necesaria un poco más de experiencia en Geometría y/o Topología Algebraica, sin embargo estos están incluidos para el interesado y no se afecta la comprensión global de la tesis.

Capítulo 2

La Categoría Derivada

Dada una variedad (algebraica, analítica, compleja, etc.) X, una de las herramientas principales de la Topología Álgebraica consiste en asignarle a X un *complejo de cadenas* $\mathcal{X}^\bullet$, estos complejos encapsulan una gran parte de las propiedades geométricas de X. Durante los comienzos del Álgebra Homológica el estudio de los complejos se advocó en entender sus objetos de *cohomología*, puesto que en muchos casos (eg. cohomología de de Rahm o simplicial) resultan ser bastante fáciles de calcular y muestran buena parte de la geometría interna de la variedad.

Fue en la década de los 60 cuando la escuela francesa de Geometría Algebraica, liderada por Grothendieck, descubre que los objetos de cohomología resultan muy pobres para poder entender a los complejos mismos y por ende recuperar la gran carga de información geométrica que estos tienen sobre la variedad. Podemos resumir de manera muy burda el estudio de las Categorías Derivadas como una manera de estudiar a "todos" los complejos de cadenas sin recurrir a su cohomología. De esta forma estamos perdiendo el mínimo de información del espacio.

Históricamente, la motivación principal de Grothendieck fue poder generalizar la dualidad de Serre a de esquemas arbitrarios (cf. (13)), uno de los primeros problemas en los que se ve involucrado es en que no se tenía en ese tiempo una buena teoría de *hipercohomología*, esto lo podemos ver cuando analizamos el caso de las imágenes directas superiores. Supongamos que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

son morfismos de variedades algebraicas, tenemos inducidos funtores

$$\mathrm{Coh}(X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Coh}(Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Coh}(Z)$$

en las categorías de gavillas coherentes sobre los espacios (cf. (14)), por funtorialidad $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Sin embargo si queremos tomar las imágenes directas superiores, aka. $\mathbb{R}^p f_*$, lo único que podemos decir al respecto es la existencia de la sucesión espectral de Leray, a saber

$$\mathbb{R}^p(\mathbb{R}^q f_*(E)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}(g \circ f)_*(E).$$

Lo cual aunque es útil para realizar cálculos explícitos, es muy poco eficiente y claro para desarrollar una teoría sobre la categoría $\mathrm{Coh}(X)$. Así que el problema de tesis doctoral que pone Grothendieck a su estudiante J.L. Verdier es el poder formalizar este estudio. Como fruto de su tesis doctoral, Verdier demuestra en (29) que existen funtores derivados

$$D(X) \xrightarrow{\mathbb{R}f_*} D(Y) \xrightarrow{\mathbb{R}g_*} D(Z)$$

Tales que $\mathbb{R}(g \circ f)_* \cong \mathbb{R}g_* \circ \mathbb{R}f_*$. Más aún, podemos recuperar a los funtores $\mathbb{R}^p f_*(-)$ tomando la cohomología de $\mathbb{R}f_*$.

Empezaremos el Capítulo discutiendo las Categoría Abelianas, que forman el antecedente y punto de partida de las Categorías Derivada, discutiremos propiedades de estas y definiremos la Categoría de Complejos. En la Sección 2.2 discutiremos la Categoría Homotópica, demostraremos propiedades de esta que en la Sección 2.4 demostrarán que la Categoría Homotópica admite una estructura triangulada, también veremos la teoría de Categorías Modelo, siendo esta útil en las dos secciones siguientes.

La Sección 2.3 estará centrada en discutir una manera de obtener una *Categoría de Fracciones* para toda Categoría aditiva, veremos como esta generaliza la situación clásica de Localización en módulos y demostraremos el Teorema de Gabriel-Zisman que nos da una propiedad universal de la localización. Con esto podremos dar una Definición satisfactoria de la Categoría Derivada para una Categoría Abeliana. También veremos los problemas que surgen en Teoría de Conjuntos para estos casos, utilizando las Categorías Modelo como una solución parcial a estos problemas.

En la Sección 2.4 discutiremos la teoría de Categorías Trianguladas, originalmente dada por Verdier en su tesis doctoral, demostraremos que las Categorías Homotópica y Derivada de una Categoría Abeliana son trianguladas y daremos un bosquejo del tercer Ejemplo importante, La Categoría Homotópica Estable.

En la Sección 2.5 vamos a discutir propiedades en cierto modo Clásicas, en el sentido que ya habían sido consideradas en (12), bajo el punto de vista de las Categorías Derivadas.

La Sección central de este Capítulo corresponde a la Sección 2.6, en esta discutiremos la manera en que estos fueron definidos por Verdier, demostrando diversos teoremas, como el de la composición de los funtores derivados, daremos varias condiciones bajo los cuales estos pueden existir. En la Sección 2.7 compararemos los funtores derivados con los originalmente dados por Grothendieck, para demostrar que, en efecto, los definidos por Verdier son una buena generalización.

En la Sección 2.8 discutirá el Ejemplo mas importante de funtor derivado, demostrando propiedades que serán escenciales en el siguiente Capítulo. En 2.9 veremos que los funtores adjuntos en categorías abelianas pasan a funtores adjuntos en las categorías derivadas, esto también será útil en el Capítulo siguiente.

Por último en la Sección 2.10 se discutirá un poco la "nueva corriente" para estudiar a las Categorías Derivadas y veremos la Definición de Deligne en (5) de funtores derivados.

Buena parte del material expuesto ha sido tomado de los libros (9) y (17). Una excelente referencia sobre el tema de Funtores Derivados y del cual se basaron muchas demostraciones son las Notas del curso de Categorías de Dragan Milicic que pueden verse en (Milicic).

Con respecto al formalismo y abstracción utilizado en este Capítulo, no queda más que citar al mismo Grothendieck[1]:

> "The introduction of the cipher 0 or the group concept was general nonsense too, and mathematics was more or less stagnating for thousands of years because nobody was around to take such childish steps ..."

[1] Correspondencia privada de A. Grothendieck con R. Brown, *Promoting Mathematics*, MSOR Connections Vol 7 No 2 May – July 2007.

2.1. Categorías Abelianas

Las Categorías Abelianas surgen en el artículo (12) como respuesta a la cuestión de dar un *buen lugar* para hacer Álgebra Homológica. Estas ya habían sido estudiadas de cierta forma por la escuela de Álgebra, pero no es hasta el desarrollo durante el siglo XX de la Topología y Geometría Algebraica que se reconoce su papel fundamental.

Definición 1. Decimos que una categoría $\mathcal{A}$ es *abeliana* si se cumplen los siguientes tres axiomas:

(A1) Para todo par de objetos A, B el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ es un grupo abeliano y la composición es bilinear.

(A2) Admite coproductos finitos.

(A3) Todo morfismo admite un núcleo y un conúcleo.[1]

(A4) Todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo.

Si $\mathcal{A}$ satisface (A1) y (A2) diremos que $\mathcal{A}$ es aditiva. Si además satisface (A3), entonces diremos que $\mathcal{A}$ es pre-abeliana.

Observación. La existencia de núcleos y conúcleos nos implica la existencia de sucesiones exactas, la existencia de coproductos además garantiza la existencia de objetos cero. El axioma (A4) en la definición de categoría abeliana es equivalente a que se cumpla *el primer teorema de isomorfismo de Noether*: dado un morfismo $f : A \to B$, consideramos la sucesión exacta

$$A \xrightarrow{p} \mathrm{coker}(\ker(f)) \xrightarrow{\overline{f}} \ker(\mathrm{coker}(f)) \xrightarrow{i} B \ ,$$

donde p es un conúcleo (por tanto epimorfismo) e i es un núcleo (por lo tanto monomorfismo). El primer teorema de isomorfismo nos dice que $\overline{f}$ es un isomorfismo.

Ejemplo 2. *Como se puede intuir, nuestro primer ejemplo de categoría abeliana es la categoría A-**Mod** consistente de A-módulos, ver que esta satisface los axiomas (A1)-(A4) se puede encontrar en cualquier libro de Teoría de Módulos, por ejemplo (22).*

Ejemplo 3. *El ejemplo más importante en esta tesis será $\mathbf{Shv}_A(X)$ y sus subcategorías, donde $\mathbf{Shv}_A(X)$ denota la categoría de gavillas[2] de A-módulos en un espacio topológico X, la demostración de que esta categoría es abeliana puede encontrarse en el capítulo 2 de (18).*

[1] Equivalentemente, $\mathcal{A}$ admite límites y colímites finitos.

[2] La definición de *gavilla* se dará en capítulos posteriores.

Ejemplo 4. *En Geometría Algebraica destacan dos categorías abelianas asociadas a un esquema*[1] *X. La primera consta de las gavillas coherentes y la segunda de las gavillas casi-coherentes sobre X, no nos adentraremos en el estudio de estas categorías, reservándolas para comentarios durante el transcurso de la tesis. Para mas información de este tema el lector puede consultar (13), que también servirá como una referencia -incompleta- para lo que sige de la tesis. Otra muy buena referencia es el libro (17).*

En cierto sentido, las categorías derivadas nos dan un *entorno* con el cual es posible reemplazar un objeto arbitrario por una *resolución* del mismo dada en término de otros objetos. El Álgebra Homológica por otra parte, nos provee de *herramientas* con las cuales podemos calcular propiedades de esta resolución. Formalicemos estos conceptos.

Definición 5. Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, definimos la categoría de complejos $\mathcal{A}^\bullet$ como sigue:

- Objetos: Son complejos de cadenas $A^\bullet$, i.e. sucesiones $(A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ que representamos

$$\cdots \xrightarrow{d_A^{p-2}} A^{p-1} \xrightarrow{d_A^{p-1}} A^p \xrightarrow{d_A^{p}} A^{p+1} \xrightarrow{d_A^{p+1}} \cdots$$

  con objetos A^p en $\mathcal{A}$ y morfismos d_A^p que cumplen $d_A^{p+1}\circ d_A^p = 0$ para todo $p\in\mathbb{Z}$

- Morfismos: Si $A^\bullet$ y $B^\bullet$ son complejos de cadenas, entonces un morfismo $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ consiste de una familia de morfismos $(f^p : A^p \to B^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ tales que conmutan el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_A^{p-2}"] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "d_A^{p}"] \arrow[d, "f^{p}"] & A^{p+1} \arrow[r, "d_A^{p+1}"] \arrow[d, "f^{p+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_B^{p-2}"'] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B^{p-1}"'] & B^p \arrow[r, "d_B^{p}"'] & B^{p+1} \arrow[r, "d_B^{p+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Podemos extender todos los conceptos en $\mathcal{A}$ a la categoría $\mathcal{A}^\bullet$ de manera *puntual.* Por ejemplo, el objeto cero en $\mathcal{A}^\bullet$ es

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

y dado un morfismo $f^\bullet$, el complejo imagen $\mathrm{Im}(f^\bullet)$ se define como:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Im}(f^p) \xrightarrow{d_B^p|_{\mathrm{Im}(f^p)}} \mathrm{Im}(f^{p+1}) \xrightarrow{d_B^{p+1}|_{\mathrm{Im}(f^{p+1})}} \mathrm{Im}(f^{p+1}) \longrightarrow \cdots$$

Con esta discusión, el Lema a continuación se vuelve transparente

Lema 6. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, entonces $\mathcal{A}^\bullet$ es una categoría abeliana.*

[1] El lector puede reemplazar la palabra esquema por *variedad algebraica* si lo desea.

Observación. Con el Lema 6 obtenemos que las categorías $\mathcal{A}^{\bullet\bullet}, \mathcal{A}^{\bullet\bullet\bullet}, \ldots$ de bicomplejos, tricomplejos, etc. vuelven a ser categorías abelianas. Pero, desde el caso mas sencillo, como es el de los bicomplejos, debemos de tener cuidado con diversas *convenciones de signo* que abundan en la literatura. Aclararemos este punto mas adelante.

La categoría de complejos tiene una estructura mas rica que la categoría $\mathcal{A}$, como vimos antes, diversos conceptos en $\mathcal{A}$ son *heredables* a $\mathcal{A}^{\bullet}$, pero la categoría de complejos viene dotada naturalmente de nuevos funtores, que no aparecen en $\mathcal{A}$, estos son la *cohomología* y el *funtor de traslación*. Para acentuar que la categoría de complejos *generaliza* a $\mathcal{A}$ observemos qu existe una manera obvia de encajar $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^{\bullet}$.

Definición 7. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva, definimos el funtor *concentrado en 0* como $A \mapsto A_0^{\bullet}$ donde $A_0^{\bullet}$ denota el complejo

$$. \quad . \quad . \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow . \quad . \quad .$$

y que en flechas está definido de la manera obvia, denotaremos a este funtor por $C_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\bullet}$.

El funtor *que concentra en grado* 0 es claramente un encaje de la categoría $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^{\bullet}$. Describamos funtores particulares de la categoría de complejos.

Definición 8. Sea $A \in \mathcal{A}^{\bullet}$ un complejo y $k \in \mathbb{Z}$. Definimos el *complejo trasladado* k lugares, $A^{\bullet}[k]$ como el complejo cuyos términos $A[1]^p$ son A^{p+k} y con diferenciales $d^p_{A[k]} = (-1)^k d^{p+1}_A$. Dado un morfismo f, definimos el *morfismo trasladado* k lugares $f^{\bullet}[k] : A^{\bullet}[k] \to B^{\bullet}[k]$ como $f^p[1] = f^{p+k}$. Extendemos la traslación a un funtor $[k] : \mathcal{A}^{\bullet} \to \mathcal{A}^{\bullet}$.

Observación. El funtor $[k]$ nos define una autoequivalencia de la categoría $\mathcal{A}^{\bullet}$, cuya inversa es el funtor $[-k]$. Nótese la *convención de signo* en la definición de la diferencial del funtor de traslación.

Definamos ahora uno de los funtores principales en los que estaremos interesados a lo largo de la tesis, el *funtor de cohomología*. Cabe aclarar que en la definición siguiente vamos a utilizar la terminología de *objetos cociente* y de la *imagen* de un morfismo, conceptos que no suenan familiares dada la axiomatización tan formal de una categoría abeliana. Por ello, es conveniente que demos una definición *libre de elementos* de estos dos conceptos:

- La imagen de un morfismo f es $\ker \operatorname{coker} f$.
- Si A es un objeto y B es un *subobjeto* de A, en el sentido que existe un monomorfismo $i : B \to A$, definimos el *objeto cociente* como $\operatorname{coker} \ker i$.

Se demuestra fácilmente que, en categorías donde sea posible describir cocientes o la imagen de un morfismo utilizando elementos, ambas descripciones coinciden.

Definición 9. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, definimos el funtor de cohomología $H^p : \mathcal{A}^{\bullet} \to \mathcal{A}$ como sigue:

- En objetos: Si $A^\bullet$ es un complejo, entonces $H^p(A^\bullet) = \ker(d_A^p)/\mathrm{Im}(d_A^{p-1})$.
- En morfismos: Si $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo, definimos $H^p(f^\bullet) : H^p(A^\bullet) \to H^p(A^\bullet)$ como el inducido en $\ker(d_A^p)$.

La utilidad del funtor de cohomología está en que este nos provee un morfismo de *conexión* entre complejos. Como $\mathcal{A}^\bullet$ es abeliana, tiene sentido hablar de *sucesiones exactas*, el siguiente teorema corre con el nombre del *Teorema Fundamental del Álgebra Homológica*

Teorema 10. *Si*

$$A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet$$

es una sucesión exacta en $\mathcal{A}^\bullet$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow H^p(A^\bullet) \xrightarrow{H^p(f^\bullet)} H^p(B^\bullet) \xrightarrow{H^p(g^\bullet)} H^p(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^p} H^{p+1}(A^\bullet) \longrightarrow \ldots$$

El morfismo ∂^p es conocido como el morfismo de conexión.

Demostración. Consulte (31), Teorema 1.3.1. página 10. La idea es aplicar el *Lema de la Serpiente* al diagrama en cuyas filas están los términos $p-1, p$ y $p+1$ de la sucesión exacta inicial. Si suponemos que $\mathcal{A}$ es una subcategoría de $A-\mathbf{Mod}$, entonces está definido en “elementos” como

$$\delta^p(x + \mathrm{Im}(d_{C^\bullet}^p)) = (f^{p+1})^{-1}(d_{B^\bullet}^p(g^p)^{-1}(x)) + \mathrm{Im}(d_{A^\bullet}^p)$$

Para $x \in H^p(C^\bullet)$. □

Nota. En realidad, la categoría de módulos sobre un anillo A resulta ser un modelo *bastante general* de categoría abeliana. Este hecho queda plasmado en el celebrado *teorema de Freyd-Mitchell*, que en esencia nos dice que cualquier categoría abeliana *pequeña* puede ser vista como una subcategoría de A-**Mod** (véase (31)). Con esto en mente en algunas demostraciones hablaremos de “elementos” por cuestiones de claridad en la exposición, sin embargo *es posible dar las demostraciones sin suponer que las categorías son pequeñas*, aunque por lo general es mucho mas engorroso.

Definición 11. Un morfismo de complejos $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es un *casi-isomorfismo* si, para toda $p \in \mathbb{Z}$, el morfismo inducido $H^p(f) : H^p(A^\bullet) \to H^p(B^\bullet)$ es un isomorfismo. Decimos que dos complejos son casi-isomorfos, si exite un casi-isomorfismo entre ellos. También diremos que un complejo $A^\bullet$ es *acíclico* si es casi-isomorfo al complejo $0^\bullet$.

Ejemplo 12. *Sea A un objeto de $\mathcal{A}$. Supongamos que existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \xrightarrow{i_0} I^1 \xrightarrow{i_1} \ldots \tag{2.1}$$

entonces existe un casi-isomorfismo entre $A_0^\bullet$, *el complejo concentrado en grado* 0 *y el complejo*

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{i_0} I^1 \xrightarrow{i_1} \ldots$$

que denotaremos $I^\bullet$. *En efecto, consideremos el morfismo* $f : A^\bullet \to I^\bullet$ *dado como sigue*

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I_0 & \xrightarrow{i_0} & I_1 & \xrightarrow{i_1} & \ldots \end{array}$$

el diagrama conmuta debido a que 2.1 *es exacta y que* $i_0 \circ \epsilon = 0$, *además tenemos*

$$H^p(A^\bullet) = \begin{cases} A & si \ \ p = 0 \\ \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}.$$

Por otro lado, regresando a que 2.1 *es exacta, podemos calcular la cohomología del complejo* $I^\bullet$

$$H^p(I^\bullet) = \begin{cases} \ker(i_0) = A & si \ \ p = 0 \\ \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}.$$

Nótese que $H_0(f) \equiv \epsilon$.

El ejemplo anterior refuerza lo expuesto al comienzo del capítulo, cualquier elemento de $A \in \mathcal{A}$ (viendo $\mathcal{A}$ como subcategoría de $\mathcal{A}^\bullet$) es casi-isomorfo a su resolución. El trabajo que haremos a continuación será el de construir una categoría apropiada donde los casi-isomorfismos se vuelvan isomorfismos. Perdiendo así cualquier distinción entre el objeto mismo y su resolución, esta será la categoría derivada $D(\mathcal{A})$.

2.2. La Categoría Homotópica

El paso intermedio en construir la categoría derivada -que *a fortriori* nos dará una herramienta con la cual poder calcular los funtores derivados- está el de construir la *categoría homotópica*. Partiendo desde el punto de vista de la Topología Algebraica, donde usualmente se buscan invariantes *módulo homotopía*, formalizaremos la construcción de una *categoría* de complejos que *identifique* a los complejos homotópicos.

Definición 13. Decimos que dos morfismos de complejos

$$f, g : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$$

son homotópicamente equivalentes si existe una colección de morfismos $h^p : A^p \to B^{p-1}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ tales que se cumple la ecuación siguiente:

$$f^p - g^p = h^{p+1} \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ h^p.$$

Decimos que la colección $(h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ es una *homotopía* entre f y g o bien que f y g son homotópicos, denotaremos por $f \simeq g$ a esta relación.

Nota. El origen de el término *homotopía* en complejos de cadenas es topológico. Recuerde que dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ se dicen homotópicas si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(-,0) = f(-)$ y $H(-,1) = g(-)$. El *teorema de invarianza homotópica* (cf. (9), Teorema 1.7.11.(a) pp. 50) nos señala que, si f y g son homotópicas, entonces los morfismos inducidos en cohomología son los mismos. La definición de homotopía entre complejos fue tomada de la demostración de la invarianza homotópica.

Enfoquémonos por un momento en los morfismos homotópicos a cero[1]. Si $f \simeq 0$, podemos escribir esta relación en el diagrama a continuación

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "d_A^p"] \arrow[d, "f^p"] \arrow[dl, dotted, "h^p"'] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] \arrow[dl, dotted, "h^{p+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B^{p-1}"] & B^p \arrow[r, "d_B^p"] & B^{p+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Donde, por definición de la homotopía, se cumple que $f^p \equiv h^{p+1} \circ d_A^p + d_B^{p-1} h^p$. Esta forma de representar una homotopía será de particular utilidad mas adelante, demostremos algunas propiedades básicas de las homotopías.

Proposición 14. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva.*

(I) *La relación de homotopía es una relación de equivalencia.*

(II) *Si $f \simeq g$, entonces $H^p(f) = H^p(g)$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.*

(III) *La clase de funciones homotópicas a cero forma un* ideal *en $Hom(\mathcal{A}^\bullet)$ en el siguiente sentido: Si $f_1, f_2 : A^\bullet \to B^\bullet$ son homotópicas a cero, entonces $f_1 + f_2 \simeq 0$ y además $g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2$ son homotópicas a 0, cuando estén definidas.*

(IV) *Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ y $g : B^\bullet \to A^\bullet$ son tales que $g \circ f \simeq id_A$ y $f \circ g \simeq id_B$, entonces $H^p(f) = H^p(g)^{-1}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Demostremos (I). Si suponemos $f \simeq g$ y (h_p) es la homotopía entre ambas, entonces $(-h_p)$ cumple

$$g^p - f^p = (-h^{p+1}) \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ (-h^p)$$

[1]El término en inglés para estos morfismos es *nullhomotopic*, pero a falta de una traducción satisfactoria optaremos por no utilizar abreviaciones del término, prefiriendo quedarnos con el símbolo $f \simeq 0$.

y por tanto la relación es simétrica, tomando $h^p \cong 0$ obtenemos la reflexividad de $\simeq$. Resta por demostrar que la relación es transitiva, supongamos que $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ son homotópicos y que $g \simeq m$. Vamos a demostrar que $f \simeq m$, sean h^p y k^p las homotopías entre f, g y g, m respectivamente, entonces la familia $(h^p + k^p) : A^p \to B^{p-1}$ cumple

$$\begin{aligned} f^p - m^p = (f^p - g^p) + (g^p - m^p) &= (h^{p+1} \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ h^p) + (k^{p+1} \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ k^p) \\ &= (h^{p+1} + k^{p+1}) \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ (h^p + k^p), \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. Demostremos (II), como H^p es un funtor aditivo basta con demostrar que si $f \simeq 0$, entonces $H^p(f) = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$. Sea $[a] \in H^p(A^\bullet)$, entonces

$$\begin{aligned} f^p(a) &= (h^{p+1} d_A^p + d_B^{p-1} h^p)(a) \\ &= h^{p+1}(d_A^p(a)) + d_B^{p-1} h^p(a) \\ &= d_B^{p-1} h^p(a). \end{aligned}$$

La última igualdad ocurre pues $a \in \ker(d_A^p)$. En conclusión $f^p(a) \in \operatorname{Im}(d_B^{p-1})$ y esto no dependió de la elección del representante. Para demostrar (III) sean (h_1^p) y (h_2^p) las homotopías $f_1 \simeq 0$ y $f_2 \simeq 0$ respectivamente, se verifica rápidamente que $(h_1^p + h_2^p)$ es una homotopía entre $f_1 + f_2$ y 0. Supongamos que $g_1 : B^\bullet \to C^\bullet$, es otro morfismo, veamos que $(g_1^p \circ h_1^{p+1})$ nos define una homotopía entre $g_1 \circ f_1$ y 0. En efecto,

$$\begin{aligned} g_1^p \circ f_1^p &= g_1^p \circ (h_1^{p+1} \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ h_1^p) \\ &= (g_1^p \circ h_1^{p+1}) \circ d_A^p + g_1^p \circ d_B^{p-1} \circ h_1^p \\ &= (g_1^p \circ h_1^{p+1}) \circ d_A^p + d_B^{p-1} \circ g_1^{p-1} \circ h_1^p. \end{aligned}$$

El inciso (IV) se sigue inmediatamente de los tres incisos anteriores. □

Con la proposición anterior en mano, podemos pasar a definir la categoría homotópica.

Definición 15. Sea $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana. Definimos la *categoría homotópica* $K(\mathcal{A})$ como sigue:

- Objetos: Los mismos objetos que $\mathcal{A}^\bullet$.
- Morfismos: Si $A^\bullet$ y $B^\bullet$ son complejos en $K(\mathcal{A})$, entonces

  $$\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^\bullet}(A^\bullet, B^\bullet)/\simeq,$$

  donde $\simeq$ es la relación de homotopía

Observe que, generalidades en la construcción de categorías cociente (véase (23)) y la Proposición 14 implican que $K(\mathcal{A})$ es una categoría aditiva (cf. Definición 1), además tenemos canónicamente definido un funtor

$$K : \mathcal{A}^{\bullet} \longrightarrow K(\mathcal{A})$$

Como el inducido hacia el cociente. Por la Proposición 14 también el funtor de cohomología pasa a la categoría $K(\mathcal{A})$. La relación entre la categoría $K(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}$ serán explicadas en la sucesión de Lemas a continuación.

Lema 16. *El funtor concentrado en* 0 *es fiel y pleno. El funtor* $K_0 : \mathcal{A} \to K(\mathcal{A})$ *definido como* $K_0(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}_0^{\bullet})$ *es fiel y pleno.*

Demostración. La primer parte del Lema es clara, un morfismo entre dos complejos concentrados en 0 es un morfismo entre los objetos mismos. Para la segunda parte observe que

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(K_0(A), K_0(B)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\bullet}}(K_0(A), K_0(B)),$$

debido a que no existen homotopías (no triviales) entre dos complejos concentrados en 0. De forma que terminamos usando la primer parte. □

Todavía nos hace falta un ingrediente para poder definir la categoría derivada, este es el cono[1] de un morfismo.

Definición 17. Sea $f : A^{\bullet} \to B^{\bullet}$ un morfismo de cadenas. El *cono homológico*[2] de f se define como el complejo $C(f)^{\bullet} = (A^{\bullet}[1] \oplus B^{\bullet}, d_{C(f)^{\bullet}})$ que en componentes es

$$C(f)^p = A^{p+1} \oplus B^p$$

y tiene por diferenciales

$$d^p_{C(f)^{\bullet}} = \begin{pmatrix} -d_A^{p+1} & 0 \\ f^{p+1} & d_B^p \end{pmatrix}.$$

Nota. El escribir las diferenciales como matrices es una forma *muy útil* para poder describir un morfismo entre un productos. Queremos definir un morfismo hacia $A^{p+2} \oplus B^{p+1}$, por *la propiedad universal del coproducto* basta con definir un morfismo de $A^{p+1} \oplus B^p$ hacia cada componente, aquí lo que haremos es identificar el objeto $A^{p+1} \oplus B^p$ con $A^{p+1} \times B^p$ (pues en una categoría aditiva, productos finitos coinciden con coproductos finitos) y por *la propiedad universal del producto* basta con definir el morfismo de A^{p+1} a A^{p+2} y B^{p+1}, respectivamente.

[1] Del inglés *mapping cone*, para evitar confusiones con el *cono* de un espacio, trataremos de agregar el morfismo f cuando hablemos de su cono.

[2] Nuevamente la motivación proviene de Topología Algebraica. Dada una aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos, definimos el cono de esta aplicación como el espacio $C_f = (X \times I) \cup_f Y$, la aplicación inducida en los complejos simpliciales resulta ser el cono homológico.

En el caso de la definición corresponden a $-d_A^{p+1}$ y a f^{p+1} respectivamente, análogamente con B^{p+1}. Se demuestra que (debido a la unicidad de los morfismos) el producto de las matrices asociadas en el sentido usual corresponde a la composición de morfismos.

En adelante denotaremos al cono homológico simplemente por cono, es fácil demostrar que este es un complejo. Además existen morfismos $\tau_f : B^\bullet \to C(f)^\bullet$ y $\pi_f : C(f)^\bullet \to A^\bullet[1]$ inducidas por la inyección y proyección canónicas. Veamos su representación matricial:

$$\tau_f \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{B^i} \end{pmatrix} \qquad \pi_f = \begin{pmatrix} -\mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Note el signo en π_f, recalcamos que estamos siguiendo las convenciones de signo de (17) y que estas *no son estándar* en la literatura. Demostremos algunas propiedades del cono.

Proposición 18. *Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$, entonces*

(I) La sucesión

$$0 \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C(f) \longrightarrow A^\bullet[1] \longrightarrow 0$$

es exacta.

(II) La composición $A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C(f)$ es homotópica a 0.

Demostración. La primer parte es inmediata. Para el segundo inciso de la Proposición considere la inclusión canónica

$$h^i : A^i \longrightarrow C(f)^{i-1} = A^i \oplus B^{i-1},$$

esta cumple

$$(\tau_f \circ f)^i = h^{i+1} d^i_{A^\bullet} + d^{i-1}_{C(f)^\bullet} \circ h^i.$$

De manera que define una homotopía entre $\tau_f \circ f$ y el 0. $\square$

2.2.1. Propiedades Estructurales de $K(\mathcal{A})$

En esta sección recopilaremos diversas Proposiciones de carácter *técnico* que nos permitirán mas adelante dotar a $K(\mathcal{A})$ de una estructura *triangulada*.

Proposición 19. *El siguente diagrama conmuta en $K(\mathcal{A})$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "="] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[d, "="] \\ A \arrow[r, "id"'] & A \arrow[r] & C(id) \arrow[r] & A[1] \end{tikzcd}.$$

Demostración. Queremos ver que el único morfismo $0 \longrightarrow C(\mathrm{id})$ es homotópico a la identidad. En efecto, si definimos

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_A & 0 \end{pmatrix},$$

entonces h cumple que $\mathrm{id}_{C(\mathrm{id})} = h \circ d + d \circ h$, terminando la demostración. $\square$

Proposición 20. *Si $a : A_1^\bullet \to A_2^\bullet, b : B_1^\bullet \to B_2^\bullet, f_1 : A_1^\bullet \to B_1^\bullet, f_2 : A_2^\bullet \to B_2^\bullet$ son morfismos de complejos de cadenas que conmutan el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_1^\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"] & B_1^\bullet \arrow[d, "b"] \\ A_2^\bullet \arrow[r, "f_2"'] & B_2^\bullet \end{tikzcd},$$

entonces existe un morfismo $c : C(f_1)^\bullet \to C(f_2)^\bullet$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_1^\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"] & B_1^\bullet \arrow[r, "\tau_{f_1}"] \arrow[d, "b"] & C(f_1) \arrow[r, "\pi_{f_1}"] \arrow[d, "c"] & A_1^\bullet[1] \arrow[d, "a[1]"] \\ A_2^\bullet \arrow[r, "f_2"'] & B_2^\bullet \arrow[r, "\tau_{f_2}"'] & C(f_2) \arrow[r, "\pi_{f_2}"'] & A_2^\bullet[1] \end{tikzcd}.$$

Observación. Observe que, en un principio, *no requerimos* que los rectángulos conmuten. Basta con pedir como hipótesis la conmutatividad del primer cuadrado.

Demostración. Definamos c como el morfismo

$$\begin{pmatrix} -a^{i+1} & 0 \\ f_2^{i+1} \circ a^{i+1} & b^i \end{pmatrix}.$$

Como primer paso, comprobemos que c es un morfismo de complejos, en componentes:

$$\begin{pmatrix} -a^{i+2} & 0 \\ f_2^{i+2} \circ a^{i+2} & b^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{A_1}^{i+1} & 0 \\ f_1^{i+1} & d_{B_1}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{i+2} \circ d_{A_1}^{i+1} & 0 \\ -f_2^{i+2} \circ a^{i+2} \circ d_{A_1}^{i+1} + b^{i+1} \circ f_1^{i+1} & b^{i+1} d_{B_1^i} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} -d_{A_2}^{i+1} & 0 \\ f_2^{i+1} & d_{B_2}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^{i+1} & 0 \\ f_2^{i+1} \circ a^{i+1} & b^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{A_2}^{i+1} \circ a^{i+1} & 0 \\ -f_2^{i+1} \circ a^{i+1} + d_{B_2}^{i+1} \circ f_2^{i+1} \circ a^{i+1} & d_{B_2}^i \circ b^i \end{pmatrix}$$

por ser a y b morfismos de complejos tenemos que $d_{A_2}^{i+1} \circ a^{i+1} = a^{i+2} \circ d_{A_1}^{i+1}$ y $b^{i+1} d_{B_1^i} = d_{B_2}^i \circ b^i$. De forma que lo único que resta por demostrar es la igualdad

$$-f_2^{i+2} \circ a^{i+2} \circ d_{A_1}^{i+1} + b^{i+1} \circ f_1^{i+1} = f_2^{i+1} \circ a^{i+1} + d_{B_2}^{i+1} \circ f_2^{i+1} \circ a^{i+1}.$$

El primer cuadrado es conmutativo por hipótesis, así que $b^{i+1} \circ f_1^{i+1} = f_2^{i+1} \circ a^{i+1}$, además

$$\begin{aligned} -f_2^{i+2} \circ a^{i+2} \circ d_{A_1}^{i+1} &= -f_2^{i+2} \circ d_{A_2}^{i+1} \circ a^{i+1} \\ &= d_{B_2} \circ f_2^{i+1} \circ a^{i+1}. \end{aligned}$$

Veamos que el morfismo c hace conmutar todos los cuadrados. Primeramente

$$\begin{pmatrix} a^{i+1} & 0 \\ f_2^{i+1} \circ a^{i+1} & b^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{B_1^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{B_1^i} \end{pmatrix} (b^i).$$

De forma que el segundo cuadrado conmuta. Veamos la conmutatividad del tercer cuadrado

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{id}_{A_1^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} (a^{i+1}) = \begin{pmatrix} -a^{i+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{id}_{A_2^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^{i+1} & 0 \\ f_2^{i+1} \circ a^{i+1} & b^i \end{pmatrix}.$$

$\square$

Proposición 21. *Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ un morfismo de complejos, entonces existe un morfismo de complejos $g : A^\bullet[1] \to C(\tau_f)$ que es un isomorfismo en $K(\mathcal{A})$ y tal que el siguiente diagrama es conmutativo en $K(\mathcal{A})$:*

$$\begin{tikzcd} B^\bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "="] & C(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "="] & A^\bullet[1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "g"] & B^\bullet[1] \arrow[d, "="] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau"'] & C(f) \arrow[r, "\tau_\tau"'] & C(\tau) \arrow[r, "\pi_\tau"'] & B^\bullet[1] \end{tikzcd} .$$

Demostración. Definamos el morfismo $g : A^\bullet[1] \to C(\tau)$ en componentes

$$A[1]^i = A^{i+1} \xrightarrow{g^i} C(\tau)^i = B^{i+1} \oplus C(f)^i = B^{i+1} \oplus A^{i+1} \oplus B^i,$$

definido como

$$g^i = \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ \mathrm{id}_{A^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos que este es un morfismo de complejos, para esto escribamos la diferencial de $C(\tau)^\bullet$ en forma matricial

$$d_{C(\tau)}^i = \begin{pmatrix} -d_B^{i+1} & \overline{0} \\ \tau_f^{i+1} & d_{C(f)}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_B^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_A^{i+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{B^i} & f^{i+1} & d_B^i \end{pmatrix}.$$

Queremos demostrar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} A^i[1] \arrow[r, "d^i_{A[1]}"] \arrow[d, "g^i"'] & A^{i+1}[1] \arrow[d, "g^{i+1}"] \\ C(\tau)^i \arrow[r, "d^i_{C(\tau)}"'] & C(\tau)^{i+1} \end{tikzcd}.$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} -d_B^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_A^{i+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{B^i} & f^{i+1} & d_B^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ \mathrm{id}_{A^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_B^{i+1} \circ f^{i+1} \\ -d_A^{i+1} \\ -f^{i+1} + f^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{i+2} \circ d_A^{i+1} \\ -d_A^{i+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} -f^{i+2} \\ \mathrm{id}_{A^{i+2}} \\ 0 \end{pmatrix} (d_A^{i+1}) = \begin{pmatrix} -f^{i+2} \circ d_A^{i+1} \\ d_A^{i+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto es un morfismo de cadenas.

Afirmación 22. *El morfismo $g : A^\bullet[1] \to C(\tau)$ admite una inversa homotópica.*

Demostración. Definamos $g^{-1} : C(\tau) \to A^\bullet[1]$ como $\pi_{C(f)} \circ \pi_f$, donde $\pi_{C(f)}$ es la proyección de $C(\tau)$ en el segundo factor. Como matriz, g^{-1} está dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \end{pmatrix},$$

componiendo

$$(g^{-1})^i \circ g^i = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ \mathrm{id}_{A^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{id}_{A^{i+1}}$$

e inversamente

$$g^i \circ (g^{-1})^i = \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ \mathrm{id}_{A^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f^{i+1} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resta demostrar que esta última matriz es homotópica a la identidad, en otras palabras, que

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{B^{i+1}} & f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{B^i} \end{pmatrix}$$

es homotópico a cero, definimos la homotopía

$$h^i : B^{i+1} \oplus A^{i+1} \oplus B^i \to B^i \oplus A^i \oplus B^{i-1}$$

que está definida por la matriz

$$h^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{B^{i+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} h^{i+1} \circ d^i + d^{i-1} \circ h^i = & \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{B^{i+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_B^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_A^{i+1} & 0 \\ \mathrm{id}_{B^i} & f^{i+1} & d_B^i \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} -d_B^i & 0 & 0 \\ 0 & -d_A^i & 0 \\ \mathrm{id}_{B^{i-1}} & f^i & d_B^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id}_{B^i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{B^{i+1}} & f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{B^i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que era a lo que queríamos llegar. □

En $\mathcal{A}^\bullet$ tenemos la igualdad

$$\pi_{\tau_f} \circ g = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{B^{i+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ \mathrm{id}_{A^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = f^{i+1}$$

que demuestra la conmutatividad del tercer cuadrado. El segundo cuadarado no conmutará en $\mathcal{A}^\bullet$ pero sí lo hará en $K(\mathcal{A})$. Por la Afirmación 22 existe una inversa homotópica g^{-1}, de manera que basta con demostrar que $g^{-1} \circ \tau_\tau = \pi$ en $K(\mathcal{A})$. En efecto,

$$g^{-1} \circ \tau_t = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{B^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{A^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} = \pi_f.$$

□

Utilizando este Lema es posible demostrar un Corolario muy útil.

Corolario 23. *La composición* $C(f)^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1] \longrightarrow B^\bullet[1]$ *es homotópica a 0.*

Demostración. Por la Proposición 18 tenemos que $\pi_\tau \circ \tau_\tau \simeq 0$ y por lo tanto como el diagrama de la Proposición 21 conmua, entonces $f \circ \pi_f \simeq 0$. □

Ahora veremos un Teorema de importancia fundamental, puesto que es la generalización a la categoría homotópica de el Teorema Fundamental del Álgebra Homológica. Observese que *no estamos hablando de sucesiones exactas* en $K(\mathcal{A})$.

Lema 24. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría abeliana. Todo triángulo distinguido*[1] *en* $K(\mathcal{A})$

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\tau_f} C(f) \xrightarrow{\pi_f} A^\bullet[1]$$

induce una sucesión exacta larga en $\mathcal{A}$

$$\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \longrightarrow H^n(B^\bullet) \longrightarrow H^n(C(f)) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta obtenida de la Proposición 18

$$0 \longrightarrow B^\bullet \xrightarrow{\tau_f} C(f) \xrightarrow{\pi_f} A^\bullet[1] \longrightarrow 0 \ .$$

Aplicando el Teorema fundamental del Álgebra Homológica (Teorema 10) tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(\tau_f)} H^n(C(f)) \xrightarrow{H^n(\pi_f)} H^n(A^\bullet[1]) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(B^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Claramente $H^n(A^\bullet[1]) = H^{n+1}(A^\bullet)$, por lo tanto basta con demostrar que $\delta^n = H^n(f)$. Utilizando la *descripción explícita* del morfismo de conexión en el Teorema 10 obtenemos mediante un cálculo directo que

$$\begin{aligned} \delta^p(x + \operatorname{Im}(d_{A^p})) &= (\tau_f^{p+1})^{-1}(d^p_{C(f)}(\pi_f^p)^{-1}(x)) + \operatorname{Im}(d^p_{B^\bullet}) \\ &= f(x) + \operatorname{Im}(d^p_{B^\bullet}). \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración. □

Corolario 25. *Sea* $f : A^\bullet \to B^\bullet$ *un morfismo en* $\mathcal{A}^\bullet$*. Son equivalentes:*

(a) f *es un casi-isomorfismo.*

[1] Explicaremos esta terminología en la sección de Triángulos, por el momento el lector puede ignorar el nombre y simplemente fijarse en la sucesión.

(b) $C(f)$ es acíclico. (cf. Definición 11)

Demostración. Aplicando el Lema 24 obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B^\bullet) \longrightarrow H^n(C(f)) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

$C(f)$ es acíclico si y solo si $H^n(C(f)) = 0$ y por exactitud esto ocurre si y solo si $H^n(f)$ es un isomorfismo. $\square$

Lema 26. *Si $f : C^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo de complejos y $s : A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces existe un casi-isomorfismo $t : C_0^\bullet \to C^\bullet$ y un morfismo $g : C_0^\bullet \to A^\bullet$ tales que el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} C_0^\bullet \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & C^\bullet \arrow[d, "f"] \\ A^\bullet \arrow[r, "s"'] & B^\bullet \end{tikzcd} .$$

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama, donde el primer cuadrado es conmutativo (cf. Observación en la Proposición 20)

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\tau_s\circ f"] \arrow[d, "f"'] & C(s) \arrow[r, "\tau_{\tau_s\circ f}"] \arrow[d, "="] & C(\tau_s\circ f) \arrow[r, "\pi_{\tau_s\circ f}"] & C^\bullet[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau_s"'] & C(s) \arrow[r, "\pi_s"'] & A^\bullet[1] \arrow[r, "-s[1]"'] & B^\bullet[1] \end{tikzcd} .$$

Por la Proposición 21 podemos completar el diagrama a

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\tau_s\circ f"] \arrow[d, "f"] & C(s) \arrow[r, "\tau_{\tau_s\circ f}"] \arrow[d, "="] & C(\tau_s\circ f) \arrow[r, "\pi_{\tau_s\circ f}"] & C^\bullet[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau_s"] \arrow[d, "="] & C(s) \arrow[r, "\pi_s"] \arrow[d, "="] & A^\bullet[1] \arrow[r, "-s[1]"] \arrow[d, "g"] & B^\bullet[1] \arrow[d, "="] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau_s"'] & C(s) \arrow[r, "\tau_{\tau_s}"'] & C(\tau_s) \arrow[r, "\pi_s"'] & B^\bullet[1] \end{tikzcd} ,$$

donde g es un isomorfismo en $K(\mathcal{A})$. Por la Proposición 20 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\tau_s\circ f"] \arrow[d, "f"] & C(s) \arrow[r, "\tau_{\tau_s\circ f}"] \arrow[d, "="] & C(\tau_s\circ f) \arrow[r, "\pi_{\tau_s\circ f}"] \arrow[d, "c"] & C^\bullet[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau_s"'] & C(s) \arrow[r, "\tau_{\tau_s}"'] & C(\tau_s) \arrow[r, "\pi_s"'] & B^\bullet[1] \end{tikzcd} .$$

Definamos $v : C(\tau_s \circ f) \longrightarrow A^\bullet[1]$ como $v = g^{-1} \circ c$, con este morfismo el diagrama

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\tau_s\circ f"] \arrow[d, "f"] & C(s) \arrow[r, "\tau_{\tau_s\circ f}"] \arrow[d, "="] & C(\tau_s\circ f) \arrow[r, "\pi_{\tau_s\circ f}"] \arrow[d, "v"] & C^\bullet[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau_s"'] & C(s) \arrow[r, "\pi_s"'] & A^\bullet[1] \arrow[r, "-s[1]"'] & B^\bullet[1] \end{tikzcd}$$

conmuta, aplicando el Teorema fundamental del Álgebra Homológica obtenemos la sucesión exacta

$$. \;\; . \;\; . \longrightarrow H^p(C^\bullet) \xrightarrow{H^p(\tau_s\circ f)} H^p(C(\tau_s\circ f)) \xrightarrow{\pi_{\tau_s\circ f}} H^p(C^\bullet[1]) \longrightarrow . \;\; . \;\; . \;\; .$$

Como s es cuasi-isomorfismo por el Corolario 25 el complejo $C(s)$ es acíclico, de forma que $H^p(\pi_s)$ es un isomorfismo. Aplicando el funtor de traslación $[-1]$ obtenemos el cuadrado

$$\begin{tikzcd} C(\tau_s\circ f)[-1] \arrow[r, "\pi_{\tau_s\circ f}[-1]"] \arrow[d, "g^{-1}\circ\pi_{\tau_s\circ f}[-1]"'] & C^\bullet \arrow[d, "f"] \\ A^\bullet \arrow[r, "s"'] & B^\bullet \end{tikzcd} ,$$

que termina la demostración. □

Análogamente se demuestra el Lema siguiente.

Lema 27. *Si $f : B^\bullet \to A^\bullet$ es un morfismo de complejos y $s : B^\bullet \to D^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces existe un casi-isomorfismo $t : A^\bullet \to C^\bullet$ y un morfismo $g : D^\bullet \to C^\bullet$ tales que el diagrama siguiente es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} C^\bullet & D^\bullet \arrow[l, dotted, "g"'] \\ A^\bullet \arrow[u, dotted, "t"] & B^\bullet \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

2.2.2. Categorías Modelo

La consideración de la categoría homotópica ya había sido hecha en Topología Algebraica antes del trabajo de Verdier, la motivación de construir la categoría homotópica y en últimas instancias definir la categoría derivada, como ya se mencionó en la Introducción, fue el poder definir la *Categoría Homotópica Estable*, de forma que fue natural el considerar esta categoría.

En esta sección vamos a discutir un poco sobre el trabajo de Quillen en categorías Modelo, manteniendo en mente la motivación de Topología Algebraica expuesta en la Introducción de la tesis.

El trabajo de Daniel Quillen en (25) se advocó a definir *axiomáticamente* una manera de poder hacer homotopía. Esta noción recobra la teoría de homotopía usual en espacios topológicos, conjuntos simpliciales y complejos de cadenas sobre una categoría abeliana con suficientes proyectivos (eg. $A-$**Mod**).

Definición 28. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una estructura módelo[1] en $\mathcal{C}$ está dada por tres clases distinguidas de morfismos en $\mathcal{C}$, las *equivalencias débiles* (que se denotan por $\simeq$), las *fibraciones* (denotadas por $\twoheadrightarrow$) y cofibraciones (denotadas $\rightarrowtail$), que están sujetas a los axiomas siguientes:

[1]En su trabajo original (25), Quillen se refiere a esta como una *estructura de modelo cerrada*, por convención general, siempre que se habla de estrucuras modelo se está suponiendo que estas son cerradas, en el sentido de Quillen. Seguiremos a lo largo de la tesis esta convención.

(CM1) $\mathcal{C}$ tiene límites y colímites finitos.

(CM2) Para cualesquiera dos morfismos $f : C \to D$ y $g : B \to C$, si dos de f, g, fg son equivalencias débiles, entonces también lo es la tercera.

(CM3) Si f es un retracto de g (i.e. existen aplicaciones

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "i'"'] & Y' \arrow[r, "r'"'] & X' \end{tikzcd}$$

tales que $ri = id$ y $r'i' = id$) y g es una fibración (o cofibración o equivalencia débil), entonces también lo es f.

(CM4) (*Axioma de Levantamientos*) En cualquier diagrama conmutativo sólido[1]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"] & Y \arrow[d, two heads, "p"] \\ X' \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "w"] & Y' \end{tikzcd}$$

donde i es una cofibración y p una fibración. Si p ó i son equivalencias débiles, entonces existe una flecha w que hace conmutar el diagrama.

(CM5) (*Axioma de Factorización*) Cualquier morfismo $X \to Y$ admite factorizaciones funtoriales $X \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow Y$ donde la cofibración es una equivalencia débil y $X \rightarrowtail W \twoheadrightarrow Y$ donde la fibración es una equivalencia débil

Como ejemplo básico de categoría modelo, Quillen dotó a la categoría $\mathcal{A}^\bullet$ de complejos de una categoría abeliana $\mathcal{A}$ con suficientes proyectivos[2]. Decimos que un morfismo p tiene la Propiedad de Levantamiento por la Derecha (que denotaremos (RLP) por sus siglas en inglés) con respecto a un morfismo i si para todo diagrama sólido como en el axioma (CM4) existe una w que lo haga conmutar. De manera dual se define la Propiedad de Levantamiento por la Izquierda (LLP por sus siglas en inglés).

Teorema 29. *Las categoría $\mathcal{A}^\bullet$ admite una estructura de categoría modelo, donde*

1. *Las equivalencias débiles son los casi-isomorfismos de complejos.*

2. *Las cofibraciones son morfismos que en cada grado son monomorfismos.*

3. *Las fibraciones son los morfismos que tienen la (RLP) con respecto a las cofibraciones triviales (i.e. cofibraciones que son equivalencias débiles).*

[1] Por esto nos referimos a un diagrama donde todas las flechas, que no estén punteadas, conmuta. Por lo general esto lo hacemos para no tener que repetir el mismo diagrama dos veces.

[2] Véase la Sección 2.5

Demostración. Se puede encontrar en (16), un caso particulas (complejos que son uniformemente acotados) puede encontrarse en (7). □

Para tener una idea mas clara del tipo de objetos que son las fibraciones demos un Teorema relacionado al respecto.

Teorema 30. *Si un morfismo $f : A^\bullet \to B^\bullet$ cumple que*

1. *Existe N tal que $H^n(f)$ es 0 para todo $n < N$.*
2. *Para todo n se cumple que f^n es un epimorfismo.*
3. *Para todo n se cumple que el núcleo de f^n es un objeto inyectivo (cf. Sección 2.5)*

entonces f es una cofibración.

Demostración. Véase (16), Capítulo 2. □

No podemos terminar esta sección sin mencionar quizá el Ejemplo canónico de Categoría Modelo y el motivador principal de la teoría.

Teorema 31. *La categoría **Top** (respectivamente **Top**$_*$) cuyos objetos son espacios topológicos (resp. espacios topológicos basados) y con morfismos las aplicaciones continuas (resp. aplicaciones continuas basadas) admite una estructura de Categoría Modelo, donde*

1. *Las equivalencias débiles son las aplicaciones continuas $f : X \to Y$ cuyos morfismos inducidos en los grupos fundamentales $\pi_n(f) : \pi_n(X, *) \to \pi_n(Y, f(*))$ son isomorfismos para todo $n \geq 0$ y todo punto base $*$.*
2. *Las fibraciones son las fibraciones de Serre.*
3. *Las cofibraciones son aplicaciones continuas que tienen la LLP con respecto a las fibraciones triviales.*

Demostración. Consulte (7), Sección 8. □

Más adelante veremos que también a la Categoría de Gavillas sobre un espacio topológico es posible dotarla de una estructura modelo. Para más detalles sobre la teoría de Categorías Modelo el lector es invitado a consultar (7) y (16). Más adelante veremos como estas se relacionan con la construcción de la Categoría Derivada en esta tesis.

2.3. Localización

El procedimiento de localización en una categoría se puede pensar como un proceso de *forzar* cierta clase de morfismos a ser invertibles. Como se puede dilucidar desde el nombre del procedimiento, este tiene su origen en la idea de localizar A-módulos con respecto a un ideal primo. En Geometría Algebraica este proceso es *escencial* puesto que representa el tallo de la gavilla estructural de un esquema en un punto dado, o en otras palabras, el anillo de *gérmenes de funciones regulares* en el punto. En Topología Algebraica la motivación del proceso de localizar surge en localizar con respecto a *Teorías de Homología*.

En esta sección definiremos un procedimiento *muy general* de localización en Categorías. Más aún, discutiremos como es posible llevar el proceso de localización al contexto de las *Categorías Modelo* (cf. Subsección 2.2.2) invirtiendo las equivalencias débiles, esto es conocido como *Localización de Bousfield*. Citemos a J.F. Adams[1]

> *I owe to A.K. Bousfield the remark that the procedure below involves very serious set-theoretical difficulties. Therefore it will be best to interpret this section not as a set of theorems, but as a programme, that is, a guide to what one might wish to prove.*

Con esa filosofía, queremos describir la categoría derivada $D(\mathcal{A})$ como una manera de invertir casi-isomorfismos, esto es una localización, escribiremos 4 puntos que serían *escenciales* para poder localizar a $\mathcal{A}^\bullet$.

- La clase de isomorfismos es, en algún sentido, *multiplicativa*.
- La categoría se forma a partir de $\mathcal{A}^\bullet$, i.e, existe un funtor $Q : \mathcal{A}^\bullet \to D(\mathcal{A})$.
- Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces $Q(f)$ es un isomorfismo.
- $D(\mathcal{A})$ es, en algún sentido, *universal* con respecto a las últimas 2 propiedades.

El propósito de esta sección es pues, completar este programa, que llevaremos acabo de manera sistemática en el contexto mas general de *categorías aditivas*, para al finalizar aterrizarlo a la categoría homotópica. Por último veremos como se resuelven los problemas conjuntistas para ciertas categorías particulares, utilizando la teoría de categorías modelo.

Definición 32. Una clase S de morfismos en una categoría $\mathcal{A}$ se dice *localizante* si satisface los siguientes axiomas:

(L1) S es cerrada bajo composiciones y contiene los morfismos identidad, i.e. si $s, t \in S$ y st existe, entonces $st \in S$, además $1_A \in S$ para todo objeto $A \in \mathcal{A}$.

(L2) Se satisfacen las *condiciones de Ore*: Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{A}$ y $s : D \to B$ es un morfismo en S, entonces existen $g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ y $t \in S$ tales que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, dotted, "t"'] & D \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

[1] página 293, Sección 14 en (1)

es conmutativo y además se cumple el enunciado dual, esto es, si $f : B \to A$ es un morfismo y $s : B \to D$ es un morfismo en S, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C & D \arrow[l, dotted, "g"'] \\ A \arrow[u, dotted, "t"] & B \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} .$$

(L3) Si $f, g : A \to B$ son morfismos en $\mathcal{A}$, entonces la existencia de un $s \in S$ tal que $sf = sg$ es *equivalente* a la existencia de $t \in S$ tal que $ft = gt$.

Comencemos a construir una categoría donde los morfismos de la clase localizante se vuelvan *isomorfismos*. Para ello tendremos que hacer diversos lemas *de carácter técnico*, que nos darán un poco más de familiaridad con estas categorías.

Definición 33. Un *techo* es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B \end{tikzcd} ,$$

donde $s \in S$ y $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$. Denotaremos un techo por la pareja (s, f) o bien $s^{-1}f$.

Nota. Formalmente, estamos hablando en la Definición de techo de un *techo por la izquierda*, la noción de *techo por la derecha* se define de manera dual[1], i.e. un techo por la derecha es un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & A' & \\ A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

donde $s \in S$ y $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$. Claramente pasar de la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría opuesta $\mathcal{A}^{op}$ cambia los techos por la izquierda a techos por la derecha, por tanto basta con estudiar propiedades de los techos por la izquierda.

Decimos que dos techos (s, f) y (t, g) son *equivalentes* si existe un tercer techo (r, h) y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & & A''' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f", near end] & & A'' \arrow[dlll, "t"', near end] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & & & B \end{tikzcd} .$$

[1]Esta es la primera vez que mencionamos explícitamente el tema de Dualidad en Categorías, la filosofía es que todo enunciado que se formule en la Categoría que no tenga *variables libres* puede ser formulado por dualidad en su categoría opuesta. De forma que basta demostrar solo uno para tener ambos. Para más detalles consulte (23).

Lema 34. *La relación entre los techos es de equivalencia.*

Demostración. La simetría es inmediata y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A' \arrow[dl, "="'] \arrow[dr, "="] & & \\
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f" near end] & & A'' \arrow[dlll, "s"' near end] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & A
\end{tikzcd}$$

claramente es conmutativo, lo que demuestra la reflexividad. Demostremos la transitividad, supongamos que $(s, f) \sim (t, g)$ y que $(t, g) \sim (u, e)$, ilustrado en el diagrama conmutativo a continuación:

$$\begin{tikzcd}
 & C' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & & C'' \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "i"] & \\
A' \arrow[d, "s"'] \arrow[drrrr, "f" near start] & & A'' \arrow[dll, "t"' near end] \arrow[drr, "g" near end] & & A''' \arrow[d, "e"] \arrow[dllll, "u"' near start] \\
A & & & & B
\end{tikzcd} . \tag{2.3}$$

Queremos construir un diagrama conmutativo de la forma siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & & C''' \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "j"] & & \\
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f" near end] & & A''' \arrow[dlll, "u"' near end] \arrow[dr, "e"] & \\
A & & & & B
\end{tikzcd} . \tag{2.4}$$

Por la condición de Ore obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[d, "sr"'] & D \arrow[l, dotted, "v"'] \arrow[d, dotted, "k"] \\
A & C'' \arrow[l, "tp"]
\end{tikzcd} , \tag{2.5}$$

donde $v \in S$. Si definimos $f_1 = hv$ y $f_2 = pk$, entonces por el diagrama 2.3 obtenemos:

$$tf_1 = thv = srv = tpk = tf_2$$

Por la condición (L3) en la definición de clase localizante existe $w \in S$ tal que $f_1 w = f_2 w$. Definamos $q : C''' \to A'$ como $q = rvw$ y $j : C''' \to A'''$ como $j = ikw$. Entonces ocupando los diagramas 2.3 y 2.5

$$ej = eikw = gpkw = gf_2 w = gf_1 w = ghvw = frvw = fq$$

además

$$uj = uikw = tpkw = tf_2w = tf_1w = thvw = srvw = sq$$

de manera que usando las definiciones de q y j dadas anteriormente, el diagrama 2.4 es conmutativo y por lo tanto $(s, f) \sim (u, e)$. □

Ahora resta por definir una forma de componer (clases de) techos, supongamos que (s, f) y (t, g) son techos tales que tf está definido. Definimos la composición como sigue: Por las condiciones de Ore existen $t' \in S$ y $f' \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & A'' \arrow[dl, dotted, "t'"'] \arrow[dr, dotted, "f'"] & & \\ & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & B' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B & & C \end{tikzcd} . \tag{2.6}$$

Así que definimos la composición de (s, f) con (t, g) como el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "st"'] \arrow[dr, "gf'"] & \\ A & & C \end{tikzcd} . \tag{2.7}$$

Antes de demostrar que esta composición está bien definida, demostraremos un Lema técnico respecto a la Condición de Ore, el cual nos dice que el cuadrado obtenido de las condiciones de Ore es único, salvo equivalencia de techos.

Lema 35. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{A}$ y $s : C \to B$ un morfismo en S. Si*

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, dotted, "g_1"] \arrow[d, dotted, "t_1"'] & C \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_2 \arrow[r, dotted, "g_2"] \arrow[d, dotted, "t_2"'] & C \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

son dos diagramas conmutativos, entonces los techos (g_1, t_1) y (g_2, t_2) son equivalentes.

Demostración. Aplicando la condición de Ore a t_1 y t_2 obtenemos

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, dotted, "t_1'"] \arrow[d, dotted, "t_2'"'] & D_1 \arrow[d, "t_1"] \\ D_2 \arrow[r, "t_2"'] & A \end{tikzcd}$$

y se cumplen las igualdades

$$sg_1t_1' = ft_1t_1' = ft_2t_2' = sg_2t_2',$$

por tanto existe $w : E_2 \to E_1$ tal que $g_1 t_1' w = g_2 t_2' w$. Es rutina demostrar que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & E_2 \arrow[dl, "t_1' w"'] \arrow[dr, "t_2' w"] & & \\
& D_1 \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[drrr, "g_1"] & & D_2 \arrow[dlll, "t_2"] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A & & & & C
\end{tikzcd},$$

lo que demuestra la equivalencia. $\square$

Lema 36. *La composición de clases de equivalencia de techos está bien definida.*

Demostración. Por el Lema 35 la composición es independiente -módulo equivalencia- del cuadrado escogido al aplicar la condición de Ore. De forma que lo que resta es demostrar que pasa a clases de equivalencia, veamos que, si $(t, g) \sim (t', g')$, entonces $(st, gf') \sim (st', g'f')$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & B''' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& B' \arrow[dl, "t"'] \arrow[drrr, "g"] & & B'' \arrow[dlll, "t'"] \arrow[dr, "g'"] & \\
B & & & & C
\end{tikzcd},$$

por la condición de Ore obtenemos

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dotted, "a"] \arrow[d, dotted, "u"'] & B''' \arrow[d, "t \circ r"] \\
A' \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}.$$

Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & A'' \arrow[dl, dotted, "u"'] \arrow[dr, dotted, "v \circ a"] & & \\
& A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & B' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y la composición de estos techos es $(s \circ u, g \circ v \circ a)$. Análogamente tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & A'' \arrow[dl, dotted, "u"'] \arrow[dr, dotted, "v'\circ a"] & & \\
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & B'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

y la composición de estos techos es $(s \circ u, g' \circ v' \circ a) = (s \circ u, g \circ v \circ a)$ lo que demuestra este caso. El otro caso es similar. ☐

Resta un último detalle técnico para poder definir, al fin, la *categoría* de fracciones, el cual abordamos en el Lema siguiente

Lema 37. *La composición de techos es asociativa y la composición del techo* (id_A, id_A) *con* (s, f) *es equivalente a* (s, f)*.*

Demostración. Consideremos tres techos que se puedan componer

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & B' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & C' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\
A & & B & & C & & D
\end{tikzcd}$$

mediante repetidas aplicaciones de la condición de Ore:

$$\begin{tikzcd}
 & & & J \arrow[dl, dotted, "x"'] \arrow[dr, dotted, "k"] & & & \\
 & & H \arrow[dl, dotted, "v"'] \arrow[dr, dotted, "i"] & & I \arrow[dl, dotted, "w"'] \arrow[dr, dotted, "j"] & & \\
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & B' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & C' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & \\
A & & B & & C & & D
\end{tikzcd}.$$

Por la independencia de los morfismos obtenidos al aplicar la condición de Ore, y la asociatividad de $\mathcal{A}$, terminamos. La segunda parte del Lema es inmediata. ☐

Todos los lemas anteriores terminan la parte técnica que nos permitirá definir de manera *precisa* la categoría localizada, sin embargo hay cuestiones *fundamentalistas* debajo de esta, al menos aparente, buena definición, que abordaremos al finalizar la sección.

Definición 38. Sean $\mathcal{A}$ una categoría y S un sistema localizante. Definimos la *categoría de fracciones* de $\mathcal{A}$ con respecto a S y la denotamos $\mathcal{A}[S^{-1}]$ como sigue:

- Objetos: Los mismos que $\mathcal{A}$.

- Morfismos: Clases de equivalencia de techos, con la composición definida anteriormente.

Nota. Análogamente podemos definir la categoría de fracciones donde la clase de equivalencia será tomada a partir de los techos por la derecha. Demstrar que estas dos categorías son isomorfas es rutinario, cabe mencionar que no podemos utilizar dualidad para ver que la relación de equivalencia de techos está bien definida.

Sea $\mathcal{A}^{op}$ la categoría opuesta de $\mathcal{A}$. Si S es una clase localizante en $\mathcal{A}$, entonces claramente S es una clase localizante en $\mathcal{A}^{op}$. Definimos un funtor $\alpha : \mathcal{A}^{op}[S^{-1}] \to \mathcal{A}[S^{-1}]^{op}$

- En objetos: La identidad.
- En morfismos: Dado un morfismo $\phi : A \to B$ representado por el techo por la izquierda

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

  asociamos el morfismo en $\mathcal{A}[S^{-1}]^{op}$ correspondiente al techo por la derecha

$$\begin{tikzcd} & A' & \\ A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 39. *El funtor* $\alpha : \mathcal{A}^{op}[S^{-1}] \to \mathcal{A}[S^{-1}]^{op}$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Inmediata por dualidad. □

Una de las propiedades agradables de la localización, al menos en el sentido algebraico, es la de poder reducir *al denominador común*. Categóricamente es el Lema siguiente.

Lema 40. *Sean*

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

morfismos entre A *y* B *en* $\mathcal{A}[S^{-1}]$*, donde* $1 \leq i \leq n$*. Entonces existen* A' *en* $\mathcal{A}[S^{-1}]$*,* $s \in S$ *y morfismos* $g_i : A' \to B$ *tales que* $(s, g_i) \sim (s_i, f_i)$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*.*

Demostración. Por inducción en n. La base de la inducción es trivial, supongamos $n > 1$, por hipótesis de inducción existen A'', $t \in S$ y morfismos $h_i : A'' \to B$ tales que $(t, h_i) \sim (s_i, f_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Por la condición de Ore existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A''' \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[d, dotted, "u"'] & A_n \arrow[d, "s_n"] \\ A'' \arrow[r, "t"'] & A \end{tikzcd}$$

por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & A''' \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "u"] & & \\
& A''' \arrow[dl, "t\circ u"'] \arrow[drrr, "h_i\circ u"] & & A'' \arrow[dlll, "t"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\
A & & & & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, así que $(s, h_i \circ u) \sim (t, h_i)$ para todo $i \leq n-1$. Por otro lado, también conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & A''' \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& A''' \arrow[dl, "t\circ u"'] \arrow[drrr, "f_n\circ h"'] & & A_n \arrow[dlll, "s_n"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\
A & & & & B
\end{tikzcd}$$

es decir, $(s, f_n \circ h) \sim (s_n, f_n)$, lo que termina la demostración escogiendo $A' = A'''$ y los morfismos $h_1, \ldots, h_{n-1}, f_n \circ h$. $\square$

Dotamos a $\mathcal{A}[S^{-1}]$ de el funtor $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ definido como sigue:

- Objetos: La identidad.
- Morfismos: Si $f : A \to B$ es un morfismo, entonces definimos $Q(f)$ como $Q(f) = (\mathrm{id}_A, f)$.

Verifiquemos que Q es un funtor: Supongamos que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos, entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dl, dotted, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, dotted, "f"] & & \\
& A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "f"] & & B \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd} .$$

Por la definición de composición obtenemos

$$Q(f) \circ Q(g) = (\mathrm{id}_A, f) \circ (id_B, g) = (\mathrm{id}_A, f \circ g) = Q(f \circ g),$$

esto demuestra que Q es funtor. Como la intuición nos dicta, tendremos que ver a esta nueva categoría junto al funtor Q con respecto a alguna *propiedad universal*. El teorema que nos caracteriza la localización es llamado el *Teorema de Gabriel-Zisman*.

Teorema 41. *La categoría $\mathcal{A}[S^{-1}]$ con el funtor Q satisfacen la* propiedad universal de la localización*, esto es:*

(i) Para todo morfismo $s \in S$ se cumple que $Q(s)$ es un isomorfismo.

(II) *Para toda categoría $\mathcal{B}$ y un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $F(w)$ sea un isomorfismo, existe un único funtor $F_S : \mathcal{A}[S^{-1}] \to \mathcal{B}$ y un isomorfismo natural $F \cong F_S \circ Q$.*

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & A \arrow[dl, dotted, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, dotted, "\mathrm{id}_A"] & & \\ & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "s"] & & A \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"] & \\ A & & B & & A \end{tikzcd}.$$

La composición de los techos es $(\mathrm{id}_A, s) \circ (s, \mathrm{id}_A) = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$, por lo tanto $Q(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}[S^{-1}]$, esto demuestra (I). Para demostrar (II) comencemos por suponer la existencia del funtor F_S y veamos que este funtor es único, aplicando el isomorfismo $F \cong F_S \circ Q$ a un objeto A de $\mathcal{A}$ obtenemos que $F(X) = F_S(X)$. Si (s, f) es un morfismo en $\mathcal{A}[S^{-1}]$, entonces tenemos la igualdad

$$(s, f) \circ (\mathrm{id}, s) = (\mathrm{id}, f).$$

Por lo tanto $(s, f) \circ F(s) = Q(f)$ y aplicando F_S obtenemos

$$F_S(f) \circ F(s) = F(f).$$

Tenemos, por hipótesis, que $F(s)$ es invertible y

$$F_S(f) = F(f) \circ (F(s))^{-1} \tag{2.8}$$

lo que define a F_S *de manera única*. Para la existencia, definamos el funtor F_S en objetos por $F_S(A) = F(A)$ y en morfismos por la ecuación 2.8, la corroboración de que este funtor así definido no depende de la clase de equivalencia es rutinaria.[1] □

Dotando a $\mathcal{A}$ de una estructura de categoría aditiva podemos especializar mas el Teorema de Gabriel-Zisman.

Teorema 42. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva, entonces $\mathcal{A}[S^{-1}]$ es una categoría aditiva, $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ es un funtor aditivo y se cumple la propiedad universal de la localización en categorías aditivas, i.e. Si el funtor F del Teorema 41 es aditivo, entonces F_S también lo es.*

[1] El lector puede, cautelosamente, comparar la demostración dada aquí con la hecha en cualquier libro de Álgebra Conmutativa (e.g. (2), pp. 39) y notar asombrado que ambas demostraciones son escencialmente la misma.

Demostración. Comencemos por demostrar que $\mathcal{A}[S^{-1}]$ es aditiva. Para esto, comencemos dando una estructura aditiva a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[S^{-1}]}(A,B)$, sean entonces (s,f) y (t,g) dos techos entre A y B, aplicando el Lema 40 existen representantes $(u,h),(u,k)$, de manera que definimos el techo suma por, la clase de, $(u,h+k)$. Argumentos similares a los hechos en toda la sección demuestran que esta estructura no depende de los representantes escogidos y ser $\mathcal{A}$ una categoría aditiva, concluimos la aditividad de $\mathcal{A}[S^{-1}]$. Claramente Q es un funtor aditivo, sea entonces $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ un funtor aditivo tal que para todo $s\in S$ se cumple que $F(s)$ es invertible. Por el Teorema 41 existe un único funtor $F_S:\mathcal{A}[S^{-1}]\to\mathcal{B}$, demostremos que este funtor es aditivo.

$$F_S((u,h)+(u,k)) = F(h+k)\circ F(u)^{-1} = F(h)\circ F(u)^{-1}+F(k)\circ F(u)^{-1} = F_S((u,h))+F_S((u,k))$$

Lo que finaliza la demostración. □

Nota. Podríamos ir mas allá y demostrar que, si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y S es localizante, entonces $\mathcal{A}[S^{-1}]$ es una categoría abeliana (cf. (8)) pero eso sería ir demasiado lejos, pues *genéricamente* la categoría homotópica de complejos *no es abeliana*, volveremos a esto mas adelante.

Como mencionamos al comienzo de la Sección, existen problemas de Teoría de Conjuntos al momento de definir la Localización, es tiempo de hacerlos evidentes. En suma, *no existe ninguna razón para que todos los techos formen un conjunto*, con esto en mente, tomar una relación de equivalencia en una clase tiene problemas.

Por norma general, siempre pedimos que nuestras categorías sean, al menos, *localmente pequeñas*. Esto es que dados dos objetos X,Y, la clase $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sea un conjunto, no pedir esta simple condición vuelve muy difícil poder hacer una teoría general de categorías y vuelve a estas poco útiles. Con esta definición no hay razones por las cuales dada una categoría localmente pequeña y un sistema multiplicativo, podamos construir una localización. Para tajar la discusión, pues perseguirla nos llevaría demasiado lejos, daremos tres posibles soluciones a esta dicotomía

- Trabajar con sistemas multiplicativos *que sean conjuntos*, con esto es fácil demostrar que la Categoría $\mathcal{A}[S^{-1}]$ existe, sin embargo esto quita a muchos ejemplos, incluyendo a A-**Mod**. Como los sistemas multiplicativos incluyen a la identidad, esto implica que la clase de objetos tiene que ser un conjunto. Ejemplos de categorías que satisfacen esto son la categoría de A-módulos finitamente generados y la categoría de esquemas de tipo finito sobre un campo fijo.

- Demostrar, por otros medios, que la localización es una categoría. Con la Definición dada vía la propiedad universal, sabemos que la localización de una Categoría es escencialmente única, por lo que para demostrar que la hipotética "categoría de fracciones" es una categoría es necesario identificarla con una categoría "conocida", este es el método que utilizaremos en la Sección 2.3.2. Como se puede ver, resulta un poco *ad hoc* pero útil para la gran mayoría de ejemplos, en específico, todas las categorías que sea posible dotarles de una estructura Modelo.

- Advocarse a axiomatizaciones distintas de la teoría de Conjuntos donde estas nuevas categorías "existan". Ejemplo de ellas son la Teoría de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel o formulaciones de Universos, como los Universos de Grothendieck. Quizá esta es la forma mas oscura de tratar de solucionar el problema planteado de la existencia de categorías, sin embargo suelen ser justificaciones muy cómodas para evitar todos estos problemas fundacionales.

A lo largo de esta tesis, las categorías derivadas que utilizaremos serán obtenidas de categorías para las cuales es posbile dotarlas de una estructura Modelo, por lo tanto no habrá problemas fundacionales, sin embargo, cabe mencionar que en muchos trabajos se opta por seguir el punto tres enunciado anteriormente.

2.3.1. La Localización de la Categoría Homotópica

Armados de la maquinaria de localización en categorías aditivas, podremos por fin definir la categoría derivada. Es menester para esto el establecer a la clase de casi-isomorfismos como un sistema localizante.

Teorema 43. *Si S es la clase de casi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$, entonces S es un sistema localizante.*

Demostración. El axioma (L1) se verifica puesto que $H^p(-)$ es un funtor. Las condiciones de Ore son los Lemas 26 y 27, de forma que resta por demostrar la condición (L3). Sea $f : A^\bullet \to B^\bullet$ un morfismo en $K(\mathcal{A})$ y sea $s : B^\bullet \to C^\bullet$ un casi-isomorfismo tal que $sf \simeq 0$. Por las Proposiciones 19,21 tenemos el siguiente diagrama conmutativo, cuyas flechas verticales son todas isomorfismos en $K(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[r, "\mathrm{id}[1]"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A[1] \arrow[d, "\mathrm{id}[1]"] \\
A \arrow[r, "\tau_{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C(\mathrm{id}) \arrow[r, "\pi_{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A[1] \arrow[r, "\mathrm{id}[1]"] \arrow[d, "\cong"] & A[1] \arrow[d, "\mathrm{id}[1]"] \\
A \arrow[r, "\tau_{\mathrm{id}}"'] & C(\mathrm{id}) \arrow[r, "\tau_{\tau_{\mathrm{id}}}"'] & C(\tau_{\mathrm{id}}) \arrow[r, "\pi_{\tau_{\mathrm{id}}}"'] & A[1]
\end{tikzcd}$$

El último renglón es una sucesión como en la hipótesis de la Proposición 20, de manera que, componiendo con los isomorfismos, obtenemos de la Proposición 20 el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[r, "-\mathrm{id}[1]"] \arrow[d, "v"] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
B \arrow[r] & C \arrow[r, "\tau_s"'] & C(s) \arrow[r, "\pi_s"'] & B[1]
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $f = \pi_s[-1] \circ v[-1]$. Consideremos la sucesión

$$A \xrightarrow{v[-1]} C(s)[-1] \xrightarrow{\tau_{v[-1]}} C(v[-1]) \xrightarrow{\pi_{v[-1]}} A[1]$$

Entonces

$$f \circ \pi_{v[-1]}[-1] = \pi_s[-1] \circ v[-1] \circ \pi_v[-1][-1]$$

Pero por el Corolario 23 tenemos que $v[-1] \circ \pi_v[-1][-1] \simeq 0$. Por otro lado, por el Corolario 25 tnemos que $C(s)[-1]$ es acíclico, de manera que $\pi_{v[-1]}[-1]$ es un casi-isomorfismo, definiendo $t = \pi_{v[-1]}[-1]$ terminamos la demostración. El otro caso se demuestra de manera similar. $\square$

Todo lo trabajado hasta ahora culminará en la Definición rigurosa de la Categoría Derivada.

Definición 44. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, la *categoría derivada* de $\mathcal{A}$ es la categoría $D(\mathcal{A})$ formada al localizar la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$ en la clase de los casi-isomorfismos.

Teorema 45. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, entonces la categoria derivada $D(\mathcal{A})$ es aditiva.*

Demostración. Se sigue del Teorema Aditivo de Gabriel-Zisman (cf. Teorema 42) $\square$

Existe, además de la aditividad, otra estructura *escondida* en la categoría derivada. Esta es la estructura triangulada, que estudiaremos en la sección de Triángulos.

Observación. Por el Corolario 25 sabemos que un *complejo* $A^\bullet \in \mathcal{A}^\bullet$ es *isomorfo* a 0 en $D(\mathcal{A})$ si y solamente si $A^\bullet$ es *acíclico*. Por otro lado, un morfismo $f : A^\bullet \to B^\bullet$ en $\mathcal{A}^\bullet$ *es cero* si y solamente si existe un casi-isomorfismo $t : A_1^\bullet \to A^\bullet$ tal que $ft \simeq 0$ o equivalentemente si existe un casi-isomorfismo $s : B^\bullet \to B_1^\bullet$ tal que $sf \simeq 0$. Observe, por ejemplo, que en $D(\mathbf{Ab})$ el morfismo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Cumple que $H^p(f) = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, sin embargo no existe ningún casi-isomorfismo s tal que $sf \simeq 0$. Pôr tanto es importante recalcar que el que un *morfismo sea* 0 *en cohomología no implica que este sea el morfismo* 0.

2.3.2. La Categoría Homotópica de Quillen

La noción de homotopía dada para el caso de complejos de cadenas vimos que era una abstracción de la noción *topológica* de homotopía en el sentido que estábamos abstrayendo el morfismo que una homotopía *induce* en los complejos de cadenas. Hablaremos a continuación de otra manera de abstraer esta noción, formulada por Quillen en (25).

La idea de Quillen fue estudiar al objeto $X \times I$, el *cilindro*. De manera que en este contexto, un objeto cilindro para un objeto X en una categoría modelo $\mathcal{C}$ es un objeto $\mathrm{Cyl}(X)$ que factoriza a la codiagonal, es decir

$$\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & X \\
\mathrm{Cyl}(X) \arrow[ur, dotted, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

donde p es una equivalencia débil. Con esta noción de cilindro es posible definir una noción de homotopía.

Definición 46. Sean $f, g : X \to Y$ morfismos en $\mathcal{C}$, una *homotopía izquierda* entre X y Y es un morfismo $\eta : \mathrm{Cyl}(X) \to Y$, donde $\mathrm{Cyl}(X)$ es un objeto cilindro para X que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Cyl}(X) \arrow[d, "\eta"] & X \arrow[l] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

donde los morfismos en la parte superior son los canónicos.

En la Teoría de Categorías Modelo se demuestra que la relación de homotopía por la izquierda es de equivalencia (cf. (7)), por lo que vamos a construir la categoría homotópica como un cociente bajo esta relación, nótese que en esta Definición también estamos *reemplazando* a los objetos de la categoría original, a diferencia de la construcción en el caso de complejos.

Definición 47. Sea $\mathcal{C}$ una categoría modelo, la *categoría homotópica de Quillen* es la categoría definida como sigue:

- Objetos: Los objetos de $\mathcal{C}$ que son fibrantes y cofibrantes.
- Morfismos: Clases de morfismos bajo la relación de homotopía por la izquierda.

Denotaremos a esta categoría por $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$.

El siguiente Teorema es uno de los teoremas fundamentales de las categorías modelo, fue demostrado originalmente por Quillen y corre como un análogo *Teorema de Whitehead*[1].

Teorema 48. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría modelo, entonces una equivalencia débil entre dos objetos que son fibrantes y cofibrantes a la vez es una* equivalencia homotópica por la izquierda.

Demostración. La demostración puede encontrarse en (7), sección 5, pp. 25. □

Como culminación de lo -poco- discutido hasta ahora en el maravilloso mundo de las Categorías Modelo está este Teorema originalmente demostrado por Quillen.

Teorema 49. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría modelo, entonces la categoría homotópica de Quillen es canónicamente isomorfa a la localización de $\mathcal{A}$ con las equivalencias débiles.*

Demostración. Puede encontrarse en (7), Teorema 6.2, pp. 29. □

Esto es sorprendente, pues dos construcciones en un principio dispares tienden a darnos la misma categoría y por tanto dos formas *equivalentes* de ver a la categoría derivada, más aún, la categoría $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ es siempre localmente pequeña, por lo tanto el Teorema 49 nos resuelve los problemas fundacionales que comentamos en la Sección 2.3.

[1]Este Teorema nos dice que, en el caso de espacios CW, una aplicación continua que induce isomorfismos en los grupos fundamentales, resulta ser una equivalencia homotópica.

2.4. Triángulos

La necesidad de la estructura triangulada no surge de la nada, mas bien responde a que la categoría homotópica *casi nunca* es abeliana, o de una manera mas precisa

Proposición 50. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. La categoría $K(\mathcal{A})$ es abeliana si y solamente si es semisimple (i.e. toda sucesión exacta se escinde).*

Demostración. Puede encontrarse en la Sección III.2.3. página 146 de (9). □

Esta fue una de las dificultades mas grandes que tuvo que sortear Verdier en su tesis doctoral para poder trabajar con la categoría derivada, pues esto implica que, *a priori*, no existe una noción de sucesiones exactas y por tanto *no es posible* hacer Álgebra Homológica en el sentido usual. La gran idea de Verdier para solucionar este dilema fue reemplzar la noción de exactitud por la de *triángulos distinguidos*.

Comencemos a definir a las Categorías Trianguladas, en esta definición seguiremos como convención que, si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una autoequivalencia (aditiva) de una categoría aditiva, entonces *denotaremos* por $A[1]$ a la imagen del objeto A bajo T. Análogamente $f[1] = T(f)$ para todo morfismo f.

Definición 51. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva dotada de una autoequivalencia aditiva T, definimos la *categoría de triángulos* $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}$ como sigue:

- Objetos: Son diagramas η de la forma

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1]$$

  que denotaremos por $\eta = (A, B, C, u, v, w)$.

- Morfismos: Dados dos triángulos η, η', un morfismo de triángulos $\phi : \eta \to \eta'$ es un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\eta & & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] \\
\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f[1]} \\
\eta' & & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & A'[1]
\end{array}.$$

  Decimos que ϕ es un isomorfismo si f, g y h son isomorfismos.

Los triángulos harán de *sustituto* a las sucesiones exactas, pero esto tendrá sus consecuencias, debido a que $\mathcal{A}$ no es abeliana, no podemos fijarnos en todos los triángulos, sino en ciertos triángulos particulares, que en el caso de $K(\mathcal{A})$ resultaran ser *inducidos* por sucesiones exactas en $\mathcal{A}^\bullet$.

Definición 52. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Una estructura de *categoría triangulada* en $\mathcal{A}$ está dada por una autoequivalencia aditiva

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

llamada el funtor de desplazamiento[1] y un subconjunto Δ de $\mathcal{T}$, llamados *triángulos distinguidos*, sujetos a los axiomas (TR1)-(TR4) que enunciamos a continuación.

Axioma (TR1)

a) Cualquier triángulo de la forma

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \longrightarrow 0 \longrightarrow A[1]$$

es distinguido.

b) Cualquier triángulo isomorfo a un triángulo distinguido es a su vez distinguido.

c) Cualquier morfismo $f : A \to B$ puede ser completado a un triángulo distinguido

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]\ .$$

Axioma (TR2) El triángulo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

es un triángulo distinguido si y solo si

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$$

es un triángulo distinguido.

Axioma (TR3) Si existe un diagrama sólido conmutativo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \end{tikzcd},$$

entonces existe un morfismo $h : C \to C'$ que conmuta el diagrama y por tanto (f, g, h) es un morfismo de triángulos.

Axioma (TR4) Se cumple el *axioma del Octaedro*: Si $h = g \circ f, j'' = f'[1] \circ g''$ y los triángulos $(f, f', f''), (g, g', g'')$ son distinguidos, entonces existen morfismos j, j' tales que

[1] En la terminología de Puppe, $T = \Sigma$ es el funtor de *suspensión*.

el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[rr, bend left, "g'"] \arrow[dr, "h'"] & & F \arrow[rr, bend left, "j''"] \arrow[dr, "g''"] & & D[1] \\
& B \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f'"] & & E \arrow[ur, dotted, "j'"] \arrow[dr, "h''"] & & B[1] \arrow[ur, "f'[1]"] & \\
& & D \arrow[ur, dotted, "j"] \arrow[rr, bend right, "f''"'] & & A[1] \arrow[ur, "f[1]"] & &
\end{tikzcd}$$

.

Nota. El Axioma (TR4) *no es el Axioma del Octaedro original* dado por Verdier en su tesis (véase (30)), está basado en una reformulación dada por J.P. May. Esta forma de presentarlo tiene la particularidad de ser mucho mas clara que la formulación original. Hay diversas formas, todas equivalentes, de presentar este Teorema, véanse por ejemplo, (9) ó (31).

Observación. Si $\mathcal{A}$ es una categoría triangulada, con funtor de traslación $T_{\mathcal{A}}$ entonces $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ viene dotada de una estructura triangulada, con los mismos triángulos distinguidos y donde el morfismo de traslación está dado por $T_{\mathcal{A}}^{-1}$. La demostración de este hecho es rutinaria.

Nuestros ejemplos principales serán la categoría homotópica y la categoría derivada de una categoría abeliana. Para esto vamos a dotarlas con un funtor de desplazamiento y después les definiremos una clase de triángulos distinguidos.

Definición 53. El funtor de desplazamiento en $K(\mathcal{A})$ es el funtor inducido por la autoequivalencia $[1] : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ de la Definición 8. Un triángulo

$$A_1^\bullet \longrightarrow A_2^\bullet \longrightarrow A_3^\bullet \longrightarrow A_1^\bullet[1]$$

en $K(\mathcal{A})$ se dice *distinguido* si es isomorfo a un triángulo de la forma

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\tau_f} C(f) \xrightarrow{\pi} A^\bullet[1] \ .$$

Ahora definamos nuestro candidato a estructura triangulada en $D(\mathcal{A})$.

Definición 54. El funtor de desplazamiento en $D(\mathcal{A})$ es el definido de manera natural desde $K(\mathcal{A})$. Un triángulo en $D(\mathcal{A})$ se dice distinguido si es isomorfo a *la imagen* de un triángulo distinguido en $K(\mathcal{A})$ bajo la localización.

Lema 55. *Sea $\mathcal{S}$ el sistema localizante de casi-isomorfismos satisface:*

(CL1) $s \in \mathcal{S}$ si y solo si $s[1] \in \mathcal{S}$.

(CL2) Dado un diagrama sólido conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "u"] & X[1] \arrow[d, "s[1]"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

donde $s, t \in \mathcal{S}$ y las filas son triángulos distinguidos, existe $u : Z \to Z'$ en $\mathcal{S}$ que hace conmutar el diagrama.

Demostración. El inciso (CL1) es obvio de la Definición. Para el segundo inciso notemos que por el axioma (TR3) siempre es posible completar un diagrama de la forma anterior, lo que necesitamos demostrar es que u es un casi-isomorfismo. Tenemos inducida una sucesión en cohomología (cf. 24) que se vuelve

$$\begin{tikzcd} H^i(X) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(s)"] & H^i(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(t)"] & H^i(Z) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "H^i(u)"] & H^{i+1}(X) \arrow[d, "H^i(s[1])"] \\ H^i(X') \arrow[r] & H^i(Y') \arrow[r] & H^i(Z') \arrow[r] & H^{i+1}(X) \end{tikzcd}.$$

Los morfismos $H^i(s), H^i(t)$ y $H^{i+1}(s)$ son isomorfismos, por el Lema del 5 concluimos que $H^i(u)$ es un isomorfismo. □

Definición 56. Si $\mathcal{C}$ es una categoría triangulada y $\mathcal{S}$ un sistema localizante que satisface (CL1) y (CL2) del Lema 55, entonces diremos que $\mathcal{S}$ *es compatible con la triangulación.*

En el siguiente Teorema, por razones de espacio y debido principalmente a que no volveremos a utilizar explícitamente el axioma del octaedro en ninguna otra demostración, dejaremos la verificación de este último a una referencia precisa en la literatura.

Teorema 57. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, entonces el funtor de desplazamiento y la clase de triángulos distinguidos de la Definición 54 vuelven a $K(\mathcal{A})$ y a $D(\mathcal{A})$ en categorias trianguladas. Además el funtor de localización es un funtor exacto de categorías trianguladas.*

Demostración. Demostremos primero que la categoría $K(\mathcal{A})$ es triangulada. Claramente el funtor de desplazamiento es una autoequivalencia en $K(\mathcal{A})$, por lo que resta demostrar los axiomas (TR1)-(TR3). El inciso (a) de el Axioma (TR1) es consecuencia de la Proposición 19, el axioma (TR2) es consecuencia de la Proposición 21 y el axioma (TR3) es consecuencia de la Proposición 20. La demostración del Axioma (TR4) se puede ver en (9), Sección IV.I.14 pp. 249. La siguiente parte del Teorema consiste en demostrar que esta estructura triangulada se *hereda* a la localización, para esto tendremos que hacer varios refinamientos de las proposiciones anteriores. Verifiquemos el axioma (TR1), destaquemos que sólo resta demostrar el inciso (c). Sea

$g : A \to B$ un morfismo en $K(\mathcal{A})$, supongamos que g está representado en $D(\mathcal{A})$ por el techo

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B \end{tikzcd} .$$

Completamos -en $K(\mathcal{A})$- el morfismo f a un triángulo distinguido

$$A' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\tau_f} C(f) \xrightarrow{\pi_f} A'[1]$$

y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & B \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d, "="] & C(f) \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "="] & A'[1] \arrow[d, "{s[1]}"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "\tau_f"'] & C(f) \arrow[r, "{s[1]\pi_f}"'] & A'[1] \end{tikzcd} .$$

Como s es un casi-isomorfismo, en $D(\mathcal{A})$ este se vuelve invertible, de manera que el diagrama es un isomorfismo y por lo tanto -la imagen de- el segundo triángulo representa un triángulo distinguido en $D(\mathcal{A})$. Observemos que el axioma (TR2) es inmediato de nuestra definición de triángulos distinguidos. Demostremos que $D(\mathcal{A})$ cumple con (TR3), para ello supongamos que tenemos el siguiente diagrama, donde las filas son triángulos distinguidos (por tanto inducidos de triángulos distinguidos en $K(\mathcal{A})$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] & X[1] \arrow[d, "{\phi[1]}"] \\ X' \arrow[r, "Q(f')"'] & Y' \arrow[r, "Q(g')"'] & Z' \arrow[r, "Q(h')"'] & X'[1] \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

donde el morfismo ϕ es representado por el techo

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "u"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}$$

y el morfismo ψ es representado por el techo

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "v"] & \\ Y & & Y' \end{tikzcd} .$$

Note que esto implica que, en $D(\mathcal{A})$ podemos escribir $\phi = Q(u) \circ Q(s)^{-1}$ y $\psi = Q(v) \circ Q(t)^{-1}$, tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "f\circ s"'] \arrow[d, "u"] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}, \tag{2.10}$$

en el que no estamos suponiendo que alguno de los dos cuadrados del diagrama sea conmutativo. Como la clase de casi-isomorfismos es localizante podemos completar $f \circ s$ y t a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "t'"'] & V \arrow[d, "t"] \\ U \arrow[r, "f\circ s"'] & Y \end{tikzcd}$$

en $K(\mathcal{A})$. Por otro lado el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & U' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{U'}"] & & \\ & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "u" near end] & & U' \arrow[dlll, "s\circ t'" near end] \arrow[dr, "u\circ t'"] & \\ X & & & & X' \end{tikzcd},$$

de forma que ambos techos son equivalentes por lo que podemos representar a ϕ con el techo

$$\begin{tikzcd} & U' \arrow[dl, "s\circ t'"'] \arrow[dr, "u\circ t'"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}.$$

De esta forma obtenemos un diagrama parecido al diagrama (2.10)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U' \arrow[u, "s\circ t'"] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u\circ t'"'] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado de arriba en el diagrama conmuta. Renombrando podemos suponer que partimos del diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

donde el cuadrado de arriba en el diagrama es conmutativo, es decir

$$Q(f) \circ Q(s) = Q(t) \circ Q(a).$$

La igualdad de arriba y la definición de ϕ y ψ implican que

$$\begin{aligned} Q(v) \circ Q(a) &= (Q(v) \circ Q(t)^{-1} \circ Q(f)) \circ Q(s) \\ &= Q(f') \circ Q(u) \circ Q(s)^{-1} \circ Q(s) \\ &= Q(f') \circ Q(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto el cuadrado inferior del diagrama (2.11) conmuta en $D(\mathcal{A})$, en particular esto implica que existe $r : U'' \to U$ un casi-isomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} & & U'' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r"] & & \\ & U \arrow[dl, "id_U"'] \arrow[drrr, "v \circ a" near end] & & U \arrow[dlll, "id_U"' near end] \arrow[dr, "f' \circ u"] & \\ U & & & & Y' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, por tanto $v \circ a \circ r = f' \circ u \circ r$ y los techos son equivalentes. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & U'' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "id_{U''}"] & & \\ & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "u" near end] & & U'' \arrow[dlll, "s \circ r"' near end] \arrow[dr, "u \circ r"] & \\ X & & & & X' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, obtenemos que ϕ es también representado por el techo

$$\begin{tikzcd} & U'' \arrow[dl, "s \circ r"'] \arrow[dr, "u \circ r"] & \\ X & & X' \end{tikzcd} .$$

Obtenemos un nuevo análogo al diagrama (2.10) representado abajo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U'' \arrow[u, "s \circ r"] \arrow[r, "a \circ r"] \arrow[d, "u \circ r"'] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

donde ambos cuadrados en el diagrama son conmutativos. Así las cosas, podemos renombrar y partir de que en el diagrama (2.11) ambos cuadrados son conmutativos en $K(\mathcal{A})$. Consideremos ahora un triángulo distinguido

$$U \xrightarrow{a} V \longrightarrow W \longrightarrow U[1]$$

basado en a, del diagrama (2.11) obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \\
U \arrow[u, "s"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[r] & U[1]\text{”} \arrow[u, "{s[1]}"'] \arrow[d, "{u[1]}"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

donde todas las filas son triángulos distinguidos en $K(\mathcal{A})$. Por ser la clase de casi-isomorfismos una clase compatible con la triangulación (por el Lema 55) existe $p : W \to Z$ un casi-isomorfismo que completa la parte superior del diagrama a un morfismo de triángulos distinguidos en $K(\mathcal{A})$, por el axioma (TR3) en $K(\mathcal{A})$ existe un morfismo $w : W \to Z'$ que completa la parte inferior del diagrama a un morfismo de triángulos distinguidos en $K(\mathcal{A})$. En conclusión obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \\
U \arrow[u, "s"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[u, "p"] \arrow[r] \arrow[d, "w"] & U[1] \arrow[u, "{s[1]}"] \arrow[d, "{u[1]}"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & X[1]
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

donde todos los cuadrados conmutan. Consideremos ξ el morfismo que representa el techo

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "w"] & \\
Z & & Z'
\end{tikzcd},$$

entonces el diagrama (2.12) en la categoría $D(\mathcal{A})$ se vuelve

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Q(f)"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "Q(g)"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r, "Q(h)"] \arrow[d, "\xi"] & X[1] \arrow[d, "{\phi[1]}"] \\
X' \arrow[r, "Q(f')"'] & Y' \arrow[r, "Q(g')"'] & Z' \arrow[r, "Q(h')"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

que es un morfismo de triángulos distinguidos en $D(\mathcal{A})$, a lo que queríamos llegar. La demostración de que se cumple (TR4) puede ser consultada en citeGelMan2003, Sección IV.I.14 pp. 249. El que Q sea exacto es evidente de la definición de triángulos distinguidos en $D(\mathcal{A})$. $\square$

2.4.1. Funtores Cohomológicos

Pasemos a definir cierta clase de funtores que se comportaran como los funtores de cohomología usuales, vistos antes.

Definición 58. Sean $\mathcal{A}$ una categoría triangulada y $\mathcal{B}$ una categoría abeliana. Decimos que un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es *cohomológico* si, para todo triángulo distinguido

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C(f) \longrightarrow T(A) \ ,$$

la sucesión

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \longrightarrow F(C(f))$$

inducida en $\mathcal{B}$ es exacta.

Observación. Aplicando el funtor de traslación esto implica que la sucesión larga

$$. \ . \ . \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \longrightarrow F(C(f)) \longrightarrow F(A[1]) \xrightarrow{F(f[1])} F(B[1]) \longrightarrow . \ . \ .$$

es exacta, si F es cohomológico.

El siguiente Lema es una consecuencia formal de los axiomas de categoría triangulada y no lo demostraremos. Si el lector se conforma con considerar a las categorías homotópicas y derivadas como sus únicos ejemplos de categorías trianguladas, entonces este Lema se sigue de la Proposición 18 y el Corolario 23.

Lema 59. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría triangulada, si*

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1]$$

es un triángulo distinguido, entonces $v \circ u = w \circ v = 0$.

Veamos algunos ejemplos útiles de funtores cohomológicos.

Proposición 60. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría triangulada y X un objeto fijo de $\mathcal{A}$, entonces los funtores $Hom_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ y $Hom_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ son cohomológicos.*

Demostración. Demostraremos únicamente el caso $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$ pues el otro caso es análogo. Sea

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) \xrightarrow{w_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A[1]) \longrightarrow$$

la sucesión larga inducida por el triángulo distinguido

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1] \ .$$

Basta demostrar que $\mathrm{Im}(u_*) = \ker(v_*)$, por el Lema 59 es suficiente con demostrar que $\ker(v_*) \subset \mathrm{Im}(u_*)$. Si $f \in \ker(v_*)$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & X[1] \\ A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \arrow[r, "w"] & A[1] \end{tikzcd} .$$

Por el axioma (TR2) obtenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & T(X) \arrow[r, "-\mathrm{id}"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B \arrow[r, "u"] & C \arrow[r, "v"] & A[1] \arrow[r, "-F(u)"] & B[1] \end{tikzcd}$$

y ocupando el axioma (TR3) existe un morfismo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[r, "-\mathrm{id}"] \arrow[d, "g[1]"] & T(X) \arrow[d, "f[1]"] \\ B \arrow[r, "u"] & C \arrow[r, "v"] & A[1] \arrow[r, "-F(u)"] & T(B) \end{tikzcd} .$$

Aplicando varias veces el axioma (TR2) obtenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[d, "g[1]"] \\ A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \arrow[r, "-h"] & A[1] \end{tikzcd} .$$

□

Otro funtor cohomológico es, ciertamente, el funtor de cohomología.

Proposición 61. *El funtor $H^0 : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ es cohomológico. Además pasa a la localización, como funtor cohomológico.*

Demostración. Es consecuencia del Lema 24. Es inmediato que este induce un funtor cohomlógico en la localización. □

2.4.2. Subcategorías de $D(\mathcal{A})$

Por norma general, estaremos interesados en ciertas *subcategorías* de la categoría derivada que sean manejables, principalmente veremos que esto se vuelve -casi- necesario para poder definir los funtores derivados. En esta pequeña sección revisaremos 3 subcategorías representativas de $D(\mathcal{A})$.

Definición 62. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, definimos las siguientes categorías de complejos de $\mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}^+$ La *categoría acotada por abajo*, consiste de todos los complejos $A^\bullet$ tales que existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ con el cual $A^i = 0$ para todo $i \leq i_0$.
- $\mathcal{A}^-$ La *categoría acotada por arriba*, consiste de todos los complejos $A^\bullet$ tales que existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ con el cual $A^i = 0$ para todo $i \geq i_0$.
- $\mathcal{A}^{\mathbf{b}}$ La *categoría acotada*, consiste de todos los complejos $A^\bullet$ tales que existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ con el cual $A^i = 0$ para todo $|i| \geq i_0$.

Caracterizaremos las subcategorías previamente definidas en términos de los *funtores de truncamiento.*

Definición 63. Sea $n \in \mathbb{Z}$, definimos los funtores de truncamiento $\tau_{\leq n}, \tau_{\geq n} : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ como sigue:

- Objetos: Si $A^\bullet$ es un complejo, entonces

$$\tau_{\leq n}(A^\bullet)^p = \begin{cases} A^p & \text{si} \quad p < n \\ \ker(d^n) & \text{si} \quad p = n \\ 0 & \text{si} \quad p > n \end{cases} \qquad \tau_{\geq n}(A^\bullet)^p = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p < n \\ \operatorname{coker}(d^n) & \text{si} \quad p = n \\ A^p & \text{si} \quad p > n \end{cases}$$

- Morfismos: Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo, entonces $d^n_{B^\bullet} f^n = f^{n+1} d^n_{A^\bullet}$ y por lo tanto $f^n(\ker(d^n_{A^\bullet})) \subseteq \ker(d^n_{B^\bullet})$, así que induce naturalmente un morfismo entre los complejos $\tau_{\leq n}(A^\bullet)$ y $\tau_{\leq n}(B^\bullet)$. Análogamente para $\tau_{\geq n}$.

Es consecuente de la definición de los funtores de truncamiento que estos sean aditivos, además satisfacen la Proposición siguiente.

Proposición 64. *Sean $q : A^\bullet \to \tau_{\geq n}(A^\bullet)$ el morfismo dado por la proyección canónica e $i : \tau_{\leq n}(A^\bullet) \to A^\bullet$ el morfismo dado por la inclusión canónica. Se cumple:*

(I) *El morfismo $H^p(i) : H^p(\tau_{\leq n}(A^\bullet)) \to H^p(A^\bullet)$ es un isomorfismo para $p \leq n$ y 0 para $p > n$.*

(II) *El morfismo $H^p(q) : H^p(A^\bullet) \to H^p(\tau_{\geq n}(A^\bullet))$ es un isomorfismo para $p \geq n$ y 0 para $p < n$*

Demostración. Inmediatas de las definiciones. □

Además los funtores de truncamiento respetan las homotopías ya que la misma entre los complejos truncados se da por la restricción de la homotopía original, de forma que induce un funtor entre las categorías homotópicas. Como consecuencia de la Proposición anterior, los funtores pasan a la localización y definen un funtor en las categorías derivadas

$$\tau_{\leq n}, \tau_{\geq n} : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$$

De acuerdo al procedimiento tan general que se dio para localizar categorías, podemos definir las subcategorías aditivas $K^*(\mathcal{A})$ de la categoría homotópica, donde $* = +, -, b$ y análogamente las clases localizantes S^*, por último, el Teorema de Gabriel-Zisman nos garantiza la existencia de las categorías derivadas $D^*(\mathcal{A})$. Como consecuencia del Teorema fundamental del Álgebra Homológica se cumple que estas categorías son trianguladas. Esta discusión nos permite dilucidar el Lema a continuación

Lema 65. *Las subcategorías $D^*(\mathcal{A})$ de $D(\mathcal{A})$ son plenas, donde $* = +, -, b$.*

Los funtores de truncación nos permitirán dar un análogo al Lema 16.

Lema 66. *El funtor $D_0 : \mathcal{A} \longrightarrow D(\mathcal{A})$, definido como $Q_{\mathcal{A}} \circ K_0$ es fiel y pleno.*

Demostración. El funtor está bien definido, supongamos que $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, entonces $H^0(D_0(f)) = f$, por lo tanto el funtor es fiel. Veamos que D_0 es pleno, sea $\phi : D_0(A) \to D_0(B)$ un morfismo en $D(\mathcal{A})$, representado por un techo

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
D_0(A) & & D_0(B)
\end{tikzcd} .$$

Como s es un casi-isomorfismo tenemos que $H^p(A') = 0$ para todo $p \neq 0$. Por la Proposición 64, el morfismo canónico $i_A : \tau_{\leq 0}(A') \to A'$ es un casi-isomorfismo. De forma que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \tau_{\leq 0}(A') \arrow[dl, "i_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f" near end] & & \tau_{\leq 0}(A') \arrow[dlll, "s \circ i_A" near end] \arrow[dr, "f \circ i_A"] & \\
D_0(A) & & & & D_0(B)
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto los techos son equivalentes y podemos escoger como representante de ϕ a un techo

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
D_0(A) & & D_0(B)
\end{tikzcd}$$

tal que $A'^p = 0$ para $p > 0$. Por el Lema 16 el morfismo f es único como morfismo en $\mathcal{A}^\bullet$, de manera que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}^\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A'^{-1} & \longrightarrow & A'^{0} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Notemos que $f(\mathrm{Im}(d^{-1}) = 0$ y por lo tanto se factoriza a un morfismo $H^0(f) : H^0(A') \to A$. Además $H^0(f) = H^0(\phi) \circ H^0(s)$ y en consecuencia obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
 & A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"] & & D(A) \arrow[dlll, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "H^0(\phi)"] & \\
D_0(A) & & & & D_0(B)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto implica que $\phi = D_0(H^0(\phi))$ y por lo tanto el funtor D_0 es pleno. $\square$

Corolario 67. *La categoría $\mathcal{A}$ es equivalente a la subcategoría de $D(\mathcal{A})$ consistente de todos los complejos $A^\bullet$ tales que $H^p(A^\bullet) = 0$ para $p \neq 0$.*

Obtenemos, por metodos similares, una caracterización *cohomológica* de las subcategorías definidas anteriormente $D^*(\mathcal{A})$. No demostraremos este Lema debido a que aunque sigue el mismo esquema de demostración que el Lema anterior, es un poco mas larga.

Lema 68. *Los funtores naturales $D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$, donde $* = +, -, b$ definen equivalencias entre $D^*(\mathcal{A})$ y las subcategorías plenas de todos los complejos $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ tales que $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i \ll 0, i \gg 0, |i| \gg 0$ respectivamente.*

Demostración. Véase (20), Proposición 13.1.12. $\square$

2.4.3. La Categoría Homotópica Estable

El objetivo de esta Subsección es dar un vistazo al segundo Ejemplo más famoso de Categoría Triangulada. Limitándonos a mencionarlo debido a su importancia histórica y por ello no se hará incapié en ninguna demostración.

Definición 69. La categoría de *espectros* es la categoría **Spe** dada

- En Objetos: Sucesiones $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios basados junto con homeomorfismos $\alpha_n : E_n \to \Omega E_{n+1}$[1] fijos.

[1]Dado un espacio topológico basado X, su *espacio de lazos* ΩX es el espacio formado por todos los lazos $\gamma : I \to X$ basados.

- En Morfismos: Dados dos espectros $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(E'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un morfismo de espectros es una sucesión de aplicaciones continuas basadas $f_n : E_n \to E'_n$ que conmutan con los homeomorfismos α_n.

Es claro que la categoría de espectros tiene un objeto cero, formado por una secuencia de espacios de un punto. Dado un espectro E, podemos formar su *espectro de lazos* ΩE, vía la fórmula $(\Omega E)_n = \Omega(E_n)$. Más aún, podemos *desenlazar* un espectro, definiendo $(\Omega^{-1}E)_n = E_{n+1}$, aunque en el proceso de desenlazar "olvidamos" el término E_0, que de cierta manera resulta ser el más importante, pues es un "espacio de lazos infinito" en la terminología de Adamas, puesto que $E_0 \cong \Omega^p E_p$ para todo p. Este fue uno de los principales problemas que se tenían que sortear para poder dar una noción aceptable de espectro, veremos que el funtor Ω resultara ser una autoequivalencia en la Categoría Homotópica Estable.

Ejemplo 70. *El* espectro de esferas $\boldsymbol{S}^n$ *está definido para todo n por la fórmula*

$$(\boldsymbol{S}^n)_p = colim_i\ \Omega^i S^{n+p+i},$$

donde estamos considerando los homeomorfismos usuales $\alpha_m : S^m \to \Omega S^{m+1}$ (cf. (11)). Observe que de la misma manera podemos definir espectros de esferas para n negativo, restringiendo que el colímite se tome para $i \geq -n$. En la terminología de (1), tenemos que $\Omega^\infty S^\infty = \boldsymbol{S}^0$.

Formulemos una noción de equivalencia débil en la categoría de espectros, esta tiene como antecedente directo al Teorema de Suspensión de Freudenthal (cf. (15) Capítulo 4) y es una buena explicación del adjetivo "estable".

Definición 71. Sea E un espectro, los *grupos de homotopía estable* $\pi_n(E)$ de E están definidos como

$$\pi_n(E) = \pi_{n+i}(E_i)$$

para $i \geq 0$ y $n + i \geq 0$. Esta aplicación es funtorial en **Spe**.

Nótese que $\pi_n(E)$ no depende de i puesto que para toda m se cumple que $\pi_{i+1}E_m \cong \pi_i(\Omega E_m)$. Con esta noción de homotopía, diremos que un morfismo de espectros $f : E \to E'$ es una *equivalencia débil* si el morfismo inducido en homotopía estable es un isomorfismo. El siguiente Teorema, demostrado en (1) es fundamental y nada trivial de demostrar, sin embargo en el caso particular del espectro de esferas, es una construcción conocida[1].

Teorema 72. *La categoría **Spe** es una categoría aditiva.*

Con este Teorema en mano, aunado a la construcción de la categoría de fracciones podemos dar la siguiente Definición.

Definición 73. La *categoría homotópica estable* **HSpe** es la categoría localizada de **Spe** con respecto al sistema multiplicativo de equivalencias débiles.

[1]Véase el argumento de Eckman-Hilton en (15).

Volviendo a los problemas fundacionales tratados anteriormente, hay que demostrar que la Categoría **HSpe** *existe en nuestro universo*, este Teorema también es complicado y no lo perseguiremos. El lector puede encontrar, de una manera poco satisfactoria, una demostración de tal hecho en (1) y en un lenguaje mas moderno, en el Capítulo 10, Sección 9, de (31).

Daremos más detalles sobre la estructura triangulada de la Categoría Homotópica Estable, en un intento de imitar la construcción hecha de la Categoría Derivada, queremos que triángulos distinguidos (¡Pero no todos!) vengan de un análogo de *sucesión exacta* en la categoría de espectros, el análogo buscado son las *sucesiones cofibrantes*

$$A \longrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A$$

donde Σ denota la suspensión del subespacio A. Así formamos un tercer Ejemplo de Categoría Triangulada, interesante por si mismo y que podemos ver como *precursor indirecto* del trabajo de Verdier para dar una generalización conveniente.

2.5. Resoluciones

Ahora pasemos a ver otro aspecto importante, *las resoluciones* proyectivas e inyectivas. Como veremos, estas se vuelven *únicas* en $K(\mathcal{A})$, factor determinante en el estudio de la categoría derivada. El estudio de las resoluciones inyectivas cae dentro del Álgebra Homológica *á la Grothendieck*, lo interesante ee ellas es su interacción con la categoría derivada

Definición 74. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria

(I) Un objeto I de $\mathcal{C}$ es *inyectivo* si para cualquier diagrama sólido, donde f es un monomorfismo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[dl, dotted, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

este puede ser completado a un diagrama conmutativo. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene *suficientes inyectivos* si la clase $\mathcal{I}$ de objetos inyectivos es cogeneradora, i.e. para todo objeto A existe un monomorfismo $A \to I$, donde I es inyectivo.

(II) Un objeto $P \in \mathcal{C}$ es *proyectivo* si para todos $A, B \in \mathcal{C}$ y cualquier diagrama sólido, donde f es un epimorfismo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ & P \arrow[u, "k"'] \arrow[ul, dotted, "h"] \end{tikzcd}$$

Puede ser completado, volviendo el diagrama conmutativo. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene *suficientes proyectivos* si la clase $\mathcal{P}$ de objetos proyectivos es generadora, i.e. para todo objeto A existe un epimorfismo $P \to A$, donde P es proyectivo

Si suponemos que la categoría tiene mas estructura entonces tenemos una caracterización mas útil, familiar del Álgebra Homológica clásica.

Proposición 75. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.*

(I) *Un objeto $I \in \mathcal{A}$ es* inyectivo *si el funtor $Hom_{\mathcal{A}}(-, I)$ es exacto.*

(II) *Un objeto $P \in \mathcal{A}$ es* proyectivo *si el funtor $Hom_{\mathcal{A}}(P, -)$ es exacto.*

Demostración. Si la categoría es abeliana, entonces $f : A \to B$ es un monomorfismo si y solo si la sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

es exacta, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ obtenemos lo deseado. El caso para objetos proyectivos es dual. □

Teorema 76. *Si $\epsilon : P^\bullet \to A$ es una resolución proyectiva de A y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{A}$, entonces para toda resolución $\eta : Q^\bullet \to B$ de B, existe un morfismo de cadenas $F : P^\bullet \to Q\bullet$ tal que $\eta \circ F^0 = f \circ \epsilon$. El morfismo de cadenas F es único salvo homotopía.*

Demostración. Construyamos los morfismos F^n por inducción, donde definimos $F^0 \equiv f$. Supongamos que ya se dieron los morfismos $f^{-i} : P^{-i} \to Q^{-i}$ para toda $i \leq n$, construiremos un morfismo $f^{-(n+1)} : P^{-(n+1)} \to Q^{-(n+1)}$. Escribamos $P^\bullet = (P^{-n}, d_P^{-n})$ y $Q^\bullet = (Q^{-n}, d_Q^{-n})$, puesto que $f^{-n} \circ d_P^{-(n-1)} = d_Q^{-(n-1)} \circ f^{-(n-1)}$, por la propiedad universal del núcleo y debido a que la sucesión $P^\bullet$ es exacta tenemos definido el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P^{-(n+1)} \arrow[r, "d_P^{-(n+1)}"] \arrow[d, dotted, "f^{-(n+1)}"'] & Z^{-n}(P) \arrow[r] \arrow[d, "f'^{-n}"] & 0 \\
Q^{-(n+1)} \arrow[r, "d_Q^{-n}"'] & Z^{-n}(Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $f^{-(n+1)}$ es obtenido aplicando la propiedad de objeto proyectivo a la composición $f'^{-n} \circ d_P^{-(n+1)}$. Nótese que el caso base de la inducción es análogo, usando que $\mathrm{Im}(\epsilon) = A$. Esto demuestra la existencia del levantamiento de morfismos a su resolución proyectiva, falta por demostrar que cualesquiera dos resoluciones son homotópicas. Supongamos que $G : P^\bullet \to Q^\bullet$ es otro levantamiento de f y sea $H = F - G$.

Afirmación 77. *El morfismo H es homotópico a cero.*

Demostración. Construiremos la homotopía de manera inductiva. Primeramente, nótese que

$$\eta \circ H_0 = \eta \circ (F_0 - G_0) = \eta \circ F_0 - \eta \circ G_0 = \epsilon \circ f - \epsilon \circ f = 0.$$

Por tanto, $H_0(P^0) \subseteq Z^0(Q) = \mathrm{Im}(d_Q^1)$ y por ser P^0 proyectivo, existe un morfismo $s_0 : P^0 \to Q^{-1}$ que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P^0 \arrow[dl, dotted, "s_0"'] \arrow[d, "h_0"] & \\ Q^{-1} \arrow[r, "d_Q^{-1}"'] & \mathrm{Im}(d_Q^{-1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Este morfismo cumple que

$$H_0 = d_Q^{-1}(s_0) = d_Q^{-1}(s_0) + s_1\epsilon,$$

donde, por definición, diremos que $s_1 \equiv 0$. Inductivamente, supongamos que existen morfismos s_i, para $i < n$ tales que $h_{-i} = ds_{-i} + s_{-(i-1)}d$. En particular, haciendo $i = n-1$ tenemos la siguiente igualdad

$$ds_{-(n-1)} = h_{-(n-1)} = -s_{-(n-2)}d.$$

Consideremos el mapeo $h_{-n} - s_{-(n-1)}d : P^{-n} \to Q^{-n}$, calculando

$$d(h_{-n} - s_{-(n-1)}d) = dh_{-n} - (h_{-(n-1)} - s_{-(n-2)}d)d = dh - hd + s_{-(n-2)}dd = 0,$$

por lo tanto obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & P^{-n} \arrow[dl, dotted, "s_{-n}"'] \arrow[d, "h_0"] & \\ Q^{-(n+1)} \arrow[r, "d_Q^{-(n+1)}"'] & Z_n(Q) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y además $ds_{-n} = h_{-n} - s_{-(n-1)}d$.

$\square$

Como resultado de la afirmación anterior, $F \simeq G$, demostrando el Teorema. $\square$

La consecuencia inmediata del Teorema 76 es que podemos definir de manera *única* una resolución proyectiva en $K(\mathcal{A})$.

Corolario 78. *Si $A \in \mathcal{A}$, entonces cualesquiera dos resoluciones proyectivas de A son homotópicas. En consecuencia, en $K(\mathcal{A})$ existe una única resolución proyectiva para A (si existe).*

Nótese que no estamos suponiendo que nuestra categoría tiene *suficientes proyectivos*. Tenemos dos resultados duales invirtiendo las flechas.

Teorema 79. *Si $\epsilon : A \to I^\bullet$ es una resolución inyectiva de A y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{A}$, entonces para toda resolución $\eta : B \to K^\bullet$ de B, existe un morfismo de cadenas $F : I^\bullet \to K\bullet$ tal que $\eta \circ F^0 = f \circ \epsilon$. El morfismo de cadenas F es único salvo homotopía.*

Corolario 80. *Si $A \in \mathcal{A}$, entonces cualesquiera dos resoluciones inyectivas de A son homotópicas. En consecuencia, en $K(\mathcal{A})$ existe una única resolución inyectiva para A (si existe).*

Debido a la construcción de la categoría derivada, alcanzamos un punto en el que se vuelve nada obvio como poder realizar *cálculos explícitos* en esta categoría. Recordando la motivación al comienzo del Capítulo, no podemos permitir que esto ocurra, con esto en mente, desarrollaremos una *herramienta* con la cual poder realizar cálculos de cohomología. Recordemos el Teorema 79 que nos garantizaba la unicidad de las resoluciones inyectivas en la Categoría Homotópica, el siguiente Lema es un resultado clásico de Álgebra Homológica.

Lema 81. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Para todo $A^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$ existe un complejo $I^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$ con cada $I^i \in \mathcal{A}$ inyectivo y un casi-isomorfismo $A^\bullet \to I^\bullet$.*

Demostración. Véase (18), Teorema 6.1. página 40. □

Corolario 82. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Para todo $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ con $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i \ll 0$ es isomorfo (en la categoría derivada) a un complejo $I^\bullet$ de objetos inyectivos con $I^i = 0$ para $i \ll 0$.*

Demostración. Por la caracterización cohomológica de la categoría acotada por abajo (cf. Lema 68) el complejo $A^\bullet$ se identifica con un complejo en $K^+(\mathcal{A})$. Por el Lema 81 existe un casi-isomorfismo $A^\bullet \to I^\bullet$ que, al pasar a la categoría derivada, se vuelve un isomorfismo. □

Lema 83. *Si $C^\bullet$ es un complejo acíclico e $I^\bullet$ un complejo inyectivo, entonces $Hom_{K(\mathcal{A})}(C^\bullet, I^\bullet) =$* 0

Demostración. Sea $f^\bullet : C^\bullet \to I^\bullet$ un morfismo de cadenas, vamos a demostrar que $f \simeq 0$ por inducción, supongamos que existen $h^p : C^p \to I^{p+1}$ tales que

$$h^p d_C^{p-1} + d_I^{p-2} h^{p-1} = f^{p-1} \tag{2.13}$$

Para todo $p \leq n$, construyamos $h^{n+1} : C^{n+1} \to I^n$ tal que la ecuación 2.13 se cumpla si escribimos $p = n + 1$. Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-2} \arrow[r, "d_C^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"] & C^{n-1} \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\overline{d_C^n}"] \arrow[d, "f^n"] & \operatorname{coker}(d_C^n) \arrow[r, "i"] & C^{n+1} \\
\cdots \arrow[r] & I^{n-2} \arrow[r, "d_I^{n-2}"'] & I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"'] & I^n & &
\end{tikzcd}$$

Donde $\overline{d_C^n}$ es el morfismo inducido en el conúcleo y que cumple $i \circ \overline{d_C^n} = d_C^n$. Usando la ecuación 2.13 y que f es un morfismo de cadenas obtenemos

$$\begin{aligned}(f^n - d_I^{n-1}h^n)d_C^{n-1} &= f^n d_C^{n-1} - d_I^{n-1}h^n d_C^{n-1} \\ &= d_I^{n-1}f^{n-1} - d_I^{n-1}(h^n d_C^{n-1}) \\ &= d_I^{n-1}f^{n-1} - d_I^{n-1}(f^{n-1} - d_I^{n-2}h^{n-1}) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por la propiedad universal del conúcleo, existe $\sigma^{n+1} : \operatorname{coker}(d_C^{n-1}) \to I^n$ tal que

$$f^n - d_I^{n-1}h^n = \sigma^{n+1}\overline{d_C^n} \tag{2.15}$$

así, obtenemos el diagrama sólido

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ C^n \arrow[r, "\overline{d_C^n}"] \arrow[d, "f^n"'] & \operatorname{coker}(d_C^{n-1}) \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "\sigma^{n+1}"] \\ I^n & C^{n+1} \arrow[l, dotted, "h^{n+1}"] \end{tikzcd}$$

Por ser I^n un objeto inyectivo existe un levantamiento $h^{n+1} : C^{n+1} \to I^n$, demostremos que h^{n+1} satisface 2.13:

$$\begin{aligned}f^n &= \sigma^{n+1}\overline{d_C^n} + d_I^{n-1}h^n \\ &= h^{n+1} \circ i\overline{d_C^n} + d_I^{n-1}h^n \\ &= h^{n+1}d_C^n + d_I^{n-1}h^n.\end{aligned} \tag{2.16}$$

La primera igualdad por la ecuación 2.14 y la segunda pues h^{n+1} es un levantamiento de σ^{n+1}. □

Corolario 84. *Si $A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo entre complejos $A^\bullet, B^\bullet$ en $K^+(\mathcal{A})$, entonces para todo complejo $I^\bullet$ de objetos inyectivos tal que $I^i = 0$ para todo $i \ll 0$, el morfismo inducido*

$$Hom_{K(\mathcal{A})}(B^\bullet, I^\bullet) \longrightarrow Hom_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$$

es biyectivo.

Demostración. Consideremos el triángulo distinguido

$$B^\bullet \xrightarrow{s} A^\bullet \xrightarrow{\tau_s} C(s) \xrightarrow{\pi_s} B^\bullet[1] .$$

Por ser s un casi-isomorfismo, del Corolario 25 tenemos que $C(s)$ es acíclico, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-, I^\bullet)$ al triángulo anterior obtenemos una sucesión exacta larga (pues por la Proposición 60 el funtor es cohomológico):

$$. \quad . \quad . \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(C(s), I^\bullet) \xrightarrow{\tau_s^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \xrightarrow{s^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(B^\bullet, I^\bullet) \longrightarrow . \quad . \quad .$$

y por el Lema 83 terminamos. □

Lema 85. *Si $A^\bullet, I^\bullet \in \mathcal{A}^+$ son complejos acotados por abajo tales que todo I^i es inyectivo, entonces*

$$Hom_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \cong Hom_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet).$$

Demostración. Existe un morfismo natural $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$ inducido por la localización. Tenemos que demostrar que dado cualquier morfismo

$$\begin{tikzcd} & B^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A^\bullet & & I^\bullet \end{tikzcd}$$

en $D(\mathcal{A})$, existe un único morfismo de complejos $g : A^\bullet \to I^\bullet$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A^\bullet \arrow[rr, "g"'] & & I^\bullet \end{tikzcd}$$

es conmutativo en $K(\mathcal{A})$. Es decir, dado cualquier casi-isomorfismo $B^\bullet \to A^\bullet$ en $K^+(\mathcal{A})$ el morfimos inducido en $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, I^\bullet)$ es biyectivo, esto es consecuencia del Lema 84 □

Esto nos permite demostrar el primer teorema principal de las categorías derivadas. Sea $\mathcal{I}^+$ la subcategoría plena de todos los complejos acotados que son formados por objetos inyectivos en $\mathcal{A}$

Teorema 86. *Supongamos que $\mathcal{A}$ contiene suficientes inyectivos, entonces $K^+(\mathcal{I})$ es triangulada y el funtor natural*

$$\iota : K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A})$$

es una equivalencia de categorías.

Demostración. Veamos que el funtor es fiel y pleno. Por el Corolario 84 un morfismo $f : I^\bullet \to J^\bullet$, con $I^\bullet, J^\bullet \in K^+(\mathcal{I})$ es 0 en $D(\mathcal{A})$ si y solo si es homotópico a 0, de manera que el funtor es fiel. Sea

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ I^\bullet & & J^\bullet \end{tikzcd}$$

Un techo, que ι sea pleno significa que existe un morfismo $\phi : I^\bullet \to J^\bullet$ que complete el diagrama. Aplicando el Lema 85 al morfismo s tenemos que existe un elemento ϕ tal que $\phi \circ s = f$. El morfismo es escencialmente suprayectivo por el Corolario 82. □

De esta forma, sin hablar de Categorías Modelo, obtenemos otra demostración de que la Categoría Derivada es localmente pequeña, en el caso en que la categoría abeliana $\mathcal{A}$ posee suficientes inyectivos. Si la categoría abeliana $\mathcal{A}$ resulta ser una subcategoría plena de la categoría abeliana $\mathcal{B}$, entonces existe un morfismo canónico $D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^*(\mathcal{B})$. Podemos preguntarnos sobre la relación entre estas dos categorías, como cabe esperarse, esta no será tan buena por lo general, sin embargo es posible cuando la categoría $\mathcal{A}$ es *cerrada bajo extensiones*. Esta propiedad se conoce en la literatura como una subcategoría *gruesa*[1], este concepto es importante en Geometría Algebraica y nos da otra forma de estudiar las categorías derivadas en términos de subcategorías *mas pequeñas*. No utilizaremos los resultados aquí mencionados pero se creyó conveniente incluirlos como referencia.

Definición 87. Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría abeliana plena de la categoría abeliana $\mathcal{B}$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es *gruesa* si toda extensión en $\mathcal{B}$ de objetos en $\mathcal{A}$ está de nuevo en $\mathcal{A}$. Esto es, si

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $\mathcal{B}$ con A', A'' en $\mathcal{A}$, entonces A está en $\mathcal{A}$.

Teorema 88. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría abeliana gruesa de $\mathcal{B}$ y supongamos que todo objeto A en $\mathcal{A}$ puede ser encajado en un objeto A' de $\mathcal{A}$ que es inyectivo como objeto de $\mathcal{B}$. Si $* = +, b$, entonces el funtor natural $D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ induce una equivalencia*

$$D^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} D^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$$

entre $D^*(\mathcal{A})$ y la subcategoría triangulada plena $D^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ consistente de todos los complejos en $\mathcal{B}$ cuya cohomología está en $\mathcal{A}$.

Demostración. Véase (17). □

2.6. Funtores Derivados

Llegamos a la sección principal del Capítulo, esta consistirá de la definición de los funtores derivados. Estos funtores resolverán el problema con las imágenes directas planteado al comienzo del Capítulo. En particular demostraremos propiedades técnicas de estos con respecto a adjunciones y daremos dos ejemplos explícitos.

[1] Del francés *épaisse*

2.6.1. Levantamiento de funtores aditivos

Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo entre categorías trianguladas, queremos buscar condiciones para poder inducir, canónicamente, un funtor en la categoría homtópica.

Definición 89. Un funtor aditivo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre categorías trianguladas se dice *exacto* si satisface las siguientes dos condiciones:

(I) El funtor F respeta el funtor de traslación, i.e. existe un isomorfismo

$$F \circ T_{\mathcal{A}} \longrightarrow T_{\mathcal{B}} \circ F.$$

(II) Cualquier triángulo distinguido

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$$

en $\mathcal{A}$ es llevado por F a otro triángulo distinguido

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(A)[1] \ ,$$

donde identificamos $F(A[1])$ con $F(A)[1]$ por el isomorfismo de la condición (I).

Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo entre categorías aditivas, inducimos un funtor $F^\bullet : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ de la manera usual, aplicando F componente a componente.

Lema 90. *Si $F^\bullet : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ es un funtor aditivo, entonces F pasa a la categoría homotópica como un funtor exacto.*

Demostración. Para ver que F pasa a la categoría cociente, basta con demostrar que si $f \simeq g : A^\bullet \to B^\bullet$, entonces $F(f) \simeq F(g)$. En efecto, si $\{h^p\}$ es la homotopía entre f y g, entonces

$$F(f^p) - F(g^p) = d^{p-1}_{F^\bullet(B^\bullet)} \circ F(h^p) + F(h^{p+1}) \circ d^p_{F^\bullet(A^\bullet)}.$$

De manera que $\{F(h^p)\}$ es una homotopía entre $F(f)$ y $F(h)$, por lo tanto define un funtor $K^*(F) : K^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{B})$, veamos que este funtor es exacto. Claramente conmuta con el funtor de traslación, además si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es un morfismo, entonces

$$C^p_{F^\bullet(f)} = F^\bullet(A^\bullet)^{p+1} \oplus F^p(B^\bullet) = F(A^{p+1}) \oplus F(B^p) = F(A^{p+1} \oplus B^p) = F^p(C_f)$$

y además se verifica

$$d^p_{F^\bullet(f)} = \begin{pmatrix} -d^{p+1}_{F^\bullet(A^\bullet)} & 0 \\ F^{p+1}(f) & d^p_{F^\bullet(B^\bullet)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F(d^{p+1}_{A^\bullet}) & 0 \\ F(f^{p+1}) & F(d^p_{B^\bullet}) \end{pmatrix} = F(d^p_{C(f)}),$$

por tanto $F^\bullet(C^\bullet_f) = C_{F^\bullet(f)}$ y en consecuencia manda triángulos distinguidos en triángulos distinguidos. ☐

De la construcción también se vuelve claro que, si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son funtores aditivos, entonces

$$K^*(F \circ G) = K^*(F) \circ K^*(G).$$

Componiendo con el funtor de localización obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} K^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^*(F)"] \arrow[dr] & K^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\ & D^*(\mathcal{B}) \end{tikzcd} .$$

Lo único que necesitamos es poder factorizar el diagrama a uno desde $D^*(\mathcal{A})$. El gran problema está en que, si $s : A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, no necesariamente $K^*(F)(s)$ lo es, de hecho tenemos los siguientes lemas que nos dan condiciones equivalentes a lo anterior.

Lema 91. *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son categorías abelianas y $F : K^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{B})$ es un funtor exacto entre las categorías homotópicas, entonces F induce un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} K^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^*(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\ D^*(\mathcal{A}) \arrow[r, "F^*"'] & D^*(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

cuando alguna de las siguientes dos condiciones equivalentes se satisfacen

(I) F manda casi-isomorfismos a casi-isomorfismos.

(II) F manda complejos acíclicos a complejos acíclicos.

Observación. En la hipótesis del teorema no estamos requiriendo que el funtor *sea inducido* de un funtor entre las categorías abelianas.

Demostración. La condición (I) es la propiedad universal de la categoría derivada -el Teorema 42-. Supongamos que se cumple la condición (II) y sea $f : A^\bullet \to B^\bullet$ un casi-isomorfismo, consideremos el triángulo distinguido

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\tau_f} C(f) \xrightarrow{\pi_f} A^\bullet[1] .$$

Como f es casi-isomorfismo, por el Corolario 25 tenemos que $C(f)$ es acíclico, por ser F un funtor triangulado, obtenemos el siguiente triángulo distinguido

$$F(A^\bullet) \xrightarrow{F(f)} F(B^\bullet) \xrightarrow{F(\tau_f)} F(C(f)) \xrightarrow{F(\pi_f)} F(A^\bullet[1]) .$$

Si F manda complejos acíclicos a complejos acíclicos, entonces aplicando de nuevo el 25 tenemos que $F(f)$ es un casi-isomorfismo, por el Teorema de Gabriel-Zisman terminamos. $\square$

Por otro lado, si nuestro funtor es inducido por uno entre las categorías abelianas, entonces tenemos otra condición equivalente.

Lema 92. *Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor entre categorías abelianas, entonces F induce un funtor en las categorías derivadas si se cumple alguna de las siguientes 3 condiciones equivalentes:*

(I) *F manda casi-isomorfismos a casi-isomorfismos.*

(II) *F manda complejos acíclicos a complejos acíclicos.*

(III) *F es exacto.*

Demostración. Por el Lema 91 basta con demostrar que el inciso (III) es equivalente a alguno de los primeros dos incisos. Supongamos entonces que F es un funtor exacto, entonces F conmuta con homología y por lo tanto manda complejos acíclicos en complejos acíclicos. Para demostrar que F es exacto basta con demostrarlo en sucesiones exactas cortas, sabemos que una sucesión corta es exacta si y solo si es acíclica. □

2.6.2. Levantamiento de Adjunciones a la Categoría Homotópica

Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores entre categorías abelianas y supongamos que F es adjunto izquierdo a G, i.e para todos $X \in \mathcal{A}$ y $Y \in \mathcal{B}$ existe un isomorfismo

$$\alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(Y))$$

de grupos abelianos que es natural en X y Y. Veamos como se comporta la extensión natural de este funtor a la categoría de complejos y la categoría homotópica, respectivamente. Sean $X^\bullet \in C^\bullet(\mathcal{A}), Y^\bullet \in C^\bullet(\mathcal{B})$ complejos y sea $f : F^\bullet(X^\bullet) \to Y^\bullet$ un morfismo de complejos. En cada grado el morfismo $f^p : F(X^p) \to Y^p$ es un morfismo en $\mathcal{B}$, definamos $g^p = \alpha_{X^p,Y^p}(f^p)$, de esta forma $g^p : X^p \to G(Y^p)$ son morfismos en $\mathcal{A}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$. Mas aún, si consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(X^p) \arrow[r, "f^p"] \arrow[d, "F(d^p_{X^\bullet})"'] & Y^p \arrow[d, "d^p_{Y^\bullet}"] \\ F(X^{p+1}) \arrow[r, "f^{p+1}"'] & Y^{p+1} \end{tikzcd}$$

entonces tenemos que

$$g^{p+1} \circ d^p_{X^\bullet} = \alpha_{X^{p+1},Y^{p+1}}(f^{p+1}) \circ d^p_{X^\bullet} = \alpha_{X^p,Y^{p+1}}(f^{p+1} \circ F(d^p_{X^\bullet})),$$

pues el isomorfismo α_{X^p,Y^p} es natural en la primer variable. Usando la naturalidad en la segunda variable obtenemos que

$$G(d^p_{Y^\bullet}) \circ g^p = G(d^p_{Y^\bullet}) \circ \alpha_{X^p,Y^p}(f^p) = \alpha_{X^p,Y^{p+1}}(d^p_{Y^\bullet} \circ f^p)$$

y por lo tanto tenemos que $g^{p+1} \circ d^p_{X^\bullet} = G(d^p_{Y^\bullet}) \circ g^p$. De esta forma obtenemos que las g^p inducen un morfismo de complejos $g : X^\bullet \to G^\bullet(Y^\bullet)$. En suma, damos lugar a un morfismo

$$\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^\bullet}(F^\bullet(X^\bullet), Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^\bullet}(F^\bullet(X^\bullet), Y^\bullet)$$

definido puntualmente como $\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}(f)^p = \alpha_{X^p,Y^p}(f^p)$. Como cada α_{X^p,Y^p} es un morfismo de grupos abelianos, se sigue que $\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}$ es también un morfismo de grupos abelianos, análogamente podemos definir una inversa para $\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}$ en términos de la inversa de α_{X^p,Y^p}. Lo único que resta por ver es la naturalidad, que se sigue trivialmente. Así, hemos demostrado

Lema 93. *Si $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son funtores adjuntos, entonces los funtores inducidos $F^\bullet, G^\bullet : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ son adjuntos.*

Ahora buscamos un análogo para el caso de las categorías homotópicas. El resultado es que también es posible *levantar* funtores adjuntos en este caso.

Proposición 94. *Si $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son funtores adjuntos, entonces los funtores $K(F^\bullet), K(G^\bullet) : K(\mathcal{A}^\bullet) \to K(\mathcal{B}^\bullet)$ son adjuntos.*

Demostración. Sean $X^\bullet, Y^\bullet$ complejos en $\mathcal{A}^\bullet$. Sea $f : F^\bullet(X) \to Y^\bullet$ un morfismo homotópico a cero. Sea h la homotopía. Usando la misma notación que en Lema anterior, tenemos que

$$\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}(f)^p = \alpha_{X^p,Y^p}(f^p) = \alpha_{X^p,Y^p}(d^{p-1}_{Y^\bullet} \circ h^p) + \alpha_{X^p,Y^p}(h^{p+1} \circ F(d^p_{X^\bullet}))$$

y por naturalidad de α obtenemos

$$\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}(f)^p = G(d^{p-1}_{Y^\bullet}) \circ \alpha_{X^p,Y^{p-1}}(h^p) + \alpha_{X^{p+1},Y^p}(h^{p+1}) \circ d^p_{X^\bullet}$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto inducimos una homoropía k definida puntualmente via $\alpha_{X^p,Y^{p-1}}(h^p)$, i.e. $\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}(f)$ es homotópico a 0. Esto implica que $\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}$ induce un morfismo

$$K(\gamma_{X^\bullet,Y^\bullet}) : \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A}^\bullet)}(F^\bullet(X^\bullet), Y^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{K^\bullet(\mathcal{B})}(X^\bullet, G^\bullet(Y^\bullet))$$

que de manera análoga podemos demostrar que es un isomorfismo, la naturalidad en la categoría de complejos induce naturalidad en la categoría homotópica. □

2.6.3. Funtores derivados en categorías trianguladas

Comencemos con la definición general de un funtor derivado. Vamos a decir que una transformación natural de funtores entre categorías trianguladas es *graduada* si conmuta, hasta isomorfismo, con las autoequivalencias de las categorìas.

Definición 95. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías trianguladas, con funtores de traslación $T_\mathcal{A}$ y $T_\mathcal{B}$ respectivamente.

1. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es *graduado* si existe un isomorfismo natural entre los funtores $F \circ T_\mathcal{A}$ y $T_\mathcal{B} \circ F$.

2. Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores graduados y sean ω_F, ω_G los isomorfismos dados por ser funtores graduados. Una *transformación natural graduada* es una transformación natural η tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(T_{\mathcal{A}}(X) \arrow[r, "\omega_{F,X}"] \arrow[d, "\eta_{T_{\mathcal{A}}(X)}"'] & T_{\mathcal{B}}(F(X)) \arrow[d, "T_{\mathcal{B}}(\eta_X)"] \\ G(T_{\mathcal{A}}(X)) \arrow[r, "\omega_{G,X}"'] & T_{\mathcal{B}}(G(X)) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Observe que en la Definición de transformación natural el diagrama es conmutativo y no conmutativo hasta isomorfismo. El lector puede en una primera lectura, sabiendo esta ambigüedad, ignorar los signos si lo prefiere y pensar que el isomorfismo de funtores de la Definición anterior es la identidad.

Definición 96. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías trianguladas y $S \subset$ una clase localizante, Un *funtor derivado derecho* es un funtor exacto $RF : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ junto con una transformación natural graduada $\varepsilon_F : F \to RF \circ Q_S$ con la siguiente propiedad universal: Si $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ es otro funtor exacto y $\varepsilon : F \to G \circ Q$ una transformación natural graduada, entonces existe una únca transformación natural graduada $\eta : RF \to G$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & RF \circ Q \arrow[dd, "\eta \circ Q"] \\ F \arrow[ur, "\varepsilon_F"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\ & G \circ Q \end{tikzcd}$$

conmuta. Los funtores derivados izquierdos se definen de manera dual y los denotamos por LF.

Ejemplo 97. *Si F tiene la propiedad de que $F(s)$ es un isomorfismo para todo $s \in S$, como en el caso de $K^*(F)$ cuando F resultaba ser un funtor exacto, entonces por la propiedad universal de la categoría localizada existe $\overline{F} : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F} \circ Q$. En este caso demostraremos que $\overline{F}$ es el funtor derivado derecho de F, tomando ε_F como la identidad.*
Sea $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ un funtor exacto y $\varepsilon : F \to G \circ Q$ una transformación natural graduada, como $F = \overline{F} \circ Q$, veamos que ε induce una transformación natural graduada de $\overline{F}$ a G. Sean X, Y objetos en $\mathcal{C}$ y sea $\phi : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Entonces ϕ está representado por un techo

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Donde $\phi = Q(f) \circ Q(s)^{-1}$*, así que*

$$G(\phi) = G(Q(f)) \circ G(Q(s))^{-1}$$

y por otro lado, como ε *es una transformación natural, existen diagramas conmutativos*

$$\begin{tikzcd} F(X') \arrow[r, "F(s)"] \arrow[d, "\varepsilon_{X'}"'] & F(X) \arrow[d, "\varepsilon_X"] \\ G(X') \arrow[r, "G(Q(s))"] & G(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X') \arrow[r, "\overline{F}(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_{Y'}"'] & F(Y) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ G(X') \arrow[r, "G(Q(f))"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$G(\phi) \circ \varepsilon_X = G(Q(f)) \circ \varepsilon_{X'} \circ F(s)^{-1} = \varepsilon_Y \circ F(f) \circ F(s)^{-1} = \varepsilon_Y \circ \overline{F}(\phi)$$

o en otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\overline{F}(\phi)"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ F(X) \arrow[r, "G(\phi)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta, y por lo tanto la familia de morfismos ε_X *definen una transformación natural* $\eta : \overline{F} \to G$ *tal que* $\eta \circ Q = \varepsilon$*, es inmediato ver que* η *es graduado.*

Un funtor derivado derecho de F es entonces un funtor derivado derecho de

$$Q_{\mathcal{B}} \circ K^*(F) : K^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$$

Discutamos un Teorema de existencia en el caso mas general.

Definición 98. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto entre categorías trianguladas y sea $S \subset \mathcal{C}$ una clase localizante. Una subcategoría triangulada plena $\mathscr{E} \subseteq \mathcal{C}$ se dice *adaptada por la derecha* a F si satisface:

(APD1) $S_{\mathscr{E}} = S \cap \mathrm{Mor}(\mathscr{E})$ es una clase localizante en $\mathscr{E}$.

(APD2) Para todo X en $\mathcal{C}$ existe M en $\mathscr{E}$ y $s : X \to M$ en S.

(APD3) Para todo $s \in S_{\mathscr{E}}$, el morfismo $F(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

La definición de una subcategoría adaptada por la izquierda se define de manera dual.

El siguiente Teorema es de una gran importancia teórica y servirá como punto de partida para los otros teoremas, sin embargo su carácter *extremadamente técnico* nos alejaría del objetivo de la tesis, por lo que se optó por dar una idea de la demostración, explicándola con una serie de pasos. Lo único rescatable de la demostración del Teorema es la construcción de los funtores derivados, el problema recáe en demostrar que estos, efectivamente, cumplen con la propiedad universal deseada. Para ver los detalles de la demostración, el lector es invitado a leer la Sección 9, página 74, de (3).

Teorema 99. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías trianguladas. Sea S una clase localizante compatible con la triangulación en $\mathcal{C}$. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto. Si existe una subcategoría $\mathscr{E}$ adaptada por la derecha a F, entonces existe un funtor derivado derecho (RF, ε_F) de F. Análogamente para el caso de funtores derivados izquierdos.*

Demostración. Expliquemos los pasos que se necesitan hacer para demostrarlo.

Paso 1. *Demostrar* que la clase localizante $S_{\mathscr{E}}$ es compatible con la triangulación. Por lo tanto, la categoría $S_{\mathscr{E}}^{-1}\mathscr{E}$ es una subcategoría triangulada plena de $S^{-1}\mathcal{C}$. Por la condición (APD2), el funtor inclusión

$$\Psi : S_{\mathscr{E}}^{-1}\mathscr{E} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{C}$$

Es denso[1] y por lo tanto una equivalencia de categorías. Defínase $\Phi : S^{-1}\mathcal{C} \to S_{\mathscr{E}}^{-1}\mathscr{E}$ como el inverso de Ψ.

Paso 2. *Demostrar* que Φ es un funtor exacto. Por lo tanto, la propiedad universal de la localización existe un único funtor $\overline{F} : S_{\mathscr{E}}^{-1}\mathscr{E} \to \mathcal{D}$ tal que la restricción de F a $\mathscr{E}$ coincide con $\overline{F} \circ Q$. Definimos $RF = \overline{F} \circ \Phi$, por ser la composición de dos funtores exactos, el funtor RF es exacto.

Paso 3. Construcción de una transformación natural $\varepsilon_F : F \longrightarrow RF \circ Q$: Sea X un objeto de $S^{-1}\mathcal{C}$, el isomorfismo $\beta_X : X \to \Phi(X)$ está representado por un techo (¡por la derecha!)

$$\begin{tikzcd} & K & \\ X \arrow[ur, "f"] & & \Phi(X) \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

donde K es un objeto de $\mathcal{C}$ y $s \in S$. Por la condición (APD2) existe un morfismo $u : K \to$ en S tal que M es un objeto de $\mathscr{E}$, por lo tanto podemos suponer que $K \in \mathscr{E}$, por tanto $s \in S_{\mathscr{E}}$ y por hipótesis $F(s)$ es un isomorfismo. Definimos el morfismo

$$\rho_X = F(s)^{-1} \circ F(f) : F(X) \longrightarrow F(\Phi(X))$$

se *demuestra* que este morfismo no depende de la elección del techo. Definimos $\varepsilon_F : F \longrightarrow RF \circ Q$ como la dada por los morfismo ρ_X. Se *demuestra* que esto es una transformación natural.

Paso 4. Se *demuestra* que el morfismo ε_F es graduado. Por lo tanto, hemos construido una pareja (RF, ε). Falta demostrar que es universal, sea $G : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto

[1] i.e. escencialmente suprayectivo.

y $\varepsilon : F \to G \circ Q$ un morfismo de funtores. Sea X un objeto en $\mathcal{C}$, como en el paso anterior, el isomorfismo β_X está representado por un techo 2.17, donde $K \in \mathscr{E}$. Se *demuestra* que esto induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\varepsilon_X"] & F(\Phi(X)) \arrow[d, "\varepsilon_{\Phi(X)}"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\beta_x)"] & G(\Phi(X)) \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{D}$. Si β_X es un isomorfismo en $S^{-1}\mathcal{C}$, entonces $G(\beta_X)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ y por lo tanto podemos definir $\eta_X = G(\beta_X)^{-1} \circ \varepsilon_{\Phi(X)}$, este morfismo en $\mathcal{D}$ satisface por construcción que

$$\eta_x \circ \rho_X = G(\beta_X)^{-1} \circ \varepsilon_{\Phi(X)} \circ \rho_X = \varepsilon_X$$

se *demuestra* que esta familia define una *única* transformación natural η.

$\square$

Así, cuando podemos encontrar una subcategoría adaptada para nuestro funtor tenemos garantizada la existencia de funtores derivados. El problema, como cabe suponerse, es saber si existe esta subcategoría. Más adelante daremos condiciones sobre la Categoría misma para poder verificar la existencia de estos funtores, trazando un paralelo al tratamiento clásico de Grothendieck en (12), con la ventaja de ser mucho mas general.

2.6.4. Dualidad

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor exacto entre categorías trianguladas, podemos ver a F como un funtor aditivo de $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$, sea $T_\mathcal{C}$ el funtor de traslación de $\mathcal{C}$, tenemos entonces que $T_\mathcal{C}^{-1}$ es un funtor de traslación para $\mathcal{C}^{op}$ (véase la Sección 2.4) y por ser F graduado, claramente $T_\mathcal{C}^{-1} \circ F \cong F \circ T_\mathcal{C}^{-1}$. De forma que F^{op} es también un funtor graduado. Sea

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

un triángulo distinguido en $\mathcal{C}^{op}$, esto ocurre si y sólo si

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h[1]} Z$$

es un triángulo distinguido en $\mathcal{C}$ y por tanto, como F es exacto, tenemos que

$$F(Z)f \xrightarrow{F(g)} F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X) \xrightarrow{F(h[1])} F(Z)$$

es un triángulo distinguido en $\mathcal{D}$, de forma que

$$F^{\mathrm{op}}(X) \xrightarrow{F^{\mathrm{op}}(f)} F^{\mathrm{op}}(Y) \xrightarrow{F^{\mathrm{op}}(g)} F^{\mathrm{op}}(Z) \xrightarrow{F^{\mathrm{op}}(h)} F^{\mathrm{op}}(X)[1]$$

es también un funtor exacto. Como $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}^{op} = (\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C})^{op}$ para cualesquiera categoría triangulada $\mathcal{C}$ y clase localizante compatible con la triangulación $\mathcal{S}$ (cf. Proposición 39) y por unicidad en la Definición de los funtores derivados, obtenemos que $RF^{op} : S^{-1}\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ es un funtor derivado por la izquierda para $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ y en consecuencia, para todos los Teoremas demostrados en adelante basta con considerar funtores derivados por la derecha, esto aplica particularmente al Teorema de existencia de los funtores derivados. Sin embargo, mas adelante será necesario considerar relaciones entre funtores derivados por la derecha y funtores derivados por la izquierda.

2.6.5. El Caso de $D(\mathcal{A})$

Un funtor derivado derecho de $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor derivado -en el sentido de la Sección 2.6.3- de $Q_{\mathcal{B}} \circ K(F) : K^*(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$. Sea $\mathscr{E}$ una subcategoría triangulada plena de $K^*(\mathcal{A})$ y S la clase localizante de todos los casi-isomorfismos en $\mathcal{A}$

Lema 100. *La clase $S_{\mathscr{E}} = S \cap Mor(\mathscr{E})$ de todos los casi-isomorfismos en $\mathscr{E}$ es una clase localizante compatible con la triangulación.*

Demostración. La demostración es análoga al Lema 55. □

Proposición 101. *Una subcategoría plena $\mathscr{E}$ de $K^*(\mathcal{A})$ es adaptada por la derecha para F si satisface*

(APDD1) Para todo $A^\bullet$ en $K^*(\mathcal{A})$ existe $M^\bullet$ en $\mathscr{E}$ y un casi-isomorfismo $s : A^\bullet \to M^\bullet$.

(APDD2) Si $M^\bullet \in \mathscr{E}$ es un complejo acíclico, entonces $K(F)(M^\bullet)$ es acíclico en $K^*(\mathcal{B})$.

Demostración. Las condiciones (APD2) y (APD3) son las condiciones (APDD1) y (APDD2). La condición (APD1) es válida siempre por el Lema 100. □

Con la Proposición anterior tenemos la condición necesaria, que como veremos en varios ejemplos tiende a ser muy fácil de verificar, para garantizar la existencia de los funtores derivados. Para el caso en que la Categoría $\mathcal{A}$ tenga suficientes inyectivos, la construcción de los funtores derivados es inmediata.

Teorema 102. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor exacto izquierdo, entonces el funtor derivado $R^+F : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$ existe. Además la clase $\mathcal{I}$ de complejos inyectivos es una clase adaptada por la derecha.*

Demostración. Por el Teorema 86 el funtor canónico $\iota : K^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \to D^+(\mathcal{A})$ es una equivalencia de categorías. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \arrow[r] \arrow[dr, "\iota"] & K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K(F)"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\
 & D^+(\mathcal{A}) \arrow[ul, bend left, "\iota^{-1}"] & D^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

El funtor derivado es entonces $RF = Q_{\mathcal{B}} \circ K(F) \circ \iota^{-1}$, por el Ejemplo 97. Por la Proposición 101 y el Lema 81 lo único que resta por demostrar es que, si I un complejo acíclico en $K^{+}(\mathcal{I})$, entonces $K(F)(I)$ es acíclico. Esto es consecuencia directa del Lema 83. $\square$

Observe que en el Teorema fue necesario considerar la categoría derivada $D^{+}(\mathcal{A})$, trabajar con complejos que nos son acotados es bastante problemático, sin embargo, en algunos casos es posible lidiar con ellos, exigiendo condiciones sobre el funtor, eg. dimensión cohomológica finita, o sobre la categoría, eg. complejos K-proyectivos. Para más detalles sobre el caso de dimensión cohomológica finita, véase la Sección 2.7, para complejos K-proyectivos el lector es invitado a consultar el trabajo de Spalstenstein en (27).

2.6.6. Composición de Funtores Derivados

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ categorías abelianas y sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores aditivos, la composición $G \circ F$ es un funtor aditivo y por lo anterior $K^*(G \circ F) = K^*(G) \circ K^*(F)$. Supongamos que los funtores F, G y $G \circ F$ admiten funtores derivados. Entonces existen transformaciones naturales graduadas $\varepsilon_F : Q_{\mathcal{B}} \circ K(F) \longrightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$ y $\varepsilon_G : Q_{\mathcal{C}} \circ K(G) \longrightarrow RG \circ Q_{\mathcal{B}}$. Tenemos una transformación natural graduada

$$\kappa = RG \circ \varepsilon_F \circ \varepsilon_G \circ K(F) : Q_{\mathcal{C}} \circ K(G \circ F) \longrightarrow RG \circ RF \circ Q_{\mathcal{A}}$$

y por la propiedad universal de $R(G \circ F)$ existe una transformación natural graduada

$$\eta : R(G \circ F) \longrightarrow RG \circ RF$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & R(G \circ F) \arrow[dd, "\eta \circ Q_{\mathcal{A}}"] \\ Q_{\mathcal{C}} \circ K(G \circ F) \arrow[ur, "\varepsilon_{G \circ F}"] \arrow[dr, "\kappa"'] & \\ & G \circ Q \end{tikzcd} .$$

El siguiente teorema es una de las razones por las cuales los funtores derivados son mucho mas útiles que su contraparte clásica (hablaremos más de esto en el siguiente capítulo). Reemplazando toda la maquinaria de sucesiones espectrales por una manera mas *natural* de expresar la composición de dos funtores.

Teorema 103. *Supongamos que $K^*(\mathcal{A})$ contiene una subcategoría triangulada plena $\mathscr{E}$ que es adaptada por la derecha para F y que $K^*(\mathcal{B})$ contiene una subcategoría triangulada plena $\mathscr{E}'$ que es adaptada por la derecha para G. Si se satisface la condición*

(SE) Para todo complejo $M^\bullet \in \mathscr{E}$, se cumple que $K(F)(M^\bullet) \in \mathscr{E}'$

Entonces:

(I) *La subcategoría plena $\mathscr{E}$ de $K^*(\mathcal{A})$ es adaptada por la derecha para $G \circ F$ y el funtor derivado derecho $R(G \circ F)$ existe.*

(II) *El morfismo de funtores η es un isomorfismo.*

Demostración. La condición (APDD1) se satisface por la hipótesis (SE). Demostremos que $\mathcal{D}$ satrisface (APDD2), si $M^\bullet \in \mathscr{E}$ es un complejo acíclico, entonces

$$K(G \circ F)(M^\bullet) = K(G)(K(F)(M^\bullet))$$

Por la condición (SE) tenemos que $K(F)(M^\bullet) \in \mathscr{E}'$, por ser $\mathscr{E}'$ una clase adaptada por la derecha para G, entonces $K(G)(K(F)(M^\bullet))$ es acíclico. En consecuencia por la Proposición 101 y el Teorema de Existencia 99 obtenemos que $R(G \circ F)$ existe. Demostremos el inciso (II), como los funtores derivados son escencialmente únicos, podemos suponer que los funtores derivados son los construidos en el Teorema 99. Si $M^\bullet$ es un complejo en $\mathscr{E}$, entonces (Paso 3 del Teorema 99) el morfismo $\varepsilon_{F,M^\bullet} : K(F)(M^\bullet) \to RF(M^\bullet)$ es un isomorfismo en $D^*(\mathcal{B})$. Por lo tanto,

$$RG(\varepsilon_{F,M^\bullet}) : RG(K(F)(M^\bullet)) \longrightarrow RG(RF(M^\bullet))$$

es un isomorfismo en $D^*(\mathcal{C})$. Análogamente, ya que $K(F)(M^\bullet)$ es un objeto en $\mathscr{E}'$, el morfismo

$$\varepsilon_{G,K(F)(M^\bullet)} : K(G)(K(F)(M^\bullet)) \longrightarrow RG(K(F)(M^\bullet))$$

es un isomorfismo en $D^*(\mathcal{C})$ y por la construcción hecha anteriormente, el morfismo

$$\kappa_{M^\bullet} : K(G)(K(F)(M^\bullet)) \longrightarrow RG(RF(M^\bullet))$$

es un isomorfismo en $D^*(\mathcal{C})$. También, el morfismo

$$\varepsilon_{G\circ F,M^\bullet} : K(G \circ F)(M^\bullet) \longrightarrow R(G \circ F)(M^\bullet)$$

es un isomorfismo, por lo tanto $\eta_{M^\bullet}$ es un isomorfismo en $D^*(\mathcal{C})$, esto demuestra el caso en $\mathscr{E}$. Supongamos ahora que X es un complejo en $K^*(\mathcal{A})$, por hipótesis, existe un complejo $M^\bullet$ en $\mathscr{E}$ y un casi-isomorfismo $s : X \to M^\bullet$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
R(G \circ F)(X) \arrow[r, "R(G\circ F)(Q_{\mathcal{A}}(s))"] \arrow[d, "\eta_X"] & R(G \circ F)(M^\bullet) \arrow[d, "\eta_{M^\bullet}"] \\
(RG \circ RF)(X) \arrow[r, "(RG\circ RF)(Q_{\mathcal{A}}(s))"'] & (RG \circ RF)(M^\bullet)
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son isomorfismos. Por lo anterior, sabemos que $\eta_{M^\bullet}$ es un isomorfismo, por lo tanto $\eta_{X^\bullet}$ lo es. En conclusión, η es un isomorfismo de funtores. $\square$

2.7. Los Funtores Derivados Clásicos

En (12), Grothendieck construye a los funtores derivados por medio del concepto de δ-funtores universales, jugando un papel dominante las resoluciones por medio de objetos acíclicos. El propósito de esta sección es verificar que los funtores derivados definidos a lo largo del Capítulo vienen a ser una *buena generalización*, o quizá inclusive una *buena definición* de los funtores derivados, obteniendo a los primeros como una "sombra" de los últimos.

Definición 104. Si $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ es el funtor derivado derecho de un funtor exacto izquierdo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, entonces para todo complejo $A^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ definimos

$$R^pF(A^\bullet) = (H^p \circ RF \circ D)(A^\bullet)$$

El funtor R^pF así definido para toda p, es un funtor de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Como ε_F es una transformación natural obtenemos, componiendo con H^0, la transformación natural $H^0(\varepsilon_F) : F \to R^0F$. Veamos propiedades de los funtores R^pF.

Lema 105. *Los funtores R^pF satisfacen las siguientes propiedades:*

(I) Para todo $p < 0$ se cumple que $R^pF = 0$.

(II) El funtor R^0F es un funtor exacto por la izquierda.

(III) La transformación natural $H^0(\varepsilon_F) : F \to R^0F$ es un isomorfismo si y sólo si F es exacto por la izquierda.

(IV) Para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow R^0F(L) \xrightarrow{R^0F(g)} R^0F(N) \longrightarrow R^1F(L) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow R^{p-1}F(N) \longrightarrow R^pF(L) \xrightarrow{R^pF(f)} R^pF(M) \xrightarrow{R^pF(g)} \cdots$$

en $\mathcal{B}$.

(V) Sean $\mathcal{R}$ una clase adaptada por la derecha para F y M un objeto en $\mathcal{A}$. Si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta larga, donde K^p es un elemento de $\mathcal{R}$ para todo p y denotamos por $K^\bullet$ al complejo

$$0 \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow K^2 \longrightarrow \cdots$$

entonces

$$(R^pF)(M) \cong H^p(F^\bullet(K^\bullet))$$

para toda p.

Demostración. Por el Teorema 57, tenemos que el triángulo distinguido

$$D(L) \xrightarrow{D(f)} D(M) \xrightarrow{g} D(N) \longrightarrow D(L)[1]$$

en $D(\mathcal{A})$, como RF es un funtor exacto, entonces tenemos que el triángulo

$$R(D(L)) \xrightarrow{R(D(f))} R(D(M)) \xrightarrow{R(g)} R(D(N)) \longrightarrow R(D(L))[1]$$

es distinguido. Como H^0 es un funtor cohomológico (Proposición 61) tenemos inducida la sucesión exacta siguiente

$$. \quad . \quad . \longrightarrow R^{p-1}F(N) \longrightarrow R^pF(L) \xrightarrow{R^p(f)} R^p(M) \xrightarrow{R^p(g)} R^pF(N) \longrightarrow R^{p+1}F(L) \longrightarrow . \quad . \quad .$$

El inciso (V) es una consecuencia de que el morfismo natural $D(M) \to K^\bullet$ es un casi-isomorfismo. De forma que en la Categoría Derivada, $RF(D(M)) \cong RF(K^\bullet)$. Por otro lado, cada K^p es un elemento de la clase adaptada $\mathcal{R}$, por lo tanto $RF(K^\bullet) = H^n(F^\bullet(K^\bullet))$. Para finalizar, notemos que por (V) se sigue inmediatamente (I) y por ambos obtenemos (IV), del cual se sigue (II). El único inciso que falta por demostrar es el (III). Por el inciso (II) basta con demostrar que, si F es exacto por la izquierda, entonces $H^0(\varepsilon_F)$ es un ismorfismo. En efecto, por ser F exacto por la izquierda la sucesión

$$0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(K^0) \longrightarrow F(K^1) \longrightarrow . \quad . \quad . \, ,$$

es exacta y por lo tanto el único morfismo $H^0(\varepsilon_F)$ está descrito como $H^0(\varepsilon_F) : F \to R^0F \cong H^0(K(F^\bullet)(R^\bullet) = F(M)$, al ser este funtorial, necesariamente es un isomorfismo. $\square$

Los incisos del Lema 105 caracterizaban a los funtores derivados en (12) en el lenguaje de δ-funtores. De esta manera, tenemos que los funtores derivados dados por Grothendieck resultan ser un "pedazo" de estos nuevos funtores derivados. Los funtores derivados clásicos tienen su utilidad pues rescatando el caso original (véase (14)) tenemos una noción *relativa* de objetos *acíclicos*

Definición 106. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor exacto izquierdo, decimos que un objeto M en $\mathcal{A}$ es *F-acíclico* si $R^nF(M) = 0$ para todo $n > 0$.

Si denotamos por $\mathcal{Z}$ a la subcategoría plena de todos los objetos F-acíclicos y suponemos que existe una clase F-adaptada $\mathcal{R}$ es claro por el Lema 105 que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Z}$, más aún, veremos que esta clase es suficientemente grande, esto será útil pues comunmente (especialmente en el caso de gavillas) ocurre que es más fácil obtener resoluciones de objetos acíclicos que de objetos inyectivos.

Teorema 107. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor exacto izquierdo y $\mathcal{R}$ una clase adaptada por la derecha para F.*

1. *La subcategoría plena $\mathcal{Z}$ de objetos F-acíclicos es la clase más grande adaptada por la derecha para F.*

2. *Todos los objetos inyectivos en $\mathcal{A}$ son parte de $\mathcal{Z}$.*

Demostración. Véase (9), Teorema 16, página 195. □

Definición 108. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor exacto izquierdo, decimos que F tiene *dimensión cohomológica finita* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n F = 0$ para todo $n > N$.

Cuando sabemos que un funtor es de dimensión cohomológica finita, entonces podemos definir funtores derivados *totales*, para los cuales los definidos en las subcategorías acotadas resultarán ser restricciones, más específicamente tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 109. *Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor de dimensión cohomológica finita, entonces la clase de objetos F-acíclicos los funtores derivados $R^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$ existen para $* = +, -, b, \emptyset$. Más aún el diagrama siguiente conmuta*

$$\begin{tikzcd} D(\mathcal{A}) \arrow[r, "RF"] & D(\mathcal{B}) \\ D^*(\mathcal{A}) \arrow[u] \arrow[r, "R^*F"] & D^*(\mathcal{B}) \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Demostración. Véase (19), Corolario 13.3.3, pp. 330. □

2.8. Hom y Ext

En esta Sección analizaremos las propiedades al pasar a la categoría derivada del funtor más importante en Álgebra Homológica, este es el funtor Hom. Veremos la relación de los funtores derivados de Hom con los grupos de extensiones, definidos de la manera clásica. Porque será útil más adelante, comenzaremos revisando los bicomplejos y los complejos totalizadores.

Recordemos que un bicomplejo es un objeto de $(\mathcal{A}^\bullet)^\bullet$, o en otras palabras, es una familia $(C^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ junto a morfismos horizontales $d_I : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$ y verticales $d_{II} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ tales que $d_I \circ d_I = d_{II} \circ d_{II} = d_{II}d_I + d_I d_{II} = 0$.

Observación. La condición $d_{II}d_I + d_I d_{II} = 0$ refleja la *anticonmutatividad* de los bicomplejos, por lo cual los morfismos $(d_{II}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ *no forman* un morfismo en $\mathcal{A}^\bullet$, sin embargo, utilizando el ya mencionado *truco del signo* podemos remediar esto definiendo $f^{*,q} : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ vía la fórmula

$$f^{p,q} = (-1)^p d_{II}^{p,q}.$$

Esto, de hecho, permite identificar a los bicomplejos arriba definidos como objetos de $(\mathcal{A}^\bullet)^\bullet$.

Definición 110. Sea $A^{\bullet\bullet}$ un bicomplejo. El complejo total[1] $\mathrm{Tot}(A)^\bullet$ está dado por

$$\mathrm{Tot}(A)^n = \prod_{p+q=n} A^{p,q}$$

y diferencial $d = d_{II} + d_I$. Extendemos esto a un funtor de la manera usual.

De esta forma hemos garantizado una manera funtorial de obtener complejos a partir de bicomplejos. Utilizaremos esto después, podemos definir ahora al complejo Hom.

Definición 111. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. El *complejo Hom$^\bullet$ externo* es el complejo en $\mathbf{Ab}^\bullet$ dado por

$$\mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p, Y^{p+n})$$

y con diferenciales

$$d^n((f_p)_{p\in\mathbb{Z}})_q = f_{q+1}d^q_{X^\bullet} + (-1)^{n+1}d^{q+n}_{Y^\bullet} f_q.$$

Esto también nos da una manera funtorial de ver al conjunto de todos los morfismos, a saber

$$\mathrm{Hom}^\bullet(-,-) : (\mathcal{A}^\bullet)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A}^\bullet \to \mathbf{Ab}^\bullet$$

que en morfismos es

$$\mathrm{Hom}^n(\phi, \psi) = \prod_{q\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\phi^q, \psi^{q+n}).$$

Es trivial ver que, así definido, $\mathrm{Hom}^\bullet(-,-)$ es un funtor aditivo en cada variable.

Lema 112. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa y X un complejo en $\mathcal{A}$. Los funtores aditivos*

$$Hom^\bullet(X,-) : \mathcal{A}^\bullet \to \mathbf{Ab}^\bullet$$

$$Hom^\bullet(-,X) : \mathcal{A}^\bullet \to \mathbf{Ab}^\bullet$$

mandan productos en productos y coproductos en productos respectivamente. El funtor $Hom^\bullet(X,-)$ es exacto por la izquierda.

Demostración. Sea $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia -no vacía- de complejos. Tenemos isomorfismos canónicos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}^n(X, \prod_\lambda Y_\lambda &= \prod_q \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, \prod_\lambda Y^{q+n}) \\ &\cong \prod_{q,\lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, Y^{q+n}_\lambda) \\ &\cong \prod_\lambda \mathrm{Hom}^n(X, Y_\lambda).\end{aligned}$$

[1] Específicamente este es el complejo total producto. Sólo utilizaremos complejos totales producto en esta tesis, si el complejo doble es acotado, entonces no hay distinción.

Esto demuestra que $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-)$ preserva productos, simétricamente se demuestra que $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X)$ manda productos en coproductos, demostrar que $\mathrm{Hom}^\bullet(-,X)$ es exacto por la izquierda es rutinario. □

Proposición 113. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y sean X, Y complejos en $\mathcal{A}$. Para $n \in \mathbb{Z}$ existe un isomorfismo canónico de grupos abelianos, natural en ambas variables*

$$\omega : H^n(Hom^\bullet(X,Y)) \to Hom_{K(\mathcal{A})}(X, Y[n]).$$

Demostración. El complejo de grupos abelianos $\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)$ lo podemos expresar como

$$\longrightarrow \prod_q \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, Y^{q+n-1}) \longrightarrow \prod_q \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, Y^{q+n}) \longrightarrow \prod_q \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, Y^{q+n+1}) \longrightarrow$$

Sea $(f^p) \in \prod_q \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, Y^{q+n})$. Tenemos que $(f^p) \in \ker(d^n)$ si y solo si

$$d^n((f_p)_{p\in\mathbb{Z}})_q = f_{q+1} d^q_{X^\bullet} + (-1)^{n+1} d^{q+n}_{Y^\bullet} f_q = 0$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$, por lo tanto (estamos ocupando el truco del signo) esto nos define un morfismo $\overline{f} : X \to Y[n]$. De esta forma tenemos un isomorfismo

$$\omega : \ker(d^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\bullet}(X, Y[n]$$

dado por $\omega((f_p)) = \overline{f}$. Supongamos ahora que $(f_p) \in \mathrm{Im}(d^{n-1})$, esto quiere decir que existe $(g_p) \in \prod_q \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^q, Y^{q+n-1})$ tal que

$$g_{q+1} d^q_{X^\bullet} + (-1)^n d^{q+n-1}_{Y^\bullet} f_q = f_q.$$

es decir $f_p \simeq 0$, de esta forma obtenemos el isomorfismo buscado. □

Definición 114. Sean X, Y complejos en $\mathcal{A}$. El n-ésimo *hyperext* de X y Y es el grupo abeliano

$$Ext^n(X,Y) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[n]).$$

Como la categoría $D(\mathcal{A})$ es una categoría triangulada, por la Proposición 60 los funtores $Ext^n(-,Y)$ y $Ext^n(X,-)$ son cohomológicos. De la misma manera, los funtores $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(-,Y)$ y $H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,-)$ son cohomológicos. Tenemos a su vez morfismos canónicos

$$H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y) = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X,Y[n]) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X,Y[n]) = Ext^n(X,Y).$$

Supongamos que la categoría $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, o por lo anterior, que existe una clase adaptada para el funtor $\mathrm{Hom}^\bullet(X,-)$. Tenemos la existencia de los funtores derivados $R^+\mathrm{Hom}^\bullet(X,-) : D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab})$ para todo complejo X. Utilizaremos por el resto de la Sección la siguiente *Notación*:

$$R\mathrm{Hom}(X,Y) = (R^+\mathrm{Hom}^\bullet(X,-))(Y).$$

Observe que el objeto $R\mathrm{Hom}(X,Y)$ así definido es un objeto de la categoría $D(\mathbf{Ab})$.

Lema 115. *Si $m : X \to X'$ es un casi-isomorfismo, entonces m induce un isomorfismo $RHom(X', Y) \cong RHom(X, Y)$.*

Demostración. Como estamos suponiendo que la categoría tiene suficientes inyectivos, podemos suponer que Y es un complejo inyectivo. Por lo que $R\mathrm{Hom}(X', Y) \cong \mathrm{Hom}^\bullet(X', Y)$. Resta demostrar que este último complejo es casi-isomorfo a $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y)$. En efecto,

$$H^n\mathrm{Hom}^\bullet(X', Y) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X', T^nY)$$

por la Proposición 113. Por el Lema 85 tenemos que

$$\begin{aligned} H^n\mathrm{Hom}^\bullet(X', Y) &\cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X', T^nY) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X', T^nY) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, T^nY) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, T^nY). \end{aligned}$$

□

Teorema 116. *Si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces RHom es un bifuntor*

$$RHom : D(\mathcal{A})^{op} \times D^+(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab}).$$

Dualmente si $\mathcal{A}$ tiene suficientes proyectivos, entonces RHom es un bifuntor

$$RHom : D^-(\mathcal{A})^{op} \times D(\mathcal{A}) \to D(\mathbf{Ab}).$$

En ambos casos tenemos que $Ext^n(X, Y) \cong H^n(RHom(X, Y))$.

Demostración. Sea Y un objeto de $\mathcal{A}^\bullet$ fijo. Por la Proposición 115 tenemos que el funtor $\mathrm{Hom}(-, Y)$ manda casi-isomorfismos en isomorfismos y por lo tanto se factoriza a través de $D(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$. Tenemos la siguiente sucesión de isomorfismos

$$H^nR\mathrm{Hom}(X, Y) = H^n\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y) = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y).$$

□

2.9. Adjuntos en categorías derivadas

En esta última Sección, completamente técnica, redondearemos un aspecto tratado con anterioridad, el comportamiento de las adjunciones al inducir funtores en las categorías de complejos construidas a lo largo del Capítulo. Veremos que la adjunción se preserva inclusive al pasar a las categorías derivadas, la demostración es ilustrativa pero muy larga así que la dividiremos en una serie de pasos.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorías abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores aditivos. Supongamos que F es adjunto por la izquierda para G y por lo tanto F es un funtor exacto derecho y G un funtor exacto izquierdo (cf. (23)). Por la Proposición 94 tenemos que los funtores $K(F)$ y $K(G)$ inducidos en la Categoría Homotópica son adjuntos. Supongamos que existen $\mathcal{C}$ una subcategoría triangulada plena de $K(\mathcal{A})$ que es adaptada por la izquierda para F y $\mathcal{D}$ una subcategoría triangulada plena de $K(\mathcal{B})$ que es adaptada por la derecha para G. Tenemos entonces que los funtores derivados L^*F y R^*G existen.

Teorema 117. *Con la notación anterior el funtor $L^*F : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$ es adjunto por la izquierda a $R^*G : D^*(\mathcal{B}) \to D^*(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sean X, Y objetos de $D^*(\mathcal{A})$ y $D(\mathcal{B})$ respectivamente. Vamos a demostrar que existe un isomorfismo natural

$$\eta_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{B})}(L^*F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X, R^*G(Y)).$$

Paso 1. Supongamos primero que X está en la subcategoría adaptada $\mathcal{C}$ y que Y es un objeto de la subcategoría adaptada $\mathcal{D}$. En este caso, por el Teorema 99 tenemos que $L^*F(X) = K^*(F)(X)$ y $R^*G(Y) = K^*G(Y)$. Si $\phi : K^*(F)(X) \to Y$ es un morfismo en $D^*(\mathcal{B})$, entonces está representado por un techo (por la derecha):

$$\begin{tikzcd} & U & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

donde $f : K^*(F)(X) \to U$ es un morfismo y s es un casi-isomorfismo en $K^*(\mathcal{B})$. Por hipótesis existen un complejo V en $\mathcal{D}$ y un casi-isomorfismo $w : U \to V$. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & & V & & \\ & U \arrow[ur, "w"] & & V \arrow[ul, "id_V"'] & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "f"] \arrow[urrr, "w\circ f"'] & & & & Y \arrow[ul, "w\circ s"'] \arrow[ulll, "s"] \end{tikzcd}.$$

Como $w \circ s$ es un casi-isomorfismo tenemos que el techo (2.18) es equivalente al techo por la derecha

$$\begin{tikzcd} & V & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "w\circ f"] & & Y. \arrow[ul, "w\circ s"'] \end{tikzcd}$$

En otras palabras, podemos suponer que U es elemento de $\mathcal{D}$.

Paso 2. Por la Proposición 94 sabemos que $K^*(F)$ y $K^*(G)$ son adjuntos, así que el morfismo f determina un morfismo $a = \gamma_{X,Y}(f) : X \to K^*(G)(U)$ en $K^*(\mathcal{A})$. Por lo tanto, tenemos un techo por la derecha

$$\begin{tikzcd}
& K^*(G)(U) & \\
X \arrow[ur, "a"] & & K^*(G)(Y). \arrow[ul, "K^*(G)(s)"']
\end{tikzcd} \tag{2.19}$$

Afirmación 118. *La clase de equivalencia del techo* (2.19) *no depende del representante* ϕ.

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd}
& V & \\
K^*(F)(X) \arrow[ur, "g"] & & Y. \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}$$

otro representante de ϕ con V en $\mathcal{D}$, por lo tanto existe un complejo W en $K^*(\mathcal{B})$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & W & & \\
& U \arrow[ur, "q"] & & V \arrow[ul, "r"'] & \\
K^*(F)(X) \arrow[ur, "f"] \arrow[urrr, "g"'] & & & & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[ulll, "t"]
\end{tikzcd}.$$

Obtenemos entonces que $q \circ s = r \circ t$ es un casi-isomorfismo, por el mismo argumento que en el Paso anterior, podemos suponer que W es un objeto de $\mathcal{D}$. Más aun, como

$$H^p(q) \circ H^p(s) = H^p(q \circ s) = H^p(r \circ t) = H^p(r) \circ H^p(t)$$

son isomorfismos para todo p, necesariamente q y r son casi-isomorfismos. Sea $b = \gamma_{X,V}(g) : X \to K^*(G)(V)$, por la naturalidad de γ en la segunda variable tenemos que

$$\gamma_{X,W}(q \circ f) = K^*(G)(q) \circ \gamma_{X,V}(f) = K(G)(q) \circ a.$$

de la misma forma tenemos que

$$\gamma_{X,W}(r \circ g) = K^*(G)(r) \circ \gamma_{X,V}(g) = K(G)(r) \circ b.$$

Por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & K^*(G)(W) & & \\
& K^*(G)(U) \arrow[ur, "K^*(G)(q)"] & & K^*(G)(V) \arrow[ul, "K^*(G)(r)"'] & \\
X \arrow[ur, "a"] \arrow[urrr, "b"'] & & & & K^*(G)(Y) \arrow[ul, "K^*(G)(s)"'] \arrow[ulll, "K^*(G)(t)"]
\end{tikzcd}$$

conmuta y en consecuencia los dos techos obtenidos por dos representantes distintos de ϕ son equivalentes, demostrando la Afirmación. $\square$

Como consecuencia de la Afirmación anterior, obtenemos un morfismo bien definido

$$\eta_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(K^*(F), Y) \to \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{B})}(X, K^*(G)(Y))$$

el cual se verifica inmediatamente que es aditivo.

Paso 3. Veamos que $\eta_{X,Y}$ es un isomorfismo. Supongamos que $\eta_{X,Y}(\phi) = 0$ y que ϕ está representado por el techo (por la derecha)

$$\begin{tikzcd}
& U & \\
K^*(F)(X) \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

con U en $\mathcal{D}$. Si $a = \gamma_{X,U}(f)$, entonces el morfismo $\eta_{X,Y}(\phi)$ está representado por el techo por la derecha

$$\begin{tikzcd}
& K^*(G)(U) & \\
X \arrow[ur, "a"] & & Y \arrow[ul, "K^*(G)(s)"']
\end{tikzcd}$$

por lo tanto existe un casi-isomorfismo $t : V \to C$ tal que $a \circ t = 0$ en $K^*(\mathcal{A})$. Más aún, como $\mathcal{C}$ es adaptada por la izquierda, podemos suponer que V es un objeto de $\mathcal{C}$. Usando la naturalidad de γ en la primer variable obtenemos

$$0 = a \circ t = \gamma_{X,U}(f) \circ t = \gamma_{V,U}(f \circ K^*(F)(t)).$$

Por lo tanto $f \circ K^*(F)(t) = 0$ y como $K(F)(t)$ es un casi-isomorfismo, necesariamente el morfismo ϕ es el morfismo 0. Demostremos que $\eta_{X,Y}$ es suprayectivo. Si $\psi : X \to K^*(G)(Y)$ es un morfismo en $D^*(\mathcal{A})$, entonces está representado por un techo por la izquierda

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & K^*(G)(Y). \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{C}$ es adaptada por la izquierda, podemos suponer que V es un objeto de $\mathcal{C}$- Sea $a = \delta_{V,Y}(g) : K^*F(V) \to Y$. Como los casi-isomorfismos son una clase localizante, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K^*(F)(X) \arrow[r, "b"] & W \\ K^*(F)(V) \arrow[u, "K^*(F)(t)"] \arrow[r, "a"'] & Y \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

donde r es un casi-isomorfismo. Ya que $\mathcal{D}$ es adaptada por la derecha, podemos suponer que W es un objeto de $\mathcal{D}$. Sea $\phi : K^*(F)(X) \to Y$ un morfismo en $D^*(\mathcal{B})$ representado por el techo por la derecha

$$\begin{tikzcd} & W & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "b"'] & & Y. \arrow[ul, "r"'] \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que $\eta_{X,Y}(\phi)$ está representado por el techo por la derecha

$$\begin{tikzcd} & K^*(G)(W) & \\ X \arrow[ur, "f"] & & K^*(G)(Y) \arrow[ul, "K(G)(r)"'] \end{tikzcd}$$

donde $f = \gamma_{X,W}(b)$. Por naturalidad, tenemos que

$$f \circ t = \gamma_{X,W}(b) \circ t = \gamma_{V,W}(r \circ a) = K^*(G)(r)$$

e igualmente

$$\gamma_{V,W}(r \circ a) = K^*(G)(r) \circ \gamma_{V,Y}(a) = K^*(G)(r) \circ g.$$

Esto implica que

$$\eta_{X,Y}(\phi) = Q(K^*(G)(r))^{-1} \circ Q(f) = Q(g) \circ Q(t)^{-1} = \psi,$$

de manera que $\eta_{X,Y}$ es suprayectiva y por lo tanto un isomorfismo.

Paso 4. Definamos ahora el morfismo $\eta_{X,Y}$ para X, Y arbitrarios. Por la construcción de los funtores derivados (cf. Teorema 99), tenemos isomorfismos naturales $\beta_{\mathcal{A},X} : \Phi_{\mathcal{A}}(X) \to X$

y $\beta_{\mathcal{B},Y} : Y \to \Phi_{\mathcal{B}}(Y)$ tales que $LF(X) = K(F)(\Phi_{\mathcal{A}}(X))$ y $RG(Y) = K^*(G)(\Phi_{\mathcal{B}}(Y))$. Por lo tanto, tenemos un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{B})}(L^*F(X), Y) \xrightarrow{\beta_{\mathcal{B},Y}\circ -} \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{B})}(K^*(F)(\Phi_{\mathcal{A}}(X)), \Phi_{\mathcal{B}}(Y))$$

y un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X, R^*G(Y)) \xrightarrow{-\circ\beta_{\mathcal{A},X}} \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(\Phi_{\mathcal{A}}(X), K^*(G)(\Phi_{\mathcal{B}}(Y))).$$

Definimos

$$\eta_{X,Y}(\phi) = \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(X),\Phi_{\mathcal{B}}(Y)}(\beta_{\mathcal{B},Y} \circ \phi) \circ \beta^{-1}_{\mathcal{A},X}$$

para todo ϕ en $\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{B})}(L^*F(X), Y)$, por construcción este es un isomorfismo.

Paso 5. Demostremos que η es natural en la primer variable. Sea $\alpha : U \to X$ un morfismo en $D^*(\mathcal{A})$ y supongamos que U, X son objetos en $\mathcal{C}$ y que Y es un objeto de $\mathcal{D}$.

Sea $\alpha = Q_{\mathcal{A}}(a)$ para un morfismo a en $K^*(\mathcal{A})$. Consideremos un morfismo $\phi : K^*(F)(X) \to Y$ representado por el techo por la derecha

$$\begin{tikzcd} & V & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

tenemos por naturalidad de γ que

$$\gamma_{U,V}(f \circ K^*(F)(a)) = \gamma_{X,V}(f) \circ a.$$

Por lo tanto, se sigue

$$\begin{aligned} \eta_{X,Y}(\phi) \circ \alpha &= Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(s))^{-1} \circ Q_{\mathcal{A}}(\gamma_{X,V}(f)) \circ Q_{\mathcal{A}}(a) \\ &= Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(s))^{-1} \circ Q_{\mathcal{A}}(\gamma_{U,V}(f \circ K^*(F)(a))) \\ &= \eta_{U,Y}(\phi \circ Q_{\mathcal{B}}(K^*(F)(a))) \\ &= \eta_{U,Y}(\phi \circ K^*(F)(Q_{\mathcal{A}}(a))) = \eta_{U,Y}(\phi \circ K^*(F)(\alpha)). \end{aligned}$$

Donde los últimos dos funtores $K^*(F)$ son los inducidos en el cociente. Sea $\alpha = Q_{\mathcal{A}}(s)$ para s un casi-isomorfismo, tenemos que α es un isomorfismo y el funtor inducido al cociente por $K^*(F)$ es el isomorfismo $Q_{\mathcal{B}}(K^*(F)(s))$. Reemplazando ϕ por $\psi \circ K^*(F)(\alpha)^{-1}$ obtenemos

$$\eta_{U,Y}(\psi \circ K^*(F)(\alpha)^{-1}) = \eta_{X,Y}(\psi) \circ \alpha^{-1}.$$

Consideremos ahora un morfismo arbitrario $\alpha : U \to X$ en $D^*(\mathcal{A})$, como la categoría plena de $D^*(\mathcal{A})$ con objetos los mismos de $\mathcal{C}$ es la localización de $\mathcal{C}$ con respecto a los casi-isomorfismos, tenemos que $\alpha = Q_{\mathcal{A}}(g) \circ Q_{\mathcal{A}}(t)^{-1}$ para algún morfismo $g : W \to X$ y un casi-isomorfismo $t : W \to U$ en $\mathcal{C}$. De las relaciones anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}\eta_{X,Y}(\phi) \circ \alpha &= \eta_{X,Y}(\phi) \circ Q_{\mathcal{A}}(g) \circ Q_{\mathcal{A}}(t)^{-1} = \eta_{W,Y}(\phi \circ K^*(F)(Q_{\mathcal{A}}(g))) \circ Q_{\mathcal{A}}(t)^{-1} \\ &= \eta_{U,Y}(\phi \circ K^*(F)(Q_{\mathcal{A}}(g)) \circ K^*(F)(Q_{\mathcal{A}}(t))^{-1}) = \eta_{U,Y}(\phi \circ K^*(F)(\alpha)).\end{aligned}$$

Supongamos que U, X, Y son arbitrarios, la transformación natural $\beta_{\mathcal{A}}$ nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Phi_{\mathcal{A}}(U) \arrow[r, "\beta_{\mathcal{A},U}"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}(\alpha)"'] & U \arrow[d, "\alpha"] \\ \Phi_{\mathcal{A}}(X) \arrow[r, "\beta_{\mathcal{A},X}"'] & X. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\beta_{\mathcal{A},X}^{-1} \circ \alpha = \Phi_{\mathcal{A}}(\alpha) \circ \beta_{\mathcal{A},U}^{-1}$ y de esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}\eta_{X,Y}(\phi) \circ \alpha &= \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(X),\Phi_{\mathcal{B}}(Y)}(\beta_{\mathcal{B},Y} \circ \phi 9 \circ \phi) \circ \beta_{\mathcal{A},X}^{-1} \circ \alpha \\ &= \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(X),\Phi_{\mathcal{B}}(Y)}(\beta_{\mathcal{B},Y} \circ \phi) \circ \Phi_{\mathcal{A}}(\alpha) \circ \beta_{\mathcal{A},U}^{-1} \\ &= \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(U),\Phi_{\mathcal{B}}(Y)}(\beta_{\mathcal{B},Y} \circ \phi \circ K^*(F)(\Phi_{\mathcal{A}}(\alpha))) \circ \beta_{\mathcal{A},U}^{-1} \\ &= \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(U),\Phi_{\mathcal{B}}(Y)}(\beta_{\mathcal{B},Y} \circ (\phi \circ LF(\alpha))) \circ \beta_{\mathcal{A},U}^{-1} = \eta_{U,Y}(\phi \circ LF(\alpha)).\end{aligned}$$

Esto demuestra que η es natural en la primer variable.

Paso 6. Demostremos que η es natural en la segunda variable. Sea $\delta : Y \to Z$ un morfismo en $D^*(\mathcal{B})$ y supongamos que X es un objeto de $\mathcal{C}$ y que Y, Z son objetos de $\mathcal{D}$. Primero, supongamos que $\delta = Q_{\mathcal{B}}(d)$ para algún morfismo d en $\mathcal{B}$ y consideremos un morfismo $\phi :: K^*(F)(X) \to Y$ representado por un techo

$$\begin{tikzcd} & V & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "f"] & & Y. \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

Como los casi-isomorfismos son una clase localizante y $\mathcal{D}$ es adaptada por la derecha, podemos construir un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dotted, "g"] & W \\ Y \arrow[u, "s"] \arrow[r, "d"'] & Z \arrow[u, dotted, "t"'] \end{tikzcd}$$

donde W es un elemento de $\mathcal{D}$. La composición $\delta \circ \phi$ queda representada por el techo

$$\begin{tikzcd} & W & \\ K^*(F)(X) \arrow[ur, "g\circ f"] & & Z. \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

Tenemos además que $g \circ s = t \circ d$, de forma que

$$K^*(G)(g) \circ K^*(G)(s) = K^*(G)(t) \circ K^*(G)(d),$$

como s y t son casi-isomorfismos de objetos en la subcategoría $\mathcal{D}$ tenemos que $K^*(G)(s)$ y $K^*(G)(t)$ son casi-isomorfismos en $K^*(\mathcal{A})$ y además

$$Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(t))^{-1} \circ Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(g)) = Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(d) \circ Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(s))^{-1}.$$

Por naturalidad de γ se cumple

$$\begin{aligned}
\eta_{X,Z}(\delta \circ \phi) &= Q_{\mathcal{A}}(K^*(G)(t))^{-1} \circ \gamma_{X,W}(g \circ f) \\
&= Q_{\mathcal{A}}((K^*(G)(t))^{-1} \circ Q_{\mathcal{A}}((K^*(G)(g)) \circ \gamma_{X,V}(f) \\
&= Q_{\mathcal{A}}((K^*(G)(d)) \circ Q_{\mathcal{A}}((K^*(G)(s))^{-1} \circ \gamma_{X,V}(f) \\
&= (K^*(G)(\delta) \circ \eta_{X,Y}(\phi).
\end{aligned}$$

Si $\delta = Q_{\mathcal{A}}(r)$ para un casi-isomorfismo r, entonces δ y $(K^*(F)(\delta) = Q_{\mathcal{B}}((K^*(F)(r))$ son isomorfismos. Reemplazando ϕ por $\delta^{-1} \circ \psi$ obtenemos

$$\eta_{X,Y}(\delta^{-1} \circ \psi) = (K^*(G)(\delta)^{-1} \circ \eta_{X,Z}(\psi).$$

Sea ahora $\delta : Y \to Z$ un morfismo arbitrario en $\mathcal{D}$. Como la subcategoría plena de $D^*(\mathcal{B})$ con objetos de $\mathcal{D}$ es la localización de $\mathcal{D}$ con respecto a los casi-isomorfismos, entonces $\delta = Q_{\mathcal{B}}(h) \circ Q_{\mathcal{B}}(r)^{-1}$ para algún morfismo $h : T \to Z$ y un casi-isomorfismo $t : T \to Y$ en $\mathcal{D}$. Calculando

$$\begin{aligned}
\eta_{X,Z}(\delta \circ \phi) = \eta_{X,Z}(Q_{\mathcal{B}}(h) \circ Q_{\mathcal{B}}(r)^{-1} \circ \phi) &= (K^*(G))(Q_{\mathcal{B}}(h)) \circ \eta_{X,T}(Q_{\mathcal{B}}(r)^{-1} \circ \phi) \\
= (K^*(G))(Q_{\mathcal{B}}(h)) \circ (K^*(G))(Q_{\mathcal{A}}(r))^{-1} \circ \eta_{X,Y}(\phi) &= (K^*(G)) - 8\delta) \circ \eta_{X,Y}(\phi).
\end{aligned}$$

Si suponemos que X, Y y Z son arbitrarios, entonces la transformación natural $\beta_{\mathcal{B}}$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta_{\mathcal{B},Y}"'] \arrow[d, "\delta"] & \Phi_{\mathcal{A}}(Y) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}(\delta)"] \\ Z \arrow[r, "\beta_{\mathcal{B},Z}"] & \Phi_{\mathcal{B}}(Z). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\eta_{X,Z}(\delta \circ \phi) = \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(X),\Phi_{\mathcal{B}}(Z)}(\beta_{\mathcal{B},Z} \circ \delta \circ \phi) \circ \beta^{-1}_{\mathcal{A},X}$$

$$\eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(X),\Phi_{\mathcal{B}}(Z)}(\Phi_{\mathcal{B}}(\delta) \circ \beta_{\mathcal{B},Y} \circ \phi) \circ \beta^{-1}_{\mathcal{A},X}$$

$$= (K^*(G))(\Phi_{\mathcal{B}}(\delta)) \circ \eta_{\Phi_{\mathcal{A}}(X),\Phi_{\mathcal{B}}(Y)}(\beta_{\mathcal{B},Y} \circ \phi) \circ \beta^{-1}_{\mathcal{A},X}$$

$$= RG(\delta) \circ \eta_{X,Y}(\phi)$$

y en consecuencia η es natural en la segunda variable.

□

2.10. Notas

El estudio de los funtores derivados desarrollado en este Capítulo corresponde -en las palabras de Gelfand y Manin- al inicio del *tercer periodo* del Álgebra Homológica. Aparentemente, en los últimos años esta tendencia está siendo reemplazada por una cada vez mayor fusión de estas con la teoría de homotopía. Uno de estos consiste en prestar una mayor atención a la *estructura modelo* de la categoría en cuestión, que podemos remontar desde el trabajo de Adams en (1). Por otro lado existe un creciente cambio de perspectiva, para ahora pensar a las categorías trianguladas como un caso particular de ∞-categorías. No parece haber definiciones completamente aceptadas del formalismo de funtores derivados en estos contextos. Sin embargo existen formalismos casi aceptados, como el de Jacob Lurie en su libro *Higher Topos Theory.*

Por último, cabe mencionar una construcción alternativa de los funtores derivados, originalmente hecha por Deligne; esta brilla por su elegancia, sin embargo para el caso de demostrar existencia de los funtores derivados, parece ser que las técnicas expuestas en la Sección 2.6 siguen siendo óptimas. Esto se verá más claro cuando discutamos la Categoría Derivada de Gavillas, en el siguiente Capítulo.

2.10.1. La Construcción de Deligne

En el artículo (5), Pierre Deligne hace una construcción *más general* de los funtores derivados. En esta Sección vamos a discutir esta teoría, cuyos principios básicos serán utilizados para poder demostrar la dualidad de Verdier, en el siguiente Capítulo.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías trianguladas, denotaremos por $\mathrm{Fex}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ a la categoría de funtores exactos de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, donde los morfismos están dados por transformaciones naturales graduadas.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas y $\Phi : K^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{B})$ un funtor exacto (no necesariamente proviene de un funtor entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$). El funtor a la localización $Q_{K(\mathcal{A})}$ nos define un funtor

$$\mathrm{Fex}(D^*(\mathcal{A}), D^*(\mathcal{B}) \to \mathrm{Fex}(K^*(\mathcal{A}), K^*(\mathcal{B}))$$

que, componiendo con el funtor de localización $Q_{K(\mathcal{B})}$, nos define un funtor $\kappa : \mathrm{Fex}(D^*(\mathcal{A}), D^*(\mathcal{B})) \to$ **Ab** dado por

$$\kappa(\Psi) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(Q_{K(\mathcal{B})} \circ \Phi, \Psi \circ Q_{K(\mathcal{A})}).$$

Análogamente definimos κ' como

$$\kappa'(\Psi) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(Q_{K(\mathcal{B})} \circ \Phi, \Psi \circ Q_{K(\mathcal{A})}).$$

Definición 119. Decimos que Φ admite un funtor derivado total por la derecha (respectivamente por la izquierda) si el funtor κ (resp. κ') es representable[1]. Un objeto representante del funtor κ (resp. κ') se conoce como el funtor derivado total por la derecha (resp. por la izquierda) de Φ y se denota $R_D\Phi$ (resp. $L_D\Phi$).

Escencialmente esta Definición recupera la propiedad universal de funtores derivados dada en la Sección 2.6 pero en un sentido más débil. Deligne prosigue en (5) demostrando la existencia de estos funtores "agrandando" a $\mathcal{B}$, este procedimiento es la *ind*-completación de $\mathcal{B}$, para después demostrar que estos coinciden con los definidos por Verdier en todos los casos de interés.

[1]Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ se dice representable si existe un objeto C de $\mathcal{C}$ tal que $F(C') = \mathrm{Hom}(C, C')$ para todo C' en $\mathcal{C}$.

Capítulo 3

La Categoría Derivada de Gavillas

Después de haber sentado en el Capitulo 2 los fundamentos de la teoría de Categorías derivadas, el próximo objetivo a estudiar es una categoría geométrica particular de todo espacio topológico. Históricamente, dejando de lado la escuela de Topología algebraica, podemos pensar que es para una categoría de este estilo que se creo el cumulo de teoría general de las categorías derivadas.

La idea, como en todo teorema de dualidad, es tratar de encontrar un isomorfismo natural que nos permita trasladar conceptos encontrados en un invariante algebraico a otro. En Topología Algebraica el ejemplo hegemónico de esta dualidad es la dualidad de Poincaré, que da un isomorfismo entre la homología y cohomología singular para una variedad topológica orientada. La idea es poder demostrar una basta generalización de este Teorema utilizando como herramientas a las categorías derivadas.

En la Sección 1, que servirá como un recordatorio, daremos la definición de gavilla, incluyendo diversas construcciones de estas para concluir que esta es una categria abeliana. Durante el resto del Capitulo estaremos interesados en explorar esta categoria. Para la Seccion 2 definimos la cohomologia de gavillas y discutiremos la relacion clásica de estas con la dada vía los funtores derivados del funtor de secciones globales. Ademas veremos que la Categoría de Gavillas cumple tener suficientes inyectivos.

La dualidad de Poincaré para el caso de variedades no compactas, necesita ciertas condiciones de *finitud* en la cohomologia, i.e. una noción de soportes. Con esto en mente vamos a definir los funtores de secciones con soporte compacto y daremos una clase de gavillas que es adaptada para este funtor. Después estudiaremos diversos funtores definidos en la categoría de gavillas para el caso particular de inclusiones de subconjuntos abiertos y cerrados. Veremos que la categoría de gavillas del espacio puede ser de alguna forma *descompuesta* con respecto a cualquier abierto y su complemento.

La Sección 5 se encargara de estudiar resoluciones por un tipo concreto de gavillas que seran utiles mas adelante. Ademas veremos una nocion de dimension para el caso de espacios topológicos que cumplen ser localmente compactos y Hausdorff. Durante toda la Sección 6 se demostrará un teorema perteneciente a la Teoría de Categorías, es muy importante debido a que de él se desprende inmediato la existencia de un funtor adjunto, que será el punto clave en la demostración del Teorema de Dualidad.

En la Sección 7 definiremos el funtor necesario para dar la dualidad de Verdier, lo extenderemos a la categoría derivada y por ultimo demostraremos el Teorema de dualidad. La última sección se encargará de definir el complejo dualizante y el morfismo de traza. Con estos veremos que es posible demostrar la dualidad de Poincaré.

Este Capítulo está basado en el libro (18) y la monografía (30). El libro (9) fue de mucha ayuda para preparar este Capítulo y la Tesis en general.

3.1. Gavillas

Partiremos con la suposición de que el lector ya ha tenido un primer encuentro con la teoría de gavillas. Sólo por completez, haremos un pequeño recordatorio en esta sección de los conceptos básicos que utilizaremos, todo el material aquí expuesto puede ser encontrado de manera muy detallada en el capítulo 2 de (18), sin embargo en las referencias a las demostraciones preferimos optar, por accesibilidad, a las demostraciones que sean mas autocontenidas posibles.

3.1.1. La Categoría Abeliana de Gavillas

Definición 120. Sea X un espacio topológico, una *pregavilla de A-módulos* en X es un funtor contravariante

$$\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \longrightarrow A\text{-Mod}$$

donde la categoría $\mathbf{Top}(X)$ tiene como objetos a los abiertos de X y como morfismos a las inclusiones entre estos.

Nos apegaremos a las convenciones usuales:

- Si $U \in \mathbf{Top}(X)$ es un abierto, diremos que los elementos de $\mathscr{F}(U)$ son las *secciones*[1] de la gavilla $\mathscr{F}$.
- Denotaremos por $\Gamma(U; \mathscr{F})$ ó $H^0(U; \mathscr{F})$ a las secciones de $\mathscr{F}$.
- Si $i_{UV} : U \subseteq V$ es un morfismo en $\mathbf{Top}(X)$, i.e. la inclusión entre dos abiertos de X, entonces existe un morfismo

  $$\mathscr{F}(i_{UV}) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

  en A-Mod, puesto que $\mathscr{F}$ es contravariante. Denotamos a este morfismo por r_{UV} y lo llamaremos *el morfismo de restricción* de U a V.
- Si $s \in \mathscr{F}(V)$ y $U \subseteq V$ entonces denotaremos por $s|_U$ a la imagen de s bajo el morfismo r_{UV}, diremos que $s|_U$ se obtuvo por *restricción* de la sección s.

Definición 121. Una *gavilla* $\mathscr{F}$ sobre X es una pregavilla que además satisface lo siguiente:

(GAV1) *Localidad*: Si U es un abierto, $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta de U y $s, t \in \mathscr{F}(U)$ son secciones tales que $s|_{V_\alpha} = t|_{V_\alpha}$ para toda α, entonces $s = t$.

[1] Esta terminología proviene de la Topología Algebraica, donde las pregavillas se obtienen a partir de las secciones locales de haces.

(GAV2) *Pegado*: Si U es un abierto, $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta de U y existen elementos $s_\alpha \in \mathscr{F}(V_\alpha)$ tales que, para todos α, β se cumple que

$$s_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = s_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta},$$

entonces existe un elemento $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{V_\alpha} = s_\alpha$ para todo α. (Por la condición anterior esta sección es única).

La definición anterior, además de resultar bastante intuitiva, resulta ser en general la mas sencilla de utilizar, sin embargo más adelante nos será de utilidad el tener una versión mas *categórica* de la definición de gavilla a la mano.

Proposición 122. *Una pregavilla $\mathscr{F}$ es una gavilla si y solamente si, para todo abierto U de X y toda cubierta abierta $\{V_\alpha\}$ de U, la sucesión siguiente es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\ \epsilon\ } \prod_{\alpha} \mathscr{F}(V_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathscr{F}(V_\alpha \cap V_\beta) \ .$$

Donde los morfismos son los inducidos por las restricciones. (En otras palabras, ϵ es un igualador).

Demostración. La demostración puede encontrarse en (28), Sección 1.6, página 15. □

Las gavillas sobre un espacio topológico conformarán el objeto de estudio de la tesis, requeriremos entonces, naturalmente, que estas conformen una categoría.

Definición 123. La categoría de *pregavillas* de A-módulos sobre un espacio X es la categoría de funtores Fun($\mathbf{Top}(X)^{op}$, A-Mod), denotamos a esta categoría por $\mathbf{PShv}_A(X)$. La categoría de *gavillas* de A-módulos sobre X es la subcategoría plena de $\mathbf{PShv}_A(X)$ constituida de las gavillas sobre X, denotamos a esta categoría por $\mathbf{Shv}_A(X)$.

Observación. Se dice que las gavillas son, en cierto sentido una generalización del concepto de espacio. También lo son de A-módulos, en el sentido preciso de que para un punto $\{\text{pt}\}$, tenemos

$$\mathbf{Shv}_A(\{\text{pt}\}) \equiv A\text{-Mod}.$$

En efecto, $\mathbf{Top}(\text{pt})^{op}$ no es mas que la categoría abeliana 0. De forma que Fun($\mathbf{Top}(X)^{op}$, A-Mod) es, de manera canónica, isomorfa a A-Mod.

Tenemos canónicamente definidos el funtor inclusión $\mathbf{Shv}_A(X) \longrightarrow \mathbf{PShv}_A(X)$ y el funtor que olvida $\mathbf{Shv}_A(X) \longrightarrow \mathbf{PShv}_A(X)$, estos admiten un adjunto, lo que nos da una manera canónica de “gavillizar” a una pregavilla.

Teorema 124. *Existe un funtor que a cada pregavilla $\mathscr{F}$ asocia una gavilla $\widetilde{\mathscr{F}}$ que cumple ser adjunto por la derecha a el funtor olvidadizo y adjunto por la izquierda al funtor de inclusión. Esta construcción cumple con la siguiente propiedad universal: Si $\mathscr{F}$ es una pregavilla, $\mathscr{G}$ una gavilla y $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de pregavillas, entonces existe un único $\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathscr{F}} \to \mathscr{G}$ tal que el diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathscr{G} \\ \widetilde{\mathscr{F}} \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración puede ser encontrada en (19), Proposición 2.2.3, pp.85. □

Con base en el Teorema 124, seguiremos la filosofía usual de definir una gavilla en términos de la gavilla asociada a una pregavilla, esto es útil en práctica debido a la laxitud en la definición de pregavilla. Otro tema importante en Geometría son las *propiedades locales*, en este aspecto la teoría de gavillas es muy adecuada puesto que de ellas podremos recuperar la noción de *gérmenes* de funciones.

Definición 125. Sea $x \in X$, consideremos la subcategoría plena de $\mathbf{Top}(X)$ formada por los abiertos U tales que $x \in U$. Denotemos a esta categoría por $\mathbf{Top}_x(X)$. Si $\mathscr{F}$ es una gavilla en X, definimos el *tallo* de x en $\mathscr{F}$ como el límite del funtor

$$\mathscr{F}| : \mathbf{Top}_x(X)^{op} \longrightarrow A\text{-Mod}$$

Donde $\mathscr{F}|$ es la restricción de $\mathscr{F}$ a $\mathbf{Top}_x(X)$.

La definición anterior es fácilmente aterrizable en el contexto en el que estamos interesados.

Proposición 126. *El tallo de una gavilla $\mathscr{F}$ es canónicamente isomorfo al A-módulo $\mathscr{F}_x$ definido como*

$$\mathscr{F}_x = \{(s, U) : s \in \mathscr{F}(U)\} / \sim .$$

Donde $(s, U) \sim (t, V)$ si y solamente si existe un abierto W en $\boldsymbol{Top}_x(X)$ tal que $s|_W = t|_W$.

Demostración. Inmediata de la descripción de los límites en A-Mod. □

En lo subsecuente denotaremos por $\mathscr{F}_x$ al tallo de x. El objetivo que perseguiremos a continuación es el de poder realizar *operaciones* entre gavillas, similares a las operaciones usuales de la categoría de módulos. Veremos aparecer de nuevo la *naturaleza local* de las mismas.

Definición 127. Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, definimos:

- La gavilla suma directa $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ como $U \mapsto \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U)$.
- La *pregavilla* producto tensorial $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ como $U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes \mathscr{G}(U)$. La gavilla producto tensorial es la gavilla asociada y la denotamos igual.

- La gavilla núcleo de un morfismo $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ como $U \mapsto \ker(\phi_U)$. Lo denotamos $\ker(\phi)$.
- La *pregavilla* conúcleo de un morfismo $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ como $U \mapsto \operatorname{coker}(\phi_U)$. La gavilla conúcleo es la gavilla asociada y la denotamos igual.

Con estas construcciones dotaremos a la categoría de gavillas con suficiente estructura para volverse *una buena categoría para hacer Álgebra Homológica*. En otras palabras, el teorema siguiente.

Teorema 128. *Las gavillas de la Definición 127 cumplen con las propiedades universales usuales, con esto la categoría* $\mathbf{Shv}_A(X)$ *es una categoría abeliana, una sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si para todo $x \in X$ *la sucesión inducida en los tallos*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'_x \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}''_x \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Véase (19), Proposición 2.2.4 pp. 86. □

En el Teorema 128 hemos caracterizado las sucesiones exactas con base a los tallos, esto debido a que en la categoría de gavillas los epimorfismos no corresponden a la definición *naive* de epimorfismos, que en últimas instancias es la razón de no exactitud por la derecha del funtor de secciones.

Proposición 129. *Sea* $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un morfismo de gavillas, se cumple que:*

1. ϕ_U *es un monomorfismo para todo abierto* U *si y solamente si* ϕ *es un monomorfismo.*
2. *Si* ϕ_U *es un epimorfismo para todo abierto* U*, entonces* ϕ *es un epimorfismo. El converso no es necesariamente cierto.*

Demostración. La demostración puede encontrarse en (14), pp. 65. □

3.2. Cohomología de Gavillas

La sección anterior se encargó de dotar a $\mathbf{Shv}_A(X)$ de una estructura *abeliana*, por tanto el Capítulo 2 de esta tesis nos otorga funtores

$$\mathbf{Shv}^*_A(X) \longrightarrow K^*(\mathbf{Shv}_A(X)) \longrightarrow D^*(\mathbf{Shv}_A(X)).$$

En esta sección nos abocaremos al estudio moderno de la cohomología de gavillas, reformulando con el lenguaje discutido en el Capítulo 2 las nociones clásicas[1]. Sea $\mathscr{F}^\bullet \in \mathbf{Shv}_A \bullet (X)$, recordemos el *funtor de cohomología* definido en 9.

[1] Con clásicas nos referimos a la forma de abordar la cohomología, por ejemplo, en (10).

Definición 130. La *gavilla de cohomología* $\mathscr{H}^p(\mathscr{F}^\bullet)$ es la imagen del funtor $H^p : \mathbf{Shv}^\bullet_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(X)$.

Requeriremos de una manera mas explícita para poder describir el funtor de cohomología en el caso de complejos de gavillas. Dado $\mathscr{F}^\bullet \in \mathbf{Shv}^\bullet_A(X)$, definamos una *pregavilla* de la siguiente manera

$$U \mapsto H^p\Gamma(U; \mathscr{F}^\bullet),$$

donde los mapeos de restricción son los inducidos por los funtores $\Gamma(U; -)$ y el de cohomología.

Proposición 131. *La gavilla asociada a la pregavilla anterior es la gavilla de cohomología $\mathscr{H}^p(\mathscr{F}^\bullet)$.*

Demostración. Por el Teorema 124, el funtor de *gavillización* tiene como adjunto al funtor olvidadizo, de forma que este es un funtor exacto de la categoría de pregavillas a la de gavillas. El objeto de cohomología asociado a un complejo de gavillas $\mathscr{F}^\bullet$ corresponde, por adjunción, a la gavilla asociada a la pregavilla

$$U \mapsto \ker(d^p_{\mathscr{F}^\bullet})(U)/\mathrm{Im}(d^{p-1}_{\mathscr{F}^\bullet})(U)$$

Que es igual, por definición, al cociente $\ker(\Gamma(U; d^p_{\mathscr{F}^\bullet}))/\mathrm{Im}(\Gamma(U; d^{p-1}_{\mathscr{F}^\bullet}))$ de la sucesión inducida por $\Gamma(U; -)$. □

Observación. La Proposición 131 garantiza que un complejo de gavillas es *exacto* si lo es como complejo de *pregavillas*. En particular si $\phi : \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$ es un casi-isomorfismo de *pregavillas*, entonces ϕ es un casi-isomorfismo como complejos de gavillas, pues por la Proposición 25 ver que ϕ es acíclico es equivalente a ver la exactitud del cono de ϕ.

Lema 132. *Si $\mathscr{F}^\bullet$ es un complejo de gavillas, entonces existe un isomorfismo funtorial en $\mathscr{F}^\bullet$:*

$$\mathscr{H}^p(\mathscr{F}^\bullet)_x \cong H^p(\mathscr{F}^\bullet_x).$$

Donde $\mathscr{F}^\bullet_x$ es el complejo de A-módulos inducido tomando tallos en cada componente de $\mathscr{F}^\bullet$.

Demostración. Recuerde que el tallo de una gavilla es canónicamente isomorfo al tallo de la pregavilla de la cual es asociada, entonces, por la Proposición 131

$$\mathscr{H}^p(\mathscr{F}^\bullet)_x = \lim_{x \in U} H^p\Gamma(U; \mathscr{F}^\bullet).$$

La cohomología conmuta con límites, por lo tanto

$$H^p\Gamma(U; \mathscr{F}^\bullet) = H^p(\lim x \in U\Gamma(U; \mathscr{F}^\bullet)) \cong H^p(\mathscr{F}^\bullet_x).$$

Lo que termina la demostración. □

Entre las hipótesis mas fuertes que garantizan la existencia de los funtores derivados, como vimos en la Sección 2.6, está la de tener *suficientes inyectivos*. La categoría de gavillas satisface esta propiedad debido principalmente a que la categoría de módulos lo hace.

Teorema 133. *La categoría* $\mathbf{Shv}_A(X)$ *tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Describiremos primero una forma general de construir gavillas. Si $\{M_x\}_{x\in X}$ es una familia de A-módulos con conjunto de índices el espacio X, asociamos una gavilla $M \in \mathbf{Shv}_A(X)$ usando la siguiente fórmula

$$\Gamma(U; M) = \prod_{x\in U} M_x.$$

Con los morfismos de restricción los inducidos por las proyecciones, es inmediato demostrar que M así definida es una gavilla.

Afirmación 134. *Existe un isomorfismo*

$$Hom_{\mathbf{Shv}_A(X)}(\mathscr{F}, M) \cong \prod_{x\in X} Hom(\mathscr{F}_x, M_x)$$

natural en $\mathscr{F}$.

Demostración. Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ y un morfismo $\phi : \mathscr{F} \to M$, este induce un morfismo

$$\phi_x : \mathscr{F}_x \to M_x$$

de manera que la propiedad universal del producto induce un único morfismo Φ definido como

$$\Phi(\phi) = (\phi_x)_{x\in X}.$$

Veamos que Φ es un isomorfismo, claramente es inyectivo por lo tanto lo único que resta por demostrar es la suprayectividad. En efecto, sea $(\phi_x)_{x\in X} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_x, M_x)$. Definimos el morfismo $\phi : \mathscr{F} \to M$ como

$$\phi_U(s) = (\phi_x(s_x))_{x\in X}$$

Este morfismo está bien definido y conmuta con los mapeos restricción, por lo tanto Φ es un isomorfismo, la demostración de que es funtorial es rutinaria. $\square$

Sea $\mathscr{F}$ una gavilla fija, como la categoría A-**Mod** tiene suficientes inyectivos entonces para todo $x \in X$ existe un módulo inyectivo I_x y un monomorfismo

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_x \xrightarrow{\phi_x} I_x.$$

Consideremos la colección (I_x) de los módulos inyectivos así construidos. La gavilla I obtenida de la definición hecha al comienzo de la demostración cumple que el morfismo inducido $\phi : \mathscr{F} \to I$ por la Afirmación anterior es un monomorfismo, como se ve inmediatamente al considerar los tallos. Falta por ver que I es inyectiva, sea

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de gavillas, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-, I)$, obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{F}', I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{F}'', I) \longrightarrow 0.$$

Por la Afirmación anterior esta sucesión es isomorfa a

$$0 \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathscr{F}'_x, I_x) \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_x, I_x) \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathscr{F}''_x, I_x) \longrightarrow 0,$$

la cual es exacta puesto que lo es en tallos, al ser I_x inyectiva. □

Por el teorema anterior hemos garantizado la existencia de los funtores derivados para funtores exactos por la izquierda. Sin embargo en la práctica las gavillas inyectivas son simplemente *demasiado grandes* para sernos de utilidad al calcular cohomología, por lo que recurriremos a una clase más grande de gavillas acíclicas, que resultarán *adaptadas* para el funtor de secciones globales.

Definición 135. Una gavilla $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ se dice *flasque*[1] si dado un abierto U de X y un abierto $V \subseteq U$, el morfismo restricción

$$\mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V)$$

es un epimorfismo.

En otras palabras, una gavilla es *flasque* si tiene la propiedad de *extensión* de secciones locales. Claramente, la restricción de una gavilla flasque a un abierto es de nuevo flasque. Observemos que la gavilla introducida en la demostración del Teorema 133 es por definición flasque, dado que los morfismos de restricción son los inducidos por las proyecciones.

Lema 136. *Toda gavilla inyectiva es flasque.*

Demostración. Sea I una gavilla inyectiva y consideremos el monomorfismo $i : I \to E$ en la gavilla inyectiva y flasque E del Teorema 133, tenemos el diagrama sólido siguiente:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & E \arrow[dl, dotted, "f"] \\ I & \end{tikzcd}$$

[1] Esta palabra proviene del francés, se optó por utilizarla debido a no poderse encontrar una traducción satisfactoria.

Por ser I una gavilla inyectiva, existe un morfismo $f : E \to I$ tal que $f \circ i = \text{id}$, por lo tanto para todo U abierto de X, f_U es un epimorfimos y tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \xrightarrow{r^E_{XU}} & E(U) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_U} \\ I(X) & \xrightarrow{r^I_{XU}} & I(U) \end{array}$$

Por ser E flasque el morfismo r^E_{XU} es epimorfismo. En consecuencia r^I_{XU} es un epimorfismo. □

Una de las mas convenientes características de las gavillas flasque es que estas rescatan la noción de suprayectividad en todos los abiertos, que, como vimos en la Proposición 129, no es válida en general.

Lema 137. *Si la sucesión siguiente es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\phi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

y además $\mathscr{F}$ es flasque, entonces para todo $U \subseteq X$ abierto la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathscr{F}; U) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U; \mathscr{G}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U; \mathscr{H}) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Basta con demostrarlo para $U = X$, por la Proposición 129 la primer flecha inducida es un monomorfismo, basta entonces con demostrar que ψ_X es un epimorfismo. Sea $s \in \Gamma(X; \mathscr{H})$ una sección, considere el conjunto

$$\Lambda = \{(U, t) : t \in \mathscr{G}(U) \ \text{ y } \ \Gamma(U; \psi)(t) = s|_U\}.$$

Ordenamos a Λ como sigue:

$$(U', t') \leq (U, t) \iff U' \subseteq U \ \text{ y } \ t|_{U'} = t'.$$

El conjunto Λ cumple con las hipótesis del Lema de Zorn, por tanto existe un elemento maximal (U, t). Supongamos que $U \neq X$ y sea $x \in X \setminus U$, entonces existe una vecindad abierta U' de X y una sección $t' \in \Gamma(U'; \mathscr{G})$ tal que $\psi_{U'}(t') = s|V$. Por lo tanto $t|_{U \cap U'} - t'|_{U \cap U'}$ es una sección en el núcleo de ψ, de forma que representa la imagen de una sección de $\mathscr{F}$ bajo ϕ. Si extendemos esta sección a una sección t'' sobre V' de $\mathscr{F}$, entonces $\phi(t'') + t'$ coincide con t en la restricción a $U \cap U'$, de manera que definen una sección en $U \cup U'$. Esto contradice la maximalidad de (U, t). □

Lema 138. *Si la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

y $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ *son flasque, entonces* $\mathscr{H}$ *es flasque.*

Demostración. Sea U un abierto de X, por el Lema 137 las filas del diagrama siguiente son exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}(U) \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

El diagrama es conmutativo por ser morfismos de gavillas y las columnas son exactas ya que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son flasques, una sencilla cacería en el diagrama[1] nos demuestra que la última flecha vertical es un epimorfismo. □

Teorema 139. *El funtor* $\Gamma(X; -) : \mathbf{Shv}_A(X) \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ *es exacto por la izquierda, la clase de gavillas flasque es adaptada para este funtor.*

Demostración. La exactitud por la izquierda de $\Gamma(X; -)$ se da por la Proposición 129. El Lema 136 nos da la primera condición de funtores adaptados, lo único que resta por demostrar es que las gavillas flasque son acíclicas para $\Gamma(X; -)$. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla flasque, primero demostremos que $H^1(X; \mathscr{F}) = 0$, considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{I} \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}(\varepsilon) \longrightarrow 0$$

donde $\mathfrak{I}$ es una gavilla inyectiva, por los lemas 138 y 136 tenemos que la gavilla $\mathscr{H} = \operatorname{coker}(\varepsilon)$ es flasque. Tomemos la sucesión exacta larga inducida

$$H^0(X; \mathfrak{I}) \longrightarrow H^0(X; \mathscr{H}) \longrightarrow H^1(X; \mathscr{F}) \longrightarrow H^1(X; \mathfrak{I}) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathfrak{I}$ es inyectiva, tenemos que $H^1(X; \mathfrak{I}) = 0$. Por el Lema 137, también $H^0(X; \mathscr{H}) = 0$, por tanto $H^1(X; \mathscr{F}) = 0$ como se quería demostrar, ver que $H^n(X; \mathscr{F}) = 0$ para $n > 1$ se sigue por inducción. □

Toda la idea de introducir esta clase de gavillas es que existe una *resolución canónica*, a saber, la resolución de Godemént, que dada una gavilla arbitraria nos produce una gavilla flasque. La construcción de esta resolución es muy similar a la dada en la demostración del Teorema 133.

[1] Traducción libre del inglés *diagram chasing*.

Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, definimos la gavilla $G^0\mathscr{F}$ como la gavilla asociada al conjunto de módulos $\{\mathscr{F}_x\}_{x\in X}$. Tenemos así un encaje natural $\epsilon : \mathscr{F} \to G^0\mathscr{F}$, sea $\mathscr{F}^1$ el conúcleo de ϵ. Definamos

$$G^1\mathscr{F} = G^0\mathscr{F}^1 = G^0\mathrm{coker}(\epsilon),$$

cada una de las gavillas así obtenidas es flasque, obtenemos una resolución

$$0 \longrightarrow G^0\mathscr{F} \longrightarrow G^1\mathscr{F} \longrightarrow G^2\mathscr{F}$$

por flasques, esta resolución es funtorial debido a que asociar $G^0\mathscr{F}$ es funtorial.

Definición 140. Definimos la cohomología de X con coeficientes en la gavilla $\mathscr{F}$ como

$$H^p(X;\mathscr{F}) = R^p\Gamma(X;\mathscr{F}) = H^p(R\Gamma(X;\mathscr{F})).$$

Donde estamos identificando a $\mathscr{F}$ con su complejo concentrado en grado 0.

Observación. En la Definición de cohomología pudimos haber procedido de la manera usual tomando una resolución inyectiva (o flasque), la independencia de la resolución, i.e. dadas dos resoluciones estas son homotópicas, es inmediata por lo desarrollado en la Sección 2.5

3.2.1. Calculando Cohomología

En un tratamiento mas sistemático de la cohomología de gavillas, que por los objetivos de esta tesis no tocaremos, existen otras maneras en un principio más sencillas para poder calcular cohomología de gavillas. Entre estas quizá la mas interesante es la Cohomología de Čech, no hablaremos mas de esta porque no la utilizaremos. Véase (10) o (14) para más detalles.

De la misma manera, existen diversos Teoremas de comparación para distintas teorías de cohomología, en particular tenemos el siguiente Teorema con respecto a la Cohomología Singular.

Teorema 141. *Sea X un espacio localmente contraible, existen isomorfismos naturales*

$$H^p(X;A_X) \cong H^p(X;A)$$

Donde la cohomología de la derecha es la cohomología singular con valores en el anillo A. El isomorfismo es válido para cohomología con soportes compactos[1]*.*

Demostración. Cónsulte (26), pp. 114. Teorema 4.14. □

3.2.2. Hipercohomología

La hipercohomología de un complejo de gavillas es tan importante y sutil que el mismo Verdier desarrolla su tesis (30) como un intento de formalizarla.

[1] Véase 3.3.1

Definición 142. El funtor $\Gamma(X; -)$ se extiende de manera canónica a la categoría $\mathbf{Shv}^+_A(X)$, definiendo un funtor

$$\Gamma(X; -) : \mathbf{Shv}^+_A(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}^+.$$

La *hipercohomología* de un complejo de gavillas $\mathscr{F}^\bullet$ es

$$\mathbb{H}^p(X; \mathscr{F}^\bullet) = R^p\Gamma(X; \mathscr{F}^\bullet) = H^p(R\Gamma(X; \mathscr{F})).$$

De la Definición notemos que si $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, entonces $\mathbb{H}^p(X; \mathscr{F}) = H^p(X; \mathscr{F})$. En una forma un poco mas tangible podemos utilizar una *resolución de Cartan-Eilenberg* $\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{I}^{\bullet,\bullet}$ y después calcular los funtores derivados a el complejo total asociado. Las resoluciones de Cartan-Eilenberg son muy utilizadas en Álgebra Homológica y un desarrollo sistemático de las mismas puede ser encontrado en cualquier libro del tema, por ejemplo (31).

3.2.3. Los funtores f_* y f^*

Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua.

Definición 143. Definimos el funtor *imagen directa* $f_* : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(Y)$ como sigue:

- Objetos: Dada una gavilla $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ definimos $f_*\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(Y)$ como

  $$f_*\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}(f^{-1}(U))$$

  para todo abierto U de Y, con las restricciones obvias es inmediato que esta construcción nos define una gavilla.

- Si $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ es un morfismo de gavillas, definimos

  $$f_*\phi : f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{F}'$$

  mediante $(f_*\phi)_U = \phi_{f^{-1}(U)}$.

El funtor imagen directa juega un papel preponderante cuando tratamos de *relativizar* la noción de cohomología de gavillas.

Ejemplo 144. *Sea $f : X \to \{x\}$ la aplicación constante, recordemos que $\mathbf{Shv}_A(\{x\}) \cong A$-$\mathbf{Mod}$. Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, entonces $f_*\mathscr{F} \in A$-$\mathbf{Mod}$. Claramente*

$$f_*\mathscr{F}(\{x\}) = \mathscr{F}(X) = \Gamma(X; \mathscr{F}),$$

por lo tanto el funtor f_* en este caso nos recupera la definición de las secciones globales de una gavilla. Así las cosas obtenemos que

$$Rf_* = R\Gamma.$$

El funtor f_* como fue definido juega el papel de *pushforward* de una gavilla, la operación *dual* corresponde al *pullback* de una gavilla. Si seguimos la filosofía usual de pensar una gavilla como una generalización de un haz podría parecer que esta definición sería igual de sencilla, pero esto no ocurre, al menos no inmediatamente. El contexto propio para recuperar la Definición "intuitiva"de pullback está en el espacio *étale* pero optaremos por definirla de manera algebraica, a expensas de perder algo de intuición[1].

Definición 145. Definimos el funtor *imagen inversa* $f^* : \mathbf{Shv}_A(Y) \to \mathbf{Shv}_A(X)$ como sigue:

- En Objetos: Dada una gavilla $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}_A(Y)$ definimos la *pregavilla* $f^{-1}\mathscr{G}$ como

$$f^{-1}\mathscr{G}(U) = \lim_{V:f(U)\subseteq V} \mathscr{G}(V)$$

  Si $U \subseteq U'$, entonces $f(U) \subseteq f(U')$, de manera que naturalemente definimos un morfismo en los límites. Definimos $f^*\mathscr{G}$ como la *gavilla asociada* a $f^{-1}\mathscr{G}$.

- En Morfismos: Los inducidos en $f^{-1}\mathscr{G}$ por el límite directo, compuestos con el funtor de gavillización.

Nota. La elección de f^* en este trabajo a sido realizada para poder hacer claro que este resultará ser un *adjunto* de f_*, aunque es útil advertir al lector que este funtor está definido generalmente en *espacios anillados*, por ejemplo, en (14) se define primero $f^{-1}\mathscr{G}$ como se definió aquí $f^*\mathscr{G}$ y después define $f^*\mathscr{G}$ como:

$$f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

Donde $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_Y$ denotan a las gavillas estructurales de X y de Y respectivamente. Por otro lado, si consideramos equipar a todos nuestros espacios como espacios anillados usando la gavilla constante con valores en A, la gavilla que definimos y la de (14) son *canónicamente isomorfas* y por lo tanto no caemos en ambigüedades.

Proposición 146. *El funtor f^* es exacto.*

Demostración. Veamos una descripción explícita de los tallos de la imágen inversa, dado $x \in X$ y recordando que los tallos son preservados bajo el proceso de gavillización obtenemos

$$(f^*\mathscr{G})_x = \lim_{x\in U}(f^*\mathscr{G})(U) = \lim_{x\in U}(\lim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)).$$

[1]Es interesante notar que si bien el pullback de haces vectoriales es muy sencillo de definir, por otro lado, el *pushforward* de haces vectoriales por lo general no está definido, la obstrucción vista en el contexto de gavillas es que no necesariamente la imagen directa de una gavilla localmente libre vuelve a ser localmente libre.

Utilicemos la descripción concreta de los tallos, un elemento de $(f^*\mathscr{G})_x$ corresponde así a una clase de equivalencia $[s, U]$ donde U es una vecindad de x y $s \in f^*\mathscr{G}(U)$. Así mismo, s corresponde a una clase $[t, V]$ donde $f(U) \subset V$ y $t \in \mathscr{G}(V)$, en otras palabras, la clase está determinada por un elemento $[t, V]$ tal que $f(x) \in V$. En conclusión

$$(f^*\mathscr{G})_x \cong \mathscr{G}_{f(x)}.$$

Con esta descripción de los tallos la Proposición se sigue. □

La exactitud del funtor f^* y el Lema 92 implican que el funtor f^* pasa a las categorías derivadas, esta es la razón de que en general se use la misma notación f^* para referirse al funtor derivado inducido. El Lema que sigue es de carácter técnico y no lo demostraremos por completo, limitándonos a construir de manera explícita las respectivas unidades y counidades de la adjunción, que sí utilizaremos en lo subsecuente.

Lema 147. *El funtor f^* es adjunto por la izquierda a f_*.*

Demostración. Si $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}_A(Y)$, entonces tenemos que $\Gamma(U, f_*f^*\mathscr{F}) = \Gamma(f^{-1}(U), f^*\mathscr{F})$. Sabemos que $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$ por lo tanto, la propiedad universal del colímite induce un morfismo

$$\mathscr{F}(U) \longrightarrow \lim_{f(f^{-1}(U))\subseteq V} \mathscr{F}(V) = \Gamma(f^{-1}(U), f^{-1}\mathscr{F}).$$

Esto nos define un morfismo entre pregavillas, componiendo con la gavillización de $f^{-1}\mathscr{F}$ inducimos una transformación natural

$$\eta : \mathrm{id} \longrightarrow f_*f^*.$$

Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ y $V \subseteq X$ es un abierto, entonces

$$f^{-1}f_*\mathscr{F}(V) = \lim_{V':f(V)\subseteq V'} f_*\mathscr{F}(V') = \lim_{V':f(V)\subseteq V'} \mathscr{F}(f^{-1}(V'))$$

Si $f(V) \subseteq V'$, entonces $V \subseteq f^{-1}(V')$, por lo tanto se induce naturalmente un morfismo $f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ y usando la propiedad universal de la gavillización existe un único morfismo $\epsilon_{\mathscr{F}}$ tal que el diagrama a continuación conmuta

$$\begin{tikzcd}
(f^{-1}f_*\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F} \\
f^*f_*\mathscr{F} \arrow[ur, "\varepsilon_{\mathscr{F}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde la flecha vertical es la de gavillización. Se verifica (véase (18) pp.98) que η y ε corresponden a la unidad y counidad de la adjunción. □

Corolario 148. *El funtor f_* es exacto por la izquierda y preserva inyectivos.*

Demostración. Se sigue de propiedades formales de adjunciones que, si un funtor admite un adjunto por la derecha, entonces el funtor es exacto por la izquierda (cf. (19)) . Sea $\mathcal{I}$ una gavilla inyectiva sobre X. Por la adjunción entre f_* y f^*:

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathcal{I}) \cong \operatorname{Hom}(f^*\mathscr{G}, \mathcal{I}).$$

Si f^* es exacto, entonces $\operatorname{Hom}(-, f_*\mathcal{I})$ es exacto y por lo tanto $f_*\mathcal{I}$ es inyectiva. □

Por el Corolario 148 el funtor f_* es *exacto por la izquierda*, así que admite un funtor derivado derecho, sus funtores derivados clásicos admitirán una descripción bastante sencilla.

Proposición 149. *La gavilla $R^p f_*\mathscr{F}$ es la gavilla asociada a la pregavilla*

$$U \mapsto H^p(f^{-1}(U); \mathscr{F}|_{f^{-1}(U)})$$

Demostración. La categoría $\mathbf{Shv}_A(X)$ tiene suficientes inyectivos (cf. Teorema 133) por lo tanto consideremos una resolución inyectiva $\mathscr{F} \to \mathcal{I}^\bullet$, entonces

$$R^p f_*\mathscr{F} = H^p(f_*\mathcal{I}^\bullet)$$

Por la Proposición 131 tenemos que la gavilla de la derecha es la gavilla asociada a la pregavilla

$$U \mapsto H^p\Gamma(U; f_*\mathcal{I}^\bullet)$$

Lo que termina la demostración. □

3.3. Cohomología con soportes compactos

El propósito de esta Sección es discutir una teoría de cohomología *con soportes*, vamos a ver diversas similitudes con la cohomología de gavillas discutida anteriormente. Análogos de esta teoría en el contexto de la cohomología de De Rahm ó la cohomología singular pueden ser ya familiares al lector (por ejemplo, en los libros (4) y (11)). Necesitaremos para poder introducir esta teoría de cohomología, que nuestro espacio satisfaga ciertas propiedades de "finitud".

Definición 150. Un espacio X que es de Hausdorff se dice localmente compacto si satisface cualesquiera de las condiciones equivalentes:

1. Todo punto $x \in X$ admite una base de vecindades compactas, esto es, para toda vecindad abierta U de x existe un compacto K tal que $K \subseteq U$.

2. Todo punto admite una vecindad compacta.

Esta definición es de lo mas general, válida para variedades subanalíticas y para variedades topológicas por ejemplo. Sin embargo existen varios espacios no necesariamente patológicos[1] que no cumplen con esta condición. En este punto comenzaremos a alejarnos del punto de vista "geometro-algebraico" de la teoría de gavillas (¡la topología de Zariski no es de Hausdorff!), sin embargo es posible, con un mayor esfuerzo, recuperar casi en su totalidad toda la teoría aquí discutida para esquemas, hablaremos mas de esto al final de la sección.

En lo subsecuente, desarrollaremos la teoría con la hipótesis de que *todos los espacios a consideración son localmente compactos.*

Definición 151. Una gavilla $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ se dice *soft* si, para todo cerrado $A \subseteq X$ el morfismo de restricción

$$\mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{F}(A) = \lim_{U \supset A} \mathscr{F}(U)$$

Es suprayectivo.

Ejemplo 152. *El Lema de Urysohn en Topología General (cf. (6)) nos dice que, en un espacio paracompacto X, la gavilla $\mathcal{C}_X$ de funciones continuas a $\mathbb{R}$ es soft.*

Ejemplo 153. *Toda gavilla flasque es soft como se puede ver inmediatamente, en particular, toda gavilla inyectiva es soft. Tenemos una cadena de implicaciones*

$$\textit{Inyectiva} \Longrightarrow \textit{Flasque} \Longrightarrow \textit{Soft.}$$

Además notemos que si el espacio es localmente compacto, entonces la restricción de una gavilla soft a un espacio localmente cerrado será de nuevo soft.

Lema 154. *Sea X un espacio localmente compacto (por tanto de Hausdorff). Una gavilla $\mathscr{F}$ es soft si y solo si es c-soft, i.e. para todo $K \subseteq X$ compacto, el morfismo de restricción*

$$\mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{F}(K) = \lim_{U \supset K} \mathscr{F}(U)$$

es suprayectivo.

Demostración. Si el espacio X es de Hausdorff, entonces todo compacto es automáticamente cerrado, por lo tanto una gavilla soft es automáticamente c-soft. Para demostrar el recíproco notemos que por ser localmente compacto existe una base de vecindades compactas, de forma que el límite de cerrados se puede considerar en compactos. □

Corolario 155. *Si $h : W \to X$ es la inclsión de un espacio localmente cerrado y $\mathscr{F}$ una gavilla soft en X, entonces la gavilla $h^*\mathscr{F}$ es soft.*

[1]Por ejemplo, el espacio $\mathbb{Q}$ con la topología heredada por los reales o bien cualquier espacio vectorial normado cuya dimensión no sea finita.

Demostración. Subespacios localmente cerrados de un espacio X son localmente compactos, se sigue del Lema 154. $\square$

En particular, el Lema 154 tiene como Corolario que las gavillas soft se preservan bajo el funtor h^*, cuando $h : W \to X$ es la inclusión de un espacio localmente cerrado.

3.3.1. Secciones con soportes

En Geometría, es muy importante el hecho de saber que una función tenga *soporte acotado*, esto se ve claro en cualquier construcción que tenga que ver con *particiones de la unidad*, por ejemplo. Veremos consecuencias de tener soportes acotados en el caso de gavillas.

Definición 156. Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ una gavilla y $s \in \mathscr{F}(U)$ una sección, definimos el *soporte* de s en U como el conjunto:

$$\mathrm{Supp}(s) = \{x \in U : s_x \neq 0\}$$

donde $s_x \in \mathscr{F}_x$ es la imagen de s bajo el morfismo al tallo.

Observación. El soporte de una sección es *cerrado* en U.

Definición 157. Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, definimos las *secciones con soportes compactos* como

$$\Gamma_c(X;\mathscr{F}) = \{s \in \Gamma(X;\mathscr{F}) : \mathrm{Supp}(s) \text{ es compacto en } X\}.$$

Extendemos esta definición de manera natural a un funtor

$$\Gamma_c(X;-) : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Ab}.$$

Como en el Teorema 139 tenemos que el funtor de secciones con soportes compactos es un funtor *exacto por la izquierda*.

Definición 158. La cohomología con *soportes compactos* del espacio X con coeficientes en $\mathscr{F}$ se define como los funtores derivados clásicos de $\Gamma_c(X;-)$, es decir

$$H^p_c(X;\mathscr{F}) = R^p\Gamma_c(X;\mathscr{F})$$

Para ver la semejanza con respecto al caso de gavillas flasque, veamos un análogo al Lema 137.

Lema 159. *Sea* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *una sucesión exacta de gavillas. Si* $\mathscr{F}'$ *es soft, entonces para todo abierto* $U \subset X$ *la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(U;\mathscr{F}') \xrightarrow{\phi} \Gamma_c(U;\mathscr{F}) \xrightarrow{\psi} \Gamma_c(U;\mathscr{F}'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Basta con demostrar la suprayectividad de la sucesión para el caso $U = X$. Sea $s \in \Gamma_c(X;\mathscr{G})$ y K una vecindad compacta de $\mathrm{Supp}(s)$. Por la suprayectividad de ψ, para toda $x \in K$ existen una vecindad compacta K_x con interior U_x y una sección t_x tales que $\psi(t_x) = s|_{U_x}$. Por ser K compacto existe un número finitos de compactos $K_1, \ldots, K_n$ cuyos interiores cubren a todo K y de secciones t_i tales que $\psi(t_i) = s|_{U_i}$. Queremos poder *pegar* las secciones a una sección de $\mathscr{F}$ en K, por recursión basta con demostrar el caso $n = 2$. Definamos $v = t_1|_{U_1\cap U_2} - t_2|_{U_1\cap U_2}$, tenemos que

$$\psi(v) = \psi(t_1|_{U_1\cap U_2} - t_2|_{U_1\cap U_2}) = \psi(t_1|_{U_1\cap U_2}) - \psi(t_2|_{U_1\cap U_2}) = s|_{U_1\cap U_2} - s|_{U_1\cap U_2} = 0.$$

Por ser la sucesión exacta $v \in \mathrm{Im}(\phi) = \ker(\psi)$, así que $v = \phi(v')$ para alguna $v' \in \Gamma_c(K_1 \cap K_2;\mathscr{F})$. Por ser $\mathscr{F}'$ soft, podemos extender la sección v' a una sección v'' en K_1. Si definimos $t_1' = \phi(v'') + t_2$, entonces por construcción las secciones t_1' y t_2 coninciden en $U_1 \cap U_2$ y definen una sección t_K en K. Falta extender t_K a todo X. Tenemos que $\psi(t_K|_{\partial K}) = 0$, de manera que existe $u_K \in \mathscr{F}'$ tal que $\phi(u_K) = t_K$, como $\mathscr{F}'$ es soft entonces existe una sección global u que extiende a u_K. Definiendo $t = t_K - \phi(u)|_{\partial K}$ obtenemos una sección global tal que $\psi(t) = s$. $\square$

3.3.2. El funtor $f_!$

En esta sección construiremos un funtor $f_!$ que se relacionará con las gavillas softs en analogía a la relación de f_* y las gavillas flasque.

Definición 160. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, definimos la pregavilla *imagen directa con soportes propios* $f_!\mathscr{F}$ como sigue: Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces

$$f_!\mathscr{F}(U) = \{s \in (f_*\mathscr{F})(U) : f|_{\mathrm{Supp}(s)} \text{ es propia}\}.$$

Observación. La pregavilla $f_!\mathscr{F}$ es una subpregavilla de $f_*\mathscr{F}$. Además si f es propia, entonces son isomorfas.

Proposición 161. *La pregavilla $f_!\mathscr{F}$ es una gavilla.*

Demostración. Sea $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de $U \subseteq Y$ y sean $s_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda)$ secciones, entonces existe una única sección $s \in f_*\mathscr{F}(U)$ que extiende a s_λ. Basta entonces con demostrar que $s \in f_!(\mathscr{F})$. En otras palabras, queremos ver que $f|_{\mathrm{Supp}(s)} : \mathrm{Supp}(s) \to U$ es propia. Sea $K \subseteq U$ compacto, claramente $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta de K, por lo tanto podemos extraer una subcubierta finita $(U_i)_{i=1}^n$. Como Y es localmente compacto entonces existe $(K_i)_{i=1}^n$ una cubierta finita de K tal que $K_i \subseteq U_i$ es compacto para toda i, por lo que $f^{-1}(K_i) \cap \mathrm{Supp}(s)$ es compacto y por tanto

$$f^{-1}(K) \cap (\bigcup_{\lambda} \mathrm{Supp}(s_\lambda)) = f^{-1}(K) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Supp}(s_i) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f^{-1}(K) \cap \mathrm{Supp}(s_i) \right)$$

es compacto, pues es la unión finita de compactos. En conclusión $s \in f_! \mathscr{F}$. $\square$

La Proposición 161 nos perimte extender la aplicación $f_!$, a un funtor $f_! : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(Y)$.

Proposición 162. *El tallo de $f_! \mathscr{F}$ en un punto $y \in Y$ es isomorfo a $\Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$.*

Demostración. Definamos

$$\varphi : (f_! \mathscr{F})_y \to \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)}).$$

Sea $s \in f_!(\mathscr{F})_y$, entonces s está representado por (t, U) donde $t \in f_!(\mathscr{F})(U)$ y U es abierto. Como $\mathrm{Supp}(t|_{f^{-1}(y)}) = \mathrm{Supp}(t) \cap f^{-1}(y)$ entonces $t|_{f^{-1}(y)} \in \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}_{f^{-1}(y)})$. Definimos $\phi(s) = t|_{f^{-1}(y)}$. Esto no depende del representante pues si escogemos (t', U') otro representante, entonces existe una vecindad $W \subseteq U \cap U'$ tal que $t|_W = t'|_W$, en particular $t|_{f^{-1}(y)} = t'|_{f^{-1}(y)}$.

Demostremos que φ es inyectiva: Supongamos que $\varphi(s) = 0$, tenemos que $t|_{f^{-1}(y)} = 0$ y por tanto $\mathrm{Supp}(t) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$, por lo que $y \notin f(\mathrm{Supp}(t))$. Por otro lado, $f|_{\mathrm{Supp}(t)}$ es una aplicación propia de espacios localmente compactos, así que es cerrado y por lo tanto $f(\mathrm{Supp}(t))$ es cerrado en Y, por lo tanto su complemento es una vecindad de y, escogiendo esta vecindad concluimos que $s = 0$ en el tallo. Demostremos que φ es suprayectivo, sea $s \in \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$ y sea $K = \mathrm{Supp}(s)$, por definición, existe una vecindad U de K y sección $t \in \Gamma(U; \mathscr{F})$ tal que $t|_K = s|_K$, como el soporte es un cerrado, entonces podemos suponer que $t|_{U \cap f^{-1}(y)} = s|_{U \cap f^{-1}(y)}$. Como el espacio X es localmente compacto, existe una vecindad V de U tal que $\overline{V} \subseteq U$ es compacta. Claramente, $y \notin f(\overline{V} \cap \mathrm{Supp}(t) \setminus V)$, por lo tanto existe una vecindad abierta W de x tal que

$$f^{-1}(W) \cap \overline{V} \cap \mathrm{Supp}(t) \subseteq V.$$

En consecuencia, es posible definir una sección $\widetilde{s} \in \Gamma(f^{-1}(W); \mathscr{G})$ que cumpla las siguientes condiciones

- $\widetilde{s}|_{f^{-1}(W) \setminus (\mathrm{Supp}(t) \cap \overline{V})} = 0$.
- $\widetilde{s}|_{f^{-1}(W) \cap V} = t|_{f^{-1}(W) \cap V}$.

Por construcción $\widetilde{s} \in \Gamma_c(f^{-1}(W) \cap \mathrm{Supp}(t) \cap \overline{V}; \mathscr{F})$ y $\varphi(\widetilde{s}) = s$. $\square$

Corolario 163. *El tallo en un punto $y \in Y$ de los funtores derivados clásicos es*

$$(R^p f_! \mathscr{F})_y \cong H^p_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}).$$

Demostración. Inmediata de la Proposición 162. $\square$

Ejemplo 164. *En analogía al funtor f_*, tendremos que el funtor $f_!$ generaliza la* cohomología con soportes compactos. *En efecto, consideremos la aplicación constante $cte : X \to \{pt\}$, para toda gavilla $\mathscr{F}$ en $\mathbf{Shv}_A(X)$ tenemos*

$$\begin{aligned} f_!\mathscr{F}(\{pt\}) &= \{s \in (\mathscr{F})(X) : f|_{Supp(s)} \ \text{ es propia}\} \\ &= \{s \in \Gamma(X; \mathscr{F}) : Supp(s) \ \text{ es compacto en } X\} \\ &= \Gamma_c(X; \mathscr{F}). \end{aligned}$$

Para la siguiente Proposición haremos uso de un Lema de carácter *técnico* en la Teoría de Gavillas.

Lema 165. *Sea $\mathscr{F} = \varinjlim_\lambda \mathscr{F}_\lambda$ el colímite filtrante de gavillas $\mathscr{F}_\lambda \in \mathbf{Shv}_A(X)$. Si el espacio X es compacto, entonces la aplicación canónica*

$$\varinjlim_\lambda \mathscr{F}_\lambda(X) \longrightarrow \mathscr{F}(X)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Puede encontrarse en (10), Teorema 3.10.1 página 162. $\square$

Proposición 166. *Los funtores derivados clásicos $R^n f_!$ conmutan con colímites filtrantes. En particular, el funtor $\Gamma_c(X; -)$ conmuta con colímites filtrantes.*

Demostración. Inmediata del Corolario 163 y el Lema 165. $\square$

Proposición 167. *El funtor $f_!$ es exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ una aplicación inyectiva de gavillas. Demostremos que $0 \to f_!\mathscr{F} \to f_!\mathscr{F}'$ es inyectiva. Esto es equivalente a demostrar que para todo $y \in Y$ la aplicación inducida en tallos

$$0 \longrightarrow (f_!\mathscr{F})_y \longrightarrow (f_!\mathscr{F}')_y$$

es inyectiva. Por la proposición 162 tenemos que la sucesión anterior es isomorfa a

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)}) \longrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}'|_{f^{-1}(y)})$$

y el funtor $\Gamma_c(f^{-1}(y); -)$ es exacto izquierdo, lo que termina la demostración. $\square$

Proposición 168. *El funtor $f_!$ aplicado a gavillas soft es exacto.*

Demostración. Supongamos que

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de gavillas soft. Por la Proposición 162 el morfismo inducido en tallos es

$$\Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}'|_{f^{-1}(y)}) \longrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)}) \longrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}''|_{f^{-1}(y)}).$$

Como la restricción de una gavilla soft a un cerrado vuelve a ser soft, tenemos que $\mathscr{F}'|_{f^{-1}(y)}$ es soft. Concluimos por el Lema 159. □

Corolario 169. *Las gavillas soft son acíclicas para el funtor $\Gamma_c(X; -)$.*

Demostración. La Proposición 168 demuestra que

$$H^1_c(X; \mathscr{F}) = 0.$$

Si $\mathscr{F}$ es soft, la última afirmación se sigue *mutatus-mutandis* al Teorema 139. □

Corolario 170. *La clase de gavillas soft es adaptada para el funtor $f_!$.*

Demostración. Las gavillas inyectivas son soft, por lo tanto se sigue del Corolario 169. □

Lema 171. *Si $\mathscr{F}$ es soft, entonces la gavilla $f_!\mathscr{F}$ es soft.*

Demostración. Demostremos que la gavilla es c-soft. Si K es un compacto en Y y $s \in f_!\mathscr{F}(K)$, entonces existe un representante de s definido en una vecindad abierta U de K, restringiendo a una vecindad abierta U con cerradura compacta obtenemos una sección t en X que podemos extender, puesto que $\mathscr{F}$ es soft, a una sección $\widetilde{s}$ en X con soporte compacto. La sección así obtenida vive en la misma clase de equivalencia de s por construcción. □

3.4. Recollements

Veremos como podemos *descomponer* la categoría derivada de gavillas de un espacio con respecto a las categorías derivadas de un cerrado y su complemento. Específicamente, daremos propiedades importantes que cumplen los funtores $f_!, f_*, f^*$ en el caso en que f es la inclusión de un abierto o un cerrado. Podremos construir un adjunto para $f_!$ en este caso particular.

3.4.1. h_* y h^*

Desarrollemos el *contexto* en el que se realiza el recollement, y su relación con los dos funtores aquí definidos.

Proposición 172. *Sea $U \subseteq X$ un abierto y $Z = X \setminus U$ su complemento, sean*

$$Z \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$$

Las inclusiones en X. Se satisface:

(I) *El funtor $j^* : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(U)$ es exacto.*

(II) *El funtor $j_* : \mathbf{Shv}_A(U) \to \mathbf{Shv}_A(X)$ es exacto por la izquierda y preserva inyectivos.*

(III) *El funtor $i^* : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(Z)$ es exacto.*

(IV) *El funtor $i_* : \mathbf{Shv}_A(Z) \to \mathbf{Shv}_A(X)$ es exacto y preserva inyectivos.*

Demostración. Los incisos (I) y (III) son consecuencia de la Proposición 146. El inciso (II) se sigue del Corolario 148. Para demostrar (IV), describiremos sus tallos:

$$(i_*\mathscr{F})_x = \lim_{x \in U} \Gamma(U \cap Z; \mathscr{F}) = \begin{cases} \mathscr{F}_x & \text{si} \quad x \in Z \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es inmediato que i_* es exacto, además por el Corolario 148, preserva inyectivos. □

Observación. En el contexto descrito por la Proposición 172 es posible dar explícitamente los morismos de adjunción:

- La unidad $\eta_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to j_* j^* \mathscr{F}$ está dada, para cada abierto V de X, por $\eta_{\mathscr{F},V}(s) = s|_{U \cap V}$.
- La counidad $\varepsilon_{\mathscr{F}} : j^* j_* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ es un isomorfismo, como se verifica directamente en los tallos.
- La unidad $\eta_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to i_* i^* \mathscr{F}$ corresponde a *restringir el soporte* de $\mathscr{F}$. Diremos un poco mas de este morfismo mas adelante.
- La couinidad $\varepsilon_{\mathscr{F}} : i^* i_* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ es un isomorfismo, como se verifica directamente en los tallos.

3.4.2. $h^!$ y $h_!$

Estudiemos un caso *particular* del funtor $f_!$ y del funtor $f^!$, el cual discutiremos mas adelante, en términos del contexto de la Proposición 172. Por comodidad, comenzaremos especializando el funtor $f_!$ al caso en que W es un conjunto localmente cerrado, i.e. $W = Z \cap U$, donde Z es cerrado y U abierto.

Proposición 173. *Para toda gavilla $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(W)$, las secciones de $h_!\mathscr{F}$ en un abierto U de X son*

$$\Gamma(U; h_!\mathscr{F}) = \{s \in \Gamma(W \cap U; \mathscr{F}) = \Gamma(U; h_*\mathscr{F}) : \mathit{Supp}(s) \ \ \text{es un cerrado relativo a } \ U\}.$$

Demostración. Calculando tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(U; h_!\mathscr{F}) &= \{s \in (h_*\mathscr{F})(U) : h|_{\mathrm{Supp}(s)} \ \text{ es propia}\} \\ &= \{s \in \Gamma(W \cap U; \mathscr{F}) = \Gamma(U; h_*\mathscr{F}) : h|_{\mathrm{Supp}(s)} \ \text{ es propia}\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto lo que tenemos que demostrar es que la inclusión $h|_{\mathrm{Supp}(s)}$ es propia si y solamente si $A = \mathrm{Supp}(s)$ es cerrado relativo a U. Supongamos que A es cerrado relativo a U, tenemos que la intersección de todo compacto en X con A es compacto en W, por lo tanto $h|_A$ es propia. Recíprocamente supongamos que $h|_A$ es propia, si demostramos que $h|_A$ es cerrada terminamos, por ser X localmente compacto, basta con demostrar que para todo subespacio B de W y todo compacto K de X, se tiene que $h(B) \cap K$ es cerrado. Como f es propia tenemos que $K \cap W$ es compacto. Es consecuencia de un Lema de Topología General (cf. (6)) que toda aplicación continua $f : X \to Y$ donde X es compacto y Y Hausdorff es cerrada. Esto termina la demostración. □

De la definición de $h_!$ obtenemos un monomorfismo de $h_!\mathscr{F}$ a $h_*\mathscr{F}$. Nótese que:

$$(h_!\mathscr{F})_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & \text{si } \ x \in W \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 174. *En el caso particular en que W es un abierto, $h_!\mathscr{F}$ toma la descripción siguiente: Si V es un abierto de X, entonces*

$$h_!\mathscr{F}(V) = \begin{cases} \mathscr{F}(V) & \textit{si } \ V \subseteq W \\ \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

A este caso particular se le conoce en la literatura como extender la gavilla $\mathscr{F}$ con ceros. En particular obsérvese que extender un abierto por ceros produce un isomorfismo, cuya inversa es la restricción de secciones:

$$\Gamma_c(U; j^*\mathscr{F}) \cong \Gamma_c(X; j_!j^*\mathscr{F})$$

Esto no es posible si trabajamos con el funtor $\Gamma(X;-)$. Analicemos el caso en que W resulte ser cerrado, si $s \in \Gamma(U \cap W; \mathscr{F})$, entonces Supp$(s)$ es un cerrado relativo a $U \cap W$ y por lo tanto lo es para U al ser W cerrado, de la definición de $h_!$ obtenemos que este funtor coincidirá con h_*. Como en el caso anterior, el funtor $h_!$ actuará como inverso para la restricción, obtenemos que

$$\Gamma_c(Z; h^*\mathscr{F}) \cong \Gamma_c(X; h_! h^*\mathscr{F}) = \Gamma(X; h_* h^*\mathscr{F}).$$

Ahora, como en la Sección anterior, construiremos un adjunto para $h_!$, en este caso particular su descripción es bastante explícita, sin embargo, mas adelante veremos que el caso general es mucho mas complicado.

Definición 175. Sea $W \subseteq X$ un conjunto localmente cerrado y $h : W \to X$ la inclusión. Definimos el funtor $h^! : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(W)$ como sigue:

- En Objetos: Construimos una gavilla auxiliar $\mathscr{F}^W$ cuyas secciones para cada abierto U de X son
$$\Gamma(U; \mathscr{F}^W) = \{s \in \Gamma(U; \mathscr{F}) : \mathrm{Supp}(s) \subseteq W\}.$$
Utilizando las restricciones dadas por $\mathscr{F}$ esto nos define una gavilla en X. Escribimos
$$h^!\mathscr{F} = h^*\mathscr{F}^W.$$
- En Morfismos: Los inducidos por $\mathscr{F}$ y el funtor h^*.

El Lema a continuación es un caso particular del Corolario 216, el cual demostraremos más adelante y por tanto omitiremos la demostración del Lema a continuación, observe que para la adjunción no hay necesidad de pasar a la Categoría Derivada.

Lema 176. *El funtor $h^!$ es adjunto por la izquierda a $h_!$.*

Demostración. Véase (18), pp. 108. □

Corolario 177. *El funtor $h^!$ es exacto por la izquierda y preserva inyectivos.*

Demostración. La demostración se sigue de propiedades de los adjuntos, análogamente al Corolario 148. □

Proposición 178. *Si U es un abierto, entonces $j^!\mathscr{F} = j^*\mathscr{F}$*

Demostración. Por definición, la inclusión $\mathscr{F}^U \to \mathscr{F}$, por el Corolario 177 nos define un monomorfismo $j^!\mathscr{F} \to j^*\mathscr{F}$. En tallos:

$$(j^!\mathscr{F})_x = (j^*\mathscr{F}^U)_x \cong \mathscr{F}^U_x = \lim_{x \in V} \mathscr{F}^U(V) = \lim_{x \in V} \mathscr{F}(V) = \mathscr{F}_x.$$

Observese que el isomorfismo está inducido por la inclusión, de manera que el monomorfismo es un isomorfismo. □

3.4.3. Subespacios cerrados y abiertos

Todas estas estructuras impuestas se relacionan de una manera asombrosa en la categoría derivada. Recordemos el contexto en el que estamos trabajando

$$Z \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{j}{\hookleftarrow} U.$$

Proposición 179. *El funtor $j_!$ es adjunto izquierdo de j^*.*

Demostración. Describamos la unidad y la counidad. Si $V \subseteq U$ es un abierto, entonces

$$j^{-1}(j_!\mathscr{F})(V) = \text{lím}\, V' \supset V\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(V).$$

Por lo tanto $j^{-1}f_!\mathscr{F}$ ya es una gavilla y por la propiedad universal de la gavillización obtenemos un isomorfismo funtorial

$$\eta_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to j^*j_!\mathscr{F}.$$

Por otro lado, si $V \subseteq X$ un abierto y $\mathscr{G}$ una gavilla en X, entonces

$$j_!j^{-1}\mathscr{G}(V) = \begin{cases} \mathscr{G}(V) & \text{si} \quad V \subseteq U \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por la propiedad universal de la gavillización obtenemos un morfismo

$$\varepsilon_{\mathscr{F}} : j_!j^*\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}.$$

Verificar que estas transformaciones naturales satisfacen las identidades triangulares es técnico y no se demostrará, para los detalles véase (19) Sección 2.5. □

Proposición 180. *El funtor i_* es adjunto por la izquierda de $i^!$.*

Demostración. Describamos la unidad y la counidad da la adjunción. Si $U \subseteq X$ es abierto, entonces

$$\Gamma(U; i_*i^!\mathscr{F}) = \Gamma(U \cap Z; i^*\mathscr{F}^Z) = \lim_{V \supset U \cap Z} \mathscr{F}^Z(V) = \mathscr{F}^Z(U \cap Z).$$

De forma que obtenemos un ismorfismo funtorial

$$\mathscr{F}^Z \longrightarrow i_*i^!\mathscr{F} \cong i_!i^!\mathscr{F}.$$

Partiendo dl monomorfismo $\mathscr{F}^Z \to \mathscr{F}$ y aplicando el isomorfismo anterior obtenemos el morfismo $\epsilon_{\mathscr{F}} : i_*i^!\mathscr{F} \to \mathscr{F}$, funtorial en $\mathscr{F}$. La unidad se construye como sigue: Comencemos notando que por definición para toda gavilla $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}_A(Z)$ se cumple que $i_*\mathscr{G}^Z$ es canónicamente isomorfo a $i_*\mathscr{G}$. Si $V \subseteq Z$ es un abierto, entonces:

$$\Gamma(V; i^{-1}(i_*\mathscr{G})^Z) = \Gamma(V; i^{-1}(i_*\mathscr{G})) = \lim_{V' \supset V} \Gamma(V'; i_*\mathscr{G}) = \lim_{V' \supset V} \mathscr{G}(V' \cap Z) = \mathscr{G}(V).$$

Por la propiedad universal de la gavillización esto induce un isomorfismo canónico

$$\eta_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \longrightarrow i^! i_* \mathscr{G}.$$

Verificar que estas transformaciones naturales satisfacen las identidades triangulares es técnico y no se demostrará, para los detalles véase (19) Sección 2.5. □

Lema 181. *Sea X un espacio topológico.*

(I) Si $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(U)$, con $U \subseteq X$ abierto, entonces existen isomorfismos naturales:

$$j^* j_* \mathscr{F} \xrightarrow{\cong} \mathscr{F} \xrightarrow{\cong} j^! j_* \mathscr{F}$$

(II) Respectivamente, si $Z \subseteq X$ es un cerrado y $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(Z)$, entonces existen isomorfismos naturales:

$$i^* i_* \mathscr{F} \xrightarrow{\cong} \mathscr{F} \xrightarrow{\cong} i^! i_* \mathscr{F}$$

Demostración. Los isomorfismos están dados por los morfismos de *adjunción*. El primer isomorfismo del inciso (I) y del inciso (II) fueron dados en una Observación anterior, en la construcción de la unidad en la Proposición 179 y la Proposición 180 se demostró que estas inducían un isomorfismo. □

Proposición 182. *Para toda gavilla $\mathscr{F}$ en X se satisface*

(I) La sucesión

$$0 \longrightarrow j_! j^* \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow i_* i^* \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

es exacta, los morfismos son los dados por la adjunción.

(II) La sucesión

$$0 \longrightarrow i_* i^! \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow j_* j^* \mathscr{F}$$

es exacta, los morfismos son los dados por la adjunción. Además, si $\mathscr{F}$ es inyectiva o flasque, entonces la última flecha es un epimorfismo.

Demostración. Por la Proposicion 178 basta con demostrar que la sucesión es exacta si reemplazamos $j_!$ por j_*. La unidad de la adjunción, cuando U es abierto, corresponde a la restricción usual. En tallos, consideremos dos casos: Si $x \in U$, entonces $x \notin Z$ y por lo anterior

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

similarmente si $x \in Z$ la sucesión inducida en los tallos es

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow 0.$$

Esto demuestra que la sucesión es exacta. Para la segunda sucesión, recurramos de nuevo a ver el morfismo inducido en tallos, tendremos nuevamente dos casos. El primero ocurre si $x \notin Z$, en este caso tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (i_*i^!\mathscr{F})_x \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathscr{F}_x \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & (j_*j^*\mathscr{F})_x \arrow[d, "\cong"] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathscr{F}_x \arrow[r] & \mathscr{F}_x \end{tikzcd}$$

pues por la Observación después de la Proposición 172, el morfismo $\mathscr{F} \to j_*j^*\mathscr{F}$ es la restricción de secciones. Como estamos considerando los tallos y $x \in U$ entonces tenemos un isomorfismo y por lo tanto la sucesión es exacta. Para el segundo caso, recuerde que existe un isomorfismo canónico

$$i_*i^!\mathscr{F} \cong \mathscr{F}^Z.$$

Si $V \subseteq X$ es un abierto tal que $x \in Z \cap V$, entonces

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}^Z(V) \longrightarrow \mathscr{F}(V) \longrightarrow j_*j^*\mathscr{F}(V).$$

Si $s \in \mathscr{F}(V)$, entonces $\operatorname{Supp}(s) \subseteq Z$ y como el segundo morfismo está dado por la restricción, tenemos que $s|_{V\cap U} = 0$. Recíprocamente, si $s|_{V\cap U} = 0$ y suponemos que $s_x \neq 0$, entonces existe una vecindad $W \subseteq V$ de x en X que necesariamente no intersecta a U y tal que $s|W \neq 0$. En consecuencia $\operatorname{Supp}(s|W) \subseteq Z$, donde el soporte lo estamos tomando en W, de manera que está en la imagen del morfismo $\mathscr{F}^Z(W) \to \mathscr{F}^Z(W)$. Si $\mathscr{F}$ es flasque, entonces por definición el morfismo de restricción se escinde. Como toda gavilla inyectiva es flasque terminamos. $\square$

En particular tendremos como Corolario una propiedad importante del morfismo de adjunción.

Corolario 183. *Todo morfismo $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ cuyos tallos son cero fuera de Z admite una única factorización a través de la unidad $\eta_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to i_*i^*\mathscr{F}$.*

Demostración. Tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\eta_{\mathscr{F}}"] \arrow[d, "f"] & i_*i^*\mathscr{F} \arrow[d, "i_*i^*f"] \\ \mathscr{G} \arrow[r, "\eta_{\mathscr{G}}"] & i_*i^*\mathscr{G} \end{tikzcd}$$

inducido por la unidad. Por hipótesis, el morfismo $\eta_{\mathscr{G}}$ es un isomorfismo. La unicidad se sigue. □

Lema 184. *Existe un isomorfismo natural $H^\bullet(X, i_*\mathscr{F}) \cong H^\bullet(Z, \mathscr{F})$.*

Demostración. Si $\mathscr{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ es una resolución por inyectivos en Z, entonces por el Corolario 148 el morfismo $i'_*FF \to i_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución por inyectivos. Como tenemos un isomorfismo dado por la counidad, la composición de los isomorfismos

$$\Gamma(X, i_*\mathcal{I}^\bullet) \to \Gamma(Z, i^*i_*\mathcal{I}^\bullet) \to \Gamma(Z, I^\bullet)$$

termina la demostración. □

El siguiente diagrama ilustra las relaciones entre los 8 funtores definidos.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Shv}_A(U) & \\ \big\downarrow{\scriptstyle j_!} & {\scriptstyle j^*=j^!}\big\uparrow & \big\downarrow{\scriptstyle j_*} \\ & \mathbf{Shv}_A(X) & \\ \big\downarrow{\scriptstyle i^*} & {\scriptstyle i_*=i_!}\big\uparrow & \big\downarrow{\scriptstyle i^!} \\ & \mathbf{Shv}_A(Z) & \\ \text{exacto} & \text{exacto} & \text{exacto por la izquierda} \\ & \text{preserva inyectivos} & \text{preserva inyectivos} \end{array}$$

Lema 185. *Ocurre que:*

(I) $j^*i_* = 0$.

(II) $i^*j_! = 0$.

(III) $i^!j_* = 0$.

Demostración. Demostremos el inciso (I). Si $x \in U$, entonces $(j^*i_*\mathscr{F})_x \cong (i_*\mathscr{F})_x = 0$. Por otro lado si $x \notin U$ tenemos $(j^*i_*\mathscr{F})_x \cong 0$, por lo tanto $j^*i_* = 0$. Los otros incisos se siguen por adjunción. □

Lema 186. *Para todo $\mathscr{F}^\bullet \in D(\mathbf{Shv}_A(X))$, las sucesiones exactas de la Proposición 182 inducen los triángulos distinguidos*

- $$j_!j^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow j_!j^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow j_!j^*\mathscr{F}^\bullet[1]$$

- $$i_*Ri^!\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow j_!j^*\mathscr{F}^\bullet \longrightarrow j_!j^*\mathscr{F}^\bullet[1]$$

Demostración. Se sigue de las sucesiones exactas en la Proposición 182. □

Observación. En el inciso (II) de la Proposición 182 era necesario que $\mathscr{F}$ fuese flasque o inyectivo para poder garantizar la suprayectividad, sin embargo en la Categoría Derivada un complejo se identifica con su resolución.

3.5. Gavillas Soft y Planas

En la Sección 3.3 hicimos una primera excursión a las gavillas soft, en esta Sección exploraremos con más detalle a esta clase de gavillas utilizando algunas herramientas de la Sección de Recollements. Veremos que las gavillas soft son un perfecto análogo de las gavillas flabby en la cohomología con soportes compactos, introduciremos las gavillas *planas* y estudiaremos resoluciones de estas.

Como primer propiedad importante de la clase soft, tenemos una útil caracterización *cohomológica.*

Teorema 187. *Una gavilla $\mathscr{F}$ es soft si y solamente si para todo $U \subseteq X$ abierto se tiene que $H^1_c(U, \mathscr{F}) = 0$.*

Observación. Este Teorema tiene un análogo con respecto a las gavillas flasque y la cohomología local.

Demostración. La primera parte es inmediata, debido a que la restricción de una gavilla soft a un abierto vuelve a ser soft y el Corolario 169. Demostremos el recíproco, sean Z un cerrado de X y U el abierto complementario, denotemos por i, j a las inclusiones de Z y U en X. Por la Proposición 182 existe la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow j_!j^*\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow i_*i^*\mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\Gamma_c(X; -)$ obtenemos la sucesión exacta larga

$$\Gamma_c(X; j_!j^*\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_c(X; \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_c(X; i_*i^*\mathscr{F}) \longrightarrow H^1_c(X; j_!j^*\mathscr{F}) \longrightarrow \ldots$$

Por el Ejemplo 174 tenemos los siguientes isomorfismos

- $\Gamma_c(X; j_! j^* \mathscr{F}) = \Gamma_c(U; j^* \mathscr{F})$.
- $\Gamma(X; i_* i^* \mathscr{F}) = \Gamma(Z; i^* \mathscr{F})$.

De manera que la sucesión exacta anterior es equivalente a

$$\Gamma_c(U; j^* \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_c(X; \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(Z; i^* \mathscr{F}) \longrightarrow H^1_c(U; j^* \mathscr{F}) \longrightarrow \ . \ . \ .$$

Por hipótesis $H^1_c(U; j^* \mathscr{F}) = 0$ y por tanto, el morfismo de restricción

$$\Gamma_c(X; \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(Z; \mathscr{F})$$

es suprayectivo. □

Corolario 188. *Si $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia filtrante de gavillas soft, entonces $\mathscr{F} = \lim_\lambda \mathscr{F}$ es soft. En particular, la suma directa de gavillas soft es soft.*

Demostración. Sea U un abierto de X, por el Lema 159, el funtor de secciones compactas es exacto con respecto a gavillas soft, así que conmuta con límites filtrantes. Por lo tanto

$$H^1_c(U; \mathscr{F}) = \lim_{\lambda} H^1_c(U; \mathscr{F}_\lambda) = 0.$$

Lo que concluye la demostración. □

Demostraremos ahora que la propiedad de ser soft es local. La técnica ilustrada en la demostración se conoce como *extender una sección con ceros* y es ampliamente utilizada (con otros nombres, por supuesto) en Geometría Diferencial.

Corolario 189. *Sea $\mathscr{F}$ una gavilla en un espacio localmente compacto X. Si todo punto de X tiene una vecindad abierta U tal que la restricción de $\mathscr{F}$ en U sea una gavilla soft en U, entonces $\mathscr{F}$ es soft.*

Observación. El recíproco también es cierto. Si U es un abierto arbitrario de X, entonces $\mathscr{F}|_U$ es soft.

Demostración. Por hipótesis para todo $x \in X$ existe un abierto U_x tal que $\mathscr{F}|_{U_x}$ es soft. Por hipótesis de que X es localmente compacto y que la restricción de una gavilla soft a un subespacio localmente cerrado es soft, tenemos que podemos refinar la subcubierta finita de $\{U_x\}$ -que existe pues estamos suponiendo que X es compacto- a una subcubierta $\{X_\lambda\}$, no necesariamente finita, de subespacios compactos tales que la restricción de $\mathscr{F}$ a cada X_λ sea soft. Si i_α denota la inclusión de X_λ a X, tenemos por la Proposición 168 que $i_{\lambda !}\mathscr{F}|_{X_\lambda} = i_{\lambda_*}\mathscr{F}|_{X_\lambda}$ es soft. Por la Proposición 162 tenemos que $\lim_\lambda i_{\lambda_*}\mathscr{F}|_{X_\lambda}$ es canónicamente isomorfo a $\mathscr{F}$, por lo tanto se sigue del Corolario 188 que $\mathscr{F}$ es soft. □

3.5.1. Dimensión cohomológica

Estamos obligados a hacer una breve excursión a la teoría de *dimensión* en espacios topológicos, por cuestiones de espacio tocaremos superficialmente esta área, de alto interés en Topología y Álgebra, recalcamos que todos los espacios son *localmente compactos*.

En los cursos de Geometría Diferencial aprendemos que una variedad -diferenciable- tiene *dimensión* n si es localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, en particular por la definición misma de la cohomología de De Rahm la siguiente Proposición es obvia.

Proposición 190. *Si M es una variedad suave de dimensión n, entonces para toda $i > n$ se tiene que $H^i_{dR}(M) = 0$.*

Esta Proposición tiene sentido inclusive con un sistema local arbitrario (véase (4)), el objetivo de esta sección es poder *caracterizar* la dimensión de una variedad en términos de su *cohomología*, para con esta herramienta poder hablar de un concepto de dimensión en un espacio localmente compacto que se aproxime a la noción intuitiva de dimensión.

Regresando al caso de la cohomología de De Rham, notemos que la invarianza homotópica de esta es un problema, debido a que, si M es contraible, entonces $H^i_{dR}(M) = 0$ para $i > 0$. La manera de solucionar esto (que en última instancia permite la existencia de la Dualidad de Poincaré) es introducir la cohomología de De Rahm con *soportes compactos*, con ella:

$$H^i_{dRc}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con un poco mas de trabajo, o bien debido a la dualidad de Poincaré, obtenemos otra caracterización.

Proposición 191. *Una variedad suave M tiene dimensión n si y solo si para todo $i > n$ se tiene que $H^i_{dRc}(M) = 0$ y n es el número mas pequeño con esta propiedad.*

Demostración. Consulte (4). □

La Proposición podría parecer una tautología (¡La misma definición de variedad implica especificar la dimensión de la misma!) pero nos da la pauta a seguir en la Definición de *dimensión* de un espacio topológico localmente compacto. La otra guía proviene de Geometría Algebraica, con el Teorema de Anulamiento de Grothendieck.

Teorema 192. *Sea X un espacio noetheriano de dimensión[1] n. Para toda $i > n$ y todas las gavillas $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ se tiene que $H^i(X; \mathscr{F})$.*

Demostración. La demostración original puede consultarse en (12), véase también (14) Teorema 2.7 pp. 208. □

[1] La dimensión de un espacio noetheriano se define como el *supremo* de la longitudes de cadenas ascendentes de cerrados.

Este junto a otros teoremas de anulamiento (el teorema de anulamiento de Artin juega un papel muy importante en la cohomología étale, por ejemplo) nos motivan a hacer la definición siguiente.

Definición 193. Un espacio topológico X localmente compacto tiene *dimensión cohomológica* n si para toda $i > n$ y todas las gavillas $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ se tiene que $H^k_c(X; \mathscr{F}) = 0$. Además n es el número mas pequeño con esta propiedad.

Observación. Es muy importante notar que con la teoría desarrollada en el Capítulo 2 definir que un espacio topológico tenga dimensión cohomológica finita *es equivalente* a que el funtor derivado $R\Gamma_c(X; -)$ tenga *dimensión cohomológica finita*. Por el Teorema 109 los espacios de dimensión cohomológica finita dan una forma de *globalizar* al funtor $R\Gamma$ en toda la categoría derivada, esto será de importancia para el Teorema de Dualidad de Verdier.

Un requisito que toda teoría *respetable* de dimensión debe cumplir es que coincida con la noción esperada de dimensión en espacios conocidos. Empecemos con el caso mas sencillo, el de un punto o un conjunto discreto de puntos.

Proposición 194. *La dimensión cohomológica de un punto es* 0*.*

Demostración. La categoría $\mathbf{Shv}_A(\{pt\})$ es equivalente a A-Mod. De forma que una gavilla $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(\{pt\})$ es equivalente a un módulo $\mathscr{F}_{pt}$, por lo tanto

$$H^1_c(\{pt\}; \mathscr{F}) = H^1_c(\{pt\}; \mathscr{F}_{pt}) = 0.$$

El último isomorfismo es de la cohomología singular (cf. Teorema 141). Por último, es claro que

$$H^0_c(\{pt\}; \mathscr{F}) = \mathscr{F}_{pt}.$$

□

Proposición 195. *Si $W \subseteq X$ es un espacio localmente cerrado, entonces* $\dim_c W \leq \dim_c X$*.*

Demostración. Basta con demostrarlo para cerrados y para abiertos. Si $Z \subseteq X$ es cerrado, entonces

$$H_c(Z; \mathscr{F}) \cong H_c(X; i_*\mathscr{F}),$$

donde i es la inclusión. Supongamos que $U \subseteq X$ es abierto, tenemos que

$$H_c(U; \mathscr{F}) \cong H_c(X; j_!\mathscr{F}),$$

de manera que si $W = U \cap Z$ es localmente cerrado, el resultado se sigue. □

Ocuparemos un argumento llamado en (18) el *principio de minimalidad*, sea $\mathscr{F}$ una gavilla en el espacio X y sea $\mathcal{Z}$ una familia de cerrados en X tal que

- $\mathcal{Z}$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.
- X es elemento de $\mathcal{Z}$.

Consideremos $\alpha \in H_c^p(X;\mathscr{F})$ una clase de cohomología no cero. Para todo $Z \in \mathcal{Z}$ denotemos por $\alpha|_Z$ la imagen del morfismo de restricción a Z.

Proposición 196. *El conjunto ordenado*

$$\{Z \in \mathcal{Z} : \alpha|_Z \neq 0\}$$

Contiene elementos minimales.

Demostración. Vamos a utilizar el Lema de Zorn, necesitamos pues que dada una cadena esta esté acotada, afirmamos que lo está y que esta es su intersección, para demostrar esto simplemente notemos que si $\{Z_\alpha\}$ es una cadena en $\mathcal{Z}$ entonces, por la Proposición 166 se tiene que

$$\lim_{\alpha} H_c^p(Z_\alpha;\mathscr{F}) \cong H_c^p(\bigcap_\alpha Z_\alpha;\mathscr{F}).$$

□

Construyamos una sucesión imperante en Topología Algebraica, cutya importancia radica en que aparece en cualquier *teoría de cohomología*[1].

Lema 197. *Sean A, B subespacios cerrados de un espacio topológico X. Una gavilla $\mathscr{F}$ en X da lugar a una sucesión exacta larga*

$$\ldots \longrightarrow H^p(A\cup B,\mathscr{F}) \longrightarrow H^p(A,\mathscr{F}) \oplus H^p(B,\mathscr{F}) \longrightarrow H^p(A\cap B,\mathscr{F}) \longrightarrow \ldots$$

Demostración. Denotemos por $h : A\cup B \to X, i : A \to X, j : B \to X, k : A\cup B \to X$ a las inclusiones de los subespacios en X. Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow h_*h^*\mathscr{F} \longrightarrow i_*i^*\mathscr{F} \oplus j_*j^*\mathscr{F} \longrightarrow k_*k^*\mathscr{F} \longrightarrow 0$$

dada vía la suma y la resta de los morfismos de adjunción, respectivamente. *Mutatus-mutatis* a la Proposición 182 se demuestra que esta sucesión es exacta. Como H^p es aditivo, entonces la demostración se sigue por el Lema 184. □

La sucesión del Lema 197 lleva por nombre la *sucesión de Mayer-Vietoris*.

[1] Para más detalles al respecto, consúlte los *axiomas de Eilenberg-Steenrod* en cualquier libro de Topología Algebraica, por ejemplo (15).

Lema 198. *Si X es un espacio de dimensión cohomológica n, entonces*

$$\dim_c(X \times \mathbb{R}) \leq \dim_c(X) + 1$$

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo, supongamos que para alguna gavilla $\mathscr{F}$ en $X \times \mathbb{R}$ existe una clase $\gamma \in H^{n+2}(X \times \mathbb{R}; \mathscr{F})$ que no se anula, consideremos la familia

$$\mathcal{Z} = \{X \times Z : Z \subseteq \mathbb{R} \text{ es cerrado}\}.$$

Este conjunto es cerrado bajo intersecciones arbitrarias, por el principio de minimalidad existe un elemento $X \times Z_0$ minimal tal que $\gamma|_{X \times Z_0}$ no se anula, además por hipótesis en la dimensión cohomológica de X, necesariamente Z_0 no es un punto. Así, sea $t_0 \in Z_0$ un punto interior y definamos $Z_0' = (-\infty, t_0)$ y $Z_0'' = [t_0, \infty)$, estos son cerrados propios cuya unión es Z. Por la sucesión de Mayer-Vietoris (cf. Lema 197) la siguiente sucesión es exacta

$$H^{n+1}(X \times \{t_0\}; \mathscr{F}) \longrightarrow H^{n+2}(X \times Z_0; \mathscr{F}) \longrightarrow H_c^{n+2}(X \times Z_0'; \mathscr{F}) \oplus H_c^{n+2}(X \times Z_0''; \mathscr{F})$$

La dimensión cohomológica de X es n, por tanto el termino de la izquierda es 0, por lo tanto alguna de las restricciones tiene que ser no cero, contradiciendo la minimalidad de γ. □

Teorema 199. *La dimensión cohomológica de $\mathbb{R}^n$ es n.*

Demostración. Por inducción, el caso $n = 0$ es la Proposición 194, por el Lema 198:

$$\dim_c(\mathbb{R}^{n+1}) = \dim_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \leq n + 1$$

Por lo tanto lo único que necesitamos es encontrar una gavilla $\mathscr{F}$ en $\mathbb{R}^n$ para la cual la cohomología en dimensión n sea no trivial. Consideremos la gavilla constante con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces

$$H_c^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_X) \cong H_c^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

El último isomorfismo es el isomorfismo natural entre la cohomología de gavillas y la singular del Teorema 141. □

3.5.2. Resoluciones

Discutiremos varias *resoluciones acotadas*, estas dependen de dos condiciones de *finitud*, la finitud en la dimensión cohomológica de X y la finitud en los anillos de los cuales las gavillas son módulos. En particular se va a suponer que el anillo A es *noetheriano* y de dimensión -de Krull- finita, además de que la dimensión -cohomológica- de los espacios es finita.

Lema 200. *Sea X un espacio topológico de dimensión cohomológica n. Si la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{d^{-1}} \mathscr{G}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{G}^1 \xrightarrow{d^1} \ .\ \ .\ \ . \xrightarrow{d^{n-2}} \mathscr{G}^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{G}^n \longrightarrow 0$$

es exacta y $\mathscr{G}^i$ es soft para todo $i < n$, entonces $\mathscr{G}^n$ también es soft.

Observación. No estamos imponiendo *ninguna condición* a $\mathscr{F}$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto arbitrario, en vista del Teorema 3.5 basta con demostrar que $H^1_c(U, \mathscr{G}^n) = 0$. De la sucesión exacta larga podemos extraer las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "d^{-1}"] & \mathscr{G}^0 \arrow[r, "\pi^0"] & \operatorname{coker}(d^{-1}) = \mathscr{G}^0/\operatorname{Im}(d^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 & \mathscr{G}^1/\operatorname{Im}(d^0) = \operatorname{coker}(d^0) \arrow[l] \arrow[d, "="] & \mathscr{G}^1 \arrow[l, "\pi^1"'] & \mathscr{G}^0/\ker(d^0) \arrow[l, "\overline{d^0}"'] & 0 \arrow[l] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G}^1/\ker(d^1) \arrow[r, "\overline{d^1}"] & \mathscr{G}^2 \arrow[r, "\pi^2"] & \operatorname{coker}(d^2) = \mathscr{G}^2/\operatorname{Im}(d^2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}^{n-1}/\ker(d^{n-1}) = \operatorname{coker}(d^{n-2}) \xrightarrow{\overline{d^{n-1}}} \mathscr{G}^n \xrightarrow{\pi^n} \operatorname{coker}(d^n) = 0 \longrightarrow 0.$$

De forma que $\mathscr{G}^n \cong \operatorname{coker}(d^{n-2})$ vía $\overline{d^{n-1}}$. Tomemos la sucesión exacta larga de cohomología en la primer sucesión exacta corta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_c(U,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^0_c(U,\mathscr{G}^0) \arrow[r] & H^0_c(U,\operatorname{coker}(d^{-1})) \arrow[r] & H^1_c(U,\mathscr{F}) \arrow[d] \\
\dots & H^2_c(U,\mathscr{G}^0) \arrow[l] & H^2_c(U,\mathscr{F}) \arrow[l] & H^1_c(U,\operatorname{coker}(d^{-1})) \arrow[l] & H^1_c(U,\mathscr{G}^0) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{G}^0$ es soft entonces es acíclica para la cohomología con soporte compacto, por lo tanto $H^1_c(U, \operatorname{coker}(d^{-1}) \cong H^2_c(U, \mathscr{F})$. Iterando, obtenemos que:

$$H^i_c(U, \operatorname{coker}(d^{-1})) \cong H^{i+1}(U, \mathscr{F})$$

Para todo $i > 0$. Repitamos la construcción ahora para la segunda sucesión exacta corta dada al comienzo:

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow H_c^0(U,\mathscr{G}^0/\ker(d^0)) & \longrightarrow & H_c^0(U,\mathscr{G}^1) & \longrightarrow & H_c^0(U,\operatorname{coker}(d^0)) \\
 & & & & \downarrow \\
H_c^1(U,\operatorname{coker}(d^0)) & \longleftarrow & H_c^1(U,\mathscr{G}^1) & \longleftarrow & H_c^1(U,\mathscr{G}^0/\ker(d^0)) \\
\downarrow & & & & \\
H_c^2(U,\mathscr{G}^0/\ker(d^0)) & \longrightarrow & H_c^2(U,\mathscr{G}^1) & \longrightarrow & . \quad . \quad .
\end{array}$$

Análogamente, si $\mathscr{G}^1$ es soft, entonces es acíclica y por lo tanto

$$H_c^i(U,\operatorname{coker}(d^0)) \cong H^{i+1}(U,\mathscr{G}^0/\ker(d^0)).$$

Por otro lado, por ser la sucesión exacta tenemos que

$$H^{i+1}(U,\mathscr{G}^0/\ker(d^0)) \cong H^{i+1}(U,\operatorname{coker}(d^{-1})).$$

Así las cosas

$$H_c^i(U,\operatorname{coker}(d^0)) \cong H^{i+1}(U,\operatorname{coker}(d^{-1})) \cong H^{i+2}(U,\mathscr{F}).$$

Repetimos este proceso para todas las sucesiones exactas cortas, de forma que

$$H_c^i(U,\mathscr{G}^n) = H_c^i(U,\operatorname{coker}(d^{n-2})) \cong H^{i+n}(U,\operatorname{coker}(d^{-1})) \cong H^{i+n}(U,\mathscr{F}),$$

en particular para $i = 1$ obtenemos que

$$H_c^1(U,\mathscr{G}^n) \cong H^{1+n}(U,\mathscr{F}) = 0.$$

La última igualdad debido a que la dimensión cohomológica de X es n y la Proposición 195. □

Proposición 201. *Sea X un espacio topológico de dimensión cohomológica n. Si $\mathscr{F}$ es una gavilla plana en X, entonces $\mathscr{F}$ tiene una resolución*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L}^0 \longrightarrow \mathscr{L}^1 \longrightarrow . \quad . \quad . \longrightarrow \mathscr{L}^n \longrightarrow 0$$

donde cada $\mathscr{L}^i$ es una gavilla soft y plana.

Demostración. Sea $G(\mathscr{F})$ la gavilla[1] dada en cada abierto como

$$G(\mathscr{F})(U) = \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x$$

Y con restricciones las inducidas por las proyecciones. Nótese que existe un monomorfismo natural $g_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to G(\mathscr{F})$.

[1]En la literatura esta resolución es conocida como la *resolución de Godement.*

Afirmación 202. *La gavilla $G(\mathscr{F})$ es plana y soft.*

Demostración. Si A es un anillo noetheriano, entonces $G(\mathscr{F})(U) = \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x$ es plano[1] pues cada $\mathscr{F}_x$ es plano por hipótesis. Vamos a demostrar que $G(\mathscr{F})$ es flabby, lo que, en particular implicará que sea soft. Si $U \subseteq V$ son abiertos, entonces el morfismo

$$\prod_{x\in V} \mathscr{F}_x \longrightarrow \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x$$

al provenir de las proyecciones es suprayectivo. $\square$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "g_{\mathscr{F}}"] & G(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{G(\mathscr{F})}"] & G(G(\mathscr{F})/\mathrm{Im}(g_{\mathscr{F}})) \\
 & & G(\mathscr{F})/\mathrm{Im}(g_{\mathscr{F}}) \arrow[ur, "g_{G(\mathscr{F})/\mathrm{Im}(g_{\mathscr{F}})}"'] & \\
 & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Afirmación 203. *$Im(g_{\mathscr{F}})$ es un sumando directo de $G(\mathscr{F})$.*

Demostración. Basta con ver que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{g_{\mathscr{F}}} G(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{coker}(g_{\mathscr{F}}) \longrightarrow 0$$

se escinde. Esto lo podemos ver en tallos, considere $r_x : G(\mathscr{F})_x \to \mathscr{F}_x$ dado por

$$r_x([(s_x)_{x\in U}, U]) = [s_x, U].$$

Se tiene que r_x es un retracto de $g_{\mathscr{F}_x}$ y por tanto $\mathscr{F}_x$ es un sumando directo de $G(\mathscr{F})_x$. $\square$

Por tanto $\mathrm{coker}(g_{\mathscr{F}})_x \cong (G(\mathscr{F})/\mathrm{Im}(g_{\mathscr{F}}))_x$ es plana para toda $x \in X$. Concluimos que $\mathrm{coker}(g_{\mathscr{F}})$ es una gavilla plana. Definamos $d^{-1} = g_{\mathscr{F}}$ y $\mathscr{L}^0 = G(\mathscr{F})$. Inductivamente construimos $\mathscr{L}^i = G(\mathscr{L}^{i-1}/\mathrm{Im}(d^{-1}))$ y $d^i = g_{\mathscr{L}^i/Im(d^{i-1})} \circ \pi_{\mathscr{L}^i}$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L}^0. \;\; . \;\; . \longrightarrow \mathscr{L}^{n-1} \longrightarrow \mathscr{L}^n \equiv \ker(d^n) \longrightarrow 0.$$

Como demostramos anteriormente, cada $\mathscr{L}^i$ es plano para todo $i \leq n$ y por lo que vimos antes, cada $\mathscr{L}^i$ es soft para $i < n$. Por el Lema 200 concluimos que $\mathscr{L}^n$ es soft. $\square$

Como consecuencia de esta Proposición, podemos demostrar que la dimensión cohomológica es local, en cierta forma un análogo a la *invarianza del dominio* en Topología Diferencial.

[1] Para una demostración de este hecho véase (2).

Lema 204. *La dimensión cohomológica es local, es decir, si* $\{U_\lambda\}$ *es una cubierta abierta de* X*, entonces*

$$\dim_c(X) = \sup_\lambda \dim_c(U_\lambda)$$

Demostración. Por la Proposición 195 tenemos que para todo abierto U_λ se cumple

$$\dim_c(U_\lambda) \leq \dim_c(X).$$

Por lo tanto basta con demostrar la otra desigualdad. Supongamos que $\sup_\lambda \dim_c(U_\lambda) = n$. Sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$, por la Proposición 201 existe una resolución por gavillas softs y planas

$$0 \longrightarrow j_\lambda^*\mathscr{F} \longrightarrow S^0 \longrightarrow S^1 \longrightarrow . \quad . \quad . \longrightarrow S^{n-1} \longrightarrow S^n \longrightarrow 0$$

para cada U_λ. Como U_λ es una cubierta abierta de X y por la Proposición 200 la restricción de cada S^n a U_λ es soft, así que del Corolario 189 obtenemos que S^n es una gavilla soft en X y por lo tanto $H_c^{n+1}(X; \mathscr{F}) = 0$. $\square$

Corolario 205. *La dimensión cohomológica de una variedad topológica*[1] *coincide con su dimensión.*

Demostración. Por el Lema 204 podemos considerar como cubierta abierta de una variedad a cualquier atlas de esta, cada abierto es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, con n fijo, por el Teorema 199 la dimensión cohomológica de cada abierto es n. $\square$

Lema 206. *Toda gavilla* $\mathscr{F}$ *en* $\mathbf{Shv}_A(X)$ *admite un epimorfismo* $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_{U_\lambda} \to \mathscr{F}$*, donde* $U_\lambda \subseteq X$ *son abiertos.*

Demostración. Sea $x \in X$ fijo, $\mathscr{F}_x$ es generado como A-módulo por un conjunto $\{a_{\lambda_x}\}_{\lambda_x\in\Lambda_x}$, estos elementos están a su vez representados como $[a_{\lambda_x}, U_{\lambda_x}]$, donde U_{λ_x} es un abierto en X. Escogiendo representantes, tenemos una colección $a_{\lambda_x} \in \mathscr{F}(U_{\lambda_x})$ tales que sus imágenes generan $\mathscr{F}_x$. Cada elemento a_{λ_x} induce un morfismo $\tilde{a}_{\lambda_x} : A_{U_{\lambda_x}} \to \mathscr{F}$ y obtenemos una cubierta abierta $\{U_{\lambda_x}\}_{\lambda_x\in\Lambda_x}$. Si definimos

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_x, x\in X} A_{U_{\lambda_x}} \to \mathscr{F}$$

Como el morfismo inducido por todas estas secciones, entonces es suprayectivo por construcción y por ser la suma directa de planos un módulo plano obtenemos que la gavilla es plana. $\square$

[1]Una variedad topológica es un espacio topológico localmente homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{H}^n$.

Corolario 207. *Toda gavilla $\mathscr{F}$ en $\mathbf{Shv}_A(X)$ admite una resolución*

$$. \quad . \quad . \longrightarrow \mathscr{L}^{-n} \longrightarrow . \quad . \quad . \longrightarrow \mathscr{L}^0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

donde cada $\mathscr{L}^i$ es plano.

Demostración. Por el Lema 206, existe un epimorfismo de una gavilla plana $\mathscr{L}^0$ a $\mathscr{F}$. Aplicando de nuevo el Lema 206 al núcleo del morfismo y repitiendo, el Corolario se sigue. □

Lema 208. *Si X es un espacio de dimensión cohomológica finita, $f : X \to Y$ una aplicación continua y $\mathscr{K}$ es una gavilla plana, entonces para toda $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ la gavilla $f_!(\mathscr{K} \otimes \mathscr{F})$ es soft.*

Demostración. Sea $n = \dim_c(X)$, por el Corolario 207 existe una resolución

$$. \quad . \quad . \xrightarrow{d^{-n-1}} \mathscr{L}^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} . \quad . \quad . \xrightarrow{d^{-1}} \mathscr{L}^0 \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

con cada $\mathscr{L}^i \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_{U_\lambda}$. Por ser $\mathscr{K}$ una gavilla plana la sucesión

$$. \quad . \quad . \xrightarrow{d^{-n-1} \otimes \mathrm{id}} \mathscr{L}^{-n} \otimes \mathscr{K} \longrightarrow . \quad . \quad . \xrightarrow{d^{-1} \otimes \mathrm{id}} \mathscr{L}^0 \otimes \mathscr{K} \xrightarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}} \mathscr{F} \otimes \mathscr{K} \longrightarrow 0$$

es exacta. Construimos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker(d^{-n-1} \otimes \mathrm{id}) \longrightarrow \mathscr{L}^{-n} \otimes \mathscr{K} \longrightarrow . \quad . \quad . \longrightarrow \mathscr{L}^0 \otimes \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{K} \longrightarrow 0.$$

Notemos que tenemos isomorfismos

$$\mathscr{L}^{-n} \otimes \mathscr{K} \cong \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_{U_\lambda} \right) \otimes \mathscr{K} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{K}_{U_\lambda}$$

donde cada K_{U_λ} es soft, por el Corolario 188 la suma directa de gavillas soft vuelve a ser soft. Aplicando el Lema 200 obtenemos que la gavilla $\mathscr{K} \otimes \mathscr{F}$ es soft. Por el Lema 171 la gavilla $f_!(\mathscr{K} \otimes \mathscr{F})$ es soft. □

3.6. Representabilidad de Funtores

El propósito de esta sección es demostrar un Teorema de carácter técnico, perteneciente mas bien[1] a la Teoría de las Categorías, pero debido a la falta de una referencia adecuada se optó por hacer la demostración completa del Teorema. La idea es encontrar una manera de derivar

[1] Este quizá es el primer "Teorema" que no parece estar disfrazado de tautología, es conocido como el Teorema de Adjunción de Freyd.

la existencia de un adjunto por la derecha a un funtor *sin construir explícitamente el adjunto* y puede rastrearse a la idea de Deligne para construir el funtor derivado $f^!$ en el Apéndice a (13). De hecho, así se construirá el funtor en la siguiente sección.

Para el siguiente Lema vamos a considerar a X como espacio anillado vía la gavilla constante A_X.

Lema 209. *Existe un isomorfismo natural* $Hom_{A_X}(A_U, \mathscr{G}) \cong \Gamma(U; \mathscr{G})$.

Demostración. Definamos $\Phi : \mathrm{Hom}_{A_X}(A_U, \mathscr{G}) \to \Gamma(U; \mathscr{G})$ como $\Phi(f) = f_U(1)$ y $\Psi : \Gamma(U; \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{A_X}(A_U, \mathscr{G})$ como $\Psi(s) = \tilde{s}$. Donde

$$\tilde{s}(b) = bs|_V.$$

Claramente ambas funciones son morfismos de grupos abelianos y además

$$(\Phi \circ \Psi)(s) = \Phi(\tilde{s}) = \tilde{s}_U(1) = 1s|_U = s.$$

Para todo $V \subseteq U$ abierto tenemos

$$(\Psi \circ \Phi)(f)_V(b) = \Psi(f_U(1))_V = \widetilde{f_U(1)}_V(b) = b(f_U(1))|_V = f_U(b)|_V = f_V(b).$$

Por lo tanto Φ y Ψ son inversas entre ellas. La naturalidad es inmediata. $\square$

Lema 210. *Toda gavilla es límite directo de gavillas constantes.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una gavilla. Construimos la categoría $\mathfrak{I}$ como sigue:

- Los objetos de $\mathfrak{I}$ están dados por parejas (s_U, U) donde $s_U \in \mathscr{F}(U)$.
- Existe una flecha entre (s_U, U) y (s_V, V) si y solamente si $U \subset V$ y $s_U = s_V|_U$.

Definamos el funtor $F : \mathfrak{I} \to \mathbf{Shv}_A(X)$ de la manera siguiente:

- En Objetos: $F((s_U, U)) = A_U$.
- En Mofismos: $F((s_U, U) \to (s_V, V)) = i_! : A_U \to A_V$, donde i es la inclusión de U en V.

Por el isomorfismo canónico

$$\mathscr{F}(U) \cong \mathrm{Hom}(Z_U, \mathscr{F})$$

Obtenemos que dada una pareja (s_U, U) tenemos un único morfismo $\overline{s_U} : A_U \to \mathscr{F}$ determinado por la sección s_U, por la condición impuesta en los morfismos de $\mathfrak{I}$ se cumple

$$\overline{s_V} \circ i_! = \overline{s_U},$$

de forma que existe un único morfismo $\varprojlim F \to \mathscr{F}$. Demostremos que es un isomorfismo, para ello basta con determinarlo en tallos, como los límites categóricos conmutan y son compatibles, se cumple

$$(\varprojlim F)_x = \{F(s_U, U) : s_U \in \mathscr{F}(U)\}/\sim .$$

Donde dos elementos $a_U \in F(s_U, U)$ y $b_V \in F(s_V, V)$ están relacionados si y solamente si $s_U|W = s_V|W$ para algún $W \subset V \cap U$. Por unicidad del límite existe un único morfismo dado por $a_U \mapsto s_U$. Note que este morfismo no depende del elemento elegido a_U debido a que cualquier tallo de la gavilla constante es isomorfo a A. Así, apelando de nuevo a la unicidad del límite directo tenemos que el (único) morfismo entre $(\varprojlim F)_x$ y $\mathscr{F}$ es un isomorfismo, necesariamente este tiene que ser inducido por el único morfismo $\varprojlim F \to \mathscr{F}$. Por lo tanto $\varprojlim F \cong \mathscr{F}$. $\square$

Teorema 211. *Un funtor $F : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Ab}^{op}$ es representable si y solamente si transforma límites inductivos (colímites) en límites proyectivos en Ab.*

Observación. La necesidad del teorema es válida en cualquier categoría abeliana.

Demostración. Sea $G : \mathfrak{I} \to \mathbf{Shv}_A(X)$ un funtor y sea $\mathscr{F} = (\varprojlim G, \{g_i : G(i) \to \mathscr{F}\}_i)$ el límite inductivo (si existe) de G en $\mathbf{Shv}_A(X)$. Tenemos que demostrar que $(F(\mathscr{F}), F(g_i))$ es un límite proyectivo en $\mathbf{Ab}$ del funtor $F \circ G$. Por ser F un funtor entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& F(\mathscr{F}) \arrow[dl, "F(g_i)"'] \arrow[dr, "F(g_j)"] & \\
F(G(i)) & & F(G(j)). \arrow[ll, "F(G(\alpha))"]
\end{tikzcd}$$

Por tanto basta con demostrar la propiedad universal, por hipótesis F es representable, por lo tanto existe una gavilla $\mathscr{H}$ tal que $F(\mathscr{G}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ para toda $\mathscr{G}$. Supongamos que tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
& \Omega & \\
& \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{H}) & \\
\mathrm{Hom}(G(i), \mathscr{H}) \arrow[rr] \arrow[ur, "F(g_i)"] \arrow[uur, bend left, "\gamma_i"] & & \mathrm{Hom}(G(j), \mathscr{H}). \arrow[ul, "F(g_j)"'] \arrow[uul, bend right, "\gamma_j"']
\end{tikzcd}$$

Para cada $a \in \Omega$ obtenemos elementos $\gamma_i(a) : G(i) \to Y$ y $\gamma_j(a) : G(j) \to Y$ tales que

$$(F(G(\alpha)) \circ \gamma_j)(a) = \gamma_i(a).$$

Por otro lado, de la definición de F tenemos

$$F(G(\alpha)) \circ \gamma_j)(a) = F(G(\alpha))(\gamma_j(a)) = \gamma_j(a) \circ G(\alpha),$$

por loi que $\gamma_i(a) = \gamma_j(a) \circ G(\alpha)$. Obtenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{H} & \\
 & \mathscr{F} & \\
G(i) \arrow[ur, "F(g_i)"] \arrow[uur, bend left, "\gamma_i"] \arrow[rr] & & G(j). \arrow[ul, "F(g_j)"'] \arrow[uul, bend right, "\gamma_j"']
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del colímite existe un único $a_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ que cumple $a_{\mathscr{F}} \circ g_i = \gamma_i(a)$ y $a_{\mathscr{F}} \circ g_j = \gamma_j(a)$. Definimos $\omega : \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$ dado por $\omega(a) = a_{\mathscr{F}}$. Obtenemos que

$$(F(g_i) \circ \omega)(a) = F(g_i)(\omega(a)) = F(g_i)(a_{\mathscr{F}}) = a_{\mathscr{F}} \circ g_i = \gamma_i(a)$$

y además

$$(F(g_i) \circ \omega)(a) = F(g_j)(\omega(a)) = F(g_j)(a_{\mathscr{F}}) = a_{\mathscr{F}} \circ g_j = \gamma_j(a).$$

Lo que concluye la demostración de la necesidad. Para la suficiencia construiremos una pregavilla $\mathscr{G}$ de *grupos abelianos* que definiremos como sigue:

- En abiertos: para todo abierto U de X se define $\mathscr{G}(U) = F(A_U)$.
- En morfimos: Si $V \subseteq U$, entonces tenemos un morfismo $j_!^* : A_V \to A_U$ inducido por la inclusión de V en U. Definimos las restricciones vía F como

  $$F(j_!^*) : F(A_V) \to F(A_U).$$

  Denotaremos a los morfismos de restricción por $\varphi_{U,V}$.

Afirmación 212. *La pregavilla $\mathscr{G}$ es una gavilla.*

Demostración. Sea $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de abiertos y $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ su unión. Demostremos que la sucesión a continuación es exacta:

$$\bigoplus_{\lambda,\mu} A_{U_\lambda \cap U_\mu} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\lambda} A_{U_\lambda} \xrightarrow{\beta} A_U \longrightarrow 0,$$

donde $\alpha = \bigoplus_{\lambda,\mu} (\varphi_{U_\lambda \cap U_\mu, U_\lambda} - \phi_{U_\lambda \cap U_\mu, U_\mu})$ y $\beta = \bigoplus_{\lambda} \varphi_{U_\lambda, U}$. Veamos la exactitud en tallos, para $x \in U$ tenemos los morfismos inducidos

$$\bigoplus_{x \in U_\lambda \cap U_\mu} A \xrightarrow{\alpha_x} \bigoplus_{x \in U_\lambda} A \xrightarrow{\beta_x} A.$$

Nótese que β_x es suprayectiva pues si $x \in U$, entonces existe λ tal que $x \in U_\lambda$. Para simplificar la notación escribiremos $A_{\mu,\lambda}$ para denotar al tallo en x de $A_{U_\lambda \cap U_\mu}$. Si $a \in A_{\mu,\lambda}$, entonces el morfismo inducido en tallos por α es la identidad, de forma que $\beta_x(\alpha_x(a)) = 0$. Para la otra contención sea $a = (a_\lambda)_\lambda \in \bigoplus_{x \in U_\lambda} A_\lambda$. Por construcción de la suma directa de A-módulos tenemos que $a_\lambda \neq 0$ para un número finito de λ, escribamos $\{a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n}\}$ para denotar a los elementos distintos de 0 de a. Obtenemos que

$$\beta_x(a) = a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_n}.$$

Por lo tanto, $a_{\lambda_1} = \sum_{\nu=2}^{n} a_{\lambda_\nu}$, de forma que el elemento $b \in \bigoplus_{x \in U_\lambda \cap U_\mu} A_{\mu,\lambda}$ definido como

$$(b)_\lambda = \begin{cases} -a_{\lambda_\nu} & \text{si } \lambda = \lambda_\nu, \nu \neq 1 \\ \sum_{\nu=2}^{n} a_{\lambda_\nu} & \text{si } \lambda = \lambda_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es la preimagen buscada. Por hipótesis del teorema, el funtor F transforma sumas directas en $\mathbf{Shv}_A(X)$ a productos directos en $\mathbf{Ab}$. En particular preserva la sucesión exacta anterior, por lo que obtenemos:

$$0 \longrightarrow F(A_U) \xrightarrow{F(\beta)} \prod_{\lambda} F(A_{U_\lambda}) \xrightarrow{F(\alpha)} \prod_{\lambda,\mu} F(A_{U_\lambda \cap U_\mu}).$$

Por lo tanto $\mathscr{G}$ es gavilla. $\square$

El siguiente paso es construir un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong F(\mathscr{G})$$

que sea funtorial en $\mathscr{F}$. Para poder realizar esto, construiremos un elemento $e \in F(\mathscr{G})$ que va a corresponder al morfismo identidad $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$ y luego definiremos

$$\Psi_{\mathscr{F}} : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to F(\mathscr{F})$$

como $\Psi_{\mathscr{F}}(f) = F(f)e$. Si suponemos que e existe, entonces el morfismo es funtorial en $\mathscr{F}$. En efecto, supongamos que $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ es un morfismo de gavillas, queremos demotrar que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \arrow[r, "\Psi_{\mathscr{F}}"] & F(\mathscr{F}) \\ \mathrm{Hom}(\mathscr{F}', \mathscr{G}) \arrow[u, "\phi_*"] \arrow[r, "\Psi_{\mathscr{F}'}"] & F(\mathscr{F}') \arrow[u, "F(\phi)"'] \end{tikzcd}$$

donde $\phi_*(f) = f \circ \phi$ para todo $f : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$. Calculando,

$$(F(\phi) \circ \Psi_{\mathscr{F}'})(f) = F(\phi)F(f)e = F(f \circ \phi)e = (\Psi_{\mathscr{F}} \circ \phi_*)(f).$$

De manera que el diagrama es conmutativo. Para construir e definimos la categoría $\mathcal{I}$ como sigue:

- Objetos: Están dados por parejas (U, a_U) donde $U \subseteq X$ es un abierto y $a_U \in F(A_U)$.
- Morfismos: Una flecha entre (a_U, U) y (a_V, V) es un morfismo $f : A_U \to A_V$ de gavillas tal que $F(f)a_V = a_U$.

Definamos el funtor $G : \mathcal{I} \to \mathbf{Shv}_A(X)$ como dado

- En objetos: $G((U, a_U)) = A_U$.
- En morfismos: Si $f : (U, a_U) \to (V, a_V)$ es una flecha en $\mathcal{I}$, entonces $G(f) = f$.

Recordemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv_{Ab}}(X)}(A_U, \mathscr{G}) = \Gamma(U; \mathscr{G}) = F(A_U)$. De forma que dado un elemento $(a_U, U) \in \mathcal{I}$ tenemos asociado un morfismo de gavillas[1]

$$[a_U] : A_U \to \mathscr{G}.$$

Afirmación 213. *La familia $\{[a_U]\}$ induce un morfismo entre G y $Const_{\mathscr{G}}$, el funtor constante $\mathscr{G}$.*

Demostración. Dada $a \in A_X(U)$ definimos un endomorfismo $\tilde{a} : A_U \to A_U$ como sigue: Para cada elemento $b \in A_U(W)$:

$$\tilde{a}(b) = a|_W b.$$

Notemos que esta operación tiene sentido ya que A es un anillo. Así, dado $a_U \in \mathscr{G}(U) = F(A_U)$ y $a \in A_X(U)$ definimos

$$a \cdot a_U = F(\tilde{a})(a_U),$$

de forma que volvemos a $\mathscr{G}$ en un A_X-módulo. Dada $a_U \in F(A_U)$ definimos $[a_U] : A_U \to \mathscr{G}$ de la siguiente manera: Si $W \subseteq U$ es un abierto entonces para todo $b \in A_U(W)$ se tiene que

$$[a_U]_W(b) = b \cdot (a_U|_W) = F(\tilde{b})(a_U|_W).$$

[1] Aquí estamos considerando a A_U como una *gavilla de grupos abelianos.*

Sea $f : (U, a_U) \to (V, a_V)$ un morfismo. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{G} & \\ A_U \arrow[ur, "{[a_U]}"] \arrow[rr, "G(f)"] & & A_V . \arrow[ul, "{[a_V]}"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que es conmutativo: Si $W \subseteq U \cap V$ es un abierto, entonces $[a_U]_W(b) = F(\tilde{b})(a_U|_W)$. Por hipótesis tenemos que $F(f)a_V = a_U$, así que

$$[F(f)a_V](b) = b((F(f)a_V)|_W) = F(\tilde{b})((F(f)a_V)|_W) = F(\tilde{b})(a_U|_W).$$

Por otro lado

$$[a_V]_W \circ f_W(b) = F(\widetilde{f_w(b)})(a_V|_W),$$

de manera que para ver la conmutatividad del diagrama necesitamos demostrar que

$$F(\tilde{b})((F(f)a_V)|_W) = F(\widetilde{f_w(b)})(a_V|_W).$$

Calculando obtenemos

$$F(\tilde{b})((F(f)a_V)|_W) = F(\tilde{b})(F(f_W)(a_V|_W)) = F(\tilde{b} \circ f_W)(a_V|_W),$$

donde la última igualdad se da puesto que f es un morfismo. Para concluir recurramos de nuevo a que f es un morfismo para notar que para todo abierto W' contenido en W y todo $c \in A_V(W')$ se cumple

$$(\tilde{b} \circ f_W)(c) = \tilde{b}(f_W(c)) = b|_{W'} f_W(c) = f_W(b)|_{W'}(c) = \widetilde{f_W(b)}(c).$$

Lo que nos da la conmutatividad del diagrama y por lo tanto el morfismo de funtores buscado.

□

Notemos que el morfismo de funtores nos determina un cono, por lo tanto también tenemos inducido un morfismo $[a]$ en los límites:

$$[a] : \varinjlim_{\mathcal{J}} G \to \varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Const}_{\mathscr{G}}.$$

Claramente $\varinjlim_{\mathcal{J}} \mathrm{Const}_{\mathscr{G}} \cong \mathscr{G}$. De manera análoga a la demostración del Lema 210 obtenemos que este morfismo inducido es un isomorfismo. Como el funtor F transforma los límites inductivos en límites proyectivos, entonces obtenemos un isomorfismo canónico de grupos abelianos:

$$F([a]) : F(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathcal{J}} F \circ G.$$

Construimos $e \in F(\mathscr{G})$ como sigue: Para todo morfismo $f : (U, a_U) \to (V, a_V)$ en $\mathcal{I}$ tenemos que $(F \circ G)(f)(a_V) = a_U$ por definición de la categoría $\mathcal{I}$. Por la propiedad universal del límite, la colección $\{a_U, (U, a_U) \in \mathcal{I}\}$ determina un único elemento $e \in \varprojlim_{\mathcal{I}}(F \circ G) = F(\mathscr{G})$. Para finalmente obtener el Teorema, demostremos que el morfismo $\Phi_{\mathscr{F}} : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to F(\mathscr{F})$ dado por $f \mapsto F(f)e$ es un isomorfismo. Anteriormente fue demostrada la funtorialidad en $\mathscr{F}$, veamos que el resultado es válido cuando $\mathscr{F}$ es de la forma A_U para U abierto. Si lo demostramos, por el Lema 210 y la hipótesis en F podremos concluir. Tenemos isomorfismos canónicos

$$\mathrm{Hom}(A_U, \mathscr{G}) \cong \Gamma(U; \mathscr{G}) \cong F(A_U)$$

Bajo este isomorfismo el elemento $f \in \mathrm{Hom}(A_U, \mathscr{G})$ corresponde a $F(f)e \in F(A_U)$, por construcción de e. En otras palabras, Φ_{A_U} es la composición de los dos isomorfismos de arriba, que es a lo que queríamos llegar. □

Corolario 214. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $\Lambda : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathcal{A}$ un funtor. Son equivalentes:*

1. *El funtor Λ admite un adjunto derecho, i.e. existe un funtor $\Omega : \mathcal{A} \to \mathbf{Shv}_A(X)$ y un isomorfismo para todo $\mathscr{F} \in \mathbf{Shv}_A(X)$ y todo $A \in \mathcal{A}$:*

$$Hom_{\mathbf{Shv}_A(X)}(\mathscr{F}, \Omega(A)) \cong Hom_{\mathcal{A}}(\Lambda(\mathscr{F}), A)$$

   Funtorial en $\mathscr{F}$ y en A.

2. *El funtor Λ conmuta con límites inductivos.*

Demostración. La necesidad es una Proposición propia de Teoría de Categorías y no la demostraremos, el lector interesado puede consultar (20), Proposición 2.1.10 página 40. Para demostrar la suficiencia recordemos que para todo objeto $G \in \mathcal{A}$ el funtor $\mathscr{F} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\Lambda(\mathscr{F}), G)$ transforma límites inductivos en límites proyectivos, de forma que por el Teorema 211 este es representado por un elemento $\Omega(G)$. En otras palabras

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Lambda(\mathscr{F}), G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(X)}(\mathscr{F}, \Omega(G)).$$

Este elemento depende funtorialmente en G y por lo tanto Ω es el adjunto derecho buscado. □

3.7. El funtor $f^!$

La construcción de f^* en la Subsección 3.2.3 aunque un poco complicada, no requirió de demasiado esfuerzo. Caso contrario a encontrar un adjunto a $f_!$ que por lo general *no existe* en la Categoría de Gavillas, sino en la Derivada de esta. La idea de esta construcción se remonta al artículo (29) de Verdier.

Proposición 215. *Sean $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios localmente compactos de dimensión cohomológica finita y $\mathscr{K}$ una gavilla de A-módulos soft y plana (por la derecha). El funtor*

$$f_!^{\mathscr{K}} : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A(Y)$$

dado por $f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{F}) = f_!(\mathscr{K} \otimes \mathscr{F})$ es exacto y conmuta con límites inductivos. Por lo tanto admite un adjunto derecho $f^!_{\mathscr{K}}$.

Demostración. Para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0,$$

como $\mathscr{K}$ es plano, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \otimes \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{F}'' \otimes \mathscr{K} \longrightarrow 0$$

es exacta y por el Lema 208 todos los términos son softs, por el lema 159 el funtor es exacto. Resta por demostrar que $f_!^{\mathscr{K}}$ conmuta con límites inductivos. Si $f_!^{\mathscr{K}}$ preserva sucesiones exactas, entonces basta con demostrar que conmuta con sumas directas, sin embargo

$$f_!^{\mathscr{K}}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda\right) = f_!\left(\mathscr{K} \otimes \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda\right)\right) \cong f_!\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (\mathscr{K} \otimes \mathscr{F}_\lambda)\right) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_!\left(\mathscr{K} \otimes \mathscr{F}_\lambda\right).$$

La última igualdad por la Proposición 166. La última parte de la Proposición se sigue del Corolario 214. $\square$

La Proposición 215 nos induce un isomorfismo de adjunción

$$\delta_{\mathscr{L}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(Y)}(f_!^{\mathscr{L}}(\mathscr{F}), \mathscr{G}) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(X)}(\mathscr{F}, f^!_{\mathscr{L}}(\mathscr{G}))$$

que ocuparemos repetidamente en la culminación de la demostración del Teorema de Dualidad.

Corolario 216. *Si $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}_A(Y)$ es una gavilla arbitraria, entonces el funtor $Hom(f_!^{\mathscr{K}}(-), \mathscr{G})$ admite un adjunto derecho.*

Demostración. Sabemos que $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{G})$ conmuta con límites inductivos para cualquier gavilla $\mathscr{G}$, por la Proposición 215 obtenemos que la composición $\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(-), \mathscr{G})$ conmuta con límites inductivos. La conclusión es inmediata del Corolario 214. $\square$

Corolario 217. *Para toda gavilla $\mathscr{G}$ en Y. Si $\mathscr{L}$ es una gavilla soft y plana en X, entonces existe una gavilla $f^!(\mathscr{L},\mathscr{G})$ y un isomorfismo funtorial en $\mathscr{F}$:*

$$Hom(f_!^{\mathscr{L}}(\mathscr{F}),\mathscr{G}) \cong Hom(\mathscr{F}, f^!(\mathscr{L},\mathscr{G})).$$

Además, si $\mathscr{G}$ es una gavilla inyectiva, entonces $f^!(\mathscr{L},\mathscr{G})$ es también inyectiva.

Demostración. La primer parte es directa del Corolario 216. Si suponemos que $\mathscr{G}$ es inyectivo, entonces el funtor

$$\mathscr{F} \mapsto \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{L}},\mathscr{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, f^!(\mathscr{L},\mathscr{G}))$$

es también exacto, i.e. la gavilla $f^!(\mathscr{L},\mathscr{G})$ es inyectiva. □

3.7.1. La Extensión a Complejos de Gavillas

Aunque en el Capítulo 2 ya se vio que existe una extensión de cualquier funtor aditivo entre categorías abelianas a las respectivas categorías de complejos, se creyó conveniente el incluir una descripción explícita de este funtor en este caso, debido que, a *posteriori* permitirá poder realizar diversas demostraciones. Con esto en mente, sea

$$0 \longrightarrow A_X \longrightarrow \mathscr{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{d^1} \ . \quad . \quad . \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{L}^n \longrightarrow 0$$

la resolución de A_X dada en la Proposición 201. Describamos la extensión natural del funtor $f_!^{\mathscr{L}^i}$ de la Proposición 215 a $f_!^{\mathscr{L}^\bullet} : \mathbf{Shv}_A(X) \to \mathbf{Shv}_A^\bullet(Y)$, donde el complejo $\mathscr{L}^\bullet$ es el complejo *recortado*

$$\mathscr{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{d^1} \ . \quad . \quad . \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{L}^n \longrightarrow 0.$$

Como $f_!^{\mathscr{L}^i}$ es exacto derecho y por lo tanto la sucesón

$$f_!(\mathscr{L}^0 \otimes \mathscr{F}) \xrightarrow{f_!(d^0 \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}})} \ . \quad . \quad . \xrightarrow{f_!(d^{n-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}})} f_!(\mathscr{L}^n \otimes \mathscr{F}) \longrightarrow 0$$

es exacta, aplicando $f_!^{\mathscr{L}^i}$ término a término, este funtor nos define un complejo de gavillas. La extensión a ${}^2f_!^{\mathscr{L}^\bullet} : \mathbf{Shv}_A^\bullet(X) \to \mathbf{Shv}_A^{\bullet\bullet}(Y)$ se da a continuación, para ello cabe recordar que la construcción del bicomplejo tensorial $\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet$, para todo $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ se define $(\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet)^{p,q} = \mathscr{L}^p \otimes \mathscr{F}^q$, con diferenciales horizontales

$$d_I^{p,q} : (\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet)^{p,q} \xrightarrow{d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^q}} (\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet)^{p+1,q}$$

y diferenciales verticales[1]

$$d_{II}^{p,q} : (\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet)^{p,q} \xrightarrow{(-1)^p(\mathrm{id}_{\mathscr{L}^p} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet})} (\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet)^{p,q+1}.$$

[1]Recuerde nuestra convención en los signos, del Capítulo 2.

- En objetos: El complejo doble buscado se define en componentes aplicando $f_!^{\mathscr{L}^i}$. Las diferenciales horizontales son $f_!(d_I^{p,q})$ y las diferenciales verticales $f_!(d_{II}^{p,q})$. Veamos que, en efecto, estas nos proporcionan las diferenciales de un bicomplejo

$$\begin{aligned} f_!(d_{II}^{p+1,q}) \circ f_!(d_I^{p,q}) &= f_!((-1)^{p+1}\mathrm{id}_{\mathscr{L}^p} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet}) \circ f_!(d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^q}) \\ &= f_!((-1)^{p+1} d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet}) \\ &= (-1)^{p+1} f_!(d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet}). \end{aligned}$$

  Por otro lado:

$$\begin{aligned} f_!(d_I^{p,q+1}) \circ f_!(d_{II}^{p,q}) &= f_!(d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^{q+1}}) \circ f_!((-1)^p\mathrm{id}_{\mathscr{L}^p} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet}) \\ &= f_!((-1)^p d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet}) \\ &= (-1)^p f_!(d^p_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes d^q_{\mathscr{F}^\bullet}). \end{aligned}$$

  Por lo tanto $f_!(d_{II}^{p+1,q}) \circ f_!(d_I^{p,q}) = -f_!(d_I^{p,q+1}) \circ f_!(d_{II}^{p,q})$, esto es lo que se necesita para formar un bicomplejo.

- En morfismos: Si $g : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo, inducimos un morfismo entre $f_!(\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet)$ y $f_!(\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{G}^\bullet)$ vía la composición $f_!(\mathrm{id}_{LL^\bullet} \otimes g)$.

Por último, el funtor buscado es:

$$\mathrm{Tot}^\bullet({}^2 f_!^{\mathscr{L}^\bullet}) : \mathbf{Shv}^\bullet_A(X) \longrightarrow \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y).$$

Donde $\mathrm{Tot}^\bullet : \mathbf{Shv}^{\bullet\bullet}_A(Y) \to \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y)$ es el complejo totalizador. En componentes este es

$$\mathrm{Tot}^\bullet({}^2 f_!^{\mathscr{L}^\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} ({}^2 f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet))^{p,q} = \bigoplus_{p+q=n} f_!(\mathscr{L}^p \otimes \mathscr{F}^q),$$

teniendo como diferenciales las inducidas en la suma directa. Como vimos en la Proposición 215, el funtor $f_!^{\mathscr{L}^i}$ admite un adjunto derecho $f^!_{\mathscr{L}^i}$. La siguiente transformación natural

$$f_!(d^i_{\mathscr{L}^\bullet} \otimes -) : f_!^{\mathscr{L}^i}(-) \longrightarrow f_!^{\mathscr{L}^{i+1}}(-)$$

corresponde por adjunción a una transformación natural:

$$(d^i_{\mathscr{L}^\bullet})^* : f^!_{\mathscr{L}^{i+1}}(-) \longrightarrow f^!_{\mathscr{L}^i}(-).$$

Definamos para toda gavilla $\mathscr{G} \in \mathbf{Shv}_A(Y)$ el complejo de gavillas $f^!_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{G})$, cuyos componentes son:

$$f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G})^p = f^!_{\mathscr{L}^{-p}}(\mathscr{G})$$

y que tiene por diferenciales

$$d^p_{f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G})} = (d^{-p-1}_{\mathscr{L}^\bullet})^*_{\mathscr{G}}.$$

Esto nos permite definir un funtor

$$f^!_{\mathscr{L}^\bullet} : \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y) \longrightarrow \mathbf{Shv}_A(X).$$

De manera completamente análoga a la extensión hecha para $f_!^{\mathscr{L}^\bullet}$, volvemos a extender nuestro funtor a las categorías de complejos, obteniendo:

$${}^2 f^!_{\mathscr{L}^\bullet} : \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y) \longrightarrow \mathbf{Shv}^{\bullet\bullet}_A(X).$$

Nótese que los componentes (p,q) de ${}^2f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)$ son $f^!_{\mathscr{L}^{-p}}(\mathscr{G}^q)$. Definimos por último

$$f^!_{\mathscr{L}^\bullet} : \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y) \longrightarrow \mathbf{Shv}^\bullet_A(X)$$

como la composición de ${}^2f^!_{\mathscr{L}^\bullet}$ con $\mathrm{Tot}^\bullet$. Con esto finalizamos la extensión del funtor a la Categoría de Complejos, veremos en la siguiente Sección de manera precisa qué es la dualidad de Verdier.

3.8. Forma Global del Teorema de Dualidad

Llegamos al resultado principal del Capítulo y de la tesis, esta es la Dualidad de Verdier. El propósito de esta sección es demostrar el sigiente Teorema

Teorema 218. *Existe un funtor, único bajo un único isomorfismo:*

$$f^!_+ : D^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \longrightarrow D^+(\mathbf{Shv}_A(X))$$

Provisto de un isomorfismo bifuntorial en $\mathscr{F} \in D(\mathbf{Shv}_A(X))$ y $\mathscr{G} \in D^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$:

$$\Delta_f(\mathscr{F},\mathscr{G}) : RHom(Rf_!\mathscr{F},\mathscr{G}) \xrightarrow{\cong} RHom(\mathscr{F}, f^!_+\mathscr{G}).$$

Si la dimensión cohomológica de X y Y es finita, entonces existe un funtor, único bajo un único isomorfismo:

$$f^! : D(\mathbf{Shv}_A(Y)) \longrightarrow D(\mathbf{Shv}_A(X))$$

y un isomorfismo bifuntorial en $\mathscr{F} \in D(\mathbf{Shv}_A(X))$ y $\mathscr{G} \in D^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$:

$$\Delta_f(\mathscr{F},\mathscr{G}) : RHom(Rf_!\mathscr{F},\mathscr{G}) \xrightarrow{\cong} RHom(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G})$$

Observación. Es inmediato el demostrar la unicidad, puesto que tomando la cohomología de grado 0 en los dos isomorfismos del Teorema se tiene la relación de $f^!_+$ (resp. $f^!$) como adjunto derecho de $R^+_!$ (resp. $Rf_!$), así que todo se sigue del Teorema 117. Observe que el Teorema 109 garantiza que, si podemos encontrar una clase adaptada para la categoría $D^+(\mathbf{Shv}_A(X))$ y suponemos que el espacio tiene dimensión cohomológica finita, entonces automáticamente garantizamos la existencia del funtor derivado total.

Por tanto todo se reduce a demostrar la existencia, que se abordará en la Subsección siguiente, antes de hacerlo recordemos el isomorfismo de adjunción obtenido de la Proposición 215:

$$\delta_{\mathscr{L}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(Y)}(f^{\mathscr{L}}_!(\mathscr{F}),\mathscr{G}) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(X)}(\mathscr{F}, f^!_{\mathscr{L}}(\mathscr{G}))$$

Así las cosas, comencemos definiendo los tricomplejos *de grupos abelianos*

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}^{\bullet\bullet\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, {}^2f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \\ \mathrm{Hom}^{\bullet\bullet\bullet}({}^2f^{\mathscr{K}^\bullet}_!(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet) \end{cases}$$

cuyos componentes son

$$\begin{cases} \left(\mathrm{Hom}^{\bullet\bullet\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, {}^2 f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet))\right)^{p,q,r} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(X)}(\mathscr{F}^{-p}, f^!_{\mathscr{L}^{-q}}(\mathscr{G}^r)) \\ \left(\mathrm{Hom}^{\bullet\bullet\bullet}({}^2 f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet)\right)^{q,p,r} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}_A(Y)}(f_!^{\mathscr{L}^{-q}}(\mathscr{F}^{-p}), \mathscr{G}^r) \end{cases}$$

y con las diferenciales inducidas como en la Subsección 3.7.1. El ismorfismo $\delta_{\mathscr{L}^{-q}}(\mathscr{F}^{-p}, \mathscr{G}^r)$ es funtorial en $\mathscr{L}$ -cuando $\mathscr{L}$ es plana por la Proposición 215- y funtorial en $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ arbitrarias por construcción. De esta forma, conmuta con las diferenciales d_I, d_{II}, d_{III} del tricomplejo, por lo tanto induce un isomorfismo de tricomplejos que denotaremos por

$${}^3\Delta_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) : \mathrm{Hom}^{\bullet\bullet\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, {}^2 f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}^{\bullet\bullet\bullet}({}^2 f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet).$$

Esto a su vez por funtorialidad induce un isomorfismo natural entre los complejos totales asociados[1], que denotaremos

$$\Delta^\bullet_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) : \mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}^\bullet(f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet). \tag{3.1}$$

3.8.1. Demostración de la existencia

Como la categoría de gavillas sobre X tiene suficientes inyectivos, sabemos que $I^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \equiv D^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$, donde la categoría de la izquierda consistente de todos los complejos acotados inferiomente, cuyos componentes consisten en objetos inyectivos[2] Sea $Q_{\mathbf{Ab}} : \mathbf{Ab}^\bullet \longrightarrow D(\mathbf{Ab})$ el funtor de localización a la categoría derivada de grupos abelianos. La fórmula (3.1) nos permite definir funtores

$$\mathbf{Shv}^\bullet_A(X) \times I^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \longrightarrow D(\mathbf{Ab})$$

$$(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \mapsto Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \tag{3.2}$$

$$(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) \mapsto Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet) \tag{3.3}$$

y un isomorfismo

$$Q_{\mathbf{Ab}}\Delta^\bullet_{\mathscr{K}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) : Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \xrightarrow{\cong} Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet) \tag{3.4}$$

Proposición 219. *Los funtores 3.2 y 3.3 transforman casi-isomorfismos de $\mathscr{G}^\bullet$ y $\mathscr{F}^\bullet$ en isomorfismos en $D(\mathbf{Ab})$.*

Demostración. En ambos casos el complejo $\mathscr{G}^\bullet$ es inyectivo, sabemos que sumas directas de objetos inyectivos es de nuevo un objeto inyectivo, por lo tanto se sigue del corolario 217 que las imágenes $Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet))$ y $Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet))$ son inyectivos (pues cada elemento del complejo lo es). Veamos que transforma casi-isomorfismos de $\mathscr{F}^\bullet$ en isomorfismos,

[1] Otra forma de ver a este complejo es como el complejo simple asociado del complejo doble

$$Hom^{\bullet\bullet}(\mathscr{F}^\bullet, \mathrm{Tot}^\bullet(f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)))$$

[2] No hay que olvidar que si Y tiene dimensión cohomológica finita, entonces $I^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \equiv D(\mathbf{Shv}_A(Y))$.

supongamos que $m : \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{F}'^\bullet$ es un casi-isomorfismo. Si $\mathscr{L}^\bullet$ es acotado inferiormente, entonces el complejo $\mathrm{Tot}^\bullet(f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet))$ es acotado inferiormente, además todos los componentes son inyectivos (cf. Corolario 216), por lo tanto, usando la Proposición 115 la homotopía m nos induce una homotopía

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}'^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}^\bullet(m, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet))"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}'^\bullet, \mathrm{Tot}^\bullet(f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet))) \arrow[r] & \mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathrm{Tot}^\bullet(f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)))
\end{tikzcd}$$

que en $D(\mathbf{Ab})$ es un isomorfismo. □

Sean $Q_{\mathbf{Shv}_A(X)} : \mathbf{Shv}^\bullet_A(X) \to D(\mathbf{Shv}_A(X))$ y $Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} : \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y) \to D(\mathbf{Shv}_A(Y))$ los funtores de localización. Denotemos por $Q^+_{\mathbf{Shv}_A(X)}$ (respectivamente $Q^+_{\mathbf{Shv}_A(Y)}$) a la restricción del funtor a $I^+(\mathbf{Shv}_A(X))$ (respectivamente a $I^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$). Tenemos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
I^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "Q^+_{\mathbf{Shv}_A(Y)}"'] & & K(I^+(\mathbf{Shv}_A(Y))) \arrow[dl, "\cong"] \\
& D^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) &
\end{tikzcd}$$

donde K denota el funtor canónico a la categoría homotópica, de manera completamente análoga tenemos un triángulo en $\mathbf{Shv}_A(X)$. Por la Proposición 219 tenemos que el funtor $f^!_{\mathscr{L}^\bullet}$ pasa a la categoría homotópica, de manera que define un funtor

$$f^!_{\mathscr{L}^\bullet} : K(I^+(\mathbf{Shv}_A(Y))) \longrightarrow K(I^+(\mathbf{Shv}_A(X)))$$

Componiendo con los isomorfismos (recuerde que $\mathbf{Shv}_A(Y)$ tiene suficientes inyectivos) entre $K(I^+(\mathbf{Shv}_A(Y)))$ y $D^+(\mathbf{Shv}_A(Y)$ (resp. $K(I^+(\mathbf{Shv}_A(X)))$ y $D^+(\mathbf{Shv}_A(X))$ el funtor pasa a las categorías derivadas:

$$f^!_+ : D^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \longrightarrow D^+(\mathbf{Shv}_A(X))$$

Este funtor es el, escencialmente único[1], funtor que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \arrow[r, "f^!_{\mathscr{L}^\bullet}"] \arrow[d, "Q^+_{\mathbf{Shv}_A(Y)}"'] & I^+(\mathbf{Shv}_A(X)) \arrow[d, "Q^+_{\mathbf{Shv}_A(X)}"] \\
D^+(\mathbf{Shv}_A(Y)) \arrow[r, "f^!_+"] & D^+(\mathbf{Shv}_A(X))
\end{tikzcd}$$

Proposición 220. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Shv}^\bullet_A(X) \arrow[r, "f_!^{\mathscr{L}^\bullet}"] \arrow[d, "Q^+_{\mathbf{Shv}_A(Y)}"'] & \mathbf{Shv}^\bullet_A(Y) \arrow[d, "Q^+_{\mathbf{Shv}_A(Y)}"] \\
D^+(\mathbf{Shv}_A(X)) \arrow[r, "Rf_!"] & D^+(\mathbf{Shv}_A(Y))
\end{tikzcd}$$

[1] Es decir, único bajo un único isomorfismo. Esto lo tenemos por la propiedad universal de los funtores derivados.

es conmutativo bajo un único isomorfismo.

Demostración. Para todo complejo $\mathscr{F}^\bullet$, tenemos un morfismo:

$$\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^\bullet} : \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Tot}^\bullet(\mathscr{L}^\bullet \otimes \mathscr{F}^\bullet).$$

Recordemos que $\mathscr{L}^\bullet$ es una resolución acotada de A_X por gavillas planas , por tanto el morfismo $\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^\bullet}$ es un casi-isomorfismo, obtenemos una transformación natural

$$Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} f_!(\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^\bullet}) : Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} f_!(\mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet).$$

Por lo tanto, el funtor $Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet)$ transforma casi-isomorfismos del argumento $\mathscr{F}^\bullet$ en isomorfismos así que, por la propiedad universal de los funtores derivados (cf. Sección 2.6), el morfismo $Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} f_!(\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{F}^\bullet})$ define una única transformación natural

$$Rf_! Q_{\mathbf{Shv}_A(X)} \longrightarrow Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)} f_!^{\mathscr{L}^\bullet}$$

y este único morfismo es un isomorfismo. $\square$

Para concluir la demostración de la existencia, sean $\mathscr{F}^\bullet \in D(\mathbf{Shv}_A(X))$ y $\mathscr{H} \in D^+(\mathbf{Shv}_A(X))$. Por el Teorema 102 el objeto $R\mathrm{Hom}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{H}^\bullet)$ en $D(\mathbf{Ab})$ es isomorfo a la construcción siguiente: Existe un objeto $\mathscr{H}'^\bullet$ en $I^+(\mathbf{Shv}_A(X))$ cuya imagen bajo $Q_{\mathbf{Shv}_A(X)}$ es isomorfa a $\mathscr{H}^\bullet$. La imagen por $Q_{\mathbf{Ab}} : \mathbf{Ab}^\bullet \to D^+\mathbf{Ab}$ del complejo simple $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{H}'^\bullet)$ es canónicamente isomorfa a $R\mathrm{Hom}(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{H}^\bullet)$. Como consecuencia de la discusión anterior y la Proposición 220 tenemos, para todo $\mathscr{F}^\bullet \in \mathbf{Shv}_A^\bullet(X)$ y todo objeto $\mathscr{G}^\bullet$ de $I^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$ isomorfismos bifuntoriales:

$$\Omega^1 : Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(Q_{\mathbf{Shv}_A(X)}\mathscr{F}^\bullet, f^!_+(Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)}(\mathscr{G}^\bullet))) \tag{3.5}$$

$$\Omega^2 : Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(Rf_!(Q_{\mathbf{Shv}_A(X)}\mathscr{F}^\bullet), Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)}\mathscr{G}^\bullet) \tag{3.6}$$

Por el ismorfismo 3.1 y de las propiedades universales de las categorías derivadas , existe un isomorfismo escencialmente único y bifuntorial

$$\Delta_f(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet) : R\mathrm{Hom}(\mathscr{F}^\bullet, f^!_+(\mathscr{G}^\bullet)) \xrightarrow{\cong} R\mathrm{Hom}(Rf_!(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet)$$

para todos $\mathscr{F}^\bullet \in D(\mathbf{Shv}_A(X))$ y $\mathscr{G}^\bullet \in D^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$, tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}^\bullet, f^!_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{G}^\bullet)) \arrow[r, "\Omega^1"] \arrow[d, "Q_{\mathbf{Ab}}\Delta^\bullet_{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet,\mathscr{G}^\bullet)"'] & R\mathrm{Hom}(Q_{\mathbf{Shv}_A(X)}\mathscr{F}^\bullet, f^!_+(Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)}\mathscr{G}^\bullet) \arrow[d, "\Delta_f(Q_{\mathbf{Shv}_A(X)}\mathscr{F}^\bullet, Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)}\mathscr{G}^\bullet)"] \\
Q_{\mathbf{Ab}}\mathrm{Hom}^\bullet(f_!^{\mathscr{L}^\bullet}(\mathscr{F}^\bullet), \mathscr{G}^\bullet) \arrow[r, "\Omega^2"'] & R\mathrm{Hom}(Rf_!(Q_{\mathbf{Shv}_A(X)}\mathscr{F}^\bullet), Q_{\mathbf{Shv}_A(Y)}\mathscr{G}^\bullet)
\end{tikzcd}$$

para todo $\mathscr{F}^\bullet \in \mathbf{Shv}_A^\bullet(X)$ y todo $\mathscr{G}^\bullet \in I^+(\mathbf{Shv}_A(Y))$. Lo que se quería llegar a demostrar.

3.9. El complejo dualizante

Vamos a definir un complejo que de cierta forma encapsula toda la información provista por la dualidad de Verdier. Vemos la aplicación esperada de esta Dualidad que,, como buena generalizació, para el caso específico de variedades orientadas con coeficientes sobre un campo, obtenemos la dualidad de Poincaré.

Definición 221. Sea X un espacio localmente compacto de dimensión finita y A un anillo noetheriano. Definimos el complejo dualizante de X como $\mathrm{cte}^!(A_{\mathrm{pt}})$ donde $\mathrm{cte} : X \to \{\mathrm{pt}\}$ es la aplicación constante a un punto. Denotamos a este complejo por $\mathfrak{D}_X$.

La Dualidad de Verdier nos da un isomorfismo bifuntorial

$$\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) : R\mathrm{Hom}(R\mathrm{cte}_!\mathscr{F},\mathscr{G}) \xrightarrow{\cong} R\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathrm{cte}^!\mathscr{G}).$$

Especializando al caso en que $\mathscr{G}$ es la gavilla A_{pt} obtenemos

$$\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathscr{F}, A_{\mathrm{pt}}) : R\mathrm{Hom}(R\mathrm{cte}_!\mathscr{F}, A_{\mathrm{pt}}) \xrightarrow{\cong} R\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathfrak{D}_X).$$

Por otro lado, sabemos del Ejemplo 164 que $\mathrm{cte}_!(-) \cong \Gamma_c(X; -)$ canónicamente y por lo tanto existe un isomorfismo bifuntorial

$$\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathscr{F}, A_{\mathrm{pt}}) : R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X;\mathscr{F}), A_{\mathrm{pt}}) \xrightarrow{\cong} R\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathfrak{D}_X).$$

La Categoría $\mathbf{Shv}_A(\mathrm{pt})$ es canónicamente equivalente a A-Mod y la Categoría de gavillas tiene suficientes inyectivos, por lo cual el isomorfismo $K^+(\mathcal{I}^+(\mathbf{Shv}_A(X))$ da lugar al isomorfismo

$$\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathscr{F}, A_{\mathrm{pt}}) : \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(A\text{-Mod}))}(R\Gamma_c(X;\mathscr{F}), K^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathscr{F},\mathfrak{D}_X).$$

Donde $K^\bullet$ es la -única- resolución de A por módulos inyectivos. Podemos calcular dentro de las categorías homotópicas de objetos inyectivos aplicando directamente los funtores inducidos al cociente, obtenemos para toda gavilla inyectiva $\mathcal{K}$ el isomofismo

$$\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathcal{I}, A_{\mathrm{pt}}) : \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(A\text{-Mod}))}(\Gamma_c(X;\mathcal{K}), K^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathcal{K},\mathfrak{D}_X). \tag{3.7}$$

Como consecuencia formal de tener un adjunto (véase el Corolario 177) sabemos que $f^!$ preserva inyectivos, tenemos que $\mathfrak{D}_X \cong f^!K^\bullet$. Escribiendo $\mathcal{K} = \mathfrak{D}_X$, obtenemos un isomorfismo

$$\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathcal{I}, A_{\mathrm{pt}}) : \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(A\text{-Mod}))}(\Gamma_c(X;\mathfrak{D}_X), K^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathfrak{D}_X,\mathfrak{D}_X).$$

Denotemos a la imagen bajo $\Delta_{\mathrm{cte}}(\mathcal{I}, A_{\mathrm{pt}})^{-1}$ de la identidad $\mathrm{Id}_{\mathfrak{D}_X}$ por $\int_X$, este es un morfismo

$$\int_X : \Gamma_c(X,\mathfrak{D}_X) \to K^\bullet.$$

Definición 222. El morfismo $\int_X$ es la aplicación de traza de X.

Por el Lema de Yoneda[1] (cf. (23)) tenemos que el isomorfismo (3.7), especificamente su inversa, puede ser recuperado por medio de la aplicación de traza, usando el morfismo $\phi \mapsto \int_X \circ \Gamma_c(X;\phi)$ para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathcal{K}, \mathfrak{D}_X)$.

Lema 223. *El complejo dualizante puede ser representado por un complejo acotado $\mathfrak{D}_X$ de inyectivos con $\mathfrak{D}_X^p = 0$ para $p < -n$. Más aún, para todo abierto U de X se tiene un isomorfismo canónico*

$$\Gamma(U, \mathcal{H}^{-n}\mathfrak{D}_X) \cong \mathit{Hom}(H_c^n(U; A_X), A).$$

Demostración. Sea $A_X \to S^\bullet$ una resolución soft de A_X de longitud n, la cual existe por 201. Considere la inclusión $j : U \to X$ de un abierto, el complejo trasladado $S^\bullet[p]$ es claramente soft y $j^*S^\bullet[p]$ es soft por el corolario 155. Por el Lema 171 la gavilla $j_!j^*S^\bullet[p]$ es soft. Sea $j_!j^*S^\bullet[p] \to \mathcal{J}^\bullet$ una resolución por inyectivos de $j_!j^*S^\bullet[p]$, utilizando la notación de arriba esta induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathcal{J}^\bullet, \mathfrak{D}_X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I}^+(A\text{-Mod}))}(\Gamma_c(X;\mathcal{J}^\bullet), K^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{K^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(j_!j^*S^\bullet[p], \mathfrak{D}_X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K^+(A\text{-Mod})}(\Gamma_c(X; j_!j^*S^\bullet[p]), K^\bullet). \end{array}$$

Los morfismos verticales son isomorfismos por el Lema 91 y por la Dualidad de Verdier el morfismo horizontal de arriba es un isomorfismo, por lo tanto el morfismo horizontal de abajo

$$\mathrm{Hom}_{K^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(j_!j^*S^\bullet[p], \mathfrak{D}_X) \to \mathrm{Hom}_{K^+(A\text{-Mod})}(\Gamma_c(X; j_!j^*S^\bullet[p]), K^\bullet)$$

es un isomorfismo. Por la Proposición 113 tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{K^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(j_!j^*S, \mathfrak{D}_X[-p]) \to \mathrm{Hom}_{K^+(A\text{-Mod})}(\Gamma_c(X; j_!j^*S^\bullet[p]), K^\bullet)$$

y por el Ejemplo 174 podemos reescribirlo como

$$\mathrm{Hom}_{K^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(j_!j^*S, \mathfrak{D}_X[-p]) \to \mathrm{Hom}_{K^+(A\text{-Mod})}(\Gamma_c(U; j^*S^\bullet[p]), K^\bullet).$$

Ahora bien, por la Proposición 113 y el Lema 209 tenemos canónicamente un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{K^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(j_!j^*S, \mathfrak{D}_X[-p]) \cong H^{-p}\Gamma(U : \mathfrak{D}_X).$$

Si $p > n$, por ser S una resolución de longitud n, tenemos que el complejo $\Gamma_c(U; S^\bullet[p])$ está concentrado en grados negativos. En otras palabras $\mathcal{H}^{-p}\mathfrak{D}_X = 0$ para $p > n$ y por tanto

[1] En (18) le llaman el *Principio de Yoneda*, puesto que es utilizado para recuperar isomorfismos en una variedad de contextos. Por ejemplo, esta clase de argumento fue utilizado para demostrar el Teorema 211.

podemos reemplazar a $\mathfrak{D}_X$ por su truncamiento $\tau_{\geq -n}\mathfrak{D}_X$. En particular obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{-n}\mathfrak{D}_X \longrightarrow \mathfrak{D}_X^{-n} \longrightarrow \mathfrak{D}_X^{-n+1} \longrightarrow . \quad . \quad .$$

Por la Proposición 113 y el Lema 209 tenemos los siguientes isomorfismos canónicos

$$\Gamma(U;\mathcal{H}^{-n}\mathfrak{D}_X) \cong H^{-n}\Gamma(U;\mathfrak{D}_X) \cong \mathrm{Hom}_{D^+(\mathbf{Ab})}(\Gamma_c(U;S^\bullet[n]),K^\bullet).$$

Nótese que el complejo $\Gamma_c(U;S^\bullet[n])$ tiene únicamente grados no positivos y el $K^\bullet$ tiene únicamente no negativos, pues es una resolución. En otras palabras

$$\mathrm{Hom}_{D^+(\mathbf{Ab})}(\Gamma_c(U;S^\bullet[n]),K^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(H^0\Gamma_c(U;S^\bullet[n]),H^0(K^\bullet)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(H_c^n(U;A_X),A),$$

terminando la demostración. □

En resumen, el Lema 223 provee de una manera de identificar cierta parte del complejo dualizante con un complejo conocido. Podremos ser más específicos cuando el espacio topológico tenga más estructura. Exploraremos esto en la siguiente sección al discutir la dualidad de Poincaré.

3.9.1. Dualidad de Poincaré

Supongamos que el espacio X es ahora una variedad topológica. En cohomología singular (cf. (11)) se define la *gavilla de orientación* ω_X como

$$U \mapsto \mathrm{Hom}(H_c^n(U;A),A) \cong \mathrm{Hom}(H_c^n(U;A_U),A)$$

Donde los morfismos de restricción son dados como sigue: Si $V \subseteq U$ son abiertos de X, entonces la extensión con ceros define un morfismo

$$H_c^n(V;A_V) \longrightarrow H^n(U;A_U)$$

la restricción es definida como el dual de este morfismo.

Proposición 224. *La pregavilla ω_X es una gavilla.*

Demostración. Por el Lema 223 la gavilla ω_X es $\mathcal{H}^{-n}\mathfrak{D}_X$. □

Lo interesante de la relación entre el complejo dualizante y la gavilla de orientación es que pueden identificarse en el caso de variedades topológicas. Este es el contenido del siguiente Lema, que nos permite en última instancia obtener la dualidad de Poincaré.

Lema 225. *Los complejos $\omega_X[n]$ y $\mathfrak{D}_X$ son casi-isomorfos.*

Demostración. Sea $A_X \to S^\bullet$ una resolución por gavillas soft. Por la demostración del Lema 223 existe un isomorfismo

$$\mathcal{H}^{-p}\Gamma(U; j^*\mathfrak{D}_X) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma_c(U; S^\bullet[p]), K^\bullet)$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$. Si el abierto U es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{H}^n$ por el cálculo de la cohomología de estos espacios en la Sección 3.5.1 tenemos que el complejo $\Gamma_c(U; S^\bullet[p])$ es casi-isomorfo a $H^n_c(U; j^*A_X)$. Obtenemos el isomorfismo

$$\mathcal{H}^{-p}\Gamma(U; j^*\mathfrak{D}_X) \cong \mathrm{Ext}^{n-p}(H^n_c(U; j^*A_X), A).$$

Del cálculo de cohomología sabemos que $H^n_c(U; j^*A_X)$ es libre. En consecuencia $\mathcal{H}^{-p}\Gamma(U; \mathfrak{D}_X) = 0$ para $p \neq n$. Podemos encontrar una base de vecindades homeomorfas a $\mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{H}^n$, en consecuencia $\mathcal{H}^{-p}(\mathfrak{D}_X)_x = 0$ para $p \neq n$. Por el Lema 223 terminamos. $\square$

El siguiente Lema puede considerarse como una versión intermedia entre la Dualidad de Poincaré y la de Verdier.

Lema 226. *El morfismo de traza $\int_X$ induce un isomorfismo para toda gavilla*

$$\mathit{Ext}^{n-p}(\mathscr{K}, \omega_X) \cong \mathit{Hom}(R\Gamma_c(X; \mathscr{K}), K^\bullet)$$

Demostración. Como $\omega_X[n]$ es el complejo dualizante. La dualidad de Verdier toma la forma de

$$\mathrm{Hom}_{D^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathscr{K}, \omega_X[n]) \cong \mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X; \mathscr{K}), K^\bullet)$$

para toda gavilla inyectiva. Tomando los funtores derivados clásicos obtenemos que el lado izquierdo es

$$R^p\mathrm{Hom}_{D^+(\mathbf{Shv}_A(X))}(\mathscr{K}, \omega_X[n]) \cong \mathrm{Ext}^{n-p}(\mathscr{K}, \omega_X)$$

donde utilizamos la Proposición 113. $\square$

Si ahora condicionamos a que la categoría sea suficiente simple, escogiendo como coeficientes a A un *campo* k, podemos recuperar la dualidad usual, como la encontrada en un texto clásico de Topología Algebraica.

Teorema 227. *El morfismo de traza $\int_X$ induce un isomorfismo para la gavilla k_X.*

$$H^p(X; k) \cong H^p(X; k_X) \cong \mathit{Ext}^{n-p}(k, \omega_X) \cong H^{n-p}(X; \omega_X)^\vee$$

Si además la variedad X es orientable, entonces

$$H^p(X; k) \cong H^{n-p}(X; \omega_X)^\vee \cong H^{n-p}(X; k)^\vee \cong H_{n-p}(X; k).$$

Demostración. El primper isomorfismo es consecuencia del Teorema de comparación discutido en el Teorema 141. Por otro lado, si k es un campo entonces automáticamente es inyectivo o en otras palabras

$$\mathrm{Ext}^{n-p}(k, \omega_X) \cong H^{n-p}(X; \omega_X)^{\vee}$$

Para la segunda parte observe que cuando la variedad es orientable (cf. (11)) se tiene que la gavilla ω_X es isomorfa a la gavilla constante k_X. El último isomorfismo es consecuencia del Teorema de Coeficientes Universales ((15), Sección 3.1). □

Observación. Con una buena nocion de prodctos en la cohomologia, que no daremos. Es posible demostrar que el morfismo de traza esta dado por un producto con la llamada clase fundamental, recuperando en completa totalidad la dualidad de Verdier (véase (18)).

No sólamente la dualidad de Poincaré es un corolario de lo desarrollado hasta ahora. Podemos deducir, definiendo apropiadamente una nocion de soportes en cerrados y una nocion de cohomologia relativa las dualidades de Alexander y de Lefschetz, respectivamente.

3.10. Notas

Como se mencionó al inicio del Capítulo la motivación de Grothendieck para idear las Categorías Derivadas fue generalizar la dualidad de Serre, por lo que la primer pregunta que habria que hacerse es *¿Es posible generalizar la dualidad de Verdier a esquemas arbitrarios?*.

Surgen diversos problemas que son necesario sortear para hacer esta extensión. Uno de ellos es la pobre estructura topológica de los esquemas, esto se repara cambiando la noción de topología por la de un sitio. Tomando el llamado sitio étale, es posible obtener una topología "buena" para los esquemas, en un sentido que no haremos preciso. La segunda parte sería construir el adjunto $f^!$, lo cual se tiene que abordar por métodos diferentes a los expuestos aquí debido a que la categoría de gavillas en este nuevo contexto resultará mucho mas complicada de entender, en específico, la categoria "buena" que necesitamos considerar será la de las gavillas coherentes, una construcción del adjunto se tendra que dar en este contexto, requiriendo de muchos mas detalles técnicos.

Sin embargo, sorprendentemente un teorema de dualidad en esquemas es cierto, este es un complicado Teorema que ocupa la totalidad del libro (13). Es importante mencionar que un buen aporte de la Topología Algebraica en este aspecto fue una reformulación del Teorema de Representabilidad de Brown dada por A. Neeman en el contexto de las Categorías Trianguladas que sirvió para poder demostrar el Teorema de Dualidad de Grothendieck.

Como una gran aplicación de la dualidad de Verdier podemos mencionar el desarrollo de la Cohomología de Intersección por parte de R. Macpherson y M. Goresky durante los 70, terminando por demostrar la dualidad de Poincare en el caso de variedades singulares estratficadas via la dualidad de Verdier. La cúspide del desarrollo de la Cohomología de Intersección es la monografía dada por Beilinson, Berstein y Deligne en el famoso Asterisque 100, en el que definieron la nocion de gavilla *perversa*. Actualmente estas nociones se utilizan tanto en Teoria de Singularidades como en Teoria de Representaciones.

Cabe mencionar que este es uno de los primeros pasos para la revolución dada en Geometría Algebraica con la introducción de las Categorías Derivadas. Por cuestiones de Espacio daremos únicamente algnos comentarios de los temas que continúan desarrollando las categorías derivadas en Geometría Algebraica, existen muchos mas que inclusive amplian la relacion entre la Geometria Algebraica con la Teoria de Representaciones, la Teoria de Numeros y la Fisica, todos codificados mediante el uso de categorias derivadas.

3.10.1. Categorías Derivadas en Geometría Birracional

Desde los famosos artículos de la escuela rusa (Bondal, Orlov, Kapranov, Beilinson, etc.) sobre el estudio de las categorías derivadas de gavillas coherentes, hasta el brillante trabajo de T. Bridgeland sobre estabilidad, ha quedado patente que las Categorías Derivadas son importantes como herramienta para obtener invariantes birracionales de variedades algebraicas. Para mayor información, el lector puede consultar (17).

3.10.2. Homological Mirror Symmetry

Este programa fue originalmente ideado por M. Konsevich. La idea es dar una equivalencia entre la categoría derivada de gavillas coherentes para cierta clase de variedades algebraicas y la categoría derivada de subvariedades lagangianas de una clase de variedades simplécticas. Este programa ha sido sumamente desarrollado en años recientes y sigue siendo un tema de investigación. Para una Introducción en este fascinante mundo, es aconsejable leer el Artículo (21).

Bibliografía

[1] Adams, J. F. (1974). *Stable Homotopy and Generalised Homology*. Chicago Lectures in Mathematics. Chicago University Press. 23, 49, 50, 81

[2] Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 31, 119

[3] Borel, A., Grivel, P.-P., Kaup, B., Haefliger, A., Malgrange, B., and Ehlers, F. (1987). *Algebraic D-modules*, volume 2 of *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA. 62

[4] Bott, R. and Tu, L. W. (1982). *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin. 97, 113

[5] Deligne, P., , , and and (1977). *Cohomologie étale*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin-New York. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 41$\o er$2, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier. 4, 81, 82

[6] Dugundji, J. (1978). *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney. Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. 2, 98, 105

[7] Dwyer, W. G. and Spaliński, J. (1995). Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam. 22, 35

[8] Gabriel, P. and Zisman, M. (1967). *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York. 32

[9] Gelfand, S. I. and Manin, Y. I. (2003). *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition. 2, 4, 10, 36, 38, 39, 70, 84

[10] Godement, R. (1973). *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. 87, 93, 102

[11] Greenberg, M. J. and Harper, J. R. (1981). *Algebraic topology*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass. A first course. 2, 49, 97, 138, 140

[12] Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (2)*, 9:119–221. 4, 5, 64, 68, 69, 113

[13] Hartshorne, R. (1966). *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York. 3, 6, 122, 140

[14] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. 2, 3, 69, 87, 93, 95, 113

[15] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge. 49, 115, 140

[16] Hovey, M. (1999). *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI. 22

[17] Huybrechts, D. (2006). *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford. 4, 6, 13, 56, 141

[18] Iversen, B. (1986). *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. 2, 5, 53, 84, 96, 106, 115, 137, 140

[19] Kashiwara, M. and Schapira, P. (1994). *Sheaves on manifolds*, volume 292 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin. With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original. 70, 86, 87, 97, 107, 108

[20] Kashiwara, M. and Schapira, P. (2006). *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin. 48, 128

[21] Kontsevich, M. (1995). Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139. Birkhäuser, Basel. 141

[22] Lang, S. (2002). *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition. 2, 5

[23] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition. 2, 12, 24, 74, 137

[Milicic] Milicic, D. Lectures on derived categories. `https://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf`. 4

[25] Quillen, D. G. (1967). *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York. 20, 34

[26] Ramanan, S. (2005). *Global calculus*, volume 65 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI. 93

[27] Spaltenstein, N. (1988). Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2):121–154. 66

[28] Tennison, B. R. (1975). *Sheaf theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England-New York-Melbourne. London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 20. 85

[29] Verdier, J.-L. (1963). Le théorème de dualité de Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 256:2084–2086. 3, 129

[30] Verdier, J.-L. (1996). Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239):xii+253 pp. (1997). With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. 38, 84, 93

[31] Weibel, C. A. (1994). *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. 8, 38, 50, 94