Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EXISTENCIA DE ONDAS PERIÓDICAS PLANAS ESTACIONARIAS EN MATERIALES VISCOELÁSTICOS CON EFECTO DE ESTRÉS-GRADIENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

EDGAR ITAMAR AVALOS ALMANZA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAMÓN GABRIEL PLAZA VILLEGAS

2017

CIUDAD UNIVERSITARIA, UNAM

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido Paterno:	Avalos
Apellido Materno:	Almanza
Nombres:	Edgar Itamar
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado:	Dr.
Nombres:	Ramón Gabriel
Apellido Paterno:	Plaza
Apellido Materno:	Villegas
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado:	Dra.
Nombre:	Laura
Apellido Paterno:	Ortiz
Apellido Materno:	Bobadilla
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado:	Dr.
Nombres:	Carlos Arturo
Apellido Paterno:	Vargas
Apellido Materno:	Guadarrama
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado:	Dr.
Nombres:	Renato Carlos
Apellido Paterno:	Calleja
Apellido Materno:	Castillo
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado:	Dr.
Nombre:	Carlos
Apellido Paterno:	García
Apellido Materno:	Azpeitia
7. Datos del trabajo escrito.	7. Datos del trabajo escrito.
Título:	Existencia de ondas periódicas planas estacionarias en materiales viscoelásticos con efecto de estrés-gradiente.
Número de páginas:	72 p

Agradecimientos

Quiero aprovechar este apartado para expresar mi agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

En primer lugar a mis padres, Irma y Neal, por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida ya que sin su esfuerzo y ánimos no podría encontrarme aquí, gracias por guíar mis pasos. A mi hermana, Vannia, por todo su cariño y aprecio. A mis abuelos, tíos, primos y a toda mi familia, gracias.

A todos los amigos que me acompañaron durante este periodo, ya sea que los conocí aquí o de antes, por todas las veces que me ayudaron.

También quiero agradecer al doctor Ramón Plaza por aceptar dirigir esta tesis. A mis sinodales, por tomarse el tiempo de leerla y por sus comentarios que ayudaron a mejorarla.

Gracias a la UNAM, pues el simple hecho de pertenecer a ella es un orgullo y un honor. A la Facultad de Ciencias, por alojarme y permitirme conocer a excelentes profesores.

Índice general

Agradecimientos **III**

Introducción **VII**

1. Preámbulo **1**

1.1. Fuerzas aplicadas 2

1.2. Principio de estrés de Euler y Cauchy 5

1.3. Teorema de Cauchy: el tensor de esfuerzos de Cauchy 6

1.4. El principio de trabajo virtual en la configuración deformada . 8

1.5. Los tensores de estrés de Piola-Kirchhoff 9

1.6. Las ecuaciones de equilibrio 11

1.7. Materiales elásticos 14

1.8. Indiferencia del marco de referencia 16

1.9. Viscosidad 18

2. Modelos de elasticidad con efecto de estrés-gradiente **19**

2.1. Efecto estrés-gradiente 19

2.2. Ecuaciones y modelos específicos 25

2.3. El sistema en una dimensión 26

3. Sistema de onda viajera **27**

3.1. Estructura Hamiltoniana 29

4. Teorema general de existencia **33**

4.1. Estructura del espacio 33

4.2. Formulación variacional del problema 37

4.3. Existencia de ondas periódicas estacionarias 44

5. Ejemplo: ondas periódicas en un fluido de van der Waals **51**

5.1. Fluido de van der Waals 51

Bibliografía **57**

Introducción

De entre las diversas aplicaciones que han tenido las ecuaciones diferenciales desde su nacimiento en el siglo XVII con el cálculo a manos de Isaac Newton (1642 - 1726/27) y Gottfried Leibntiz (1646 - 1716), los científicos han puesto particular empeño a la creación de modelos que les permitieran entender el mundo físico que les rodea, esto es, a describir y predecir eventos observables con el rigor matemático que dicha herramienta proporciona; tan es así, que podemos enlistar entre los muchos nombres de personas que han trabajado en dicha tarea a algunos tan sobresalientes como Daniel Bernoulli (1700 - 1782), Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph Lagrange (1736 - 1813), entre otros. Sin embargo, la teoría está lejos de estar completa; el número de ecuaciones diferenciales para las cuales podemos describir sus soluciones es más bien pequeño, por lo que cada año surgen nuevos resultados que buscan extender el número de ecuaciones que podemos entender; tan sólo en 2010, sus trabajos con la ecuación de Boltzmann le valieron a Cédric Villani la medalla Fields, el mayor premio que se le puede otorgar a un matemático.

Este trabajo se basa en los resultados encontrados por Jinghua Yao en [13, 14], donde se examina la existencia de soluciones de tipo onda periódica plana para modelos de elasticidad con efecto de estrés-gradiente y se busca establecer condiciones para garantizar la existencia de soluciones no triviales de este tipo. La inclusión del efecto de estrés-gradiente, muchas veces omitido debido a la complejidad que agrega, nos hace abordar el problema bajo la óptica del cálculo de variaciones, pues nos permite dar un resultado general para sistemas Hamiltonianos incluso de dimensión mayor que uno, cosa que no se puede llevar a cabo con un análisis de fases planar usual. Por supuesto, esta generalización no viene sin un costo, pues nos tendremos que restringir al caso en que las deformaciones van en una sóla dirección coordenada.

Además de esclarecer algunos de los resultados encontrados originalmente por Yao, uno de los aportes nuevos que se logran es presentar un ejemplo original de un tipo fluido (fluido de van der Waals) que cumple con las hipótesis del teorema de existencia de soluciones.

En el capítulo 1 proporcionamos una introducción a la teoría de deformaciones en medios continuos, todo con el fin de presentar los conceptos físicos escenciales que yacen detrás de nuestro análisis matemático. Aquí definimos el tensor de esfuerzos de Cauchy y el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, piezas fundamentales para establecer la ecuación básica del modelo que abordaremos. Así mismo definimos lo que significa que un material sea elástico (de nuevo, haciendo uso del tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff) y viscoso, pues son el tipo de materiales con los que trabajaremos. El lector familiarizado con la teoría de medios continuos puede omitir este capítulo.

En el capítulo 2 presentamos la ecuación general que modela a un cuerpo elástico con efecto de estrés gradiente sin variaciones en temperatura y explicamos los distintos términos que aparecen en ella así como las fuerzas que representan. Posteriormente deducimos el modelo planar específico sobre el que trabajaremos, donde una deformación depende únicamente de una dirección coordenada.

En el capítulo 3 examinamos algunas condiciones que debe cumplir el modelo introducido en el capítulo 2 para admitir una solución de tipo onda viajera periódica. Más adelante presentamos una clase especial de ecuaciones llamadas Hamiltonianas y concluimos que nuestro modelo pertenece a este tipo de ecuaciones; haciendo uso de esta estructura adicional deducimos que, para encontrar soluciones como queremos, necesariamente debemos pedir que la velocidad de las ondas viajeras sea cero, con lo cual nos acerca más a obtener el resultado deseado.

En el capítulo 4 definimos el espacio de Sobolev sobre el cual trabajaremos y en donde se encontrarán las soluciones que deseamos. Por último haremos uso de herramientas del cálculo de variaciones para demostrar el teorema general de existencia de soluciones al problema planteado al final del capítulo 2 (ver Teorema 4.21).

En el capítulo 5 introducimos a los fluidos de van der Waals y vemos que, para el caso en el que tomamos viscocidad y capilaridad constantes, podemos aplicar la teoría que desarrollamos.

Capítulo 1

Preámbulo

En este capítulo daremos una breve introducción sobre los conceptos básicos de la teoría de medios continuos. En primer lugar estableceremos matemáticamente lo que es una deformación de un cuerpo tridimensional así como las fuerzas que se generan de ella; posteriormente definiremos el tensor de esfuerzos de Cauchy (principio fundamental de la mecánica de medios continuos) y enunciaremos algunos axiomas y teoremas sobre el mismo. Después construiremos el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, con el cual podremos expresar de mejor manera los efectos de una deformación sobre un cuerpo y que, además, usaremos para definir lo que significa que un material sea elástico. Finalmente damos una idea básica de lo que es la viscosidad, con lo que quedan definidos los materiales viscoelásticos los cuales son el objeto de estudio de este trabajo. Se puede encontrar más información sobre estos temas en [6], [7].

1.1. Fuerzas aplicadas

A lo largo de este texto consideraremos Ω como un subconjunto acotado y conexo de $\mathbb{R}^3$ con frontera suficientemente suave (suposiciones específicas se realizaran dependiendo de las necesidades). Pensaremos al conjunto Ω como el volumen ocupado por un cuerpo elástico con temperatura y densidad constantes "antes de ser deformado"; por esta razón, al conjunto Ω se le llama **configuración de referencia**.

Definición 1.1. Una **deformación** de la configuración de referencia Ω es una función $\xi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ que es suficientemente suave, inyectiva excepto posiblemente en la frontera del conjunto Ω y que preserva la orientación.

Observación 1.2. La razón por la cual en la definición anterior permitimos que una deformación no sea inyectiva en la frontera del conjunto es que, si bien no queremos que hayan autointersecciones durante la deformación, no hay ninguna restricción física que le impida tocarse "ligeramente" a sí mismo.

En lo siguiente denotaremos por x a un punto genérico de Ω y por $\xi(x,t)$ al lugar en que termina el punto x al tiempo t bajo la deformación.

Definición 1.3. En cada punto del conjunto Ω definimos el **gradiente de deformación** como:

$$\mathrm{F} \coloneqq \nabla_x \xi \coloneqq \begin{pmatrix} \partial_1 \xi_1 & \partial_2 \xi_1 & \partial_2 \xi_1 \\ \partial_1 \xi_2 & \partial_2 \xi_2 & \partial_3 \xi_2 \\ \partial_1 \xi_3 & \partial_2 \xi_3 & \partial_3 \xi_3 \end{pmatrix}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $\partial_i = \partial / \partial x_i$. El gradiente de deformación mide el cambio en la forma así como la rotación del material. Podemos pensar a F como un elemento de $\mathbb{R}^9$.

Ya que por definición una deformación debe preservar la orientación, el determinante del gradiente de deformación satisface la **condición de preservación de la orientación**

$$\det F > 0.$$

Definición 1.4. Dada una configuración de referencia Ω y una deformación ξ, al conjunto $\xi(\Omega, t)$ se le conoce como **configuración deformada** al tiempo t y la denotaremos por $\Omega^{\xi,t}$.

Asumiremos que, en la configuración deformada $\Omega^{\xi,t}$ asociada a una deformación arbitraria Ω, el cuerpo se encuentra sometido a **fuerzas aplicadas** de dos tipos:

- **fuerzas aplicadas de cuerpo** al tiempo t, definidas por un campo vectorial
$$\boldsymbol{f}^{\xi,t} := \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$$
llamada la **densidad de las fuerzas aplicadas de cuerpo** por unidad de volumen en la configuración deformada;

- **fuerzas aplicadas de superficie** al tiempo t, definidas por un campo vectorial
$$\mathbf{g}^{\xi,t} : \Gamma_1^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$$
en $\Gamma_1^{\xi,t}$ subconjunto da^{ξ}-medible de la frontera $\Gamma^{\xi,t} := \partial\Omega^{\xi,t}$ llamada

la **densidad de las fuerzas aplicadas de superficie** por unidad de área en la configuración deformada.

Así, $\Omega^{\xi,t}$ está sometido a fuerzas en su interior y en la frontera. De igual manera denotaremos por $\rho^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}$ a la densidad de masa en la configuración deformada; así la masa de cada subconjunto $d\xi(x,t)$-medible $A^{t,\xi}$ de $\Omega^{\xi,t}$ está dada por la integral $\int_{A^{\xi,t}} \rho^{\xi,t}(\xi(x,t))d\xi(x,t)$. Asumiremos que, para todo $\xi(x,t)$ en $\Omega^{\xi,t}$

$$\rho^{\xi,t}(\xi(x,t)) > 0.$$

Las fuerzas aplicadas de cuerpo pueden ser definidas equivalentemente por su *densidad* $\mathbf{b}^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$ por unidad de masa en la configuración deformada, que se vincula con la densidad $\boldsymbol{f}^{\xi,t}$ por medio de la ecuación

$$\boldsymbol{f}^{\xi,t} = \rho^{\xi,t}\mathbf{b}^{\xi,t}.$$

Las fuerzas aplicadas describen la acción del mundo exterior sobre el cuerpo. Una fuerza elemental $\boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t))d\xi(x,t)$ es ejercida en el volumen elemental $d\xi(x,t)$ en cada punto $\xi(x,t)$ de la configuración deformada. De igual manera, se ejerce una fuerza $\mathbf{g}^{\xi,t}(\xi(x,t))da^{\xi,t}$ sobre el área elemental $da^{\xi,t}$ en cada punto $\xi(x,t)$ en el subconjunto $\Gamma_1^{\xi,t}$ de la frontera de la deformación de configuración. Por ejemplo, en el caso de un campo gravitatorio las fuerzas aplicadas de cuerpo están dadas por:

$$\boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t)) = -g\rho^{\xi,t}(\xi(x,t))\boldsymbol{e}_3,$$

donde g denota la constante gravitacional y $\boldsymbol{e}_3$ es el vector unitario canónico

$\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$.

1.2. Principio de estrés de Euler y Cauchy

El siguiente axioma es el pilar sobre el que se funda la mecánica continua para problemas estáticos.

Axioma 1.5. Consideremos un cuerpo ocupando una configuración deformada $\Omega^{\xi,t}$ y sujeto a fuerzas aplicadas representadas por las densidades $\boldsymbol{f}^{\xi,t} := \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{g}^{\xi,t} : \Gamma_1^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$, entonces existe una función

$$\boldsymbol{t}^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \times \mathbb{S}_2 \to \mathbb{R}^3, \text{ donde } \mathbb{S}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; |\mathbf{v}| = 1\},$$

tal que

(a) Para cualquier subdominio $A^{\xi,t}$ de $\Omega^{\xi,t}$ y en cualquier punto $\xi(x,t)$ en $\Gamma_1^{\xi,t} \cap \partial A^{\xi,t}$ donde $\mathbf{n}^{\xi,t}$ el vector normal unitario exterior a $\Gamma_1^{\xi,t} \cap \partial A^{\xi,t}$ exista,
$$\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t), \mathbf{n}^{\xi,t}) = \mathbf{g}^{\xi,t}(\xi(x,t)).$$

(b) **Axioma de balance de fuerza:** para cualquier subdominio $A^{\xi,t}$ de $\Omega^{\xi,t}$,
$$\int_{A^{\xi,t}} \boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t))d\xi(x,t) + \int_{\partial A^{\xi,t}} \boldsymbol{t}^{\xi,t}(x, \mathbf{n}^{\xi,t})da^{\xi,t} = 0,$$
donde $\mathbf{n}^{\xi,t}$ denota el vector normal unitario exterior a lo largo de $\partial A^{\xi,t}$.

(c) **Axioma de balance de momento:** para cualquier subdominio $A^{\xi,t}$

de $\Omega^{\xi,t}$

$$\int_{A^{\xi,t}} \mathbf{o}\xi(x,t)\wedge \boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t))d\xi(x,t)+\int_{\partial A^{\xi,t}} \mathbf{o}\xi(x,t)\wedge \boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\mathbf{n}^{\xi,t})da^{\xi,t}=0.$$

Aquí, $\wedge$ representa el producto exterior de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{ox}$ el vector asociado al punto x.

Así, este principio nos dice tres cosas: primero, asegura la existencia de fuerzas elementales sobre la frontera de cualquier subdominio de la configuración de referencia; segundo, dichas fuerzas dependen únicamente del vector normal $\mathbf{n}^{\xi,t}$ y no de la geometría particular que puedan tener los subdominios; tercero, que cualquier subdominio de la configuración de referencia está en equilibrio estático en el sentido de que las fuerzas actuantes están balanceadas.

Al vector $\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\mathbf{n}^{\xi,t})$ se le conoce como el **vector de estrés de Cauchy**.

1.3. Teorema de Cauchy: el tensor de esfuerzos de Cauchy

Teorema 1.6. *Supongamos que la densidad de fuerza aplicada de cuerpo $\boldsymbol{f}^{\xi,t}:\Omega^{\xi,t}\to\mathbb{R}^3$ es continua y que el campo vectorial de estrés de Cauchy*

$$\boldsymbol{t}^{\xi,t}:(\xi(x,t),\boldsymbol{n})\in\Omega^{\xi,t}\times\mathbb{S}\to\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\boldsymbol{n})\in\mathbb{R}^3$$

es continuamente diferenciable con respecto de la variable $\xi(x,t)$ en $\Omega^{\xi,t}$ para cada $\boldsymbol{n}$ en $\mathbb{S}_1$ y continuo con respecto a la variable $\boldsymbol{n}$ en $\mathbb{S}_1$ para cada $\xi(x,t)$

en $\Omega^{\xi,t}$. Entonces los axiomas de balance de fuerza y momento implican que existe un campo tensorial continuamente diferenciable

$$\boldsymbol{T}^{\xi,t} : \xi(x,t) \in \Omega^{\xi,t} \to \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t)) \in \mathbb{M}^3,$$

tal que el vector de estrés de Cauchy satisface

$$\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t), \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\boldsymbol{n}, \ \forall \ \xi(x,t) \in \Omega^{\xi,t}, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{S}_1,$$

y además,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}^{\xi} \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t)) &= \boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t)) \ \textit{para todo} \ \xi(x,t) \in \Omega^{\xi,t}, \\ \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t)) &= \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))^T \ \textit{para todo} \ \xi(x,t) \in \Omega^{\xi,t}, \\ \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\boldsymbol{n}^{\xi,t} &= \boldsymbol{g}^{\xi,t}(\xi(x,t)) \ \textit{para todo} \ \xi(x,t) \in \Gamma_1^{\xi,t}, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{n}^{\xi,t}$ es el vector normal unitario exterior a lo largo de $\Gamma_1^{\xi,t}$.

Así, el teorema anterior nos aporta tres resultados de gran importancia: primero que el vector de estrés de Cauchy es lineal con respecto a su segunda entrada; segundo, que el tensor $\mathbf{T}^{\xi,t}$ es simétrico; nos brinda una relación, a través de ecuaciones diferenciales parciales, entre el tensor $\mathbf{T}^{\xi,t}$ y $\boldsymbol{f}^{\xi,t}$, $\mathbf{g}^{\xi,t}$. Se puede encontrar una demostración del teorema en [6]. Al tensor $\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))$ se le conoce como el **tensor de esfuerzos de Cauchy** en el punto $\xi(x,t)$ de la configuración deformada $\Omega^{\xi,t}$. Los elementos de la *j-ésima* entrada (columna) de este tensor corresponden a los componentes del vector de estrés de Cauchy $\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t), \mathbf{n})$ eligiendo a $\mathbf{n}$ como $\boldsymbol{e}_j$.

1.4. El principio de trabajo virtual en la configuración deformada

El siguiente resultado nos permite dar una equivalencia entre el problema con valores en la frontera del tensor de esfuerzos de Cauchy y una formulación variacional. De nuevo, se puede encontrar una demostración en [6].

Teorema 1.7. *El problema con valores en la frontera*

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{div}^{\xi}\, \boldsymbol{T}^{\xi,t} &= \boldsymbol{f}^{\xi,t} \ \textit{en}\ \Omega^{\xi,t}, \\ \boldsymbol{T}^{\xi,t}\boldsymbol{n}^{\xi,t} &= \boldsymbol{g}^{\xi,t} \ \textit{sobre}\ \Gamma^{\xi,t}, \end{aligned}$$

es formalmente equivalente a las ecuaciones variacionales:

$$\int_{\Omega^{\xi,t}} \boldsymbol{T}^{\xi,t} \boldsymbol{:} \nabla^{\xi}\theta^{t,\xi} d\xi(x,t) = \int_{\Omega^{\xi,t}} \boldsymbol{f}^{\xi,t} \cdot \theta^{t,\xi} d\xi(x,t) + \int_{\Gamma^{\xi,t}} \boldsymbol{g}^{\xi,t} \cdot \theta^{t,\xi} d\xi(x,t)$$

válidas para cualquier campo vectorial suficientemente diferenciable $\theta^{t,\xi} : \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$ *que satisfaga*

$$\theta^{t,\xi} = 0 \ \textit{en}\ \Gamma_0^{\xi,t} \coloneqq \Gamma^{\xi,t} - \Gamma_1^{\xi,t}.$$

En la ecuación anterior "**:**" denota el producto interior de matrices ($\mathbf{A}\boldsymbol{:}\mathbf{B} \coloneqq \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$). Se puede ver una demostración de esto en [6].

1.5. Los tensores de estrés de Piola-Kirchhoff

Nos interesa determinar el campo de deformación y el tensor de esfuerzos de Cauchy que surgen en un cuerpo sujeto a un sistema dado de fuerzas aplicadas, dejándolos expresados en variables lagrangianas x dadas y no en variables eulerianas $\xi(x,t)$ que no conocemos.

Recordemos que la transformada de Piola $\mathbf{T} : \bar{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ de un campo tensorial $\mathbf{T}^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{M}^3$ lleva a dicho campo en uno situado en la configuración de referencia haciendo

$$\mathbf{T} = (\det \nabla_x \xi(t,x))\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\nabla_x \xi(t,x)^{-T}.$$

Así, aplicaremos esta transformada al tensor de esfuerzos de Cauchy $\mathbf{T}^{\xi,t}$, en cuyo caso a la transformada de Piola $\mathbf{T}$ se le conoce como el **primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff**. La principal ventaja de esta transformada es que induce una relación particularmente simple entre las divergencias de ambos tensores:

$$\mathbf{div}\mathbf{T}(x) = (\det \nabla_x \xi(t,x))\mathbf{div}^{\xi}\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t)).$$

Como una consecuencia, las ecuaciones de equilibrio sobre la configuración deformada se transformarán en ecuaciones sobre la configuración de referencia que tendrán una "estructura de divergencia" similar.

De igual manera podremos transformar el vector de estrés de Cauchy $\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t), \mathbf{n}^{\xi,t}) = \mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\mathbf{n}^{\xi,t}$ en un vector $\mathbf{t}(x,\mathbf{n})$ de tal manera que la relación

$$\mathbf{t}(x,\mathbf{n}) = \mathbf{T}(x)\mathbf{n}$$

se conserve, donde $\mathbf{T}(x)$ es el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff y $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}^{\xi,t}$ son los vectores normales correspondientes en los puntos x y $\xi(x,t)$ sobre las fronteras de los subdominios A y $A^{\xi,t}$ respectivamente. Notemos que no hay ambigüedad en el proceso pues el vector normal $\mathbf{n}^{\xi,t}$ en el punto $\xi(x,t)$ es el mismo para *todo* subdominio cuya frontera pase por el punto x con $\mathbf{n}$ como vector normal ahí. En vista de la relación $\mathbf{T}(x)\mathbf{n}da = \boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\mathbf{n}^{\xi,t})da^{\xi,t}$ que surge de la transformada de Piola, es suficiente definir el vector $\mathbf{t}(x,\mathbf{n})$ con la relación:

$$\mathbf{t}(x,\mathbf{n})da = \boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\mathbf{n}^{\xi,t})da^{\xi,t}.$$

Como $\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\mathbf{n}^{\xi,t}) = \mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\mathbf{n}^{\xi,t}$ por el teorema de Cauchy, entonces se cumple la relación deseada $\mathbf{t}(x,\mathbf{n}) = \mathbf{T}(x)\mathbf{n}$.

Al vector $\mathbf{t}(x,\mathbf{n})$ se le llama el **primer vector de estrés de Piola-Kirchhoff** en el punto x de la configuración de referencia a lo largo del elemento de superficie orientada con normal $\mathbf{n}$.

Mientras que el tensor de esfuerzos de Cauchy $\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))$ es simétrico (Teorema 1.6), el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff $\mathbf{T}(x)$ en general no lo es; en su lugar tenemos:

$$\mathbf{T}(x)^T = \nabla_x\xi(t,x)^1\mathbf{T}(x)\nabla_x\xi(t,x)^{-T}.$$

Sin embargo, es deseable definir un tensor de esfuerzos simétrico en la configuración de referencia, escencialmente porque así la ecuación constitutiva en la configuración de referencia adopta una forma más simple. Más específicamente, definimos el **segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff** $\Sigma(x)$ haciendo

$$\Sigma(x) = \nabla_x \xi(x)^{-1}\mathbf{T}(x) = (det\nabla_x \xi(x))\nabla_x \xi(x)^{-1}\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\nabla_x \xi(x)^{-T}.$$

Notemos que ambos tensores de estrés de Piola-Kirchhoff $\mathbf{T}(x)$ y $\Sigma(x)$ dependen de la deformación ξ, primero por la transformada de Piola en sí y en segundo lugar porque el tensor de esfuerzos de Cauchy también depende de ξ.

1.6. Las ecuaciones de equilibrio

Nos queda trasformar las densidades de fuerza aplicada que aparecen en las ecuaciones de equilibrio sobre la configuración deformada: primero, con la densidad $\boldsymbol{f}^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$ de fuerza aplicada de cuerpo por unidad de volumen en la configuración deformada, asociamos el campo vectorial $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de tal manera que

$$\boldsymbol{f}(x)dx = \boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t))d\xi(x,t) \text{ para todo } \xi(x,t) \in \Omega^{\xi,t}$$

donde dx y $d\xi(x,t)$ denotan los elementos de volumen correspondientes. Como $d\xi(x,t) = det\nabla_x \xi(x)dx$, obtenemos

$$\boldsymbol{f}(x) = (det\nabla_x \xi(x))\boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t)),$$

así, el vector $\mathbf{f}(x)$ depende de la deformación ξ, vía el factor $det\nabla_x\xi(x)$ por un lado y vía la posible dependencia de la densidad $\boldsymbol{f}^{\xi,t}$ de la deformación por otro lado.

El campo de vectores $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mide la **densidad de la fuerza aplicada de cuerpo** por unidad de volumen en la configuración de referencia; el vector $\boldsymbol{f}(x)$ está definido de tal modo que el vector elemental $\boldsymbol{f}(x)dx$ sea igual a la fuerza de cuerpo elemental $\boldsymbol{f}^{\xi,t}(\xi(x,t))d\xi(x,t)$ que actúa en el elemento volumen correspondiente $d\xi(x,t)$ en el punto $\xi(x,t)$.

Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ la densidad de masa en la configuración de referencia. Expresando que la masa de los volúmenes dx y $d\xi(x,t) = det\nabla_x\xi(x)dx$ es la misma, encontramos que las densidades de masa $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\rho^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \to \mathbb{R}$ se relacionan por la ecuación

$$\rho(x) = det\nabla_x\xi(x)\rho^{\xi,t}(\xi(x,t)).$$

Esta relación muestra además que, sin realizar ninguna consideración sobre la preservación de la orientación, el Jacobiano $det\nabla_x(x)$ no se debe anular en una deformación real, pues una densidad de masa siempre es mayor que cero, al menos macroscópicamente.

Luego, si definimos la *densidad* $\mathbf{b} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de la fuerza aplicada de cuerpo por unidad de masa en la configuración de referencia haciendo

$$\boldsymbol{f}(x) = \rho(x)\mathbf{b}(x) \text{ para todo } x \in \Omega,$$

se sigue que las densidades de la fuerza aplicada de cuerpo por unidad de masa se encuentran relacionadas por

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}^{\xi,t}(\xi(x,t)).$$

En segundo lugar, con el fin de transformar la condición de forntera $\mathbf{T}^{\xi,t}\mathbf{n}^{\xi,t} = \mathbf{g}^{\xi,t}$ sobre $\Gamma_1^{\xi,t} = \xi(\Gamma_1, t)$ en una condición similar sobre Γ_1, es suficiente usar el primer vector de estrés de Piola-Kirchhoff, el cual precisamente se definió con este propósito. Con la densidad $\mathbf{g}^{\xi,t} : \Gamma_1^{\xi,t} \to \mathbb{R}^3$ de la fuerza aplicada de superficie por unidad de área en la configuración deformada, asociamos el campo vectorial $\mathbf{g} : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{g}(x)da = \mathbf{g}^{\xi,t}(\xi(x,t))da^{\xi,t} \text{ para todo } \xi(x,t) \in \Gamma_1^{\xi,t}$$

donde da y $da^{\xi,t}$ son los elementos de área correspondientes. Por la relación de la transformada de Piola, el vector $\mathbf{g}(x)$ está dado por

$$\mathbf{g}(x) = det\nabla_x\xi(x)|\nabla_x\xi(x)^{-T}\mathbf{n}|\mathbf{g}^{\xi,t}(\xi(x,t))$$

Notemos que el vector $\mathbf{g}(x)$ depende de la deformación ξ vía, la formula que relaciona los elementos de área en una mano, y vía la posbile dependencia de la densidad $\mathbf{g}^{\xi,t}$ de la deformación ξ en la otra. El campo vectorial $\mathbf{g} : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ mide la **densidad de la fuerza aplicada de superficie** por unidad de área en la configuración de referencia; está definido de tal manera que el vector elemental $\mathbf{g}(x)da$ es igual a la fuerza de superficie elemental $\mathbf{g}^{\xi,t}(\xi(x,t))da^{\xi,t}$ que actúa en el elemento de área correspondiente $da^{\xi,t}$ en el punto $\xi(x,t)$.

Ahora podemos establecer el análogo al teorema (1.7) sobre la configuración de referencia:

Teorema 1.8. *El primer tensor de esfuerzos de Piola Kirchhoff*

$$\boldsymbol{T}(x) = (\det \nabla_x \xi(x))\, \boldsymbol{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))\nabla_x \xi(x)^{-T}$$

satisface las siguientes ecuaciones en la configuración de referencia

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{div}\ \boldsymbol{T}(x) &= \boldsymbol{f}(x),\ x \in \Omega, \\ \nabla_x \xi(x)\, \boldsymbol{T}^{-T} &= \boldsymbol{T}(x)\nabla_x \xi(x)^T,\ x \in \Omega, \\ \boldsymbol{T}(x)\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{g}(x),\ x \in \Gamma_1, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{f}dx = \boldsymbol{f}^{\xi,t} d\xi(x,t),\ \boldsymbol{g}da = \boldsymbol{g}^{\xi,t} da^{\xi,t}$.

1.7. Materiales elásticos

Si consideramos las ecuaciones de equilibrio en la configuración de referencia (escritas en términos del primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff) como parte de un problema con valores en la frontera cuyas incógnitas son los seis componentes del tensor tensor de esfuerzos (tomando $\nabla_x \xi \mathbf{T}^T = \mathbf{T}\nabla_x \xi^T$) y los tres componentes de la deformación, queda claro que hay una discrepancia entre el número total de funciones desconocidas (nueve) y el número de ecuaciones disponibles (tres). Así, si queremos el modelo quede bien definido debemos proveer seis ecuaciones más.

Que el modelo matemático desarrollado hasta ahora esté incompleto también se hace evidente con fundamento físico. Mientras que las ecuaciones de equilibrio son válidas sin importar el material particular del que está hecho el cuerpo en consideración, está claro que la naturaleza subyacente del material debe ser tomada en cuenta. Para el problema que abordaremos a partir del próximo capítulo consideraremos exclusivamente una categoría de materiales, para los cuales las ecuaciones adicionales requeridas pueden ser suministradas de una forma muy sencilla, de acuerdo a la suposición de que el tensor de esfuerzos de Cauchy $\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))$ queda completamente determinado por el gradiente de deformación $\nabla_x \xi$ en el punto correspondiente.

Así, decimos que un material es **elástico** si existe un mapeo

$$\hat{\mathbf{T}}^M : (x, \mathbf{M}) \in \Omega \times \mathbb{M}^3{}_+ \to \hat{\mathbf{T}}^M(x, \mathbf{M}) \in \mathbb{S}^3,$$

llamado la **función de respuesta para el estrés de Cauchy**, tal que en cualquier configuración deformada que ocupe un cuerpo compuesto de este material, el tensor de esfuerzos de Cauchy $\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t))$ en cualquier punto $\xi(x,t)$ de la configuración deformada está relacionado con el gradiente de deformación $\nabla_x \xi(x)$ en el punto x correspondiente por la ecuación

$$\mathbf{T}^{\xi,t}(\xi(x,t)) = \hat{\mathbf{T}}^M(x, \nabla_x \xi(x,t)).$$

Esta relación es llamada la **ecuación constitutiva** del material. Recordamos que $\mathbb{M}^3{}_+$ denota el conjunto de todas las matrices de orden 3 cuyo determinante es mayor a cero (el determinante del gradiente de deformación es mayor a cero por definición) y que $\mathbb{S}^3$ denota el conjunto de todas las matrices simétricas de orden 3 (el tensor de esfuerzos de Cauchy siempre es simétrico).

Por definición, la función de respuesta en cada punto de un material elástico debe estar definido para toda las matrices $\mathbf{M}$ en $\mathbb{M}^3{}_+$. Implícitamente en la definición se encuentra la propiedad de que, dado cualquier punto x en Ω y una matriz $\mathbf{M}$ en $\mathbb{M}^3{}_+$, existe una deformación ξ del cuerpo que satisface $\nabla_x \xi(x,t) = \mathbf{M}$ (como resultado de la aplicación de fuerzas de cuerpo y condiciones en la frontera apropiadas, las cuales se dejan sin especificar).

Observemos que, en virtud de la relación $\mathbf{T} = (det \nabla_x \xi)\mathbf{T}^{\xi,t} \nabla_x \xi^{-T}$ que relaciona al primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff con el tensor de esfuerzos de Cauchy, existe un mapeo

$$\hat{\mathbf{T}} : \Omega \times \mathbb{M}^3{}_+ \rightarrow \mathbb{M}^3$$

dado por

$$\hat{\mathbf{T}}(x, \mathbf{M}) = (det\mathbf{M})\hat{\mathbf{T}}^M(x, \mathbf{M})\mathbf{M}^{-T},$$

tal que

$$\mathbf{T}(x) = \hat{\mathbf{T}}(x, \nabla_x \xi(x,t)) \text{ para todo } x \in \Omega.$$

El tipo de materiales elásticos aquí descritos se conocen formalmente como materiales Cauchy-elásticos. Si bien está definición es abstracta y no existen materiales reales que cumplan exactamente con la definición, hay algunos que se pueden suponer de este tipo para su análisis.

1.8. Indiferencia del marco de referencia

Un axioma general de física afirma que cualquier "cantidad observable" i.e., cualquier material con una característica intrínseca como una densidad de masa,un vector de aceleración, etc., debe ser independiente de la base ortogonal particular en la cual es calculada. Vamos a aplicar esto a materiales elásticos, donde la cantidad "observable" calculada a través de una ecuación constitutiva es el vector de estrés de Cauchy.

Axioma 1.9 (axioma de indiferencia del marco de referencia)**.** Supongamos que la configuración deformada $\Omega^{\xi,t}$ es rotada en otra configuración deformada $\Omega^{\varphi,t'}$, i.e., $\varphi = \mathbf{Q}\xi$ para alguna $\mathbf{Q}$ en $\mathbb{O}^3_+$ (el grupo de rotaciones en R^3). Entonces

$$\mathbf{t}^{\varphi,t'}(\varphi(x,t'),\mathbf{Qn}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{t}^{\xi,t}(\xi(x,t),\mathbf{n}) \text{ para todo } x \in \Omega, \mathbf{n} \in \mathbb{S}_1,$$

donde $\mathbf{t}^{\varphi,t'} := \Omega^{\varphi,t'} \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{t}^{\xi,t} : \Omega^{\xi,t} \times \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^3$ denotan los campos vectoriales del estrés de Cauchy en las configuraciones deformadas $\Omega^{\varphi,t'}$ y $\Omega^{\xi,t}$ respectivamente.

Teorema 1.10. *La función de respuesta* $\hat{\boldsymbol{T}}^M : \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$ *para el estrés de Cauchy satisface el axioma de indiferencia del marco de referencia si y sólo si, para todo* $x \in \Omega$*,*

$$\hat{\boldsymbol{T}}^M(x,\boldsymbol{QM}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}^M(x,\boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}^{\hat{\boldsymbol{T}}^M} \text{ para todo } \boldsymbol{M} \in \mathbb{M}^3_+, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Expresada en término de la función de respuesta $\hat{\mathbf{T}}^M$ para el primer estrés de Piola-Kirchhoff, la equivalencia anterior se vuelve

$$\hat{\mathbf{T}}^M(x,\mathbf{QM}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}^M(x,\mathbf{M}) \text{ para todo } \mathbf{M} \in M^3_+,\ \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

1.9. Viscosidad

Por último diremos que significa que un fluido sea viscoso, con lo cual terminaremos la caracterización de los materiales sobre los cuales trabajaremos. La viscocidad en un fluido mide la resistencia interna que presenta el mismo a ser deformado y se crea por la fuerzas de fricción interna entre las partículas éste. De igual manera que con el tensor de esfuerzos de Cauchy, podemos definir un **tensor de esfuerzos viscoso** Z que modele dichas fuerzas. Este tensor dependerá del gradiente de deformación $\nabla_x \xi$ y del gradiente de velocidad $\nabla_x \xi_t$. En general, dicho tensor es más complicado que el tensor de esfuerzos elástico, por lo que no ahondaremos en el tema y únicamente mencionaremos algunas de sus propiedades en el próximo capítulo. En [11] se puede encontrar un análisis profundo del tema.

Capítulo 2

Modelos de elasticidad con efecto de estrés-gradiente

En la primera parte de este capítulo, expondremos la ecuación que modela un cuerpo viscoelástico con efecto de estrés-gradiente y realizaremos algunas consideraciones generales sobre la misma. Finalmente, en la segunda sección nos restringiremos al caso que nos interesa: el de deformaciones en una sola dirección coordenada y veremos las implicaciones que esto tiene en nuestro modelo.

2.1. Efecto estrés-gradiente

Siguiendo la presentación del capítulo anterior, sea Ω la configuración de referencia que modela un cuerpo elástico con temperatura y densidad constantes. Denotaremos un punto en Ω con X y usamos $\xi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ para denotar una deformación. Por simplicidad y para no ser abrumados por la notación, de ahora en adelante omitiremos los superíndices como ξ y t cuando hablemos de las variables. Entonces, el gradiente de deformación está dado por $\mathbf{F} := \nabla_X \xi$ y podemos verlo como un elemento de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Adoptando la notación anterior, las ecuaciones de viscoelasticidad isotérmica con efecto de estrés-gradiente están dadas por el siguiente balance de momento lineal

$$\xi_{tt} - \nabla_X \cdot (DW(\nabla\xi) + Z(\nabla\xi, \nabla\xi_t) - \mathcal{E}(\nabla^2\xi)) = 0 \tag{2.1}$$

donde DW representa el efecto del tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, Z es el tensor de esfuerzos viscoso y ε el efecto de estrés-gradiente; este último término es el que agrega el efecto de la energía de superficie y con lo que extendemos los trabajos realizados anteriormente (véase [5]), donde no se consideraban estas fuerzas.

No olvidemos que tenemos la siguiente restricción sobre el gradiente

$$\det\ F > 0, \tag{2.2}$$

que, como dijimos en el preámbulo, es necesaria para garantizar que se preserva la orientación del cuerpo.

En (2.1), el operador $\nabla_X\cdot$ representa la divergencia del campo tensorial. Usaremos la convención de que, para un campo vectorial valuado en matrices, la divergencia se toma por filas, i.e., si $\mathbf{S}$ es un tensor

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}) \cdot (S_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_i}.$$

donde los índices repetidos indican suma. Recordemos que, si $\mathbf{S}$ es un tensor de orden $n > 1$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{S}$ es un tensor de orden $n - 1$.

También usaremos la norma de matrices $|F| = (tr(F^T F))^{1/2}$, la cual está inducida por el producto interno: $F_1 : F_2 \coloneqq tr(F_1^T F_2)$.

En vista de la segunda ley de la termodinámica [4], el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff $DW : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ se expresa como la derivada de una densidad de energía elástica $W : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}$. Supondremos que W es de clase C^1 y acotada por abajo por lo que, sin perdida de generalidad, tomaremos $W \geq 0$. Durante este trabajo, asumiremos que la función de densidad de energía elástica W es invariante respecto al marco de referencia como en [2, 4, 11]. Sea $SO(3)$ el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$; la suposición anterior se puede formular como

$$W(RF) = W(F),\ \forall F \in \mathbb{R}^{3\times3},\ \forall R \in SO(3).$$

Para evitar interpenetración de materia, es natural pedir que la deformación ξ sea invertible. Para intentar asegurar esto, supondremos además que

$$W(F) \to +\infty \text{ si } \det F \to 0.$$

Enfatizamos que el tensor de esfuerzos viscoso $Z : \mathbb{R}^{3\times3} \times \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ depende del gradiente de deformación F y del gradiente de velocidad $Q = F_t = \nabla \xi_t = \nabla v$, donde $v = \xi_t$. Desde el punto de vista físico, el tensor de esfuerzos Z también debe de ser compatible con los siguientes principios de la mecánica de medios continuos: balance de momento angular, indiferencia de marco y la desigualdad de Claussius-Duhem, la cual se utiliza regularmente en la mecánica de medios continuos para expresar la segunda ley de la termodínamica y declara que la entropía de un sistema aislado siempre incrementa con el tiempo. Así, para cualesquiera F, Q en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ con $\det F \neq 0$ se cumple que:

(a) matríz antsimétrica$(F^{-1}Z(F,Q)) = 0$.

(b) $Z(RF, R_t F + RQ) = RZ(F,Q)\ \forall R : \mathbb{R}_+ \to SO(3)$.

(c) $Z(F,Q) : Q \geqq 0$.

En el primer inciso de la lista anterior, *matriz antisimétrica* representa la parte antisimétrica de la matriz, i.e. si M es una matriz, entonces *matriz antisimétrica*$(M) = \frac{1}{2}(M - M^T)$. En particular, el balance de momento angular nos dice que el tensor de esfuerzos debe ser simétrico; la indiferencia de marco nos dice que, si rotáramos la base que tomamos para $\mathbb{R}^3$, el tensor de esfuerzos correspondiente es igual que el tensor de esfuerzos original multiplicado por la matriz de rotación. La desigualdad de Claussius-Duhem se utiliza regularmente en la mecánica de medios continuos para expresar la segunda ley de la termodínamica, la cual declara que la entropía de un sistema aislado siempre incrementa con el tiempo.

Por último, el efecto de tensión-gradiente ε está dado por

$$\mathcal{E}(\nabla^2\xi) = \nabla_X \cdot D\Psi(\nabla^2\xi)$$

para alguna densidad convexa $\Psi : \mathbb{R}^{3\times 3\times 3} \to \mathbb{R}$, compatible con indiferencia de marco.

La parte no viscosa correspondiente del sistema (2.1)

$$\xi_{tt} - \nabla_X \cdot (DW(\nabla\xi)) = 0$$

puede ser escrita como:

$$(F, v)_t + \sum_{i=1}^{3} \partial_{X i}(\tilde{G}_i(F, v)) = 0.$$

En la ecuación anterior, $(F, v) : \Omega \to \mathbb{R}^{12}$ representa cantidades conservadas, mientras que los flujos $\tilde{G}_i : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{12}$ están dados por

$$-\tilde{G}_i(F, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial F_{1i}} W(F) \\ \frac{\partial}{\partial F_{2i}} W(F) \\ \frac{\partial}{\partial F_{3i}} W(F) \end{pmatrix} \quad j = 1, \cdots, 3$$

donde el vector v aparece en la posición j [8].

La densidad convexa Ψ contribuye a la ecuación (2.1) a través del término

$$\nabla_X \cdot \big(\mathcal{E}(\nabla^2\xi)\big) = \nabla_X \cdot \{\nabla_X \cdot D\Psi(\nabla^2\xi)\}. \tag{2.3}$$

En vista de los órdenes de diferenciación y la convexidad de Ψ, se pide que

$$\Psi \geq 0;\ \Psi(0) = 0;\ D\Psi(0) = 0;\ \delta Id \leq D^2\Psi(\cdot) \leq MId$$

donde δ, M son dos números reales positivos e Id es la identidad del espacio dual de $\mathbb{R}^{3\times3\times3}$ y que denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{3\times3\times3})$. Un ejemplo típico es $\Psi(G) = \frac{|G|^2}{2}$. Así las relaciones de los mapeos (ignorando las restricciones físicas) son:

$$\begin{aligned} \Psi : & \mathbb{R}^{3\times3\times3} \to \mathbb{R}_+ \\ D\Psi : & \mathbb{R}^{3\times3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3\times3} \\ D^2\Psi : & \mathbb{R}^{3\times3\times3} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3\times3\times3}) \end{aligned}$$

Observación 2.1. Cuando x es una variable en una dimensión, como consideraremos en la siguiente sección, y el operador $\nabla_X \cdot$ se reduce al operador ∂_x, (2.3) toma la forma $\partial_x\{\partial_x D\Psi(\partial_x^2\xi)\}$. Si identificamos ξ_x como τ, entonces $\partial_x^2\xi = \tau_x$ y por la regla de la cadena (2.3) se vuelve

$$\partial_x\{\partial_x D\Psi(\partial_x^2\xi)\} = \partial\{D^2\Psi(\tau_x)\tau_{xx}\}. \tag{2.4}$$

Notemos también que $D^2\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ cuando $\nabla_X \cdot$ se reduce a ∂_x; por esto, asumimos que $D^2\Psi(\cdot)$ como función matricial satisface la suposición $\delta Id \leq D^2\Psi(\cdot) \leq MId$ como operadores.

2.2. Ecuaciones y modelos específicos

Como dijimos anteriormente nos enfocaremos en la subclase de soluciones planas, donde las soluciones en el espacio tridimensional completo dependen únicamente de una sola dirección coordenada; esto es, trabajaremos con deformaciones ξ dadas por

$$\xi(X) = X + U(z),\ X = (x, y, z),\ U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Correspondiendo a la deformación anterior, el gradiente de deformación con respecto a X es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & U_{1,z} \\ 0 & 1 & U_{2,z} \\ 0 & 0 & 1 + U_{3,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & 1 & \tau_2 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos por $V = (\tau, u) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, u_1, u_2, u_3)$, donde $\tau_1 = U_{1,z},\ \tau_2 = U_{2,z},\ \tau_3 = 1 + U_{3,z}$ y $u_1 = U_{1,t},\ u_2 = U_{2,t},\ u_3 = U_{3,t}$, con la restricción física $\tau_3 > 0$ correspondiente a $\det F > 0$ en la región V de viabilidad física.

Escribiendo $W(\tau) = W \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & 1 & \tau_2 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}$, vemos que para todas las F como en (2.1) se cumple que

$$\nabla_X \cdot (DW(F)) = (D_\tau W(\tau))_z.$$

Esto es, la ecuación planar hereda en una estructura variacional vectorial que refleja la estructura variacional matricial.

En los siguientes capítulos estudiamos modelos (ecuaciones diferenciales ordinarias de tipo onda viajera, ecuaciones diferenciales Hamiltonianas y existencia de ondas estacionarias) para energía potencial elástica general y damos un resultado abstracto de existencia bastante general.

2.3. El sistema en una dimensión

Por convención, utilizaremos x en $\mathbb{R}$ como variable espacial en lugar de z. Así, con nuestras consideraciones anteriores, la ecuación (2.1) se vuelve

$$u_t - \partial_x(D_\tau W(\tau) + Z(\tau, u_x) - \mathcal{E}(\tau_x)) = 0.$$

Añadiendo además la hipótesis de que Z es lineal en la segunda entrada, muy usual en la teoría de mecánica de medios continuos, y la observación 2.1, la ecuación anterior nos proporciona el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tau_t - u_x = 0 \\ u_t + \sigma(\tau)_x = (b(\tau)u_x)_x - (d(\tau_x)\tau_{xx})_x \end{cases} \tag{2.5}$$

donde $\sigma \coloneqq -D_\tau W(\tau)$, $d(\cdot) \coloneqq D^2\Psi(\cdot)$ y $b(\tau)$ es una función positiva definida.

Estamos interesados en la existencia de ondas viajeras periódicas del sistema anterior, el cual incluye un término de tercer orden por el efecto de tesión-gradiente.

Capítulo 3

Sistema de onda viajera

En este capítulo deduciremos algunas condiciones que deberá cumplir una onda viajera para ser solución del sistema (2.5). Posteriormente veremos que la ecuación diferencial ordinaria que obtenemos del sistema debe ser de un tipo muy particular: una ecuación Hamiltoniana. Para terminar, emplearemos la teoría de ecuaciones Hamiltonianas para excluir el posibilidad de que dicha solución sea trivial.

Entonces, buscamos una solución de onda viajera del sistema (2.5), $\tau(x - st), u(x - st)$, donde s en $\mathbb{R}$ es la velocidad de la onda. En lo siguiente, denotemos por ' a la diferenciación con respecto de $x - st$. Por conveniencia, continuaremos usando x para representar a $x - st$ (de hecho, mostraremos más adelante que se necesita $s = 0$ para la existencia de ondas periódicas u homoclínicas). Con esta notación, tenemos que

$$
\begin{gathered}
(\tau(x-st))_t = -s\tau' \\
(u(x-st))_x = u' \\
(u(x-st))_t = -su' \\
(\sigma(\tau(x-st)))_x = \sigma(\tau)' \\
(b(\tau(x-st))u_x)_x = (b(\tau)u')' \\
(d(\tau(x-st)_x)\tau_{xx})_x = (d(\tau')\tau'')'
\end{gathered}
$$

por lo tanto, el sistema (2.5) se convierte en

$$
\begin{cases}
\quad -s\tau' - u' = 0 \\
-su' + \sigma(\tau)' = (b(\tau)u')' - (d(\tau')\tau'')'.
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, obtenemos el siguiente sistema de EDO de segundo orden sobre τ

$$
\begin{aligned}
& -s(-s\tau') + \sigma(\tau)' = (b(\tau)(-s\tau'))' - (d(\tau')\tau'')' \\
\Longrightarrow \qquad & s^2\tau' + \sigma(\tau)' = -(b(\tau)s\tau')' - (d(\tau')\tau'')'.
\end{aligned}
$$

Luego, en vista de que $d(\cdot) = D^2\Psi(\cdot)$, se sigue rápidamente que

$$
s^2\tau' + \sigma(\tau)' = -(b(\tau)s\tau')' - (D^2\Psi(\tau')\tau'')'.
$$

Ahora, escogemos un punto arbitrario del espacio, x_0, e integramos una vez para obtener

$$\int_{x_0}^{x} (s^2\tau' + \sigma(\tau)')dy = \int_{x_0}^{x} (-(b(\tau)s\tau')' - (D^2\Psi(\tau')\tau'')')dy$$

$$\begin{aligned} \implies \quad s^2\tau - s^2\tau(x_0) + \sigma(\tau) - \sigma(\tau(x_0)) &= -b(\tau)s\tau' + b(\tau(x_0))s\tau'(x_0) \\ &\quad - D\Psi(\tau')' - D\Psi(\tau'(x_0))'. \end{aligned}$$

Recordando la definición de σ con la función de potencial elástico W en el sistema (2.5) y haciendo $q := \{DW(\tau) - s^2\tau - sb(\tau)\tau' - D\Psi(\tau')'\}|_{x=x_0}$, de la ecuación anterior obtenemos

$$-DW(\tau) + s^2\tau + q = -sb(\tau)\tau' - D\Psi(\tau')'. \tag{3.2}$$

3.1. Estructura Hamiltoniana

Definamos $G(P) = D\Psi(P)P - \Psi(P)$ donde P pertenece a $\mathbb{R}^n$ y $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Calculemos la derivada de G

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dP} &= D\Psi(P)\frac{dP}{dP} + \frac{dD\Psi(P)}{dP}P - D\Psi(P) \\ &= D\Psi(P) + D^2\Psi(P)P - D\Psi(P) \\ &= D^2\Psi(P)P \end{aligned}$$

Con lo anterior, estamos listos para demostrar una propiedad estructural de nuestro sistema bajo una hipótesis adicional

Proposición 3.1. *Cuando* $s = 0$ *y* $[D^2\Psi(\tau')]^{-1} = \mathrm{Id}$, *el sistema* (3.2) *resulta ser un sistema Hamiltoninano.*

Demostración. Comencemos sin la hipótesis sobre la segunda derivada de la función Ψ. Cuando $s = 0$, el sistema de onda viajera (3.2) se vuelve

$$-DW(\tau) + q = -D\Psi(\tau')' \tag{3.3}$$

y la constante $q = \{DW(\tau) - D\Psi(\tau')'\}|_{x=x_0}$. Como $D^2\Psi(\cdot)$ es positiva, tiene inversa; así, podemos reescribir la ecuación anterior como un sistema de primer orden considerando a τ, τ' como variables independientes:

$$\begin{aligned}
\tau' &= [D^2\Psi(\tau')]^{-1} D^2\Psi(\tau')\tau' \\
\tau'' &= \big([D^2\Psi(\tau')]^{-1} D^2\Psi(\tau')\tau'\big)' \\
&= \big[(D^2\Psi(\tau')\tau')' D^2\Psi(\tau') - D^2\Psi(\tau')\tau'(D^2\Psi(\tau'))'\big]\big[(D^2\Psi(\tau'))\big]^{-2} \\
&= \big[(D^2\Psi(\tau'))\big]^{-1}[(D^2\Psi(\tau'))'\tau' + D^2\Psi(\tau')\tau'' - \tau'(D^2\Psi(\tau'))'] \\
&= [D^2\Psi(\tau')]^{-1}(D^2\Psi(\tau'))' \\
&= -[D^2\Psi(\tau')]^{-1}(-DW(\tau) + q) && \text{por (3.3)}
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos la superficie de energía dada por

$$H(\tau, \tau') := -W(\tau) + q\tau + G(\tau'). \tag{3.4}$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau} H(\tau, \tau') &= -DW(\tau) + q \\
\frac{\partial}{\partial\tau'} H(\tau, \tau') &= \frac{dG(\tau')}{d\tau'} = D^2\Psi(\tau')\tau'
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde la última igualdad es consecuencia de nuestra observación inicial. De los cáluclo anteriores notamos que, si $[D^2\Psi(\tau')]^{-1} = \mathrm{Id}$, el sistema (3.2) es Hamiltoniano. $\square$

De la información estructural anterior obtenderemos una condición necesaria para la existencia de ondas periódicas u homoclínicas.

Teorema 3.2. *Para* (3.2) *con* $s \lesseqgtr 0$ *se satisface* $\frac{\partial H}{\partial \zeta} \lesseqgtr 0$*, donde*

$$H(\tau, \tau') := -W(\tau) + \frac{s^2}{2}|\tau|^2 + q\tau + G(\tau').$$

Así, no pueden aparecer órbitas homoclínicas o periódicas a menos que $s = 0$*.*

Demostración. Cosideremos la evolución de $\frac{d}{d\zeta}H(\tau, \tau')$ a lo largo del flujo del sistema (3.2), denotando $\zeta = x - st$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta}H(\tau, \tau') &= \frac{\partial}{\partial \tau}H(\tau, \tau')\tau' + \frac{\partial}{\partial \tau'}H(\tau, \tau')\tau'' \\
&= \left\langle -DW(\tau) + q + s^2\tau, \tau' \right\rangle + \left\langle DG(\tau'), \tau'' \right\rangle \\
&= \left\langle -DW(\tau) + q + s^2\tau, \tau' \right\rangle + \left\langle D^2\Psi(\tau')\tau', \tau'' \right\rangle \\
&= \left\langle -DW(\tau) + q + s^2\tau, \tau' \right\rangle + \left\langle D^2\Psi(\tau')\tau'', \tau' \right\rangle \\
&= \left\langle -DW(\tau) + q + s^2\tau + D\Psi(\tau')', \tau' \right\rangle \\
&= \left\langle -sb(\tau)\tau', \tau' \right\rangle .
\end{aligned}$$

La conclusión se sigue de que $b(\tau)$ es positiva definida. $\square$

El sistema Hamiltoniano. En lo siguiente, consideraremos el caso $\Psi(P) = \frac{|P|^2}{2}$ como primer paso matemáticamente natural. Del análisis anterior sabemos que necesariamente s es igual a cero, i.e. todas las ondas periódicas son estacionarias. El sistema de onda viajera se reduce a la siguiente forma con constante integral q:

$$\begin{cases} -\tau'' = -D_\tau W(\tau) + q, \\ q = \{D_\tau W(\tau) - \tau''\}|_{x=x_0}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Si tomamos el punto de vista Hamiltoniano, el Hamiltoniano que le corresponde al sistema es

$$H(\tau, \tau') = \frac{1}{2}|\tau'(x)|^2 + V(\tau, \tau'),$$

donde $V(\tau, \tau') \coloneqq q \cdot \tau(x) - W(\tau(x))$. Las soluciones periódicas del sistema están confinadas a la superficie $H(\tau, \tau') \equiv$ constante.

Capítulo 4

Teorema general de existencia

En este capítulo, formularemos el problema en el marco del cálculo de variaciones y daremos la prueba al resultado de existencia.

4.1. Estructura del espacio

Como primer paso, recordemos las nociones de espacios de Sobolev involucrando periodicidad e introducimos la estructura del espacio que vamos a emplear (ver [10]).

Definición 4.1. Sea Ω un dominio (conjunto abierto n-dimensional) en $\mathbb{R}^n$ y sea p un número real positivo. Denotamos por $L^p(\Omega)$ la clase de todas las funciones medibles u, definidas en Ω, para las cuales

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

Identificamos en $L^p(\Omega)$ funciones que son iguales casi donde quiera (a.e.) en

Ω. Así, los elementos de este espacio son en realidad clases de equivalencia de funciones medibles que satisfacen la condición anterior, siendo dos funciones equivalentes si son iguales a.e. en Ω. Por conveniencia, ignoramos esta distinción y escribimos $u \in L^P(\Omega)$; de la misma manera, escribimos $u = 0 \in L^p(\Omega)$ si $u(x) = 0$ a.e. en Ω.

Es sencillo verificar que el espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial y que el funcional $\|\cdot\|_p$ dado por

$$\|\cdot\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

define una norma en $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$ [ver 1].

Definición 4.2. Para un número real fijo $T > 0$, sea C_T^∞ el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ (para nuestro propósito $n = 1, 2, 3$) que son infinitamente diferenciables y de periodo T.

Lema 4.3. *Sean $u, v \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n)$. Si para cada $f \in C_T^\infty$,*

$$\int_0^T \langle u(t), f'(t) \rangle dt = - \int_0^T \langle v(t), f(t) \rangle dt, \tag{4.1}$$

entonces

$$\int_0^T v_j(s) ds = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, n; \tag{4.2}$$

además, existe un vector constante c en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$u(t) = \int_0^t v(s) ds + c \quad a.e\ en\ [0, T]. \tag{4.3}$$

Demostración. Si denotamos por (e_j) la base canónica de R^n, podemos escojer la función de prueba específica $f = e_j$, así

$$\int_0^T < v(s), e_j > ds = \int_0^T v_j(s)ds = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

Para la segunda propiedad, definamos $w \in C(0, T; \mathbb{R}^n)$ como

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds$$

se cumple que

$$\int_0^T < w(t), f'(t) > dt = \int_0^T \left[\int_0^t < v(s), f'(t) > ds \right] dt.$$

Luego, del teorema de Fubini y de (4.2) se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T < w(t), f'(t) > dt &= \int_0^T \left[\int_s^T < v(s), f'(t) > dt \right] ds \\
&= \int_0^T < v(s), f(T) - f(s) > ds \\
&= f(T) \int_0^T v(s)ds - \int_0^T < v(s), f(s) > ds \\
&= - \int_0^T < v(s), f(s) > ds.
\end{aligned}$$

Entonces, de (4.1) tenemos que, para todo $f \in C_T^\infty$

$$\int_0^T < u(t) - w(t), f'(t) > dt = 0$$

En particular, podemos escoger

$$f(t) = \begin{Bmatrix} \sin \\ \\ \cos \end{Bmatrix} (2\pi kt/T)e_j, \;\; k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \;\; 1 \leq j \leq n$$

y de la teoría de series de Fourier se sigue que

$$u(t) - w(t) = c$$

a.e. en $[0, T]$ para alguna $c \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

A la función $v := u'$ se le llama *derivada débil* de u. En consecuencia, tenemos

$$u(t) = \int_0^t u'(l)dl + c \tag{4.4}$$

a.e. en $[0, T]$. Como de costumbre, identificamos la clase de equivalencia u y su representante continuo. En particular, por (4.2),

$$u(0) = u(T) = c$$

y además, restando en (4.4)

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(l)dl$$

para $t, s \in [0, T]$.

Definición 4.4. Definimos el espacio de Hilbert H_T^1 como es usual (que lo convierte en un espacio de Banach reflexivo) con el siguiente producto interior y la norma correspondiente: para $u, v \in H^1_T$

$$< u, v >:= \int_0^T (u, v) + (u', v')ds; \quad \|u\|^2 := \int_0^T |u|^2 + |u'|^2 ds.$$

Proposición 4.5 (Propiedad de encaje compacto de Sobolev)**.** *El encaje $H^1_T \subset\subset C[0, T]$ es compacto.*

Proposición 4.6. *Si $u \in H^1_T$ y $\int_0^T u(t)dt = 0$, entonces se cumple la desigualdad de Wirtinger*

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |u'(t)|^2 dt$$

y la desigualdad de Sobolev

$$|u|^2_\infty \leq \frac{T}{12} \int_0^T |u'(t)|^2 dt$$

La propiedad del encaje compacto de Sobolev nos proporcionará la semicontinuidad inferior débil necesaria para los funcionales no lineales. La desigualdad de Wirtinger nos suministra con nomras equivalentes en los espacios de Sobolev relacionados con media cero.

4.2. Formulación variacional del problema

Ahora, para una $T > 0$ dada, consideremos el problema (3.6) en H^1_T,

$$\begin{cases} -\tau'' = -D_\tau W(\tau) + q = -D_\tau(W(\tau) - q \cdot \tau), \\ \tau(0) - \tau(T) = 0; \quad \tau'(0) - \tau'(T) = 0. \end{cases}$$

Primero, consideremos las formulaciones sin la restricción fisica $\tau_3 > 0$. Supongamos que

$$\bar{\tau} := \frac{1}{T}\int_0^T \tau(x)dx = m.$$

Aquí, $m \in \mathbb{R}^n,\ n = 1, 2, 3$ y usamos la barra para representar media sobre un periodo. Entonces, podemos considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} \tau'' = DW(\tau) - q \\ \tau(0) = \tau(T); \quad \tau'(0) = \tau'(T); \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \tau(x)dx = m. \end{cases}$$

Si buscamos soluciones periódicas, podemos determinar a q integrando las ecuaciones anteriores sobre un periodo; esto es

$$q = \frac{1}{T}\int_0^T DW(\tau(x))dx.$$

Definamos $v(x) = \tau(x) - m$. Se puede ver fácilmente que $\frac{1}{T}\int_0^T v(x)dx = 0$, así $v(x)$ satisface el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v''(x) = DW(v + m) - q \\ v(0) = v(T); \quad v'(0) = v'(T); \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v(x)dx = 0. \end{cases}$$

Por conveniencia, reescribimos el sistema anterior como:

$$\begin{cases} v''(x) = DW(v + m) - DW(m) + DW(m) - q \\ v(0) = v(T); \quad v'(0) = v'(T); \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v(x)dx = 0. \end{cases}$$

Luego, definamos $\tilde{W}(v) = W(v + m) - DW(m) \cdot v$ y $\tilde{q} = q - DW(m)$.

Obtenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} v''(x) = D\tilde{W}(v+m) - \tilde{q} \\ v(0) = v(T); \quad v'(0) = v'(T); \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v(x)dx = 0. \end{cases}$$

Aquí también podemos determinar a $\tilde{q}$ integrando: $\frac{1}{T}\int_0^T D\tilde{W}(v)dx = \tilde{q}$.

Observación 4.7. En vista de la suposición física (2.2), para modelos que involucren dirección τ_3 necesitamos que $v_3 > -m_3$ en $[0, T]$.

Definamos $F(v) = W(u+m) - W(m) - DW(m) \cdot v$ e introducimos el funcional

$$\mathcal{I}(v) = \int_0^T \frac{1}{2}|v'|^2 dx + \int_0^T F(v)dx$$

en el espacio

$$H^1_{T,0} := \left\{ v \in H^1_T; \quad \bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v dx = 0 \right\}.$$

Proposición 4.8. *$v = 0$ siempre es un punto crítico del funcional $\mathcal{I}$ definido sobre $H^1_{T,0}$.*

Demostración. Sea $\phi \in H^1_{T,0}$, para ver que que $v = 0$ es punto crítico debemos calcular la derivada

$$\mathcal{I}'(v)\phi = \lim_{t \to 0} \frac{I(v+t\phi) - I(v)}{t}.$$

Notemos que:

$$I(v+t\phi) = \int_0^T \frac{1}{2}|v' + t\phi'|^2 dx + \int_0^T W(v+t\phi+m) - W(m) \\ - DW(m)\cdot(v+t\phi)\ dx.$$

Expandiendo en serie de Taylor $W(v+m+t\phi) = W(v+m) + DW(v+m)\cdot t\phi + O(t^2)$,

$$I(v+t\phi) = I(v) + t\int_0^T v'\cdot\phi' dx + t\int_0^T [DW(v+m) - DW(m)]\cdot\phi\ dx \\ + O(t^2)$$

Así, tenemos que

$$\mathcal{I}'(v)\phi = \int_0^T v'\cdot\phi' + D\tilde{W}(v)\cdot\phi\ dx.$$

Tomando $v = 0$ y notando que $D\tilde{W}(0) = 0$ obtenemos el resultado. $\square$

Observación 4.9. Con nuestra formulación, hacemos que $v = 0$ siempre sea un punto crítico y corresponde a la solución constante. Esta propiedad geométrica nos proporciona una buena manera de excluir la posibilidad de que la solución periódica que encontremos sea constante i.e., nos ayuda a probar que las ondas periódicas son oscilatorias.

Proposición 4.10. *Sin restricciones físicas en τ_3, el punto crítico de $\mathcal{I}$ corresponde a la solución de* (3.6).

Demostración. Primero, supongamos que v resuelve

$$\begin{cases} v''(x) = D\tilde{W}(v) - \tilde{q} \\ v(0) = v(T); \quad v'(0) = v'(T); \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v(x)dx = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación por $\phi \in H^1_T$ e integrando, obtenemos

$$\int_0^T v'\phi' + D\tilde{W}(v) \cdot \phi dx = 0,$$

i.e., v es punto crítico de $\mathcal{I}$.

Ahora, supongamos que v es punto crítico y sea $\phi \in H^1_T$. Entonces $\phi - \bar{\phi} \in H^1_{T,0}$. Así, tenemos que

$$\int_0^T v' \cdot (\phi - \bar{\phi})' + \int_0^T D\tilde{W}(v) \cdot (\phi - \bar{\phi})\, dx = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_0^T v' \cdot \phi' + \int_0^T D\tilde{W}(v) \cdot \phi - \int_0^T D\tilde{W}(v) \cdot \bar{\phi}\, dx = 0,$$

y por definición de $\bar{\phi}$

$$\int_0^T v' \cdot \phi' + \int_0^T D\tilde{W}(v) \cdot \phi - \int_0^T D\tilde{W}(v) \cdot \Big(\frac{1}{T}\int_0^T \phi\, dx\Big) dx = 0;$$

integrando por partes

$$\int_0^T v' \cdot \phi' + \int_0^T D\tilde{W}(v) \cdot \phi - \int_0^T \Big(\frac{1}{T} \int_0^T D\tilde{W}(v)dx \Big) \cdot \phi \; dx = 0$$

$$\implies$$

$$\int_0^T v' \cdot \phi' + \int_0^T (D\tilde{W}(v) - \tilde{q}) \cdot \phi = 0.$$

Como lo anterior se cumple $\forall \; \phi \in H_T^1$, concluimos que

$$v'' = D\tilde{W}(v) - \tilde{q}.$$

$\square$

Observación 4.11. Si consideramos modelos con la restricción $v_3 > -m_3$, tenemos que cosniderar un problema variacional con esta limitación, la cual convierte al conjunto admisible en no débilmente cerrado.

Para lidiar con la constante integral q, podemos restringir el conjunto admisible (o escoger un espacio adecuado) en el cual consideremos el funcional o empleemos multiplicadores de Lagrange para recuperarlo, añadiendo funcional restringido en el espacio original sobre el que está definido el funcional.

Proposición 4.12. *Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, I un funcional real definido en $\mathcal{X}$ y U un conjunto secuencialmente débil compacto en $\mathcal{X}$. Si I es débilmente semicontinuo inferiormente, entonces I alcanza su mínimo en U i.e., existe $x_0 \in U$ tal que $I(x_0) = \inf_{x \in U} I(x)$.*

Demostración. Sea $c := \inf_{x \in U} I(x)$. Por definición de ínfimo, existe $\{x_n\} \subset U$

tal que $I(x_n) \to c$. En vista de que U es secuencialmente débilmente compacto, $\{x_n\}$ admite un subsucesión débilmente convergente, la cual seguiremos denotando como $\{x_n\}$. Sea $x_0 \in \mathcal{X}$ el límite débil correspondiente. Como U es débilmente cerrado, sabemos que $x_0 \in U$. Luego, por la semicontinuidad inferior de I tenemos que, $c = \lim_n I(x_n) \geq I(x_0)$. Por otro lado, por definición de c, $I(x_0) \leq c$. Por lo tanto, $I(x_0) = c$. $\square$

Es sabido que cualquier conjunto acotado y débilmente cerrado en un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$ es débilmente compacto (esto es una consecuencia del teorema de Banach-Alaoglu; véase [12]). En particular, un conjunto acotado, cerrado y convexo en un espacio de Banach reflexivo es débilmente compacto pues débilmente cerrado y cerrado en norma son equivalentes para conjuntos convexos. Esto nos da los siguientes corolarios:

Corolario 4.13. *Sean U un conjunto acotado y débilmente cerrado en un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$ y sea I un funcional real débilmente semicontinuo inferiormente en $\mathcal{X}$. Entonces, existe $x_0 \in U$ tal que $I(x_0) = \inf_{x\in U} I$.*

Definición 4.14. Decimos que un funcional real I en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ es coercivo si

$$\lim_{|x|_{\mathcal{X}} \to +\infty} I(x) = +\infty$$

Corolario 4.15. *Cualquier funcional real débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo I definido en un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$ admite un minimizador global.*

Demostración. Si $\inf I(x) = +\infty$ entonces $I \equiv +\infty$ y el resultado es inmediato. Supongamos que no pasa lo anterior, sea $c = \inf I$ y tomemos $\alpha \in (c, +\infty)$.

Por la coercividad de I, existe $r > 0$ tal que $I(x) > c$ si $|x| > r$. Se sigue que $c = \inf_{x \in rB_{\mathcal{X}}} I(x)$ donde $rB_{\mathcal{X}}$ es la bola de radio r en $\mathcal{X}$. Luego, como $\mathcal{X}$ es reflexivo, $rB_{\mathcal{X}}$ es débilmente cerrada (y acotada) y por el corolario anterior tenemos el resultado. $\square$

4.3. Existencia de ondas periódicas estacionarias

En esta sección, primero daremos un resultado general para modelos que involucran la suposición física $\tau_3 > 0$, i.e. $v_3 > -m_3$. Supondremos las siguientes condiciones sobre el potencial W

(A1) $W \in C^2$ y $W(\tau) \to +\infty$ si $\tau_3 \to 0^+$. Para $\tau_3 \leq 0$ definimos $W(\tau) = +\infty$;

(A2) Existe una constante positiva C tal que $W(\tau) \geq \frac{C}{\tau_3^2}$ para $\tau \in \mathbb{R}^n$ (n = 1,2,3);

(A3) Existe un vector constante $m \in \mathbb{R}^3_+ := \{m \in \mathbb{R}^3; m_3 > 0\}$ tal que $\sigma\{D^2W(m)\} \cap \mathbb{R}^1_- \neq \emptyset$. Aquí $\sigma\{D^2W(m)\}$ es el espectro de $D^2W(m)$.

En los siguientes lemas de esta sección vamos a suponer que se cumplen (A1), (A2) y (A3). Definimos los subconjuntos

$$\mathcal{A}_1 := \{v \in H^1_{T,0}; v_3 > -m_3\}, \quad \mathcal{A}_2 := \{v \in H^1_{T,0}; v_3 \geq -m_3\}.$$

Lema 4.16. *Bajo las suposiciones (A1)-(A3), $\mathcal{I}$ es un funcional coercivo en $H^1_{T,0}$.*

Demostración. Por la definición de $\mathcal{I}$, sólo debemos fijarnos en la parte $\int_0^T F(v)dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int_0^T F(v)dx &= \int_0^T W(v+m) - W(m) - DW(m)\cdot v\ dx\\ &= \int_0^T W(v+m)dx - W(m)T\\ &\geq -W(m)T\\ &> -\infty,\end{aligned}$$

habiendo utilizado (A2). □

El lema anterior nos dice que, para una R suficientemente grande, los minimizadores de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{A}_i$ se restringen a los conjuntos $\bar{\mathcal{A}}_i := \mathcal{A}_i \cap B[0,R]$ para $i = 1,2$ donde $B[0,R]$ es la bola cerrada con centro en 0 y de radio R en $H^1_{T,0}$. Definamos ahora $S_i := \{v \in \mathcal{A}_i; \mathcal{I}(v) = \text{ínf}_{\tilde{v}\in\mathcal{A}_i} \mathcal{I}(\tilde{v})\}$. Claramente, tenemos que $S_i := \{v \in \bar{\mathcal{A}}_i; \mathcal{I}(v) = \text{ínf}_{\tilde{v}\in\mathcal{A}_i} \mathcal{I}(\tilde{v})\}$.

Lema 4.17. *$\bar{\mathcal{A}}_2$ es débilmente compacto en $H^1_{T,0}$.*

Demostración. Por definición $\bar{\mathcal{A}}_2$ es acotado. Como H^1_T es reflexivo, tenemos también que $\bar{\mathcal{A}}_2$ es secuencialmente débilmente compacto. Ahora veremos que $\bar{\mathcal{A}}_2$ es cerrado; sean $v, w \in \bar{\mathcal{A}}_2$, queremos que

$$tv + (1-t)w \in \bar{\mathcal{A}}_2 \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Como $v, w \in H^1_{T,0}$, se sigue inmediatamente que la suma convexa también lo está. Luego,

$$
\begin{aligned}
[tv + (1-t)w]_3 &= tv_3 + (1-t)w_3 \\
&\geq -tm_3 - (1-t)m_3 \\
&\geq -m_3, \\
\implies tv + (1-t)w &\in \bar{\mathcal{A}}_2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para ver que la combinación convexa está en la bola aplicamos un argumento análogo

$$
\begin{aligned}
\|tv + (1-t)w\| &\leq t\|v\| + (1-t)\|w\| \\
&\leq tR + (1-t)R \\
&\leq R, \\
\implies tv + (1-t)w &\in B[0, R].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\bar{\mathcal{A}}_2$ es convexo. Ahora veamos que $\bar{\mathcal{A}}_2$ es cerrado en la topología de la norma; sean $\{v_n\}$, $v \in \bar{\mathcal{A}}_2$ tales que $v_n \xrightarrow{H^1_{T,0}} v$. Luego, por el teorema de encaje compacto de Sobolev tenemos que existe $\{v_j\} \subset \{v_n\}$ tal que $v_j \xrightarrow{C[0,T]} v'$, dado que la sucesión $\{v_n\}$ es acotada. Por unicidad del límite, $v = v'$. Como $v_j^{(3)} \geq -m_3$, por continuidad se tiene también que $v_3 \geq -m_3$. Así, llegamos a que $v \in \bar{\mathcal{A}}_2$. Para un conjunto convexo, la propiedad de ser cerrado en la topología norma y cerrado débilmente son equivalentes, por lo tanto $\bar{\mathcal{A}}_2$ es débilmente cerrado. Por todo lo anteior, concluimos que $\bar{\mathcal{A}}_2$ es débilmente compacto. $\square$

Lema 4.18. *$\mathcal{I}$ es un funcional débilmente semicontinuo inferiormente en $H^1_{T,0}$.*

Demostración. Sean $\{v_n\}$, $v \in H^1_{T,0}$ tales que $v_n \to v$ débilmente en $H^1_{T,0}$. Por el teorema de encaje compacto de Sobolev, sin pérdida de generalidad podemos suponer que también converge en $C[0,T]$ (pues existe una subsucesión que lo hace y podemos denotarla igual) i.e., $v_n \to v$ uniformemente en $C[0,T]$. Así, tenemos que

$$\int_0^T F(v_n)dx \to \int_0^T F(v)dx.$$

Luego, por la propiedad de media cero también tenemos que $\int_0^T |v'|^2 dx$ está en forma de norma, por lo tanto, obtenemos la conclusión. □

Lema 4.19. *Se cumple que $S_2 \neq \varnothing$ y $v_3 > -m_3$ para $v \in S_2$ bajo las suposiciones (A1)-(A3).*

Demostración. Por Proposición 4.12 $S_2 \neq \varnothing$. Notemos que $0 \in S_2$ y que $\mathcal{I}(0) = 0$, por lo tanto $I(v) \leq 0$ para $v \in S_2$. Por contradicción, supongamos que existe $x_0 \in [0,T]$ tal que $v_3(x_0) = -m_3$. Luego, por el teorema de encaje compacto de Sobolev existe una constante positiva K tal que,

$$|v_3(x) + m_3| = |\big(v_3(x) + m_3\big) - \big(v_3(x_0) + m_3\big)| \leq K|x - x_0|^{\frac{1}{2}}.$$

Así, por la suposición (A2) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(v) &= \int_0^T (\frac{1}{2})|v'|^2 dx + \int_0^T W(v+m) - W(m)\ dx \\ &\geq \int_0^T CK|x-x_0|^{-1} dx - \int_0^T W(m)\ dx \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Esto último se cumple ya que el primer integrando no converge y el segundo es finito. Lo anterior es una contradicción. $\square$

Lema 4.20. *Bajo las suposiciones (A1)-(A3) y considerando* $(\frac{2\pi}{T})^2 < \lambda(m)$*, se cumple que* $0 \notin S_1 = S_2$.

Demostración. Calculemos la segunda variación:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(v+t\phi) - \mathcal{I}(v) &= \frac{1}{2}\int_0^T |v' + t\phi'|^2 - |v'|^2\ dx + \int_0^T F(v+t\phi) - F(v)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T 2tv' \cdot \phi' + t^2|\phi'|^2\ dx \int_0^T F(v+t\phi) - F(v)\ dx.\end{aligned}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}F(v+t\phi) - F(v) &= tF'(v)\cdot\phi + \frac{t^2}{2}\phi\cdot(F''(v)\phi) + O(t^3) \\ &= tD\tilde{W}(v)\cdot\phi + \frac{t^2}{2}\phi\cdot(D^2\tilde{W}(v)\phi) + O(t^3).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi\cdot(\mathcal{I}''(v)\phi) = \frac{1}{2}\int_0^T |\phi'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^T \phi\cdot(D^2\tilde{W}(v)\phi)\ dx.$$

Para mostrar que $0 \notin S_2$, consideremos

$$\begin{aligned}\phi \cdot (\mathcal{I}''(0)\phi) &= \frac{1}{2}\int_0^T |\phi'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^T \phi \cdot (D^2\tilde{W}(0)\phi)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T |\phi'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^T \phi \cdot (D^2 W(v)\phi)\ dx.\end{aligned}$$

Sea $\tilde{\phi}(x) = \eta \sin(\frac{2\pi x}{T})$ con $0 < \eta < m_3$ y sea $v_0 \in \mathbb{R}^3$ un vector propio unitario correspondiente a $-\lambda(m)$, el valor propio más pequeño de $D^2W(m)$ (que existe por (A3)). Luego, como v_0 es unitario y $\eta \sin(\frac{2\pi x}{T}) \leq \eta$, se cumple que $\phi(x) \coloneqq \tilde{\phi}(x) v_0 \in \mathcal{A}_2$. Como $v = 0$ es punto crítico de $\mathcal{I}$ en $H^1_{T,0}$ y

$$\begin{aligned}2\phi \cdot (\mathcal{I}''(0)\phi) &= \int_0^T \eta^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\cos\Big(\frac{2\pi x}{T}\Big)\right)^2 dx \\ &\qquad - \lambda(m)\int_0^T \eta^2 \left(\sin\Big(\frac{2\pi x}{T}\Big)\right)^2 dx \\ &= \frac{\eta^2 T}{2}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \lambda(m)\right) \\ &< 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $0 \notin S_2$ y se sigue que $S_1 = S_2$. □

Teorema 4.21. *Asumiendo (A1), (A2) y (A3). Si* $(\frac{2\pi}{T})^2 < \lambda(m)$*, tenemos una solución de tipo onda periódica no constante para el problema* (2.5) *para la cual la media sobre un periodo de* τ *es* m*. Aquí* $-\lambda(m)$ *es el valor propio más pequeño de* $D^2W(m)$*.*

Demostración. Combinando los lemas 4.16 a 4.20 tenemos la prueba. □

Capítulo 5

Ejemplo: ondas periódicas en un fluido de van der Waals

En este capítulo expondremos un ejemplos concreto sobre el cual emplearemos la teoría desarrollada previamente para garantizar la existencia de soluciones de tipo onda periódica plana del sistema.

5.1. Fluido de van der Waals

Primero, mencionaremos un poco de la importancia histórica de la ecuación de van der Waals. Antiguamente, la forma más completa que se le había dado a las ecuaciones de movimiento de los fluidos no contenían ningún término dependiente de las diferencias de densidad. Sin embargo, era claro que se debían apreciar efectos en circunstancias donde las variaciones de densidad fuesen considerables; más aún, la determinación de los términos que se debieran agregar a las ecuaciones para tener en cuenta los efectos de una variación en la densidad, por ejemplo en el caso de un fluido donde su temperatura se aproxima a la temperatura crítica, deberían producir un interés matemático. Así, Johannes Diderik van der Waals (1827 - 1923) en su *Théorie thermodynamique de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation cotinue de densité*, mediante el uso de consideraciones teóricas de gran importancia, hizo muy probable la suposición de que la discontinuidad observada en la superficie de separación de un líquido y su gas era aparente y que existe una capa de transición, muy delgada pero aún así de grosor considerable; además de que el radio de la esfera de acción de las moléculas puede crecer indefinidamente a medida que nos acercamos a la temperatura crítica. Para un desarrollo completo de la deducción de los términos ver [9]. Así, la ecuación de van der Waals ajustó la ecuación de un gas ideal para tomar en cuenta el volumen no cero de moléculas de gas sujetas a atracciones entre ellas.

El modelo. En coordenadas Lagrangianas (fijándonos en la configuración de referencia), el modelo para un fluido de van der Waals en una dimensión con temperatura constante es [7]:

$$\begin{cases} u_t = \tau_x \\ w_t = u_x \end{cases} \tag{5.1}$$

con x en $\mathbb{R}$, $t > 0$ y donde u representa la veolicdad, τ el estrés y w el volumen específico. La formulación Lagrangiana del estrés en una dimensión está dado, en general, por:

$$\begin{aligned}\tau &= -P(w) + D(w)w_x^2 - C(w)w_{xx} + \mu(w)u_x \\ &= \tau(w, u),\end{aligned}$$

donde $\mu,\ D,\ C\ \geq\ 0$ y $P = P(w)$ es la "función de presión" o ecuación de estado de van der Waals:

$$P(w) = \frac{RT}{w-b} - \frac{a}{w^2}, \quad 0 < b < w < +\infty.$$

Observación 5.1. Para que en efecto el fluido presente transición de fase, se tiene que cumplir que existan dos puntos en los que la derivada de la función de presión sea cero, i.e. la ecuación

$$P'(w) = -\frac{RT}{(w-b)^2} + \frac{2a}{w^3} = 0, \tag{5.2}$$

debe tener dos soluciones. Para establecer condiciones sobre los coeficienets bajo las cuales se cumple lo anterior, hagamos

$$\begin{aligned} Q(w) &= RTw^3 - 2a(w-b)^2 \\ \implies Q(b) &= RTb^3 \\ &> 0.\end{aligned}$$

Luego, derivamos una vez para obtener

$$\begin{aligned} Q'(w) &= 3RTw^2 - 4a(w-b) \\ &= 3RTw^2 - 4aw + 4ab. \end{aligned}$$

Como queremos que $Q'(w)$ sea cero para alguna w, buscamos que el polinomio anterior tenga raices; así, necesitamos que su discriminante Δ cumpla:

$$\begin{aligned} \Delta &= 16a^2 - 16ab \cdot 3RT > 0 \\ &\implies a > 3brT. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Recordemos esta condicioón pues nos será útil más adelante para verificar que al problema que planetaremos para un fluido de van der Waals, le podemos aplicar el teorema 4.21.

Nos enfocaremos en el caso más sencillo, donde

$$\mu = \mu_0 > 0, \quad C = C_0 > 0, \quad D \equiv 0,$$

son constantes. Así, la primera ecuación del modelo (5.1) toma la forma:

$$u_t = \partial_x\big(-P(w) - C_0 w_{xx} + \mu_0 u_x\big).$$

Por lo tanto, escribiremos el modelo simplificado como:

$$\begin{cases} u_t + P_x(w) = \partial_x\big(\mu_0 u_x - C_0 w_{xx}\big) \\ \quad w_t - u_x = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Este sistema es compatible con (2.5) si tomamos

$$\Psi = \frac{|P|^2}{2}$$
$$\implies D^2\Psi \equiv Id,$$

y haciendo

$$\sigma = P(w),$$
$$b(\tau) = \mu_0 > 0,$$
$$d(\tau_x) = C_0 > 0.$$

Recordando la definición de σ como

$$\sigma = -D_\tau W(\tau),$$

podemos integrar $P(w)$ para obtener:

$$W(w) = -RT\log(w-b) - \frac{a}{w}. \tag{5.5}$$

Vamos a verificar que (5.4) cumple con las hipótesis (A1)-(A3):

(A1) W en C^2 y $W(\tau) \to +\infty$ si $\tau_3 \to 0^+$. En (5.5) se ve claramente que W es de clase C^2 para todo w en (b,∞). Luego, por la restricción que tenemos sobre w, la segunda condición se traduce a pedir lo siguiente:

$$W(w) \to +\infty \text{ si } w \to b^+,$$

pero esto también es inmediato pues,

$$\lim_{w\to b^+} -RT\log(w-b) = +\infty \text{ y } \lim_{w\to b^+} -\frac{a}{w} < \infty.$$

(A2) Existe una constante positiva C tal que $W(\tau) \geq \frac{C}{\tau_3^2}$: Esta hipótesis se sigue de que el logaritmo crece más lento que cualquier polinomio.

(A3) Existe un vector constante $m \in \mathbb{R}^3_+ := \{m \in \mathbb{R}^3; m_3 > 0\}$ tal que $\sigma\{D^2W(m)\} \cap \mathbb{R}^1_- \neq \emptyset$. Derivamos dos veces a W para obtener:

$$\begin{aligned} D^2W(w) &= \frac{RT}{(w-b)^2} - \frac{2a}{w^3} \\ &= -P'(w). \end{aligned}$$

Así, queremos que exista m positivo tal que:

$$\begin{aligned} &\frac{RT}{(m-b)^2} - \frac{2a}{m^3} < 0 \\ &\implies RTm^3 < 2a(m-b)^2, \end{aligned}$$

Para comprobar que siempre existe alguna m con esta propiedad podríamos volver a definir una Q como antes,

$$Q(m) = RTm^3 - 2a(m-b)^2$$

y obtendremos que justamente la condición (5.3) nos garantiza la existencia de dicha m.

Entonces hemos comprobado que, para el caso de un fluido de van der

Waals, se cumplen las hipótesis del teorema 4.21. Podemos enunciar el resultado de la siguiente manera:

Teorema 5.2 (Existencia de ondas periódicas estacionarias para un fluido de van der Waals)**.** *Sea el sistema* (5.4) *para un fluido de van der Waals cuya ecuación de estado es de la forma* (5.2)*. Suponiendo que el fluido satisface la condición* (5.3) *(y por lo tanto existe un estado $m > 0$ tal que $-\lambda(m) \coloneqq -P'(m) < 0$), entonces existe una solución de tipo onda estacionaria, no constante y con cualquier periodo $T > \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda(m)}}$.*

Bibliografía

[1] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.

[2] S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer, 1995.

[3] V. I. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.

[4] J. M. Ball. *Some open problems in elasticity*. Geometry, Mechanics and Dynamics. New York: Springer, 2002.

[5] Blake Barker, Marta Lewicka y Kevin Zumbrun. «Existence and Stability of Viscoelastic Shock Profiles». En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2011 (2011), págs. 491-532.

[6] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Three-Dimensional Elasticity*. Vol. 1. North-Holland, 1994.

[7] C. M. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. third. Springer, 2010.

[8] Heinrich Freistühler y Ramón G. Plaza. «Normal Modes and Nonlinear Stability Behaviour of Dynamic Phase Boundaries in Elastic Materials». En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 186 (2007), págs. 1-24.

[9] D. J. Korteweg. «Sur la forme que prennent les équations du movement des fluides si l'on tient commpte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais continues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité». En: *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* ser.2:t.6 (1901) (1901), págs. 1-24.

[10] J. Mawhin y M. Willem. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag, 1989.

[11] N. Phan-Thien. *Understanding Viscoelasticity*. second. Berlin: Springer, 2008.

[12] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Inc., 1991.

[13] J. Yao. «Existence and Stability of Periodic Planar Standing Waves in Phase-Transitional Elasticity with Strain-Gradient Efects I: General Theory». En: *Journal of Analysis and its Applications* (2012).

[14] J. Yao. «Existence and Stability of Periodic Planar Standing Waves in Phase-Transitional Elasticity with Strain-Gradient Efects II: Examples». En: *Journal of Analysis and its Applications* (2012).