



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

FOLIACIONES ANALÍTICAS INTEGRABLES

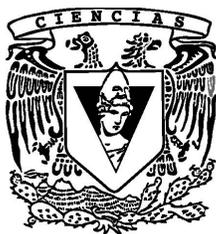
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

**PAOLO EUGENIO PETIT VALDÉS
VILLARREAL**



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA**

2017

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. DATOS DEL ALUMNO

Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera
Número de cuenta

2. DATOS DEL TUTOR

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3. DATOS DEL SINODAL 1

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4. DATOS DEL SINODAL 2

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5. DATOS DEL SINODAL 3

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6. DATOS DEL SINODAL 4

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

7. DATOS DEL TRABAJO ESCRITO.

Título
Subtítulo
Número de páginas
Año

1. DATOS DEL ALUMNO

Petit
Valdés Villarreal
Paolo Eugenio
553024329
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
412054682

2. DATOS DEL TUTOR

Dra
Laura
Ortiz
Bobadilla

3. DATOS DEL SINODAL 1

Dr
Vinicio Antonio
Gómez
Gutiérrez

4. DATOS DEL SINODAL 2

Dra
Ana
Rechtman
Bulajich

5. DATOS DEL SINODAL 3

Dr
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco

6. DATOS DEL SINODAL 4

Mat
Efraín
Vega
Landa

7. DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

Foliaciones analíticas integrables

77 p
2017

Agradecimientos

A mi familia y a mi novia por apoyarme y por todo el cariño brindado. A todos mis amigos y colegas por las tantas discusiones, aclaraciones y ayudas a lo largo de la carrera y de este trabajo. Doy gracias también a todos los profesores que me inculcaron el gusto a partir de su dedicación, gracias a ellos y a sus correcciones he aprendido tanto. Una estima especial a la UNAM por su programa en la licenciatura en matemáticas, que con tanta libertad y diversidad pude disfrutar de este maravilloso arte del pensar e imaginar.

Este trabajo fue posible completarlo gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) en el proyecto con clave CB-2013/219722 y a los Programas de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en el proyecto *Geometría de ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones holomorfas* con clave IN102413.

Esta tesis fue realizada con \TeX .

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	III
Capítulo 1. Campos vectoriales sobre variedades diferenciables	1
1.1. Distribuciones y Teorema de Frobenius	12
Capítulo 2. Gérmenes de transformaciones conformes	15
2.1. Gérmenes de series analíticas	15
2.2. Subgrupos finitamente generados de $Diff(\mathbb{C}, 0)$	18
2.3. Gérmenes integrables	21
2.4. Pseudogrupos finitamente generados	23
Capítulo 3. Foliaciones holomorfas	28
3.1. Nociones básicas de campos vectoriales analíticos	28
3.2. Foliaciones Holomorfas	30
3.3. Holonomía	32
3.4. Resolución de Singularidades	37
3.5. Holonomía Evanesciente	40
3.6. Foliaciones Integrables	43
Apéndice A. Primeros auxilios	52
A.1. Teorema de Poincaré	52
A.2. Teoremas de extensión de Riemann	57
A.3. Apéndice de topología diferencial	59
Apéndice. Bibliografía	67
Apéndice. Índice alfabético	68

Introducción

El desarrollo de este trabajo pretende ser una introducción al estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano complejo. El principal exponente y precursor de esta teoría es Henri Poincaré (1854-1912), quien en su trabajo hace notar que los sistemas de ecuaciones diferenciales no sólo son de carácter analítico sino también geométrico. Esto lo logra haciendo incapié en las propiedades geométricas que deben cumplir las soluciones de una ecuación diferencial; esta nueva manera de abordar la teoría vino acompañada del avance en la topología y el análisis complejo.

Una de las principales motivaciones para estudiar los campos vectoriales holomorfos en el plano complejo fue (y es) el problema 16 de Hilbert, en el cual se cuestiona la cantidad y posición de ciclos límite asociados a una ecuación diferencial polinomial en el plano en función del grado de los polinomios que la definen; si bien este problema se abordó en primera instancia en el plano real, se observó que al complejificarlo se enriquecía el tipo de información relativa al problema. El problema 16 de Hilbert es el más famoso sólo después de la conjetura de Riemann (problema 8 de Hilbert) y ha sido objeto de mucha investigación; entre los avances al problema se encuentra la investigación de una basta cantidad de nombres, algunos de ellos son H. Dulac, V. Arnold, E. Écalle, A. Andronov, E. Landis, I. Petrovsky, F. Takens, Yu. Ilyashenko, A. Khovansky, A. Varchenko, D. Novikov, S. Yakovenko. Dicho problema puede ser abordado desde distintas ramas de las matemáticas tales como teoría de bifurcaciones y sistemas dinámicos.

En este trabajo nos enfocaremos en el estudio de foliaciones holomorfas del plano complejo. A grosso modo lo que se busca es estudiar las propiedades topológicas, en el amplio sentido del término matemático, del espacio fase de manera local alrededor de un punto singular. Aunque estamos haciendo un estudio local, estas técnicas y algunos resultados también son usados en el estudio global de una foliación; es por ello que se presentan herramientas de topología diferencial, teoría local de análisis complejo, análisis matemático y ecuaciones diferenciales.

El capítulo uno comienza con el estudio de campos vectoriales sobre variedades; éste inicia dando una definición de campo vectorial y posteriormente se presentan los términos de flujo y curva integral, los cuales son el análogo a las soluciones de una ecuación diferencial. Dentro de este capítulo hay teoremas de gran importancia topológica tales como el teorema de Ehresmann,

TEOREMA. (de Ehresmann). *Sea f una función diferenciable, $f : M^m \rightarrow N^n$, submersión, sobreyectiva y propia, M y N variedades suaves, N conexo. Entonces la cuaterna (M, N, f, F) es un haz suave, con $F \cong f^{-1}(b)$ difeomorfos, $b \in N$.*

A lo largo del capítulo se demuestran también el teorema de la forma canónica de campos vectoriales conmutativos y el teorema de Frobenius,

TEOREMA. (de Frobenius). *Sean M una n -variedad suave y \mathcal{D} una distribución de dimensión (rango) k . Si \mathcal{D} es una distribución involutiva entonces es completamente integrable.*

Estos teoremas simplifican el espacio fase de una foliación (en el caso del teorema de Ehresmann una foliación integrable); esta simplificación es local y sólo se puede llevar a cabo en conjuntos abiertos que no contienen puntos críticos. Si bien el teorema de la forma canónica de campos vectoriales conmutativos no es más que una reformulación del teorema de rectificación de ecuaciones diferenciales, y el teorema de Frobenius es el análogo al teorema de existencia de soluciones, los presentamos con este lenguaje ya que son herramientas de suma utilidad en diversas ramas de las matemáticas y las demostraciones incluidas de estos tres teoremas utilizan técnicas e ideas que aparecen a lo largo del estudio de la topología diferencial. Se presentan operaciones que son ampliamente usadas en la teoría de grupos de Lie y geometría riemanniana entre otras, como son el corchete de Lie y la derivada de Lie. Tenemos también un teorema de gran importancia geométrica que rescata la naturaleza intrínseca entre los campos vectoriales y sus flujos, éste nos dice que dos campos vectoriales conmutan si y sólo si sus flujos conmutan; este capítulo es una muestra del gran papel que juega el haz tangente de una variedad.

En el segundo capítulo presentamos el concepto de germen de función analítica y nos enfocamos en su clasificación y simplificación por medio de cambios de coordenadas, los cambios de coordenadas pueden ser de carácter analítico, topológico o formal. Veremos que toda integral de un germen es formalmente linealizable

TEOREMA. *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es tal que $f(z) = z^k + az^m + \dots$ con $m > k > 1$ entonces f es formalmente equivalente a $g(z) = z^k$.*

Se estudia de igual manera a los subgrupos finitamente generados de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ (gérmenes de biholomorfismos que fijan el origen). Para éstos veremos criterios de linealización simultánea, integrabilidad y periodicidad; por ejemplo

TEOREMA. (de Bochner). *Cualquier subgrupo finito $G \subset Diff(\mathbb{C}, 0)$ es linealizable, es decir existe un germen de biholomorfismo $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $h \circ g \circ h^{-1} = g'(0)z$, para toda $g \in G$.*

Gracias al teorema de Bochner obtenemos el siguiente resultado, el cual nos será de gran ayuda en el estudio de foliaciones integrables

TEOREMA. *Un subgrupo $G \subset Diff(\mathbb{C}, 0)$ finitamente generado y tal que todos sus elementos tienen orden finito es analíticamente linealizable y cíclico finito.*

Veremos también que todo grupo formalmente integrable es analíticamente integrable,

TEOREMA. *Si $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ es formalmente integrable (o un grupo $G \leq Diff(\mathbb{C}, 0)$ finitamente generado) entonces f (o G) es también analíticamente integrable.*

Este teorema de rigidez nos ayudará en la demostración de su “análogo” para foliaciones.

Una aplicación sencilla de estos resultados es la siguiente

COROLARIO. *Un subgrupo $G \subset Diff(\mathbb{C}, 0)$ integrable es cíclico finito.*

La última sección trata sobre los pseudogrupos asociados a grupos finitamente generados. Abordar los pseudogrupos nos permite un estudio más profundo de la dinámica transversal pues nos lleva a la siguiente alternativa

TEOREMA. *Un grupo $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ finitamente generado es integrable o bien cualquier pseudogrupo asociado a G tiene una cantidad no numerable de órbitas no periódicas.*

Este capítulo es de vital importancia para el estudio que realizaremos de las foliaciones, pues es la base de las funciones de holonomía las cuales nos dictan el comportamiento local de las soluciones.

La parte medular de este trabajo es el tercero y último capítulo en el cual se desarrolla una introducción para el estudio de foliaciones holomorfas singulares en el plano complejo. Empezamos con la analogía entre foliaciones y ecuaciones diferenciales. Aquí rescatamos (o nos rescata) que la parte lineal asociada a una ecuación diferencial es de gran importancia en la clasificación topológica de puntos singulares, esta clasificación se hace en base a sus valores propios. Después arribamos a dos herramientas pilares del capítulo, las transformaciones de holonomía y la resolución de singularidades. La primera en principio pone una obstrucción en la integrabilidad de una foliación y termina presentando el comportamiento dinámico de las hojas cercanas a una separatriz. La segunda la presentamos, como se hace notar en algunos ejemplos, para rescatar alguna separatriz que en un inicio no fuera evidente y para poder incursionar en el grupo de holonomía evanescente, el cual es fundamental en el estudio de puntos singulares sin parte lineal o con parte lineal degenerada. En ciertos casos la equivalencia de los grupos de holonomía evanescente implican la equivalencia de las foliaciones.

TEOREMA. *Consideremos dos foliaciones holomorfas singulares no dicríticas \mathcal{F}, \mathcal{G} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, cada una con un número finito de singularidades hiperbólicas después de una explosión en el origen (coincide el número de singularidades) y que los índices de las separatrices coincidan. Con estas hipótesis la equivalencia analítica de sus grupos de holonomía evanescente implica la equivalencia analítica de las foliaciones.*

En nuestro caso particular se usa fuertemente en el desarrollo que haremos sobre foliaciones integrables; las foliaciones integrables son aquellas en las que sus hojas son componentes conexas de una curva de nivel de una función holomorfa $u : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Aquí veremos los frutos del estudio hecho sobre gérmenes integrables

PROPOSICIÓN. *Si \mathcal{F} es una foliación formalmente integrable entonces las transformaciones de holonomía, asociadas a cualquiera de las separatrices, son formalmente integrables y más aún, el grupo de holonomía evanescente también lo es.*

La resolución (explosión) de un punto singular nos otorga una equivalencia que usaremos fuerte y ampliamente en las demostraciones de los resultados finales.

PROPOSICIÓN. *Una foliación \mathcal{F} es integrable si y sólo si $\mathcal{F}' = \Pi^* \mathcal{F}$ es integrable en una vecindad del divisor excepcional \mathbb{E} .*

Los teoremas de la parte final, debidos a J. Mattei y R. Moussu, son los encargados en dar una primera clasificación para las foliaciones integrables. Veremos que si una foliación tiene un número finito de separatrices y todas las hojas son conjuntos cerrados en $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ entonces dicha foliación es integrable

TEOREMA. (de Mattei-Moussu). *Sea \mathcal{F} una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Si la foliación \mathcal{F} es simple entonces es integrable.*

Otro resultado bastante sorprendente es el siguiente teorema de rigidez con respecto a la integral de una foliación (cambiamos la función analítica por una serie formal)

TEOREMA. (de Mattei-Moussu). *Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente integrable (con integral distinta de 0) entonces existe una primera integral holomorfa de \mathcal{F} .*

El último teorema del capítulo rescata el hecho de que a cada hoja la podemos indexar con un número complejo, esto es que cada hoja es exactamente una curva de nivel de una función holomorfa.

TEOREMA. *Toda foliación holomorfa singular que sea integrable admite una integral primitiva.*

Puesto que en el estudio de foliaciones recurren muchas áreas de la matemática en el Apéndice se incluye material de apoyo (y de gran estética), el cual se usa a lo largo de todo el trabajo, por ejemplo: se da la demostración de un bello teorema de Poincaré sobre la simplificación local de un punto singular en base a los valores propios de la parte lineal

TEOREMA. (de Poincaré, analítico). *Sea $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial analítica definida en $(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que el conjunto de los valores propios asociados a la parte lineal es no resonante y pertenece al dominio de Poincaré. Entonces la ecuación $\dot{z} = v(z)$ es analíticamente equivalente (localmente) a su parte lineal.*

También se incluyen teoremas de extensión de Riemann que usaremos reiteradas veces en el estudio de foliaciones integrables

TEOREMA. (de extensión de Riemann). *Sea f una función holomorfa en $D \setminus A$ donde $D \subseteq \mathbb{C}^n$ es un dominio y A es un conjunto analítico de codimensión 1. Si f es localmente acotada en todos los puntos de A , entonces f se extiende de manera única como una función holomorfa en todo el dominio D .*

Por último se presentan unos primeros y rápidos pasos de topología diferencial. Allí veremos la ventaja, en nuestro caso particular, del lenguaje de formas diferenciales.

Campos vectoriales sobre variedades diferenciables

El estudio de campos vectoriales sobre variedades diferenciables es una manera natural de extender la noción de ecuación diferencial en \mathbb{R}^n . Del mismo modo que todo campo vectorial diferenciable tiene asociada, en \mathbb{R}^n , una ecuación diferencial, en una variedad suave es posible definir la noción de campo vectorial y de ecuación diferencial asociada a ella.

DEFINICIÓN 1.0.1. Un campo vectorial suave, en una variedad M es una función diferenciable $X : M \rightarrow TM$ con la propiedad

$$\pi \circ X = Id_M,$$

donde TM es el haz tangente de M y $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección canónica (a este tipo de funciones se les llama *secciones* del haz tangente). Al conjunto de todos los campos vectoriales sobre una variedad M se le denota como $\mathfrak{X}(M)$.

En éste capítulo nos enfocaremos solamente en campos vectoriales que no se anulen en ningún punto, es decir $X(p) \neq 0$ para todo punto p de la variedad M . Estos campos vectoriales generan subespacios de dimensión uno en T_pM .

Ya que un campo vectorial X asigna a cada punto p de M un vector $X_p = X(p)$ de su espacio tangente, T_pM , podemos imaginar entonces a cada punto de M con una *flecha o dirección* asociada a él.

Dada una carta coordenada cualquiera $(U, (x_i)_{i=1}^n)$ de una variedad diferenciable M y un campo vectorial X de M podemos escribir a dicho campo como combinación del marco local $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

tal que $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave; a las funciones X^i se les denominan funciones componentes de X .

OBSERVACIÓN. La presentación de X varía con la carta coordenada. Además un campo vectorial X es suave si y sólo si sus funciones componentes lo son.

Sea f una función definida en una variedad suave M que toma valores reales, $f \in C^\infty(M)$ ². Definimos el siguiente campo vectorial

$$fX_p = f(p)X_p.$$

¹Un marco en un punto $p \in M$ es una base del espacio vectorial T_pM . Para más información acerca de este tema se puede consultar [15].

²El conjunto $C^\infty(M)$ denota a las funciones infinitamente diferenciables de M a \mathbb{R} .

Con esta multiplicación y la suma usual de campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ resulta ser un $C^\infty(M)$ -módulo.

También podemos ver a cada campo vectorial como una derivación, es decir existe un operador X del conjunto de las funciones infinitamente diferenciables, de M a \mathbb{R} , en sí mismo $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, que satisface la regla de Leibnitz del producto; a saber, para cualesquiera dos funciones f y g en $C^\infty(M)$ se cumple $X(fg) = fXg + gXf$, donde por Xf , Xg y $X(fg)$ denotamos a la derivada direccional de f , g y fg (respectivamente) en la dirección de X .

A la hora de hacer cálculos tenemos que dada una carta coordenada $(U, (x_i))$ el campo vectorial X aplicado a la función f tiene la siguiente expresión

$$Xf(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Hay que tener cuidado en no confundir las expresiones Xf y fX pues son muy distintas.

EJEMPLO 1.0.2. Las siguientes funciones son ejemplos sencillos de campos vectoriales.

1. Sean (x, y) las coordenadas usuales en \mathbb{R}^2 y consideremos el campo vectorial $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$ definido por $X((p, q)) = \frac{\partial}{\partial x} |_{(p,q)}$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función que no se anula en ningún punto entonces tenemos el campo vectorial $X((p, q)) = f(p, q) \frac{\partial}{\partial x} |_{(p,q)}$.
3. El campo vectorial de Euler en \mathbb{R}^n está definido como $V(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_x$.

Ahora introduciremos un concepto que será análogo al de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, el concepto de flujo.

DEFINICIÓN 1.0.3. Sea M una variedad suave, un flujo global en dicha variedad es una función suave

$$\gamma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que las siguientes dos propiedades se cumplen para todo punto $p \in M$ y reales s y t .

- El punto inicial de la función es p , $\gamma(0, p) = p$.
- Y la composición $\gamma(s, \gamma(t, p)) = \gamma(s+t, p)$.

OBSERVACIÓN. Al flujo se le dice local si no está definido para todos los reales (pero sí para intervalos abiertos, los cuales contienen al origen). En general vamos a trabajar con flujos locales, ya que la existencia de flujos globales en variedades suaves arbitrarias no es siempre cierta, aunque en el caso de variedades compactas sí lo es. Se puede leer más al respecto en [15].

El flujo así definido es una acción continua del grupo aditivo \mathbb{R} sobre la variedad M y se le llama el grupo uniparamétrico. Esto nos dice que la órbita de un punto p es el conjunto $\gamma(\mathbb{R}, p)$ (recordemos que las órbitas bajo acciones de grupos son ajenas); más aún si fijamos el flujo para cada real t , $\gamma_t : M \rightarrow M$, es un difeomorfismo con inversa γ_{-t} , por lo que tenemos un homomorfismo de grupos entre \mathbb{R} y $Diff(M)$ ³.

³ $Diff(M)$ es el conjunto de difeomorfismos de M en sí mismo.

DEFINICIÓN 1.0.4. Para cada flujo local γ en M definimos el dominio del flujo γ como un abierto $A \subseteq \mathbb{R} \times M$, que contiene a $\{0\} \times M$, y de tal forma que fijando un punto p de la variedad M , el conjunto $A^p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in A\} = (a_p, b_p)$, con $-\infty \leq a_p < 0 < b_p \leq \infty$, es un intervalo abierto que contiene al origen. Cada intervalo A^p es el dominio de definición de la curva que pasa por p . De igual manera definimos al conjunto $M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in A\}$. Esto tendrá más sentido cuando hablemos de flujos integrales para campos vectoriales (ver definición 1.0.5).

Notación. Hay veces que, para facilitar la notación, utilizaremos indistintamente alguna de las que siguen

$$\gamma(t, p) = \gamma_t(p) = \gamma^p(t).$$

El caso en el que fijamos un punto p , a esta función se le suele llamar curva integral⁴, hacemos notar el por qué en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.0.5. Sea $X : M \rightarrow TM$ un campo vectorial, una curva solución o curva integral del campo X es una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ tal que la derivada de γ en un punto $t \in (a, b)$ es el campo vectorial X en el punto $\gamma(t)$. En símbolos

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

De igual manera un flujo solución o integral de X es un flujo tal que al fijar cualquier punto p de M , $\gamma^p : A^p \rightarrow M$ es una curva integral del campo vectorial X .

EJEMPLO 1.0.6. Veamos los siguientes flujos y sus campos vectoriales asociados.

1. Sea el campo vectorial $X = \frac{\partial}{\partial x}$ definido en \mathbb{R}^2 , es sencillo ver que su flujo global asociado es $\gamma(t, (x, y)) = (t + x, y)$. Sea M una 2-variedad y (U, φ) una carta de M , si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ entonces el flujo del campo vectorial $V = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$ es $\alpha(t, p) = \varphi^{-1}(t + \varphi_1(p), \varphi_2(p))$.
2. Consideremos el flujo dado por $\gamma(t, (x, y)) = (e^t x, e^t y)$, derivando con respecto de t y usando que $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ vemos que el campo vectorial correspondiente a este flujo es el de Euler en \mathbb{R}^2 , $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.
3. El flujo que forma círculos concéntricos con centro en el origen está dado por $\theta(t, (a, b)) = (a \cos t - b \sin t, b \cos t + a \sin t)$ y si derivamos con respecto de t tenemos que su campo vectorial asociado es $Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.
4. El campo vectorial suma de los ejemplos 3. y 4. es $Z = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y}$ y su flujo es la función $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t, (a, b)) = e^t (a \cos t - b \sin t, b \cos t + a \sin t)$.

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo presentaremos con una adaptación al lenguaje de campos vectoriales. La demostración de este teorema puede ser consultada en [15] [2].

TEOREMA 1.0.7. (Existencia y Unicidad de Soluciones). *Sea X un campo vectorial C^∞ definido en una variedad suave M , sea p un punto en M . Entonces existe una curva integral de X , $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, con $\gamma(0) = p$. Y si $\theta : (c, d) \rightarrow M$ es otra curva integral también con punto inicial p ($\theta(0) = p$) entonces ambas curvas integrales coinciden en $(a, b) \cap (c, d)$.*

⁴Notemos que cada curva integral tiene su dominio de definición, el cual es un intervalo abierto, de \mathbb{R} , que contiene al cero.

De aquí en adelante supondremos que los flujos son máximos es decir, dado un flujo γ y su dominio A no existe otro flujo θ con dominio B tal que $A \subsetneq B$, y la restricción de θ en A coincide con el flujo γ : $\theta|_A = \gamma$.

El teorema de existencia de flujos máximos se puede consultar en [15]

Notemos que si un flujo máximo no es un flujo global entonces dicho flujo abandona a cualquier conjunto compacto en un tiempo finito.

LEMA 1.0.8. *Sea γ un flujo máximo local en M tal que la cota superior, b_p , del dominio del flujo para todo punto p es finita. Entonces existe un número real positivo ϵ tal que la curva integral de p con tiempo en $[b_p - \epsilon, b_p)$ abandona cualquier compacto de M . Es decir $\gamma([b_p - \epsilon, b_p), p) \not\subseteq K$ con K compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Como K es un conjunto compacto existe $\epsilon > 0$ tal que

$$[-\epsilon, \epsilon] \times K \subseteq A \cap (\mathbb{R} \times K).$$

Si $\gamma(t, p) \in K$ para todo tiempo $t < t_0$ con $t_0 > b_p - \epsilon$, entonces podemos extender el tiempo de la curva integral γ^p a $(a_p, t_0 + \epsilon)$ haciendo

$$\gamma(\epsilon, \gamma(t - \epsilon, p)) = \gamma(t, p)$$

si el tiempo $t_0 \leq t < t_0 + \epsilon$. □

DEFINICIÓN 1.0.9. Dada una función suave, f , entre dos variedades M y N , decimos que los campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$ son *f-equivalentes* si para todo punto de M ocurre que

$$df_p X_p = Y \circ f(p).$$

En el caso que f sea un difeomorfismo se define el *push-forward* de X por f o *empujar* el campo vectorial X por f como

$$f_* X = df \circ X \circ f^{-1}.$$

Por la unicidad de las curvas integrales surge naturalmente la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.0.10. *Supongamos que M, N son variedades suaves y que la función $f : M \rightarrow N$ es también diferenciable. Los campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ son *f-equivalentes* si y sólo si f manda curvas integrales de X en curvas integrales de Y .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que los campos vectoriales X y Y son *f-equivalentes*, y que la función $\gamma : J \rightarrow M$ es una curva integral de X . Definamos a $\sigma = f \circ \gamma$, probaremos que σ es una curva integral de Y . Derivando a la función σ con respecto de t

$$\sigma'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = df|_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = df|_{\gamma(t)}(X|_{\gamma(t)}) = Y|_{f(\gamma(t))}$$

por lo que la curva σ si es curva integral del campo vectorial Y .

Inversamente, sea p un punto de M y la curva integral del campo vectorial X $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con inicio en p , $\gamma(0) = p$. Por hipótesis la composición $f \circ \gamma$ es curva integral de Y con punto inicial $f(p)$

$$Y_{f(p)} = (f \circ \gamma)'(0) = df|_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df|_p(X|_p)$$

por lo tanto los campos vectoriales X y Y son *f-equivalentes*. □

Tenemos un resultado similar al anterior pero para flujos locales de campos vectoriales.

PROPOSICIÓN 1.0.11. *Sea γ el flujo local del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, y θ el flujo de $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Si los campos vectoriales X y Y son f -equivalentes entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, $f(M_t) \subseteq N_t$ y $f \circ \gamma_t = \theta_t \circ f$ en M_t .*

DEMOSTRACIÓN. La proposición anterior nos dice que para todo punto p en M , la curva $f \circ \gamma^p$ es una curva integral de Y que comienza en $f(p)$. Por unicidad de las curvas integrales la curva integral $\theta^{f(p)}$ está definida al menos en A^p y en dicho intervalo coincide con $f \circ \gamma^p$. Esto significa que si un punto $p \in M_t$ entonces el tiempo correspondiente t está en A^p , pero lo anterior implica que $t \in A^{f(p)}$ y el punto imagen de p , $f(p)$, pertenece al conjunto N_t . Podemos por lo tanto concluir la contención $f(M_t) \subseteq N_t$, y también la siguiente igualdad $f(\gamma^p(t)) = \theta^{f(p)}(t)$, para todo tiempo $t \in A^p$. Esta última igualdad es equivalente a que $\theta_t \circ f = f \circ \gamma_t$ en el conjunto abierto M_t . \square

El siguiente teorema nos será de mucha utilidad a la hora de estudiar a las foliaciones integrables, en el capítulo 3, ya que tendremos que cada una de ellas, localmente y con ciertas restricciones que presentaremos más adelante, a saber en el teorema 3.6.16, se verán como un haz fibrado.

TEOREMA 1.0.12. (de Ehresmann). *Sea una función diferenciable $f : M^m \rightarrow N^n$ submersión, sobreyectiva y propia, M y N variedades suaves, N conexo. Entonces la cuaterna (M, N, f, F) es un haz suave, con $F \cong f^{-1}(b)$ difeomorfos, $b \in N$. Que sea un haz suave significa que para todo punto $b \in N$ existe una vecindad U de b y un difeomorfismo Φ , tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) \subseteq M & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ f \downarrow & & \downarrow pr \\ U \subseteq N & \xleftarrow{id} & U \end{array} .$$

DEMOSTRACIÓN. Sea un punto $b \in N$ y (U, φ) una carta coordenada centrada en b . Como este teorema es local, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la vecindad $U = \mathbb{R}^n$ y el punto b es el origen, y además que la variedad M es la imagen inversa de U bajo f . Usaremos de funciones coordenadas las canónicas en \mathbb{R}^n , (x_i) , y sus campos vectoriales asociados $\frac{\partial}{\partial x_i}$, con flujos $\gamma_i(t, p) = p + te_i$, donde e_i es el vector canónico i -ésimo de \mathbb{R}^n .

Usando el teorema del rango (revisar en A.3) y particiones de la unidad construiremos campos vectoriales $X_i \in \mathfrak{X}(f^{-1}(U))$ tales que X_i y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sean f -equivalentes, esto para el índice $i \in \{1, \dots, n\}$. Gracias al teorema del rango tenemos que para todo punto $q \in f^{-1}(U) = M$ existe una carta (V, ψ) centrada en q tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^m \\ f \downarrow & & \downarrow pr \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Aquí, la función pr es la proyección canónica de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n ,

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n), \text{ con } n < m .$$

Para cada punto q en $f^{-1}(U)$ indexemos a la vecindad dada por el teorema del rango como V_q . El conjunto formado por tales vecindades $\{V_q\}_{q \in M}$ es una cubierta abierta del espacio M , por lo que podemos escoger una partición de la unidad $\{\phi_j\}$ subordinada a dicha cubierta, y de tal forma que el soporte de cada función esté contenido en una vecindad V_q , $\text{supp}(\phi_j) \subseteq V_q$ para algún punto $q \in M$. A partir de lo anterior obtenemos una subcubierta numerable $\{V_j\}$, identificando los índices q y j .

Dado un índice j definimos $X_{i,j}|_r = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi_j^{-1}(\psi_j(r) + te_i)$, con r un punto de la vecindad V_j . Usando la partición de la unidad $\{\phi_j\}$ pegamos los campos vectoriales $X_{i,j}$

$$X_i = \sum_j \phi_j X_{i,j}.$$

Por el diagrama anterior tenemos que la igualdad $id \circ f = pr \circ \psi_j$ es equivalente a $f \circ \psi_j^{-1} = id^{-1} \circ pr = pr$.

Sea $\theta_{i,j}$ el flujo de $X_{i,j}$, entonces $\theta_{i,j}(t, p) = \psi_j^{-1}(\psi_j(p) + te_i)$. Y utilizando las igualdades anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} f \circ \theta_{i,j}(t, p) &= f \circ \psi_j^{-1}(\psi_j(p) + te_i) = id \circ pr(\psi_j(p) + te_i) \\ &= pr(\psi_j(p)) + pr(te_i) = f(p) + te_i = \gamma_i(t, f(p)). \end{aligned}$$

En las igualdades anteriores usamos $1 \leq i \leq n$ y que la proyección pr es una transformación lineal. Veamos ahora que los campos X_i y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son f -equivalentes

$$\begin{aligned} (1) \quad df_q X_i|_q &= df_q \sum_j \phi_j(q) X_{i,j}|_q \\ &= \sum_j \phi_j(q) df_q(X_{i,j}|_q) \stackrel{(*)}{=} \sum_j \phi_j(q) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(q)} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_{f(q)}. \end{aligned}$$

(*) Esta igualdad está dada por la proposición 1.0.10.

Sea la función θ_i el flujo local del campo vectorial X_i , entonces por (1) tenemos la igualdad $f \circ \theta_i = \gamma_i \circ f$. Queremos probar que $\theta_i : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, es decir que el flujo θ_i es global. Para eso usamos que el flujo γ_i sí es global. Sea $J_p \subseteq \mathbb{R}$ el intervalo máximo, que lo podemos suponer con límites finitos de ambos lados, donde la curva integral $\theta_i(-, p)$ está definida. Como γ_i sí es global, tenemos que $f \circ \theta_i(J_p, p) = \gamma_i(J_p, f(p)) \subseteq \gamma_i(\bar{J}_p, f(p)) = K$. Como la cerradura \bar{J}_p es compacta y la curva integral $\gamma_i(-, f(p))$ es continua entonces el conjunto K es compacto.

Al ser f propia tenemos que $f^{-1}(K)$ es compacto, y la curva integral $\theta_i(J_p, p)$ queda contenida en el compacto $f^{-1}(K)$; entonces si θ_i^p no estuviera definida para todo número real, por el lema 1.0.8 la curva θ_i^p se saldría de cualquier compacto en un tiempo finito y eso contradice que la imagen de $\theta_i(-, p)$ quede contenida en el conjunto compacto $f^{-1}(K)$. Por lo tanto el flujo θ_i es global, recordemos que el índice i recorre solamente los enteros de 1 a n .

Ahora definamos la siguiente función τ , que será la encargada de la trivialización

$$\tau : U \times F \longrightarrow M \quad .$$

$(q, p) \mapsto \theta_n|_{\pi_n(q)} \circ \dots \circ \theta_1|_{\pi_1(q)}(p)$

Las proyecciones π_i son las canónicas de \mathbb{R}^n sobre la i -ésima coordenada, $F = f^{-1}(0)$.

Computemos la composición $f \circ \tau$ en una pareja (q, p) y veamos que es igual a la proyección de $U \times f^{-1}(0)$ sobre U .

$$\begin{aligned}
f(\tau(q, p)) &= f(\theta_n|_{\pi_n(q)} \circ \dots \circ \theta_1|_{\pi_1(q)}(p)) = f(\theta_n|_{\pi_n(q)}) \circ \dots \circ \theta_1|_{\pi_1(q)}(p) \\
&= \gamma_n|_{\pi_n(q)} \circ f \circ \theta_{n-1}|_{\pi_{n-1}(q)}(p) \circ \dots \circ \theta_1|_{\pi_1(q)}(p) \\
&\vdots \\
&= \gamma_n|_{\pi_n(q)} \circ \dots \circ \gamma_1|_{\pi_1(q)} \circ f(p) \\
&= \gamma_n|_{\pi_n(q)} \circ \dots \circ \gamma_2|_{\pi_2(q)}(f(p) + \pi_1(q)e_1) \\
&\vdots \\
&= f(p) + \pi_1(q)e_1 + \dots + \pi_n(q)e_n = f(p) + q = q
\end{aligned}$$

como p está en la fibra del origen entonces $f(p) = 0$. Esto nos dice que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(U) & \xleftarrow{\tau} & U \times F \\
f \downarrow & & \downarrow pr \\
U & \xleftrightarrow{id} & U
\end{array}$$

es conmutativo. Claramente la función τ es diferenciable pues es composición de funciones diferenciables. Para ver que es un difeomorfismo damos explícitamente la inversa de τ , $\tau^{-1} : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, dada por

$$p \mapsto (f(p), \theta_n|_{-\pi_n(f(p))} \circ \dots \circ \theta_1|_{-\pi_1(f(p))}(p)).$$

Sólo falta ver que las fibras $f^{-1}(b)$ son todas difeomorfas entre sí, aquí es donde usamos que N es conexo. Usaremos el símbolo \cong para denotar que dos fibras son difeomorfas.

Consideremos el conjunto $A_y = \{x \in N \mid f^{-1}(x) \cong f^{-1}(y)\}$, para ver que es abierto utilicemos lo recién hecho. A saber, sea $x \in A_y$ entonces existe una vecindad abierta U de x tal que $f^{-1}(z) \cong f^{-1}(x)$ para todo punto z de U , esto implica que $U \subseteq A_y$, por lo que A_y resulta ser un conjunto abierto. Si existiese un punto $q \in N$ tal que la fibra de q y la de y no fueran difeomorfas entonces tendríamos una desconexión de N por abiertos ajenos no vacíos, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $A_y = N$ y tenemos un haz diferenciable. \square

Ahora presentaremos otras operaciones para campos vectoriales, que nos serán de utilidad a la hora de probar el teorema de Frobenius. Estas operaciones entre campos vectoriales nos darán una imagen geométrica sobre la conmutatividad de dos campos vectoriales.

DEFINICIÓN 1.0.13. Dados dos campos vectoriales X, Y de una variedad M definimos al corchete de Lie de X y Y como

$$[X, Y] = XY - YX.$$

El corchete de Lie de X y Y resulta ser un campo vectorial suave de M .

Si bien la definición anterior nos dice poco acerca de cómo es este campo vectorial, tenemos la siguiente representación de $[X, Y]$ en base a las representaciones de X y Y en coordenadas locales $(U, (x_i)_{i=1}^n)$ de M . En dicha carta los campos se ven como $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, y el corchete de Lie tiene la siguiente presentación

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Una aplicación trivial pero útil, es calcular el corchete de Lie para los campos vectoriales asociados a las funciones coordenada (x_i) de M . Ya que estos campos vectoriales tienen coeficientes constantes se sigue que

$$(2) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \equiv 0, \quad \text{para todo } i \text{ y } j.$$

Otra manera de pensar este hecho es que las derivadas parciales de funciones suaves conmutan, tal como ocurre en \mathbb{R}^n .

EJEMPLO 1.0.14. Usemos los ejemplos 2. y 3. del ejemplo 1.0.6 y calculemos su corchete de Lie.

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left(X^1 \frac{\partial Y^1}{\partial x} - Y^1 \frac{\partial X^1}{\partial x} + X^2 \frac{\partial Y^1}{\partial y} - Y^2 \frac{\partial X^1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + \left(X^1 \frac{\partial Y^2}{\partial x} - Y^1 \frac{\partial X^2}{\partial x} + X^2 \frac{\partial Y^2}{\partial y} - Y^2 \frac{\partial X^2}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(x \frac{\partial - y}{\partial x} + y \frac{\partial x}{\partial x} + y \frac{\partial - y}{\partial y} - x \frac{\partial x}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + \left(x \frac{\partial x}{\partial x} + y \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial x}{\partial y} - x \frac{\partial y}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Esto nos dice que los campos vectoriales conmutan.

PROPOSICIÓN. *Dados tres campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se cumplen las siguientes propiedades*

- Bilinealidad, $a, b \in \mathbb{R}$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$
- Antisimetría
$$[X, Y] = -[Y, X].$$
- Identidad de Jacobi
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$
- Dados $f, g \in C^\infty(M)$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

PROPOSICIÓN 1.0.15. *Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave, y consideremos un par de campos vectoriales X, Y de M y N respectivamente. X y Y son f -equivalentes si y sólo si para cada función suave, g , real valuada definida en un abierto de N , se cumple lo siguiente*

$$(3) \quad X(g \circ f) = (Yg) \circ f.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier punto p de M y cualquier función suave g real valuada definida en una vecindad de $f(p)$

$$X(g \circ f)(p) = X_p(g \circ f) = df_p(X_p)g,$$

y además

$$(Yg) \circ f(p) = (Yg)(f(p)) = Y_{f(p)}g.$$

Eso nos dice que la igualdad (3) es cierta para toda g si y sólo si $df_p X_p = Y_{f(p)}$ para todo punto p , es decir si y sólo si X y Y son f -equivalentes. \square

La siguiente proposición es un hecho que se nos antoja que ocurra. Y como en muchos casos de las matemáticas, lo que nos parece natural sí es verdadero.

PROPOSICIÓN 1.0.16. *Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades, y sean $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ campos vectoriales tales que X_i y Y_i son f -equivalentes para $i = 1, 2$. Entonces los corchetes $[X_1, X_2]$, $[Y_1, Y_2]$ son f -equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Usando la proposición 1.0.15 y el hecho que X_i y Y_i son f -equivalentes:

$$X_1 X_2(g \circ f) = X_1((Y_2 g) \circ f) = (Y_1 Y_2 g) \circ f$$

de igual manera

$$X_2 X_1(g \circ f) = X_2((Y_1 g) \circ f) = (Y_2 Y_1 g) \circ f.$$

Juntando las igualdades anteriores

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](g \circ f) &= X_1 X_2(g \circ f) - X_2 X_1(g \circ f) \\ &= (Y_1 Y_2 g) \circ f - (Y_2 Y_1 g) \circ f = ([Y_1, Y_2]g) \circ f. \end{aligned}$$

Y el resultado está probado. \square

El corchete de Lie mide, en cierta manera, el grado en que las derivadas direccionales de dos campos vectoriales no conmutan. El siguiente lema da una idea más geométrica de este hecho.

LEMA 1.0.17. *Sean X, Y campos vectoriales sobre una variedad M , y consideremos a θ el flujo (máximo) local de X en alguna región que contiene al punto $p \in M$, entonces se tiene la siguiente igualdad*

$$[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \left((D_p \theta_t)^{-1} Y_{\theta(t,p)} \right) \Big|_{t=0}.$$

Observación. La idea de este enunciado es: el flujo θ_t mueve al punto p en la dirección del campo vectorial X , luego miramos al campo Y en dicha dirección y usamos el mapeo $D_p \theta_t : T_p M \rightarrow T_{\theta(t,p)} M$, el cual es un isomorfismo lineal, para "jalar" al vector $Y_{\theta(t,p)}$ al espacio tangente sobre p . En particular esta afirmación da pie a una buena interpretación geométrica: El corchete de Lie $[X, Y]$ se anula si y sólo si el campo Y es invariante bajo el flujo de X ; se dice que un campo Y es invariante bajo el flujo θ si Y es θ_t -equivalente a él mismo para todo tiempo t ; es decir $d\theta_t Y = Y \circ \theta_t$ para todo tiempo t y punto p en el dominio de θ .

DEMOSTRACIÓN. Escojamos una carta coordenada $(U, (x_i))$ de M centrada en el punto p . En esa carta los campos vectoriales X y Y se escriben de forma única como $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces

$$\frac{d}{dt} \left((d_p \theta_t)^{-1} Y_{\theta(t,p)} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (d_{\theta(t,p)} \theta_{-t} Y_{\theta(t,p)}) \Big|_{t=0}.$$

La prueba se hará comparando las funciones componentes del corchete $[X, Y]$ y la derivada $\frac{d}{dt} \left((d_p \theta_t)^{-1} Y_{\theta(t,p)} \right) |_{t=0}$, las cuales denotaremos con el súper índice j

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(d_{\theta(t,p)} \theta_{-t} (Y_{\theta(t,p)}) \right)^j |_{t=0} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \theta_{-t}^j}{\partial x_k} \right) |_{t=0} Y_p^k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \theta_{-t}^j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial Y^k(\theta(t,p))}{\partial t} |_{t=0} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \theta_{-t}^j}{\partial t} \right) |_{t=0} Y_p^k + \sum_{i,k=1}^n \delta_{j,k} X_p^j \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} |_p \\
&= - \sum_{k=1}^n Y_p^k \frac{\partial X^j}{\partial x_k} |_p + \sum_{i=1}^n X_p^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} |_p \\
&= [X, Y]_p^j
\end{aligned}$$

□

A la expresión $\frac{d}{dt} \left((d_p \theta_t)^{-1} Y_{\theta(t,p)} \right) |_{t=0}$ se le llama la derivada de Lie de Y con respecto de X , y se le denota $\mathcal{L}_X Y$. El hecho que la derivada de Lie y el corchete de Lie de dos campos vectoriales coincida es algo grandioso, ya que nos da una visión geométrica del corchete de Lie.

Posiblemente el siguiente teorema es el resultado más importante sobre la conmutatividad de campos vectoriales y, si no el más importante sí uno muy ilustrativo visualmente.

TEOREMA 1.0.18. *Los campos vectoriales conmutan si y sólo si sus flujos conmutan.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X y Y campos vectoriales sobre una variedad M , y las funciones θ y γ sus flujos respectivamente. Asumamos primero que los campos vectoriales conmutan. Consideremos un punto p en M y dos intervalos abiertos J y K que contienen al 0, tales que $\gamma_s \circ \theta_t(p)$ está definido para toda pareja $(s, t) \in J \times K$. Por el lema anterior tenemos que el campo vectorial X es invariante bajo γ y Y es invariante bajo el flujo θ . Fijemos la variable s y consideremos a la curva $\rho : K \rightarrow M$ definida por $\rho(t) = \gamma_s \circ \theta_t(p)$, esta curva satisface que $\rho(0) = \gamma_s(p)$ y

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &= \frac{d}{dt} (\gamma_s \circ \theta_t(p)) = d(\gamma_s) \left(\theta^{(p)'}(t) \right) \\
&= d(\gamma_s) (X_{\theta^{(p)}(t)}) = X_{\theta(t,p)} \circ \gamma_s = X_{\rho(t)}.
\end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que ρ es una curva integral de X con punto inicial $\gamma_s(p)$, y por la unicidad de las curvas integrales $\rho(t) = \theta^{\gamma(s)}(t) = \theta_t(\gamma_s(p))$. Esto prueba que los flujos conmutan.

Inversamente, asumamos que los flujos conmutan. Sea un punto p en M y $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma_s \circ \theta_t(p)$ y $\theta_t \circ \gamma_s(p)$ están bien definidas si $|s|, |t| < \varepsilon$. Reescribimos

$$\gamma(s, \theta_t(p)) = \theta(t, \gamma^p(s)).$$

y derivando ambos lados de la igualdad con respecto de la variable s , obtenemos

$$Y_{\theta_t(p)} = \frac{d}{ds} (\gamma(s, \theta_t(p)))_{s=0} = \frac{d}{ds} (\theta(t, \gamma^p(s)))_{s=0} = d(\theta_t)_p(Y_p)$$

si a ambos lados de la igualdad le aplicamos $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}$, llegamos a

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)}) = Y_p.$$

Ahora derivamos con respecto de t y aplicamos la definición de derivada de Lie, resulta lo siguiente

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt} \left(d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)}) \right)_{t=0} = \frac{d}{dt} (Y_p)_{t=0} = 0.$$

Y por la equivalencia con el corchete de Lie, damos por concluida la demostración. \square

El siguiente resultado, que es en esencia una generalización del teorema de rectificación para ecuaciones diferenciales ordinarias. Nos da una forma sencilla de pensar a un conjunto linealmente independiente de campos vectoriales conmutativos.

TEOREMA 1.0.19. (forma canónica para campos vectoriales conmutativos). Sean M una n -variedad suave y $\{V_1, \dots, V_k\}$ un conjunto formado por k campos vectoriales linealmente independientes y conmutativos definidos en un abierto $W \subseteq M$. Para cada $p \in W$ existe una carta suave de coordenadas $(U, (x_i))$ centrada en p tal que $V_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $i = 1, \dots, k$; y si $S \subseteq W$ es una subvariedad encajada en M de codimensión k y $p \in S$ es tal que $T_p M = T_p S + \langle \{V_1|_p, \dots, V_k|_p\} \rangle$, entonces la carta coordenada, antes mencionada, se puede elegir de tal forma que en $S \cap U$ las funciones coordenada se anulan idénticamente, $x_i \equiv 0$ con $i = 1, \dots, k$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $p \in W$, S una subvariedad de $\text{codim} = k$ tal que $T_p M = T_p S + \langle \{V_1|_p, \dots, V_k|_p\} \rangle$ y $(U, (x_i))$ una carta "rebanada" (el concepto de carta rebanada puede ser consultado en A.3) de S centrada en p de tal manera que $W \cap S = \{y \in W \mid x_1(y) = \dots = x_k(y) = 0\}$. Lo anterior nos asegura que el espacio tangente $T_p M$ coincide con el espacio $\langle V_1|_p, \dots, V_k|_p, \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \rangle$ pues $\langle \{V_1|_p, \dots, V_k|_p\} \rangle$ es de dimensión k y $T_p M = T_p S + \langle \{V_1|_p, \dots, V_k|_p\} \rangle$.

Dicho lo anterior, nos damos cuenta que este teorema es puramente local, es decir sólo depende de la carta entonces podemos suponer que el abierto $U \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{V_1, \dots, V_k\}$ son campos vectoriales definidos en W y

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = (y_1, \dots, y_n), y_1 = \dots = y_k = 0\}.$$

Hacemos estas suposiciones para facilitar notación y la prueba.

Ahora bien consideremos el flujo γ_i del campo vectorial V_i , $i = 1, \dots, k$. Afirmamos que existen una vecindad $N \subseteq U$ de p y $\varepsilon > 0$ tales que $\gamma_1|_{t_1} \circ \gamma_2|_{t_2} \circ \dots \circ \gamma_k|_{t_k}(N) \subseteq U$ si cada tiempo $|t_i| < \varepsilon$. Para probar la afirmación escogemos $\varepsilon_1 > 0$ y un abierto U_1 tal que $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times U_1 \rightarrow U$, esto lo podemos hacer gracias al teorema de existencia y unicidad; si el índice $i \neq 1$ definimos $\varepsilon_i > 0$ y U_i de tal forma que el flujo $\gamma_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times U_i \rightarrow U_{i-1}$. Como tenemos un número finito de cotas ε_i elegimos la mínima $\varepsilon = \min \{\varepsilon_i\}_{i=1}^k$ y la vecindad N igual al abierto U_k . Con eso tenemos probada la afirmación.

Definimos el siguiente conjunto abierto

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (0, y) \in N, 0 \in \mathbb{R}^k\} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$$

(esto es para tomar elementos de S pues $(0, y) \in S \cap N$) y la función

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega \rightarrow U \quad \text{definida como la composición de los flujos de } V_i,$$

$$\Phi(t_1, \dots, t_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = \gamma_1|_{t_1} \circ \gamma_2|_{t_2} \circ \dots \circ \gamma_k|_{t_k}(0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

Por construcción $\Phi(\{0\} \times \Omega) = \{0\} \times \Omega = N \cap S$ ya que $\gamma_i|_0(r) = r$ por propiedades del flujo. Φ será la función que completará la prueba, a lo que nos referimos es que V_i y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son Φ -*equivalentes*.

Problemos lo recién mencionado. Ya que los campos vectoriales V_i conmutan entre sí esto implica que sus los flujos γ_i también conmutan. Entonces para cada punto $y_0 = (t_1, \dots, t_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega$ tenemos lo siguiente:

$$d\Phi|_{y_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right) = D\Phi|_{y_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla|_{y_0} \Pi_i \circ \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}|_{y_0} \text{ donde el 1 está en el renglón}$$

$i = 1, \dots, k$ y Π_i es la proyección en la i -ésima coordenada. (1)

Sea $z_i = \gamma_1|_{t_1} \circ \dots \circ \gamma_{i-1}|_{t_{i-1}} \circ \gamma_{i+1}|_{t_{i+1}} \circ \dots \circ \gamma_k|_{t_k}(0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n)$. Podemos reescribir a Φ como sigue:

$$\Phi(y_0) = \gamma_i|_{t_i}(z_i) = \gamma_i(t_i, z_i).$$

A partir de lo anterior vemos que $\frac{\partial z_i}{\partial t_i}|_{y_0} = 0, \dots$ (2) pues la variable t_i no aparece en z_i .

De (1) y (2) concluimos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}|_{y_0} &= \frac{\partial \gamma_i}{\partial t_i}(t_i, z_i) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial t_i}[(t_i, 0) + (0, z_i)] = D\gamma_i \cdot \left[\frac{\partial(t_i, 0)}{\partial t_i} + \frac{\partial(0, z_i)}{\partial t_i} \right] \\ &= D\gamma_i \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{d\gamma_i}{dt_i}|_{(0, z_i)} = V_i(\Phi(y_0)). \end{aligned}$$

Observemos también que $\Phi(0) = p$ y $d\Phi|_0 \frac{\partial}{\partial t_i} = V_i(\Phi(0))$ con $i = 1, \dots, k$, y si $i > k$ $d\Phi|_0 \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\Phi(0)}$. Lo anterior también nos dice que $d\Phi|_0$ es un isomorfismo entre los espacios tangentes $T_0((-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega)$ y $T_p M$. Entonces por el teorema de la función inversa hay una vecindad de 0 donde su inversa $\varphi = \Phi^{-1}$ está definida, y por ser la inversa de Φ , $d\varphi$ manda V_i a $\frac{\partial}{\partial t_i}$ con $i = 1, \dots, k$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial}{\partial y_i}$ cuando $i = k+1, \dots, n$; la subvariedad S bajo φ va al subespacio $\{y_1 = \dots = y_k = 0\}$. \square

1.1. Distribuciones y Teorema de Frobenius

Ahora introduciremos un concepto que generaliza al de campos vectoriales, es el de una distribución. Los campos vectoriales son subespacios de dimensión uno del haz tangente en cada punto, las distribuciones serán subespacios de dimensión k . Sea M una variedad suave, a una distribución \mathcal{D} de rango k en M podemos describirla especificando para cada punto p en M un subespacio vectorial \mathcal{D}_p de $T_p M$, tal que \mathcal{D}_p tiene dimensión k .

Una distribución \mathcal{D} resulta ser una distribución suave si y sólo si para cada punto de M existe una vecindad U y campos vectoriales X_1, \dots, X_k definidos en U , de tal forma que \mathcal{D}_q es el subespacio generado por $X_1(q), \dots, X_k(q)$ para todo punto $q \in U$.

DEFINICIÓN 1.1.1. Supongamos que $\mathcal{D} \subset TM$ es una distribución. A una subvariedad inmersa $N \subset M$ se le llama variedad integral de la distribución, si para

cada punto p de N

$$\mathcal{D}_p = T_p N.$$

Equivalentemente, una distribución se dice integrable si cada punto de M pertenece a una variedad integral.

En esta sección nos centraremos en responder bajo qué condiciones existen variedades integrales.

DEFINICIÓN 1.1.2. Una distribución \mathcal{D} se dice involutiva si para cualesquiera campos vectoriales X, Y definidos en un abierto $U \subseteq M$ que cumplan $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$ se tiene que $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$, esto para todo punto $p \in U$.

La siguiente proposición nos da condiciones suficientes para que una distribución sea involutiva.

PROPOSICIÓN 1.1.3. *Toda distribución integrable es involutiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{D} \subset TM$ una distribución integrable y supongamos que es de rango mayor a uno. Al ser \mathcal{D} integrable consideremos a N , una variedad integrable de la distribución \mathcal{D} , y un punto p en ella. Ya que la distribución es de rango mayor a uno, sean X y Y dos secciones locales de \mathcal{D} definidas en un abierto U ; por una parte X y Y son campos vectoriales definidos en U y por otra parte $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p = T_p N$, esto nos dice que los campos X y Y son tangentes a N por lo que el corchete de Lie $[X, Y]$ también es tangente a N , es decir $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ para todo punto $p \in U$. \square

Dada una distribución $\mathcal{D} \subseteq TM$ de rango k , decimos que una carta coordenada (U, φ) , en M , es *plana* en \mathcal{D} si $\varphi(U)$ es un cubo en \mathbb{R}^n , y para $p \in U$

$$\mathcal{D}_p = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \Big|_p \right\rangle.$$

En tales cartas las k -rebanadas del cubo $\varphi(U)$ que tienen la forma $\{\varphi_{k+1} = c_{k+1}, \dots, \varphi_n = c_n\}$ con c_{k+1}, \dots, c_n constantes, son variedades integrales de \mathcal{D} . A una distribución se le llama *totalmente integrable* si para todo punto de de la variedad M existe una carta plana en \mathcal{D} .

El siguiente teorema nos dice que, en efecto, las distribuciones totalmente integrables son las involutivas. Con este resultado se concluye la caracterización de las distribuciones integrales.

TEOREMA 1.1.4. (de Frobenius). *Sean M una n -variedad suave y \mathcal{D} una distribución de dimensión (rango) k . Si \mathcal{D} es una distribución involutiva entonces es completamente integrable.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el teorema 1.0.19, sabemos que si \mathcal{D} es una distribución localmente generada por campos vectoriales conmutativos entonces la distribución \mathcal{D} es completamente integrable.

Dicho lo anterior, la esencia de esta prueba reside en ver que toda distribución involutiva está localmente generada por campos vectoriales que conmutan entre sí.

Una vez más abusaremos de las propiedades locales para poder sustituir a M^n por un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en vez de usar cartas coordenadas.

Sean $\{X_1, \dots, X_k\}$ un marco local para \mathcal{D} , esto es el conjunto $\{X_1, \dots, X_k\}$ genera a \mathcal{D} , y $p \in U$. Con un cambio de coordenadas, realmente es un reordenamiento

de las coordenadas en U y por lo tanto en el marco canónico de $T_p\mathbb{R}^n$ podemos pensar que $T_p\mathbb{R}^n = \mathcal{D}_p \oplus \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \right\rangle$.

Consideremos la proyección en las primeras k entradas de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^k ,

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad \pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k).$$

Entonces la derivada de la proyección $d\pi : T\mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^k$ es un homomorfismo de haces y más aún es sobre.

$$d\pi \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p \right) = \sum_{i=1}^k f_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_{\pi(p)}.$$

Dado que $\ker d\pi|_p = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p \right\rangle$ tenemos que la restricción $d\pi|_{\mathcal{D}_p}$ es un isomorfismo lineal entre \mathcal{D}_p y $T_{\pi(p)}\mathbb{R}^k$ y por el teorema de la función inversa existe una vecindad N de p donde $(d\pi|_{\mathcal{D}_q})^{-1}$ está definida; si $q \in N$ la función

$$(d\pi|_{\mathcal{D}_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{D}_q$$

es un isomorfismo entre espacios vectoriales. Si consideramos el marco canónico $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}|_{\pi(q)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}|_{\pi(q)} \right\}$ de $T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k$ y nos fijamos en su imagen bajo $(d\pi|_{\mathcal{D}_q})^{-1}$ obtenemos un marco para \mathcal{D}_q , pues los isomorfismos mandan marcos locales en marcos locales (bases en bases); lo anterior en símbolos es como sigue: Sea $V_i|_q = (d\pi|_{\mathcal{D}_q})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\pi(q)} \right)$, $i = 1, \dots, k$, entonces la distribución \mathcal{D}_q está generada por los campos vectoriales suaves $V_1|_q, \dots, V_k|_q$. El teorema estará probado si mostramos que $[V_i, V_j] = 0$, pues esto nos dice que el marco $\{V_1, \dots, V_k\}$ conmuta, en la vecindad N , y por el teorema 1.0.19 obtenemos el resultado deseado.

Por la construcción de los campos $V_i|_q$ es claro que V_i y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son π -equivalentes en N , con $i = 1, \dots, k$. Usando propiedades del corchete de Lie con la diferencial de una función tenemos la siguiente serie de equivalencias

$$d\pi|_q \left([V_i, V_j]|_q \right) = [d\pi|_q(V_i|_q), d\pi|_q(V_j|_q)] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\pi(q)}, \frac{\partial}{\partial x_j}|_{\pi(q)} \right]$$

por la ecuación (2) (presentada en la sección anterior) la última expresión es el corchete de dos campos vectoriales conmutativos por lo que es igual a cero para todo punto q de la vecindad N y como la derivada $d\pi|_q$ es un isomorfismo, i.e. $\ker d\pi|_q = \{0\}$, eso implica que $[V_i|_q, V_j|_q] = 0 \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ y $q \in N$, por lo que el corchete de Lie $[V_i, V_j] = 0$ y el teorema está probado. \square

El siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [15], nos da un acercamiento al por qué estudiar campos vectoriales antes de llegar a foliaciones.

TEOREMA 1.1.5. (global de Frobenius). *Sea D una distribución involutiva en una variedad diferenciable M . La colección de todas las variedades integrales máximas conexas de D forman una foliación para M .*

Gérmenes de transformaciones conformes

El propósito de este capítulo es presentar ciertos grupos finitamente generados de funciones, que nos ayudan a entender el comportamiento de las hojas de una foliación sobre una transversal dada. Para entender este comportamiento introduciremos más adelante ciertas funciones a las cuales llamaremos transformaciones de holonomía. La relación de las transformaciones de holonomía y los gérmenes de difeomorfismos, $Diff(\mathbb{C}, 0)$, es que al fijar una transversal con punto base en una hoja marcada (o separatriz) las transformaciones de holonomía resultan ser gérmenes de difeomorfismos sobre un dominio altamente parecido a las vecindades del origen en el plano complejo.

2.1. Gérmenes de series analíticas

Esta sección está dedicada al estudio y clasificación analítica y formal de cierto tipo de gérmenes conformes. Antes de empezar esclareceremos el término *germen de función holomorfa*.

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea p un punto en el plano complejo. Consideremos ahora todas las funciones holomorfas de U en \mathbb{C} , tal que U es un dominio y $p \in U$, para diferenciar a estas funciones las denotaremos como parejas ordenadas (f_i, U_i) , con i en algún conjunto de índices y U_i un dominio que contiene a p . Diremos que dos parejas (f_i, U_i) y (f_j, U_j) están relacionadas si existe un dominio $V \subseteq U_i \cap U_j$, $p \in V$, tal que

$$f_i|_V = f_j|_V.$$

Esta relación resulta ser de equivalencia, a las clases de equivalencia les llamaremos gérmenes de función holomorfa en p .

Al conjunto de gérmenes de funciones analíticas que fijan al cero lo denotamos por $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$.

A partir de la definición anterior y gracias al teorema de la función inversa tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.1.2. *Los gérmenes invertibles de $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ tienen coeficiente de grado uno¹ distinto de cero.*

A los gérmenes invertibles de $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$, gérmenes de difeomorfismos que fijan el origen, los denotaremos por $Diff(\mathbb{C}, 0)$.

También tenemos el resultado para series formales.

¹Aquí usamos la equivalencia entre funciones holomorfas y analíticas, es decir podemos pensar a las funciones holomorfas como series de potencias convergentes.

PROPOSICIÓN 2.1.3. *Una serie formal $h \in \mathbb{C}[[x]]$ es invertible (con la composición) si y sólo si $h(0) = 0$ y el coeficiente lineal es distinto de cero.*

Las nociones de equivalencia analítica (formal), que introduciremos en la siguiente sección, de grupos de transformaciones finitamente generados las usaremos frecuentemente por lo que es importante saber qué aspecto tienen las series que conjugan a dichos grupos y cómo se relacionan los coeficientes y los grados de estas series analíticas (formales) con los de sus inversas.

PROPOSICIÓN 2.1.4. *Si $h(z) = az + bz^k + \dots$, $a \neq 0 \neq b$, entonces $h^{-1}(z) = a^{-1}z - \frac{b}{a^{k+1}}z^k + \dots$ ²*

DEMOSTRACIÓN. Como $a \neq 0$, h resulta ser invertible en una vecindad del origen. Sea $h^{-1}(z) = \alpha z + \beta z^s + \dots$ su inversa. Tenemos las igualdades $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = Id$.

$$\begin{aligned} h(h^{-1}(z)) &= a(\alpha z + \beta z^s + \dots) + b(\alpha z + \beta z^s + \dots)^k + \dots \\ &= a\alpha z + a\beta z^s + b\alpha^k z^k + \dots \end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(z)) &= \alpha(az + bz^k + \dots) + \beta(az + bz^k + \dots)^s + \dots \\ &= a\alpha z + \alpha b z^k + \beta a^s z^s + \dots \end{aligned}$$

Y ya que $h \circ h^{-1}(z) = h^{-1} \circ h(z) = z$, tenemos que $\alpha = a^{-1}$, $s = k$, y por consiguiente $\beta = -\frac{b}{a^{k+1}}$. \square

Hay ocasiones donde resulta útil no sólo saber los primeros dos coeficientes de la inversa de una serie invertible, sino también conocer el grado más chico de los términos de orden superior. Esto nos será de ayuda a la hora de conjugar elementos de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ con binomios.

LEMA 2.1.5. *Si $h(z) = z + az^s$ entonces h tiene inversa formal h^{-1} y es de la forma $h^{-1}(z) = z - az^s + O(z^{2s-1})$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior y ya que h es invertible en una vecindad del 0, tenemos que $h^{-1}(z) = z - az^s + O(z^{s+1})$

$$h(h^{-1}(z)) = z - az^s + O(z^{s+1}) + a(z - az^s + O(z^{s+1}))^s = z - sa^2 z^{2s-1} + O(z^{s+1}) = z$$

Esto nos dice que los términos de orden $s+1$ hasta $2s-1$ tienen que ser cero. Así la inversa de la función h , h^{-1} , es de la forma $h^{-1}(z) = z - az^s + O(z^{2s-1})$. \square

El siguiente resultado es bastante sorprendente ya que nos dice que todos los gérmenes de difeomorfismo salvo los que tienen como coeficiente lineal una raíz de la unidad son formalmente linealizables.

Para demostrar los siguientes dos teoremas usaremos una técnica de eliminación sucesiva de monomios de grado mayor al principal.³

TEOREMA 2.1.6. *Sea f un germen de biholomorfismo en $(\mathbb{C}, 0)$, $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, si a_1 no es raíz de la unidad o cero entonces f es formalmente linealizable. Es decir, existe una serie formal (invertible) $h \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = a_1 z$.*

²De aquí en adelante cuando usemos tres puntos suspensivos, ..., en series de potencias es para denotar los términos de orden superior.

³El monomio principal de una serie de potencias, será el monomio de grado mínimo. Así mismo el grado u orden de una serie de potencias será el grado del monomio principal.

DEMOSTRACIÓN. Como hemos dicho, usaremos una técnica de eliminación sucesiva por conjugaciones polinomiales. Los polinomios con los que conjugaremos a f serán de la forma $h_n(z) = z + b_n z^n$ con n mayor a uno.

Por el lema 2.1.5 sabemos que $h_n^{-1}(z) = z - b_n z^n + O(z^{2n-1})$, en particular para $n = 2$, tenemos $h_2(z) = z + b_2 z^2$ y $h_2^{-1}(z) = z - b_2 z^2 + O(z^3)$. La composición $f \circ h_2^{-1}$ se ve de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f \circ h_2^{-1}(z) &= f(z - b_2 z^2 + O(z^3)) \\ &= a_1(z - b_2 z^2 + O(z^3)) + a_2(z - b_2 z^2 + O(z^3))^2 + \dots \\ &= a_1 z + (a_2 - a_1 b_2) z^2 + O(z^3). \end{aligned}$$

Ahora al componer por la izquierda con h_2 llegamos a

$$\begin{aligned} h_2 \circ f \circ h_2^{-1}(z) &= a_1 z + (a_2 - a_1 b_2) z^2 + O(z^3) \\ &\quad + b_2 (a_1 z + (a_2 - a_1 b_2) z^2 + O(z^3))^2 \\ &= a_1 z + (a_2 - a_1 b_2 + b_2 a_1^2) z^2 + \dots \\ &= a_1 z + (a_2 + a_1 b_2 (a_1 - 1)) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Si queremos eliminar el monomio de grado dos definimos $b_2 = \frac{-a_2}{a_1(a_1-1)}$, observemos que b_2 está bien definido pues supusimos que a_1 no es raíz de la unidad.

Para encontrar cómo tiene que ser el coeficiente b_n del polinomio h_n supongamos que ya eliminamos todos los monomios, de f , con grados entre uno y $n-1$. Denotemos por $f_n = h_{n-1} \circ \dots \circ h_2 \circ f \circ h_2^{-1} \circ \dots \circ h_{n-1}^{-1}$, así tenemos que $f_n(z) = a_1 z + \alpha_n z^n + \dots$ y al conjugar con h_n obtenemos

$$\begin{aligned} h_n \circ f_n \circ h_n^{-1}(z) &= h_n \circ f_n(z - b_n z^n + O(z^{2n-1})) \\ &= h_n \left(a_1(z - b_n z^n + O(z^{2n-1})) + \alpha_n(z - b_n z^n + O(z^{2n-1}))^n + O(z^{n+1}) \right) \\ &= h_n(a_1 z + (\alpha_n - a_1 b_n) z^n + O(z^{n+1})) \\ &= a_1 z + (\alpha_n - a_1 b_n) z^n + O(z^{n+1}) + b_n (a_1 z + (\alpha_n - a_1 b_n) z^n + O(z^{n+1}))^n \\ &= a_1 z + (\alpha_n - a_1 b_n + a_1^n b_n) z^n + O(z^{n+1}) \\ &= a_1 z + (\alpha_n + a_1 b_n (a_1^{n-1} - 1)) z^n + O(z^{n+1}). \end{aligned}$$

Observemos que los cálculos que hemos hecho para definir a b_2 y b_n son totalmente análogos. Una vez más usamos que $a_1 \notin \exp(2\pi i \mathbb{Q})$ y definimos $b_n = \frac{-\alpha_n}{a_1(a_1^{n-1}-1)}$. De igual manera es posible ir eliminando los monomios de f de grado n para toda n mayor a uno. Si definimos $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \circ \dots \circ h_2$ tenemos que h es una serie formal tal que la conjugación $h \circ f \circ h^{-1}$ es la función lineal $z \mapsto a_1 z$. \square

Ahora tenemos el mismo resultado pero para funciones analíticas de grado mayor a uno.

TEOREMA 2.1.7. *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es tal que $f(z) = z^k + az^m + \dots$ con $m > k > 1$ entonces f es formalmente equivalente a $g(z) = z^k$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este resultado se hará bajo un método puramente formal; encontraremos series formales h_s tales que al conjugar a f con

ellas se vayan eliminando los términos de grado mayor a k , así en el límite la composición (infinita) de las h_s será una serie formal que hace formalmente equivalentes a f con g .

Sea $h_s(z) = z + b_s z^s$ con $s > k$

$$\begin{aligned} f \circ h_s^{-1}(z) &= f(z - b_s z^s + O(z^{2s-1})) \\ &= (z - b_s z^s + O(z^{2s-1}))^k + a(z - b_s z^s + O(z^{2s-1}))^m + \dots \\ &= z^k - k b_s z^{k+s-1} + a z^m + O(z^{m+1}). \end{aligned}$$

Si hacemos $s = m - k + 1$ tenemos lo siguiente $f \circ h_s^{-1}(z) = z^k + (a - k b_s) z^m + O(z^{m+1})$. Al componer ahora con la serie h_s obtenemos

$$h_s \circ f \circ h_s^{-1}(z) = z^k + (a - k b_s) z^m + O(z^{m+1}).$$

Definiendo $b_s = \frac{a}{k}$ se llega a la expresión

$$h_s \circ f \circ h_s^{-1}(z) = z^k + O(z^{m+1}).$$

Lo anterior significa que sí podemos ir eliminando los términos de orden mayor a k . Definimos $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \circ \dots \circ h_s$ y h será la encargada de conjugar a f con g . Observemos que si $f(z) = z^k + \dots$, con los términos de orden superior no nulos, necesariamente $h \neq Id$. \square

2.2. Subgrupos finitamente generados de $Diff(\mathbb{C}, 0)$

La motivación en el presente trabajo para definir y estudiar las propiedades de los gérmenes de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ es por la dinámica que genera la transformación de holonomía en la intersección de las hojas de una foliación con una subvariedad transversal a la foliación. La holonomía o el grupo de holonomía evanescente, son invariantes asociados a las foliaciones, los cuales son útiles a la hora de clasificar y distinguir entre ciertos ‘tipos’ de foliaciones.

DEFINICIÓN 2.2.1. Dos subgrupos finitamente generados $G, H \subseteq Diff(\mathbb{C}, 0)$ se dicen analíticamente (topológicamente o formalmente) equivalentes si se pueden escoger generadores g_1, \dots, g_n para G y h_1, \dots, h_n para H de tal forma que g_i y h_i son simultáneamente conjugados por un germen de función analítica (homeomorfismo, serie formal) f , es decir $h_i \circ f = f \circ g_i$ para toda $i = 1, \dots, n$. También diremos que dos gérmenes $h, g \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ son analíticamente, (topológicamente o formalmente) equivalentes si los grupos generados por g y h lo son.

La definición anterior también nos dice que G, H son isomorfos como grupos. Pero en general si son isomorfos como grupos no necesariamente son analíticamente (topológicamente o formalmente) equivalentes.

Ahora definiremos un homomorfismo (continuo) de grupos, éste será la derivada en cero de cada germen

$$T : Diff(\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ f \longmapsto \frac{df}{dz}(0)$$

La función antes definida es un homomorfismo gracias a la regla de la cadena pues $T(f \circ g) = \frac{df}{dz}(g(0)) \cdot Tg = Tf \cdot Tg$. Y como es de suponer, nos preguntamos por el subgrupo $kerT$

$$kerT = Diff_1(\mathbb{C}, 0) = \{f \in Diff(\mathbb{C}, 0) \mid Tf = 1\}$$

En la literatura a los elementos de $Diff_1(\mathbb{C}, 0)$, que son tangentes a la identidad, se les llama *gérmenes parabólicos*.

Denotaremos en ciertos casos a $T(f)$ por ν_f o bien por Tf para facilitar un poco la notación.

OBSERVACIÓN. De la definición de $kerT$ obtenemos la siguiente equivalencia:

$$f \in kerT \text{ sí y sólo si } f(z) = z + O(z^2).$$

OBSERVACIÓN 2.2.2. Sólo la función identidad, $z \mapsto z$, en $Diff(\mathbb{C}, 0)$ es conjugada a ella misma es decir si $g \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ es tal que $h \circ g \circ h^{-1} = Id$ entonces $g = Id$. Esto ya que $h \circ g \circ h^{-1} = Id \Leftrightarrow h^{-1} \circ Id \circ h = g$. Si $G \cap Diff_1(\mathbb{C}, 0) = \{Id\}$ entonces $T|_G : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ es inyectiva y por el primer teorema de isomorfismo (para grupos), el grupo G resulta conmutativo. En efecto $G/kerT \cong imT$, y como imT es un subgrupo de un grupo conmutativo es también conmutativo.

Veremos ahora una condición necesaria para que dos gérmenes de difeomorfismo sean conjugados; a partir de esta restricción es más claro por qué no basta pedir que los grupos sean isomorfos.

Si consideramos dos números $\alpha, \beta \notin exp(2\pi i\mathbb{Q})$, $\alpha \neq \beta$, entonces los grupos generados por $f(z) = e^\alpha z$ y $g(z) = e^\beta z$ son isomorfos como grupos, pues ambos son isomorfos a \mathbb{Z} . Pero no pueden ser analíticamente equivalentes ya que no tienen el mismo coeficiente lineal.

PROPOSICIÓN 2.2.3. *Si un par de gérmenes $f, g \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ son equivalentes ya sea de manera formal o analítica entonces sus coeficientes lineales coinciden; es decir $T(f) = T(g)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f(z) = az + \dots$ y $g(z) = bz + \dots$ analíticamente equivalentes y sea $h(z) = \alpha z + \dots$ el germen de función analítica que conjugua a f con g . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} h \circ f \circ h^{-1}(z) &= h(a(\alpha^{-1}z + \dots) + \dots) = h(\alpha^{-1}az + \dots) \\ &= \alpha\alpha^{-1}az + \dots = az + \dots = bz + \dots = g(z). \end{aligned}$$

Por lo que $a = b$. □

Trabajar en un ámbito donde los gérmenes de transformaciones son lineales es mucho más sencillo, por lo que es útil dar condiciones suficientes para linealizarlos. Como veremos más adelante, todos los grupos de transformaciones integrables resultan ser finitos así que el siguiente teorema será fundamental en el desarrollo de este trabajo.

TEOREMA 2.2.4. (de Bochner). *Cualquier subgrupo finito $G \subset Diff(\mathbb{C}, 0)$ es linealizable, es decir existe un germen de serie analítica invertible $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $h \circ g \circ h^{-1} = T(g)z$, para toda $g \in G$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos a h como sigue $h := \sum_{g \in G} (Tg)^{-1}g$. Observemos que $g \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ entonces resulta que $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$; para ver que h es un biholomorfismo apliquemos T a h .

$$T(h) = \sum_{g \in G} T\left((Tg)^{-1}g\right) = \sum_{g \in G} (Tg)^{-1}T(g) = \sum_{g \in G} 1 = |G| \neq 0$$

Por el teorema de la función inversa tenemos que h es invertible en una vecindad de 0 con esto tenemos que $h \in Diff(\mathbb{C}, 0)$.

Sea $f \in G$, veamos qué le pasa a f al conjugarlo por h .

$$\begin{aligned} h \circ f &= \sum_{g \in G} (Tg)^{-1} g \circ f = T(f) \sum_{g \in G} (T(g \circ f))^{-1} g \circ f \\ &= T(f) \sum_{g' \in G} (Tg')^{-1} g' = T(f) h \end{aligned}$$

Por lo que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = T(f)z$, para toda $f \in G$; es decir h linealiza al grupo G . \square

Siempre es bueno contar con teoremas de rigidez. Estos teoremas nos permiten pasar de la equivalencia más débil (formal o topológica) entre transformaciones o campos vectoriales a la equivalencia más fuerte (la analítica). La ventaja de contar con un resultado de rigidez es que para las equivalencias más débiles usualmente se necesitan hipótesis más sencillas, más simples de comprobar. En este caso particular, nos ayudará a la hora de linealizar las transformaciones de holonomía de una foliación formalmente integrable.

TEOREMA 2.2.5. *Un germen $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$, conforme, con coeficiente lineal $f'(0) = \mu \in \exp(2\pi i\mathbb{Q})$ es formalmente linealizable si y sólo si es analíticamente linealizable.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que una serie analítica es una serie formal tenemos ya la mitad de la demostración.

Supongamos entonces que f es formalmente linealizable, y sea \hat{h} el germen de serie formal que lleva a cabo tal linealización.

$$\hat{h} \circ f \circ \hat{h}^{-1}(z) = \mu z.$$

Ya que $\mu \in e^{2\pi i\mathbb{Q}}$ es una raíz de la unidad existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^n = 1$, por ende $(\hat{h} \circ f \circ \hat{h}^{-1})^n = \hat{h} \circ f^n \circ \hat{h}^{-1} = Id$. A partir de aquí podemos concluir que $f^n = \hat{h}^{-1} \circ \hat{h} = Id$. Por el teorema de Bochner tenemos que el grupo generado por el biholomorfismo f es analíticamente linealizable, pues f tiene orden finito. \square

TEOREMA 2.2.6. *Un subgrupo $G \subset Diff(\mathbb{C}, 0)$ finitamente generado y tal que todos sus elementos tienen orden finito es analíticamente linealizable y cíclico finito.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G no es conmutativo. Entonces por la observación 2.2.2 tenemos que hay una transformación $Id \neq f \in G \cap Diff_1(\mathbb{C}, 0)$. Dicha transformación por ser un elemento de $Diff_1(\mathbb{C}, 0)$ es de la forma $f(z) = z + az^p + \dots$ con $a \neq 0$, por lo tanto $f^n(z) = z + naz^p + \dots$; además el producto $na \neq 0$ pues $n \neq 0$. Por lo anterior vemos que $f^n \neq Id$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis todos los elementos del grupo G tienen orden finito; la contradicción se genera al suponer que G es no conmutativo. De aquí tenemos que G necesariamente es conmutativo y, por ser finitamente generado, tiene cardinalidad finita; más aún, como T es un homomorfismo de grupos tenemos que G es isomorfo a un subgrupo finito de la parte multiplicativa de \mathbb{C} , por lo que G es un grupo cíclico finito.

Para concluir la demostración sólo basta aplicar el teorema de Bochner 2.2.4. \square

2.3. Gérmenes integrables

La integrabilidad de una foliación propicia la integrabilidad de sus funciones de holonomía; entonces introducir cuándo un germen de difeomorfismo es integrable suena a un paso muy natural ya que es una obstrucción para la integrabilidad de las foliaciones.

DEFINICIÓN 2.3.1. El grupo simétrico de un germen $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es el subgrupo de biholomorfismos que preservan a u

$$S_u := \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \mid u \circ g = u\}.$$

Decimos que $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es integrable o bien, G tiene primera integral u si ocurre la contención $G \subseteq S_u$. Análogamente un germen $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es integrable o tiene primera integral u si $\langle f \rangle \subseteq S_u$.

OBSERVACIÓN 2.3.2. De la definición anterior podemos deducir lo siguiente: si $u(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ es la primera integral de un germen $f(z) = c_1 z + c_m z^m + \dots$, $f \neq \text{Id}$, entonces ocurre

$$u(f(z)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (c_1 z + \dots)^i = a_1 c_1 z + (a_1 c_m + a_m c_1^m) z^m + O(z^2)$$

pero como $u \circ f = u$

$$a_1 c_1 z + (a_1 c_m + a_m c_1^m) z^m + O(z^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$$

esto implica que $c_1 = 1$ y que $a_1 c_m = 0$. Si elegimos que $c_m = 0$ para toda m mayor a uno llegamos a que $f = \text{Id}$, una contradicción. Podemos concluir que si $\text{Id} \neq f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y f es integrable entonces su integral tiene orden mayor a uno, por ende $a_1 = 0$. Gracias al teorema 2.1.7 sabemos que todas las primeras integrales son formalmente linealizables. Más aún, si el germen f tiene primera integral u y h es la serie formal que lleva a cabo la linealización de u , entonces h también linealiza a f . En efecto, puesto que

$$h \circ u \circ h^{-1} = h \circ (u \circ f) \circ h^{-1} = h \circ u \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1}$$

y como $h \circ u \circ h^{-1} = z^k$, $h \circ f \circ h^{-1} = c_1 z + c'_r z^r + \dots$, sustituyendo tenemos

$$h \circ u \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} = (c_1 z + \dots)^k = c_1^k z^k + k c_1^{k-1} c'_r z^{k-1+r} + \dots = z^k.$$

De esta última expresión necesariamente $c_1^k = 1$ y $c'_r = 0$ para toda $r > 1$, es decir la serie formal h linealiza a f . Este análisis nos da una condición necesaria para que un germen de biholomorfismo sea integrable y ésta es que $Tf \in \exp(2\pi i\mathbb{Q})$.

La siguiente proposición termina de caracterizar a los gérmenes integrables

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Un germen $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es periódico, i.e. $f^k = \text{Id}$, si y sólo si f admite una primera integral $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ con $u(z) = cz^m + \dots$ donde el orden (como elemento de un grupo)⁴ de f divide al grado del monomio principal de u , es decir al orden de u (como serie).*

⁴Tenemos dos conceptos de orden, uno es el orden de una serie analítica el cual lo definimos como el grado del monomio de grado mínimo y el otro es el clásico de Teoría de Grupos, es decir el primer número natural n tal que $f^n = e$, donde e es la identidad del grupo, a este último lo denotaremos por $\text{ord}(f)$. En general no hay por qué confundirse ya que el monomio de grado mínimo de un elemento en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ siempre es de grado uno.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que f es periódico. Entonces por el teorema de Bochner podemos pensar a f como su parte lineal, $f(z) = \nu_f z$, y si k es el orden de f veamos que $u(z) = z^k$ es integral de f pues $u \circ f(z) = (\nu_f z)^k = \nu_f^k z^k = z^k$.

Inversamente, si $u(z) = cz^m + \dots$ es una integral de f sabemos que u es formalmente equivalente a cz^m . Sea \hat{h} la serie formal que hace tal equivalencia,

$$\begin{aligned} cz^m &= \hat{h} \circ u \circ \hat{h}^{-1}(z) = \hat{h} \circ u \circ f \circ \hat{h}^{-1}(z) = \hat{h} \circ u \circ \hat{h}^{-1} \circ \hat{h} \circ f \circ \hat{h}^{-1}(z) \\ &= c(az + bz^r + \dots)^m = ca^m z^m + cma^{m-1}bz^{m+r-1} + \dots \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que los coeficientes de los monomios (de f) de grado r para $r > 1$ son cero pues $m > 1$ y $a \neq 0$, esto nos dice que \hat{h} linealiza formalmente a f y más aún, como $a^m = 1$,

$$\left(\hat{h} \circ f \circ \hat{h}^{-1}\right)^m = \hat{h} \circ f^m \circ \hat{h}^{-1} = Id$$

por lo que $f^m = Id$, es decir f es periódico y $ord(f) = k \mid m$. \square

Ahora veremos que el grupo simétrico, S_u , de una serie $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ admite una presentación de lo más sencilla posible.

PROPOSICIÓN 2.3.4. *Un germen de serie analítica $u(z) = cz^m + \dots$ admite un grupo simétrico cíclico finito, y más aún este grupo resulta tener cardinalidad m .*

DEMOSTRACIÓN. Gracias al teorema 2.1.7 tenemos que existe una serie formal h tal que $h \circ u \circ h^{-1}(z) = cz^m = v(z)$. El grupo simétrico de la función v está generado por $g(z) = e^{2\pi i \alpha} z$, con $\alpha = \frac{1}{m}$, o dicho de otro modo, $e^{2\pi i \alpha}$ es una raíz primitiva m -ésima de la unidad.

Consideremos ahora el siguiente morfismo de grupos

$$i_h : S_u \longrightarrow S_v \\ f \mapsto h \circ f \circ h^{-1}$$

Tiene sentido pensar en esta función ya que

$$u \circ f = u$$

y está bien definida pues

$$v \circ i_h(f) = h \circ u \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} = h \circ u \circ f \circ h^{-1} = h \circ u \circ h^{-1} = v.$$

En efecto i_h es homomorfismo, sean $f, f' \in S_u$ entonces

$$i_h(f \circ f') = h \circ f \circ f' \circ h^{-1} = h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ f' \circ h^{-1} = i_h(f) i_h(f').$$

Por la observación 2.2.2 tenemos que sólo la transformación identidad es formalmente equivalente a la identidad, esto nos dice que i_h es una función inyectiva. Hasta aquí ya logramos tener la ciclicidad y finitud de S_u , para terminar la prueba nos basta con dar la inversa de i_h , ésta será (como bien podemos imaginar)

$$i_{h^{-1}} : S_v \longrightarrow S_u \\ f \mapsto h^{-1} \circ f \circ h$$

\square

Dado que subgrupos de grupos cíclicos son también cíclicos, tenemos de manera natural el siguiente corolario.

COROLARIO 2.3.5. *Un subgrupo $G \subset Diff(\mathbb{C}, 0)$ integrable es cíclico finito.*

TEOREMA 2.3.6. *Si $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es formalmente integrable (o un grupo $G \leq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ finitamente generado) entonces f (o G) es también analíticamente integrable.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es formalmente integrable entonces existe una $\hat{u} \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que $\hat{u} \circ f = \hat{u}$; \hat{u} se ve de la siguiente forma: $\hat{u}(z) = z^m + O(z^{m+1})$ con $m > 1$.

Ya que $m > 1$ entonces existen cartas formales gracias al teorema 2.1.7 donde $\hat{u}(z) = z^m$. Sin pérdida de generalidad pensemos que \hat{u} es de esta forma (para simplificar las cuentas).

A la función f podemos verla como sigue $f(z) = \alpha z + \beta z^r + O(z^{r+1})$, $r > 1$. Dado que $\hat{u} \circ f(z) = (\alpha z + \beta z^r + O(z^{r+1}))^m = \alpha^m z^m + \alpha^{m-1} \beta z^{m+r-1} + \dots = z^m$ vemos que $\alpha^m = 1$, $\beta = 0$ y no sólo eso, sino que todos los coeficientes de grado mayor a 1 de f son 0; por consiguiente $f(z) = \alpha z$. Ahora por el teorema 2.2.5 tenemos que f es analíticamente linealizable así que podemos pensar a f como $f(z) = \alpha z$, y dado que $\alpha^m = 1$ tenemos que el polinomio $z^m \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es integral de f . \square

2.4. Pseudogrupos finitamente generados

Presentaremos una modificación de grupos finitamente generados de gérmenes conformes, esta variación en la definición nos permitirá poder definir, en el capítulo tres, los grupos de holonomía y holonomía evanescente; los cuales nos ayudan ver de una manera más “dinámica” el comportamiento de las hojas que intersecan a una transversal cercana al punto singular. Después de la definición próxima veremos que para dos parejas en un pseudogrupo Γ la composición no necesariamente está definida y de aquí el por qué del nombre “*Pseudogrupo*”. El desarrollo de esta sección es de carácter utilitario pues sólo lo usaremos como soporte riguroso pues no trabajaremos con los pseudogrupos explícitamente, en cuanto a los resultados aquí presentados los usaremos fuertemente en algunas pruebas del próximo capítulo.

DEFINICIÓN 2.4.1. Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ una vecindad de 0 y $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un subgrupo. Un pseudogrupo Γ asociado a G (y a U) es una colección de parejas $(f_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$, de tal forma que $U_\alpha \subseteq U$ es un abierto que contiene a 0 y $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow U$ es una función holomorfa definida en U_α y f_α es un representante de un germen $f \in G$. La composición de dos parejas (f_α, U_α) y (f_β, U_β) se define como $(f_\alpha \circ f_\beta, U_{\alpha\beta})$ si y sólo si $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \subseteq U_\beta$ y $f_\beta(U_{\alpha\beta}) \subseteq U_\alpha$.

Dicho de otro modo, dado un germen $\bar{f} \in G$ quizá existan muchos representantes f_α de \bar{f} en Γ que bien pueden diferir en sus dominios de definición, pero todos ellos coinciden en las intersecciones por pares.

Como los elementos de G son clases de equivalencia, por ahora, en lo que definimos totalmente a los pseudogrupos Γ asociados a un grupo G (finitamente generado), se usará \bar{f} para denotar a los elementos de G y f para los de Γ .

Una manera natural de asociar un pseudogrupo Γ a un grupo finitamente generado $G = \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es como sigue: Escojamos una colección arbitraria de representantes $f_j^\pm : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ de \bar{f}_j^\pm , $j = 1, \dots, n$, y sea w_α la palabra $w_\alpha = (w_{j_n}^\pm w_{j_{n-1}}^\pm \dots w_{j_1}^\pm) \in \mathfrak{F}_n$ (\mathfrak{F}_n es el grupo libre generado por n elementos, escrito de derecha a izquierda); ahora definimos la siguiente función holomorfa como la

composición $f_w := f_{j_n}^\pm \circ f_{j_{n-1}}^\pm \circ \dots \circ f_{j_1}^\pm$, en el máximo dominio de definición U_w en el cual todas las composiciones parciales

$$f_{j_1}^\pm = f_{j_1}^\pm, f_{j_2 j_1}^\pm = f_{j_2}^\pm \circ f_{j_1}^\pm, \dots, f_{j_n \dots j_2 j_1}^\pm = f_{j_n}^\pm \circ \dots \circ f_{j_2}^\pm \circ f_{j_1}^\pm$$

están bien definidas. Asociando este dominio U_w a $f_w = f_{j_n j_{n-1} \dots j_1}$, se tiene que f_w es un representante del germen \bar{f}_w ; por consiguiente la pareja $(f_w, U_w) \in \Gamma$.

Si cambiamos los dominios U_1, \dots, U_n (de definición), formalmente, estamos dando lugar a un pseudogrupo distinto; sin embargo las propiedades, en general, no van a cambiar sustancialmente.

Si es que hay identidades no triviales en el grupo G , entonces un mismo germen admite varios representantes con dominios posiblemente distintos. Para distinguir tales representantes etiquetaremos a cada pareja $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$ con la palabra correspondiente $w_\alpha \in \mathfrak{F}_n$. Al conjunto de ternas se le denota

$$\Lambda_G = \{(f_w, U_w, w) \mid w \in \mathfrak{F}_n, \bar{f}_w \in G, f_w \in \mathcal{O}(U_w)\}$$

y este es el pseudogrupo asociado al grupo finitamente generado $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Para cada tripleta en Λ_G vemos que la palabra $w \in \mathfrak{F}_n$ es la que determina (una vez fijado el conjunto de generadores de G) a f_w y U_w ; esto lo que nos dice es que un elemento de Λ_G es no trivial si la palabra correspondiente $w \in \mathfrak{F}_n$ es no trivial, aún si $f_w = id|_{U_w}$. A pesar del importante papel de la tercera componente de la terna, la omitiremos a la hora de referirnos a los elementos de Λ_G .

OBSERVACIÓN. Para evadir algunas obstrucciones técnicas, supondremos que para toda pareja $(f, U) \in \Gamma$, la restricción $(f|_V, V)$ también es elemento del pseudogrupo Γ siempre que $V \subseteq U$ sea un dominio que contiene al origen.

El siguiente ejemplo nos dará una idea sencilla del por qué definir los pseudogrupos de transformaciones holomorfas.

EJEMPLO 2.4.2. Consideremos las siguientes funciones complejas $f(z) = 3z$ está definida en $U = \mathbb{C}$ y $g(z) = \frac{z}{1-z}$ definida en $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$. Usando la definición de pseudogrupo vemos que en este caso la composición $(g \circ f, U \cap D)$ no está definida pues $f(U \cap D) \not\subseteq D$, eso nos invita a reducir la vecindad D a $\frac{1}{3}D$ para poder definir esa composición entonces ya tenemos al menos tres elementos en el pseudogrupo a saber (f, U) , (g, D) , $(g, \frac{1}{3}D)$. Si ahora queremos definir la composición $g \circ f^n$ entonces necesitamos encoger el dominio D a $\frac{1}{3^n}D$ para poder definir tal composición en el pseudogrupo, con esto vemos que la función g está repetida muchas veces pero lo que cambia es el dominio de definición, y esto da pie a nuevos elementos en el pseudogrupo.

DEFINICIÓN 2.4.3. La órbita de un punto $x \in U$ es el conjunto

$$\Gamma(x) = \{f_\alpha(x) \mid (f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma \text{ y } x \in U_\alpha\}.$$

Si $x \neq 0$ decimos que x es un ciclo si existe un elemento no trivial $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$ tal que $f_\alpha(x) = x$. Decimos además que x es un ciclo límite si es un ciclo aislado de f_α en U_α .

DEFINICIÓN 2.4.4. Decimos que dos pseudogrupos $\Gamma, \hat{\Gamma}$ son equivalentes si existe un biholomorfismo $h : U \rightarrow \hat{U}$ de tal forma que todos los elementos de $\hat{\Gamma}$ se pueden ver de la siguiente manera $(h \circ f_\alpha \circ h^{-1}, h(U_\alpha))$, siempre que $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$.

Como los biholomorfismos preservan las propiedades dinámicas, tenemos que si $\Gamma, \hat{\Gamma}$ son equivalentes entonces se tienen las mismas propiedades dinámicas.

Ahora, ilustraremos la utilidad de los pseudogrupos. Para esto estableceremos ciertas propiedades de periodicidad (o aperiodicidad) de los gérmenes. Concretamente, probaremos que un germen $\bar{g} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es periódico si y sólo si todas sus g -órbitas son ciclos (periódicas) para cualquier representante g de \bar{g} . Para probar lo anterior introduciremos los siguientes conceptos.

Sean $\bar{g} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y (g, V) un representante de \bar{g} . Para cada $U \subseteq V$ consideremos (g, U) y su pseudogrupo, Γ_U , "cíclico" asociado. Para cada $x \in U$ tenemos, por definición, la órbita de x bajo Γ_U la cual denotaremos

$$\Gamma(x | U) = \{g^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}, g^j(x) \in U \ j = 0, \dots, n\}$$

La órbita puede ser finita o infinita (de uno o de ambos lados), si es finita tenemos que

$$\Gamma(x | U) = \{g^{-m}(x), g^{-m+1}(x), \dots, g^{-1}(x), x, g(x), \dots, g^{n-1}(x), g^n(x) \mid n, m \geq 0\}.$$

De aquí en adelante supondremos que si la órbita es finita (en al menos una dirección) entonces $g^{-m-1}(x)$ o bien $g^{n+1}(x)$ no están en U , a este tipo de órbitas las llamaremos máximas.

Ahora consideremos la función $\nu : U \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por la longitud de la órbita máxima de x

$$\nu(x) = \max \{m + n \mid g^{-m}(x), \dots, x, \dots, g^n(x) \in U\};$$

si la órbita es infinita entonces $\nu(x) = \infty$.

Más aún, de la construcción anterior tenemos que ν es constante en cada órbita dada por la transformación conforme g y de la continuidad de g se deriva la semicontinuidad de la función ν . Se probarán a continuación algunas propiedades de ν .

PROPOSICIÓN 2.4.5. *Si U es abierto y $\nu(x) < \infty$, entonces para cada $y \in U$ suficientemente cercano a x , $\nu(x) \leq \nu(y)$. Del mismo modo, si U es cerrado y $\nu(x) < \infty$, con $y \in U$ suficientemente cercano a x entonces tenemos $\nu(x) \geq \nu(y)$. En el último caso, si x es un punto de discontinuidad de ν , entonces $\Gamma(x | U) \cap \partial U \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que U es abierto, sean $x \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\nu(x) = k$. Como ν es constante en la órbita de x podemos suponer que x es el punto de la órbita tal que

$$\Gamma(x | U) = \{x, g(x), \dots, g^{k-1}(x)\}.$$

Tenemos dos casos para $g^k(x)$ que esté en ∂U o en $V \setminus \bar{U}$. Si $g^k(x) \in \partial U$, tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ claramente existe $y \in B(x, \varepsilon)$ tal que $\nu(x) < \nu(y)$. Si $g^k(x) \in V \setminus \bar{U}$, basta tomar $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$, $y \in B(x, \varepsilon)$ y se satisfaga la igualdad $\nu(x) = \nu(y)$. Todo lo anterior es por la semicontinuidad de ν . Para la demostración de la segunda afirmación consideremos las siguientes opciones. El

punto $g^j(x) \in \text{Int}U$ para toda j o existe algún índice j tal que $g^j(x) \in \partial U$, $j = 0, \dots, k-1$.

En el primer caso basta considerar, como en la demostración de la primera afirmación, $\varepsilon > 0$ y la bola $B(x, \varepsilon) \subset U$ entonces para toda $y \in B(x, \varepsilon)$ se satisface $\nu(y) = \nu(x)$. Para el segundo caso la desigualdad estricta se cumple siempre, de aquí vemos que si x es un punto de discontinuidad de ν , entonces siempre se cumple $\Gamma(x | U) \cap \partial U \neq \emptyset$. \square

La acumulación de las hojas en vecindades cercanas a un punto singular nos dicen que dicha foliación no puede ser integrable. Es fundamental poder clasificar o al menos dar idea de cuando una foliación sí es integrable, el lema siguiente nos dará una gran alternativa al respecto.

LEMA 2.4.6. *Consideremos un germen $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ no periódico (i.e. $|\langle g \rangle| = \infty$) entonces para todo dominio $U \ni 0$ hay una cantidad infinita no numerable de órbitas no periódicas asociadas al pseudogrupo $\Gamma(x | U)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos al disco $D_\rho = \{|x| \leq \rho\}$ y su circunferencia $K_\rho = \partial D_\rho$, $\rho > 0$. Se probará que hay una cantidad no numerable de puntos con órbitas infinitas en D_ρ , para probar eso mostraremos que cada círculo K_r , $r \leq \rho$, contiene a al menos un punto con una órbita infinita en $D_r \subseteq D_\rho$. Dado que el número de círculos que intersecan a una órbita es a lo más numerable (pues la cardinalidad de las órbitas es numerable), esto probará que la cantidad de órbitas infinitas es no numerable.

Asumamos que todos los puntos de la circunferencia K_r , $r \leq \rho$, tienen órbitas finitas en D_r , es decir la función ν restringida a D_r , ν_{D_r} , sólo toma valores finitos en K_r . Ya que K_r es compacto y ν es semicontinua entonces ν está acotada por un $N \in \mathbb{N}$; dicho de otro modo $\nu(x) \leq N$, esto para toda $x \in K_r$, y además la cardinalidad de las órbitas que intersecan a K_r es finita y menor o igual a N . Como $g(0) = 0$ para toda $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tenemos que la órbita de $x = 0$ es infinita, esto es $\nu(0) = \infty$. Debido a la semicontinuidad de ν en D_r , ν debe tener un punto de discontinuidad $y \in \text{Int}.D_r$ pero por la proposición anterior tenemos $\nu(y) > N$ y $\Gamma(y | D_r) \cap K_r \neq \emptyset$, así si $x \in \Gamma(y | D_r) \cap K_r$ tenemos que $\nu(x) = \nu(y) > N$ (pues ν es constante en las órbitas) pero esto nos guía a una contradicción pues habíamos supuesto que ν estaba acotada en K_r por N . Lo anterior implica que existe al menos un punto en K_r tal que su órbita es infinita.

Para terminar la demostración, denotemos por A al conjunto de puntos cuyas órbitas son periódicas y por B al conjunto de puntos cuyas órbitas son infinitas no periódicas. Esto es sólo una partición del conjunto de órbitas infinitas, es decir tal conjunto es $A \cup B$. También consideremos los conjuntos

$$A_n = \{x \in D_r \mid g^n(x) - x = 0\}.$$

Ya que g es holomorfa y no periódica ($g^n \neq \text{Id}$ para toda n natural) tenemos que $h_n = g^n - \text{id} \neq 0$ es una transformación conforme en el disco D_r , y como D_r es compacto, tiene a lo más una cantidad numerable de ceros en D_r . Así A_n es de cardinalidad a lo más infinita numerable por lo que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

también es a lo más infinito numerable, esto nos lleva a que B es de cardinalidad infinita no numerable, ya que $A \cup B$ tiene cardinalidad no numerable. \square

TEOREMA 2.4.7. *Dado un grupo $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ finitamente generado es integrable o bien cualquier pseudogrupo asociado a G tiene una cantidad no numerable de órbitas no periódicas.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos dos opciones para los elementos de G , hay al menos un elemento no periódico o todos son periódicos. Si todos son periódicos por el teorema 2.2.6 G es cíclico finito y analíticamente linealizable, entonces una integral para el grupo G es $z^{|G|}$.

Si tiene al menos un elemento no periódico entonces por el lema 2.4.6 cualquier pseudogrupo asociado a G tiene una cantidad infinita de órbitas no periódicas. \square

Este teorema nos ayudará fuertemente a la hora de revisar condiciones de integrabilidad para las foliaciones como veremos en el próximo capítulo.

Foliaciones holomorfas

En este capítulo desarrollaremos las nociones fundamentales relativas al concepto de foliación cuando ésta está definida por un campo de vectores en \mathbb{C}^2 (y la ecuación diferencial asociada a éste). Como habremos de ver, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial y el teorema de rectificación nos permiten definir una foliación de forma completamente precisa.

En la primera sección daremos por lo tanto, unas nociones básicas sobre campos vectoriales que utilizaremos a lo largo del capítulo. Posteriormente definiremos los conceptos de foliaciones holomorfas y foliaciones holomorfas singulares de \mathbb{C}^2 . En la sección tres hablaremos de uno de los conceptos clave de este trabajo que es la noción de holonomía; esta herramienta encierra información sobre la dinámica transversal de una foliación. Finalmente hablaremos de la resolución de singularidades de un campo vectorial y de las foliaciones integrables. Estos conceptos y los resultados ahí expuestos constituyen uno de los objetivos centrales de este trabajo.

3.1. Nociones básicas de campos vectoriales analíticos

DEFINICIÓN 3.1.1. Dado un campo vectorial X definido en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^2$, decimos que un punto $p \in U$ es un punto singular (o una singularidad) de X (o de la ecuación diferencial asociadas a X) si $X(p) = 0$, y si $X(p) \neq 0$ decimos que es un punto no singular.

OBSERVACIÓN. A partir de esta definición y por el teorema de existencia y unicidad vemos que si un punto p es singular entonces la curva integral constante $\gamma(t) = p$, para todo tiempo $t \in \mathbb{C}$, es solución de la ecuación diferencial.

Consideraremos de aquí en adelante sólo los gérmenes de campos vectoriales definidos en vecindades del origen en \mathbb{C}^2 , con única singularidad aislada en 0. Para el conjunto de estos gérmenes usaremos la notación $\mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$.

DEFINICIÓN 3.1.2. Si tenemos dos ecuaciones diferenciales $\dot{z} = F(z)$ y $\dot{z} = G(z)$ ¹ asociadas a los campos vectoriales $F, G \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$ decimos que son analíticamente (topológicamente, formalmente) equivalentes si existe un germen invertible holomorfo (continuo, formal) $h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de tal forma que

$$Dh_z F(z) = G(h(z)).$$

La parte lineal de una ecuación diferencial ordinaria guarda mucha información local, y en ciertas ocasiones global, del comportamiento de sus soluciones.

¹Aquí $z \in (\mathbb{C}^2, 0)$ por lo que también podemos pensarlo como $z = (z_1, z_2)$.

DEFINICIÓN 3.1.3. Definimos la matriz asociada a la parte lineal de un campo vectorial $F = f_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ en un punto p como

$$DF_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(p) \end{bmatrix}.$$

La definición anterior nos ayudará a clasificar los puntos singulares en base a los valores propios asociados a la matriz asociada a la parte lineal.

Un punto singular se dice elemental si al menos uno de los valores propios de la matriz antes mencionada en dicho punto es distinto de cero. Si ambos valores propios son cero pero la matriz asociada a la parte lineal es distinta de cero, se le llamará singularidad nilpotente o cúspide.

Para clasificar a los puntos singulares elementales consideremos primero a los valores propios λ_1, λ_2 de la matriz asociada a la parte lineal, y sin pérdida de generalidad supongamos que $\lambda_1 \neq 0$. Al cociente $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ le llamaremos cociente característico o razón característica, nos permite clasificar los tipos de singularidades elementales.

- Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces a la singularidad se le llama de tipo elíptico o hiperbólico.
- Si $\lambda > 0$, decimos que es un tipo nodo.
- Si $\lambda < 0$, entonces le llamamos punto silla.
- Si $\lambda = 0$, decimos que es un punto singular silla-nodo.

En los casos punto silla y nodo hay también una subclasificación, si en estos casos el cociente $\lambda \in \mathbb{Q}_-$ o bien $\lambda \text{ ó } \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N}$, se dice que es un punto resonante (ver definición A.1.1).

Para el caso de ecuaciones diferenciales lineales, tenemos que los valores propios son un invariante analítico, como veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 3.1.4. *Consideremos dos ecuaciones diferenciales lineales $\dot{z} = Az$ y $\dot{z} = Bz$, con A y B matrices complejas de dos por dos, analíticamente equivalentes, entonces las matrices A y B son conjugadas en $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Al ser A y B conjugadas tienen los mismos valores propios.²*

DEMOSTRACIÓN. Como las ecuaciones diferenciales son analíticamente equivalentes, existe un biholomorfismo $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que

$$Dh_z Az = B(h(z))$$

Al ser h invertible en todo \mathbb{C}^2 , tenemos que $h(z) = Cz + \dots$, donde $C \in GL(2, \mathbb{C})$.

Así la igualdad de arriba tiene la forma

$$Dh_z Az = (C + \dots) Az = CAz + \dots$$

$$B(h(z)) = B(Cz + \dots) = BCz + \dots$$

consecuentemente $CA = BC$, como queríamos demostrar. \square

Gracias al resultado anterior podemos pensar a la matriz que define una ecuación diferencial lineal como una matriz en su forma canónica de Jordan. Notemos que la implicación inversa también es cierta, ya que si son conjugadas la transformación lineal que las conjuga da la equivalencia analítica.

²Recordemos que $\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y})$ donde $x, y \in \mathbb{C}$.

OBSERVACIÓN. Toda la teoría que presentamos para campos vectoriales sobre variedades reales es válida (con las modificaciones correspondientes) para campos vectoriales holomorfos sobre variedades complejas, esto gracias a que \mathbb{C} puede ser visto como el plano real. Si consideramos un campo vectorial complejo, X , podemos pensarlo como una distribución dos dimensional real, ya que X y $\sqrt{-1}X$ son \mathbb{R} -linealmente independientes; con un cálculo sencillo también vemos que $[X, iX] = 0$. El dominio de las curvas integrales lo cambiamos de los intervalos abiertos a dominios del plano complejo.

3.2. Foliaciones Holomorfas

Pensar en foliaciones de \mathbb{C}^2 es pensar en las soluciones de una ecuación diferencial (o en curvas integrales de un campo vectorial) sin sus respectivas parametrizaciones. El teorema de existencia y unicidad nos da una partición del espacio ambiente por las curvas fase de dicha ecuación diferencial, las curvas fase son simplemente las soluciones pensadas sin parametrización, a esta partición del espacio se le llama foliación o en ciertos casos al espacio se le dice foliado, a las curvas fase se les llama hojas de la foliación o placas. Luego, el teorema de la forma canónica de campos vectoriales conmutativos (el teorema de rectificación) nos da una visión local muy sencilla de esta partición del espacio, en efecto nos dice que cada punto regular tiene una vecindad donde la foliación se ve como un producto directo.

Siempre buscamos que los objetos con los que trabajamos tengan un aspecto conocido, en el caso de foliaciones es la famosa foliación estándar por placas de un polidisco.

DEFINICIÓN 3.2.1. La foliación holomorfa estándar de dimensión uno compleja³ de un polidisco $P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ es la unión ajena de discos (abiertos), llamados placas

$$P = \bigsqcup_{|w| < 1} L_w, \quad L_w = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \times \{w\}.$$

DEFINICIÓN 3.2.2. Una foliación holomorfa \mathcal{F} de un dominio $U \subseteq \mathbb{C}^2$ (o de manera más general una variedad dos dimensional compleja) es la partición de $U = \bigsqcup_{\alpha} L_{\alpha}$ en subconjuntos disjuntos y conexos, llamados hojas, los cuales localmente son analíticamente equivalentes a la foliación estándar por placas.

Esta última equivalencia analítica significa que cualquier punto $p \in U$ admite una vecindad abierta V y un biholomorfismo $h : V \rightarrow P$, de V en el polidisco P , que envía a las hojas locales $L_{\alpha} \cap V$ de V en las placas L_w del polidisco P . En otras palabras hay una biyección entre las componentes conexas de la foliación local

$$V = \bigsqcup_{\alpha} (L_{\alpha} \cap V) \text{ con las placas del polidisco } P = \bigsqcup_{|w| < 1} L_w.$$

OBSERVACIÓN. Una hoja de la foliación puede ser conexa en una vecindad U pero es posible que en una vecindad $V \subseteq U$ no lo sea.

³Se puede definir de manera análoga para mayor dimensión.

DEFINICIÓN 3.2.3. Decimos que dos foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' holomorfas definidas en los dominios U y U' respectivamente son equivalentes de manera analítica, topológica o formal si existe un biholomorfismo, homeomorfismo o serie formal invertible $h : U \rightarrow U'$ que manda las hojas de \mathcal{F} en las hojas de \mathcal{F}' .

Recordemos que las curvas integrales máximas de un campo vectorial holomorfo dan una foliación del espacio ambiente gracias al teorema global de Frobenius 1.1.5.

La diferencia esencial entre foliaciones y campos vectoriales es que si bien las hojas de una foliación dada por un campo vectorial son soluciones de la ecuación diferencial definida por este, no tomaremos en cuenta su parametrización.

El teorema de rectificación o el teorema de la forma canónica de campos vectoriales conmutativos, nos facilitan mucho el estudio de foliaciones sin singularidades por lo que definiremos conceptos y herramientas útiles para el estudio de foliaciones con singularidades, en particular para gérmenes de foliaciones holomorfas definidas en vecindades del origen en \mathbb{C}^2 con el 0 como única singularidad.

DEFINICIÓN 3.2.4. Decimos que \mathcal{F} es una foliación holomorfa singular de $U \subseteq \mathbb{C}^2$, si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en $U \setminus \Sigma$, donde Σ es un subconjunto analítico⁴ de U de codimensión dos, a este conjunto se le llama conjunto singular de la foliación. Puesto que el conjunto Σ es de codimensión dos entonces está conformado por puntos aislados.

DEFINICIÓN 3.2.5. Decimos que dos campos vectoriales holomorfos $X \in \mathfrak{X}(U)$, $X' \in \mathfrak{X}(U')$, cuyos conjuntos singulares son Σ , Σ' respectivamente, son orbitalmente equivalentes si las foliaciones \mathcal{F}_X y $\mathcal{F}_{X'}$ que estos campos generan son analíticamente equivalentes. Esto es, existe una función holomorfa invertible $h : U \rightarrow U'$, tal que $h(\Sigma) = \Sigma'$, y h , restringida a $U \setminus \Sigma$, manda las hojas de \mathcal{F}_X en las hojas de $\mathcal{F}_{X'}$.

Entre todas las hojas de una foliación singular holomorfa destacan aquellas que contienen en su cerradura a los puntos singulares de la foliación. Al ser cercanas a los puntos singulares podemos rescatar en ellas ciertos comportamientos de las hojas en relación a la singularidad.

DEFINICIÓN 3.2.6. Sea U un dominio de \mathbb{C}^2 . A $C \subseteq U$ se le llama curva analítica si existe una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que C es el conjunto de ceros de la función f

$$C = \{p \in U \mid f(p) = 0\}.$$

Y se dice que f define a la curva C .

DEFINICIÓN 3.2.7. Dada una foliación singular decimos que una hoja L es una separatriz compleja de la foliación si su cerradura \bar{L} contiene a alguna singularidad y resulta ser una curva analítica.

Definiremos un concepto que nos será útil en el estudio del comportamiento de las hojas cercanas a un conjunto.

⁴Un conjunto analítico está dado por los ceros de una función analítica.

DEFINICIÓN 3.2.8. Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa en un dominio $U \subseteq \mathbb{C}^2$ y $B \subseteq U$ un subconjunto arbitrario. Definimos la saturación de B por las hojas de \mathcal{F} como la unión de todas las hojas que intersecan al conjunto B y se denota

$$Sat(B, \mathcal{F}) = \bigcup_{L \in \mathcal{F}, L \cap B \neq \emptyset} L.$$

En general la saturación de algún conjunto “simple” puede ser muy complicada. Aún así tenemos el siguiente resultado que puede ser pensado como la generalización del teorema de dependencia de las soluciones de una ecuación diferencial en las condiciones iniciales.

LEMA 3.2.9. *La saturación de conjuntos abiertos es abierta. En particular, la saturación de la vecindad de un punto en una hoja contiene una vecindad abierta de la hoja.*

3.3. Holonomía

La noción de holonomía en foliaciones intenta ser como el flujo para los campos vectoriales, en el sentido del comportamiento de las soluciones (flujo) de una ecuación diferencial asociada a un campo vectorial, ya que partir de esta transformación podremos ver la dinámica y comportamiento de las hojas en torno a una transversal (pero nos da información no sólo de la transversal sino de una vecindad de esta).

Introduciremos primero esta herramienta para la foliación estándar y dado que localmente (salvo en las singularidades) toda foliación es biholomorfa a la estándar vamos a poder dar la definición de la holonomía para cualquier foliación.

DEFINICIÓN 3.3.1. Una transversal a una hoja L de la foliación \mathcal{F} de codimensión m definida en U con punto base a es una función analítica $\tau : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (U, a)$ transversal a L en a , donde $m = 1, 2$. Esto es una función tal que

$$T_{\tau(p)}U = d\tau_p(T_p(\mathbb{C}^m, 0)) + T_{\tau(p)}L.$$

En muchos casos pensaremos a una transversal como la imagen de τ .

En este trabajo sólo nos enfocaremos en el estudio de foliaciones holomorfas de $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuya codimensión es uno (en este caso particular son también de dimensión uno), por lo que las transversales serán transformaciones holomorfas $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (U, a)$; así que topológicamente hablando $\tau((\mathbb{C}, 0))$ es como \mathbb{C} .

Si \mathcal{F} es la foliación estándar y τ, τ' son dos transversales basadas en puntos a y a' de la hoja $L_0 = \{y = 0\}$ ⁵, entonces cualquier hoja L_ε suficientemente cercana a L_0 interseca en un único punto a ambas transversales. De esta manera podemos definir una única transformación holomorfa $\Delta_{\tau, \tau'} : (\tau, a) \rightarrow (\tau', a')$, mapea puntos con la misma componente y . En las cartas dadas por las parametrizaciones de τ, τ' , esta transformación resulta ser el germen de una función holomorfa de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ ⁶. Estas transformaciones cumplen la siguiente identidad

$$(4) \quad \Delta_{\tau, \tau''} = \Delta_{\tau', \tau''} \circ \Delta_{\tau, \tau'}$$

siempre y cuando los puntos base de las transversales estén en la misma hoja y sean suficientemente cercanos.

⁵Ya que la intersección de τ, τ' con L_0 es transversal y por como está definida la foliación estándar resulta que dicha intersección es un solo punto.

⁶La definición de esta transformación se puede hacer de manera análoga para dimensiones superiores.

La identidad anterior nos sugiere pensar no sólo en la transformación asociada a dos transversales si no a toda una trayectoria. Es decir si L es la hoja de una foliación holomorfa y $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ es una trayectoria con puntos inicial y final $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = a'$ respectivamente, definir la función holomorfa Δ_γ , llamada *mapeo de holonomía con respecto a la trayectoria* γ . Usaremos una vez más a las transversales τ y τ' con puntos base a y a' .

Dado que $[0, 1]$ es un compacto podemos cubrir con una cantidad finita de abiertos U_j a la trayectoria $\gamma([0, 1])$ (de tal forma que en cada abierto U_j la foliación sea equivalente a la foliación estándar). Entonces podemos insertar transversales τ_j , $j = 0, \dots, k$ $\tau_0 = \tau$ y $\tau_k = \tau'$, a la hoja L con punto base en la curva definida por γ , de tal forma que la composición

$$\Delta_\gamma = \Delta_{\tau_{k-1}, \tau_k} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_0, \tau_1} : (\tau, a) \longrightarrow (\tau', a')$$

sea un germen de transformación analítica, a este germen se le llama *mapeo de correspondencia a lo largo de la trayectoria* γ . Gracias a la identidad (4), la transformación Δ_γ no dependerá de las transversales intermedias que escojamos, más aún no importa la trayectoria sino su clase de homotopía (con extremos fijos).

OBSERVACIÓN. La construcción de los mapeos de holonomía corresponde a lo que clásicamente se llama “*continuación de las soluciones de una ecuación diferencial a lo largo de una trayectoria*”.

Escogiendo otro par de transversales con puntos base en los extremos de la curva γ resulta en la composición de Δ_γ con dos biholomorfismos (uno a la derecha y el otro a la izquierda), así en cartas adecuadas, uno siempre puede llegar a que el mapeo de correspondencia Δ_γ es la identidad. Esta situación cambia drásticamente si hay más de una clase de homotopía para las trayectorias con puntos iniciales y finales a y a' (en particular también si $a' = a$).

Sean a un punto de una hoja $L \in \mathcal{F}$, $\tau : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (U, a)$ una transversal a L en a , y un lazo $\gamma \in \pi_1(L, a)$.

DEFINICIÓN 3.3.2. Definimos a la transformación de holonomía asociada a γ

$$\Delta_\gamma : (\tau, a) \longrightarrow (\tau, a)$$

como la transformación de correspondencia asociada al lazo γ .

El grupo de holonomía de una foliación asociada a una hoja L es la imagen del grupo fundamental $\pi_1(L, a)$ en el grupo de gérmenes de difeomorfismos de la transversal τ , $Diff(\tau, a)$.

Así definido, el grupo de holonomía, es un subgrupo de $Diff(\mathbb{C}, 0)$ módulo una conjugación simultánea de todas las transformaciones de holonomía, independientemente de la transversal τ o inclusive del punto base $a \in L$. Este grupo resulta ser un invariante de la foliación y acarrea casi toda la información del comportamiento de las hojas de la foliación, cercanas a L .

Por la definición del grupo de holonomía vemos que es importante basar la transversal en una hoja con grupo fundamental no trivial, esto en foliaciones en general no es sencillo pero para el caso de foliaciones holomorfas singulares es fácil escoger estas hojas, ya que las separatrices lo cumplen.

PROPOSICIÓN 3.3.3. *Consideremos dos foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{G} analíticamente equivalentes y sea h el biholomorfismo que las conjuga. Si $L \in \mathcal{F}$ es una hoja de la*

foliación tal que $h(L) = L'$ es una hoja de \mathcal{G} , entonces para cualesquiera dos transversales τ, τ' basadas en puntos a y a' de L y L' respectivamente, los grupos de holonomía correspondientes $G \subseteq \text{Diff}(\tau, a)$, $G' \subseteq \text{Diff}(\tau', a')$ son analíticamente equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. Sea τ una transversal a la hoja L con punto base $a \in L$ y $\tau' = h(\tau)$, como h es un biholomorfismo y $h(L) = L'$ tenemos que τ' es transversal a L' . Si consideramos la restricción de h a la transversal τ tenemos que esta función realiza la conjugación entre dichos grupos de holonomía. Más aún como el grupo de holonomía no depende de la pareja (τ', a') tenemos el resultado deseado. \square

En general calcular explícitamente la transformación de holonomía asociada a una separatriz puede ser complicado, para ello tenemos los siguientes resultados que al menos nos dicen cuál es el coeficiente de la parte lineal. Si bien podríamos pensar que esto no es mucha información, en algunos casos con este coeficiente bastará para describir la acción de dicho grupo en los puntos de la transversal.

El siguiente ejemplo nos mostrará que justamente el cociente característico tiene mucha relevancia en esta transformación.

EJEMPLO 3.3.4. Calculemos las transformaciones de holonomía de la foliación generada por las soluciones de la ecuación diferencial lineal en \mathbb{C}^2 definida por $\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$. Esta ecuación diferencial tiene una única singularidad aislada en el origen y dos separatrices complejas $W = \{z = 0\} \setminus \{0\}$ y $Z = \{w = 0\} \setminus \{0\}$, los ejes coordenados sin el cero.

Al ser una ecuación diferencial lineal sabemos que las soluciones son de la forma

$$\varphi(t, (z, w)) = (e^{\lambda t} z, e^{\mu t} w), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Para calcular la transformación de holonomía con respecto a la separatriz Z necesitamos una transversal, escojamos a $\tau = \{(1, w) \in \mathbb{C}^2\}$ la cual es transversal en el punto $(1, 0)$; requerimos también un lazo que no sea nulhomotópico y esté contenido en Z , para ello consideremos al lazo $\gamma = \{(z, 0) \in Z \mid |z| = 1\}$. Dado un punto $p \in \tau$ nos preguntamos para qué valores de $t \in \mathbb{C}$

$$\varphi(t, p) \in \tau.$$

Como p es de la forma $(1, p_2)$ entonces la solución que pasa por p se ve de la siguiente manera

$$(5) \quad \varphi(t, (1, p_2)) = (e^{\lambda t}, e^{\mu t} p_2).$$

Así el problema anterior se reduce a ver que tiempo t cumple que $e^{\lambda t} = 1$ esto pasa si y sólo si

$$\lambda t = \log(e^{\lambda t}) = \log(1) = \log(|1|) + i \arg(1) = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De la ecuación anterior deducimos que el parámetro t buscado es de la forma

$$t = \frac{2\pi i n}{\lambda}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5) obtenemos que la transformación de holonomía $\Delta : \tau \rightarrow \tau$ es

$$\Delta(1, p) = \left(1, e^{\frac{\mu 2\pi i}{\lambda}} p\right).$$

Observemos que el cociente característico $\frac{\mu}{\lambda}$ aparece en la holonomía y de hecho es el que determina si esta transformación es periódica, no periódica y en caso de ser periódica qué orden tiene.

Para calcular la holonomía asociada a la separatriz W basta hacer el cálculo recién presentado.

El ejemplo 3.3.4 puede ser usado para crear foliaciones con transformaciones de holonomía analíticamente equivalentes pero que las foliaciones no lo sean. Basta escoger dos ecuaciones diferenciales lineales tales que el cociente característico sea el mismo pero los valores propios de la matriz no coincidan.

Habrán casos donde el campo vectorial que define a la foliación no tiene parte lineal o la singularidad no es elemental, en estos casos tenemos otro método para calcular el coeficiente de la parte lineal, se llama *ecuación de primera variación*.

Empecemos recordando el concepto de primera variación de una ecuación diferencial ordinaria con respecto a una solución.

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y consideremos la ecuación diferencial holomorfa

$$\frac{dw}{dz} = F(z, w)$$

definida en U . Supongamos que conocemos una solución $\varphi(z)$ de esta ecuación diferencial, tal que en el punto z_0 , $\varphi(z_0) = w_0$, entonces $\frac{d\varphi(z)}{dz} = F(z, \varphi(z))$. Consideremos ahora una familia de soluciones $\Phi(z, w)$ que satisface

$$\frac{d\Phi}{dz}(z, w) = F(z, \Phi(z, w)), \quad \Phi(z_0, w) = w.$$

Expandiendo $\Phi(z, w)$ en serie de potencias alrededor del punto (z_0, w_0) , con respecto a la variable w , llegamos a la expresión

$$\Phi(z, w) = \Phi(z, w_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial w}(z, w_0)(w - w_0) + \dots + \frac{1}{j!} \frac{\partial^j\Phi}{\partial w^j}(z, w_0)(w - w_0)^j + \dots$$

ya que $\Phi(z_0, w_0) = w_0$ entonces por el teorema de existencia y unicidad $\Phi(z, w_0) = \varphi(z)$. A las funciones $\frac{\partial^j\Phi}{\partial w^j}(z, w_0)$ se les llama *j-ésima variación* de la solución φ , en este caso nos interesa analizar a la función $\varphi_1(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial w}(z, w_0)$ pues es la primera variación.

Si consideramos la derivada de φ_1 con respecto de z se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz}(z) &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial z}(z, w) = \left(\frac{\partial}{\partial w} F(z, \Phi(z, w)) \right) (z, w_0) \\ &= F_w(z, \varphi(z)) \frac{\partial\Phi}{\partial w}(z, w_0) = F_w(z, \varphi(z)) \varphi_1(z). \end{aligned}$$

Así, la primera variación $\varphi_1(z)$ satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d\varphi_1}{dz}(z) = F_w(z, \varphi(z)) \varphi_1(z), \quad \varphi_1(z_0) = 1.$$

Y sabemos obtener sus soluciones, estas son de la forma

$$\exp\left(\int_{(z_0, w_0)}^{(z, \varphi(z))} F_w dz\right).$$

Una vez hecho esto, el método para calcular el coeficiente lineal de la transformación de holonomía es el siguiente.

Si el campo vectorial X asociado a la ecuación diferencial F se ve como $X(z, w) = A(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + wB(z, w) \frac{\partial}{\partial w}$, entonces $\{w = 0\}$ es una separatriz de la foliación y el residuo

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\partial F}{\partial w}(z, 0)$$

es la parte lineal de la holonomía asociada a $\{w = 0\}$. Veamos explícitamente como es $\frac{\partial F}{\partial w}(z, 0)$.

$$F(z, w) = \frac{dw}{dz} = \frac{wB(z, w)}{A(z, w)}$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{wB}{A} \right) = \frac{A(wB_w + B) - wBA_w}{A^2};$$

así evaluando en el punto $(z, 0)$ tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z, 0) = \frac{B(z, 0)}{A(z, 0)}.$$

Por lo que para calcular la parte lineal de la holonomía con respecto a la separatriz $\{w = 0\}$ basta computar el residuo en $z = 0$ de $\frac{B(z, 0)}{A(z, 0)}$.

OBSERVACIÓN. Si la singularidad es elemental entonces el resultado de la ecuación de primera variación y el cociente característico coinciden.

Gracias a la construcción de las transformaciones de holonomía la órbita de un punto está contenida en la hoja donde éste se encuentra, nos gustaría que la intersección de una hoja con la transversal y la órbita bajo la transformación de holonomía coincidan, pues este no será el caso para todas las foliaciones como lo veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.3.5. Consideremos la foliación singular holomorfa \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuya primera integral es el polinomio $u(x, y) = x^2(x + y)^3 y^4$. Calcularemos la transformación de holonomía asociada a cada separatriz y después compararemos las órbitas dadas por la holonomía con la intersección de hojas con una transversal local basada en dicha separatriz.

Como la foliación \mathcal{F} tiene primera integral u entonces está dada por la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= - \left(4y^3 x^2 (x + y)^3 + 3(x + y)^2 x^2 y^4 \right) \\ \dot{y} &= 2xy^4 (x + y)^3 + 3(x + y)^2 x^2 y^4. \end{aligned}$$

Esta foliación es orbitalmente equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xA(x, y) = - (4x(x + y) + 3xy) = x(-4x - 7y) \\ \dot{y} &= yB(x, y) = 2y(x + y) + 3xy = y(2y + 5x). \end{aligned}$$

Claramente los ejes (planos) coordenados $Y = \{x = 0\}$, $X = \{y = 0\}$ son separatrices de la foliación. Y estas separatrices son las que usaremos para hacer los cálculos.

Primero consideremos a la transversal $\tau = \{(x, 1) \mid |x| \leq \delta\}$ de Y basada en el punto $(0, 1)$. Sabemos que el coeficiente de la parte lineal de la transformación

de holonomía con respecto a la separatriz Y es $e^{2\pi i\mu}$ donde μ es el índice de la separatriz en cuestión. Este índice se calcula con la siguiente fórmula.

$$\operatorname{Res}_{y \rightarrow 0} \frac{yA(0, y)}{yB(0, y)} = \operatorname{Res}_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{y(-4x-7y)}{2y^2+5xy} = \operatorname{Res}_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{y(-4x-7y)}{y(2y+5x)} = \operatorname{Res}_{y \rightarrow 0} \frac{-7y}{2y} = -\frac{7}{2}.$$

Como la foliación es integrable entonces la holonomía asociada a Y es integrable y por lo tanto periódica, proposición 3.6.3, también sabemos que es analíticamente linealizable. Sea $h(z) = e^{2\pi i \frac{-7}{2}} z$ la transformación de holonomía linealizada, claramente $h^2 = Id$, esto nos dice que la órbita de un punto z_0 en la transversal τ consta de sólo dos puntos.

Ahora para ver el número de puntos en $\tau \cap Y$ recordemos que las hojas de la foliación son las curvas de nivel de la función holomorfa u , por lo que basta ver cuántos puntos de la transversal τ satisfacen $u = \varepsilon$, con $|\varepsilon|$ cercano a 0. Los puntos de la transversal tienen coordenadas $(x, 1)$, sustituyendo en u tenemos

$$u(x, 1) - \varepsilon = x^2(x+1)^3 - \varepsilon = 0.$$

Ya que \mathbb{C} es un campo algebraicamente cerrado tenemos que la ecuación anterior tiene exactamente 5 soluciones si $\varepsilon \neq 0$. Si usamos el criterio de la derivada, podemos ver fácilmente que $u'(x, 1)$ no divide a $u(x, 1)$ por lo que las raíces no se repiten y al escoger ε con norma suficientemente pequeña todas caen en τ . El caso para fijarnos en la holonomía asociada a la separatriz X es análogo al anterior.

3.4. Resolución de Singularidades

Esta sección se dedicará al estudio y presentación de una herramienta fundamental para este trabajo

DEFINICIÓN 3.4.1. Sea $0 \in \mathbb{C}^2$. La variedad \mathbb{M} que se obtiene después de *explotar* el origen está definida por las cartas

$$\begin{aligned} (x, z) : V_x &\longrightarrow \mathbb{C}^2, \text{ donde } z = \frac{y}{x} \\ (w, y) : V_y &\longrightarrow \mathbb{C}^2, \text{ donde } w = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

y el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \Phi : V_x \cap V_y &\longrightarrow V_y \cap V_x \\ (x, z) &\longmapsto \left(\frac{1}{z}, zx\right). \end{aligned}$$

La proyección canónica $\Pi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ está definida sobre las cartas como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi : V_x &\longrightarrow \mathbb{C}^2 & \Pi : V_y &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, z) &\longmapsto (x, zx) & (w, y) &\longmapsto (wy, y). \end{aligned}$$

Notemos que la proyección Π es un biholomorfismo entre $\mathbb{M} \setminus \Pi^{-1}(0)$ y $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. A $\mathbb{E} = \Pi^{-1}(0)$ comúnmente se le llama *divisor excepcional* de \mathbb{M} . Por la definición de Π la imagen inversa del cero es el espacio proyectivo complejo de dimensión uno, es decir una esfera.

DEFINICIÓN 3.4.2. La explosión de una foliación singular \mathcal{F} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ es la foliación singular holomorfa $\mathcal{F}' = \Pi^*\mathcal{F}$ de \mathbb{M} extendiendo la preimagen de la foliación $\Pi^{-1}(\mathcal{F})$ de $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ a toda la variedad \mathbb{M} . En el lenguaje de formas, si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ ⁷ entonces la foliación $\Pi^*\mathcal{F}$ está dada por $\{\Pi^*\omega = 0\}$, donde $\Pi^*\omega$ es el *pull-back* de la 1-forma ω por la función Π , también se le llama *jalar* la forma ω con Π (para ver un desarrollo más profundo de este tema ver A.3.1 en la página 62).

⁷Ver Apéndice A.3.1.

Tenemos dos opciones para el divisor excepcional \mathbb{E} : que este sea una separatriz o que diferentes puntos de \mathbb{E} pertenezcan a diferentes hojas de la foliación \mathcal{F}' . En el último caso la mayoría de las hojas de \mathcal{F}' intersecan transversalmente a \mathbb{E} en casi todos los puntos, con la excepción de algunos puntos de tangencia y singularidades aisladas de \mathcal{F}' .

DEFINICIÓN 3.4.3. Un punto singular p de una foliación holomorfa \mathcal{F} se llama no dicrítico si $\mathbb{E} = \Pi^{-1}(p)$ es una separatriz de la foliación $\mathcal{F}' = \Pi^*\mathcal{F}$. En otro caso al punto singular se le llama dicrítico.

Genéricamente las singularidades de una foliación holomorfa son no dicríticas, las foliaciones dicríticas corresponden a casos donde la parte principal homogénea del campo vectorial que define a \mathcal{F} es degenerada.

Si \mathcal{F} está dada por la ecuación pffafiana $\{\omega = 0\}$ entonces tenemos la siguiente presentación del *pull-back* de la uno forma ω , dicha presentación nos ayuda en ejemplos y problemas a la hora de hacer cálculos explícitos.

PROPOSICIÓN 3.4.4. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ un germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Por la construcción y definición de la explosión tenemos que $\mathcal{F}' = \{\Pi^*\omega = 0\}$, y si $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ entonces

- Caso 1.* En la carta (x, z) , con $z = \frac{y}{x}$, $\Pi^*\omega = (a + zb) dx + xb dz$.
Caso 2. En la carta (w, y) , con $w = \frac{x}{y}$, $\Pi^*\omega = ya dw + (wa + b) dz$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos sólo uno de los dos incisos ya que sus demostraciones son totalmente análogas.

Caso 1. Usando la definición de pull-back tenemos que:

$$\begin{aligned} (\Pi^*\omega)(x, z) &= \omega(\Pi(x, z)) = a(x, xz) dx + b(x, xz) d(xz) \\ &= a(x, xz) dx + b(x, xz) (z dx + x dz) \\ &= (a(x, xz) + zb(x, xz)) dx + xb(x, xz) dz. \end{aligned}$$

Y la afirmación está probada. \square

OBSERVACIÓN. Es natural preguntarse si es lo mismo resolver una singularidad con lenguaje de formas diferenciales o con lenguaje de campos vectoriales. Veremos que la respuesta a esta inquietud es afirmativa, así que a lo largo del trabajo usaremos la presentación que nos convenga.

Sean $a, b : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ funciones polinomiales tales que $a(0, 0) = 0 = b(0, 0)$. Ahora consideremos la forma diferencial $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ y el campo vectorial V definido por $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b(x, y) \\ a(x, y) \end{pmatrix}$. Es claro que $\omega(V) \equiv 0$, por lo que definen la misma foliación. Si $a(x, y) = \sum_{j=0}^m (\sum_{i=0}^n a_{ij} x^i y^j)$ y $b(x, y) = \sum_{j=0}^r (\sum_{i=0}^s b_{ij} x^i y^j)$ entonces por la proposición 3.4.4 tenemos que la 1-forma $\hat{\omega} = \Pi^*\omega$ en la carta (x, z) se ve como $(a(x, xz) + zb(x, xz)) dx + xb(x, xz) dz$,

sustituyendo con lo de arriba tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &= \left(\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^i (xz)^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^i (xz)^j \right) \right) dx \\
&\quad + x \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^i (xz)^j \right) dz \\
&= \left(\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^{i+j} z^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j} z^j \right) \right) dx \\
&\quad + x \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j} z^j \right) dz \\
&= x \left(\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^{i+j-1} z^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j-1} z^j \right) \right) dx \\
&\quad + x \left(\sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j} z^j \right) dz \right).
\end{aligned}$$

De la última igualdad tenemos que $\hat{\omega}$ es orbitalmente equivalente a

$$\left(\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^{i+j-1} z^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j-1} z^j \right) \right) dx + \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j} z^j \right) dz$$

Ahora hagamos el desarrollo con la ecuación diferencial dada por V , como $z = \frac{y}{x}$ entonces $\dot{z} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2}$, sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -b(x, xz) \\
\dot{z} &= \frac{xa(x, xz) + yb(x, xz)}{x^2}
\end{aligned}$$

Desarrollando \dot{x} tenemos

$$\dot{x} = - \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^i (xz)^j \right) = - \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j} z^j \right).$$

Y al desarrollar \dot{z} llegamos a

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^i (xz)^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^i (xz)^j \right)}{x} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^{i+j} z^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j} z^j \right)}{x}
\end{aligned}$$

usamos una vez más que $i + j > 0$ entonces

$$\dot{z} = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} x^{i+j-1} z^j \right) + z \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s b_{ij} x^{i+j-1} z^j \right).$$

Comparando el resultado para formas y para campos vectoriales vemos que en efecto tenemos el mismo resultado.

3.4.1. Teorema de Seidenberg. Un resultado muy importante en la Teoría de resolución de singularidades es el famoso teorema de Seidenberg. Si bien este teorema se le atribuye a A. Seidenberg, fue un trabajo en el cual participaron I. Bendixson, S. Lefschetz, A. Andreev entre otros. El enunciado de este teorema se ha ido generalizando y para el caso de foliaciones analíticas se ha simplificado la demostración.

La utilidad de este resultado es grande ya que nos dice que dada una foliación holomorfa singular, siempre podemos simplificarla después de una cantidad finita de explosiones en los puntos singulares; con simplificarla nos referimos a que todas las singularidades sean elementales. Demostrar este teorema es muy laborioso y técnico, no está en los propósitos de este trabajo, daremos solamente su enunciado. Sin embargo sí lo usaremos ya que en los teoremas de la siguiente sección nos será de gran utilidad.

TEOREMA 3.4.5. (de Seidenberg) *Para cualquier punto singular de una foliación holomorfa \mathcal{F} se puede construir una variedad de dimensión dos compleja M con una curva analítica $D \subset M$ y una transformación holomorfa $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, que es un biholomorfismo entre $M \setminus D$ y $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ y de tal manera que $\pi^*\mathcal{F}$ tiene sólo singularidades elementales en el divisor D .*

De forma más precisa, la transformación π que resuelve a la singularidad de la foliación \mathcal{F} puede ser construida como la composición de un número finito de explosiones en los diferentes puntos singulares. El divisor $D = \pi^{-1}(0)$ es la unión de una cantidad finita de líneas proyectivas, D_j , que se intersecan transversalmente, es decir $D = \bigcup D_j$ y $D_j \cong \mathbb{C}P^1$.

3.5. Holonomía Evanesciente

Es natural preguntarnos si hay relación entre el grupo de holonomía de la foliación \mathcal{F} asociado a una separatriz y el grupo de holonomía de la foliación \mathcal{F} después de una explosión simple en el origen. En ciertos casos sí hay relación como veremos posteriormente, pero antes definiremos un grupo de holonomía muy importante para foliaciones holomorfas singulares no dicríticas.

DEFINICIÓN 3.5.1. El *grupo de holonomía evanescente* de una foliación singular \mathcal{F} no dicrítica, con singularidad aislada, es el grupo de holonomía asociado al divisor excepcional, que es una separatriz, $L = \mathbb{E} \setminus \text{Sing}\mathcal{F}'$ donde la foliación a considerar es $\mathcal{F}' = \Pi^*\mathcal{F}$.

Con el siguiente ejemplo veremos la utilidad de la resolución de singularidades y calcularemos el grupo de holonomía evanescente.

EJEMPLO 3.5.2. Usaremos a la foliación inducida por la función holomorfa $u(x, y) = y^2 - x^3$ para mostrar la utilidad de la resolución de singularidades y calcular el grupo de holonomía evanescente, la primera nos ayudará a encontrar una separatriz escondida.

Consideremos la una forma diferencial $\omega = du, \omega(x, y) = 2y dy - 3x^2 dx$. Hagamos la explosión en el origen, la única singularidad.

En la carta (u', y) , $x = u'y$, se ve como

$$-3u^2y^2 du' + (2 - 3u'^3y) dy$$

Vemos que la ecuación en esta carta no tiene puntos singulares, por lo que ya no podemos analizar la ecuación desde estas coordenadas..

Nos fijamos ahora en la carta (x, u) , $y = xu$, la resolución se ve como

$$(-3x + 2u^2) dx + 2xu du.$$

El origen, en (x, u) , si es punto singular pero su parte lineal sigue teniendo radio característico igual a cero, volvamos a explotar.

Consideremos primero la explosión en la carta (x, v') , $u = xv'$, la forma diferencial tiene la siguiente presentación

$$(-3 + 4xv'^2) dx + 2x^2v' dv'.$$

Como el $(0, 0)$ no es punto singular no obtendremos más información en esta carta, analicemos la otra.

En las coordenadas (v, u) con $x = vu$ tenemos la siguiente 1-forma

$$(-3vu + 2u^2) dv + (-3v^2 + 4vu) du.$$

Podemos volver a explotar el punto singular $(0, 0)$, ya que no tiene parte lineal la ecuación.

En la carta (z, u) , $v = zu$, se ve como

$$(-3zu + 2u) dz + (6z - 6z^2) du.$$

Y en la carta (v, w) , $u = vw$ tenemos lo siguiente

$$(6w^2 - 6w) dv + (4vw - 3v) dw$$

En ambos casos la ecuación tiene parte lineal diagonal con valores propios distintos de cero, analizaremos los tres puntos singulares y veremos que nos dicen con respecto a la foliación original.

Primero analicemos la carta (z, u) tenemos dos singularidades el origen, $(0, 0)$, y el punto $(1, 0)$. La ecuación diferencial en el origen se ve como

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6z^2 \\ -3zu \end{pmatrix}.$$

Vemos que hay dos separatrices $\{z = 0\}$ y $\{u = 0\}$ la primera corresponde al eje y en la ecuación original y la segunda al divisor excepcional. También podemos rescatar el radio característico para la transformación de holonomía asociada al divisor excepcional, este es $\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$. Veamos ahora que sucede con el punto $(1, 0)$, el cual tiene la siguiente matriz asociada a la parte lineal

$$\begin{pmatrix} -6 + 12z & 0 \\ -3u & 2 - 3z \end{pmatrix}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por este punto pasan dos separatrices $\{u = 0\}$ y $\{z = 1\}$, la última corresponde a la curva $\{y^2 - x^3 = 0\}$ que tiene pendiente 1 cercana al origen, ya que $z = \frac{x^3}{y^2}$. La razón característica de esta singularidad es $\frac{-1}{6}$.

Para la carta (v, w) podemos usar el mismo razonamiento y el hecho que $w = \frac{1}{z}$, gracias a esta condición sabemos de antemano que $(0, 1)$ es un punto singular. Sólo basta analizar el punto $(0, 0)$, el cual tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4vw \\ 6w^2 \end{pmatrix}.$$

Por este punto pasan dos separatrices, el divisor excepcional, $\{v = 0\}$, y $\{w = 0\}$, el eje x (una vez proyectemos). El cociente característico de este punto es $\frac{-1}{2}$.

Ya que la foliación es integrable podemos suponer que las funciones de holonomía, con respecto al divisor excepcional, son lineales entonces el grupo de holonomía evanescente, H , está generado por $\left\{e^{2\pi i \frac{-1}{3}} t, e^{2\pi i \frac{-1}{6}} t, e^{2\pi i \frac{-1}{2}} t\right\}$ como estas funciones conmutan y además H es cíclico, pues es integrable, entonces $H = \left\langle e^{2\pi i \frac{-1}{6}} t \right\rangle$.

Al igual que el grupo de holonomía, el grupo de holonomía evanescente es un invariante de la foliación. Presentaremos un caso donde la equivalencia analítica de un grupo de holonomía evanescente con otro implica la equivalencia analítica de las foliaciones correspondientes.

TEOREMA 3.5.3. *Consideremos dos foliaciones holomorfas singulares no dicríticas \mathcal{F}, \mathcal{G} de $(\mathbb{C}^2, 0)$, cada una con un número finito de singularidades hiperbólicas después de una explosión en el origen (coincide el número de singularidades) y que los índices de las separatrices coincidan⁸. Con estas hipótesis la equivalencia analítica de sus grupos de holonomía evanescente implica la equivalencia analítica de las foliaciones.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{F}' = \Pi_1^* \mathcal{F}$, $\mathcal{G}' = \Pi_2^* \mathcal{G}$ las foliaciones después de una primera explosión y $\Sigma_{\mathcal{F}'} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $\Sigma_{\mathcal{G}'} = \{q_1, \dots, q_n\}$ sus conjuntos singulares respectivamente. Que cada singularidad sea hiperbólica significa que su cociente característico no es real, esto nos dice que los valores propios asociados a cada singularidad están en el dominio de Poincaré, entonces por el teorema A.1.4 de Poincaré para cada singularidad existe una vecindad donde podemos pensar al campo vectorial sólo como su parte lineal, y ya que los valores propios son distintos, la matriz asociada a la parte lineal es diagonalizable. Esto permite expresar de una manera sencilla la foliación alrededor de cada punto singular. Genéricamente se ve así el campo vectorial asociado a la foliación en vecindades de cada punto singular.

$$\lambda z \frac{\partial}{\partial z} + \mu w \frac{\partial}{\partial w}.$$

La presentación anterior nos dice que por cada punto singular pasan sólo dos separatrices y ya que \mathbb{E} es una separatriz común tenemos a lo más n separatrices (además del divisor excepcional), también nos dice que las soluciones, con condiciones iniciales (z, w) , son de la forma

$$(e^{\lambda t} z, e^{\mu t} w), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Ahora consideremos una transversal τ con punto base en $\mathbb{E} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}'}$. Dado que las soluciones son de esa manera siempre podemos ver que, en efecto, todas las soluciones intersecan a la transversal τ . Un argumento más visual de este razonamiento es el siguiente, para cada punto en $\mathbb{E} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}'}$ escogamos la vecindad dada por el teorema de rectificación, esto nos da una cubierta abierta de $\mathbb{E} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}'}$ y simplemente completamos la cubierta con vecindades para cada punto en $\Sigma_{\mathcal{F}'}$ pero como \mathbb{E} es compacto entonces existe una subcubierta finita, la refinamos de tal manera que la subcubierta sea una bola que contiene a \mathbb{E} . Esto nos dice que la saturación de la transversal es una vecindad abierta de \mathbb{E} .

Sea H el grupo de holonomía evanescente asociado a \mathcal{F}' en la transversal τ , el grupo H no es integrable pues los cocientes característicos no son racionales, entonces por el lema 2.4.6 cualquier pseudogruppo asociado a H tiene una cantidad no

⁸Nos referimos a los coeficientes de la ecuación de primera variación con respecto a cada separatriz.

numerable de órbitas no periódicas. A partir de todo el análisis anterior podemos decir que la equivalencia analítica entre los grupos de holonomía evanescente la podemos extender a toda la saturación de la transversal, salvo quizá a las separatrices y a los puntos singulares. Para extenderla a las separatrices usamos el teorema A.2.3 de extensión de Riemann. Después proyectamos con Π_1 y Π_2 a las foliaciones \mathcal{F}' y \mathcal{G}' respectivamente. Dado que estas proyecciones son biholomorfismos (fuera del punto singular y el divisor excepcional) tenemos que la equivalencia analítica de las foliaciones se preserva, ahora sólo nos resta extender dicha equivalencia con el teorema A.2.1 de singularidades removibles. De esta manera construimos la equivalencia analítica de las foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{G} . \square

3.6. Foliaciones Integrables

DEFINICIÓN 3.6.1. Una foliación singular $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se dice integrable, si existe un germen de función holomorfa, no constante, $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $du \wedge \omega = 0$.

Equivalentemente, el germen de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$ es integrable si existe una función analítica no constante tal que $Xu = 0$. En ambos casos a la función u se le llama primera integral, o simplemente integral de la foliación \mathcal{F} . En el caso que la función u sea una serie formal decimos que \mathcal{F} es formalmente integrable.

Cada hoja de una foliación integrable está contenida completamente en una curva de nivel $\{u = \text{cte.}\}$ de la primera integral y por ende todas las hojas son curvas analíticas en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

El próximo lema nos da un primer acercamiento de la utilidad del grupo de holonomía de una foliación.

LEMA 3.6.2. (de saturación). *Cualquier germen de función analítica $u \in \mathcal{O}(\tau, a)$ que sea integral del grupo de holonomía $G \subseteq \text{Diff}(\tau, a)$, es decir $u \circ g = u$ para todo germen $g \in G$, se extiende de manera única como una función holomorfa definida en una vecindad abierta V de la hoja $L \ni a$ y es constante a lo largo de las hojas de la foliación \mathcal{F} en la vecindad V .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $b \in L$ cualquier punto en la hoja, y consideremos una trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ tal que $\gamma(0) = b$ y $\gamma(1) = a$. El mapeo de correspondencia Δ_γ nos permite traducir al germen u (bajo continuación analítica) a una función analítica $u' = u \circ \Delta_\gamma$ constante en las hojas de la foliación \mathcal{F} . Esta extensión, u' así definida, depende en una primera instancia de la elección de la trayectoria γ ; entonces si θ es otra trayectoria con los mismos extremos, la extensión va a diferir por la continuación analítica del germen $u \circ g$, donde $g = \Delta_{\theta \circ \gamma^{-1}}$ es la transformación de holonomía asociada al lazo $\theta \circ \gamma^{-1} \in \pi_1(L, a)$; además por hipótesis $u \circ g = u$, ya que $g \in G$.

Por otra parte tenemos la siguiente igualdad

$$\Delta_\theta = \Delta_{\theta \circ (\gamma^{-1} \circ \gamma)} = \Delta_{(\theta \circ \gamma^{-1}) \circ \gamma} = \Delta_{\theta \circ \gamma^{-1}} \circ \Delta_\gamma = g \circ \Delta_\gamma.$$

Sólo nos basta ver que $u \circ \Delta_\gamma = u \circ \Delta_\theta$ y así la extensión de la función u no dependerá de la trayectoria elegida. Efectivamente, utilizando la igualdad de arriba tenemos

$$u \circ \Delta_\theta = u \circ (g \circ \Delta_\gamma) = (u \circ g) \circ \Delta_\gamma = u \circ \Delta_\gamma$$

Es decir el resultado de la continuación analítica será el mismo para cualquier punto $b \in L$ y así podemos extender la función u de manera única y holomorfa en una vecindad de la hoja L de tal forma que dicha extensión es constante a lo largo de las hojas de la foliación \mathcal{F} . \square

Ahora tenemos un resultado “recíproco” al anterior, la idea en el fondo es restringir la integral a la transversal y ver que dicha restricción es también una integral. Estos resultados en parte dan una idea de por qué a algunos de los grupos de gérmenes de difeomorfismos se les llama integrables.

PROPOSICIÓN 3.6.3. *Si \mathcal{F} es una foliación formalmente integrable entonces las transformaciones de holonomía, asociadas a cualquiera de las separatrices, son formalmente integrables y más aún, el grupo de holonomía evanescente también lo es. Este resultado es un poco más fuerte puesto que dichas transformaciones resultan tener una integral analítica, esto es gracias al teorema 2.3.6.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la serie formal $\hat{u} \in \mathbb{C}[[x, y]]$ la integral formal de la foliación, y consideremos también a la transformación de holonomía, h , asociada a la transversal τ con punto base en la separatriz S . Recordemos que si $p \in \tau$ entonces $h(p) \in \tau$ y más aún, están en la misma hoja. Fijémonos en la restricción $\hat{u}|_\tau$, por el recordatorio anterior podemos deducir que $\hat{u}|_\tau \circ h(p) = \hat{u}|_\tau(p)$, $\forall p \in \tau$, en otras palabras $\hat{u}|_\tau$ es integral de h .

Ahora para ver que el grupo de holonomía evanescente es integrable consideremos al pull-back $\hat{u}^* = \Pi^* \hat{u}$ y a $\mathcal{F}' = \Pi^* \mathcal{F}$. Como la derivada exterior y el pull-back conmutan (ver apéndice A.3.1) entonces \hat{u}^* es integral formal de \mathcal{F}' . Usando el argumento dado en la primera parte de la prueba vemos que si δ es una transversal con punto base en $\mathbb{E} \setminus \Sigma$ y g_j es la transformación de holonomía asociada a $(\mathbb{E}, \delta, c_j)$, donde $c_j \in \Sigma$, entonces $\hat{u}^*|_\delta$ es integral de g_j , $j = 1, \dots, n$ y como H , el grupo de holonomía evanescente, está generado por $\{g_1, \dots, g_n\}$, entonces $\hat{u}^*|_\delta$ es integral para cualquier $g \in H$. De lo anterior concluimos que H es formalmente integrable. \square

El siguiente teorema nos da una visión local muy geométrica del comportamiento de los campos vectoriales, la demostración no la daremos pero puede ser consultada en [13].

TEOREMA 3.6.4. (Hadamard-Perron). *Sea $F(x) = Ax + V(x)$ un campo vectorial holomorfo tal que el punto singular de la parte lineal de F , $F_0(x) = Ax$, es hiperbólico; sean L^\pm los subespacios invariantes (eigen espacios) determinados por F_0 . Entonces la ecuación diferencial $\dot{x} = F(x)$ tiene dos variedades holomorfas invariantes (separatrices) W^\pm tangentes a los subespacios L^\pm .*

LEMA 3.6.5. *Dada una foliación singular holomorfa hiperbólica \mathcal{F} cuya razón característica λ , es tal que $\text{Re}\lambda < 0$, la saturación $\text{Sat}(\tau, \mathcal{F})$ de cualquier transversal asociada a cada separatriz llena un complemento de la otra separatriz, en una vecindad suficientemente pequeña del punto singular $0 \in \mathbb{C}^2$.*

DEMOSTRACIÓN. Con las hipótesis presentadas se cumple el teorema de Hadamard-Perron, y gracias a eso sabemos que la foliación \mathcal{F} tiene dos separatrices complejas. Y la ecuación diferencial asociada a \mathcal{F} , en coordenadas apropiadas, tiene la expresión

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (\lambda + \varepsilon(x, y)), \quad \varepsilon(0, 0) = 0.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad (ya que se pueden reescalar las variables) que la ecuación de arriba está definida en el bidisco

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$$

la transversal τ es un disco, $\tau = \{|x| = 1, |y| < \delta\}$, y la función ε está acotada en U por

$$|\varepsilon(x, y)| < \frac{1}{2} |Re\lambda|.$$

Nos fijamos en un punto (x_0, y_0) de U que no esté en el y -plano, $x_0 \neq 0$, y en una trayectoria α en el eje x que una x_0 con $x_1 = 1$ y consideremos su levantamiento a la hoja, L , que pasa por el punto (x_0, y_0) . Basta notar que L queda contenida en el bidisco U . Esto lo podemos ver haciendo el siguiente cálculo:

$$\frac{d|y|^2}{dx} = \frac{dy\bar{y}}{dx} = \frac{y\bar{y}}{x} (\lambda + \varepsilon(x, y)) + \frac{y\bar{y}}{x} \overline{(\lambda + \varepsilon(x, y))} = 2 \frac{|y|^2}{x} Re(\lambda + \varepsilon(x, y)) < 0.$$

Lo anterior nos dice que la hoja L interseca a la transversal $\tau \subseteq \{x = 1\}$ en algún punto $(1, y_1)$, $|y_1| < \delta$, es decir la hoja L pertenece a la saturación de τ . \square

COROLARIO 3.6.6. *Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa singular hiperbólica y $S \in \mathcal{F}$ una separatriz. Si la transformación de holonomía $f \in Diff(\tau, a)$, con $a \in S$, es integrable, entonces cualquier integral $u_0 \in \mathcal{O}(\tau, a)$ de f se extiende a una integral analítica de la foliación.*

DEMOSTRACIÓN. Gracias al teorema 3.6.4 sabemos que \mathcal{F} tiene otra separatriz, llamémosla S' . Por el lema de saturación 3.6.2 tenemos que u_0 se extiende de manera analítica como una integral de la foliación en el complemento de S' , $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus S'$, sea u dicha extensión. Como S' es el germen de una curva analítica y tiene codimensión uno podemos usar el teorema de extensión de Riemann, así u se extiende de manera holomorfa a toda la foliación \mathcal{F} . \square

PROPOSICIÓN 3.6.7. *Una foliación \mathcal{F} es integrable si y sólo si $\mathcal{F}' = \Pi^* \mathcal{F}$ es integrable en una vecindad del divisor excepcional \mathbb{E} .*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos las propiedades de las uno formas diferenciales y sus operaciones para hacer una demostración más sencilla. Si bien la idea del enunciado es clara, la demostración no nos proporciona más detalle al respecto por eso se opta por una demostración algebraica.

Primero veamos qué pasa cuando \mathcal{F} es integrable. Sean ω una 1-forma tal que $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ y $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ una integral de \mathcal{F} . Por la definición de integral de una foliación tenemos que $du \wedge \omega \equiv 0$ y por las propiedades del pull-back y derivada exterior $\Pi^*(du \wedge \omega) = \Pi^*(du) \wedge \Pi^*\omega = d(\Pi^*u) \wedge \Pi^*\omega$ y ya que $du \wedge \omega \equiv 0$ esto nos dice que $d(\Pi^*u) \wedge \Pi^*\omega \equiv 0$, así Π^*u es una integral de $\Pi^*\omega$ y este último es la una forma que define a $\Pi^*\mathcal{F}$. El pull-back Π^*u no es idénticamente cero pues la primera integral u no lo era y Π es un biholomorfismo entre $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus 0$ y $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$.

Ahora supongamos que \mathcal{F}' es integrable en una vecindad de \mathbb{E} . Sabemos que \mathcal{F}' está dada por $\Pi^*\omega$ para alguna ω 1-forma en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y por hipótesis existe $v \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, \mathbb{E})$ integral de \mathcal{F}' . Como Π es un biholomorfismo entre $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus 0$ y $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ tenemos que $v \circ \Pi^{-1}$ es integral de $\mathcal{F} \setminus 0$ y por el teorema de extensión de Riemann la integral se extiende a todo $(\mathbb{C}^2, 0)$. \square

La idea del enunciado es realmente clara pues ya que Π es un biholomorfismo fuera de las partes singulares y $\Pi(\mathbb{E}) = 0$ esto lo que nos dice es que la foliación en

la explosión es básicamente la misma que la foliación original solo que “inflamos” el punto singular.

TEOREMA 3.6.8. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular integrable en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Entonces la foliación \mathcal{F} cumple las siguientes dos afirmaciones:*

1. *Si $U \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, es una vecindad del origen entonces las hojas de \mathcal{F} son cerradas en $U \setminus \{0\}$.*
2. *A lo más un número finito de hojas se acumulan en el cero.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ una primera integral de la foliación y $L \in \mathcal{F}$ una hoja. Ya que \mathcal{F} es integrable existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$u(L) = c.$$

Supongamos que c es distinto de cero, entonces L es una componente conexa de $u^{-1}(c)$ entonces es un conjunto cerrado. Si $c = 0$ tenemos que L es una componente conexa de $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$, con lo que se sigue el resultado.

2. Sea L una componente conexa de $u^{-1}(0) \setminus \{0\}$ y consideremos una transversal, τ , a la hoja L basada en un punto $p \in L$. Como u es una función no constante, la restricción $u|_{\tau}$ es una función holomorfa no constante en τ , esto nos dice que p es el único cero, aislado, de $u|_{\tau}$. El análisis previo nos dice que en L no se acumulan hojas, en particular no se acumulan otras componentes conexas de $u^{-1}(0) \setminus \{0\}$, las cuales son las únicas candidatas a acumularse en el origen. \square

OBSERVACIÓN 3.6.9. El teorema 3.6.8 nos da propiedades restrictivas acerca de las foliaciones integrables, por ejemplo: los puntos singulares tipo nodo, foco y silla-nodo no pueden ser integrables debido a la acumulación de las hojas no singulares en el origen, dicho de otra manera, si la razón característica $\lambda \geq 0$ ó $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ entonces la foliación no es integrable.

TEOREMA 3.6.10. *Supongamos que todas las singularidades de la foliación $\mathcal{F}' = \Pi^* \mathcal{F}$ son elementales. \mathcal{F} es integrable si y sólo si*

1. *El grupo de holonomía evanescente H de \mathcal{F}' es integrable.*
2. *Todas las singularidades de \mathcal{F}' son de tipo silla compleja con razones características negativas.*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos la suficiencia, la cual es una escalera descendente de resultados previamente probados. Si la foliación \mathcal{F} es integrable entonces, su blow-up, \mathcal{F}' es integrable y a su vez el grupo de holonomía evanescente, H , es integrable (como grupo), proposición 3.6.3. Al ser H integrable es un grupo cíclico finito. Sea el germen $h(z) = e^{2\pi i \theta} z + o(z^2)$ un generador de H , como el orden de h es finito entonces el coeficiente de la parte lineal tiene que ser una raíz de la unidad, esto nos dice que $\theta \in \mathbb{Q}$ y tenemos dos casos:

- $\theta \geq 0$ caso nodal y silla nodo.

Este caso no es posible en virtud de la observación 3.6.9.

- $\theta < 0$ caso silla.

Como θ está en \mathbb{Q} éste es el único caso posible, por tricotomía.

Ya que el grupo H contiene a la transformación de holonomía asociada a cada punto singular de la foliación \mathcal{F}' esto nos dice que cada transformación tiene una raíz de la unidad como coeficiente lineal, digamos $e^{2\pi i \theta_j}$ y cada θ_j es una razón característica, múltiplo entero positivo de θ por lo que $\theta_j < 0$ para toda j . Con lo

que tenemos el resultado deseado. Inversamente, podemos pensar que el grupo H contiene solamente gérmenes lineales y que f es un generador de H , esto gracias al teorema 2.2.4. Podemos también suponer que la función analítica $u(z) = z^{|H|}$ es una integral del grupo H , y por lo tanto $u \circ f = u$.

Por el corolario 3.6.6 tenemos que la función u se extiende como una integral local, en alguna vecindad de cada punto singular. Pero ya que el grupo de holonomía evanescente no depende de la transversal, siempre y cuando ésta no tenga base en un punto singular, podemos extender a u como una integral en una vecindad del divisor excepcional, por lo que la foliación \mathcal{F} es integrable. \square

DEFINICIÓN 3.6.11. Una foliación \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se dice simple si cumple lo siguiente

- a) Todas las hojas son cerradas en $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ (con la topología relativa).
- b) Sólo una cantidad finita de hojas contienen al punto singular, $0 \in \mathbb{C}^2$, en su cerradura.

OBSERVACIÓN. Si el punto singular no es tipo silla entonces la foliación \mathcal{F} no es simple.

TEOREMA 3.6.12. (de Mattei-Moussu). *Sea \mathcal{F} una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Si la foliación \mathcal{F} es simple entonces es integrable.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por inducción sobre el número de explosiones necesarias para desingularizar la foliación, esto se puede gracias al teorema de Seidenberg. Este teorema también nos dice que en un número finito de explosiones llegamos a que las singularidades, después de todo el proceso, son elementales, entonces podemos suponer de inicio que 0 ya es una singularidad elemental. Ya vemos que si el origen no es una singularidad tipo silla entonces la foliación no puede ser simple. Para el caso base de la inducción tenemos que el origen es tipo silla y \mathcal{F} es una foliación no dicrítica pues si fuera dicrítica una cantidad infinita de hojas se acumularían alrededor del 0 contradiciendo que \mathcal{F} es simple.

Sea f una transformación de holonomía asociada a alguna separatriz entonces tenemos dos casos: f es periódica o no lo es; si la holonomía f es periódica entonces es integrable y por el corolario 3.6.6 la foliación \mathcal{F} también es integrable. Si f es no periódica entonces por el lema 2.4.6 hay una cantidad no numerable de hojas acumulándose alrededor del 0 contradiciendo el hecho de que \mathcal{F} es simple. Por lo que el orden del germen f no puede ser infinito. Así el caso base está probado.

Puesto que \mathcal{F} es una foliación no dicrítica tiene sentido pensar en la foliación que resulta después de hacer el proceso de resolución de singularidades, además al ser no dicrítica sólo hay un número finito de singularidades aisladas $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ en \mathbb{E} . Ahora, supongamos que \mathcal{F} no es integrable pero la explosión en el origen, la foliación $\Pi^*\mathcal{F}$, sí lo es en cada una de sus singularidades.

Sea τ una transversal, a \mathbb{E} , con punto base p en $\mathbb{E} \setminus \Sigma$; consideremos al grupo de holonomía evanescente $H \leq \text{Diff}(\tau, p)$. Éste resulta ser integrable ya que está generado por las transformaciones de holonomía de cada singularidad, con respecto a la transversal τ . En efecto, si no fuese integrable entonces habría una cantidad infinita no numerable de órbitas no periódicas acumulándose en el divisor excepcional, \mathbb{E} , contradiciendo el hecho que la foliación \mathcal{F} sea simple. Como el grupo H es integrable sea la función u_0 su integral.

Generaremos un subgrupo $H \leq G < \text{Diff}(\tau, p)$, (es posible que $G = H$) que recopile toda la información de la intersección de las hojas con la transversal τ ,

hacemos esto para poder definir la extensión analítica de una función, que será una integral de la foliación $\Pi^*\mathcal{F}$ (tomamos estas precauciones por lo visto en el ejemplo 3.3.5). Por hipótesis de inducción la foliación $\Pi^*\mathcal{F}$ es integrable alrededor de las singularidades, sea cada u_i la integral de la foliación en una vecindad del punto singular a_i . Si h_i es la transformación de holonomía asociada al punto singular a_i entonces $u_i|_\tau$ es una primera integral del germen h_i ; fijémonos ahora en las funciones f_i donde

$$\langle f_i \rangle = S_{u_i|_\tau}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Consideremos también al germen f_0 , con $S_{u_0} = \langle f_0 \rangle$. Ahora sí, definamos al grupo

$$G := \langle f_0, \dots, f_n \rangle;$$

de la definición se sigue $H \leq G$, y para ver que G es un grupo integrable se usa el mismo argumento (acumulación de hojas en \mathbb{E}) que en el caso de la integrabilidad del grupo de holonomía evanescente, H . Como G es integrable tenemos que es un grupo cíclico finito, es decir existe f tal que $G = \langle f \rangle$; además, como el germen f es analíticamente linealizable podemos suponer que estamos en cartas donde f es una función lineal, entonces una integral para f será $u_\tau(z) = z^{|G|}$; lo que nos gustaría hacer ahora es, extender a u_τ en una vecindad de \mathbb{E} y claro, tal que dicha extensión fuera una integral de la foliación $\Pi^*\mathcal{F}$. Al ser G conmutativo podemos extender u_τ como una función univaluada en una vecindad de $\mathbb{E} \setminus \Sigma$, esto ya que H es una representación de $\pi_1(\mathbb{E})$ y u_τ es invariante bajo H , también para cada transversal τ (con punto base en $\mathbb{E} \setminus \Sigma$) tenemos que

$$u_\tau(L_\epsilon \cap \tau) = \text{cte.},$$

así si u es una extensión analítica de u_τ será constante en las hojas de $\Pi^*\mathcal{F}$. Tal extensión sólo nos falta definirla en Σ y esto es posible gracias al teorema de extensión de Riemann, pues el conjunto singular Σ está conformado por un número finito de puntos. Después de definir a u en el conjunto singular, resulta ser una integral de la foliación en una vecindad de \mathbb{E} , y por lo que la foliación \mathcal{F} es también integrable. \square

TEOREMA 3.6.13. (de Mattei-Moussu). *Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente integrable (con integral distinta de 0) entonces existe una primera integral holomorfa de \mathcal{F} .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este teorema reside en ver que una foliación holomorfa formalmente integrable es simple de ahí gracias al teorema 3.6.12 tenemos que la foliación será integrable.

Se hará por inducción sobre el número de explosiones necesarias para llegar a una completa desingularización del punto singular.

Ya probamos que una singularidad elemental es simple si y sólo si tiene cociente característico $\lambda < 0$ y si las transformaciones de holonomía asociadas a las separatrices, analíticas, son periódicas (por tanto integrables). Gracias a la proposición 3.6.3, si \mathcal{F} es formalmente integrable entonces las transformaciones de holonomía asociadas a las separatrices son integrables y periódicas, de aquí obtenemos que $\lambda < 0$. Con esto tenemos el caso base de la inducción.

Ahora para el paso inductivo consideremos una foliación \mathcal{F} formalmente integrable, ésta es necesariamente no dicrítica. Al hacer una explosión en el punto singular tenemos que todas las singularidades en \mathbb{E} son aisladas. Si nos fijamos localmente en las foliaciones de cada uno de los puntos singulares son necesariamente

simples, por la hipótesis de inducción; lo anterior nos dice que por cada singularidad hay sólo una cantidad finita de hojas que la contienen en su cerradura. Para ver que $\mathcal{F}' = \Pi^*\mathcal{F}$ es simple veamos que el grupo de holonomía evanescente H de \mathcal{F} es integrable, como \mathcal{F} es formalmente integrable, por la proposición 3.6.3, H es formalmente integrable y por tanto analíticamente integrable, esto nos dice que H es cíclico finito; al ser de esa manera no hay posibilidad que haya una cantidad infinita de hojas acumulándose en \mathbb{E} ya que dada una transversal con base en $a \notin \Sigma$ no existe una hoja que la intersekte un número infinito de veces de manera no periódica pues H es integrable. Consecuentemente \mathcal{F}' es simple y esto implica que \mathcal{F} también es simple y por el teorema de Mattei-Moussu es integrable. \square

El resultado anterior nos da una visión más amplia de lo que significa para una foliación ser integrable (en cualquiera de sus formas), a pesar que su integral sea una serie formal hay restricción en el comportamiento de las hojas, éstas no se acumulan en la singularidad indiscriminadamente.

DEFINICIÓN 3.6.14. A la integral de una foliación se le llama primitiva si todas sus curvas de nivel, las hojas de la foliación, son conexas.

PROPOSICIÓN 3.6.15. Si u es una integral primitiva de una foliación \mathcal{F} , entonces cualquier otra primera integral v de la foliación es de la forma $v = f \circ u$, donde $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es un germen no constante.

TEOREMA 3.6.16. Toda foliación holomorfa singular que sea integrable admite una integral primitiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{F} una foliación integrable y la función holomorfa $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ su integral, supongamos que no es una integral primitiva pues si lo es, ya acabamos.

Consideremos los siguientes conjuntos, estos nos ayudarán para la construcción de un fibrado holomorfo:

- La imagen inversa del valor crítico 0, $\Sigma = u^{-1}(0)$ este conjunto contiene a lo más una cantidad numerable y no vacía de hojas de la foliación.
- Una bola centrada en el origen, $B \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$ de tal forma que la frontera de B , ∂B , es transversal a la fibra $u^{-1}(0)$.
- Un disco $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que $0 \in D$ y el origen es el único valor crítico de u en D , suponiendo lo anterior tenemos que $0 \in u^{-1}(D)$ es la única singularidad.

Definamos al conjunto M como la intersección de la bola B con la preimagen de el disco D , $M = (u^{-1}(D) \cap B) \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$.

Observación. Como la función u es continua, tenemos que imagen inversa de cerrados es cerrada, esto nos dice que el conjunto M al ser la intersección de un cerrado con un compacto (la bola B es compacta) es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto compacto. Y como los conjuntos cerrados en espacios compactos (y Hausdorff) son compactos, u resulta ser una función propia.

Al disco D lo podemos escoger de tal forma que $u : M \rightarrow D$ sea una función sobre (la manera de escoger a D es simplemente encogiéndolo lo necesario). El único valor crítico de la función u restringida a M es el origen, entonces $u : M \rightarrow D \setminus \{0\}$ es una submersión.

Esta observación y el teorema de Ehresmann 1.0.12 nos dicen que $u : M \rightarrow D \setminus \{0\}$ es un haz diferenciable (en este caso particular, holomorfo).

Ahora bien, podemos suponer que D es el disco unitario, en caso contrario multiplicamos a u por la constante λ , donde $1/\lambda$ es el radio del disco D . Consideremos a la fibra regular $X_1 = u^{-1}(1)$. Al ser u una función analítica y su dominio de definición, M , un compacto, tenemos que X_1 contiene una cantidad finita p de componentes conexas. Entonces la fibra X_1 es el conjunto $\{C_0, C_1, \dots, C_{p-1}\}$, y cada elemento C_j es una componente conexa de X_1 .

Definimos a la trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial D$, dada por $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ así la imagen de gamma es la circunferencia unitaria, $\gamma[0, 1] = \partial D = \mathbb{S}^1$ y a la función $\Delta_{1,t}$, $t \in \gamma[0, 1]$ como la continuación analítica de la fibra X_1 a la fibra X_t a lo largo de la trayectoria γ .

Al ser $u : M \rightarrow D \setminus \{0\}$ un haz diferenciable tenemos un difeomorfismo entre las fibras X_1 y X_t , el cual manda componentes conexas en componentes conexas. Definamos a $\Delta := \Delta_{1,\gamma(1)}$ como la continuación analítica de la fibra X_1 a ella misma a lo largo del círculo unitario, claramente es un difeomorfismo de X_1 en X_1 . Al ser Δ un homeomorfismo permuta (o deja fijas) las componentes conexas de X_1 . Es decir, $\Delta(C_j) = C_{\sigma(j)}$, donde σ es una permutación del conjunto $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Abordaremos el caso donde Δ sí permuta las componentes conexas de la fibra regular X_1 , si no las permutase la construcción de la integral primitiva que haremos a continuación también abarca ese caso, con las modificaciones necesarias. Podemos pensar a la permutación $\sigma \in S_p$, donde S_p es el grupo de permutaciones de p elementos; primero veremos que dicha permutación σ es un p -ciclo (un ciclo de longitud p). Para ver esto definimos una trayectoria $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ de tal manera que la intersección con la fibra singular es vacía, $\alpha[0, 1] \cap \Sigma = \emptyset$ (esto es posible gracias a la libertad que nos da el tener dos dimensiones complejas, cuatro reales); el inicio de la trayectoria $\alpha(0) \in C$, y el final $\alpha(1) \in C'$ con $C, C' \in X_1$, $C \neq C'$ componentes conexas distintas de la preimagen del valor regular 1. Unas de las propiedades a notar son las siguientes: el inicio y el final de la trayectoria α evaluados en la integral u tienen el mismo valor, pues están en la misma fibra, $u(\alpha(0)) = u(\alpha(1)) = 1$ y que la imagen de la trayectoria bajo u , $u(\alpha[0, 1])$, es homotópica a un k -lazo i.e. al círculo unitario rodeándolo k -veces, γ^k en $D \setminus \{0\}$.

Como la continuación analítica depende de la clase de homotopía y $u \circ \alpha$ es homotopo a la trayectoria γ^k , tenemos que $\Delta^k(C) = C'$ y como la elección de las componentes conexas C y C' fue arbitraria eso nos dice que el difeomorfismo Δ actúa transitivamente en las componentes conexas de la fibra X_1 , es decir la permutación σ actúa transitivamente en $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Esto es, para cada $i, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ existe un entero positivo $k < p$ tal que $\sigma^k(i) = j$. Entonces σ está obligada a ser un p -ciclo, ya que las únicas permutaciones que actúan transitivamente en $\{0, 1, \dots, p-1\}$ son los ciclos de longitud máxima. Podemos, a partir de lo anterior, considerar que las componentes conexas de la fibra X_1 están indexadas de tal forma que

$$\Delta(C_j) = C_{j+1 \bmod p}, \text{ con } j = 0, 1, \dots, p-1.$$

El desarrollo anterior fue para ver la dinámica del difeomorfismo Δ sobre X_1 y así poder definir una función w de tal manera que si L es una hoja cualquiera de la foliación entonces existe un complejo $t \in D$ tal que la hoja L es una curva de nivel de w , $L = w^{-1}(t)$. Eso lo vamos a llevar a cabo usando que \mathbb{C} es algebraicamente cerrado y las propiedades de la multivaluación del *logaritmo* complejo. La idea en la construcción es bastante coherente, de lo que se trata es de separar en p pedazos cada valor de la función, ¿y esto cómo lo llevamos a cabo? Usando la

función raíz p -ésima. En cierta manera es definir $w = u^{1/p}$; por lo que usaremos la continuación analítica de la función $z \mapsto z^{1/p}$. Primero definamos la función w en la fibra $X_1 = \bigcup_{j=0}^{p-1} C_j$ de la siguiente manera

$$w(x) = e^{\frac{2\pi ij}{p}}, \text{ si } x \in C_j.$$

Si β es una trayectoria tal que $\beta(0) \in C_j$, $\beta(1) \in C_{j+1}$ y la intersección con la fibra singular es vacía, $\beta[0, 1] \cap X_0 = \emptyset$, tenemos que el lazo $u \circ \beta$ es homótopo al ciclo γ^s , con $s \equiv 1 \pmod{p}$, por lo que continuar analíticamente la raíz p -ésima $z \mapsto z^{1/p}$ (en la j -ésima rama) a lo largo de la curva cerrada $u \circ \beta$, y el valor de la función w en la componente conexa $C_{j+1}(w(C_{j+1}) = u^{1/p}(\beta(1)))$ coinciden; en símbolos:

$$e^{2\pi i(j+1)/p} = w(C_{j+1}) = u^{1/p}(\beta(1)) = e^{2\pi ij/p} u^{1/p}(C_j) = e^{2\pi ij/p} w(C_j).$$

Lo anterior claramente depende de la rama de definición de la raíz p -ésima, con eso vemos que w sí está bien definida en el conjunto X_1 .

Como habíamos dicho $u : M \rightarrow D \setminus \{0\}$ es un haz diferenciable, las fibras $u^{-1}(t)$ con $t \in D \setminus \{0\}$ dependen diferenciablemente de t . Esto implica que dado un valor regular $t \in D \setminus \{0\}$ y dos trayectorias distintas $\delta_1, \delta_2 : [0, 1] \rightarrow D \setminus \{0\}$ tales que tengan mismo inicio y fin, $\delta_j(0) = 1$ y $\delta_j(1) = t$; existen dos difeomorfismos de X_1 con X_t que están dados por la continuación analítica de las fibras a lo largo de las trayectorias δ_j , $j = 1, 2$, pero como la dependencia es continua con respecto del parámetro t tenemos que en realidad son el mismo difeomorfismo. Lo que se intenta hacer es definir a la función w a partir de lo ya conocido, su valor en la fibra X_1 , y para definirla en las demás fibras hacer trayectorias que salgan del punto 1 hacia t para poder definir después la continuación analítica de $z^{1/p}$ de 1 a t en la rama adecuada.

La rama adecuada es la siguiente, como ya vimos que tenemos un homeomorfismo de X_1 a X_t entonces tenemos una biyección entre las componentes conexas de ambas fibras X_1 y X_t la cual es independiente de la elección de la trayectoria usada para la continuación en las fibras. En resumidas cuentas si $X_1 = \{C_0, \dots, C_{p-1}\}$ y $X_t = \{D_0, \dots, D_{p-1}\}$, reindexamos las componentes conexas de la fibra X_t de ser necesario para que el difeomorfismo mande la componente C_j a la componente D_j , entonces si $x \in D_j$ definimos $w(x)$ como la continuación analítica, en la rama j -ésima, de $z \mapsto z^{1/p}$ a lo largo de una trayectoria que va del número 1 al complejo t . Por todo lo hecho anteriormente w es una función univaluada y continua en $M \setminus \Sigma$; al ser la composición de dos funciones analíticas, u y (una rama adecuada de) $z^{1/p}$, resulta ser analítica en $M \setminus \Sigma$. Para ver que es analítica en todo M hace falta ver que w es acotada en M y usar el teorema de extensión de Riemann. Por como está definida la función w sí es acotada pues $|w(x)| \leq 1$, $\forall x \in M$, por lo que se extiende analíticamente en todo el conjunto M , con eso $w : M \rightarrow D$ es una integral primitiva para la foliación \mathcal{F} . \square

Primeros auxilios

A.1. Teorema de Poincaré

Presentaremos dos teoremas atribuidos a Henri Poincaré, de los cuales solamente daremos la demostración de uno, el teorema de Poincaré analítico. Este par de resultados simplifican completamente las ecuaciones diferenciales que cumplen sus hipótesis, a saber, las hacen equivalentes a su parte lineal.

DEFINICIÓN A.1.1. Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un vector en \mathbb{C}^n . Decimos que λ es una colección resonante si existen m_1, \dots, m_n números naturales, $m_1 + \dots + m_n \geq 2$, tales que $\lambda_j = m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n$ para algún índice $j \in \{1, \dots, n\}$; si no existen tales naturales a la colección λ se le dice no resonante. Observemos que en \mathbb{C}^2 , $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ es una colección resonante si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ó $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ es un número racional negativo o un natural. En efecto, supongamos que existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 + m_2 \geq 2$, tales que $\lambda_1 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ entonces

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1 - m_1}{m_2}.$$

Ya que m_2 no es cero está definido el cociente y como $m_1 \neq 1$ entonces nunca es cero. Concluimos que si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ es un racional positivo entonces $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ó $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ es un natural; de igual manera $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ puede ser cualquier racional negativo.

TEOREMA A.1.2. (de Poincaré, formal)¹. Sean $\dot{z} = Az + \dots$ una ecuación diferencial en \mathbb{C}^n y $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ el espectro de la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si la colección λ es no resonante entonces las ecuaciones $\dot{z} = Az + \dots$ y $\dot{z} = Az$ son formalmente equivalentes.

DEFINICIÓN A.1.3. Decimos que un punto $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{C}^n está en el dominio de Poincaré si

$$0 \notin \overline{\text{Conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}}.$$

Donde $\text{Conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es la envolvente convexa de los números complejos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y está definida de la manera siguiente:

$$\text{Conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mid a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}.$$

TEOREMA A.1.4. (de Poincaré, analítico). Sea $\dot{z} = v(z)$ una ecuación diferencial analítica definida en $(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que el conjunto de los valores propios asociados a la parte lineal es no resonante y pertenece al dominio de Poincaré. Entonces la ecuación $\dot{z} = v(z)$ es analíticamente equivalente (localmente) a su parte lineal.

¹La demostración de este teorema puede ser consultada en [13].

La idea de esta prueba es transformar el problema a uno de punto fijo, en un espacio de Banach². Para probar la equivalencia entre las afirmaciones presentaremos algunas definiciones y resultados, no daremos todas las pruebas, pero se pueden leer en [13].

DEFINICIÓN A.1.5. Sea $\mathbb{C}[[z]]$ el anillo de las series de potencias formales en \mathbb{C}^n , $z = (z_1, \dots, z_n)$. El operador mayorante $\mu : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ está definido como³:

$$\mu \left(\sum_{m \in \mathbb{N}^n} c_m z^m \right) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |c_m| z^m.$$

Usando el operador mayorante definimos la siguiente norma en el espacio de las series de potencias formales. La *norma ρ -mayorante*, $\|\cdot\|_\rho$, es la función real valuada, $\|\cdot\|_\rho : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\|f\|_\rho := \sup_{|z| < \rho} |\mu(f(z))| = \mu(f(\rho)) \leq \infty.$$

Si $F \in \mathbb{C}^n[[z]]$, $F(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$, entonces

$$\|F\|_\rho := \|f_1\|_\rho + \dots + \|f_n\|_\rho.$$

Definimos el *espacio ρ -mayorante*, \mathcal{B}_ρ , como el subespacio de $\mathbb{C}^n[[z]]$ conformado por los elementos tales que la norma ρ -mayorante es finita; es decir

$$\mathcal{B}_\rho := \left\{ F \in \mathbb{C}^n[[z]] \mid \|F\|_\rho < \infty \right\}.$$

A las funciones, de \mathbb{C}^n en \mathbb{C}^n , holomorfas en $\mathcal{D}_\rho = \{|z| < \rho\}$ y continuas en $\overline{\mathcal{D}_\rho}$ las denotaremos por \mathcal{A}_ρ .

LEMA A.1.6. *El espacio \mathcal{B}_ρ es completo con la norma ρ -mayorante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\rho$ una sucesión de Cauchy, cada f_j es una serie formal y la representaremos de la siguiente manera: $f_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} z^k$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Ya que $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, para toda $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $r, s > N$, entonces $\|f_s - f_r\|_\rho < \varepsilon$. Es decir,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{sk} z^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{rk} z^k \right\|_\rho = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{sk} - a_{rk}) z^k \right\|_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{sk} - a_{rk}| \rho^k < \varepsilon.$$

Puesto que cada sumando, de la última expresión, es positivo se cumple

$$|a_{sk} - a_{rk}| < \frac{\varepsilon}{\rho^k}, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Observemos que al fijar un índice k , la sucesión $\{a_{jk}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en los complejos, y ya que \mathbb{C} es completo dicha sucesión tiene un límite, digamos a_k . Claramente la sucesión de las funciones f_j tiende a la función f , donde $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$; para concluir la prueba basta ver que la serie f está en \mathcal{B}_ρ , para ello utilizemos que $\{a_{jk}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy; en efecto, dado $\delta > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_{rk} - a_{(r+l)k}| \rho^k < \frac{\delta}{2}, \text{ para todo } r > N_1.$$

²Para leer acerca de estos temas de análisis se puede consultar [9].

³Observemos que $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, y la notación z^m representa al producto $z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$.

Sea $I \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito. Entonces, para $\delta > 0$, existe N_2 tal que, si $r > N_2$ y $k \in I$,

$$\sum_{k \in I} |a_{rk} - a_{(r+l)k}| \rho^k < \frac{\delta}{2}.$$

Así,

$$\sum_{k \in I} |a_{rk} - a_k| \rho^k \leq \sum_{k \in I} |a_{rk} - a_{(r+l)k}| \rho^k + \sum_{k \in I} |a_{(r+l)k} - a_k| \rho^k < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Como el conjunto I es arbitrario,

$$\|f_r - f\|_\rho < \delta.$$

Al ser para toda $\delta > 0$ significa que $f_r - f = 0$ y como $f_r \in \mathcal{B}_\rho$ entonces $f \in \mathcal{B}_\rho$; por lo tanto \mathcal{B}_ρ es un espacio métrico completo.

Gracias a la definición de la norma ρ -mayorante para $\mathbb{C}^n[[z]]$ tenemos que la demostración para ver que $\mathcal{B}_\rho \subset \mathbb{C}^n[[z]]$ es un espacio métrico completo es totalmente análoga. \square

Dadas dos series $f, g \in \mathbb{C}[[z]]$ con coeficientes positivos, diremos que $f \ll g$ si $a_m \leq b_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, donde a_m y b_m son los coeficientes de f y g respectivamente. Si $F, G \in \mathbb{C}^n[[z]]$, la comparación se hace entrada a entrada.

LEMA A.1.7. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

1. Para cualesquiera $f, g \in \mathbb{C}[[z]]$ y ρ un real positivo,

$$\|fg\|_\rho \leq \|f\|_\rho \cdot \|g\|_\rho.$$

2. Si $F \ll G$ son dos series formales de $\mathbb{R}^n[[x]]$ y H es una serie con coeficientes no negativos entonces, $H \circ F \ll H \circ G$.
3. Si $F, G \in \mathbb{C}^n[[z]]$ y $F(0) = G(0) = 0$, entonces

$$\|F \circ G\|_\rho \leq \|F\|_\sigma, \text{ donde } \sigma = \|G\|_\rho.$$

DEFINICIÓN A.1.8. Sea M un espacio métrico con la distancia d . Decimos que una transformación $f : M \rightarrow M$ es una *contracción* si existe una constante $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \text{ para todo } x, y \in M.$$

Notemos que toda contracción resulta ser una función continua⁴.

DEFINICIÓN A.1.9. Sean (M, d) un espacio métrico y f una transformación de M en sí mismo. Decimos que $x_0 \in M$ es un *punto fijo* de f si f deja invariante a x_0 ; es decir, $f(x_0) = x_0$.

Denotamos por f^k a la composición

$$f^k := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ veces}}, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}.$$

Si $k = 0$ entonces definimos $f^0 := Id_M$.

⁴A una función f entre dos espacios métricos (M, d_1) y (N, d_2) que cumple $d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y)$, para todo $x, y \in M$ y para alguna constante $\lambda \in \mathbb{R}$, se le llama Lipschitz con constante de Lipschitz λ .

TEOREMA A.1.10. (del punto fijo de Banach). *Sea (M, d) un espacio métrico, no vacío, completo, y sea $f : M \rightarrow M$ una contracción. Entonces f tiene un único punto fijo.*

Para la demostración del teorema de Poincaré analítico requeriremos de una contracción que cumpla con las propiedades siguientes.

DEFINICIÓN A.1.11. Se dice que $\Phi : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ es una *contracción fuerte* si cumple las siguientes dos propiedades:

1. $\|\Phi(0)\|_\rho = \mathcal{O}(\rho^2)$.
2. Φ es Lipschitz en una bola $B_\rho = \{\|h\|_\rho < \rho\} \subset \mathcal{B}_\rho$ con constante de Lipschitz, $C(\rho)$, de orden no mayor que $\mathcal{O}(\rho)$,

$$\|\Phi(f)\|_\rho \leq C(\rho) \|f\|_\rho, \quad C(\rho) = \mathcal{O}(\rho), \quad \|f\|_\rho < \rho.$$

Es decir, $\Phi(B_\rho) \subseteq B_\rho$.

LEMA A.1.12. *Sea $F : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ holomorfa, tal que $dF(0) = 0$, entonces el operador $\Phi_F : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ dado por $\Phi_F(h) = F(Id + h)$ es una contracción fuerte, donde Id es la función identidad en $(\mathbb{C}^n, 0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos 1. y 2. de la definición A.1.11.

1. Por hipótesis la parte lineal de F es nula, entonces F es $\mathcal{O}(z^2)$, además $\Phi_F(0) = F(Id + 0) = F$. Por lo que es inmediata la igualdad $\|\Phi(0)\|_\rho = \mathcal{O}(\rho^2)$.

2. Sean $h_1, h_2 \in B_\rho$, $g := \Phi_F(h_2) - \Phi_F(h_1)$ y consideremos

$$\varphi(t) = Id + th_2 + (1-t)h_1, \quad \text{con } t \in [0, 1],$$

sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} g(z) &= F(Id + h_2)(z) - F(Id + h_1)(z) \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{\varphi} \cdot d\varphi \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) d\varphi \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{(\varphi(t))} \cdot (h_2 - h_1)(z) dt. \end{aligned}$$

De esta manera, por el lema A.1.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \|g(z)\|_\rho &\leq \int_0^1 \left\| \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{(\varphi(t))} \right\|_\rho \cdot \|h_2 - h_1\|_\rho dt \\ &\leq \int_0^1 \left\| \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right] \right\|_\sigma \cdot \|h_2 - h_1\|_\rho dt, \end{aligned}$$

con $\sigma = \|\varphi(t)\|_\rho = \|Id + th_2 + (1-t)h_1\|_\rho$.

Observemos que

$$\sigma \leq \|Id\|_\rho + t\|h_2\|_\rho + (1-t)\|h_1\|_\rho \leq (n+1)\rho,$$

pues $\|h_i\| < \rho$ al ser un elemento de B_ρ , $i = 1, 2$, y

$$\|Id\|_\rho = \|Id_1\|_\rho + \dots + \|Id_n\|_\rho = n\rho.$$

Además como $\|[\frac{\partial F}{\partial z}]\|_\sigma$ es de orden $\mathcal{O}(\sigma)$, existe un real r tal que $\|[\frac{\partial F}{\partial z}]\|_\sigma \leq r\sigma$. Y dado que $\sigma \leq (n+1)\rho$, entonces $\|[\frac{\partial F}{\partial z}]\|_\sigma \leq m\rho$, donde $m = r(n+1)$.

Así,

$$\|\Phi_F(h_2) - \Phi_F(h_1)\|_\rho \leq m\rho \|h_2 - h_1\|_\rho.$$

Por consiguiente, Φ_F es una contracción fuerte en \mathcal{B}_ρ . \square

Con la serie de resultados recién presentados podemos ya probar el teorema de Poincaré analítico.

DEMOSTRACIÓN. (*teorema A.1.4*). Como ya se había mencionado, para la prueba de éste teorema transformaremos el problema en un problema de punto fijo.

Sean $\dot{z} = v(z)$ y $\dot{z} = w(z)$ dos ecuaciones diferenciales, en $(\mathbb{C}^n, 0)$, dadas por campos vectoriales analíticos $v(z) = Az + \bar{v}(z)$ y $w(z) = Az$, con $A \in GL(\mathbb{C}^n)$ y $\bar{v}(z) \in \mathcal{O}(z^2)$.

Supongamos que existe un biholomorfismo H , $H = Id + h$, que hace equivalente a w con v . Es decir,

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z}\right] w(z) = v(H(z)),$$

sustituyendo

$$\left(Id + \left[\frac{\partial h}{\partial z}\right]\right) Az = A(z + h(z)) + \bar{v}(z + h(z)).$$

Así

$$\left[\frac{\partial h}{\partial z}\right] Az - Ah(z) = \bar{v}(z + h(z)).$$

Si definimos $\mathcal{L}_A(h) := \left[\frac{\partial h}{\partial z}\right] A - Ah$, podemos reescribir la igualdad anterior como sigue:

$$(\mathcal{L}_A(h))(z) = \bar{v}(z + h(z)).$$

Como \mathcal{L}_A es invertible, entonces

$$(6) \quad h(z) = \mathcal{L}_A^{-1}(\bar{v}(z + h(z))).$$

La igualdad (6) nos da la implicación que transforma este problema a uno de punto fijo. A saber, de encontrar el punto fijo del operador

$$\mathcal{L}_A^{-1} \circ \Phi_{\bar{v}}.$$

Donde $\Phi_{\bar{v}}$ está definido como en el lema A.1.12, $\Phi_{\bar{v}}(h) = \bar{v}(Id + h)$.

Se afirma pues, que el operador $\mathcal{L}_A^{-1} \circ \Phi_{\bar{v}} : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ es una contracción. Por hipótesis el espectro de A , $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, es no resonante y pertenece al dominio de Poincaré, eso implica la existencia de un número real positivo k tal que

$$|\lambda_j - \langle \lambda, m \rangle| > k$$

para todos $m \in (\mathbb{Z}^+)^n$ y $j \in \{1, \dots, n\}$. Tomando inversos multiplicativos de ambos lados

$$\frac{1}{|\lambda_j - \langle \lambda, m \rangle|} < k^{-1}.$$

Observemos que si, $h \in \mathcal{B}_\rho$, $h(z) = \sum_{j,m} a_{jm} z^m \frac{\partial}{\partial z_j}$ entonces

$$\mathcal{L}_A^{-1}(h(z)) = \sum_{j,m} \frac{-a_{jm}}{\lambda_j - \langle \lambda, m \rangle} z^m \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1}(h)\|_\rho &= \sup_{|z|<\rho} \left| \mu \left(\sum_{j,m} \frac{-a_{jm}}{\lambda_j - \langle \lambda, m \rangle} z^m \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right| \\ &\leq k^{-1} \sum_{j,m} |a_{jm}| \rho^m \\ &= k^{-1} \|h\|_\rho. \end{aligned}$$

Como $\|h\|_\rho < \infty$ esto implica que $\mathcal{L}_A^{-1}(h) \in \mathcal{B}_\rho$, para toda $h \in \mathcal{B}_\rho$. Recordemos que el lema A.1.12 nos dice que $\Phi_{\bar{v}}$ es una contracción fuerte y para $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_\rho$ se cumple la desigualdad

$$(7) \quad \|\Phi_{\bar{v}}(h_2) - \Phi_{\bar{v}}(h_1)\|_\rho \leq r\rho \|h_2 - h_1\|_\rho$$

y ya que \mathcal{L}_A^{-1} es lineal, pues \mathcal{L}_A es lineal, entonces la ecuación (7) da pie a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1}(\Phi_{\bar{v}}(h_2) - \Phi_{\bar{v}}(h_1))\|_\rho &= \|\mathcal{L}_A^{-1}(\Phi_{\bar{v}}(h_2)) - \mathcal{L}_A^{-1}(\Phi_{\bar{v}}(h_1))\|_\rho \\ &\leq k^{-1} \|\Phi_{\bar{v}}(h_2) - \Phi_{\bar{v}}(h_1)\|_\rho \\ &\leq k^{-1} r\rho \|h_2 - h_1\|_\rho. \end{aligned}$$

Así, $\mathcal{L}_A^{-1} \circ \Phi_{\bar{v}}$ es una contracción fuerte. Puesto que \mathcal{B}_ρ es un espacio métrico completo podemos usar el teorema del punto fijo de Banach; sea $h \in \mathcal{B}_\rho$ el único punto fijo de $\mathcal{L}_A^{-1} \circ \Phi_{\bar{v}}$. Por lo tanto esta serie resuelve el problema de linealización. \square

A.2. Teoremas de extensión de Riemann

TEOREMA A.2.1. (de singularidades removibles de Riemann). *Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, p un punto de D y f una función holomorfa en $D \setminus \{p\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f se extiende de manera holomorfa en D .
2. f se extiende de manera continua en D .
3. f está acotada en alguna vecindad $V \subseteq D$ de p .
4. $\lim_{z \rightarrow p} (z - p) f(z) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Las implicaciones 1) \Rightarrow 2), 2) \Rightarrow 3) y 3) \Rightarrow 4) son claras.

Probemos entonces 4) \Rightarrow 1). Supongamos $p = 0$, con esta suposición no se pierde generalidad, y consideremos a la función

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} zf(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

Notemos que la función g resulta ser continua pues al suponer 4) tenemos que $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$. Ahora consideremos a la función

$$h(z) = zg(z), \quad z \in U.$$

Como g es continua, en U , h también es continua y más aún es holomorfa en $U \setminus \{0\}$. Probemos que h es holomorfa en 0 calculando

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(0+t) - h(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tg(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0.$$

Esto nos dice que el límite existe y por lo tanto h es derivable en 0. Así h resulta ser una función holomorfa en U . Usando el teorema de Taylor, podemos escribir a h como una serie de potencias, con algún radio de convergencia $r > 0$, alrededor del origen,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Usando que $h(0) = h'(0) = 0$ obtenemos

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n.$$

Ahora bien, recordemos la definición de $h(z)$, esta es $z^2 f(z)$, en $U \setminus \{0\}$. Hemos llegado a una extensión analítica de f en una vecindad del 0, justamente lo que buscábamos probar. \square

Para la prueba del teorema de extensión de Riemann utilizaremos el siguiente resultado, este *lema* se le adjudica a Friedrich Hartogs, sin demostrarlo.

TEOREMA A.2.2. (Lema de Hartogs)⁵. *Sea f una función definida en un dominio D de \mathbb{C}^n tal que es holomorfa con respecto a cada variable z_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces f es holomorfa en D .*

La esencia de la siguiente prueba recae en reducir el problema al caso de singularidades removibles, es decir, llevar el resultado de n variables a una variable.

TEOREMA A.2.3. (de extensión de Riemann). *Sea f una función holomorfa en $D \setminus A$ donde $D \subseteq \mathbb{C}^n$ es un dominio y A es un conjunto analítico de codimensión 1. Si f es localmente acotada en todos los puntos de A , entonces f se extiende de manera única como una función holomorfa en todo el dominio D .*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que si a es un punto cualquiera del conjunto A entonces f se extiende de manera holomorfa en a . Para facilitar la prueba suponemos que $a = 0$ y que g es una función holomorfa en una vecindad U de $a = 0$, tal que $A = \{p \in U \mid g(p) = 0 \in \mathbb{C}\}$ (la existencia de g está dada por la hipótesis, A es un conjunto analítico) y $g(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$ si $0 < |z_n| \leq r$ (la última suposición se puede hacer ya que el conjunto analítico A es de codimensión 1); como $g(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$, si $|z_n| < r$, podemos concluir que $g(z, z_n) \neq 0$ si z pertenece a una vecindad $V \subset \mathbb{C}^{n-1}$, suficientemente pequeña, y $|z_n| = r$.

Consideremos la siguiente integral de Cauchy

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z_n|=r\}} \frac{f(z, z_n)}{z_n - w} dz_n$$

para $z \in V$ la función $f(z, z_n)$ es holomorfa en la variable z , ya que estos son puntos de $D \setminus A$ ($g(z, z_n) \neq 0$). Entonces F también es holomorfa en la variable z , en la vecindad V y con respecto a w es holomorfa en el disco $B_r = \{|w| < r\}$, por lo tanto, gracias al lema de Hartogs, F es analítica en el abierto $B = V \times B_r$. Para un punto t fijo en V la función $g(t, w)$ tiene un número finito de ceros si $|w| = r$, los cuales corresponden con los puntos de A . Por hipótesis f es acotada en vecindades

⁵Una demostración de este teorema puede ser consultada en [19].

de cada punto en A , entonces las singularidades son removibles con respecto a la variable w , después de remover todos los puntos tenemos que en B

$$F \equiv f$$

y como F es holomorfa en B , f también lo es. \square

A.3. Apéndice de topología diferencial

DEFINICIÓN A.3.1. Una n -variedad real M es un espacio topológico Hausdorff con una base numerable para la topología y localmente euclidiano. Ésta última condición, de ser localmente euclidiano, significa que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad U de p , un abierto V de \mathbb{R}^n y un homeomorfismo φ de U a V ; a la pareja (U, φ) se le llama *carta* o *sistema de coordenadas*. Si el conjunto $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está compuesto por cartas de M y además $\{U_i\}$ es una cubierta abierta numerable de la variedad entonces se le llama *atlas*.

Además se pide que las siguientes funciones

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

sean homeomorfismos, esto es para que todo embone bien; a las funciones φ_{ij} se les conoce como cambio de coordenadas.

Si a la definición anterior le pedimos que los cambios de coordenadas φ_{ij} sean difeomorfismos C^∞ o biholomorfismos, entonces a la variedad M se le llama suave u holomorfa respectivamente.

DEFINICIÓN A.3.2. Decimos que $S \subseteq M$ es una subvariedad de una variedad M si S es una variedad con la topología relativa; si además la inclusión, $S \hookrightarrow M$, es suave entonces se dice que S es una subvariedad encajada o regular.

Entre las subvariedades de una variedad hay unas que destacan por su estructura local. La idea del siguiente resultado es ver que todas las subvariedades encajadas son localmente como la inclusión canónica de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^n . Para ello primero introduciremos los siguientes conceptos.

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto decimos que S es una k -rebanada de U si

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}} = c_{i_{n-k}}, i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

para algunas constantes $c_{i_j} \in \mathbb{R}$.

En el caso de variedades tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN A.3.3. Sean M una n -variedad suave, (U, φ) una carta de M y $S \subseteq U$. Si $\varphi(S)$ es una k -rebanada de $\varphi(U)$ entonces decimos que S es una k -rebanada de U . Un poco más general, dados $S \subseteq M$ y $k \in \mathbb{N}$ se dice que la subvariedad S cumple con la condición local de k -rebanada si para cada punto p de S existe una carta (U, φ) tal que $p \in U$ y $S \cap U$ es una k -rebanada de U .

La demostración del resultado siguiente puede ser consultada en [15].

TEOREMA A.3.4. (Criterio local de rebanada para subvariedades regulares). *Sea M una n -variedad suave. Si $S \subseteq M$ es una subvariedad regular de dimensión k entonces S cumple con la condición local de k -rebanada.*

Una vez introducidos los objetos con los que trabajaremos es natural presentar a las funciones entre ellos, en este caso serán las funciones diferenciables ya sea de manera real o compleja.

DEFINICIÓN A.3.5. Sean M y N dos variedades suaves. Decimos que $f : M \rightarrow N$ es una función suave o diferenciable si para cada punto p de M existen cartas (U, φ) y (V, ψ) , de M y N respectivamente, tales que $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es una función suave entre $\varphi(U)$ y $\psi(V)$. En el caso que M o $N = \mathbb{R}^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, se cambia a φ o ψ por la identidad en \mathbb{R}^k .

Ahora introduciremos un concepto que aparece de manera natural en el estudio de variedades holomorfas y suaves, es el de espacio tangente en un punto de dicha variedad. Esta construcción lo que intenta es dar la mejor aproximación lineal, local, de la variedad en cada punto, por lo que dicho espacio tangente en un punto será un espacio vectorial.

Hay en la literatura [11] tres maneras distintas de definir el espacio tangente a un punto y a una variedad. Todas ellas son equivalentes y se usan indistintamente en función de la estructura o las propiedades que se esté interesado en destacar. En nuestro caso presentaremos la que es de un carácter más geométrico.

Dada una variedad suave M y un punto p en ella decimos que dos curvas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_j : \mathbb{R} \rightarrow M$, tales que $\alpha_j(0) = p$ son equivalentes si y sólo si $\frac{d}{dt}\varphi \circ \alpha_1|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi \circ \alpha_2|_{t=0}$, para alguna carta (U, φ) de M con $p \in U$. Utilizaremos la congruencia anterior para definir lo que es un vector tangente.

DEFINICIÓN A.3.6. Un vector tangente a una variedad suave M en un punto p es un elemento de las clases de equivalencia recién definida de curvas α tales que $\alpha(0) = p$.

El conjunto de vectores tangentes a p forma un espacio vectorial, al cual se le llama espacio tangente en p y se le denota T_pM .

El haz tangente a una variedad M no es más que la unión ajena de los espacios tangentes sobre cada punto de la variedad, y se le denota

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM.$$

Observemos que cada punto de TM puede ser visto como una pareja ordenada (p, v) donde $p \in M$ y v es un vector tangente a M en p . Por lo que tenemos una proyección canónica de TM a M .

Si M es una n -variedad entonces T_pM es un espacio vectorial de dimensión n por lo que es isomorfo a \mathbb{R}^n . Este isomorfismo está dado por

$$L_\varphi : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[\gamma] \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

donde (U, φ) es una carta de M y $p \in U$.

Una vez definido el concepto de espacio tangente, podemos hablar de la diferencial de una función suave entre dos variedades M y N .

DEFINICIÓN A.3.7. Sean M^m y N^n dos variedades suaves, $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable y $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas de M y N respectivamente, con $p \in U, f(p) \in V$. Definimos la diferencial de f en un punto p como la transformación lineal $d_p f$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)}N \\ L_\varphi \downarrow & & \downarrow L_\psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n \end{array} .$$

Ya que la derivada de una función diferenciable, en un punto, es una transformación lineal tenemos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN A.3.8. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave. Decimos que f es de rango constante o tiene rango constante si la dimensión de $Im d_p f$ es constante para todo punto $p \in M$. Dentro de las funciones de rango constante tenemos dos muy naturales.

Se dice que f es una *inmersión* si $d_p f$ es inyectiva para todo punto p de M . Decimos que f es una *submersión* si $d_p f$ es suprayectiva para todo punto $p \in M$. Si f es una inmersión y una submersión entonces se le llama *difeomorfismo*.

El siguiente resultado nos da información acerca de las funciones que tienen rango constante. Su demostración puede ser consultada en [11].

TEOREMA A.3.9. (del rango constante). Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, $f : M \rightarrow N$ una función suave de rango constante igual a r . Entonces para cada punto $p \in M$ existen cartas (U, φ) , centrada en p , y (V, ψ) , centrada en $f(p)$, tales que $f(U) \subseteq V$ y el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

con $g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Presentaremos un concepto que, si bien es la generalización y definición formal del haz tangente como haz vectorial, nos sirve en el teorema 1.0.12 de Ehresmann.

DEFINICIÓN A.3.10. Sean M y F espacios topológicos. Un haz fibrado sobre M con fibra F es un espacio topológico E y una función continua y sobre $\pi : E \rightarrow M$; con la propiedad de que para todo punto x de M existe una vecindad $U \subset M$ de x y un homeomorfismo ϕ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xleftrightarrow{\quad} & U \end{array}$$

Al homeomorfismo ϕ se le llama trivialización local de E sobre U . Al espacio topológico E se le llama espacio total, a M espacio base, y a π su proyección. Si E , M y F son variedades diferenciables entonces a la función ϕ se le pide ser un difeomorfismo.

Si la vecindad U puede ser todo el espacio M entonces se dice que es un haz fibrado trivial.

EJEMPLO A.3.11. Todo producto de espacios topológicos es un haz fibrado trivial.

El haz tangente es un haz fibrado, y se le llama haz vectorial por que la fibra es un espacio vectorial.

Dentro de los haces hay uno que es dual al haz tangente, en el sentido del álgebra lineal, éste es el haz cotangente. Se define de manera análoga al haz tangente, pero con la particularidad de que el espacio cotangente a un punto p de una variedad

real suave M es el espacio dual a T_pM es decir, las funciones lineales del espacio tangente en p al campo en cuestión, en este caso \mathbb{R} , y se denota por

$$T_p^*M.$$

El haz cotangente es la unión

$$\bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M.$$

A.3.1. Formas diferenciales u holomorfas en \mathbb{C}^2 . Presentaremos el concepto de formas diferenciales para el estudio de foliaciones en \mathbb{C}^2 , para una introducción geométrica y estudio más detallado de esta herramienta se puede consultar [4].

Consideremos a \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} espacio vectorial, el espacio tangente a un punto $p \in \mathbb{C}^2$ es $T_p\mathbb{C}^2$ el cual es isomorfo a \mathbb{C}^2 . Se puede llegar a pensar que son el mismo espacio pero esto da una idea incorrecta de espacio tangente ya que el espacio tangente depende del punto en consideración, una idea geométrica es pensar el espacio tangente de p como $p + \mathbb{C}^2$, es decir trasladar a todo \mathbb{C}^2 por el vector p ⁶.

En el caso de \mathbb{C}^2 , como espacio vectorial, tenemos que su haz tangente es isomorfo a $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$.

DEFINICIÓN A.3.12. Una *1-forma* o una *forma de grado uno* es una función

$$\omega : \mathbb{C}^2 \longrightarrow T^*\mathbb{C}^2, \quad \omega(p) : T_p\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \omega(p) \text{ es lineal.}$$

Para facilitar la notación y como la 1-forma depende de un punto se escribirá ω_p o simplemente ω cuando no haya lugar a confusión. También se identificará a $T_p\mathbb{C}^2$ con \mathbb{C}^2 para hacer cálculos más limpios.

Un ejemplo sencillo de 1-formas es la diferencial de una función holomorfa $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$; consideremos a df , sabemos como funciona la diferencial en un punto $p \in \mathbb{C}^2$ y es justamente la transformación lineal

$$d_p f : T_p\mathbb{C}^2 \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{C}.$$

$v \mapsto d_p f(v)$

Ya que $T_{f(p)}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$, entonces es claro el por qué podemos pensar a df como una 1-forma. Podemos definir entonces al conjunto de funciones $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, tales que f es holomorfa como el conjunto de las *0-formas*.

Veamos ahora el aspecto de una 1-forma en \mathbb{C}^2 . Si tenemos como coordenadas de \mathbb{C}^2 a (z, w) , es decir dado un punto $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ entonces $z(p) = p_1$ y $w(p) = p_2$. Como estas coordenadas son globales tenemos el marco global, de hecho el canónico, $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w}\}$; a lo que nos referimos es que $\{\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial w}|_p\}$ es base de $T_p\mathbb{C}^2$, para todo punto $p \in \mathbb{C}^2$. En este contexto es natural cuestionarse si hay una base dual de $\{\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial w}|_p\}$ que nos funcione para todo punto p ; en este caso particular la hay y está dada por las diferenciales (en cada punto) de las funciones coordenadas z y w , $\{d_p z, d_p w\}$. Fijando la base $\{\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial w}|_p\}$ para todo punto $p \in \mathbb{C}^2$ podemos identificar sin ningún impedimento a $T_p\mathbb{C}^2$ con \mathbb{C}^2 , gracias al isomorfismo $a\frac{\partial}{\partial z}|_p + b\frac{\partial}{\partial w}|_p \mapsto \langle a, b \rangle_p$ ⁷.

⁶Hay veces que se tiende a identificar el espacio tangente a un punto con todo el espacio, \mathbb{C}^2 , en caso de que pueda haber confusión al respecto se pondrá una indicación.

⁷Notemos que se están usando \langle, \rangle_p en vez de $(,)$ para denotar a los vectores en $\mathbb{C}^2, T_p\mathbb{C}^2$. Cuando no haya lugar a confusión se omitirá la etiqueta del punto p en el vector tangente.

Dado un punto $p \in \mathbb{C}^2$ tenemos una base de $T_p^*\mathbb{C}^2$, entonces dada una 1-forma ω , al evaluarla en un punto p tenemos que es de la forma

$$\omega(p) = a d_p z + b d_p w, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Esta representación de $\omega_p = \omega(p)$ es muy sencilla a la hora para calcular $\omega_p(\langle c, d \rangle_p) = ac + bd$, ya que $\{d_p z, d_p w\}$ es la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial w}|_p\}$.

Para que el nombre de forma diferencial tenga sentido nos gustaría que si p y q son dos puntos *cercanos* de \mathbb{C}^2 entonces ω_p y ω_q sean *similares*. Dado que $\{dz, dw\}$ es un co-marco global lo único que queda a definir es la variación de los coeficientes en cada punto p . Si $\omega_p = a_p d_p z + b_p d_p w$, entonces a a y b las podemos pensar como funciones holomorfas de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C} , de esta manera ω_p y ω_q serán funciones lineales parecidas si p y q son puntos próximos.

Introduciremos ahora el concepto de *2-forma*, ya que posteriormente presentaremos operaciones (aparte de las de espacio vectorial) que cumplen las 0-formas y las 1-formas holomorfas y será necesario tener definido qué es una 2-forma.

DEFINICIÓN A.3.13. Una *2-forma* o una *forma exterior de grado dos* es una función

$$\omega^2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow (T\mathbb{C}^2 \times T\mathbb{C}^2)^*,$$

tal que $\omega^2(p)$ es una transformación bilineal y antisimétrica. Es decir, para cualesquiera $w, x, y, z \in T_p\mathbb{C}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\omega_p^2(x + \lambda y, z + \mu w) = \omega_p^2(x, z) + \mu \omega_p^2(x, w) + \lambda \omega_p^2(y, z) + \lambda \mu \omega_p^2(y, w)$$

y

$$\omega_p^2(x, z) = -\omega_p^2(z, x).$$

De la segunda propiedad se deduce que $\omega_p^2(x, x) = 0$, para todo $x \in T_p\mathbb{C}^2$.

Con las siguientes operaciones el conjunto de las 2-formas resulta ser un espacio vectorial complejo. Sean ω^2 y η^2 dos 2-formas entonces se tienen las siguientes operaciones:

$$(\omega^2 + \eta^2)_p := \omega_p^2 + \eta_p^2,$$

$$(\omega_p^2 + \eta_p^2)(x, y) := \omega_p^2(x, y) + \eta_p^2(x, y),$$

$$(\lambda \omega_p^2)(x, y) := \lambda \omega_p^2(x, y).$$

Antes de analizar como se ve una dos forma en \mathbb{C}^2 introduciremos una operación entre las i -formas con las j -formas, $i, j = 0, 1$, a saber el producto exterior.

DEFINICIÓN A.3.14. Sean ω, η dos 1-formas holomorfas en \mathbb{C}^2 , p un punto de \mathbb{C}^2 y $x, y \in T_p\mathbb{C}^2$, denotamos el producto exterior de ω y η como $\omega \wedge \eta$ y está definido de la siguiente manera

$$(\omega_p \wedge \eta_p)(x, y) := \det \begin{pmatrix} \omega_p(x) & \eta_p(x) \\ \omega_p(y) & \eta_p(y) \end{pmatrix}.$$

Gracias a las propiedades del determinante el producto $\omega \wedge \eta$ resulta ser una dos forma holomorfa.

OBSERVACIÓN. Podemos concluir dos propiedades a partir de la definición anterior. La primera es que $\omega \wedge \omega = 0$ para toda 1-forma ω y la segunda es que $(\omega_p \wedge \eta_p)(x, x) = 0$, con $x \in T_p\mathbb{C}^2$.

No es difícil convencerse que la operación producto exterior cumple ser asociativa y distributiva con respecto a la suma. En símbolos

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3), \\ (\omega_1 + \lambda\omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_3 + \lambda(\omega_2 \wedge \omega_3).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\omega = a_1dz + a_2dw$ y $\eta = b_1dz + b_2dw$ entonces

$$\omega \wedge \eta = (a_1b_2 - b_1a_2) dz \wedge dw.$$

Tenemos un resultado, el cual caracteriza de forma muy útil a las dos formas holomorfas en \mathbb{C}^2 .

TEOREMA A.3.15. *Cualquier 2-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 puede ser escrita de manera única como*

$$\omega^2(z, w) = a(z, w) dz \wedge dw,$$

donde $a : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa.

DEFINICIÓN A.3.16. Sean f, g son dos 0-formas (funciones holomorfas de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}), ω una 1-forma y ω^2 una dos forma, todas holomorfas. Entonces tenemos los siguientes productos exteriores, con sus respectivas definiciones

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(p) &:= f(p)g(p), \\ (f \wedge \omega)(p) &:= f(p)\omega_p, \\ (f \wedge \omega^2)(p) &:= f(p)\omega_p^2.\end{aligned}$$

Daremos una definición de *derivada exterior* para formas holomorfas que, permite generalizar de manera inmediata este concepto para dimensión superior.

DEFINICIÓN A.3.17. Sea f una cero forma holomorfa en \mathbb{C}^2 . Definimos la *derivada exterior* de f como la 1-forma

$$(8) \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial w} dw.$$

De manera recursiva definimos la derivada exterior para una 1-forma holomorfa.

Sea $\omega(z, w) = a(z, w) dz + b(z, w) dw$ una 1-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 entonces la derivada exterior de ω es la dos forma holomorfa definida como

$$(9) \quad d\omega = da \wedge dz + db \wedge dw.$$

Desarrollando la igualdad (9) a partir de (8) obtenemos

$$\begin{aligned}d\omega &= \left(\frac{\partial a}{\partial z} dz + \frac{\partial a}{\partial w} dw \right) \wedge dz + \left(\frac{\partial b}{\partial z} dz + \frac{\partial b}{\partial w} dw \right) \wedge dw \\ &= \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial a}{\partial w} dw \wedge dz + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dw + \frac{\partial b}{\partial w} dw \wedge dw \\ &= \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial w} \right) dz \wedge dw.\end{aligned}$$

En el mismo espíritu, si $\omega^2 = a dz \wedge dw$ es una dos forma holomorfa en \mathbb{C}^2 entonces definimos⁸

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= da \wedge dz \wedge dw \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial z} dz + \frac{\partial a}{\partial w} dw \right) \wedge dz \wedge dw \\ &= \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dz \wedge dw - \frac{\partial a}{\partial w} dz \wedge dw \wedge dw. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN A.3.18. Sean f y g dos 0-formas holomorfas en \mathbb{C}^2 . Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $d(f + g) = df + dg$.
2. $d(fg) = g df + f dg$.
3. $d(df) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Los incisos 1. y 2. son inmediatos de la definición A.3.17, de la linealidad y regla de Leibniz de la derivada usual. Para probar el inciso 3. usemos una vez más la definición A.3.17, gracias a ella tenemos que

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial w} dw\right) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge dz + d\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) \wedge dw \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} - \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}\right) dz \wedge dw = 0. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN. Gracias al inciso 3. tenemos que para toda j -forma holomorfa ω , $d(d\omega) = 0$, $j = 0, 1, 2$.

DEFINICIÓN A.3.19. A una j -forma holomorfa ω se le llama *cerrada* si $d\omega = 0$, $j = 0, 1, 2$.

Entre las formas cerradas hay unas que son especiales. Decimos que una j -forma ω es *exacta* si existe una $(j - 1)$ -forma α tal que $d\alpha = \omega$, donde $j = 1, 2$.

OBSERVACIÓN. Toda forma exacta es cerrada.

Las únicas 0-formas cerradas son las funciones constantes.

No toda 1-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 es exacta. Por ejemplo, consideremos la 1-forma $\omega(z, w) = zw^2 dz$.

Las formas diferenciales se comportan de manera muy natural bajo las funciones holomorfas, en nuestro caso sólo se definirá una operación *natural* llamada *pull-back* (o *jalar la forma*) para formas analíticas en \mathbb{C}^2 , pero toda la teoría desarrollada en esta sección puede ser extendida a variedades holomorfas de dimensión finita.

⁸Claramente la derivada exterior de una 2-forma holomorfa es una 3-forma, si bien no definimos el concepto de 3-forma, se puede usar la definición A.3.14 para generalizar el concepto, y ya que $T_p\mathbb{C}^2$ es de dimensión dos, para todo punto $p \in \mathbb{C}^2$, tenemos que dado un conjunto que contenga tres vectores tangentes a \mathbb{C}^2 , en el punto p , siempre será un conjunto linealmente dependiente, por lo que $d\omega^2 = 0$ para toda dos forma holomorfa.

DEFINICIÓN A.3.20. Sean $f : \mathbb{C}_1^2 \rightarrow \mathbb{C}_2^2$ una función holomorfa, ω una k -forma en \mathbb{C}_2^2 , $k = 0, 1, 2$ y $p \in \mathbb{C}_1^2$. Definimos el *pull-back* de ω bajo la función f , *jalar la forma* ω con f , como la k -forma, en \mathbb{C}_1^2 definida por

$$\begin{aligned} (f^*\omega)(p) &= \omega \circ f(p), \text{ si } k = 0, \\ (f^*\omega)_p(x) &= \omega_{f(p)}(d_p f(x)), \text{ si } k = 1 \text{ y } x \in T_p \mathbb{C}_1^2, \\ (f^*\omega)_p(x, y) &= \omega_{f(p)}(d_p f(x), d_p f(y)), \text{ si } k = 2 \text{ y } x, y \in T_p \mathbb{C}_1^2. \end{aligned}$$

Usando la linealidad de df en cada punto p , obtenemos de manera inmediata las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN A.3.21. Sean f, g dos funciones analíticas de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 y ω, η k -formas en \mathbb{C}^2 , $k = 0, 1, 2$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
2. $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$.
3. $f^*(\omega + \eta) = (f^*\omega) + (f^*\eta)$.
4. $d(f^*\omega) = f^*d\omega$.

Una vez definido el concepto de forma holomorfa y el de campo vectorial podemos dar a notar la analogía que existe al definir una foliación, de dimensión 1 en \mathbb{C}^2 (o de codimensión 1) dada por un campo vectorial o por la ecuación de *Pfaff*. Esta relación existe gracias a que en \mathbb{C}^2 el núcleo de una 1-forma es de dimensión uno y el espacio generado por un campo vectorial también es de dimensión uno. Entonces, el conjunto $\{\omega = 0\}$, donde ω es una 1-forma en $(\mathbb{C}^2, 0)$, está conformado por los campos vectoriales V , definidos en $(\mathbb{C}^2, 0)$, tales que $\omega(V) = 0$. Y como dos campos vectoriales en $\ker \omega$ generan la misma foliación, el conjunto $\{\omega = 0\}$ representa simplemente a cualquier campo vectorial que anule a ω . De esta manera si $V = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial w}$ es un campo vectorial que define a una foliación \mathcal{F} entonces una 1-forma asociada a \mathcal{F} será $\omega = -b dz + a dw$.

⁹Los subíndices 1 y 2 sólo son para diferenciar el dominio y contradominio, se espera, que de esta manera la definición sea clara.

Bibliografia

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Third edition, McGraw-Hill Book Co., American Mathematical Society, New York, 1979.
- [2] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Translated from the third Russian edition (1984) by Roger Cooke, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] D. Bachman, *A Geometric Approach to Differential Forms*, Second edition, Birkhäuser, Boston, 2012.
- [5] R. Bott; L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [6] TH. Brocker; K. Janich, *Introduction to differential topology*, Translated from the Russian (1973) by C. B. and M. J. Thomas, Cambridge University, New York, 1982.
- [7] C. Camacho; A. L. Neto, *Teoria geométrica das folheações*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1979.
- [8] C. Camacho; P. Sad, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.
- [9] M. Clapp, *Análisis matemático*, papirhos, IM-UNAM, México, 2015.
- [10] X. Gómez-Mont; L. Ortiz, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Segunda edición, Aportaciones Matemáticas, Serie Investigación, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [11] V. Guillemin; A. Pollack, *Differential Topology*, Reprint of the 1974 original, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [12] J. H. Hubbard; B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms*, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 1999. A Unified approach.
- [13] Yu. S. Ilyashenko; S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [14] I. Tamura, *Topology of Foliations*, Translated from the Japanese (1976) by K. Hudson Translations of Mathematical Monographs, vol. 97, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [15] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2013.
- [16] F. Loray, *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 1994.
- [17] J.-F. Mattei; R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13, no. 4, 1980, 469-523.
- [18] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition, Mc. Graw-Hill, United States of America, 1976.
- [19] B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II, Functions of several variables*, Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel, Translations of Mathematical Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

Índice alfabético

0-forma, 62
1-forma, 62
2-forma, 63

A

atlas, 59

C

campo vectorial, 1
carta, 59
cociente característico, 29
colección resonante, 52
conjunto analítico, 31
contracción, 54
 fuerte, 55
corchete de Lie, 7
curva analítica, 31
curva integral, 3

D

derivada de Lie, 10
derivada exterior, 64
difeomorfismo, 61
diferencial de una función, 60
distribución, 12
 integrable, 13
 involutiva, 13
 totalmente integrable, 13
divisor excepcional, 37
dominio de Poincaré, 52
dominio del flujo, 3

E

ecuación
 de Pfaff, 66
 de primera variación, 35
equivalencia
 entre campos vectoriales, 4
 entre ecuaciones diferenciales, 28
 entre foliaciones, 31
 entre grupos de gérmenes conformes, 18
 entre pseudogrupos, 24
 orbital entre campos vectoriales, 31
espacio tangente, 60
explosión

de un punto, 37
de una foliación, 37

F

flujo global, 2
flujo local, 2
foliación
 estándar, 30
 holomorfa, 30
 holomorfa singular, 31
 integrable, 43
 simple, 47
forma
 cerrada, 65
 exacta, 65
función
 de rango constante, 61
 diferenciable, 60
 transversal, 32
funciones componentes, 1

G

germen
 de biholomorfismo, 15
 de función holomorfa, 15
 formalmente linealizable, 16
 integrable, 21
 parabólico, 19
 periódico, 21
grupo
 de holonomía, 33
 de holonomía evanescente, 40
 integrable, 21
 simétrico, 21

H

haz
 fibrado, 61
 tangente, 60
hoja de una foliación, 30

I

inmersión, 61
integral primitiva, 49

K

k-rebanada, 59

L

Lema

- de Hartogs, 58
- de saturación, 43

M

mapeo

- de correspondencia, 33
- de holonomía, 33

matriz asociada a la parte lineal, 29

O

órbita, 24

P

placa, 30

plodisco, 30

producto exterior, 63

pseudogrupo, 23

pull-back, 66

punto singular, 28

- dicrítico, 38
- elemental, 29
 - tipo hiperbólico, 29
 - tipo nodo, 29
 - tipo silla, 29
 - tipo silla-nodo, 29
- no dicrítico, 38
- resonante, 29

R

razón característica, *véase* cociente característico

S

saturación, 32

separatriz compleja, 31

singularidad, *véase* punto singular

submersión, 61

subvariedad, 59

- regular, 59

T

Teorema

- de Bochner, 19
- de Ehresmann, 5
- de extensión de Riemann, 58
- de Frobenius, 13
- de Hadamard-Perron, 44
- de Mattei-Moussu, 47
- de Poincaré, analítico, 52
- de Poincaré, formal, 52
- de rectificación, 11
- de Seidenberg, 40
- de singularidades romovibles de Riemann, 57
- del punto fijo de Banach, 55

del rango constante, 61

existencia y unicidad, 3

forma canónica para campos vectoriales

- conmutativos, 11

global de Frobenius, 14

transformación

- de holonomía, 33

V

variedad, 59

vector tangente, 60