UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIZACIÓN DE SISTEMAS NO CONSERVATIVOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Miroslava Mosso Rojas

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. José David Vergara Oliver

México, Ciudad de México Fecha: Marzo 2017

Ciudad Universitaria

Dedicado a

Andrecito, quien su cariño incondicional y admiración genuina han sido para mi la mayor inspiración.

Agradecimientos

Bonito André, te quiero agradecer el que siempre hayas creído en mi, me alegra que también quieras ser físico y quiero que sepas que si después cambias de opinión, te apoyaré en ello y en cualquier cosa. Quiero agradecerte que me hayas mostrado gran parte de la belleza del ser humano; sin maldad, genuino, inocente y sin prejuicios, porque el haber podido ver a diario esas cualidades que fueron como un bálsamo para mi todo este tiempo y el ahora poder recordarlas me llena de alegría y enternece mis sentimientos. Mientras sigan viviendo estas cosas en ti, mientras pueda yo recordarlas, siempre existirá en mí una certera esperanza.

Querido Jeff, siempre estaré agradecida por todo lo que has hecho por mi, nada me conmueve más que pensar en tu cariño; en un amor libre, sencillo, inagotable. Al mirarte y al mirarme a mi misma sonrío, porque descubrí el asombro de sentir que soy comprendida y que siempre hemos preservado una extraña simetría. Hay cosas que me son imposibles de describir, para que sepas lo que siento por ti tan solo recuerda ”My love is like to ice”, la sonata de Bach BWV 1016, el ritmo apaciguado de Fat Old Sun, la lluvia mojándonos cada vez que ibas a dejarme a mi casa por las noches, las calles viejas del centro, La Tercera Expedición a Marte, ”¿escuchas ladrar a los perros? ”...¿Recuerdas esa frase auténtica que enuncia una conjunción infinita de hechos e impresiones?, nunca la olvides, porque seguramente será inextinguible.

Quiero agradecerte David, por toda tu paciencia, porque después de que volvía a cometer los mismos errores muchas veces siempre me ayudaste y resolviste todas mis dudas. Realmente te admiro mucho, aunque no haya tomado clases contigo, de todos mis profesores eres al que más admiro, porque además de saber tantas cosas eres una persona muy afable y sencilla. Quisiera agradecerte que me hayas brindado la oportunidad de trabajar contigo, lo cual ha sido importante en mi formación y en mi manera de pensar. Espero que podamos seguir trabajando juntos y así pueda seguir aprendiendo de ti, que bueno que nos gusten los mismos temas, porque así siempre tendré un pretexto para buscarte y plantearte mis preguntas.

Agradezco a todos los que me apoyaron y creyeron en mi en todo momento; con quienes disfrutaba de una buena cerveza, una buena plática y buena música, con quienes hablábamos de Borges aunque ni siquiera podíamos expresar con las palabras correctas nuestro asombro por la perfecta estructura de sus cuentos. Agradezco a las personas que cuando sentíamos que todo estaba casi perdido, nos ayudábamos a no perder el ánimo ni la motivación.

Finalmente agradezco el apoyo mediante la beca de titulación de Licenciatura del proyecto PAPIIT IN103716.

Resumen

Se realizó un estudio de sistemas no conservativos tanto a nivel clásico como a nivel cuántico. Se introdujo un nuevo tiempo como parámetro y el tiempo original pasó a ser una nueva variable; de esta manera se estudiaron las simetrías de un sistema clásico en particular, el del oscilador armónico amortiguado, en un espacio fase extendido. Para tener un estudio general a nivel clásico fue necesario modificar el principio de acción para sistemas de esta índole.

El proceso de cuantización tuvo un primer enfoque dentro del estudio del método de Dirac para sistemas con constricciones. Pero el proceso completo se llevó a cabo usando la integral de trayectoria con la implementación de las transformaciones canónicas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El tema central de este trabajo es estudiar sistemas no conservativos; es decir, aquellos que intercambian o disipan energía con respecto a otro mientras el movimiento se lleva a cabo. Las propiedades irreversibles y disipativas aparecen en la mayoría de los fenómenos físicos de la vida diaria y aún así sigue siendo un problema en cuestión. En este trabajo se realizó un estudio de sistemas no conservativos a nivel clásico como cuántico. A nivel clásico, toda la información acerca del sistema se encuentra contenida en la acción, para la descripción de sistemas no conservativos necesitamos un Hamiltoniano dependiente del tiempo; no obstante, el principio de Hamilton en general no puede describir procesos genéricos que incluyan procesos irreversibles, tales como la disipación de la energía, el amortiguamiento, etc.

Comenzamos el estudio clásico usando el método de Dirac, donde un ejemplo particular fue el del oscilador armónico amortiguado. Lo resolvimos clásicamente, teniendo presente que otro objetivo sería cuantizar este sistema, lo que nos sugirió de manera natural hacer uso de las transformaciones canónicas. Lo anterior nos llevó a encontrar la constricción del sistema y a encontrar también un problema de ordenamiento que nos motivó a utilizar la integral de trayectoria para cuantizarlo.

Se estudiaron las simetrías del sistema no conservativo encontrando la carga de Noether. Estudiamos la conservación del flujo Hamiltoniano en un espacio fase extendido, donde lo que inicialmente era un parámetro t ahora es una nueva variable.

A nivel clásico realizamos una modificación al principio de acción en base a la formulación realizada por Galley en [2]; ya que en esta formulación se imponían condiciones de borde tanto en los momentos como en las coordenadas, lo cual no nos pareció natural en un principio variacional y por ello nosotros modificamos el principio de acción para que los bordes quedaran fijos únicamente para q. Sin embargo, esto nos fue útil solamente en la teoría clásica.

A nivel cuántico, retomando la motivación del Capítulo 2, estudiamos la integral de trayectoria y la usamos como herramienta para la cuantización del oscilador armónico amortiguado, implementando a su vez las transformaciones canónicas. Se encontró que la solución a dicho sistema es consistente con los resultados ya conocidos.

Capítulo 2

Método de Dirac

2.1. Introducción

Las teorías que poseen un significado físico fundamental tienden a ser teorías de norma. El análisis de Dirac muestra que las teorías de norma son sistemas Hamiltonianos con constricciones, en consecuencia podríamos considerar que la formulación Hamiltoniana es una formulación fundamental y por ello es importante establecer su estudio como punto de partida [12]. Para llegar al formalismo Hamiltoniano, es importante resaltar que procederemos de la manera usual, a partir de una acción escrita en términos de un lagrangiano, como se muestra a continuación.

2.2. El principio de acción

Comenzamos con el principio de acción en su forma Lagrangiana, el cual contiene información acerca de la dinámica de un sistema y que además es independiente del sistema de coordenadas que se elija; o bien, los sistemas que describe son invariantes ante transformaciones de coordenadas.

$$S(q^n, \dot{q}^n) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^n, \dot{q}^n)dt. \tag{2.1}$$

Imponemos las condiciones de frontera sobre las coordenadas,

$$\begin{aligned} q(t_1) &= q_1, \\ q(t_2) &= q_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Al variar la acción e imponer que sea estacionaria, obtenemos las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \tag{2.3}$$

en donde $n = 1, ..., N$.

Las ecuaciones (2.3) se pueden reescribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^n}\ddot{q}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^n}\ddot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial t}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De aquí definimos la matriz H_{in} como

$$H_{in} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^n}. \tag{2.5}$$

Podemos notar que las ecuaciones de movimiento pueden determinar las aceleraciones $\ddot{q}^i$ del sistema, siempre y cuando la matriz H_{in} (de nxn) sea invertible; es decir, que el determinante de dicha matriz sea diferente de cero,

$$det(H_{in}) \neq 0, \tag{2.6}$$

de lo contrario, las aceleraciones no pueden ser unívocamente determinadas por las ecuaciones de movimiento. Si (2.6) es igual a cero, se dice que el Lagrangiano es singular y ocurre que no todas las velocidades se pueden obtener como función de los momentos y de las coordenadas. Todos los sistemas reales son sistemas de norma, los cuales cumplen esta igualdad.
Utilizando la definición usual del momento canónico

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \tag{2.7}$$

podemos reescribir la ec.(2.6) utilizando (2.7)

$$det(H_{in}) = det\left(\frac{\partial P_n}{\partial \dot{q}^i}\right) \neq 0. \tag{2.8}$$

Cuando el determinante de la matriz H_{in} es cero, se puede observar de la ec.(2.8), la existencia de relaciones entre los momentos y las coordenadas. Estas relaciones son llamadas *constricciones primarias* y se denotan por

$$\phi_m(q,p) = 0, \tag{2.9}$$

con $m = 1, ..., M$. Usamos el subíndice m para distinguir las diferentes relaciones independientes de este tipo. Entonces, si M es el número de ecuaciones independientes entre (2.9), se cumple que $M = N - Rango(H_{in})$.

La ec. (2.9) define una hipersuperficie que se conoce como una superficie de constricción primaria, la cual es una subvariedad dentro del espacio fase completo, cuya dimensión es $(2N - M)$, sobre la cual se encuentra restringida la dinámica del sistema.

2.2.1. Principio de acción en su forma hamiltoniana

Trabajar en el formalismo Hamiltoniano nos permite representar la dinámica por medio de $2N$ coordenadas independientes, donde no solo podemos hacer transformaciones sobre las q^n, sino también sobre las p_i. Para introducir este formalismo, realizamos la transición entre $L(q^n, \dot{q}^n, t)$ y $H(q^n, p_n, t)$ utilizando la transformada de Legendre, y definiendo a H_c como el Hamiltoniano canónico.

$$H_c = \dot{q}^n p_n - L. \tag{2.10}$$

Como H_c es una función que depende de las coordenadas y los momentos, la transformada de Legendre ec. (2.10) posee la propiedad de que las $\dot{q}^n$ se incorporan al Hamiltoniano a través de la combinación de $p(q,\dot{q})$. Esto puede ser verificado tomando la variación δH_c como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\delta H_c &= \dot{q}^n \delta p_n + \delta \dot{q}^n p_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n, \\ &= \dot{q}^n \delta p_n + \delta \dot{q}^n p_n - p_n \delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n, \\ &= \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Podemos observar que la variación del Hamiltoniano canónico H_c depende tanto de la variación de los momentos como de las coordenadas, pero no está involucrada la variación de las velocidades. Sin embargo, el Hamiltoniano definido por (2.10) no se encuentra unívocamente determinado, ya que las variaciones de sus coordenadas no son todas independientes entre sí, pues deben de preservar las constricciones primarias (2.9). De esta manera, podemos decir que H_c está bien definido solo sobre la superficie de la constricción. Si queremos extender la teoría de manera arbitraria a todo el espacio fase, podemos trabajar con un Hamiltoniano total de la forma

$$H_T = H_c + \lambda^m \phi_m, \tag{2.12}$$

donde λ^m es un multiplicador de Lagrange arbitrario, que puede ser cualquier función de q^n y p_n.

Por lo anterior requerimos que las constricciones primarias sean cantidades conservadas sobre la superficie de constricción; es decir, que cualquier punto sobre esta superficie debe permanecer dentro de ella ante la evolución temporal de dicho punto,

$$\dot{\phi_m} = \{\phi_m, H_T\} \approx 0. \tag{2.13}$$

Por otro lado, volviendo a la ec.(2.11), observamos que ésta se cumple para cualquier variación de q^n y p_n, sujetas a la condición de que se preserve la constricción (2.9), es por ello las q^n y p_n no pueden variar de manera independiente. Los métodos de cálculo de variaciones empleados para obtener las ecuaciones de movimiento deducen lo siguiente:

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H_T}{\partial p_n} = \frac{\partial H_c}{\partial p_n} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \tag{2.14}$$

$$\dot{p_n} = -\frac{\partial H_T}{\partial q^n} = -\frac{\partial H_c}{\partial q^n} - \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \tag{2.15}$$

$$\phi_m(q,p) = 0. \tag{2.16}$$

Y así las ecs.(2.14 y 2.15) serán las ecuaciones de movimiento que describen el cambio de q y p en el tiempo, y que además involucran coeficientes λ^m arbitrarios.

2.3. Paréntesis de Poisson

Resulta conveniente introducir un formalismo que nos permita escribir las ecuaciones de movimiento ecs. (2.14) y (2.15) en un manera más compacta, para ello utilizaremos el formalismo de los paréntesis de Poisson. Con la ayuda de estos paréntesis, las ecuaciones de movimiento que fueron derivadas a partir del principio variacional también se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^n}\dot{q}^n + \frac{\partial F}{\partial p_n}\dot{p_n}, \tag{2.17}$$

en donde $F(q,p)$ es una función arbitraria de las variables canónicas. Si sustituimos los valores de (2.14) y (2.15) para q^n y p_n, expresamos a (2.17) como

$$\dot{F} = \{F, H\} + \lambda^m \{F, \phi_m\}, \tag{2.18}$$

o bien,

$$\dot{F} = \{F, H\} + \lambda^m \{F, \phi_m\} = \{F, H + \lambda^m \phi_m\}. \tag{2.19}$$

Así las ecuaciones de movimiento son escritas de manera concisa usando el formalismo de los paréntesis de Poisson, los cuales se definen como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^n}\frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial G}{\partial q^n}, \tag{2.20}$$

donde $G(q, p)$ es otra función arbitraria. Los paréntesis de Poisson cumplen con las siguientes propiedades:

(I) Antisimetría: $\{F, G\} = -\{G, F\}$.

(II) Linealidad: $\{c_1 F + c_2 G, B\} = c_1\{F, B\} + c_2\{G, B\}$, con c_1 y c_2 constantes.

(III) Elemento neutro: $\{c, F\} = 0$, con c una constante.

(IV) Identidad de Jacobi: $\{F,\{G, B\}\} + \{G,\{B, F\}\} + \{B,\{F, G\}\}=0$.

(V) Regla de Leibnitz: $\{FG, B\} = F\{G, B\} + \{F, B\}G$.

Algo importante que debemos de tomar en cuenta en el formalismo de los paréntesis de Poisson es que las ecuaciones de constricción (2.9) no se deben de usar antes de realizar un paréntesis de Poisson.

2.3.1. Constricciones primarias

Son las constricciones que relacionan las variables dinámicas de la teoría Hamiltoniana (momentos y coordenadas), estas restringen la dinámica en el espacio fase a una hipersuperficie llamada superficie de constricción primaria. Las constricciones primarias tienen la forma,

$$\phi_m(q^n, p_n) \approx 0. \tag{2.21}$$

Estas ecuaciones son llamadas ecuaciones débiles, o constricciones que son débilmente cero. Las cuales solo pueden ser usadas después de haber trabajado todos los paréntesis de Poisson de la forma mostrada en la ec.(2.19), hasta que tengamos la posibilidad de obtener las ecuaciones de movimiento de una manera concisa,

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \tag{2.22}$$

2.4. Algoritmo de Dirac-Bergmann

2.4.1. Constricciones secundarias

Ahora veamos algunas de las consecuencias de las ecuaciones de movimiento (2.19). Como primer requisito para la consistencia del método es asegurarnos de que la superficie de constricción (2.21) se preserve bajo la operación del paréntesis de Poisson, i.e. que se preserve en el tiempo, para ello se requiere que

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_T\} \approx 0. \tag{2.23}$$

En este proceso pueden aparecer nuevas constricciones ϕ_k, llamadas *constricciones secundarias*. Con $k = M+1, ..., M+K$, y en donde K es el número total de constricciones secundarias. Si durante el proceso vuelven a obtenerse más constricciones, tenemos que imponer la condición de que éstas se preserven en el tiempo $\dot{\phi}_k \approx 0$. Debemos de verificar si pueden surgir otras generaciones de constricciones al repetir el proceso, hasta que ya no se encuentren nuevas constricciones.

2.4.2. Ecuaciones débiles y fuertes

Antes de continuar cabe mencionar que hemos introducido el símbolo $\approx$ para denotar una igualdad *débil* en la ecuación de constricción. Ésta cantidad está restringida numéricamente a ser 0. Sin embargo, no es idénticamente cero a través del espacio fase. Esto significa que su paréntesis de Poisson con las variables canónicas no es cero.

Por otro lado, una ecuación que se mantiene a través del espacio fase y no solo en la subvariedad $\phi_j \approx 0$ es llamada *fuerte* y se utiliza el símbolo $=$ en este caso.

2.4.3. Constricciones de primera clase y segunda clase

Después de obtener las constricciones primarias y secundarias, definimos una clasificación diferente de constricciones, o bien, de funciones definidas en el espacio fase. Lo cual nos llevará al concepto de funciones de *primera clase* y de *segunda clase*.

Cantidad de primera clase: Una función $F(q,p)$ es de primera clase si su paréntesis de Poisson con cada constricción es débilmente cero

$$\{F, \phi_A\} \approx 0, \tag{2.24}$$

con A=$1, ..., J$. En donde J=$j_1 + j_2 + ... + j_N$, siendo j_N el número de constricciones de n-ésima generación.

Si F es de primera clase, entonces $\{F, \phi_A\}$ tiene que ser fuertemente igual a alguna función lineal de ϕ_B. Así tenemos que las ecuaciones fuertes son

$$\{F, \phi_A\} = f_A^B(q,p)\phi_B. \tag{2.25}$$

Cantidad de segunda clase: $F(q,p)$ de segunda clase no satisface (2.24) ni (2.25). Se dice que es de segunda clase si existe al menos una constricción tal que su paréntesis de Poisson con F no se hace cero. Ahora podemos definir las *constricciones de primera clase* y las *constricciones de segunda clase.*

Constricción de primera clase: Son todas aquellas constricciones G_a que satisfacen

$$\{G_a, \phi_B\} = C_{aB}^C(q,p)\phi_C \approx 0, \tag{2.26}$$

con a= $1, ..., I$, donde I el número de constricciones de primera clase. En este caso no es posible determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones ya que son parámetros arbitrarios que aparecen en la solución de las ecuaciones de movimiento.

Constricción de segunda clase: En el caso de las constricciones de segunda clase nos es posible determinar los multiplicadores de Lagrange gracias a la existencia de la matriz $C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$, formada por los paréntesis de Poisson de las constricciones de segunda clase. Esta matriz cumple con la característica de que su determinante es diferente de cero sobre la superficie de constricción, lo cual hace que la matriz $C_{\alpha\beta}$ sea invertible.

Para constricciones de segunda clase χ_α y χ_β tenemos

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = C_{\alpha,\beta}. \tag{2.27}$$

Las características de $C_{\alpha\beta}$ nos permiten mostrar que todos los multiplicadores de Lagrange asociados a las constricciones de segunda clase, pueden ser determinados. Las constricciones de segunda clase no pueden ser interpretadas como generadores de norma, por ello las transformaciones canónicas generadas por estas constricciones no preservan todas las constricciones $\phi_j \approx 0$.

2.4.4. Constricciones de primera clase como generadores de transformaciones de norma

La presencia de funciones arbitrarias λ^m en el hamiltoniano total nos dice que a pesar de que un estado físico esté unívocamente definido una vez que es dado el conjunto de q's y p's, el postulado inverso no es cierto. Ya que hay más de un conjunto de valores de las variables canónicas que representan un estado físico. Si damos un conjunto inicial de variables canónicas a un tiempo t_1, estas definen completamente el estado físico a ese tiempo, y esperaríamos que las ecuaciones de movimiento determinen totalmente el estado físico a otros tiempos.

Los coeficientes λ^m son funciones arbitrarias del tiempo, lo cual significa que el valor de las variables canónicas en t_2 dependerá de la elección de λ^m en el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$. La diferencia entre los valores de una variable dinámica F a un tiempo t_2 corresponde a dos diferentes elecciones de dos funciones arbitrarias λ^m, $\widetilde{\lambda}^m$ a un tiempo t_1, con $\delta\lambda^m = \widetilde{\lambda}^m - \lambda^m$, de tal forma que

$$\delta F = \delta\lambda^m \{F, \phi_m\}. \tag{2.28}$$

Como la transformación (2.28) no altera el estado físico a un tiempo t_2, podemos decir que las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma. Aunque en general las transformaciones del tipo ec.(2.28) no son las únicas que no cambian el estado físico. Los dos siguientes resultados son válidos.

1.- El paréntesis de Poisson $\{\phi^m, \tilde{\phi_m}\}$ de dos constricciones de primera clase cualesquiera, genera una transformación de norma. Es decir, las transformaciones generadas por las constricciones de primera clase preservan todas las constricciones tanto de primera como de segunda clase, y por lo tanto mapean un estado permitido en otro estado permitido.

2.- El paréntesis de Poisson $\{\phi^m, H'\}$ de cualquier constricción primaria de primera clase ϕ^m con un hamiltoniano de primera clase H' genera una transformación de norma. Así, el paréntesis de Poisson de dos generadores de norma permanece como un generador de norma.

2.4.5. Constricciones de segunda clase y el paréntesis de Dirac

Las constricciones de segunda clase no pueden ser interpretadas como generadores de norma, por ende las transformaciones canónicas generadas por una constricción de segunda clase χ no preserva todas las constricciones $\phi_j \approx 0$. Como no son generadores de simetrías, mapean estados permitidos en estados no permitidos.

Las constricciones de segunda clase siempre pueden ser tratadas como las de primera clase si uno incluye variables adicionales al problema tal que $C_{\alpha\beta}$ no sea invertible. Consideremos el ejemplo más sencillo de una teoría con constricciones de segunda clase, con N pares de coordenadas canónicas en donde el primer par (q^1, p_1) está constreñido a ser cero, tal que las constricciones son las siguientes:

$$\chi_1 = q^1 \approx 0, \tag{2.29}$$

$$\chi_2 = p_1 \approx 0. \tag{2.30}$$

En donde vemos que son de segunda clase ya que

$$\{\chi_1, \chi_2\} = 1 \not\approx 0. \tag{2.31}$$

Por las ecuaciones (2.29) y (2.30) vemos que los primeros grados de libertad no son importantes, por lo cual podemos descartarlos y trabajar con los paréntesis de Poisson modificados

$$\{F, G\}^* = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial G}{\partial q^n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right). \tag{2.32}$$

El trabajar con (2.32) de dos constricciones (2.29) y (2.30) significa que podemos fijar χ_α igual a cero antes de evaluar el paréntesis (usamos el paréntesis * en vez de el paréntesis de Poisson); es decir, podemos fijar el conjunto de constricciones de segunda clase fuertemente igual a cero. Las ecuaciones de movimiento para ($n \geq 2$) grados de libertad permanecen invariantes si reemplazamos el paréntesis de Poisson original por el paréntesis modificado.

Paréntesis de Dirac: Dirac propuso la generalización (2.31) para un conjunto arbitrario de constricciones de segunda clase. Debido a que $C_{\alpha\beta}$ es una matriz invertible, su inversa está dada por $C^{\alpha\beta}$ tal que:

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{2.33}$$

Y así queda definido el Paréntesis de Dirac como

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\}, \tag{2.34}$$

el cual tiene las propiedades de los paréntesis de Poisson:

(I) Antisimetría: $\{F,G\}^* = -\,\{G,F\}^*$.

(II) Linealidad: $\{c_1F_1 + c_2F_2, G\}^* = c_1\{F_1,G\}^* + c_2\,\{F_2,G\}^*$.

(III) Regla de Leibnitz: $\{F_1F_2, G\,\}^* = F_1\{F_2,G\}^* + F_2\{F_1,G\,\}^*$.

(IV) Identidad de Jacobi: $\{F,\{G,R\}^*\}^*+\{R,\{F,G\}^*\}^*+\{G,\{R,F\,\}^*\}^*=0$.

(V) Elemento neutro: $\{\chi_\alpha, F\}^*=0$.

2.5. Ejemplos

Ejemplo 1 Consideremos la acción clásica de una partícula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q(t))\right). \tag{2.35}$$

Ahora parametrizamos a t tal que $t \mapsto \tau(t)$, ahora t ya no es un parámetro, sino una variable de la que depende el lagrangiano. Al parametrizar t obtenemos

$$dt = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau, \tag{2.36}$$

$$dt = \dot{t}d\tau. \tag{2.37}$$

Mientras que para $q(t) = q(\tau)$ obtenemos

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dq}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = \dot{q}\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = \frac{\dot{q}}{\dot{t}}. \tag{2.38}$$

La acción bajo esta parametrización se ve como

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)\left(\frac{dq}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - V(q(\tau))\right], \\
S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)\left(\frac{dq}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right) - V(q(\tau))\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\right], \\
S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{1}{2}m\frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - V(q(\tau))\dot{t}\right].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Así, el lagrangiano del sistema parametrizado es

$$L = \frac{1}{2}m\frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - V(q(\tau))\dot{t}. \tag{2.40}$$

Obtenemos las ecuaciones de movimiento.

Para q:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0, \\
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{q}}{\dot{t}}\right) + \frac{\partial V}{\partial q}\dot{t} &= 0, \\
m\left(\frac{\dot{t}\ddot{q} - \dot{q}\ddot{t}}{\dot{t}^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial q}\dot{t} &= 0, \\
m\left(\frac{\ddot{q}}{\dot{t}} - \frac{\dot{q}\ddot{t}}{\dot{t}^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial q}\dot{t} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

En donde el momento generalizado asociado a q es:

$$P_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m\dot{q}}{\dot{t}}. \tag{2.42}$$

Para t:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} &= 0, \\
\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}} - V(q(\tau))\right) - \frac{\partial L}{\partial t} &= 0, \\
\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}^2} - V(q(\tau))\right) &= 0, \\
-\frac{m}{2}\left(\frac{2\dot{t}^2\dot{q}\ddot{q} - 2\dot{q}^2\dot{t}\ddot{t}}{\dot{t}^4}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}\dot{q} &= 0, \\
-m\left(\frac{\dot{q}\ddot{q}}{\dot{t}^2} - \frac{\dot{q}^2\ddot{t}}{\dot{t}^3}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}\dot{q} &= 0, \\
-m\left(\frac{\dot{q}\ddot{q}}{\dot{t}} - \frac{\dot{q}^2\ddot{t}}{\dot{t}^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial q}\dot{q}\dot{t} &= 0, \\
m\left(\frac{\ddot{q}}{\dot{t}} - \frac{\dot{q}\ddot{t}}{\dot{t}^2}\right) - \frac{\partial V}{\partial q}\dot{t} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

En donde el momento generalizado asociado a t es

$$\begin{aligned}
P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= -\frac{P_q^2}{2m} - V(q(\tau)), \\
P_t + \frac{P_q^2}{2m} + V(q(\tau)) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Así vemos que hemos llegado a una expresión que nos dice que los momentos generalizados del sistema no son independientes entre sí, este resultado como producto de la parametrización del tiempo t nos definirá una constricción en el sistema de la forma

$$\begin{aligned}
&G(P_t, P_q, q, t) = P_t + \frac{P_q^2}{2m} + V(q(\tau)), \\
&G(P_t, P_q, q, t) \approx 0.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Usamos la transformada de Legendre para construir el Hamiltoniano canónico, el cual tiene la siguiente forma:

$$H_c = P_q\dot{q} + P_t\dot{t} - L. \tag{2.46}$$

A partir de la forma de (2.46) podemos usar el teorema de Euler sobre funciones homogéneas. Observamos que el primer sumando es una función homogénea de orden Ω=1 en las velocidades; entonces,

$$P_q\dot{q} + P_t\dot{t} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\dot{t} = \Omega L = L, \tag{2.47}$$

Y así (2.46) nos quedaría como

$$\frac{\partial L}{\dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\dot{t} - L = \Omega L - L = L - L = 0. \tag{2.48}$$

De esta manera se puede ver de inmediato que el Hamiltoniano canónico es 0. Ahora bien, si queremos calcular explícitamente H_c usando la constricción obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
H_c &= P_q\dot{q} + P_t\dot{t} - L, \\
&= P_q\dot{q} + P_t\dot{t} - \frac{1}{2}m\frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} + V(q)\dot{t}, \\
&= P_q\dot{q} + P_t\dot{t} - \frac{P_q^2\dot{t}}{2m} + V(q)\dot{t}, \\
&= \frac{P_q^2\dot{t}}{m} + P_t\dot{t} - \frac{P_q^2\dot{t}}{2m} + V(q)\dot{t}, \\
&= P_t\dot{t} + \frac{P_q^2\dot{t}}{2m} + V(q)\dot{t}, \\
&= \dot{t}\left(P_t + \frac{P_q^2}{2m} + V(q)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Y como $H_T = H_c + \lambda G$, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned} H_T &= \lambda G, \\ H_T &= \lambda\left(P_t + \frac{P_q^2}{2m} + V(q)\right). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Sean $q^i = (t, q)$ y $P_i = (P_t, P_q)$, entonces calculamos:

$$\begin{aligned} \dot{P}_q &= \{P_q, H_T\}, \\ &= \frac{\partial P_q}{\partial q^i}\frac{\partial H_T}{\partial P_i} - \frac{\partial P_q}{\partial P_i}\frac{\partial H_T}{\partial q^i}, \\ &= -\frac{\partial P_q}{\partial P_i}\frac{\partial H_T}{\partial q^i}, \\ &= -\frac{\partial P_q}{\partial P_q}\frac{\partial H_T}{\partial q}, \\ &= -\lambda\frac{\partial V}{\partial q}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Lo mismo para $\dot{P}_t$:

$$\dot{P}_t = \{P_t, H_T\} = -\frac{\partial H_T}{\partial t} = 0. \tag{2.52}$$

Realizamos el mismo procedimiento para las coordenadas del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, H_T\}, \\ &= \frac{\partial H_T}{\partial P_q}, \\ &= \lambda\frac{P_q}{m}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \{t, H_T\}, \\ &= \frac{\partial H_T}{\partial P_t}, \\ &= \lambda. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ahora para comprobar el método de Dirac utilizamos el multiplicador de Lagrange λ y las ecuaciones anteriores. Cabe destacar que $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ y $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}$, mientras que $q' = \frac{dq}{dt}$. Así, del resultado de la ecuación (2.53)

$$\frac{P_q}{m} = \frac{\dot{q}}{\dot{t}} = \frac{dq}{dt} = q'. \tag{2.55}$$

Y usando el resultado de la ecuación (2.51) y la ec. (2.54) obtenemos lo siguiente:

$$-\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\dot{P}_q}{\dot{t}} = \frac{dP_q}{dt} = P_q'. \tag{2.56}$$

Notemos que al derivar P_q con respecto a t de la ecuación (2.55) y al sustituir el resultado en la ecuación (2.56) obtenemos

$$mq'' + \frac{\partial V}{\partial q} = 0. \tag{2.57}$$

Y así se observa claramente que hemos recuperado la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange del sistema sin parametrizar. Al recuperar las ecuaciones hemos comprobado el método de Dirac para este ejemplo.

Ahora, a nivel cuántico debemos promover las constricciones de primera clase, en este caso (2.45), al nivel de operadores en el espacio de Hilbert. Podemos ver a nuestra constricción como un operador unitario, o bien, como el generador de una simetría que deja invariante al estado físico $|\psi\rangle$

$$e^{i\epsilon\hat{G}} |\psi\rangle \equiv |\psi\rangle , \tag{2.58}$$

en donde ϵ es un parámetro real infinitesimal, y $\hat{G}$ es el generador de una transformación infinitesimal. De esta manera podemos hacer una expansión de la transformación de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(1 + i\epsilon\hat{G}) |\psi\rangle &= |\psi\rangle , \\
|\psi\rangle + i\epsilon\hat{G} |\psi\rangle &= |\psi\rangle , \\
i\epsilon\hat{G} |\psi\rangle &= 0, \\
\hat{G} |\psi\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

Podemos extender el resultado de la ec.(2.59) para un conjunto de constricciones $\hat{G}_a$, en donde $a = 1, ...n$, con n el número de constricciones

$$
\hat{G}_a |\psi\rangle = 0. \tag{2.60}
$$

La ec.(2.60) representa la versión cuántica de las constricciones, las cuales ya han sido promovidas a operadores, y que además operan sobre un estado físico $|\psi\rangle$ de tal manera que lo aniquilan. Esto proviene de pedir que los estados en el espacio de Hilbert sean invariantes de norma (2.58).

Volviendo a (2.59), ahora escribimos la constricción $\hat{G}$ en una base que depende de q y t en el formalismo de Heisenberg, en donde proyectamos a ψ en la base de q, t:

$$
\begin{aligned}
\langle q, t| \hat{G} |\psi\rangle &= G(\hat{P}_q, \hat{P}_t, \hat{q}, \hat{t}) \langle q, t|\psi\rangle , \\
&= G\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, q, t\right) \langle q, t|\psi\rangle .
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

De esta manera podemos decir que $\psi = \psi(q, t)$. Y además las coordenadas se promueven a operadores bajo las siguientes prescripciones:

$$
\begin{aligned}
P_t \mapsto \hat{P}_t &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \\
P_q \mapsto \hat{P}_q &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \\
q(\tau) \mapsto \hat{q}(\tau), &\quad t \to \hat{t}.
\end{aligned} \tag{2.62}
$$

Reescribimos la Ec(2.45) y la hacemos actuar sobre una función de onda ψ que depende de q y t

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(q,t)}{\partial q^2} - i\hbar\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} + V(q)\psi(q,t) = 0. \tag{2.63}$$

Reconocemos que el Hamiltoniano es el momento asociado el tiempo P_t, y así llegamos a la ecuación de Schrödinger.

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\psi(q,t). \tag{2.64}$$

En este ejemplo realizamos una parametrización del tiempo sistema, añadiendo un nuevo parámetro τ y promoviendo a nuestro tiempo original a una variable más. Encontramos la constricción del sistema, la cual nos permitió calcular el Hamiltoniano total y por ende la evolución temporal de las coordenadas y momentos. Comprobamos el método al encontrar la ecuación de movimiento que depende del parámetro inicial; es decir, la ecuación de movimiento del sistema sin parametrizar. Posteriormente, para el proceso de cuantización, promovimos las coordenadas a operadores, así como también promovimos la constricción del sistema clásico a un operador en particular, un operador que actúa como generador de una simetría sobre el estado físico $|\psi\rangle$. Y finalmente logramos expresar la versión cuántica de la partícula clásica parametrizada, mediante la ecuación de Schrödinger; el haber realizado inicialmente la parametrización del tiempo, nos permitió poder llegar a esta ecuación de una manera directa, considerando también a la constricción clásica como un operador importante a nivel cuántico.

Ejemplo 2 Consideremos ahora el problema clásico de un rotor rígido bidimensional, cuyo movimiento se ve constreñido a moverse en un círculo de radio a. El lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \lambda(r-a). \tag{2.65}$$

Calculamos los momentos generalizados:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{2.66}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \tag{2.67}$$

$$P_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0. \tag{2.68}$$

Al calcular el hamiltoniano total obtenemos:

$$\begin{aligned}
H_T &= H_c + \mu P_\lambda = P_r\dot{r} + P_\theta\dot{\theta} + P_\lambda\dot{\lambda} - L + \mu P_\lambda, \\
&= P_r\dot{r} + P_\theta\dot{\theta} + P_\lambda\dot{\lambda} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \lambda(r-a) + \mu P_\lambda, \\
&= P_r\left(\frac{P_r}{m}\right) + P_\theta\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{P_r}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right)^2 + \lambda(r-a) + \mu P_\lambda, \\
&= \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \lambda(r-a) + \mu P_\lambda.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Notemos que la ec. (2.68) nos define ya una constricción del sistema, evolucionamos esta constricción calculando $\dot{P}_\lambda$ y encontrando que,

$$\begin{aligned}
\dot{P}_\lambda &= \{P_\lambda, H_T\}, \\
&= \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda}\frac{\partial H_T}{\partial P_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial P_\lambda}\frac{\partial H_T}{\partial \lambda}, \\
&= -\frac{\partial H_T}{\partial \lambda} = -(r-a).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Como la evolución temporal de P_λ nos dio como resultado algo diferente de cero, se trata de una constricción secundaria que renombramos como ϕ_1 . Ahora nosotros imponemos que ésta se debe preservar en el tiempo; es decir, que se cumpla que $\dot{P}_\lambda \approx 0$; entonces,

$$\phi_1 = r - a \approx 0. \tag{2.71}$$

Evolucionamos la constricción secundaria para ver si encontramos nuevas constricciones:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \{\phi_1, H_T\} = \{(r-a), H_T\}, \\ &= \frac{\partial \phi_1}{\partial r}\frac{\partial H_T}{\partial P_r} - \frac{\partial \phi_1}{\partial P_r}\frac{\partial H_T}{\partial r}, \\ &= \frac{\partial H_T}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Al pedir que la constricción secundaria se preserve imponemos $\dot{\phi}_1 = \frac{P_r}{m} \approx 0$. Lo cual ha dado lugar a una constricción terciaria de la forma:

$$\phi_2 = P_r \approx 0. \tag{2.73}$$

Evolucionamos en el tiempo a nuestra constricción terciaria:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= \{\phi_2, H_T\}, \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\frac{\partial H_T}{\partial P_r} - \frac{\partial \phi_2}{\partial P_r}\frac{\partial H_T}{\partial r}, \\ &= -\frac{\partial H_T}{\partial r} = \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \lambda. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Como en la evolución de la constricción terciaria obtuvimos el multiplicador de Lagrange λ, podemos establecer en este punto, la igualdad estricta, de tal manera que

$$\dot{\phi}_2 = \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \lambda = 0. \tag{2.75}$$

Y facilmente evaluar el multiplicador de Lagrange,

$$\lambda = \frac{P_\theta^2}{mr^3}. \tag{2.76}$$

Por lo tanto, podemos clasificar a nuestro par de constricciones (2.71) y (2.73) como constricciones de segunda clase, y así las renombramos como

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \phi_1 = r - a, \\ \chi_2 &= \phi_2 = P_r. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Entonces, la matriz $C_{\alpha\beta}$ es

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{\chi_1, \chi_1\} & \{\chi_1, \chi_2\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & \{\chi_2, \chi_2\} \end{pmatrix}. \tag{2.78}$$

Calculamos las entradas de la matriz:

$$\begin{aligned} \{\chi_1, \chi_1\} =& \{r - a, r - a\} = 0, \\ \{\chi_2, \chi_2\} =& \{P_r, P_r\} = 0, \\ \{\chi_1, \chi_2\} =& \{r - a, P_r\} = 1, \\ \{\chi_2, \chi_2\} =& \{P_r, r - a\} = -1. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Por lo tanto $C_{\alpha\beta}$ y su inversa son:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.80}$$

$$C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

En este momento podemos calcular el paréntesis de Dirac de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\{A, B\}^* &= \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, B\}, \\
\{r, P_r\}^* &= \{r, P_r\} - \{r, \chi_2\}C^{21}\{\chi_1, P_r\}, \\
\{r, P_r\}^* &= \{r, P_r\} - \{r, P_r\}C^{21}\{r - a, P_r\}, \\
\{r, P_r\}^* &= 1 - 1(1)(1) = 1 - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Y así promovemos estos paréntesis a conmutadores para poder realizar el proceso de cuantización,

$$[r, P_r] = 0. \tag{2.83}$$

Ejemplo 3 Consideremos ahora el oscilador armónico amortiguado, cuyo lagrangiano correspondiente es

$$L = e^{bt/m}\left(\frac{m}{2}\dot{q}(t)^2 - \frac{k}{2}q(t)^2\right), \tag{2.84}$$

con la ecuación de movimiento

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = 0. \tag{2.85}$$

En donde $F = -b\dot{q}$ es una fuerza de fricción. Entonces, la acción de este sistema no conservativo es

$$S = \int_{t_i}^{t_f} e^{bt/m}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) dt. \tag{2.86}$$

En esta ejemplo vamos a realizar la parametrización del tiempo $t \mapsto \tau(t)$, donde

$$dt = d\tau \dot{t}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\dot{q}}{\dot{t}}. \tag{2.87}$$

Bajo estos cambios la acción se vuelve

$$S = \int_{t_i}^{t_f} d\tau \left[e^{bt/m} \left(\frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - \frac{k}{2} q^2 \dot{t} \right) \right]. \tag{2.88}$$

Identificamos al lagrangiano parametrizado como

$$L = L(q, \dot{q}, t, \dot{t}; \tau) = e^{bt/m} \left(\frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - \frac{k}{2} q^2 \dot{t} \right). \tag{2.89}$$

Calculamos los momentos generalizados:

$$P_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{bt/m} \left(\frac{m\dot{q}}{\dot{t}} \right), \tag{2.90}$$

$$P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = e^{bt/m} \left(-\frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} - \frac{k}{2} q^2 \right). \tag{2.91}$$

De la ec.(2.90) podemos obtener la siguiente relación:

$$\frac{\dot{q}}{\dot{t}} = \frac{P_q}{m} e^{-bt/m}. \tag{2.92}$$

Ahora sustituimos $\frac{\dot{q}}{\dot{t}}$ en la ec. (2.91) y obtenemos

$$\begin{aligned} P_t &= e^{bt/m}\left[-\frac{m}{2}\left(\frac{P_q}{m}e^{-bt/m}\right)^2 - \frac{k}{2}q^2\right], \\ P_t &= -\frac{P_q^2}{2m}e^{-bt/m} - \frac{k}{2}q^2 e^{bt/m}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Así, podemos ver a la constricción del sistema como

$$\phi = P_t + \frac{P_q^2}{2m}e^{-bt/m} + \frac{kq^2}{2}e^{bt/m} \approx 0. \tag{2.94}$$

Promovemos las coordenadas a operadores bajo las siguientes prescripciones:

$$\begin{aligned} P_t &\mapsto \hat{P}_t = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \\ P_q &\mapsto \hat{P}_q = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \\ P_q^2 &\mapsto -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}, \\ q &\mapsto \hat{q} = q. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Entonces la expresión cuántica de (2.94) está escrita de la siguiente forma,

$$-\hat{H}\psi(q,t) = -i\hbar\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}e^{-bt/m}\frac{\partial^2\psi(q,t)}{\partial q^2} - \frac{k}{2}e^{bt/m}q^2\psi(q,t). \tag{2.96}$$

De la ecuación anterior observamos que al realizar la cuantización no obtuvimos como resultado directo la ecuación de Schrödinger, debido a los términos con exponenciales presentes. Lo cual da pie a que posteriormente procedamos haciendo uso de las transformaciones canónicas. Ahora, calculemos el hamiltoniano canónico del sistema:

$$\begin{aligned}
&H_c = P_q\dot{q} + P_t\dot{t} - L, \\
&H_c = e^{bt/m}\left(\frac{m\dot{q}^2}{\dot{t}}\right) + e^{bt/m}\left(-\frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}} - \frac{k}{2}q^2\dot{t}\right) - e^{bt/m}\left(\frac{m\dot{q}^2}{2\dot{t}} - \frac{k}{2}q^2\dot{t}\right), \\
&H_c = 0.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Así el hamiltoniano total queda definido por la constricción,

$$\begin{aligned}
&H_T = H_c + \lambda\phi = \lambda\phi, \\
&H_T = \lambda\left(P_t + \frac{P_q^2}{2m}e^{-bt/m} + \frac{kq^2}{2}e^{bt/m}\right).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Calculamos la evolución temporal de las coordenadas y momentos del sistema:

$$\dot{P}_q = \{P_q, H_T\} = -\frac{\partial H_T}{\partial q} = -\lambda\left(kqe^{bt/m}\right), \tag{2.99}$$

$$\dot{P}_t = \{P_t, H_T\} = -\frac{\partial H_T}{\partial t} = \lambda\left(-\frac{bP_q}{2m^2}e^{-bt/m} + \frac{bkq^2}{2m}e^{bt/m}\right), \tag{2.100}$$

$$\dot{q} = \{q, H_T\} = \frac{\partial H_T}{\partial P_q} = \lambda\left(\frac{P_q}{m}e^{-bt/m}\right), \tag{2.101}$$

$$\dot{t} = \{t, H_T\} = \frac{\partial H_T}{\partial P_t} = \lambda. \tag{2.102}$$

Notemos que de la ec.(2.99) podemos obtener

$$\frac{\dot{P}_q}{\dot{t}} = \frac{dP_q}{dt} = -kqe^{bt/m}. \tag{2.103}$$

Análogamente, de la ec.(2.100) obtenemos

$$\frac{\dot{P}_t}{\dot{t}} = \frac{dP_t}{dt} = \frac{bkq^2}{2m}e^{bt/m} - \frac{bP_q}{2m^2}e^{-bt/m}. \tag{2.104}$$

A partir de (2.102) ya podemos determinar el multiplicador de Lagrange λ, el cual sustituimos en la ec. $\dot{q}$ (2.101) y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{t}\left(\frac{P_q}{m}e^{-bt/m}\right), \\ \frac{\dot{q}}{\dot{t}} &= \frac{dq}{dt} = \frac{P_q}{m}e^{-bt/m}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Finalmente, derivamos esta última expresión con respecto a t, sustituimos P_q y $P_q'= \frac{dP_q}{dt}$.

$$\begin{aligned} q'' - \frac{1}{m}\left(\frac{-bP_q}{m}e^{-bt/m} + P_q' e^{-bt/m}\right) &= 0, \\ mq'' + bq' + kq &= 0. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Así recuperamos la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado en el tiempo original, por lo cual el método es consistente.

Volviendo al Lagrangiano de la ec.(2.84), y haciendo uso de transformaciones canónicas, podemos obtener la solución clásica. Primero construimos el Hamiltoniano con la transformada de Legendre, en donde el momento y la velocidad son:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \\ &= e^{bt/m}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right), \end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m}e^{-bt/m}. \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L, \\ &= \frac{p^2}{2m}e^{-bt/m} + \frac{k}{2}q^2 e^{bt/m}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento de Hamilton son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ &= \frac{p}{m}e^{-bt/m}, \end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ &= -kqe^{bt/m}. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Ahora hacemos uso de las siguientes transformaciones canónicas, las cuales nos ayudarán a simplificar el hamiltoniano, eliminando la dependencia explícita del tiempo:

$$Q = qe^{bt/2m}, \tag{2.112}$$

$$P = pe^{-bt/2m}. \tag{2.113}$$

La función generadora de las transformaciones canónicas es de tipo 2, ya que depende de q, P y t:

$$F_2(q, P, t) = e^{bt/2m}qP. \tag{2.114}$$

Así, nuestro nuevo hamiltoniano escrito en términos de las transformaciones canónicas es una función K que depende de Q, P y t:

$$\begin{aligned} K(Q, P, t) &= H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}Q^2 + \frac{b}{2m}qPe^{bt/2m}, \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}Q^2 + \frac{b}{2m}PQ. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Notemos que K no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto para este nuevo hamiltoniano la energía se conserva. Ahora resolvemos las ecuaciones de movimiento para (2.115) utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)^2+\frac{k}{2}Q^2+\frac{b}{2m}Q\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0, \tag{2.116}$$

como K no depende explícitamente del tiempo, $K=\alpha_1=cte$, tal que

$$S=W-\alpha_1 t, \tag{2.117}$$

y así la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)^2+\frac{k}{2}Q^2+\frac{b}{2m}Q\left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)&=\alpha_1,\\ \left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)^2+mkQ^2+bQ\left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)&=2m\alpha_1.\end{aligned} \tag{2.118}$$

Como la ecuación anterior es una ecuación cuadrática en el término $\frac{\partial W}{\partial Q}$, la resolvemos de la siguiente manera,

$$\frac{\partial W}{\partial Q}=-\frac{b}{2}Q\pm\frac{1}{2}\sqrt{(b^2-4mk)Q^2+8m\alpha_1}, \tag{2.119}$$

esta expresión puede integrarse de manera directa,

$$W(Q,\alpha_1)=-\frac{b}{4}Q^2\pm\frac{1}{2}\int dQ\sqrt{(b^2-4mk)Q^2+8m\alpha_1}. \tag{2.120}$$

Ahora derivamos con respecto a α_1,

$$\begin{aligned}
\tilde{Q} &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \\
&= \pm 2m \int \frac{dQ}{\sqrt{(b^2 - 4mk)Q^2 + 8m\alpha_1}}, \\
&= \pm \frac{2m}{\sqrt{4mk - b^2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{4mk - b^2}{8m\alpha_1}} Q\right).
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Suponemos que $4mk > b^2$:

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 &= \frac{4mk - b^2}{4m^2}, \\
\frac{4mk - b^2}{8m} &= \frac{k}{2} - \frac{b^2}{8m}, \\
&= \frac{m}{2}\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right), \\
&= \frac{m}{2}\omega_0^2.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Entonces,

$$t + \beta_1 = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2\alpha_1}} \omega_0 Q\right). \tag{2.123}$$

Finalmente, la solución al sistema, en términos de la coordenada transformada Q es

$$Q(t) = \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} sin[\omega_0 (t + \beta_1)]. \tag{2.124}$$

En términos de la coordenada q original, la solución se ve como

$$q(t) = Q(t) e^{-bt/2m} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}} e^{-bt/2m} sin[\omega_0 (t + \beta_1)], \tag{2.125}$$

en donde las constantes α_1 y β_1 son determinadas por las condiciones iniciales.

En este ejemplo nos dimos cuenta que para cuantizar el sistema tendríamos que hacer uso de la ec.(2.94). Sin embargo, la misma forma de la ecuación nos sugiere el uso de transformaciones canónicas, ya que la correspondencia con la ecuación de Schrödinger no es directa, como se muestra en (2.96).

En el ejemplo de la partícula parametrizada consideramos a las constricciones como generadores de simetrías del sistema. Y recordemos que en el caso clásico, el grupo más grande de simetrías es el de las transformaciones canónicas. Si usamos las transformaciones (2.112) y (2.113), podemos reescribir la acción en términos de estas nuevas coordenadas.

$$\begin{aligned} S &= \int L dt, \\ &= \int dt (P\dot{Q} - K). \end{aligned} \tag{2.126}$$

En donde K es el nuevo hamiltoniano de la ec.(2.115); entonces,

$$S = \int dt \left(P\dot{Q} - \frac{P^2}{2m} - \frac{k}{2}Q^2 - \frac{b}{2m}PQ \right). \tag{2.127}$$

Ahora tomamos la variación de la acción con respecto a P;

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta P} &= \int dt \left(\dot{Q} - \frac{P}{m} - \frac{bQ}{2m} \right), \\ 0 &= \dot{Q} - \frac{P}{m} - \frac{bQ}{2m}, \\ P &= m\dot{Q} - \frac{b}{2}Q. \end{aligned} \tag{2.128}$$

Sustituimos P en K de la ec.(2.126) y obtenemos que

$$K = \frac{1}{2m}\left(m\dot{Q} - \frac{bQ}{2}\right)^2 + \frac{k}{2}Q^2 + \frac{bQ}{2m}\left(m\dot{Q} - \frac{bQ}{2}\right). \tag{2.129}$$

Entonces, la acción se ve como

$$\begin{aligned} S &= \int dt\left[\dot{Q}\left(m\dot{Q} - \frac{b}{2}Q\right) - \frac{1}{2m}\left(m\dot{Q} - \frac{b}{2}Q\right)^2 - \frac{k}{2}Q^2 - \frac{b}{2m}Q\left(m\dot{Q} - \frac{b}{2}Q\right)\right], \\ &= \int dt\left[\frac{m}{2}\dot{Q}^2 - \frac{b}{2}Q\dot{Q} - \frac{k}{2}Q^2 + \frac{b^2}{8m}Q^2\right]. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Así, el nuevo Lagrangiano es

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\dot{Q}^2 - \frac{b}{2}Q\dot{Q} - \left(\frac{k}{2} - \frac{b^2}{8m}\right)Q^2. \tag{2.131}$$

Calculamos la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange para (2.131):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} &= 0, \\ m\ddot{Q} + Q\left(k - \frac{b^2}{4m}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Sustituimos $Q = qe^{bt/2m}$ y derivamos dos veces. Sustituimos en las ecuaciones de Euler-Lagrange y observamos que obtenemos la ya conocida ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = 0. \tag{2.133}$$

Notemos que el término $-\frac{b}{2}Q\dot{Q}$ de la ec.(2.131) es una derivada total, por lo cual no afecta las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, no vamos a descartarlo, ya posteriormente veremos que es importante en la teoría cuántica.

Ahora bien, podemos parametrizar el tiempo (como en los ejemplos anteriores) en la acción dada por la ecuación (2.130) de tal forma que

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tau, \\ dt &= d\tau \dot{t}, \\ \frac{dQ}{d\tau} &= \dot{Q}, \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{\dot{Q}}{\dot{t}}. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Entonces, definomos una nueva acción $\tilde{S}$,

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \dot{t} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\dot{Q}}{\dot{t}} \right) - \frac{b}{2} Q \left(\frac{\dot{Q}}{\dot{t}} \right) - \frac{kQ^2}{2} + \frac{b^2 Q^2}{8m} \right], \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{m}{2} \frac{\dot{Q}^2}{\dot{t}} - \frac{b}{2} Q \dot{Q} - \frac{kQ^2}{2} \dot{t} + \frac{b^2 Q^2}{8m} \dot{t} \right]. \end{aligned} \tag{2.135}$$

Con el lagrangiano correspondiente,

$$\tilde{L}' = \frac{m}{2} \frac{\dot{Q}^2}{\dot{t}} - \frac{b}{2} Q \dot{Q} - \frac{kQ^2}{2} \dot{t} + \frac{b^2 Q^2}{8m} \dot{t}. \tag{2.136}$$

Calculamos los momentos P_Q y P_t:

$$P_Q = \frac{\partial \tilde{L}'}{\partial \dot{Q}} = m \frac{\dot{Q}}{\dot{t}} - \frac{b}{2} Q, \tag{2.137}$$

$$P_t = \frac{\partial \tilde{L}'}{\partial \dot{t}} = -\frac{m \dot{Q}^2}{\dot{t}^2} - \frac{k}{2} Q^2 + \frac{b^2 Q^2}{8m}. \tag{2.138}$$

Se puede verificar rápidamente con el teorema de Euler para funciones homogéneas que el Hamiltoniano canónico se anula, debido a que

$$H_c = P_Q\dot{Q} + P_t\dot{t} - \hat{L}' = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\dot{t} - \hat{L}' = \hat{L}' - \hat{L}' = 0. \tag{2.139}$$

Para encontrar la constricción del sistema ϕ, expresamos (2.138) en términos de los momentos, sustituyendo la cantidad $\frac{\dot{Q}}{\dot{t}} = \frac{P_Q}{m} + \frac{bQ}{2m}$; entonces,

$$\begin{aligned} P_t &= -\frac{m}{2}\left[\frac{P_Q}{m} + \frac{bQ}{2m}\right]^2 - \frac{kQ^2}{2} + \frac{b^2Q^2}{8m}, \\ P_t &= -\frac{P_Q^2}{2m} - \frac{k}{2}Q^2 - \frac{b}{2m}P_QQ = -H. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Por lo tanto, la constricción del sistema es

$$\phi = \frac{P_Q^2}{2m} + \frac{k}{2}Q^2 + \frac{b}{2m}P_QQ + P_t \approx 0. \tag{2.141}$$

Notemos que el término P_QQ en (2.140) conlleva un problema de ordenamiento para hacer la cuantización. Lo cual nos motiva a abordar posteriormente la cuantización de este sistema utilizando la integral de trayectoria.

Capítulo 3

Simetrías del sistema no conservativo

3.1. Introducción

El concepto de simetría en sistemas físicos conlleva una invariancia de las ecuaciones de movimiento, cuando un grupo de transformaciones continuas son aplicadas al Lagrangiano o al Hamiltoniano del sistema. El teorema de Noether relaciona estos conceptos por medio de una dependencia recíproca entre las simetrías de una teoría con la existencia de cantidades (cargas y corrientes de Noether) físicas que ser conservan.

En este capítulo se calcula la carga de Noether asociada al oscilador armónico amortiguado. A pesar de que se trata de un sistema no conservativo debido a la dependencia explícita del tiempo t en el Lagrangiano, tenemos una cantidad conservada, la cual resulta ser el Hamiltoniano del sistema, escrito en términos de las transformaciones canónicas que nos permiten eliminar la dependencia temporal explícita.

3.2. Principio variacional

3.2.1. Variaciones virtuales

Cuando fijamos el tiempo en una variación ($\tilde{\delta} t = 0$), pero variamos las posiciones tenemos lo que son las variaciones virtuales, definidas como

$$\tilde{\delta} q^a = q'^a - q^a. \tag{3.1}$$

Al tomar la variación de la acción obtenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} S &= \tilde{\delta}\int_{t_1}^{t_2} dt\; L(q,\dot{q},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \tilde{\delta} L(q,\dot{q},t),\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q^a}\tilde{\delta} q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\tilde{\delta}\dot{q}^a\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Debemos resaltar que la variación virtual conmuta con la derivada total,

$$\tilde{\delta}\dot{q}^a = \tilde{\delta}\frac{dq^a}{dt} = \frac{d}{dt}\tilde{\delta} q^a. \tag{3.3}$$

Entonces, al aplicar esto en la acción e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\tilde{\delta} q^a + \left[\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^a}\tilde{\delta} q^a\right|_{t_1}^{t_2},\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\tilde{\delta} q^a = 0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Imponiendo que las variaciones virtuales se anulan en los extremos

$$\tilde{\delta} q^a(t_1) = \tilde{\delta} q^a(t_2) = 0. \tag{3.5}$$

Por lo tanto, para variaciones virtuales de la acción, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0. \tag{3.6}$$

Además, definimos

$$E = \tilde{\delta} L = \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \tilde{\delta} q^a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \tilde{\delta} q^a \right). \tag{3.7}$$

3.2.2. Variaciones reales

En este tipo de variaciones se varían tanto el tiempo como las posiciones,

$$\delta q^a = q'^a(t') - q^a(t). \tag{3.8}$$

La variación de la acción es la acción en las coordenadas transformadas menos la acción original,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt' L'(q', \dot{q}', t') - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t). \tag{3.9}$$

De donde se tienen las siguientes relaciones de las variaciones:

$$\delta t = t' - t, \tag{3.10}$$

$$\delta q^a = \tilde{\delta} q^a + \delta t \dot{q}^a, \tag{3.11}$$

$$\delta \dot{q}^a = \delta t \ddot{q}^a + \tilde{\delta} \dot{q}^a. \tag{3.12}$$

Sustituyendo estas variaciones en la variación de la acción (3.9), obtenemos que δL es

$$\delta L = L' - L = \frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta \dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t. \tag{3.13}$$

Entonces, al desarrollar obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta \dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t, \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^a}\left(\tilde{\delta} q^a + \delta t \dot{q}^a\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\left(\tilde{\delta}\dot{q}^a + \delta t \ddot{q}^a\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t, \\
&= \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\tilde{\delta} q^a + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\tilde{\delta} q^a\right] + \left(\frac{\partial L}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\ddot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta t, \\
&= \tilde{\delta} L + \frac{dL}{dt}\delta t.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Por lo tanto, la variación real del Lagrangiano se puede escribir en términos de su variación virtual:

$$
\delta L = L' - L = \tilde{\delta} L + \frac{dL}{dt}\delta t. \tag{3.15}
$$

Sustituyendo estos resultados en la acción (3.9), ésta adquiere la siguiente forma,

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(1 + \frac{d}{dt}\delta t\right)(L + \delta L) - \int_{t_1}^{t_2} dt L, \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\delta L + \frac{d\delta t}{dt}L\right), \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\tilde{\delta} L + \delta t\frac{dL}{dt} + \frac{d\delta t}{dt}L\right), \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\tilde{\delta} L + \frac{d}{dt}(\delta t L)\right].
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Ahora usamos el resultado de la ec.(3.7) en la ecuación anterior, y suponiendo que se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \tilde{\delta} q^a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \tilde{\delta} q^a \right) + \frac{d}{dt}(\delta t L) \right], \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \tilde{\delta} q^a + \delta t L \right).
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

En este punto es conveniente introducir la deducción variacional del teorema de Noether, para comenzar con el estudio de las simetrías de un sistema clásico.

3.2.3. Teorema de Noether

Debido a que queremos estudiar las simetrías de las ecuaciones de movimiento, debemos encontrar la carga de Noether, para ello comenzamos proponiendo que la variación de una acción dada por $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)$ tenga la siguiente estructura

$$
\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\delta\Omega}{dt}. \tag{3.18}
$$

Del resultado anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
\delta L = L' - L &= -\frac{d\delta\Omega}{dt}, \\
\Rightarrow L' &= L - \frac{d\delta\Omega}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

De esta manera, la acción se ve como:

$$
\begin{aligned}
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\delta\Omega}{dt} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \tilde{\delta} q^a + \delta t L \right) dt, \\
\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \tilde{\delta} q^a + \delta t L + \delta\Omega \right) &= 0, \\
\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} (\delta q^a - \delta t \dot{q}^a) + \delta t L + \delta\Omega \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Y entonces definimos la siguiente cantidad Q,

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta \dot{q}^a - \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L \right) + \delta\Omega. \tag{3.21}$$

La cual satisface que $\frac{dQ}{dt} = 0$, por lo cual Q es una cantidad conservada, se trata de la carga de Noether que proviene de las simetrías δq y δt, de las ecuaciones de movimiento. A partir de esta expresión nosotros podemos conocer las cantidades físicas que se conservan en un sistema físico con simetrías, posteriormente la utilizaremos para analizar nuestro sistema clásico en el espacio fase extendido.

3.2.4. Teorema de Liouville

En el caso de un sistema que no depende explícitamente del tiempo, se formula el teorema de Liouville, para sistemas cuya evolución preserva elementos de volumen en el espacio fase; es decir, sistemas donde el flujo fase preserva volúmenes. Las variables canónicas (q, p) a un tiempo t_1 se relacionan con las variables (Q, P) a un tiempo t_2 mediante una transformación canónica en particular. La ec.(3.22) nos dice que el elemento de volumen en el espacio fase es invariante bajo transformaciones canónicas; es decir, no varía con el tiempo. Lo anterior, en términos de fluidos, se puede interpretar como un fluido incompresible:

$$\int dq_1...dq_n\, dp_1...dp_n = \int dQ_1...dQ_n\, dP_1...dP_n. \tag{3.22}$$

El tamaño de los elementos de volumen de las coordenadas originales y las transformadas se encuentran relacionados por medio del determinante de la matriz Jacobiana $|J|$,

$$(dq)(dp) = |J|\,(dQ)(dP). \tag{3.23}$$

En donde $(dq) = dq_1\, dq_2...dq_n$ y $(dp) = dp_1...dp_n$ se transforman en los nuevos elementos de volumen: $(dQ) = dQ_1\, dQ_2...dQ_n$ y $(dP) = dP_1...dP_n$.

Además la matriz Jacobiana es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial p_n} \\ . & & & & & & . \\ . & & . & & & & . \\ . & & & & . & & . \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}.$$

Cuando se trata de una transformación canónica el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana es 1, y con ello se prueba la invariancia canónica del elemento de volumen en el espacio fase.

Cuando tenemos un flujo que preserva volúmenes en el espacio fase y que además es suficientemente bien comportado, el flujo satisface las ecuaciones de movimiento, a dicho flujo se le llama flujo Hamiltoniano.

En base a la demostración que se hace en [15], del teorema de Liouville, lo verificamos para nuestro problema en el espacio fase extendido. Veamos el caso de una función Hamiltoniana del tipo $H = H(q, t, p, p_t)$, donde las ecuaciones de Hamilton son las correspondientes a la partícula parametrizada del Ejemplo 1, que se encuentra en la sección (2.5).

$$\dot{p} = -\frac{\partial \lambda G}{\partial q}, \tag{3.24}$$

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial \lambda G}{\partial t}, \tag{3.25}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \lambda G}{\partial p}, \tag{3.26}$$

$$\dot{t} = \frac{\partial \lambda G}{\partial p_t}. \tag{3.27}$$

Estas ecuaciones definen un campo vectorial, a cada punto $(p, p_t, q, t,)$ del espacio fase le corresponde un vector 4-dimensional $(-\frac{\partial H}{\partial q}, -\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial p_t})$.

El flujo fase es un grupo de transformaciones del espacio fase dado por

$$g^{\tau} : (p(0), p_t(0), q(0), t(0)) \to (p(\tau), p_t(\tau), q(\tau), t(\tau)); \tag{3.28}$$

donde $p(\tau)$, $p_t(\tau)$, $q(\tau)$ y $t(\tau)$ son soluciones al sistema de ecuaciones de Hamilton.

El teorema de Liouville establece que el flujo fase preserva volúmenes para cualquier región D; es decir,

$$volumen\ de\ g^{\tau}\ D = volumen\ de\ D.$$

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dadas por: $\dot{x} = f(x), \quad x = (p, p_t, q, t)$. Sea

$$g^{\tau}(x) = x + f(x)\tau + O(\tau^2), \tag{3.29}$$

con $\tau \to 0$.

Y $D(0)$ una región en el espacio y $v(0)$ su volumen, entonces $v(\tau)$ es el volumen de $D(\tau)$ de tal manera que $D(\tau) = g^{\tau} D(0)$.

Por otro lado, si $div f = 0$, entonces g^{τ} preserva volúmenes; i.e. $v(\tau) = v(0)$, para demostrar esto proseguimos de la siguiente manera.

$$\left(\frac{dv}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \int_{D(0)} div f\ dx, \tag{3.30}$$

en donde $dx = dp\, dp_t\, dq\, dt$; entonces,

$$v(\tau) = \int_{D(0)} det\ \frac{\partial g^{\tau} x}{\partial x} dx. \tag{3.31}$$

Sabemos que en general

$$detA = e^{tr\ lnA}, \tag{3.32}$$

en donde

$$A = Id + \partial f\ \tau, \tag{3.33}$$

que en términos de sus componentes se ve como

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\tau, \tag{3.34}$$

aproximando el logaritmo, en el espacio extendido tenemos

$$\begin{aligned} lnA_{ij} \approx& \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\tau, \\ \Rightarrow tr\ lnA =& tr\ \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\tau = \frac{\partial f_i}{\partial x^i}\tau. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para (3.32) obtenemos

$$detA = exp\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^i}\tau\right). \tag{3.36}$$

Calculamos $\frac{\partial g^\tau x}{\partial x}$ a partir de (3.29),

$$\frac{\partial g^\tau x}{\partial x} = Id + \frac{\partial f}{\partial x}\tau + O(\tau^2). \tag{3.37}$$

Entonces, el determinante de esta expresión es:

$$\begin{aligned} det\ \frac{\partial g^\tau x}{\partial x} &= 1 + \tau\, tr \frac{\partial f}{\partial x} + O(\tau^2), \\ &= 1 + \tau \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + O(\tau^2), \\ &= 1 + \tau\, div f + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Por lo tanto,

$$v(\tau) = \int_{D(0)} = \left[1 + \tau\, div f + O(\tau^2)\right] dx. \tag{3.39}$$

Por otro lado, en base a (3.30), si $div f = 0$; entonces $\frac{dv}{d\tau} = 0$. De esa manera, de las ecuaciones de Hamilton $(3.24) - (3.27)$ se obtiene que

$$div f = \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial \lambda G}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial p_t}\left(-\frac{\partial \lambda G}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \lambda G}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \lambda G}{\partial p_t}\right) = 0. \tag{3.40}$$

Tomando en cuenta que $\lambda = \lambda(\tau)$ y que las demás variables son independientes entre sí. Con esto mostramos que la demostración del teorema de Liouville de [15] se cumple para sistemas dependientes del tiempo en el espacio fase extendido, cuya acción es invariante ante reparametrizaciones del tiempo. Ahora podemos proceder a realizar el ejemplo del oscilador armónico amortiguado.

3.3. Ejemplo

Consideremos el Lagrangiano del oscilador armónico amortiguado,

$$L(q, \dot{q}, t) = e^{bt/m}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right). \tag{3.41}$$

En el Capítulo 1 vimos que asociado a este sistema existe una cantidad que llamamos $K(q,p,t)$:

$$K(q,p,t) = \frac{p^2}{2m}e^{-bt/m} + \frac{kq^2}{2}e^{bt/m} + \frac{b}{2m}pq. \tag{3.42}$$

La carga conservada (3.42) puede ser reescrita como

$$K(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{k}{2}Q^2 + \frac{b}{2m}PQ. \tag{3.43}$$

Hay que recordar las transformaciones canónicas que utilizamos:

$$P = p\, e^{-bt/2m}, \tag{3.44}$$

$$Q = q\, e^{bt/2m}. \tag{3.45}$$

Ahora calculamos las variaciones de q y p generadas por K; δq y δp, utilizando (3.42) y tomando un parámetro infinitesimal ϵ:

$$\delta q = \{q, \epsilon K\} = \epsilon\frac{\partial K}{\partial p} = \epsilon\left(\frac{p}{m}e^{-bt/m} + \frac{bq}{2m}\right), \tag{3.46}$$

$$\delta p = \{p, \epsilon K\} = -\epsilon\frac{\partial K}{\partial q} = -\epsilon\left(qke^{bt/m} + \frac{bp}{2m}\right), \tag{3.47}$$

$$\delta t = \{t, \epsilon K\} = 0. \tag{3.48}$$

En seguida calculamos la variación del Lagrangiano (3.41) y sustituimos (3.46) y (3.47):

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}, \\
\delta L &= e^{bt/m}\left(m\dot{q}\,\delta\dot{q} - kq\,\delta q\right).
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

Para sustituir δq y $\delta \dot{q}$ en (3.49) reescribimos (3.46) usando $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ $e^{bt/m}$; entonces,

$$
\delta q = \epsilon\left(\dot{q} + \frac{bq}{2m}\right), \tag{3.50}
$$

$$
\delta \dot{q} = \epsilon\left(\ddot{q} + \frac{b\dot{q}}{2m}\right). \tag{3.51}
$$

Sustituimos estos resultados en (3.49) y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\delta L = {} & \epsilon e^{bt/m}\left[m\dot{q}\left(\ddot{q} + \frac{b\dot{q}}{2m}\right) - kq\left(\dot{q} + \frac{bq}{2m}\right)\right], \\
& = \epsilon\frac{b\dot{q}^2}{2}e^{bt/m} + \epsilon m\dot{q}\ddot{q}\,e^{bt/m} - \epsilon\frac{kbq^2}{2m}e^{bt/m} - \epsilon kq\dot{q}\,e^{bt/m}, \\
& = \epsilon\frac{b\dot{q}^2}{2}e^{bt/m} + \epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{q}^2}{2}e^{bt/m}\right) - \frac{\epsilon b\dot{q}^2}{2}e^{bt/m} - \epsilon\frac{kbq^2}{2m}e^{bt/m} - \epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{kq^2}{2}e^{bt/m}\right) \\
& + \epsilon\frac{kbq^2}{2m}e^{bt/m}, \\
& = -\epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{kq^2}{2}e^{bt/m} - \frac{m\dot{q}^2}{2}e^{bt/m}\right), \\
\delta L = {} & -\frac{d}{dt}\delta\Omega.
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

En donde la cantidad $\delta\Omega$ es

$$
\delta\Omega = \epsilon\left(\frac{kq^2}{2}e^{bt/m} - \frac{m\dot{q}^2}{2}e^{bt/m}\right). \tag{3.53}
$$

Utilizando (3.53) y el Lagrangiano (3.41), calculamos la carga de Noether:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \delta\Omega, \\
Q &= \epsilon m\dot{q}^2 e^{bt/m} + \epsilon\frac{bq\dot{q}}{2}e^{bt/m} + \epsilon\frac{kq^2}{2}e^{bt/m} - \epsilon\frac{m\dot{q}^2}{2}e^{bt/m}.
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Sustituimos $\dot{q} = \frac{p}{m}\, e^{-bt/m}$ y obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
Q &= \epsilon\left(\frac{p^2}{2m}e^{-bt/m} + \frac{bpq}{2m} + \frac{kq^2}{2}e^{bt/m}\right), \\
Q &= \epsilon\left(\frac{P^2}{2m} + \frac{kQ^2}{2} + \frac{b}{2m}PQ\right), \\
Q &= \epsilon K.
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Veamos que nuestra carga de Noether es el Hamiltoniano de la ec.(2.115) escrito en términos de las nuevas coordenadas encontradas por medio de las transformaciones canónicas, las cuales se usaron para eliminar la dependencia explícita del tiempo. Siendo así K la energía conservada en el espacio fase extendido, representado por las coordenadas originales y las transformadas: $(q, p, t, p_t) \to (Q, P, T, P_T)$, con la función generadora F_2. Encontramos las ecuaciones de transformación por medio de las siguientes relaciones generadas por F_2:

$$
F_2(q_i, P_i) = F_2(q, P_q, t, P_t) = q_i P_i = qP_q + tP_T = e^{bt/2m} q\, P + t\, P_T, \tag{3.56}
$$

$$
P_q = \frac{\partial F_2}{\partial q} = e^{bt/2m}P, \tag{3.57}
$$

$$
\begin{aligned}
p_t &= \frac{\partial F_2}{\partial t} = P_T + \frac{b}{2m}qPe^{bt/2m} \\
p_t &= P_T + \frac{b}{2m}PQ,
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = qe^{bt/2m}, \qquad (3.59) \qquad\qquad T = \frac{\partial F_2}{\partial P_T} = t. \qquad (3.60)$$

Recordemos que de las ecuaciones (2.93) y (2.109) obtuvimos que $p_t = -H$ y así podemos comprobar de la ec.(3.58) que

$$P_T = -H - \frac{b}{2m} PQ = -K. \tag{3.61}$$

En base a la ec.(3.23), la relación entre los elementos de volumen de las coordenadas originales y las transformadas es la siguiente,

$$dp\, dq\, dp_t\, dt = |J|\, dP\, dQ\, dP_T\, dT. \tag{3.62}$$

En donde la matriz Jacobiana es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial t} & \frac{\partial Q}{\partial p_t} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial T}{\partial q} & \frac{\partial T}{\partial t} & \frac{\partial T}{\partial p_t} & \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{\partial P_T}{\partial q} & \frac{\partial P_T}{\partial t} & \frac{\partial P_T}{\partial p_t} & \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial t} & \frac{\partial P}{\partial p_t} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} e^{bt/2m} & \frac{qb}{2m} e^{bt/2m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{b}{2m}\right)^2 e^{bt/2m} & 1 & 0 \\ e^{-bt/2m} & -\frac{pb}{2m} e^{-bt/2m} & 0 & e^{-bt/2m} \end{bmatrix} = 1.$$

Por lo tanto, la transformación es canónica. La carga de Noether que encontramos nos dice que el flujo Hamiltoniano en este nuevo espacio fase extendido es conservado, en donde K es el generador de las simetrías de las ecuaciones de movimiento. En este ejemplo mostramos como podemos llevar a nuestro sistema original no conservativo a un espacio fase extendido, con una dimensión temporal extra, y tratar a ese sistema como uno que sí conserva la energía, solamente dentro del espacio extendido.

Capítulo 4

Principio variacional para sistemas no conservativos

4.1. Introducción

En mecánica clásica el principio de Hamilton se basa en una formulación Lagrangiana o Hamiltoniana de un sistema que supone una dinámica conservativa; sin embargo, descripción de sistemas no conservativos. En este capítulo se estudiará la formulación de Galley [2] para sistemas en donde no se conserva la energía, y se introducirá un nuevo principio de acción modificando el principio de Galley en las condiciones de borde.

4.2. Principio de Hamilton

El principio de acción de Hamilton es el punto de partida para el estudio del movimiento de las partículas. El cual afirma que para cada sistema mecánico existe una integral S llamada acción, que toma su valor extremo de tal forma que su variación es cero. Es decir, establece que la trayectoria clásica que toma una partícula es tal que la acción es estacionaria (puede tomar un valor máximo, se puede tratar de un punto silla o de un mínimo). La acción se puede representar como la integral con respecto al tiempo de la función Lagrangiana del sistema mecánico en cuestión,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dtL. \tag{4.1}$$

El principio de Hamilton nos permite derivar las ecuaciones de movimiento que determinan la dinámica del sistema dado. Cabe destacar que este principio descansa en una formulación ya sea Lagrangiana o Hamiltoniana que supone una dinámica conservativa y que en general no describe sistemas no conservativos.

La configuración inicial, la evolución dinámica y la configuración final de sistemas no conservativos se deben determinar a partir de las condiciones iniciales, las cuales son usadas para resolver las ecuaciones de movimiento derivadas a partir del principio de Hamilton, el cual es formulado con condiciones de borde en el tiempo y no usando condiciones iniciales.

Esta sutileza ha dado lugar a complicaciones en ciertos casos y en consecuencia ha dado pie a formulaciones Lagrangianas y Hamiltonianas para sistemas no conservativos. En [2] y [3] muestran un ejemplo en donde el tratamiento clásico del principio de Hamilton en un sistema no conservativo expone algunas incongruencias en un ejemplo específico de dos osciladores acoplados, que más adelante explicaremos.

Para tratar este problema se propone un nuevo principio variacional, el cual involucra la variación de dos conjuntos de trayectorias. Se define una nueva acción, como la integral con respecto al tiempo de la función Lagrangiana a lo largo de cada camino tal que las coordenadas y velocidades de los dos caminos sean iguales entre sí al tiempo final, sin que estén fijas en un valor particular, ya que se requiere que el principio de Hamilton sea consistente con una formulación que involucre condiciones iniciales en vez de condiciones de frontera.

El doblar los grados de libertad trae como consecuencia el que se pueda incluir una función K arbitraria, la cual acopla las dos trayectorias. Esta función es la responsable de generar fuerzas generalizadas arbitrarias en las ecuaciones de Euler-Lagrange, además de determinar la ganancia o pérdida de energía del sistema.

4.3. Formulación de Galley para sistemas no conservativos

El ejemplo que toman en [2] para mostrar la motivación de duplicar los grados de libertad para sistemas no conservativos es el siguiente.

Sea un oscilador armónico con amplitud $q(t)$, masa m y frecuencia ω, el cual se encuentra acoplado con una fuerza λ a otro oscilador armónico cuya amplitud es $Q(t)$, masa M y frecuencia Ω. Notemos que el sistema total conserva la energía, ya que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo t. La acción del sistema es

$$S(q, Q) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q Q + \frac{M}{2}(\dot{Q}^2 - \Omega^2 Q^2) \right]. \tag{4.2}$$

No obstante, si solo estamos interesados en conocer la dinámica de $q(t)$, debido a que no conocemos o no tenemos acceso a la dinámica $Q(t)$, entonces $q(t)$ se puede ver como un sistema que se encuentra abierto e intercambia energía con Q, entonces $q(t)$ gana o pierde energía de una manera no conservativa.

Para tomar en cuenta el efecto que tiene el oscilador $Q(t)$ en la evolución de $q(t)$ debemos encontrar las soluciones a las ecuaciones de movimiento de Q y sustituirlas en la acción. La ecuación de movimiento de Q es

$$\ddot{Q}(t) + \Omega^2 Q(t) = \frac{\lambda q(t)}{M}, \tag{4.3}$$

en donde la función de Green para este problema, es la función $G_R(t, t')$ que satisface

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2 \right) G_R(t, t') = L_t G_R(t, t') = \delta(t - t'). \tag{4.4}$$

Podemos resolver para $G_R(t, t')$ escribiendo la función Delta en términos de sus transformada de Fourier:

$$\delta(t - t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}. \tag{4.5}$$

Proponemos que $G_R(t, t')$ sea de la forma

$$G_R(t,t') = \int d\omega \frac{G(\omega)}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}. \tag{4.6}$$

Sustituyendo G_R en la ec. (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2\right] \int \frac{d\omega}{2\pi} G(\omega) e^{i\omega(t-t')} &= \delta(t-t'), \\
\int d\omega G(\omega) e^{i\omega(t-t')} [\Omega^2 - \omega^2] &= \int \frac{d\omega}{2\pi} G(\omega) e^{i\omega(t-t')}, \\
G(\omega) &= \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Así G_R nos queda como

$$G_R(t,t') = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \; e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}. \tag{4.8}$$

Entonces, volviendo a la ec.(4.4), la solución particular de (4.3) en términos de la función de Green es

$$Q_p(t) = \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} G_R(t,t') q(t') dt'. \tag{4.9}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
L_t Q(t) &= \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} L_t G_R(t,t') q(t') dt', \\
&= \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} \delta(t-t') q(t') dt', \\
&= \frac{\lambda}{M} q(t).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

De tal modo que la solución $Q(t)$ está dada por la suma de la solución a la ecuación homogénea y la solución particular:

$$Q(t) = Q_H + Q_p = Q_H + \frac{\lambda}{M}\int_{t_i}^{t_f} G_R(t,t')q(t')dt'. \tag{4.11}$$

Antes de sustituir la solución $Q(t)$ veamos que el siguiente término de la acción (4.2) lo podemos integrar por partes y obtener lo siguiente:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{M}{2}\dot{Q}^2 = \frac{M}{2}\left[\dot{Q}Q\right]_{t_i}^{t_f} - \frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} Q\ddot{Q}dt. \tag{4.12}$$

Entonces, (4.2) nos queda como

$$\begin{aligned} S(q,Q) &= \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q Q - \frac{M}{2}\left(Q\ddot{Q} + \Omega^2 Q^2\right)\right] + \frac{M}{2}\left[\dot{Q}Q\right]_{t_i}^{t_f}, \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q Q - \frac{M}{2}Q\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2\right)Q\right] + \frac{M}{2}\left[\dot{Q}Q\right]_{t_i}^{t_f}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por otro lado desarrollamos el siguiente término:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{M}{2}Q\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega^2\right)Q\right] &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{M}{2}QL_tQ\right], \\
&= -\frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[(Q_h+Q_p)L_t(Q_h+Q_p)\right], \\
&= -\frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[(Q_h+Q_p)L_t(Q_p)\right], \\
&= -\frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[Q_p\left(\frac{\lambda}{M}\right)\int_{t_0}^{t_f} dt' L_tG_R(t,t')q(t')\right], \\
&= -\frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[Q_p\left(\frac{\lambda}{M}\right)\int_{t_0}^{t_f} dt'\delta(t-t')q(t')\right], \\
&= -\frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[Q_p\left(\frac{\lambda}{M}q(t)\right)\right], \\
&= -\frac{M}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\left(\frac{\lambda}{M}\int_{t_i}^{t_f} dt' G_R(t,t')q(t')\right)\left(\frac{\lambda}{M}q(t)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Por lo tanto,

$$
\int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{M}{2}Q\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega^2\right)Q\right] = -\frac{\lambda^2}{2M}\int_{t_i}^{t_f} G_R(t,t')q(t')q(t)dt'dt. \tag{4.15}
$$

Ahora esta solución la sustituimos en la acción total del sistema, obtenemos la siguiente expresión para lo que será nuestra acción efectiva:

$$
S_{eff}(q) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)+\lambda q(t)Q_h(t)+\frac{\lambda^2}{2M}\int_{t_i}^{t_f} dt' q(t)G_R(t,t')q(t')\right]. \tag{4.16}
$$

En donde $Q_h(t)$ es la solución homogénea y $G_R(t-t')$ es la función de Green retardada para el oscilador Q. Cabe destacar que en el último término de (4.16) tenemos dos integrales temporales y tenemos también el producto de $q(t)q(t')$, éste producto es simétrico en el tiempo $t \leftrightarrow t'$ y se acopla solo en la parte simétrica temporal de la función de Green retardada. Así, el segundo término de (4.16) lo podemos expresar en términos de la función avanzada de Green,

$$\frac{\lambda^2}{2M}\int_{t_i}^{t_f} dtdt' q(t)\left[\frac{G_{Ret}(t,t')+G_{Adv}(t,t')}{2}\right] q(t'). \tag{4.17}$$

La ecuación de movimiento resultante es

$$m\ddot{q}+m\omega^2 q=\lambda Q_h(t)+\frac{\lambda^2}{2M}\int_{t_i}^{t_f} dt'\left[G_{Ret}(t,t')+G_{Adv}(t,t')\right] q(t'). \tag{4.18}$$

Se hace énfasis en que la función de Green avanzada implica soluciones que no evolucionan causalmente. Por otro lado, el kernel de la integral es simétrico en el tiempo, lo cual significa que la integral describe interacciones conservativas entre q y Q. Y es por ello que (4.18) no toma en cuenta la disipación; sin embargo, se trata de un proceso antisimétrico en el tiempo.

La función de Green avanzada que se encuentra en (4.17) y en (4.18), aparece debido a que el factor $q(t)q(t')$ se acopla solo en la parte simétrica en el tiempo de la función de Green retardada. Lo que Galley propone en [2], es introducir dos variables q_1 y q_2, para romper esta simetría, lo cual implica que $q_1(t)q_2(t')$ se acoplarán en la función de Green retardada no solo en la parte simétrica. Variando con respecto a q_1 y estableciendo q_2=q_1 después de haber hecho la variación, nos dará la fuerza generalizada correcta. El procedimiento para sistemas no conservativos en general se muestra a continuación.

Sean $q \equiv \{q_i\}_{i=1}^{N}$ y $\dot{q} \equiv \{\dot{q}_i\}_{i=1}^{N}$ conjuntos de N coordenadas generalizadas y velocidades de un sistema dinámico en general. Duplicamos ambos conjuntos tales que, $q \to (q_1, q_2)$ y $\dot{q} \to (\dot{q}_1, \dot{q}_2)$. La interpretación de la duplicación de los grados de libertad es que la variable q_1 evoluciona desde algún valor inicial q_{1i} desde el tiempo $t = t_i$ hasta un tiempo final, donde q_{1f} es un valor determinado por la evolución de q_{1i}, en lugar de que sea especificado por el problema. Lo mismo para q_2, que evoluciona desde un valor inicial q_{2i}.

La nueva acción S para las variables duplicadas es la siguiente

$$
\begin{aligned}
S[q_1, q_2] &= \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_1, \dot{q}_1, t) - \int_{t_f}^{t_i} dt L(q_2, \dot{q}_2, t), \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[L(q_1, \dot{q}_1, t) - L(q_2, \dot{q}_2, t) \right].
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Como se puede observar, q_1 y q_2 se encuentran desacopladas una de la otra, podemos añadir una función arbitraria $K(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)$ que acople estas variables duplicadas, tal que la acción (4.19) esté dada por

$$
S[q_1, q_2] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[L(q_1, \dot{q}_1, t) - L(q_2, \dot{q}_2, t) + K(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \right]. \tag{4.20}
$$

Entonces, definimos el Lagrangiano que considera los grados de libertad duplicados como

$$
\Lambda = L(q_1, \dot{q}_1, t) - L(q_2, \dot{q}_2, t) + K(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t). \tag{4.21}
$$

Sabemos que si añadimos una derivada total temporal al lagrangiano, las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes. Entonces, añadimos lo que llamaremos como “factor de corrección”, de tal forma que el lagrangiano que usaremos será el siguiente,

$$
\tilde{\Lambda}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = \tilde{\Lambda}(q_a, \dot{q}_a, t) = \Lambda(q_a, \dot{q}_a, t) - \frac{d}{dt} B(q_a, \dot{q}_a, t). \tag{4.22}
$$

En donde $a = 1, 2$. Entonces, al variar la acción tendremos una variación en el lagrangiano $\tilde{\Lambda}$. Considerando que la variación de $\dot{q}_a$ conmuta con la derivada obtenemos

$$
\begin{aligned}
\delta \tilde{\Lambda} &= \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a - \frac{d}{dt} \delta B, \\
&= \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial q_a} \frac{d}{dt} \delta q_a - \frac{d}{dt} \delta B.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Así, la variación de la acción

$$\tilde{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt\tilde{\Lambda}, \tag{4.24}$$

queda como:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{S} &= \int_{t_i}^{t_f} dt(\delta\tilde{\Lambda}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\delta\Lambda - \frac{d}{dt}\delta B\right], \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\delta q_a\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_a}\delta q_a - \delta q_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right) - \frac{d}{dt}\delta B\right], \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\delta q_a\right)\right] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right)\right]\delta q_a - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt}\delta B\right], \\
&= \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\delta q_a\right]_{t_i}^{t_f} - \delta B|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right)\right]\delta q_a, \\
&= \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right|_{t_f}\delta q_a(t_f) - \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right|_{t_i}\delta q_a(t_i) - \delta B\Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right)\right]\delta q_a.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Imponemos las siguientes condiciones:

$$\delta q_a(t_i) = 0, \tag{4.26}$$

$$\delta q_1(t_f) = \delta q_2(t_f). \tag{4.27}$$

Entonces,

$$\delta\tilde{S} = \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right|_{t_f}\delta q_a(t_f) - \delta B|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right)\right]\delta q_a. \tag{4.28}$$

Para que (4.28) recupere las ecuaciones de movimiento ordinarias de Euler-Lagrange, proponemos que el término de borde B sea

$$B = \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right|_{t_f} q_a(t). \tag{4.29}$$

Y de esta manera,

$$
\begin{aligned}
\delta B\Big|_{t_i}^{t_f} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_a}\Big|_{t_f} \delta q_a|_{t_i}^{t_f}\,, \\
&= \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_a}\Big|_{t_f} (\delta q_a(t_f) - \delta q_a(t_i)).
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Y tomando en cuenta (4.26), la ec. (4.28) nos queda como

$$
\begin{aligned}
\delta S = &\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_1}}\Big|_{t_f} \delta q_1(t_f) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_2}}\Big|_{t_f} \delta q_2(t_f) - \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_1}}\Big|_{t_f} \delta q_1(t_f) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_2}}\Big|_{t_f} \delta q_2(t_f)\right], \\
&+ \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_a}}\right)\right] \delta q_a, \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_a}}\right)\right] \delta q_a = 0, \\
&\frac{\partial \Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q_a}}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Por lo cual, vemos que al agregar el término de borde B como un término de corrección a nivel de la acción, las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes. En contraste con la formulación de Galley [2], en donde se impone la condición de que los momentos coincidan en t_f, en nuestro caso solo fue necesario imponer las condiciones (4.26) y (4.27). Debido a que en un principio variacional no es natural imponer condiciones de borde sobre las coordenadas y los momentos. Introducimos un término de corrección en la forma de una derivada total en el tiempo, la cual no afecta a las ecuaciones de movimiento, e impusimos condiciones de borde únicamente en las coordenadas.

Para obtener las ecuaciones de movimiento, tomamos el lagrangiano (4.22), así las ecuaciones de movimiento serán

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\dot{q}^a} - \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial q^a} = 0. \tag{4.32}$$

Para q_1 se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^1} - \frac{\partial L}{\partial q^1} + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}^1} - \frac{\partial K}{\partial q^1}\right]_{PL} = 0. \tag{4.33}$$

Y para q_2 tenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^2} - \frac{\partial L}{\partial q^2} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}^2} - \frac{\partial K}{\partial q^2}\right]_{PL}. \tag{4.34}$$

Ahora, para que las ecuaciones de movimiento sean físicas, debemos tomar el límite físico dado por (4.35) y (4.36):

$$q_1 = q_2 = q, \tag{4.35}$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}. \tag{4.36}$$

4.4. Ejemplo

Basándonos en la formulación de Galley para sistemas no conservativos, construiremos la acción para un oscilador armónico amortiguado,

$$\Lambda = L + K, \tag{4.37}$$

en donde L es nuestro lagrangiano conservativo de la forma: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ y K es el potencial no conservativo definido como

$$K = -\lambda(q_1 - q_2)\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right). \tag{4.38}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= L(q_1,\dot{q}_1,t) - L(q_2,\dot{q}_2,t) + K(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t) - \frac{dB}{dt},\\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}kq_1^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}kq_2^2 - \lambda(q_1-q_2)\left(\frac{\dot{q}_1+\dot{q}_2}{2}\right) - \frac{dB}{dt},\end{aligned} \tag{4.39}$$

en donde Λ es

$$\Lambda = L(q_1,\dot{q}_1,t) - L(q_2,\dot{q}_2,t) + K(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t). \tag{4.40}$$

Así, la acción es

$$\begin{aligned}S[q_1,q_2] &= \int_{t_i}^{t_f} dt\Lambda(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t) - \frac{dB}{dt},\\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}kq_1^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}kq_2^2 - \lambda(q_1-q_2)\left(\frac{\dot{q}_1+\dot{q}_2}{2}\right) - \frac{dB}{dt}\right],\end{aligned} \tag{4.41}$$

Donde B es

$$B = \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right|_{t_f} q_a(t) = \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_1}\right|_{t_f} q_1(t) + \left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_2}\right|_{t_f} q_2(t), \tag{4.42}$$

que a nivel de las ecuaciones de movimiento interviene como

$$
\begin{aligned}
\delta B\Big|_{t_i}^{t_f} &= \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\Big|_{t_f}\delta q_a\Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\Big|_{t_f}\delta q_a(t_f) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\Big|_{t_f}\delta q_a(t_i),\\
&= \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_1}\Big|_{t_f}\delta q_1(t_f) + \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_2}\Big|_{t_f}\delta q_2(t_f) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_1}\Big|_{t_f}\delta q_1(t_i) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_2}\Big|_{t_f}\delta q_2(t_i),\\
&= \left[m\dot{q}_1 - \frac{\lambda}{2}(q_1-q_2)\right]_{t_f}\delta q_1(t_f) + \left[-m\dot{q}_2 - \frac{\lambda}{2}(q_1-q_2)\right]_{t_f}\delta q_2(t_f),\\
&- \left[m\dot{q}_1 - \frac{\lambda}{2}(q_1-q_2)\right]_{t_f}\delta q_1(t_i) - \left[-m\dot{q}_2 - \frac{\lambda}{2}(q_1-q_2)\right]_{t_f}\delta q_2(t_i).
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Para calcular las ecuaciones de movimiento tomamos la variación de la acción:

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt\delta\tilde{\Lambda} = 0,\\
&= \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\Big|_{t_f}\delta q_a(t_f) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\Big|_{t_f}\delta q_a(t_i) - \delta B\Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right]\delta q_a = 0,\\
&= -\left[m\dot{q}_1 - \frac{\lambda}{2}(q_1-q_2)\right]_{t_f}\delta q_1(t_i) - \left[-m\dot{q}_2 - \frac{\lambda}{2}(q_1-q_2)\right]_{t_f}\delta q_2(t_i) - \delta B\Big|_{t_i}^{t_f} +\\
&\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right]\delta q_a = 0.
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Sustituimos el resultado de (4.43) en la ecuación anterior (4.44) y así obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a}\right]\delta q_a &= 0,\\
\frac{\partial\Lambda}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_a} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Así las ecuaciones de movimiento para q_1 y q_2 son:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1(t) + kq_1(t) + \lambda\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right) &= 0, \\ m\ddot{q}_2(t) + kq_2(t) + \lambda\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Las cuales en el límite físico satisfacen la ecuación de movimiento del oscilador armónico amortiguado

$$m\ddot{q}(t) + \lambda\dot{q}(t) + kq(t) = 0. \tag{4.47}$$

Ahora, nos interesa cuantizar este sistema, para utilizar el método de Dirac debemos encontrar la constricción del sistema. Comenzamos parametrizando el tiempo como $t \to \tau(t)$; entonces, $\frac{dq}{dt} = \frac{\dot{q}}{\dot{t}}$. Bajo esta parametrización la acción adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S[q_1, q_2] &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \tilde{\Lambda}(q_1, q_2, t, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{t}; \tau), \\ S[q_1, q_2] &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2}m\frac{\dot{q}_1^2}{\dot{t}} - \frac{1}{2}kq_1^2\dot{t} - \frac{1}{2}m\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{t}} + \frac{k}{2}q_2^2\dot{t} - \lambda(q_1 - q_2)\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Calculamos las ecuaciones de movimiento. Para q_1 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau}\left[m\frac{\dot{q}_1}{\dot{t}} - \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2)\right] + kq_1\dot{t} + \lambda\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

En donde el momento generalizado asociado a q_1 es

$$P_{q_1} = m\frac{\dot{q}_1}{\dot{t}} - \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2). \tag{4.50}$$

La ecuación de movimiento para q_2 es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\dot{q}_2} - \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau}\left[-m\frac{\dot{q}_2}{\dot{t}} - \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2)\right] - kq_2\dot{t} - \lambda\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.51}$$

En donde el momento generalizado asociado a q_2 es

$$P_{q_2} = -m\frac{\dot{q}_2}{\dot{t}} - \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2). \tag{4.52}$$

La ecuación de movimiento para t es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial\dot{t}} - \frac{\partial\tilde{\Lambda}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau}\left[m\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{t}^2} - m\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{\dot{t}^2} - \frac{1}{2}kq_1^2 + \frac{1}{2}kq_2^2\right] &= 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

En donde el momento generalizado asociado a t es

$$P_t = m\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{t}^2} - m\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{\dot{t}^2} - \frac{1}{2}kq_1^2 + \frac{1}{2}kq_2^2. \tag{4.54}$$

Ahora reescribimos la ecuación de P_t en términos de los momentos y las coordenadas, reemplazando las siguientes cantidades:

$$\frac{\dot{q}_1}{\dot{t}} = \frac{1}{m}\left[P_{q_1} + \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2)\right], \quad (4.55) \qquad \frac{\dot{q}_2}{\dot{t}} = \frac{1}{m}\left[-P_{q_2} - \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2)\right]. \tag{4.56}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{2}\left[P_{q_2}^2 + \lambda(q_1 - q_2)P_{q_2} + \frac{\lambda^2}{4}(q_1 - q_2)^2\right] - \frac{1}{2m}\left[P_{q_1}^2 + \lambda P_{q_1}(q_1 - q_2) + \frac{\lambda^2}{4}(q_1 - q_2)^2\right], \\ &- \frac{1}{2}k(q_1^2 - q_2^2). \\ \Phi &= \frac{P_{q_1}^2}{2m} - \frac{P_{q_2}^2}{2m} + \frac{\lambda}{2m}P_{q_1}(q_1 - q_2) - \frac{\lambda}{2m}P_{q_2}(q_1 - q_2) + P_t - \frac{1}{2}k(q_2^2 - q_1^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Notemos que la ec. (4.57) se anula al tomar el limite físico, lo cual resulta ser un problema sustancial al querer cuantizar y resolver el problema siguiendo el método de Dirac, esto motiva a realizar el proceso de cuantización por medio de la integral de trayectoria, en donde ya no tomaremos en cuenta el principio de acción de Galley.

El método de Galley modificado ayuda a realizar una reformulación del principio de Hamilton para sistemas no conservativos; en donde se rompe la simetría temporal de las funciones de Green que aparecen en las ecuaciones de movimiento, introduciendo dos coordenadas distintas evaluadas a tiempos distintos, así como también añadiendo un término de borde desde el Lagrangiano, imponiendo las condiciones de frontera únicamente sobre las coordenadas. Esta reformulación nos permite tener un principio de Hamilton consistente para sistemas no conservativos; sin embargo, al tratar de utilizar el método de Dirac para realizar la cuantización, el resultado obtenido no nos permitió proseguir en esta dirección, por lo cual decidimos abordar este problema con la integral de trayectoria de Feynman.

Capítulo 5

Integral de trayectoria

5.1. Introducción

En este capítulo usaremos la integral de trayectoria como alternativa al proceso de cuantización La formulación de la mecánica cuántica dada por la integral de trayectoria, generaliza el principio de acción que conocemos de la mecánica clásica, reemplazando la noción clásica de que el sistema seguirá una única trayectoria, por un sistema representado por una integral funcional, la cual es la suma sobre todos los posibles caminos. El objeto fundamental que nos interesa calcular es la amplitud de transición, la cual nos da la probabilidad de que el sistema transite entre dos estados, por ejemplo si el sistema se encuentra en un estado en el cuadro de Schrödinger $|\psi, t_a\rangle$ a un tiempo t_a, entonces la amplitud de transición al estado$|\phi, t_b\rangle$ a un tiempo t_b se define como

$$K(\psi, \phi) = \langle \psi, t_b | \phi, t_a \rangle \,. \tag{5.1}$$

La integral de trayectoria la podemos ver como la suma de todos los caminos continuos a pedazos de un punto q_a a q_b en el intervalo de tiempo t_b-t_a, en donde cada camino tiene un factor de peso dado por la exponencial de la acción clásica a lo largo de esa trayectoria. De esta manera, cada trayectoria continua por pedazos representa una posible historia del movimiento de la partícula.

5.2. Ordenamiento

La transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica, en el formalismo Hamiltoniano, se hace promoviendo las coordenadas a operadores, los cuales no necesariamente conmutan. Cuando en el Hamiltoniano clásico están involucrados productos de x y p, el orden del producto de estos términos carece de importancia. Sin embargo, en la mecánica cuántica el orden de los operadores juega un papel crucial, desafortunadamente no hay un principio bien definido que especifique el orden de los operadores cuando pasamos de la descripción clásica a la cuántica de una teoría. Algunas prescripciones que normalmente se utilizan son las siguientes.

El ordenamiento normal, el cual consiste en ordenar los productos de x y p de tal forma que los momentos permanecen a la izquierda de las coordenadas. Y el ordenamiento de Weyl, en donde se simetriza el producto de operadores en todas sus posibles combinaciones.

Un resultado importante de la integral de trayectoria es el hecho de que el problema de ordenamiento carece de importancia, si nosotros usáramos el ordenamiento normal o el de Weyl, los resultados que obtendríamos serían los mismos.

5.3. Integral funcional

El primer paso para derivar la integral de trayectoria es construir los eigenestados $|q,t\rangle$ y $|p,t\rangle$ de los operadores $Q(t)$ y $P(t)$ en el cuadro de Heisenberg, definidos como

$$|q,t\rangle = e^{iHt/\hbar}\,|q\rangle\,, \qquad (5.2) \qquad\qquad |p,t\rangle = e^{iHt/\hbar}\,|p\rangle\,. \qquad (5.3)$$

Estos estados cumplen con la relación de completez,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\,|q,t\rangle\,\langle q,t| = exp(iHt/\hbar)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dq\,|q\rangle\,\langle q|\right) exp(-iHt/\hbar) = 1. \quad (5.4)$$

El estado $\mid q, t\rangle$ es un eigenestado del operador $Q(t)$ en el cuadro de Heisenberg, en el sentido de que se cumple

$$Q(t)\,|q,t\rangle = q\,|q,t\rangle\,. \tag{5.5}$$

Mientras que en un estado $|\psi, t\rangle$ en el cuadro de Schrödinger cumple

$$\langle q|\psi,t\rangle = \psi(q,t). \tag{5.6}$$

Estos estados pueden usarse para derivar la integral de trayectoria para la transición entre estados en el cuadro de Schrödinger, nos ayudarán a calcular el objeto de nuestro interés, la amplitud de transición K, que está definida como el producto interior de eigenestados instantáneos a distintos tiempos,

$$K(q_a,t_a;q_b,t_b) = \langle q_b,t_b|q_a,t_a\rangle\,, \tag{5.7}$$

donde $t_b>t_a$. De (5.6) nos podemos dar cuenta de que una vez que especificamos los estados iniciales y finales del sistema, éste se propaga en el tiempo desde ψ hasta ϕ a través de la función K. Por esta razón (5.7) a veces se le identifica con el propagador o el "kernel", ya que contiene toda la información con respecto a la evolución temporal del sistema.

Lo que sigue es hacer N particiones del intervalo de tiempo $[t_b, t_a]$ en $N+1$ pedazos infinitesimales, cuya duración es de $\epsilon = \frac{t_b-t_a}{N+1}$. Tomando el límite de $N\to\infty$, y añadiendo a K el conjunto completo de eigenestados intermedios instantáneos obtenemos

$$K(q_a,t_a;q_b,t_b) = \int_{\infty}^{\infty} dq_1\cdots dq_N\,\langle q_b,t_b|q_N,t_N\rangle\,\langle q_N,t_N|q_{N-1},t_{N-1}\rangle\cdots\langle q_1,t_1|q_a,t_a\rangle\,. \tag{5.8}$$

De esta forma podemos ver que el j-ésimo término está dado por

$$
\begin{aligned}
\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | \, e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{H}(P,Q)} \, | q_j \rangle \,, \\
&= \langle q_{j+1} | \, e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar}\hat{H}(P,Q)} \, | q_j \rangle \,, \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}t_{j+1}H} \quad e^{\frac{i}{\hbar}t_j H}, \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)H}.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Para poder aplicar el operador Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}(q)$, hacemos una expansión en Taylor de la exponencial de la siguiente manera, trabajando en el espacio de momentos.

$$
\begin{aligned}
\langle q_{j+1} | \, e^{\frac{-1}{\hbar}\Delta t \hat{H}} \, | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \, \langle q_{j+1} | p_j \rangle \, \langle p_j | \, e^{\frac{-i}{\hbar}\Delta t \hat{H}} \, | q_j \rangle \,, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \, \langle q_{j+1} | p_j \rangle \, \langle p_j | \, 1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t \hat{H} \, | q_j \rangle \,, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t H(q_j; p_j) \right), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar}\Delta t H(q_j;p_j) + \frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)}.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

En donde $H(q_j; p_j)$ representa el Hamiltoniano ya evaluado, y donde simplificamos el elemento infinitesimal de la siguiente manera,

$$
\langle q_{j+1} | p_j \rangle \, \langle p_j | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)/\hbar}. \tag{5.11}
$$

El hecho de que q_j es el valor de la coordenada asociada con el estado q en el tiempo t_j nos permite hacer la siguiente identificación,

$$
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(q_{j+1} - q_j) = \frac{dq_j}{dt} := \dot{q}_j. \tag{5.12}
$$

Usando esto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon[p_j\dot{q}_j - H(p_j,q_j)]}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\left[\frac{i}{\hbar}\epsilon L(p_j,q_j)\right]}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Donde $\mathcal{L}\ (p_j, q_j) = p_j\dot{q}_j{-}H(p_j - q_j)$ es la densidad lagrangiana en la formulación hamiltoniana del sistema clásico.

Los elementos finitos de K se pueden escribir como el producto de N elementos de la forma:

$$\begin{aligned}\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle = \lim_{N\to\infty} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_N}{2\pi\hbar} dq_1\cdots dq_N e^{\frac{i}{\hbar}p_N(q-q_N)} e^{\frac{i}{\hbar}p_{N-1}(q_N-q_{N-1})}\ldots \\ &\cdots e^{\frac{i}{\hbar}p_1(q_2-q_1)} e^{\frac{i}{\hbar}p_0(q_1-q_0)} e^{\frac{-i}{\hbar}\Delta t H(q_N;p_N)}\cdots e^{\frac{-i}{\hbar}\Delta t H(q_0;p_0)}, \\ = \lim_{N\to\infty} &\int_{-\infty}^{\infty} dq_1\cdots dq_N \frac{dp_0\cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{j=0}^{N} p_j(q_{j+1}-q_j)} e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\sum\limits_{j=0}^{N} H(q_j;p_j)},\end{aligned} \tag{5.14}$$

donde $q_0{=}q_a$ y $q_N{=}q_b$. Al desarrollar q_{j+1} en una expansión con respecto a t_j tenemos

$$\begin{aligned}q_{j+1} &= q(t_{j+1}) = q(t_j + \Delta t), \\ &= q(t_j) + \Delta t\dot{q}(t_j), \\ &= q_j + \Delta t\dot{q}_j.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Por otro lado,

$$\lim_{N\to\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\sum\limits_{j=0}^{N}(p_j\dot{q}_j - H(q_j;p_j))} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt(p\dot{q} - H(q,p))} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\mathcal{L}(p,q)} = e^{\frac{i}{\hbar}S[p(t),q(t),t_a,t_b]}. \tag{5.16}$$

De esta manera es como aparece la acción clásica en el elemento de transición. Por otro lado, la medida de la integral de trayectoria de la ec. (5.14) se escribe como

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} dq_1 \cdots dq_N &= \mathscr{D}q, \\ \lim_{N\to\infty} \frac{dp_0 \cdots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} &= \mathscr{D}p. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Sustituyendo los resultados anteriores (5.15), (5.16) y (5.17) en la ec. (5.14), obtenemos que el Kernel K, o bien, la amplitud de transición está dada por

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathscr{D}q \mathscr{D}p \ e^{\frac{i}{\hbar}S}, \tag{5.18}$$

la cual es la integral de trayectoria de Feynman para la amplitud de transición en la mecánica cuántica. Cabe mencionar que una parte esencial para el entendimiento de la integral de trayectoria consiste en comprender el significado de la medida $\mathscr{D}q\mathscr{D}p$.

En esta integral los puntos extremos se encuentran fijos y solo los puntos intermedios son integrados sobre todo el espacio, así cualquier configuración de puntos intermedios da lugar a trayectorias entre los puntos iniciales y finales. Es por ello que integrar sobre todas estas configuraciones es equivalente a sumar sobre todos los caminos que conectan los puntos iniciales y finales; por ende la integral de trayectoria de Feynman simplemente nos dice que la amplitud de transición entre un estado inicial y un estado final es la suma sobre todos los caminos que conectan estos dos puntos, con un factor de peso $e^{\frac{i}{\hbar}S}$. Este factor de peso es algo que en la mecánica cuántica usual no se consideraba, clásicamente sabemos que la acción determina la dinámica del sistema, mientras que en la mecánica cuántica lo que se encuentra es que todas las posibles trayectorias contribuyen a la amplitud de transición.

5.4. Ejemplo

En este ejemplo calcularemos el Kernel de la partícula libre utilizando el método de la integral de trayectoria,

$$K(q_2,t_2;q_1,t_1) = \langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle = \int_{q_1}^{q_2} \mathscr{D}p\mathscr{D}q\; e^{\frac{i}{\hbar}S}. \tag{5.19}$$

Sabemos que para el caso de la partícula libre $S = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{dt}\, \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m}\right)$; entonces,

$$\begin{aligned}\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle &= \int_{q_1}^{q_2} \mathscr{D}p\mathscr{D}q\;\; e^{\int_{t_1}^{t_2} dt\; \frac{i}{\hbar}\left(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}\right)},\\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq_1\,...\,dq_N \frac{dp_0}{(2\pi\hbar)}\,...\,\frac{dp_N}{(2\pi\hbar)}\; e^{\,\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\Delta t(p_j\dot{q}_j-\frac{p_j^2}{2m})}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

En donde,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N}\Delta t\; p_j\dot{q}_j &= \sum_{j=0}^{N}\Delta t\; P_j\,\frac{\Delta q_j}{\Delta t} = \sum_{j=0}^{N}\Delta q_j\; p_j = \sum_{j=0}^{N} p_j\,(q_{j+1}-q_j)\,,\\ &= p_0(q_1-q_0)+p_1(q_2-q_1)+...+p_{n-1}(q_n-q_{n-1})+p_n(q-q_n),\\ &= p_0q_1-p_0q_0+p_1q_2-p_1q_1+...+p_{n-1}\,q_n-p_{n-1}\,q_{n-1}+p_nq-p_nq_n,\\ &= -p_0q_0+q_1(p_0-p_1)+q_2(p_1-p_2)+...+q_n(p_{n-1}-p_n)+p_nq,\\ &= p_nq-p_0q_0+\sum_{j=0}^{N} q_j(p_{j-1}\,p_j).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Sustituimos (5.21) en (5.20); entonces,

$$\langle q_2,t_2|q_1,t_1\rangle = \int_{q_1}^{q_2} dq_1\,...\,dq_N \frac{dp_0}{(2\pi\hbar)}\,...\,\frac{dp_N}{(2\pi\hbar)}\; e^{\frac{i}{\hbar}[p_nq-p_0q_0+\sum_{j=0}^{N}q_j(p_{j-1}\,p_j)-\frac{p_j^2}{2m})]}. \tag{5.22}$$

Aparte tenemos el siguiente término,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_j}{(2\pi\hbar)} e^{\frac{i}{\hbar} q_j (p_{j-1} - p_j)} = \langle p_{j-1} | p_j \rangle = \delta(p_{j-1} - p_j). \tag{5.23}$$

Sustituimos (5.23) en (5.22) y en el tercer renglón usamos que $\Delta t = \frac{t-t_0}{n+1} = \frac{T}{n+1}$ $\Rightarrow T = \Delta t(n+1)$, y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi\hbar)} \cdots \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)}\ \delta(p_0 - p_1) \ldots \delta(p_{n-1} - p_n) e^{\frac{i}{\hbar}[p_n q - p_0 q_0 - \sum_{j=0}^{N} \Delta t \frac{p_j^2}{2m}]}, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)} e^{\frac{i}{\hbar}[p_n q - p_n q_0 - \frac{p_n^2}{2m} \Delta t(n+1)]}, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)} e^{\frac{i}{\hbar}[p_n (q - q_0) - \frac{p_n^2}{2m} T]}, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)} e^{-\frac{iT}{2m\hbar}[p_n^2 - \frac{2m}{T} p_n (q - q_0)]}, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)} e^{-\frac{iT}{2m\hbar}[p_n^2 - \frac{2m}{T} p_n (q - q_0) + \frac{m^2}{T^2}(q - q_0)^2 - \frac{m^2}{T^2}(q - q_0)^2]}, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)} e^{-\frac{iT}{2m\hbar}[p_n - \frac{m}{T}(q - q_0)]^2}\ e^{\frac{im}{2T\hbar}(q - q_0)^2}, \\
&= e^{\frac{im}{2T\hbar}(q - q_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{(2\pi\hbar)} e^{-\frac{iT}{2m\hbar}[p_n - \frac{m}{T}(q - q_0)]^2}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Observemos que se tenemos una integral Gaussiana, cuyo resultado es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_n\ e^{-\frac{iT}{2m\hbar}[p_n - \frac{m}{T}(q - q_0)]^2} = \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{iT}}. \tag{5.25}$$

Por lo tanto, el Kernel de la partícula libre es

$$
\begin{aligned}
K_{part.libre}(q_2, t_2; q_1, t_1) = \langle q_2, t_2; q_1, t_1 \rangle &= e^{\frac{im}{2T\hbar}(q-q_0)^2} \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{iT(2\pi\hbar)^2}}, \\
&= e^{\frac{im}{2T\hbar}(q-q_0)^2} \sqrt{\frac{m}{iT2\pi\hbar}}.
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

El conocer el Kernel de la partícula libre nos permitirá calcular parte de la solución cuántica del oscilador armónico amortiguado. Siguiendo un procedimiento similar, en el siguiente capítulo realizamos el cálculo, en donde haremos uso de transformaciones canónicas que escondan la dependencia explícita del tiempo.

Capítulo 6

Cuantización del oscilador armónico amortiguado

En este capítulo trabajaremos el ejemplo del oscilador armónico amortiguado, haciendo uso de la integral de trayectoria para encontrar su solución. Se va a mostrar que la integral de trayectoria, o kernel del oscilador armónico amortiguado tiene la forma

$$K(q_2, t_2; q_1, t_1) = \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle = \int_{q_1}^{q_2} \mathscr{D}p\mathscr{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} K_{OAA}(0, t_2; 0, t_1). \tag{6.1}$$

En donde la acción S, la cual al realizar las transformaciones canónicas se ve como

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \, (p\dot{q} - H), \\ S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[P\dot{Q} - K + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \right]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Otra forma de generar las transformaciones canónicas, en contraste con la función generadora que utilizamos en el Ejemplo 3 del Capítulo 1, es utilizar

$$F_3(p, Q, t) = -pQe^{-bt/2m} = -pq, \tag{6.3}$$

en donde

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial P} = Qe^{-bt/2m}, \qquad (6.4) \qquad\qquad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = pe^{-bt/2m}. \qquad (6.5)$$

Entonces F_1 se escribe como

$$F_1(q, Q, t) = pq + F_3(p, Q, t). \qquad (6.6)$$

Así, la función F_1 que aparece en el principio de acción resulta ser $F_1 = 0$ y por ende la acción S no se ve afectada por el término de la derivada total que incluye a F_1, por lo cual (6.2) se puede escribir simplemente como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(P\dot{Q} - K\right). \qquad (6.7)$$

Ahora debemos calcular la acción S, para ello retomamos la ec.(2.130) del Capítulo 1, proponemos una $Q = Q_{cl} + Q_q$ conformada por una parte clásica y otra parte cuántica, con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} Q_{cl}(t_1) &= q_1, \\ Q_{cl}(t_2) &= q_2, \end{aligned} \qquad (6.8) \qquad\qquad \begin{aligned} Q_q(t_1) &= 0, \\ Q_q(t_2) &= 0. \end{aligned} \qquad (6.9)$$

Notemos que los bordes son clásicos, es decir Q_{cl} es una trayectoria fija. Al desarrollar términos, la acción (2.130) queda como

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m\dot{Q}^2}{2} - \frac{bQ\dot{Q}}{2} - \left(\frac{k}{2} - \frac{b^2}{8m} \right) Q^2 \right], \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{Q}_{cl} + \dot{Q}_q)^2 - \frac{b}{2}(Q_{cl} + Q_q)(\dot{Q}_{cl} + \dot{Q}_q) - \left(\frac{k}{2} - \frac{b^2}{8m} \right) (Q_{cl} + Q_q)^2 \right], \\
&= S_{cl} + S_q + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\dot{Q}_{cl}\dot{Q}_q - \frac{b}{2}(Q_{cl}\dot{Q}_q + \dot{Q}_{cl}Q_q) - KQ_{cl}Q_q \right],
\end{aligned} \tag{6.10}$$

en donde $K = k - \frac{b^2}{4m}$. Integrando por partes obtenemos una derivada total en el tiempo que por los términos de borde se hace cero, así

$$\begin{aligned}
S &= S_{cl} + S_q + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\dot{Q}_{cl}\dot{Q}_q - \frac{b}{2}(Q_{cl}\dot{Q}_q + \dot{Q}_{cl}Q_q) - KQ_{cl}Q_q \right], \\
&= S_{cl} + S_q + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\dot{Q}_{cl}\dot{Q}_q - \frac{b}{4}\frac{d}{dt}(Q_{cl}^2) + \frac{b}{2}Q_q\dot{Q}_{cl} - \frac{b}{2}\dot{Q}_{cl}Q_q - KQ_{cl}Q_q \right], \\
&= S_{cl} + S_q + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\dot{Q}_{cl}\dot{Q}_q - KQ_{cl}Q_q \right], \\
&= S_{cl} + S_q + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}\left(m\dot{Q}_{cl}\dot{Q}_q - m\ddot{Q}_{cl}Q_q \right) - KQ_{cl}Q_q \right], \\
&= S_{cl} + S_q - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\ddot{Q}_{cl}Q_q + KQ_{cl}Q_q \right], \\
&= S_{cl} + S_q - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\ddot{Q}_{cl} + KQ_{cl} \right] Q_q.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Y con base en el resultado de la ecuación de movimiento (1.132), la acción nos queda como

$$S = S_{cl} + S_q. \tag{6.12}$$

Al resolver la acción S_{cl} obtenemos que

$$
\begin{aligned}
S_{cl} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{m}{2}\dot{Q}_{cl}^2 - \frac{K}{2}Q_{cl}^2 - \frac{b}{2}\dot{Q}_{cl}Q_{cl}\right), \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{m}{2}\dot{Q}_{cl}^2 - \frac{K}{2}Q_{cl}^2 - \frac{b}{4}\frac{d}{dt}(Q_{cl}^2)\right], \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{Q}_{cl}Q_{cl}) - \frac{m}{2}\ddot{Q}_{cl}Q_{cl} - \frac{K}{2}Q_{cl}^2 - \frac{b}{4}\frac{d}{dt}(Q_{cl}^2)\right], \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{Q}_{cl}Q_{cl}) - \frac{b}{4}\frac{d}{dt}(Q_{cl}^2)\right], \\
&= \left[\frac{m}{2}\dot{Q}_{cl}Q_{cl} - \frac{b}{4}Q_{cl}^2\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}\left[\dot{Q}_{cl}(t_2)Q_{cl}(t_2) - \dot{Q}_{cl}(t_1)Q_{cl}(t_1)\right] \\
&- \frac{b}{4}\left[Q_{cl}^2(t_2) - Q_{cl}^2(t_1)\right].
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

Ahora proponemos una solución del tipo

$$
Q_{cl}(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t); \tag{6.14}
$$

sean

$$
\begin{aligned}
A &= C\,\mathrm{sen}(\alpha), \\
B &= C\cos(\alpha).
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

Tomamos Q_{cl} y al argumento de seno le sumamos un cero de la forma ωt_1-ωt_1, así Q_{cl} nos queda como

$$
\begin{aligned}
Q_{cl} &= C\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega t) + C\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\omega t) = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha), \\
&= C\,\mathrm{sen}(\omega t + \omega t_1 - \omega t_1 + \alpha) = C\,\mathrm{sen}[\omega(t - t_1) + (\omega t_1 + \alpha)], \\
&= C\,\mathrm{sen}[\omega(t - t_1)]\cos(\omega t_1 + \alpha) + C\cos[\omega(t - t_1)]\,\mathrm{sen}(\omega t_1 + \alpha), \\
&= C\cos(\omega t_1 + \alpha)\,\mathrm{sen}[\omega(t - t_1)] + C\,\mathrm{sen}(\omega t_1 + \alpha)\cos[\omega(t - t_1)].
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

Notemos que para el caso en el que Q_{cl} se encuentra evaluada en el tiempo t_1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q_{cl1} &= Q_{cl}(t_1) = C\,\text{sen}(\omega t_1 + \alpha), \\ \Rightarrow \dot{Q}_{cl1} &= \dot{Q}_{cl1}(t_1) = \omega C \cos(\omega t_1 + \alpha). \end{aligned} \tag{6.17}$$

De esta manera usando (6.17), la ec.(6.16) nos queda como

$$Q_{cl}(t) = \frac{\dot{Q}_{cl1}}{\omega}\,\text{sen}[\omega(t - t_1)] + Q_{cl1}\cos[\omega(t - t_1)]. \tag{6.18}$$

De la misma manera, usando la solución propuesta inicialmente en (6.14) y las condiciones (6.15), pero ahora sumando en el argumento de seno un cero de la forma ωt_2-ωt_2 obtenemos

$$\begin{aligned} Q_{cl} &= C\,\text{sen}[\omega t + \omega t_2 - \omega t_2 + \alpha] = C\,\text{sen}[\omega(t - t_2) + (\omega t_2 + \alpha), \\ &= C\,\text{sen}[\omega(t - t_2)]\cos(\omega t_2 + \alpha) + C\cos[\omega(t - t_2)]\,\text{sen}(\omega t_2 + \alpha), \\ &= \frac{\dot{Q}_{cl2}}{\omega}\,\text{sen}[\omega(t - t_2)] + Q_{cl2}\cos[\omega(t - t_2)]. \end{aligned} \tag{6.19}$$

En donde usamos que Q_{cl} evaluada en el tiempo t_2 es

$$\begin{aligned} Q_{cl2} &= Q_{cl}(t_2) = C\,\text{sen}(\omega t_2 + \alpha), \\ \Rightarrow \dot{Q}_{cl2} &= \dot{Q}_{cl2}(t_2) = \omega C \cos(\omega t_2 + \alpha). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Ahora, si evaluamos en $t = t_2$ la ecuación (6.18), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q_{cl2} = Q_{cl}(t_2) &= \frac{\dot{Q}_{cl1}}{\omega}\,\text{sen}[\omega(t_2 - t_1)] + Q_{cl1}\cos[\omega(t_2 - t_1)], \\ \Rightarrow \dot{Q}_{cl1} &= \frac{\omega(Q_{cl2} - Q_{cl1}\cos[\omega(t_2 - t_1)])}{\text{sen}[\omega(t_2 - t_1)]} = \frac{\omega}{\text{sen}(\omega T)}[Q_{cl2} - Q_{cl1}\cos(\omega T)], \end{aligned} \tag{6.21}$$

en donde $T = t_2 - t_1$.

De la misma manera para el resultado de la ecuación (6.19) evaluamos $t = t_1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} Q_{cl1} = Q_{cl}(t_1) &= \frac{\dot{Q}_{cl2}}{\omega}\operatorname{sen}[\omega(t_1 - t_2)] + Q_{cl2}\cos[\omega(t_1 - t_2)], \\ \Rightarrow \dot{Q}_{cl2} &= \frac{\omega(Q_{cl1} - Q_{cl2}\cos[\omega(t_1 - t_2)])}{\operatorname{sen}[\omega(t_1 - t_2)]} = \frac{-\omega}{\operatorname{sen}(\omega T)}[Q_{cl1} - Q_{cl2}\cos(\omega T)]. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Finalmente sustituimos los resultados de las ecuaciones (6.21) y (6.22) en la acción clásica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m}{2}[\dot{Q}_{cl2}Q_{cl2} - \dot{Q}_{cl1}Q_{cl1}] - \frac{b}{4}[Q_{cl2}^2 - Q_{cl1}^2], \\ &= \frac{m}{2}\left\{-\frac{\omega}{\operatorname{sen}(\omega T)}[Q_{cl1} - Q_{cl2}\cos(\omega T)]Q_{cl2} - \frac{\omega}{\operatorname{sen}(\omega T)}[Q_{cl2} - Q_{cl1}\cos(\omega T)]Q_{cl1}\right\} \\ &- \frac{b}{4}[Q_{cl2}^2 - Q_{cl1}^2], \\ &= \frac{m}{2}\left[-\frac{2\omega Q_{cl1}Q_{cl2}}{\operatorname{sen}(\omega T)} + \frac{\omega\cos(\omega T)}{\operatorname{sen}(\omega T)}(Q_{cl2}^2 + Q_{cl1}^2)\right] - \frac{b}{4}(Q_{cl2}^2 - Q_{cl1}^2), \\ &= \frac{m\omega}{2\operatorname{sen}(\omega T)}[\cos(\omega T)(Q_{cl2}^2 + Q_{cl1}^2) - 2Q_{cl1}Q_{cl2}] - \frac{b}{4}(Q_{cl2}^2 - Q_{cl1}^2). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Sustituimos $Q_{cl} = q\ e^{bt/2m}$. Por lo tanto, nuestra acción clásica es

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m\omega}{2\operatorname{sen}(\omega T)}\left[\cos(\omega T)\left(q_2^2 e^{bt_2/m} + q_1^2 e^{bt_1/m}\right) - 2q_1q_2 e^{\frac{b}{2m}(t_1+t_2)}\right] \\ &- \frac{b}{4}\left(q_2^2 e^{\frac{bt_2}{m}} - q_1^2 e^{\frac{bt_1}{m}}\right), \\ S_{cl} &= \frac{m\omega}{2\operatorname{sen}(\omega T)}\left[\cos(\omega T)\left(Q_2^2 + Q_1^2\right) - 2Q_1Q_2\right] - \frac{b}{4}\left(Q_2^2 - Q_1^2\right). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Ahora trabajaremos con la parte cuántica de la integral de trayectoria dada por S_q,

$$\begin{aligned} S_q &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{Q}_q^2 - \frac{K}{2}Q_q^2 - \frac{b}{2}\dot{Q}_q Q_q \right), \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{Q}_q^2 - \frac{K}{2}Q_q^2 - \frac{b}{4}\frac{d}{dt}(Q_q^2) \right), \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{Q}_q^2 - \frac{K}{2}Q_q^2 \right). \end{aligned} \tag{6.25}$$

De esta manera $K_{OAA}(0, t; 0, t_0)$ queda como

$$\begin{aligned} K_{OAA}(0, t_2; 0, t_1) &= \int_{Q_1=0}^{Q_2=0} \mathscr{D}Q\mathscr{D}P\, exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} Q \left(\frac{d^2}{dt^2} - K \right) Q \right] \right), \\ K_{OAA}(0, t_2; 0, t_1) &= \int_{Q_1=0}^{Q_2=0} \mathscr{D}Q\mathscr{D}P\, exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} Q \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{k}{m} + \frac{b^2}{4m^2} \right) Q \right] \right), \\ &= \int_{Q_1=0}^{Q_2=0} \mathscr{D}Q\mathscr{D}P\, exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} Q \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega(t) \right) Q \right] \right), \end{aligned} \tag{6.26}$$

en donde $\omega(t) = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$.

Sea $\psi(t)$ una eigenfunción del operador del oscilador y consideremos la ecuación diferencial (6.27), imponiendo las condiciones iniciales (6.28) y haciendo uso del teorema de Gelfand obtenemos

$$\left(+ \frac{d^2}{dt^2} - \omega(t) \right) \psi(t) = \lambda \psi(t), \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} \psi(t_1) &= 0, \\ \dot{\psi}(t_1) &= 1. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Entonces,

$$\frac{det\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega^{(1)}(t)-\lambda\right)}{det\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega^{(2)}(t)-\lambda\right)}=\frac{\psi^{(1)}(t_2)}{\psi^{(2)}(t_2)}.$$

Si λ=0, entonces (6.29)

$$\frac{det\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega^{(1)}(t)\right)}{\psi_0^{(1)}(t_2)}=\frac{det\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega^{(2)}(t)\right)}{\psi_0^{(2)}(t_2)}=cte.$$

Para el caso siguiente tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega_0\right)\psi_0(t)&=0,\\ \frac{d^2}{dt^2}\psi_0(t)&=\omega_0\psi_0(t).\end{aligned}\tag{6.30}$$

Cuya solución es

$$\psi_0(t)=A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t).\tag{6.31}$$

Usando las condiciones iniciales del teorema de Gelfand:

$$\begin{aligned}\psi_0(t_1)&=A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t_1)+B\cos(\omega_0 t_1)=0,\\ \dot{\psi}_0(t_1)&=A\omega_0\cos(\omega_0 t_1)-B\omega_0\,\mathrm{sen}(\omega_0 t_1)=1.\end{aligned}\tag{6.32}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de (6.32):

$$\begin{aligned}A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t_1)&=-B\cos(\omega_0 t_1),\\ A&=\frac{-B\cos(\omega_0 t_1)}{\mathrm{sen}(\omega_0 t_1)},\end{aligned}\tag{6.33}$$

sustituyendo A en $\psi_0(t_1)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{-B\cos(\omega_0 t_1)}{\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)}\,\omega_0\cos(\omega_0 t_1) - B\,\omega_0\operatorname{sen}(\omega_0 t_1) = 1,&\\ B = -\frac{1}{\omega_0}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)}{\cos(\omega_0 t_1)^2+\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)^2}\right],&\\ B = -\frac{1}{\omega_0}[\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)].&\end{aligned} \tag{6.34}$$

Y ahora sustituimos B en (6.33); entonces,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\cos(\omega_0 t_1)}{\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)}\left(\frac{-1}{\omega_0}\right)[\operatorname{sen}(\omega_0 t_1)],\\ A &= \frac{\cos(\omega_0 t_1)}{\omega_0}.\end{aligned} \tag{6.35}$$

Ahora sustituimos las constantes A y B de (6.34) y (6.35) en la solución de (6.31), y así ψ_0 nos queda como

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}[\omega_0(t-t_1)]. \tag{6.36}$$

Finalmente sustituimos este resultado en el teorema de Gelfand (6.29):

$$\begin{aligned}\frac{det\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega(t)\right)}{\psi_0(t)} &= cte = C,\\ \Rightarrow det\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega(t)\right) &= \frac{c}{\omega_0}\operatorname{sen}[\omega_0(t-t_1)].\end{aligned} \tag{6.37}$$

Usando el resultado de (6.26), la integral del argumento de la exponencial la podemos expresar como

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} Q \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega(t)\right) Q\right] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} Q \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega(t)\right) \sum_n a_n \psi_n(t)\right], \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} Q \sum_n a_n \lambda_n \psi_n(t)\right], \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} \sum_n a_m \psi_m(t) \sum_n a_n \lambda_n \psi_n(t)\right], \\
&= \frac{m}{2} \sum_n a_n^2 \lambda_n,
\end{aligned} \tag{6.38}
$$

en donde $Q(t)=\sum_n a_n\psi_n(t)$ y $a_n=\langle\psi_n Q(t)\rangle$.

Sean $Q(t) = a_n$ y $\mathscr{D}Q(t) = J\ \Pi da_n$, donde suponemos que $J = 1$ ya que se trata de una transformación canónica; sin embargo, más adelante veremos que la implementación de una transformación canónica conlleva detalles que deben desarrollarse más minuciosamente, para que así la información obtenida pueda utilizarse en el límite semiclásico.

Suistituimos los resultados anteriores en la ecuación de la parte cuántica del kernel (6.26), obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
K_{OAA} &= \int_{Q_1}^{Q_2} J\Pi da_n e^{\frac{im}{2\hbar}\sum_n a_n^2\lambda_n}, \\
&= J\Pi\sqrt{\frac{2\pi i}{m\lambda n}} = C_2\Pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} = \frac{C_2}{\sqrt{det\left[\frac{d^2}{dt^2} - \omega(t)\right]}}.
\end{aligned} \tag{6.39}
$$

Usando el resultado del determinante (6.29) obtenemos

$$
\begin{aligned}
K_{OAA}(0, t_2; 0, t_1) &= \frac{c_2}{\sqrt{\frac{c}{\omega_0}\,\mathrm{sen}[\omega_0(t_2 - t_1)]}}, \\
&= c_3\sqrt{\frac{\omega_0}{\mathrm{sen}[\omega_0(t_2 - t_1)]}}.
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

Usando el kernel de una partícula libre,

$$K_{PL} = \sqrt{\frac{m}{(t_2 - t_1)2\pi i\hbar}} = \sqrt{\frac{m}{T2\pi i\hbar}}, \tag{6.41}$$

obtenemos que la parte cuántica del kernel del oscilador armónico amortiguado es

$$K_{OAA}(0, t_2; 0, t_1) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \operatorname{sen}(\omega T)}}. \tag{6.42}$$

No obstante, cabe resaltar que la medida de la integral también cambia al hacer la transformación canónica, al considerar esto vamos a obtener un término extra en el kernel del oscilador armónico amortiguado. A continuación abordaremos este problema.

6.1. Transformación de la medida de la transformación canónica

En base a las transformaciones canónicas que realizamos (6.4) y (6.5). Siguiendo el método para calcular la transformación de la medida de la integral que se hace en [5], partimos de hacer un análisis al rededor del punto fijo Q, para ello tomemos $\Delta Q_j = Q_j - Q_{j-1}$, en donde

$$Q_j = \bar{Q}_j + \frac{\Delta Q_j}{2}, \tag{6.43}$$

$$Q_{j-1} = \bar{Q}_j - \frac{\Delta Q_j}{2}. \tag{6.44}$$

En caso de que las transformaciones no nos fuesen dadas, podemos suponer que nos es posible generar una función tal que $q = f(Q)$, de manera general. Expandimos $f(Q_j)$ y $f(Q_{j-1})$ alrededor del punto medio $\bar{Q}_j = \frac{Q_j + Q_{j-1}}{2}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_j &= f(Q_j) = f(\bar{Q}_j + \frac{\Delta Q_j}{2}), \\ &= f(\bar{Q}_j) + \frac{1}{2} f'(\bar{Q}_j)\Delta Q_j + \frac{1}{8} f''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2 + \frac{1}{48} f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^3 + ... \end{aligned} \tag{6.45}$$

y

$$\begin{aligned} q_{j-1} &= f(Q_{j-1}) = f(\bar{Q}_j - \frac{\Delta Q_j}{2}), \\ &= f(\bar{Q}_j) - \frac{1}{2} f'(\bar{Q}_j)\Delta Q_j + \frac{1}{8} f''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2 - \frac{1}{48} f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^3 + ... \end{aligned} \tag{6.46}$$

Por otro lado, para los momentos podemos usar

$$p_j = P_j \frac{\Delta Q_j}{\Delta q_j}. \tag{6.47}$$

Ahora calculamos Δq_j:

$$\begin{aligned} \Delta q_j = q_j - q_{j-1} &= f(\bar{Q}_j) + \frac{1}{2} f'(\bar{Q}_j)\Delta Q_j + \frac{1}{8} f''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2 + \frac{1}{48} f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^3 + ... \\ &- \left[f(\bar{Q}_j) - \frac{1}{2} f'(\bar{Q}_j)\Delta Q_j + \frac{1}{8} f''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2 - \frac{1}{48} f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^3 + ... \right], \\ &= f'(\bar{Q}_j)\Delta Q_j + \frac{1}{24} f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^3 + ... \end{aligned} \tag{6.48}$$

Sustituimos el resultado anterior en (6.47):

$$
\begin{aligned}
p_j &= P_j \frac{\Delta Q_j}{f'(\bar{Q}_j)\Delta Q_j + \frac{1}{24}f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^3 + ...}, \\
&= P_j \frac{1}{f'(\bar{Q}_j) + \frac{1}{24}f'''(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2 + ...}, \\
&= P_j \left[\frac{1}{f'(\bar{Q}_j)} - \frac{1}{24}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{[f'(\bar{Q}_j)]^2}(\Delta Q_j)^2 + ... \right].
\end{aligned} \tag{6.49}
$$

Por lo tanto,

$$
p_j = P_j \frac{1}{f'(\bar{Q}_j)} \left[1 - \frac{1}{24}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{f'(\bar{Q}_j)}(\Delta Q_j)^2 \right]. \tag{6.50}
$$

Ahora veamos que pasa con la transformación de la medida, partiremos de

$$
q_j = f(Q_j) \Rightarrow dq_j = \frac{\partial f}{\partial Q_j} dQ_j = f'(Q_j) dQ_j; \tag{6.51}
$$

entonces,

$$
\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = dq_1 ... dq_{N-1} = f'(Q_1)f'(Q_2)...f'(Q_N)dQ_1 dQ_2 ... dQ_{N-1}. \tag{6.52}
$$

Reescribimos el resultado anterior como

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} & \sqrt{f'(Q_1)f'(Q^a)}\sqrt{f'(Q_2)f'(Q_1)} ... \\
& \sqrt{f'(Q_{N-1})f'(Q_{N-2})}\sqrt{f'(Q^b)f'(Q_{N-1})} dQ_1 dQ_2 ... dQ_{N-1},
\end{aligned} \tag{6.53}
$$

en donde

$$f'(Q^b) = f'(Q_N), \qquad (6.54) \qquad\qquad f'(Q^a) = f'(Q_0). \qquad (6.55)$$

Por lo tanto, obtenemos lo siguiente,

$$\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} \prod_{j=1}^{N} \left[\sqrt{f'(Q_j)f'(Q_{j-1})}\right] \prod_{j=1}^{N-1} (dQ_j)\,, \tag{6.56}$$

en donde el término $\frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}}$ es un factor de normalización que elimina los términos de borde. Ahora expandimos $f'(Q_j)$ y $f'(Q_{j-1})$ alrededor de $\bar{Q}_j$:

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = {}& \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} \\ & \prod_{j=1}^{N} \left[\sqrt{f'(\bar{Q}_j)} + \frac{1}{4}\frac{f''(\bar{Q}_j)}{\sqrt{f'(\bar{Q}_j)}}\Delta Q_j + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{\sqrt{f'(\bar{Q}_j)}} - \frac{1}{4}\frac{[f''(Q_j)]^2}{\sqrt[3]{f'(Q_j)}}\right)(\Delta Q_j)^2\right] \\ & \left[\sqrt{f'(\bar{Q}_j)} - \frac{1}{4}\frac{f''(\bar{Q}_j)}{\sqrt{f'(\bar{Q}_j)}}\Delta Q_j + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{\sqrt{f'(\bar{Q}_j)}} - \frac{1}{4}\frac{[f''(Q_j)]^2}{\sqrt[3]{f'(Q_j)}}\right)(\Delta Q_j)^2\right] \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j\end{aligned} \tag{6.57}$$

Lo cual, al desarrollar y al considerar únicamente los términos de hasta segundo orden en ΔQ_j, obtenemos

$$\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} \prod_{j=1}^{N} f'(\bar{Q}_j)\left(1 - \frac{1}{8}\lambda(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2\right) \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j, \tag{6.58}$$

donde

$$\lambda(\bar{Q}_j) = \left(\frac{f''(\bar{Q}_j)}{f'(\bar{Q}_j)}\right)^2 - \frac{f'''(\bar{Q}_j)}{f'(\bar{Q}_j)}. \tag{6.59}$$

Y ahora, de (6.50) obtenemos

$$dq_j = dQ_j \frac{1}{f'}\left[1 - \frac{1}{24}\frac{f'''}{f'}(\Delta P_j)^2\right]. \tag{6.60}$$

Combinamos (6.58) y (6.60) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{(2\pi\hbar)^N} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j &= \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} \prod_{j=1}^{N} f'(\bar{Q}_j)\left[1 - \frac{1}{8}\lambda(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2\right] \\
&\quad \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{dP_j}{(2\pi\hbar)^N}\frac{1}{f'(\bar{Q}_j)}\left[1 - \frac{1}{24}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{f'(\bar{Q}_j)}(\Delta Q_j)^2\right], \\
= \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} \prod_{j=1}^{N} \frac{dP_j}{(2\pi\hbar)^N} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j &\left[\, 1 - \frac{1}{8}\lambda(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2 - \frac{1}{24}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{f'(\bar{Q}_j)}(\Delta Q_j)^2 + ...\right],
\end{aligned} \tag{6.61}$$

si despreciamos los términos de segundo orden en ΔQ_j obtenemos

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{(2\pi\hbar)^N} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}} \prod_{j=1}^{N} \frac{dP_j}{(2\pi\hbar)^N} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j. \tag{6.62}$$

Para el caso continuo consideramos

$$\mathscr{D}Q = \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j, \tag{6.63}$$

$$\mathscr{D}P = \prod_{j=1}^{N} \frac{dP_j}{(2\pi\hbar)^N}, \tag{6.64}$$

$$\mathscr{D}q = \prod_{j=1}^{N-1} dq_j, \tag{6.65}$$

$$\mathscr{D}p = \prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{(2\pi\hbar)^N}. \tag{6.66}$$

De esta manera la transformación de la medida de la integral se puede obtener de la siguiente relación,

$$\mathscr{D}q\mathscr{D}p = \frac{1}{\sqrt{f'(Q^b)f'(Q^a)}}\mathscr{D}Q\mathscr{D}P. \tag{6.67}$$

Como sabemos que $q = f(Q)$ debe existir para el caso general en donde no conocemos las transformaciones canónicas explícitamente; en nuestro caso sí las conocemos, así la función $f(Q)$ es

$$\begin{aligned} q = f(Q) &= Qe^{-bt/2m}, \\ \Rightarrow f'(Q) &= e^{-bt/2m}, \end{aligned} \tag{6.68}$$

donde $f'(Q^a) = e^{-bt_1/2m}$ y $f'(Q^b) = e^{-bt_2/2m}$.

Por lo tanto, la transformación de la medida de nuestro ejemplo es

$$\mathscr{D}q\mathscr{D}p = \frac{1}{\sqrt{e^{-bt_1/2m}\ e^{-bt_2/2m}}}\mathscr{D}Q\mathscr{D}P = e^{b(t_1+t_2)/4m}\mathscr{D}Q\mathscr{D}P. \tag{6.69}$$

Finalmente, podemos escribir el kernel (6.1) de manera completa, agregando el término que resulta de la transformación de la medida de la integral. Juntando los resultados (6.69), (6.42) y (6.24) obtenemos

$$\begin{aligned} K_{OAA}(q_2, t_2; q_1, t_1) =& e^{b(t_1+t_2)/4m}\ exp\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{2\,\text{sen}(\omega T)}\right)[\cos(\omega T)(q_2^2\ e^{bt_2/m} + q_1^2\ e^{bt_1/m}) \\ & - 2q_1q_2\ e^{\frac{b}{2m}(t_1+t_2)}]\frac{b}{4}(q_2^2\ e^{bt_2/m} - q_1^2\ e^{bt_1/m})\}\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\text{sen}(\omega T)}}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Resultado que comparamos con el que ya ha sido previamente obtenido en [4] por otro método, obteniendo el mismo resultado.

Capítulo 7

Conclusiones

Este trabajo se centró en el estudio de sistemas no conservativos desde dos perspectivas; la versión clásica y la cuantización de este sistema. En la parte clásica trabajamos particularmente con el oscilador armónico amortiguado. En primera instancia utilizamos el método de Dirac, entendiéndolo como un enfoque preliminar a la cuantización, durante el desarrollo de este método introducimos la idea de la reparametrización del tiempo para estudiar la constricción del sistema y además esconder la dependencia explícita del tiempo en el Lagrangiano. Sin embargo, nos encontramos con un problema de ordenamiento y que el Hamiltoniano total se hacía cero debido a que éste coincidía con la constricción de sistema. Lo cual nos motivó a proseguir en la cuantización por medio del método de la integral de trayectoria.

Posteriormente continuamos con el tratamiento clásico, dando cierta importancia a la reparametrización del tiempo que realizamos inicialmente; ya que el introducir una nueva dimensión temporal al sistema dio lugar a un espacio fase extendido. Analizamos las simetrías del sistema no conservativo en este espacio extendido, donde el tiempo original t se promovió a una nueva variable y se introdujo un tiempo nuevo τ como parámetro. Esto permitió llevar al sistema no conservativo al espacio extendido de tal manera que éste se volvió conservativo, ya que el flujo Hamiltoniano en este nuevo espacio fase se preservaba a lo largo del nuevo parámetro de tiempo. Un punto importante a destacar es que al calcular la carga de Noether, la cantidad conservada resultó ser el nuevo Hamiltoniano inducido por la transformación canónica.

Por otro lado, realizamos una generalización del principio de acción de Hamilton a los sistemas no conservativos, basándonos en la formulación hecha inicialmente por Galley en [2]. Modificamos el principio variacional en los términos de borde, donde las variaciones se hicieron únicamente sobre q.

Esta reformulación nos permite tener un principio de acción consistente y general para los sistemas no conservativos.

Volviendo a la motivación de la cuantización por la integral de trayectoria, proseguimos sobre esta línea, implementando el uso de las transformaciones canónicas para quitar la dependencia explícita del tiempo. Al realizar estas transformaciones, surgió un término extra proveniente de la transformación de la medida de la integral. Al comparar el resultado que obtuvimos con el que previamente ya se había encontrado mediante un método diferente, observamos que los resultados eran los mismos. De esta manera comprobamos la validez del método utilizado en este trabajo.

Finalmente, los resultados obtenidos motivan a hacer un estudio posterior en diversos aspectos; uno de ellos sería por ejemplo, el estudio geométrico del espacio fase visto como una variedad simpléctica, a su vez podríamos realizar un estudio del espacio fase original y extendido a nivel cuántico. El método que utilizamos bien podría implementarse en las teorías de campo con parámetros dependientes del tiempo, por ejemplo un campo escalar en una métrica de FRW, dicho problema se reduce al usar un tiempo conforme al de un campo escalar con masa dependiente del tiempo [16].

Bibliografía

[1] Antonio García Zenteno, Luis F. Urrutia y J. David Vergara y Rodolfo P. Martínez *Introducción a la cuantización de teorías de norma empleando el método BRST-BFV*, Revista Mexicana de Física 40, No. 3, págs. 476-498, 1994.

[2] Chad R. Galley, *Classical Mechanics of Nonconservative Systems*, Physical Review Letters 110, Abril 2013.

[3] Chad R. Galley, David Tsang y Leo C. Stein *The principle of stationary nonconservative action for clasical mechanics and field theories*, arXiv:1412.3082, Diciembre 2014.

[4] Christopher C. Gerry, *On the path integral quantization of the damped harmonic oscillator*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 25, No. 6, págs. 1820-1822, Enero 1984.

[5] Christopher C. Gerry, *Remarks on canonical transformations in phase-space path integrals*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 24, No. 4, págs. 874-877, Abril 1983.

[6] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon y Thomas F. George *The quantum damped harmonic oscillator*, Physics Reports 362, págs. 63-192, 2002.

[7] Gerald Jay Sussman y Jack Wisdom conMeinhard E. Mayer *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*, Ed. The MIT Press.

[8] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko *Classical Mechanics*, Ed. Addison Wesley, 3ra edición.

[9] Ian C. Percival y D. Richards *Introduction to dynamics*, Cambridge University Press, 1982.

[10] J. L. Gervais y A. Jevicki, *Point canonical transformations in the path integral*, Nuclear Physics B110, págs. 93-112, 1976.

[11] Kurt Sundermeyer *Lecture Notes in Physics, Constrained Dynamics*, Ed. Springer, 1982.

[12] Marc Henneaux y Claudio Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Ed. Princeton University Press.

[13] Paul A. M. Dirac *Lectures on Quantum Mechanics*, Ed. Dover Publications.

[14] Richard P. Feynman y Albert R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path integrals*, Ed. Dover Publications

[15] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Ed. Springer, 2da edición.

[16] V. Mukhanov y S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press, 2007.

[17] W. Dittrich, y M. Reuter *Classical and Quantum Dynamics*, Ed. Springer, 3ra edición.