UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

DEL MÉTODO DE EXHAUCIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
ESPECIALISTA EN MATEMÁTICAS PARA EL BACHILLERATO

PRESENTA:
EDGAR ENRIQUE SOLÍS DE LOS REYES

DIRECTOR DE LA TESINA
CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2017

a tí, que no pude conocerte… y a ella, que te esperaba conmigo, Valeria

a mis padres Honorato Solís Galindo e Isabel de los Reyes Martínez

a mis hermanos Haydee, Viridiana e Ivan

a mis sobrinos Diana, Fernando, Natalia y Diego

Investigación realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN 403816 La Comprensión Matemática.

Índice

Introducción

La enseñanza de las matemáticas, de conceptos y temas matemáticos se puede hacer de diferentes formas y desde diferentes enfoques: se puede hacer de modo expositivo, como tipo taller, se puede hacer de manera conductista, constructivista o cognoscitivista, se puede trabajar en equipos o de forma individual, con grupos cooperativos o colaborativos, se puede trabajar aprendizaje basado en problemas, por proyectos o por medio de la resolución de problemas, se pueden utilizar registros de representación, se puede trabajar interpretación de conceptos, por ejemplo física o geométricamente, se puede modelar, se puede estudiar por medio de sus aplicaciones en otras áreas de conocimiento, se pueden usar TIC como herramienta didáctica, se puede usar la visualización dinámica, incluso se puede hacer en modalidad presencial, en línea, o combinándolas. Hay una gran cantidad de formas, métodos, enfoques y paradigmas, así como combinaciones de estos, para enseñar matemáticas, y constantemente se desarrollan más, y en todos se involucran cuestiones pedagógicas y didácticas, mismas que se estudian, diseñan, crean y desarrollan como en cualquier otra área de conocimiento. En este caso estamos hablando de la Matemática Educativa.

El fin último que se busca en la matemática educativa es que el alumno aprenda matemáticas, para ello se diseña, se planea, se hacen propuestas, se desarrollan teorías, se aplican, se analizan, se cuestionan, se modifican, se consolidan y evolucionan, es decir, se hace docencia.

Para hacer docencia hay diferentes aspectos que se deben considerar, la disciplina, la didáctica y la pedagogía, se deben estudiar, conocer y comprender estas tres partes para lograr una mejor enseñanza. Entendiendo que los últimos dos aspectos son referentes al primero, sin tergiversar sus contenidos.

Este primer aspecto de la enseñanza, la comprensión y conocimiento de la disciplina de las matemáticas, es la base. No es suficiente, pero por supuesto es primordial y necesario. Se requieren sólidos conocimientos de matemáticas para enseñar matemáticas, así como una amplia visión de las mismas.

Esta investigación aborda este aspecto primordial de la enseñanza de las matemáticas, la comprensión y conocimiento de la disciplina, específicamente para el concepto de límite, y se hace usando la historia de las matemáticas como objeto de estudio. El fin es estudiar el concepto de límite a través de su historia, buscando entender de mejor forma el concepto, siguiendo su evolución y sobre todo su necesidad en el desarrollo del conocimiento matemático. Considerando su enseñanza principalmente a nivel bachillerato, se decidió trabajar enfatizando los aspectos geométricos, priorizar las ideas, problemas y concepciones geométricas que dieron paso al concepto, esto para encontrar conexiones de un concepto tan abstracto como el de límite, con objetos matemáticos más concretos. Igualmente se determinó trabajar el desarrollo del concepto desde los griegos hasta el siglo XVII.

La presente investigación está dirigida para el profesor de matemáticas, para lograr una mejor comprensión del concepto de límite, entendiendo su evolución, necesidad y relaciones con diferentes áreas de las matemáticas. Incluye demostraciones formales. Se analizan los trabajos de diferentes matemáticos: Euclides, Arquímedes, Kepler, Cavalieri, Saint-Vicent y Dehn, para argumentar sobre la necesidad y evolución del concepto de límite.

Para su estudio se requieren principalmente conocimientos geométricos, de los Elementos de Euclides, de álgebra, sistemas axiomáticos, cálculo, números reales, límites y teoría de integración.

En el capítulo 1, se presentan problemas geométricos que se relacionan con el concepto de límite y las concepciones que sobre éste tenían los griegos. Se demuestra la proposición XII.5 de los Elementos de Euclides, se analiza la demostración, especialmente el método de exhaución utilizado en ella. Se presenta el tercer problema de Hilbert y se describe la respuesta de Dehn a éste. Se interpreta este resultado con relación al concepto de límite y el método de exhaución.

En el capítulo 2, se centra la atención en mostrar la evolución del concepto de límite analizando los trabajos de Kepler, Arquímedes, Cavalieri y Saint-Vincent. Se analizan las respuestas que ellos dieron para resolver problemas geométricos de áreas y volúmenes, a partir de las que surgieron diferentes conceptos, como el de serie, métodos de integración geométrica y el de límite.

Finalmente, en el capítulo 3, se interpretan los resultados analizados y desarrollados en los capítulos previos, se argumenta a través de ellos para concebir la evolución y necesidad del concepto de límite en el desarrollo de las matemáticas. También se describe cómo estos aspectos, y la historia de las matemáticas repercuten en la enseñanza del concepto.

1. El método de exhaución

En general el método para resolver problemas en cálculo es por aproximación, plasmado en el concepto de límite. No obstante que este concepto se desarrolló en el siglo XIX, ideas referentes al mismo ya eran usadas y estudiadas por los griegos. Muestra de ello son las paradojas de Zenón. Las paradojas más conocidas son:

- La *dicotomía*. La imposibilidad para realizar un movimiento, ya que siempre se debe recorrer primero la mitad del camino, y previamente la mitad de la mitad y previamente la mitad de la mitad de la mitad, así sucesivamente, lo que hace imposible moverse.
- *Aquiles*. La imposibilidad de que Aquiles alcance a una tortuga en una carrera porque cada vez que la tortuga avanza Aquiles primero debe llegar al lugar dónde la tortuga estuvo previamente, como la tortuga sigue avanzando esto ocurre sucesivamente y Aquiles no la puede alcanzar.
- *El vuelo de la flecha*. La imposibilidad de que una flecha alcance su blanco, porque previamente debe volar la mitad de la distancia al blanco, y previamente la mitad de la mitad, así sucesivamente, por lo que la flecha no puede salir del arco.

Aunque estos argumentos son claramente falsos, pues la evidencia física lo muestra, el problema era cómo refutarlos. Aristóteles los llamó “falacias”, aunque no los pudo refutar.

Ahora sabemos que para responder las paradojas de Zenón hacen falta conceptos como infinitesimal, infinito y continuidad, es decir, elementos de límites. Si bien los griegos no llegaron a estos conceptos como los entendemos actualmente, sí tenían concepciones de ellos, realizaban procesos infinitos, y uno de los métodos más antiguos para ello es el método de exhaución.

La creación del método de exhaución se atribuye a Eudoxo, y es ampliamente utilizado por Arquímedes, quien lo usa para demostrar teoremas relacionados con áreas y volúmenes de figuras limitadas por curvas o superficies, resultados que son parte de sus obras: *Sobre la esfera y el círculo*, *Medida del círculo* y *Método sobre los teoremas mecánicos*[1]. Por ejemplo, la primer proposición que demuestra en *el Método* es la cuadratura de la parábola: *Sea ABC un segmento comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo*[2]. *Digo que el segmento ABC es cuatro tercios del triángulo ABC*.

Por otro lado, al inicio de la obra *Sobre la esfera y el círculo*, Arquímedes hace mención de resultados sobre áreas y volúmenes que los atribuye a Eudoxo, como: *toda pirámide es un tercio del prisma que tiene misma base y altura que la pirámide*, y *todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y altura que el cono*. Para la demostración de estos resultados se requiere del método de exhaución.

De manera sintética, con el método de exhaución se trata de realizar un proceso repetidas veces, hasta un punto determinado, sabiendo que tal punto se alcanzará.

Entonces, para usar el método de exhaución se requiere poder repetir un proceso indefinidamente y tener una garantía de que en algún momento tal proceso concluirá. Para poder tener tal garantía Arquímedes supone un lema que actualmente conocemos como el Axioma de Arquímedes[3]: *dadas dos magnitudes geométricas desiguales (líneas, superficies, sólidos), la mayor excede a la menor por una magnitud tal que, añadida sucesivamente a sí misma, puede exceder a su vez a cualquier magnitud del mismo género que las relacionadas*; este axioma también se desprende de los trabajos de Eudoxo, específicamente de su teoría de proporciones, que es presentada por Euclides en el Libro V de sus *Elementos*. El axioma viene de la Definición 4 del Libro V: *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden excederse una a otra*.

Referente al trabajo de Eudoxo, Euclides, no sólo expone su teoría de proporciones si no que, al igual que Arquímedes, también usa el método de exhaución. Este método es la base del Libro XII de sus *Elementos*, específicamente lo usa para demostrar las proposiciones 2, 5, 10, 11, 12 y 18 de dicho libro. Sin embargo, aunque ambos usan el método de exhaución, hay una diferencia respecto a cómo lo aplican, y radica en la forma de garantizar que el proceso que repiten indefinidamente en algún momento concluirá. Euclides no usa el axioma de Arquímedes, no supone este lema, él demuestra una proposición equivalente, y lo

[1] Esta obra es conocida simplemente como *el Método*.
[2] Arquímedes llama a la parábola “sección de cono rectángulo”.
[3] Algunos textos mencionan que lo que asume Arquímedes es un lema, no un axioma.

demuestra usando la Definición 4 de la teoría de proporciones de Eudoxo. La proposición es X.1: *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada*.

Para este trabajo el interés particular está en la proposición XII.5 y el uso del método de exhaución en su demostración. En lo siguiente se demuestra y analiza esta proposición.

1.1 Proposición XII.5.

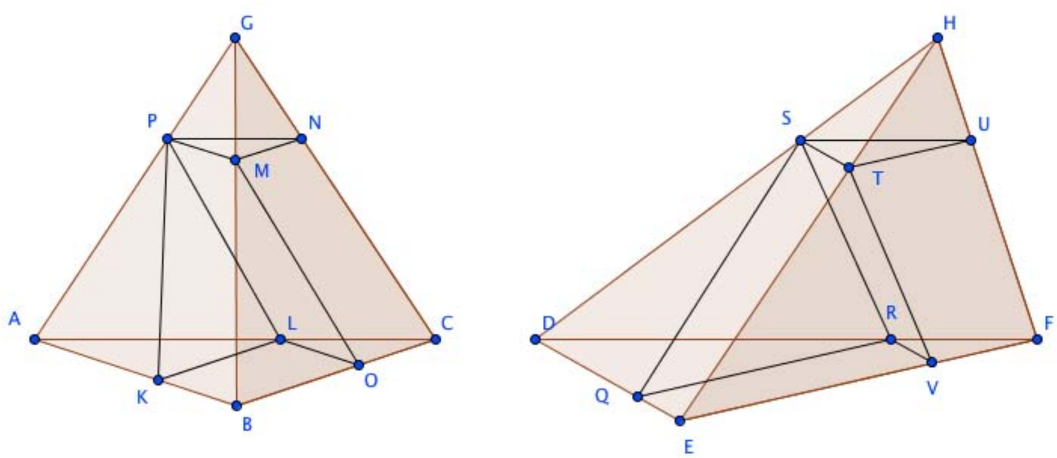
Las pirámides con base triangular que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Demostración:

Consideremos dos pirámides con la misma altura y con bases triangulares ABC y DEF. Sean G y H los vértices de las pirámides, respectivamente.

Se quiere demostrar que la pirámide $ABCG$ es a la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF. Es decir,

$$\frac{triángulo\ ABC}{triángulo\ DEF} = \frac{pirámide\ ABCG}{pirámide\ DEFH}.$$



Supongamos que la pirámide $ABCG$ no es a la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF. Entonces, existirá un sólido W tal que así como la base ABC es a la base DEF

entonces la pirámide $ABCG$ será a W. El sólido W puede ser o bien menor o bien mayor que la pirámide $DEFH$.

Analicemos el primer caso, es decir, la pirámide $ABCG$ es a un sólido W menor que la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF.

Por la proposición XII.3[4] la pirámide $DEFH$ se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a ella, y en dos prismas iguales, que tomados juntos son mayores que la mitad de la pirámide. Sea u_1 tales pirámides y v_1 tales prismas.

Las pirámides obtenidas de la división de la pirámide $DEFH$, es decir u_1, se dividen a su vez de la misma forma en dos pirámides y dos prismas, con las mismas características. Sea u_2 estas nuevas pirámides y v_2 estos nuevos prismas. Se continúa este proceso hasta que se tengan pirámides menores que el excedente por el que la pirámide $DEFH$ sobrepasa al sólido W. Esto se puede hacer por la proposición X.1. Podemos suponer que para ello se requiere repetir el proceso n veces. Así, u_n son tales pirámides y v_n los prismas correspondientes. Entonces u_n es menor que la diferencia entre la pirámide $DEFH$ y el sólido W, de dónde el sólido W es menor que la diferencia entre la pirámide $DEFH$ y u_n.

Pero esta última diferencia son todos los prismas que han resultado de continuar el proceso de división en la pirámide $DEFH$ n veces, es decir, v_1, v_2, v_3, $\cdots$,v_n tomados juntos.

Por tanto, todos los prismas en la pirámide $DEFH$, resultantes de repetir el proceso de división sucesivamente n veces, tomados juntos, son mayores que el sólido W.

Sea la pirámide $ABCG$ también dividida de la misma forma y un número igual de veces. Por tanto, por XII.4[5] como la base ABC es a la base DEF, entonces los prismas en la pirámide $ABCG$ son a los prismas en la pirámide $DEFH$, es decir, la base ABC es a la base DEF como todos los prismas en la pirámide $ABCG$ son a todos los prismas en la pirámide $DEFH$.

Como habíamos planteado que la base ABC es a la base DEF como la pirámide $ABCG$ es al sólido W, entonces, por la proposición V.11[6] la pirámide $ABCG$ es al sólido W como todos los prismas en la pirámide $ABCG$ son a todos los prismas en la pirámide $DEFH$.

---

[4] XII.3 Toda pirámide con base triangular se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a la otra y a la pirámide entera, y teniendo bases triangulares, se dividen en dos prismas iguales que son mayores que la mitad de la pirámide entera.

[5] XII.4 Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como base, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; entonces tal y como la base de una pirámide es a la base de la otra, entonces serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número a la otra pirámide.

[6] V.11 Las razones que son iguales a una misma razón son iguales también entre sí.

Por tanto, por la proposición V.16[7] la pirámide $ABCG$ es a todos los prismas en la pirámide $ABCG$ como el sólido W es a los prismas en la pirámide $DEFH$.
Pero la pirámide $ABCG$ es mayor que los prismas en ella; por tanto el sólido W también debe ser mayor que los primas en la pirámide $DEFH$. Pero habíamos deducido que los prismas en la pirámide $DEFH$ son mayores que el sólido W. Por tanto, obtuvimos una contradicción.
La contradicción viene de suponer que existe un sólido W menor que la pirámide $DEFH$, tal que así como la base ABC es a la base DEF entonces la pirámide $ABCG$ es a W. Por tanto, tal sólido no existe. Por tanto la pirámide $ABCG$ no es a ningún sólido menor que la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF.
Análogamente se prueba que la pirámide $DEFH$ no es a ningún sólido menor que la pirámide $ABCG$ como la base DEF es a la base ABC.
Para tratar el segundo caso probaremos que la pirámide $ABCG$, no es a ningún sólido W mayor que la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF.
Supongamos que la afirmación anterior es cierta, entonces, el sólido W es a la pirámide $ABCG$ como la base DEF es a la base ABC.
Entonces existirá un sólido W' tal que así como el sólido W es a la pirámide $ABCG$,
la pirámide $DEFH$ es a dicho sólido

$$\frac{W}{pirámide\ ABCG} = \frac{pirámide\ DEFH}{W'}.$$

Entonces, por la proposición V.11, se sigue que

$$\frac{triángulo\ DEF}{triángulo\ ABC} = \frac{pirámide\ DEFH}{W'}.$$

Pero como el sólido W es a la pirámide $ABCG$ como la pirámide $DEFH$ es al sólido W', entonces, por la proposición V.16

[7] V.16 Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

$$\frac{W}{pirámide\ DEFH} = \frac{pirámide\ ABCG}{W'}.$$

Pero el sólido W es mayor que la pirámide $DEFH$; por tanto la pirámide $ABCG$ también debe ser mayor que el sólido W'.
Por tanto, la base DEF es a la base ABC como la pirámide $DEFH$ es a algún solido menor que la pirámide $ABCG$. Pero esto acaba de ser probado previamente como absurdo.
Por tanto la pirámide $ABCG$ no es a ningún sólido mayor que la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF; y tampoco es a ningún sólido menor que la pirámide $DEFH$ como la base ABC es a la base DEF.
Por tanto la base ABC es a la base DEF como la pirámide $ABCG$ es a la pirámide $DEFH$. ■

En la demostración de la proposición XII.5 se usa el método de exhaución cuando repetimos indefinidamente el proceso de dividir una pirámide en dos pirámides y dos prismas con ciertas características. Mismo que siempre podemos realizar en cualquier pirámide por la proposición XII.3. No obstante, para usar el método de exhaución no basta con sólo repetir indefinidamente un proceso, es necesario que tal proceso termine; en este caso queda garantizado al pedir repetir el proceso hasta que se obtengan pirámides menores que la diferencia entre la $piramide\ DEFH$ y el $sólido\ W$. La proposición X.1 nos dice que en determinado momento esta repetición indefinida del proceso de dividir pirámides alcanzará la condición mencionada, y la iteración del proceso concluirá.
Otro aspecto de las demostraciones que usan el método de exhaución es que se realizan por reducción al absurdo. Como en la demostración de la proposición XII.5, se quiere demostrar que para ciertas magnitudes a, b, c y d, se satisface la expresión $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a y b son los triángulos ABC y DEF, respectivamente; mientras que c y d son las pirámides $ABCG$ y $DEFH$, respectivamente. Se supone que no se satisface dicha expresión. Entonces existe d', la cuarta proporcional, para a, b y c; es decir a, b, c y d' satisfacen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d'}$. Además d' debe ser mayor, menor o igual que d, y con el método de exhaución se prueba que d' no puede ser ni mayor ni menor que d. En la prueba presentada, en el primer caso $d' = W$, y en el segundo caso $d' = W'$.
Se puede describir el método de exhaución aplicado en la proposición XII.5, dada la existencia de la cuarta proporcional W, como sigue:

A1. Se determina una magnitud v_1 tal que $v_1 > \frac{1}{2}(pirámide\ DEFH)$

A2. Se realiza repetidamente el proceso de división en la pirámide $DEFH$ y en las pirámides obtenidas sucesivamente, hasta que $(pirámide\ DEFH - W) > u_n$

B. Se establece la proporción $\frac{pirámide\ ABCG}{pirámide\ ABCG - u_n'} = \frac{W}{pirámide\ DEFH - u_n}$

De **B** se deduce que la cuarta proporcional debe ser la que se proponía, es decir, $pirámide\ DEFH = W$.

v_1 son los dos prismas que resultan al dividir la pirámide $DEFH$, u_n son las pirámides que resultan de continuar el proceso de división sucesivamente en las pirámides resultantes, n veces, con n tan grande como se requiera, hasta que se cumpla la desigualdad planteada; y u'_n son las pirámides de realizar el proceso de división sucesivamente en la pirámide $ABCG$ n veces. Claramente v_i y u_i son magnitudes distintas pero relacionadas entre sí por el proceso de división sucesivo de las pirámides.

Se tiene que $v_1 + u_1 = pirámide\ DEFH$, así $u_1 = pirámide\ DEFH - v_1$, es decir, u_1 es el resultado de quitar los prismas a la pirámide $DEFH$, que son mayores que la mitad de ésta, y el resultado son dos pirámides. u_2 es el resultado de quitarle a u_1 los prismas que resultan de aplicar el proceso de división precisamente a u_1, a las dos pirámides resultantes del proceso anterior; dichos prismas son mayores que la mitad de u_1. Entonces, siguiendo el proceso sucesivamente se sigue que $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n$. De este modo dadas las magnitudes $pirámide\ DEFH$ y $(pirámide\ DEFH - W)$, a la mayor se le quita sucesivamente una magnitud mayor que su mitad, y la Proposición X.1 asegura que en algún momento el resultado será menor que la magnitud menor dada, con lo que se garantiza que el proceso de dividir repetidamente las pirámides terminará.

En ambos casos de la demostración de la proposición XII.5, y en general, la existencia de la cuarta proporcional no se sigue de los Postulados de Euclides, se supone. De este modo uno de los elementos fundamentales para probar esta proposición no es parte del sistema axiomático de Euclides.

1.2 El tercer problema de Hilbert

La proposición I.38 de los *Elementos* de Euclides, que dice: *Triángulos con bases iguales y que están entre las mismas paralelas, son iguales*; que es un caso particular de la proposición VI.I, que dice: *Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases*, es la proposición equivalente a la proposición XII.5. Ambas son proposiciones que tratan de objetos equivalentes en espacios diferentes, y cuyas afirmaciones son equivalentes. No obstante en la demostración de la proposición I.38 no se requiere el método de exhaución, ni de la existencia de la cuarta proporcional. Esta proposición se deduce únicamente de los cinco Postulados.

Esta diferencia entre las demostraciones de las proposiciones I.38 y XII.5 es fundamental, como se evidencia con un análisis más general.

La proposición I.38 nos dice cuándo dos triángulos tienen la misma área, análogamente la proposición XII.5 nos dice cuándo dos pirámides tiene el mismo volumen, y la respuesta es la misma, cuando sus bases y sus alturas son iguales. Cabe mencionar que esta sería una interpretación moderna de ambos resultados, pues ni el concepto de área ni el de volumen entendidos como números están presentes en los *Elementos* de Euclides.

Siguiendo con este análisis más general, se requiere un concepto:

Definición 1.2.1. Dos polígonos son *tijera-congruentes* si uno puede ser cortado en un número finito de polígonos y éstos se pueden rearmar, por rotaciones y traslaciones, para formar el segundo polígono.

Claramente dos polígonos que son *tijera-congruente*s tienen la misma área, y el resultado converso, dos polígonos son tijera-congruentes si tienen la misma área, se conoce como el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien.

Por tanto, dos triángulos tienen la misma área si y sólo si son *tijera-congruente*s. Es decir, es condicion necesaria y suficiente para que dos triángulos tengan la misma área; mientras que la proposición I.38 nos da sólo la condición suficiente para ello.

Lo equivalente a lo anterior en términos de volumen se puede expresar de la siguiente manera:

Definición 1.2.2. Dos poliedros son *tijera-congruentes* si uno puede ser cortado en un número finito de poliedros y éstos se pueden rearmar, por rotaciones y traslaciones, para formar el segundo poliedro.

En particular, dos tetraedros, dos pirámides que son *tijera-congruentes* tienen el mismo volumen. Pero si tienen el mismo volumen no necesariamente son *tijera-congruentes*. Este hecho fue demostrado por Max Dehn en 1900, y corresponde a la respuesta del tercer problema de Hilbert, de su famosa lista de 23 problemas que presentó en Paris en el Congreso Internacional de Matemáticas, durante el mismo año. Con estos problemas Hilbert esperaba orientar a los matemáticos de la época, e imaginaba que serían parte importante del desarrollo futuro de las matemáticas.

Actualmente, de acuerdo a Yandell, cuatro de los 23 problemas son vagos en sus afirmaciones y no se han resuelto en su totalidad, debido a la ambigüedad de su planteamiento: 12, 19, 20 y 23; tres no se han resulto: 6, 8 y 16; y 16 de ellos ya estan resueltos: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 21, y 22. Ciertamente, esta famosa lista de problemas influenció fuertemente el desarrollo de las matemáticas en el siglo XX.

El tercer problema de Hilbert, que Dehn respondió, es conocido como el problema fácil de Hilbert, pero por fácil sólo debemos entender que fue el primero de los 23 en ser resulto, Hilbert lo enunció así: *Dado un poliedro, ¿es siempre posible cortarlo en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede armado un cubo con el mismo volumen?*

Dehn resolvió el tercer problema de Hilbert usando álgebra y definiendo un invariante, el invariante de Dehn, él probo que dos poliedros son *tijera-congruentes* si y sólo si tiene el mismo volumen y el mismo invariante de Dehn. En particular, probó que el invariante de Dehn para un cubo es cero, mientras que el invariante de Dehn para un tetraedro regular es distinto de cero. De este modo, un tetraedro regular no puede ser cortado en una cantidad finita de piezas que puedan volver a ensamblarse formando un cubo con el mismo volumen. Entonces, el concepto *tijera-congruentes* caracteriza el área de triángulos, pero no el volumen de pirámides. Esto muestra la necesidad de elementos distintos en la demostración de la proposición XII.5 con respecto a la proposición I.38; área de triángulos y volumen de pirámides no son conceptos equivalentes. Con respecto al volumen de las pirámides se requiere de algo más que los cinco Postulados de Euclides, se requiere de un método no elemental, como el método de exhaución y la existencia de la cuarta proporcional.

2. Métodos de integración geométrica

Los matemáticos griegos, entre muchas aportaciones, desarrollaron diversos métodos para resolver problemas geométricos, como el método de exhaución y la *neusis*, la concepción de curvas mecánicas como la cuadratriz y de otros instrumentos como el *mesolabio*, que diseñó Eratostenes, además del uso del método deductivo para demostrar resultados generales. No obstante, también se plantearon problemas para los que no lograron la solución deseada, de éstos los más famosos son: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, sólo con regla y compas. Usando diferentes métodos e instrumentos sí resolvieron estos tres problemas, lo que no lograron fue resolverlos usando sólo regla y compas, pero no lo lograron porque no es posible hacerlo, aunque en aquel entonces esto no se sabía.

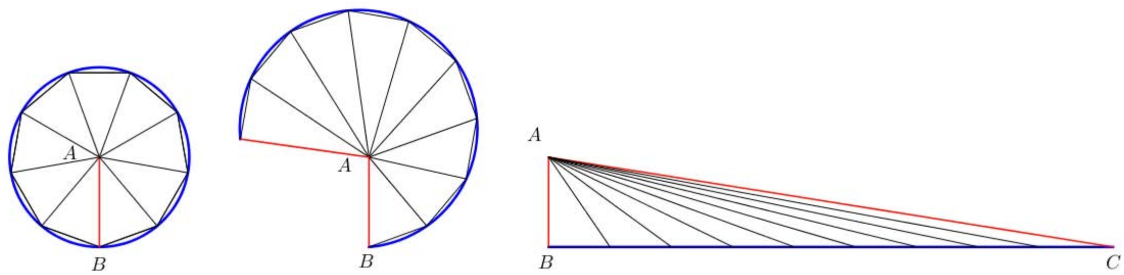
Los esfuerzos por resolver problemas que en alguna época quedaron pendientes o la búsqueda de lograr diferentes soluciones, generalmente llevan a generar nuevos conceptos, como el invariante de Dehn, o también a desarrollar nuevos métodos y técnicas.

En el siglo XVII comenzaron a surgir nuevas técnicas y concepciones en la resolución de diversos problemas, como en la cuadratura de la hipérbola. Algunos de estos problemas surgieron por el interés en otras áreas, como por ejemplo la astronomía. En efecto, uno de los primeros matemáticos en usar los infinitesimales para calcular áreas y volúmenes fue Johanes Kepler.

Los problemas de calcular áreas y volúmenes de ciertas regiones acotadas por líneas curvas o superficies ya habían sido tratados por los griegos, y fueron abordados mediante el método de exhaución. Aunque éstos siempre se referían a polígonos regulares o secciones cónicas, pero para el siglo XVII se trabajaban curvas más generales, y sólidos generados por rotar éstas curvas alrededor de una recta.

En su *Nova stereometria*, Kepler calculó el área de un círculo de radio AB considerando a su circunferencia formada por una infinidad de puntos. Con estos puntos construyó triángulos isósceles con dos de sus vértices en la circunferencia y el tercero en el centro de la misma;

luego Kepler extiendió la circunferencia hasta hacerla un segmento de recta BC, de modo que los triángulos que construyó con la circunferencia resultan en triángulos sobre el segmento de recta, todos de altura el radio del círculo.



El área del triángulo ΔABC es el área de todos los triángulos que lo forman, que son iguales a los sectores circulares correspondientes del círculo. Por tanto, el área del triángulo ΔABC es igual al área del círculo, así Kepler obtuvo que el área del círculo es un medio de la circunferencia por su radio.

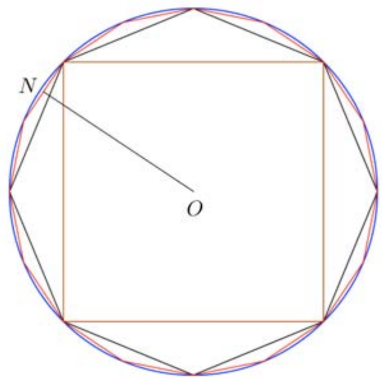
Al considerar a la circunferencia formada por una infinidad de puntos, y a su vez al círculo por una infinidad de triángulos, podríamos decir que Kepler usó de cierta manera el método de infinitesimales, ya que las bases de los triángulos deben ser infinitamente pequeñas para tener la igualdad de las áreas.

Kepler expresó este resultado de la siguiente forma: el área del círculo es al cuadrado de su diámetro como 11 es a 14, que resulta ser una aproximación al valor de π: 3.142857143.

Esta misma aproximación es también obtenida por Arquímedes. En su obra *Medida del círculo*, que consta sólo de tres proposiciones, en la Proposición 2. *El círculo guarda con el cuadrado levantado sobre su diámetro la razón de 11 a 14*.

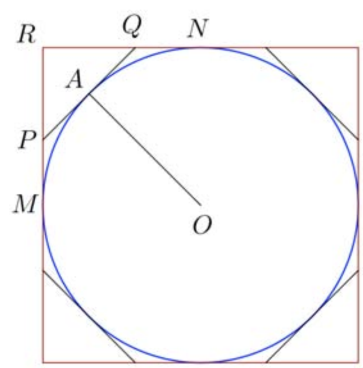
Arquímedes además de esta aproximación ya había también obtenido el resultado de Kepler en la proposición 1: *Todo círculo es igual a un triángulo rectángulo cuyo radio es igual a uno de los lados que forman el ángulo recto y el perímetro es igual a la base*. Ambos calculan el área del círculo comparándola con el área de un triángulo rectángulo, pero la demostración de Arquímedes es muy diferente a la de Kepler.

Arquímedes primero supone que el círculo es mayor que el triángulo descrito en la proposición 1, he inscribe en él un cuadrado. Luego, partiendo los arcos resultantes a la mitad inscribe otro polígono, repitiendo el proceso hasta que la diferencia del círculo con el polígono sea menor que el excedente del círculo respecto al triángulo, que implica que el polígono es mayor que el triángulo.



Luego considera el segmento NO del centro del círculo al punto medio de un lado del polígono y ortogonal a éste, que es menor que el radio del círculo, y ya que el perímetro del polígono es menor al del círculo, entonces el polígono es menor que el triángulo. Por tanto, el círculo no puede ser mayor que el triángulo.

Después Arquímedes supone que el círculo es menor que el triángulo. Circunscribe un cuadrado, y de los puntos medios de los arcos resultantes traza tangentes formando un nuevo polígono circunscrito. Y dado que el triángulo PRQ es mayor que la mitad de la figura $RMAN$, se puede repetir este proceso hasta que la diferencia del polígono circunscrito con el círculo sea menor que el excedente del triángulo respecto al círculo.



Lo que implica que el polígono circunscrito resultante es menor que el triángulo. Pero esto es imposible, pues el segmento OA es el radio del círculo, y el perímetro del polígono circunscrito es mayor que la circunferencia. Entonces, el círculo no puede ser menor que el triángulo. Por tanto, el círculo es igual al triángulo rectángulo con ángulo recto formado por el radio del círculo y base la circunferencia.

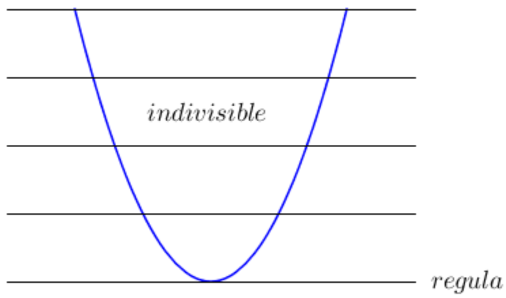
La demostración de Arquímedes es por reducción al absurdo usando el método de exhaución, que requiere la proposición X.1 de Euclides[8], y obtiene el resultado acotando el área del círculo construyendo sucesivamente figuras de las que sí puede calcular su área, a diferencia de Kepler, que usando infinitesimales la calcula directamente descomponiendo el círculo en una infinidad de figuras que sí puede calcular su área, y suma el área de la infinidad de figuras. Arquímedes hace una aproximación sucesiva infinita de modo que garantiza que tal aproximación se detendrá en algún momento, y Kepler suma una infinidad de cantidades sabiendo que el resultado será finito.

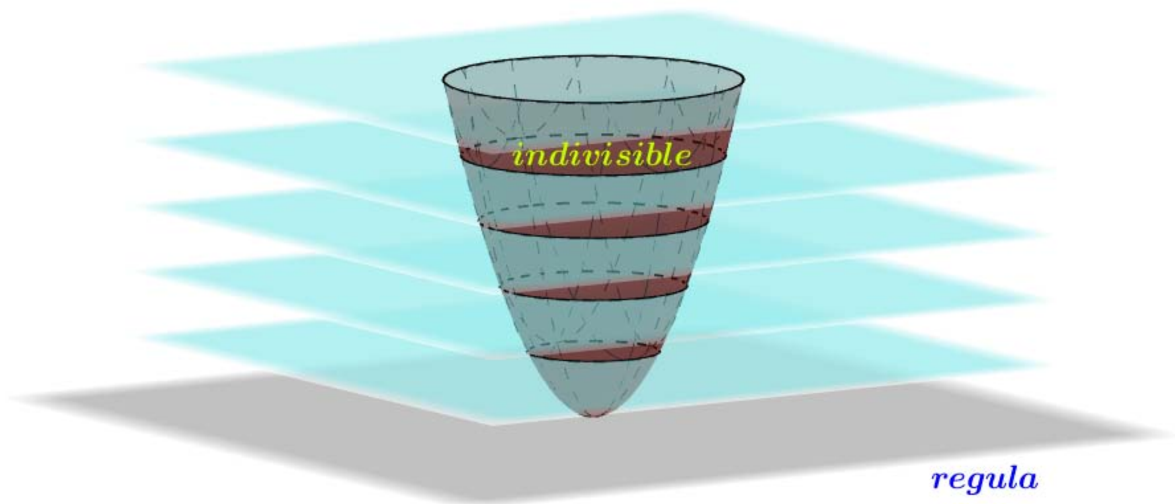
El método de exhaución, y posteriormente el de infinitesimales, no eran los únicos para calcular áreas y volúmenes. Matemáticos como Galileo y Arquímedes usaban el método de indivisibles, en el que también se descomponen las figuras en otras figuras y se hacen sumas infinitas.

2.1 Indivisibles

El padre del método de indivisibles es Buonaventura Cavalieri, un discípulo de Galileo. Él desarrolló una teoría completa de indivisibles en sus obras: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Geometría, avances en una nueva forma por los indivisibles del continuo*) y *Exercitationes geometricae sex* (*Seis ejercicios geométricos*). La esencia del método de indivisibles es considerar un objeto geométrico como formado por objetos de una dimensión menor. En este método, para una región se considera su área a través de *omnes lineae* (*todas las líneas)* que la forman, y en el caso de los sólidos su volumen a través de *todos los planos que lo forman*. Cavalieri consideraba una *regula* (regla), una recta o plano que toca a la región o al sólido en el vértice, y a partir de ella trazaba líneas o planos paralelos equidistantes hasta abarcar toda la región o todo el sólido, y el espacio delimitado por la región o el sólido y cada par de rectas o planos paralelos, es un indivisible correspondiente a dicha región o sólido.

[8] Proposición X.1. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.





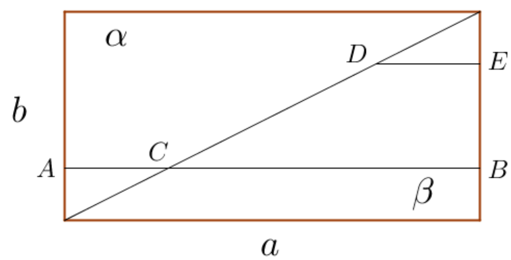
Dada una región plana F, se denota a *omnes lineae* (*todas las líneas*) que forman a F por $\mathcal{O}_F(l)$. De este modo la idea esencial de la teoría de indivisibles es pensar que $\mathcal{O}_F(l) = F$.

Uno de los principales resultados de la teoría de indivisibles es el siguiente:

Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones hechas por las líneas paralelas a las bases y a iguales distancias de ellas están en razón, entonces las figuras planas también están en la misma razón.

En particular, *si dos figuras planas F_1 y F_2 son iguales, entonces* $\mathcal{O}_{F_1}(l) = \mathcal{O}_{F_2}(l)$. Por ejemplo, se considera un rectángulo F de lados a y b, y con su diagonal se divide en dos triángulos rectángulos congruentes α y β. Y a cada segmento $\overline{AC}$ en el triángulo α le corresponde uno y sólo un segmento $\overline{DE}$ en el triángulo β, entonces $\mathcal{O}_\alpha(l) = \mathcal{O}_\beta(l)$.

Y más aún, cada segmento $\overline{AB}$ en el rectángulo F está formado por un segmento del triángulo α y uno del triángulo β. Por tanto, $\mathcal{O}_F(l) = \mathcal{O}_\alpha(l) + \mathcal{O}_\beta(l) = 2\,\mathcal{O}_\alpha(l)$



Esto muestra que el área del triángulo α, que es igual a la del triángulo β, es la mitad del producto de los lados del rectángulo, o en simbología moderna:

$$\int_0^a \frac{b}{a} x \, dx = \frac{ab}{2}.$$

La teoría de indivisibles de Cavalieri resultó en lo que actualmente conocemos como el Principio de Cavalieri.

Entre los matemáticos que trabajaron con los indivisibles están: Galileo, Torricelli, Grégoire de Saint-Vincent, Descartes, Roberval, Pascal, Tacquet, Mengoli, Barrow, Wallis, James Gregory, y Leibniz.

No obstante, durante el siglo XVII surgió otro método para calcular áreas y volúmenes independiente de los indivisibles, y se debe a Grégoire de Saint-Vincent.

2.2 Obra geométrica

Opus geometricum (*obra geométrica*), es el trabajo de Grégoire de Saint-Vincent quien fuera el más talentoso discípulo de Clavius. En esta obra Saint-Vincent presentaba un intento de cuadrar el círculo usando métodos infinitesimales, que, aunque falló en este objetivo, mucho de su trabajo en esta obra significó importantes aportaciones al cálculo que conocemos actualmente.

Saint-Vincent fue el primer matemático en estudiar problemas relacionados con la reflexión y refracción, y uno de los problemas que surgió fue la trisección del ángulo, y al trabajar en este problema él encontró que la serie $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ es igual a $\frac{2}{3}$, a este valor él le llama el *término*, que en latín significa *límite*. A diferencia de

Euclides que en su proposición X.1 sólo afirma que la magnitud será menor que la magnitud menor dada, Saint-Vincent afirma que la cantidad será exhaustiva (que se alcanzará), da ese "brinco" de no sólo acercarse tanto como se quiera, sino de "llegar a" alcanzar un valor determinado.

Arquímedes, en su *Cuadratura de la parábola* demuestra que un segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del triángulo inscrito construido en el segmento parabólico, para ello él también determina el valor de una serie geométrica de la forma:

$$a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n a + \cdots$$

donde a es el triángulo inscrito. Para determinar el resultado Arquímedes usa el método de exhaución, y nuevamente lo hace por reducción al absurdo, usando la proposición X.1 de Euclides para aproximarse tanto como requiera garantizando que tal aproximación se alcanzará, y usa también la existencia de la cuarta proporcional. A diferencia de Saint-Vincent, que calcula la serie de manera directa, y no requiere la existencia de la cuarta proporcional. La concepción es diferente en el método de obtener el valor de la serie, entre acotar y calcular, incluso al método de exhaución también se le hace referencia como el método indirecto de prueba, que evita el empleo de límites (Hawking, 2006, pág. 79). Por tanto, podemos decir que Saint-Vincent es el primero en concebir y llamar un límite como tal.

2.2.1 Series geométricas

De los aspectos más significativos del trabajo de Saint-Vincent son sus aportaciones sobre series, que desarrolla en el segundo libro de su *Opus geometricum*. El trabajo sobre series surge como necesidad al resolver problemas geométricos, por eso es parte de su *Opus geometricum*. Este trabajo tiene como base las siguientes tres definiciones:

Definitio Prima. Geometricam seriem voco quantitatem finitam, diuifam secundùm continuationem cuiuscunque rationis datæ.[9]

Definitio Secunda. Progressio Geometrica est quotcunque terminorum secundùm eandem rationem continuatio.[10]

Definitio Tertia. Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato propriùs ad eum accedere poterit.[11]

Saint-Vincent llama progresión a una sucesión finita de términos de la serie, actualmente una suma parcial, y afirma que el *término*, el límite de la progresión es el final de la serie, que la progresión no puede alcanzar, aunque continué indefinidamente, pero que se puede aproximar a él más que cualquier cantidad dada. Plasma una clara idea de lo que es una serie y su límite. En términos actuales nos dice que una serie converge si la sucesión de sumas parciales converge. Esta concepción es el centro de la teoría de series que se desarrolló en el siglo XVII y XVIII.

Usando series, Saint-Vincent resolvió las paradojas de Zenon, mostró que los intervalos entre la tortuga y Aquiles, están en progresión geométrica, y en este caso, aunque la cantidad de intervalos sea infinita, la suma es finita. Para entender el movimiento se requiere del concepto de límite. Del mismo modo resuelve otro problema no resuelto hasta entonces, la cuadratura de la hipérbola.

---

[9] [Las] Series geométricas se pueden formar a partir de una longitud fija, dividida de acuerdo con la secuencia de cualquiera de las razones dadas.

[10] [Una] Progresión geométrica es la continuación de cualquier número de términos de acuerdo con la misma razón.

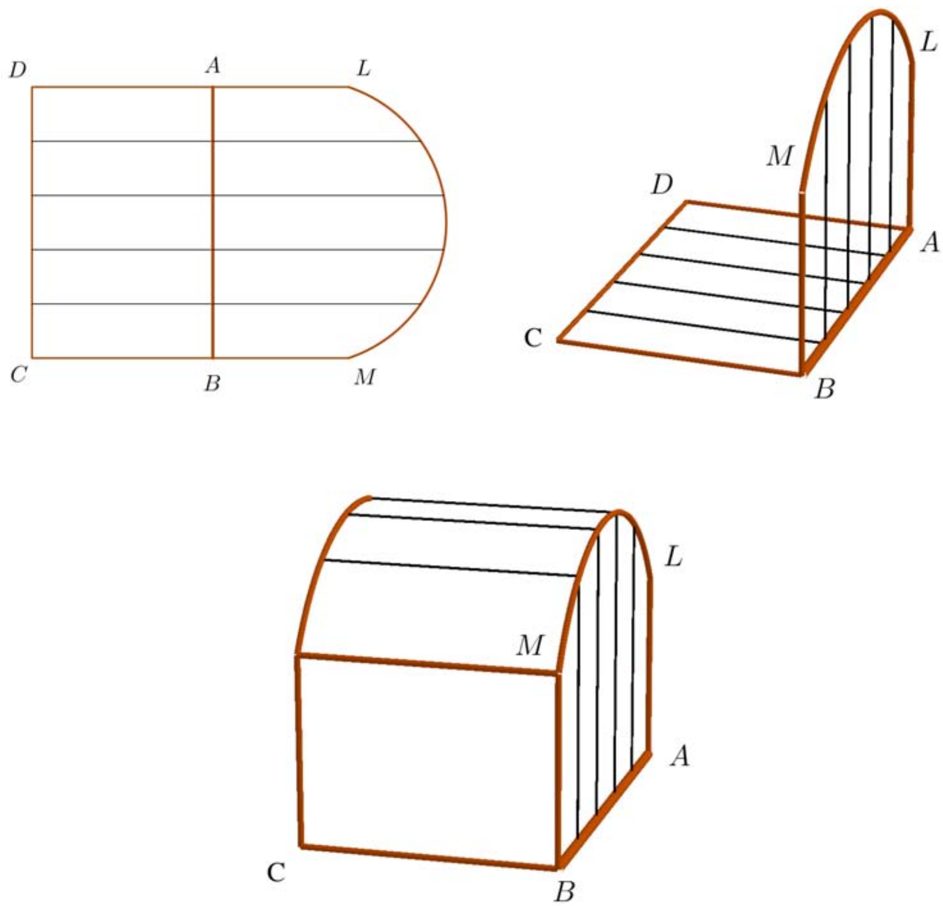
[11] El término de la progresión es el final de la serie, que [aunque] se nos permita continuar indefinidamente, ninguna progresión puede alcanzar, pero es posible llegar tan cerca como de cualquier intervalo dado.

Al trabajar el ángulo de contacto, el ángulo entre una curva y su tangente en el punto de contacto, encontró dificultades para progresar siguiendo las concepciones griegas, y entonces afirmó que en el campo de los infinitesimales los principios básicos de geometría dejan de aplicar, en particular, la noción común: *el todo es mayor que las partes*. Este cambio de paradigma es el que nos lleva a entender mejor el concepto de infinito, y posteriormente a desarrollar teorías como la de números transfinitos de Cantor. Del mismo modo, el desarrollo de series geométricas del trabajo de Saint-Vincent, posteriormente llamó la atención de Leibniz y fue el punto de partida para algunas de sus investigaciones matemáticas.

2.2.2 Integración geométrica

Una de las aportaciones de Saint-Vincent en su *Opus geometricum* es el desarrollo de su método de integración geométrica, su *ductus plani in planum* (*llevando el plano al plano*) es una de las más significativas e importantes para el subsecuente desarrollo del cálculo.

El *ductus plani in planum* se trata de construir un sólido, *ductus*, por medio de dos regiones planas F y G, de F en G, unidas por la misma *línea base* AB, trazando en dichas regiones rectas paralelas equidistantes, poniendo en ángulo recto la región F con la región G coincidiendo en la *línea base* AB, construyendo entonces todas las secciones sólidas que se formarían a partir de las paralelas trazadas. Por ejemplo, sea F la región $ABLM$ y G el rectángulo $ABCD$, con *línea base* AB, trazando rectas paralelas equidistantes en ambas regiones, la región F se hace ortogonal a la región G, y se construyen las secciones sólidas que se forman a partir de las paralelas trazadas, construyendo de este modo el sólido $ABCML$, el *ductus* de F en G.



Con este método es posible obtener sólidos particulares, como el cubo que es el *ductus* de un cuadrado en él mismo (*ductus plani in se –llevando el plano en sí mismo*-).

Con su método, Saint-Vincent puede determinar el volumen de sólidos a partir de las propiedades geométricas euclidianas de las regiones que lo formaron, considerando que el volumen del sólido es la suma de los volúmenes de las secciones sólidas que lo forman.

Los desarrollos de Saint-Vincent fueron base para el trabajo de diversos matemáticos, tales como: Pascal, Tschirnhaus, Jean-Charles de la Faille, Paul Guldin y Leibniz, éste último se ayudó del método de integración de Saint-Vincent para formular su cálculo integral.

La diferencia importante del *ductus plani in planum* de Saint-Vincent con los indivisibles de Cavalieri, es que Saint-Vincent construye los sólidos de secciones sólidas y aprovecha las propiedades euclidianas de las figuras planas con las que los forma, se trata entonces de, dado un sólido, determinar las regiones para construir el *ductus* que corresponda a dicho sólido. Mientras que Cavalieri considera el sólido dado, y lo piensa como formado por planos, y suma todos estos planos para determinar el volumen de dicho sólido. A este respecto el matemático André Tacquet afirmó:

> una magnitud geométrica está hecha de homogéneos – un sólido de sólidos, una superficie de superficies, una línea de líneas – no de heterogéneos o partes de menor dimensión como afirma Cavalieri. Líneas no pueden ser generadas de puntos, sólidos de superficies; y de hecho ninguna cantidad finita puede ser generada a partir de indivisibles (Citado en Baron, 1969, p. 147).

El Principio de Cavalieri que conocemos y aplicamos actualmente, que es resultado de la teoría de indivisibles, es válido porque ahora tenemos el concepto de límite, mediante el cual, de una infinidad de puntos, en el paso al límite, se puede obtener una recta. Pero sin este concepto no se puede refutar la afirmación de Tacquet.

Vemos que, desde los griegos, el problema que se está buscando resolver es calcular áreas y volúmenes, desarrollar métodos cada vez más generales para ello, y es en el alcance de esa generalidad que surge el concepto de límite como una necesidad, de la mano del cálculo de series, lo que también nos permite entender mejor el movimiento, y que posteriormente llevara a la concepción de la integral.

3. Algunas consideraciones finales

Algunos de los problemas que han interesado a los matemáticos por mucho tiempo son los de cuadraturas de figuras geométricas, y la búsqueda de su solución ha generado y requerido del desarrollo de nuevos conceptos, técnicas y métodos matemáticos. Conceptos como los infinitesimales, indivisibles y límite; técnicas como las infinitesimales usadas por Kepler, y el cálculo de series de Saint-Vincent; métodos como el de exhaución de Eudoxo, muy usado por Arquímedes, el método de indivisibles de Cavalieri y el *ductus* de Saint-Vincent.

Entre estos problemas está la cuadratura del círculo con regla y compás, que requirió deldesarrollo del álgebra para saber que es irresoluble. El problema de la cuadratura de la parábola lo resolvió Arquímedes usando el método de exhaución. En el siglo XVII Saint-Vicent resolvió la cuadratura de la hipérbola, problema que requirió previo el desarrollo de series que realiza el propio Saint-Vincent, en el que está presente la noción de infinito y la de límite.

Y es a mediados del mismo siglo XVII que Isaac Newton y Gottfried Leibniz, aprovechando el trabajo de los matemáticos que les precedieron, formularon los métodos y técnicas de lo que actualmente es el cálculo.

De los conceptos fundamentales del cálculo es el de límite, que fue concebido primero por Saint-Vincent. Él alcanza la noción de límite al estar trabajando sobre problemas geométricos, cuadraturas y cálculo de volúmenes.

De este modo, el concepto de límite surge y se desarrolla en la motivación e interés de resolver problemas geométricos sobre calcular áreas y volúmenes.

3.1. Necesidad del concepto de límite

El problema de determinar áreas ya lo tenían los griegos, y ellos podían resolverlo para una gran cantidad de figuras geométricas usando sus propiedades euclidianas, y también entendían los alcances de resolver el problema de este modo. Sabían que no se puede determinar áreas de círculos de esta forma, que se requieren otros elementos, como se evidencia en la proposición XII.2 *Círculos son uno al otro como los cuadrados de sus diámetros*, que es demostrada por Euclides usando el método de exhaución.

En el uso del método de exhaución está presente la noción de aproximación infinita, pero no es un método general para determinar cualquier área acotada por una curva, y el método por sí sólo no puede determinar si luego de la aproximación infinita se alcanzará algún resultado, es decir, no garantiza la existencia del límite. Cada aplicación del método es particular, para cada caso se requiere de un particular e ingenioso método de aproximación que en conjunto con la proposición X.1[12] garanticen que el límite va a existir, y de ahí deducir el resultado deseado.

Del mismo modo, como se detalló en el capítulo 1, los griegos entendían que no es lo mismo determinar áreas que determinar volúmenes, que para determinar volúmenes se requieren más que las propiedades euclidianas, incluso para figuras formadas de polígonos, como las pirámides.

Y en 1900, al resolver el tercer problema de Hilbert, Dehn demostró que el uso de otros métodos para el cálculo de volúmenes no es por limitaciones de conocimientos, habilidades o técnicas de los matemáticos griegos y posteriores, sino que son necesarios. La noción de límite es necesaria para resolver problemas geométricos de áreas y volúmenes.

3.2. Evolución del concepto de límite

Aunque los griegos abordaban los problemas de determinar áreas y volúmenes, en los *Elementos* de Euclides no se calculan, sólo se determinan comparaciones entre las figuras.

[12] Proposición X.1. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Los conceptos de área y volumen implican medir, comparar con una unidad de medida, para lo que se requiere la noción de unidad, pero ésta noción no está presente en los *Elementos*. Euclides trabaja con magnitudes, establece razones entre magnitudes, por ejemplo: entre círculos y sus diámetros, entre pirámides con alturas iguales y sus bases; él compara las figuras en sí, como magnitudes, con las magnitudes de algunos de sus elementos; contrario al cálculo de áreas y volúmenes que asocia a las figuras una medida, un número.

Todos los trabajos de aproximación infinita de Euclides, Arquímedes y Kepler requerían de una aproximación específica y particular para cada problema, porque dependían de la figura sobre la que se aproximaban, no contaban con un método de aproximación infinita general, independiente de la figura de aproximación.

El concepto de límite actual surge del interés y resolución de problemas geométricos de áreas y volúmenes. Además se requirió de conceptos como el de infinito, serie, medida y número; pero aunado a estos, y debido al rigor matemático actual, se requiere una concepción más para lograr el concepto de límite como tal: la completez de los reales. Esta última no era siquiera cuestionada en otras épocas, pero actualmente es fundamental para el concepto de límite.

Inicialmente se querían resolver problemas geométricos de áreas y volúmenes, y del trabajo y evolución sobre estos problemas, en el camino de lograr un método general para ello, surge el concepto de límite como una concepción necesaria, que permitió lograr la respuesta general a dichos problemas, que es precisamente la integral.

3.3. Sobre la enseñanza del concepto de límite

El cálculo es un área muy importante en el desarrollo histórico y conceptual de las matemáticas, y por ende también lo es en la enseñanza de las mismas. El concepto de límite es un concepto base en el desarrollo, surgimiento y concepción del cálculo, esto lo hace fundamental en la enseñanza de esta disciplina.

La noción de límite es importante en las matemáticas por ser parte del cálculo, pero también lo es por su desarrollo histórico y conceptual, que está intrínsecamente relacionado con otros importantes conceptos, como los ya mencionados: infinito, serie, medida y número. Cada uno de estos se puede concebir actualmente en un área distinta de las matemáticas: conjuntos, cálculo, teoría de la medida y aritmética, respectivamente.

Por tanto, para la enseñanza de las matemáticas se vuelve vital la correcta comprensión del concepto, su concepción, necesidad, implicaciones y relaciones con diferentes áreas de las matemáticas para poder enseñarlo. No se puede enseñar lo que no se sabe.

Una manera de comprender mejor la concepción y relaciones entre conceptos matemáticos es a través del estudio de su historia. Como se mostró en este trabajo con el concepto de límite, desde el interés en resolver problemas geométricos de áreas y volúmenes, se mostró su evolución, necesidad y su interrelación con otros conceptos y áreas de las matemáticas, a través de analizar diferentes problemas relacionados, dificultades existentes, soluciones generadas y la evolución histórica de éstas.

El estudio de historia de las matemáticas no necesariamente es para llevarla al salón de clases con los alumnos, pero sí es para la mejor comprensión de quien enseña. Este proceso muestra la evolución y necesidad de un concepto matemático, lo que evidencia su importancia y razón de ser, que a su vez debe detonar en una mejor enseñanza del mismo.

En la enseñanza es importante y necesario considerar y partir de los *conocimientos previos* de los alumnos para lograr *aprendizajes significativos*. En el caso de la enseñanza del concepto de límite a alumnos de bachillerato, se pueden considerar como *conocimientos previos* los propios problemas geométricos que se buscaban resolver, el cálculo de áreas y volúmenes; y buscar generar un *desequilibrio cognitivo*[13] en los estudiantes, al confrontarlos con la dificultad de resolver el problema no sólo para polígonos, evidenciar que sus conocimientos sobre áreas y volúmenes de polígonos, no son suficientes en una concepción más amplia del problema, como por ejemplo, el área de la elipse o una sección parabólica, incluso del círculo, y como respuesta a éste último presentar la trabajada por Kepler o de Arquímedes, desarrolladas en el capítulo previo.

En este sentido también se puede enfatizar al alumno la diferencia entre magnitud y número, y la forma como se trabajaban los problemas de áreas y volúmenes previo a la concepción del número. Este aspecto es significativo para mostrar a los estudiantes que las matemáticas evolucionan, crecen y se desarrollan, y que lo hacen por el trabajo de los matemáticos.

Este enfoque de enseñanza del concepto de límite permite mostrar al alumno de bachillerato la interrelación entre diferentes áreas de las matemáticas, como la geometría y el cálculo,

[13] Un desequilibrio cognitivo es un desajuste en la estructura conceptual o teórica de un alumno. Este desajuste lo obliga a analizar eso que generó el desajuste para poder reestructurar su cuerpo de conocimientos, y en el proceso integra el nuevo conocimiento relacionándolo con lo que ya sabía, *asimilación* y *acomodación*, es decir, un *aprendizaje significativo*.

mostrando que conceptos de este segundo resultan de generalizar problemas y concepciones geométricas, ya conocidas por los alumnos.

El estudio de la historia de un concepto matemático también permite comprender mejor algunas dificultades del mismo. La comprensión del concepto de límite es difícil, se puede notar en los conceptos que lo rodean: infinito, serie, medida, número e incluso completez. Para la comprensión del concepto, el alumno deberá tener algunas nociones sobre estos elementos teóricos.

Comprender la evolución de un concepto también permite entender las implicaciones que éste tiene, así como los resultados y teorías que se derivan o generan a partir de él, esto enriquece la comprensión de las matemáticas, que a su vez debe derivar en una mejor enseñanza de esta disciplina.

Esta investigación muestra la necesidad y evolución del concepto de límite a partir de problemas geométricos de calcular áreas y volúmenes, muestra la importancia del concepto dentro de la disciplina. Para enseñar la importancia de algo primero se tiene que entender tal cosa. En la enseñanza de las matemáticas es necesario que la importancia de los conocimientos matemáticos no sea únicamente curricular o para resolver problemas de aplicaciones, su importancia se debe entender y concebir como parte y forma de la construcción y evolución del propio conocimiento matemático.

Bibliografía

Arquímedes. (1987). *The Works of Archimedes.* (T. Heath, Ed.) London: Cambridge University Press Warehouse, Ave Maria Lane.

Ausbel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (2010). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2ª ed.). México: Trillas.

Baron, M. E. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* Oxford, England: Pergamon Press.

Do, N. (2006, mayo). Scissors congruence and Hilbert's third problem. *Gazette of the Australian Mathematical Society*, 81-87.

Euclides. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg* (2ª ed.). (T. Heath, Ed.) New York, EEUU: Dover Publications.

Fariña Gil, J. C. (2000, septiembre). Los 23 problemas de Hilbert . *Números*, 25-28.

Ferraro, G. (2008). *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s.* New York: Springer.

Hawking, S. (2006). *Dios creó los números. Los descubirmientos matemáticos que cambiaron la historia.* Barcelona, España: Crítica.

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics* (Vol. I). London, England: Oxford University Press.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8*, pp. 437-479.

Jullien, V. (Ed.). (2015). *Seventeenth- Century Indivisibles Revisited .* New York, EEUU: Springer International Publishing Switzerland.

Katz, V. J. (2009). *A Histori of Mathematics An Introduction* (3ª ed.). México, México: PEARSON.

Meskens, A. (1994, noviembre). Gregory of Saint Vincent: A Pioneer of the Calculus. *The Mathematical Association, 78*(483), 315-319.

Mueller, I. (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements.* Massachusetts, England: The MIT Press.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Moscú, URSS: Mir.

Saint-Vincent, G. d. (1647). *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni.* Amberes.

Solís, E. E. (2013). *Estrategia para la Comprensión e Interpretación Geométrica de la Derivada en el Bachillerato.* Tesis de Maestría, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM, Maestría en Docencia para la Educación Media Superior, en Matemáticas, México.

Yandell, B. h. (2002). *The Honors Class. Hilbert´s Problems and Their Solvers.* Massachusetts: AK Peters.

Zeeman, E. C. (2002, julio). On Hilbert's Third Problem. *The Mathematical Association, 86*(506), 241-247.